

Российский Национальный комитет
по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Российский фонд фундаментальных исследований
Южный федеральный университет
Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южный научный центр РАН

**VII Всероссийская
(с международным участием)
конференция по механике
деформируемого твердого тела**

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ

г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.

ТОМ I

Ростов-на-Дону
2013

УДК 532.5
ББК 25.25
С 56

Отв. редактор А. О. Ватульян.
Редакторы: Л. М. Зубов, А. В. Наседкин, А. В. Попов, А. Н. Соловьев,
М. И. Чебаков, А. С. Юдин.

Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.: в 2 т. Т. I. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2013. – 268 с.
ISBN 978-5-9275-1146-4
ISBN 978-5-9275-1147-1 (1 том)

Сборник содержит научные доклады, представленные на VII Всероссийскую (с международным участием) конференцию по механике деформируемого твердого тела Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.).

В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности, в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, в теории пластичности, механике разрушения, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

Программный комитет

Аннин Б. Д., Бабешко В. А., Баженов В. Г., Белоконь А. В., Ватульян А. О., Гольдштейн Р. В., Горячева И. Г., Губайдуллин Д. А., Зубов Л. М., Ильгамов М. А., Индейцев Д. А., Колесников В. И., Коссович Л. Ю., Куликовский А. Г., Липанов А. М., Ломакин Е. В., Любимов Г. А., Манжиров А. В., Матвеев В. П., Морозов Н. Ф., Панин В. Е., Победра Б. Е., Пухначев В. В., Радаев Ю. Н., Тарлаковский Д. В., Устинов Ю. А., Фомин В. М.

Организационный комитет

Карякин М. И., Калинин В. В., Наседкин А. В., Сафроненко В. Г., Сумбатьян М. А., Чебаков М. И., Юдин А. С.

Оригинал-макет подготовлен в системе LaTeX Поповым А. В.
Статьи публикуются с файлов-оригиналов, представленных авторами в оргкомитет конференции.

ISBN 978-5-9275-1146-4
ISBN 978-5-9275-1147-1 (1 том)

УДК 532.5
ББК 25.25

VII Всероссийская (с международным участием) конференция по механике деформируемого твердого тела (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 13-01-06088

Содержание

Абросимов Н. А., Елесин А. В., Лазарев Л. Н., Новосельцева Н. А. Численное моделирование влияния структуры армирования на предельную деформируемость и прочность композитных цилиндрических оболочек при нестационарных воздействиях	7
Агаян К. Л. Контактная задача о взаимодействии пересекающихся стрингеров и трещин в упругой плоскости	12
Азаров А. Д., Азаров Д. А. Описание больших сдвиговых деформаций упругой среды с помощью трехмерной механической модели	17
Акопьян В. А., Калинин В. В., Шевцов С. Н. Вероятностный подход к задаче идентификации повреждения в балочной конструкции с использованием зашумленных данных о кривизне мод колебаний . . .	22
Альтенбах Х., Еремеев В. А., Наседкин А. В. О некоторых подходах к моделированию динамических режимов работы пьезоэлектрических наноразмерных тел с поверхностными эффектами	27
Ахвердиев К. С., Мукутадзе М. А., Лагунова Е. О. Разработка расчетной модели с учетом зависимости вязкости от давления двухслойной гидродинамической смазки упорного подшипника, обладающего повышенной несущей способностью и демпфирующими свойствами . .	32
Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Федоренко А. Г. О некоторых аномальных явлениях и природных вирусах	36
Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г. Анализ контактного взаимодействия в сильно нелинейной виброударной системе методом продолжения решения по параметру	41
Бажин А. А., Буренин А. А., Мурашкин Е. В. Моделирование процесса ползучести в окрестности одиночного дефекта сплошности в условиях развивающегося пластического течения	46
Баничук Н. В., Барсук А. А., Макеев Е. В., Сеницын А. В. Оптимизация устойчивости неразрезной балки на упругих опорах	51
Батищев В. А., Гетман В. А. Возникновение спиральных течений крови в левом желудочке сердца	55
Батурина Н. Ю., Зеленцов В. Б., Митрин Б. И. Сдвиг упругого полупространства полосовым штампом, перемещающимся с постоянной скоростью в направлении, ортогональном направлению сдвига	60
Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Краковская Е. В. Неклассические теории анизотропных оболочек в задаче о деформации ортотропных круглых пластин	65
Бахарева Е. А., Стружанов В. В. Итерационные методы расчета напряжений в прямоугольных балках из нелинейного материала при чистом изгибе	70

Беликов Н. В., Занимонец Ю. М., Какурин А. М., Павлов В. В., Трепачева Г. Н. Оценка временной стабильности давления срабатывания предохранительных мембранных устройств реакторной установки	75
Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. О статической и динамической неустойчивости тонких стержней	80
Беркович В. Н. Особенности локализации волнового процесса в упругой клиновидной среде	85
Бесчетников Д. А., Львов Г. И. Контактное взаимодействие цилиндрической оболочки с бандажом из композитного материала с учетом деформации сдвига	90
Богачева М. О. Использование методов временного и детренд анализа для исследования кардиосигналов	95
Боев Н. В. Явные выражения перемещений в дифракции ультразвуковых волн на неплоских граничных поверхностях упругих тел	100
Бочарова О. В., Анджинович И. Е. Моделирование волновых полей на поверхности тел, ослабленных наличием дефектов	105
Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Огороков Е. П., Павлова Л. Н. Исследование физико-механических свойств облегченного бетона на заполнителях из горелых пород	110
Буханько А. А., Лошманов А. Ю., Хромов А. И. Обобщение теорий пластического течения и малоциклового усталости на механику разрушения	115
Бычков А. А. Расчет распределения Ge в SiGe пленке на Si подложке под действием дислокационных петель и дислокаций несоответствия	120
Васильева Ю. О., Сильвестров В. В. Контакт берега межфазной трещины с жестким штампом	125
Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Моделирование предварительного напряженного состояния и его реконструкция по данным акустического зондирования	130
Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Об одной схеме идентификации слоистых ФГМ с учетом вязкости	135
Ворона Ю. В., Козак А. А., Чененко Е. С. Двумерное НДС упругого массива с двумя отверстиями при импульсном нагружении	139
Гиниятуллин Р. Р., Якупов Н. М. Влияние сред и физических полей на механические характеристики тонкостенных элементов	144
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Евдокимов А. А. Волновой неразрушающий контроль скрытых дефектов и очагов коррозии в слоистых металлополимерных материалах	149
Глушков Е. В., Ламмеринг Р., Еремин А. А., Мякишева О. Н. Ультразвуковая неразрушающая методика определения эффективных упругих модулей слоистых анизотропных композитных материалов	154

Глушкова Н.В., Фоменко С.И. Эффект эстафетной передачи энергии между модами бегущих волн в упругом полупространстве с внутренним каналом	159
Голуб М.В., Дорошенко О.В. Моделирование зон непрочности и концентрации микродефектов на плоскопараллельных интерфейсах	164
Голуб М.В., Фоменко С.И., Александров А.А. Моделирование динамики разных типов слоистых фононных кристаллов при распространении волн и рассеянии на отслоениях	169
Горячева И.Г. Моделирование изменения формы и напряженного состояния тел при фреттинге	174
Гукасян Л.С. Об определении переменных модулей упругости на основе акустического зондирования	175
Дац Е.П., Мокрин С.Н., Мурашкин Е.В. Расчет температурных напряжений в условиях пластического течения и разгрузки полого цилиндра	179
Дедков Д.В., Ташкинов А.А. Коэффициенты концентрации напряжений в слое тканого композита полотняного плетения с поликристаллической матрицей	184
Диденко А.В., Сыромятников П.В. Определение параметров внутренних полостей в упругом слое	189
Еремеев В.В. О потере устойчивости трехслойной нелинейно упругой плиты с предварительно напряженным средним слоем	193
Зайцев А.В., Исаев О.Ю., Караваев Д.М., Смирнов Д.В., Ханов А.М. Моделирование режимов эксплуатации колец из терморасширенного графита в кранах с уплотнением по штоку	198
Зайцев А.В., Кокшаров В.С., Соколкин Ю.В. Теорема о свойствах случайных полей напряжений и деформаций в высокопористых металлических пенах, керамиках и биокерамиках	203
Залётов В.В., Залётов С.В., Хапилова Н.С. Распределение перемещений на границе изотропного полупространства при упругом закреплении его поверхности вне круговой области приложения нормальной нагрузки	208
Зеленина А.А. Нелинейный изгиб призматического бруса с распределенными дислокациями	213
Зеленцов В.Б. Динамическая контактная задача о движении плоского штампа по границе упругой полуплоскости	218
Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Модель нестационарной механоадифузии для двухкомпонентного слоя	223
Зубов Л.М. Однородные универсальные деформации для микрополяризованных изотропных упругих тел	228
Зубов Л.М., Филиппова Л.М. Большие деформации толстостенной сферической оболочки с распределенными краевыми дислокациями . .	233

Зуев Л. Б., Баранникова С. А., Данилов В. И. Двухкомпонентная модель пластического течения: локализация, неустойчивость и прогнозирование разрушения	238
Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Петров А. Н., Ипатов А. А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела	243
Игумнов Л. А., Ратаушко Я. Ю., Аменицкий А. В., Белов А. А. Применение метода гранично-временных элементов для моделирования краевых задач динамики трехмерных упругих и пороупругих тел . . .	247
Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А., Семенов Б. Н. Устойчивость бесконечной балки Бернулли–Эйлера, связанной с неоднородным упругим основанием	251
Карапетьян Г. Я., Днепровский В. Г., Богданов М. И. Беспроводной датчик температуры на поверхностных акустических волнах с кодовыми отражателями	252
Карпинский Д. Н. Расчет влияния взаимодействия зонд–образец на динамические характеристики микроконсоли атомно-силового микроскопа под действием теплового шума	257
Карякин М. И., Шубчинская Н. Ю. Влияние внутренних напряжений на изменение длины нелинейно-упругого цилиндра	262

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНУЮ ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

**Абросимов Н. А., Елесин А. В., Лазарев Л. Н.,
Новосельцева Н. А.**

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Рассматривается методика численного решения задач динамического деформирования композитных цилиндрических оболочек, ориентированная на анализ их предельной деформируемости и прочности в зависимости от углов армирования, последовательности укладки слоев и интенсивности нагружения.

Отнесем цилиндрическую оболочку длиной L и радиусом R к системе координат α_i ($i = \overline{1,3}$): α_1 — направлена вдоль образующей; α_2 — по окружности; α_3 — по внешней нормали к срединной поверхности. Коэффициенты Ламе и главные кривизны равны $H_1 = Z_1 = 1$, $H_2 = Z_2 = 1 + k_2\alpha_3$, $H_3 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$.

Предполагается, что цилиндрическая оболочка состоит из нерегулярного набора слоев различных композитных материалов. Каждый композитный слой образован перекрестной намоткой однонаправленного композитного материала. Кинематическая модель деформирования многослойного гибридного пакета основывается на неклассической теории оболочек. Для этого компоненты вектора перемещений аппроксимируются конечными суммами по толщине многослойного пакета [1]

$$u_i(\alpha_1, \alpha_3, t) = \sum_{n=0}^N u_i^n(\alpha_1, t) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

где $x = 2\alpha_3/h$; h — толщина оболочки; $u_i^n(\alpha_1, t)$ — искомые функции; t — время, $\left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$ — ортонормированные полиномы Лежандра.

Формулировка геометрических зависимостей базируются на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости в криволинейных координатах [2], которые с учетом (1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{n=0}^N \frac{\partial u_1^n}{\partial \alpha_1} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x) + \frac{1}{2} \omega_2^2, \\ e_{22} &= \frac{k_2}{z_2} \sum_{n=0}^N u_3^n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x), \\ e_{33} &= \frac{2}{h} \sum_{n=0}^N u_3^n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P'_n(x), \end{aligned} \quad (2)$$

$$e_{13} = \frac{2}{h} \sum_{n=0}^N u_3^n (n + \frac{1}{2})^{1/2} P_n'(x) + \sum_{n=0}^N \frac{\partial u_3^n}{\partial \alpha_1} (n + \frac{1}{2})^{1/2} P_n(x),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{h} \sum_{n=0}^N u_1^n (n + \frac{1}{2})^{1/2} P_n'(x) + \sum_{n=0}^N \frac{\partial u_3^n}{\partial \alpha_1} (n + \frac{1}{2})^{1/2} P_n(x) \right),$$

где $P_n'(x)$ — производные от полиномов Лежандра.

Связь между тензорами напряжений и деформаций устанавливается на основе закона Гука для ортотропного тела в сочетании с теорией эффективных модулей. Определяющие соотношения для симметричных смежных слоев композитной оболочки запишутся в виде

$$\sigma_{ii} = \sum_{j=1}^3 C_{ij} e_{ii} \quad (i = \overline{1,3}), \quad \sigma_{13} = G_{13} e_{13}, \quad (3)$$

где C_{ij}, G_{13} — эффективные жесткостные характеристики. При этом допускается локальное разрушение элементарных слоев в пакете многослойного композита.

Модель деградации жесткостных характеристик многослойного пакета формулируется на базе критерия максимальных напряжений, вычисленных в осях ортотропии слоя. В процессе деформирования и трещинообразования связующего предполагается жесткое сцепление между соседними слоями. Многослойный пакет находится в условиях объемного напряженного состояния. Если в процессе деформирования одна или несколько компонент тензора напряжений достигают предела прочности при растяжении, сжатии или сдвиге, то в этих направлениях или плоскостях элементарного слоя жесткостные характеристики зануляются. В результате разрушения отдельных элементарных слоев композита происходит перераспределение напряжений между слоями, а многослойный пакет продолжает оказывать сопротивление дальнейшему деформированию.

Для построения энергетически согласованной разрешающей системы уравнений движения оболочки используем принцип возможных перемещений [3], который для внутреннего нагружения и свободных торцов оболочки запишется в виде

$$\int_0^L \sum_{n=0}^N \left[M_{11}^n \frac{\partial (\delta u_1^n)}{\partial \alpha_1} + (M_{13}^n + N_{11}^n) \delta u_1^n + (M_{13}^n - N_{11}^n) \frac{\partial (\delta u_1^n)}{\partial \alpha_1} + (k_2 M_{22}^n + M_{33}^n) \delta u_3^n \right] d\alpha_1 +$$

$$+ \int_0^L \sum_{n=0}^N \left[\left(\sum_{m=0}^N A_m^n \ddot{u}_1^m \right) \delta u_1^n + \left(\sum_{m=0}^N A_m^n \ddot{u}_3^m \right) \delta u_3^n \right] d\alpha_1 - \int_0^L \sum_{n=0}^N F_3^n \delta u_3^n d\alpha_1 = 0, \quad (4)$$

где

$$M_{11}^n = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma_{11} Z_2(n + 1/2)^{1/2} P_n(x) dx, \quad M_{22}^n = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma_{22} (n + 1/2)^{1/2} P_n(x) dx,$$

$$\begin{aligned}
M_{13}^n &= \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma_{13} Z_2 (n + 1/2)^{1/2} P_n(x) dx, & M_{13}^m &= \int_{-1}^{+1} \sigma_{13} Z_2 (n + 1/2)^{1/2} P_n'(x) dx, \\
N_{11}^n &= \frac{h}{4} \int_{-1}^{+1} \sigma_{11} Z_2 \omega_2 (n + 1/2)^{1/2} P_n(x) dx, & N_{11}^m &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma_{11} Z_2 \omega_2 (n + 1/2)^{1/2} P_n'(x) dx, \\
M_{33}^n &= \int_{-1}^{+1} \sigma_{33} Z_2 (n + 1/2)^{1/2} P_n(x) dx,
\end{aligned}$$

$$A_n^n = \rho \frac{h}{2}, \quad (n = \overline{0, N}), \quad A_{n+1}^n = A_n^{n+1} = \rho \frac{k_2 h^2}{4} \frac{(n+1)}{\sqrt{4n^2 + 8n + 3}}, \quad (n = \overline{0, N-1}),$$

$$A_m^n = 0 \quad \text{при } n \neq m, \quad m, n = \overline{0, N}, \quad F_3^n = (n + 1/2)^{1/2} (-1)^n p_3 (1 - k_2 h/2),$$

ρ — плотность материала оболочки; p_3 — интенсивность импульса внутреннего давления.

Выполняя в вариационном уравнении (4) интегрирование по частям и учитывая независимость вариаций, получим уравнения движения цилиндрической оболочки и естественные динамические граничные условия. Дополняя полученные соотношения необходимым числом начальных условий получим замкнутую систему уравнений для анализа нестационарных процессов деформации композитных цилиндрических оболочек, нагруженных импульсом внутреннего давления в неклассической постановке.

Численный метод решения сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме [1].

В расчетах импульс давления задавался с помощью эмпирической зависимости

$$p_3(\alpha_1, t) = 0,35mq/l^3 \quad \text{при } t \leq 0,35l/\sqrt{q},$$

$$p_3(\alpha_1, t) = 0 \quad \text{при } t > 0,35l/\sqrt{q},$$

где q — теплотворная способность ВВ; l — расстояние от центра заряда до точки внутренней поверхности оболочки; m — масса заряда.

Оболочка имела следующие размеры: длину $L = 4R$, радиус внутренней поверхности $R = 0,15$ м, толщину $h = 0,009$ м. Физико-механические характеристики однонаправленного композитного материала были равны $E_1 = 9,9$ ГПа, $E_2 = 54,1$ ГПа, $G_{12} = G_{23} = 3,42$ ГПа, $G_{13} = 3,57$ ГПа, $\rho = 2,013 \cdot 10^3$ кг/м³.

Результаты численного анализа влияния углов армирования и схемы чередования слоев на окружные деформации в центральном сечении на внешней поверхности оболочки представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 приведены окружные деформации, отнесенные к координатам, связанным с направлением армирования, в зависимости от углов армирования в диапазоне $\pm 30^\circ \div 90^\circ$.

На рис. 2 показаны зависимости, отражающие влияние схемы чередования спиральных и кольцевых слоев.

Анализ полученных расчетных данных показал, что динамическая реакция оболочки намоточного типа существенно зависит как от угла, так и от последовательности укладки слоев. Варьируя эти параметры, можно в разы уменьшить величину максимальных окружных деформаций внешней поверхности оболочки

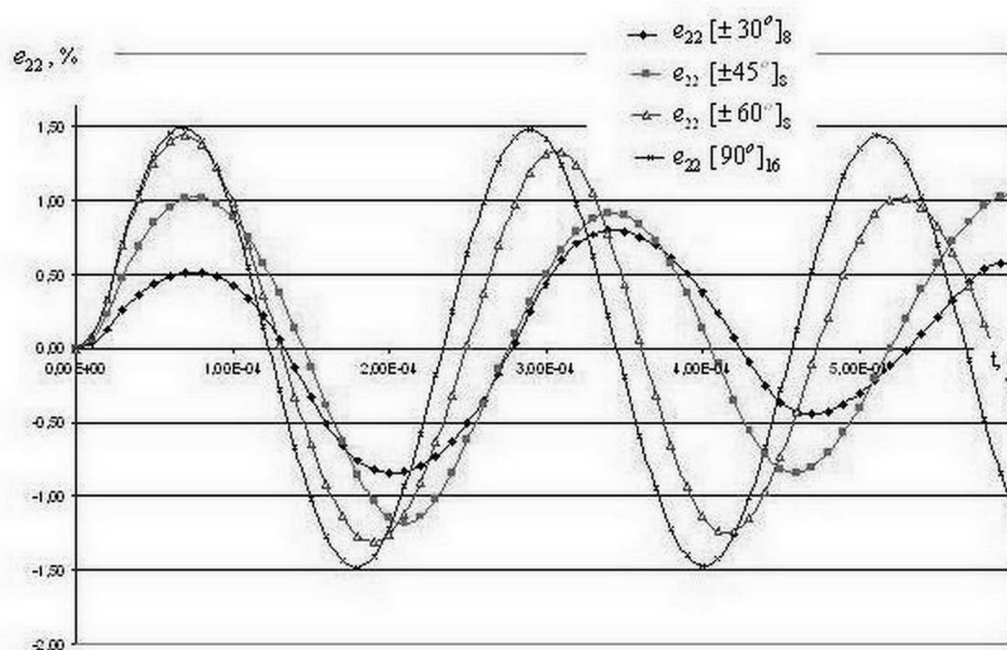


Рисунок 1 – Окружные деформации в зависимости от углов армирования

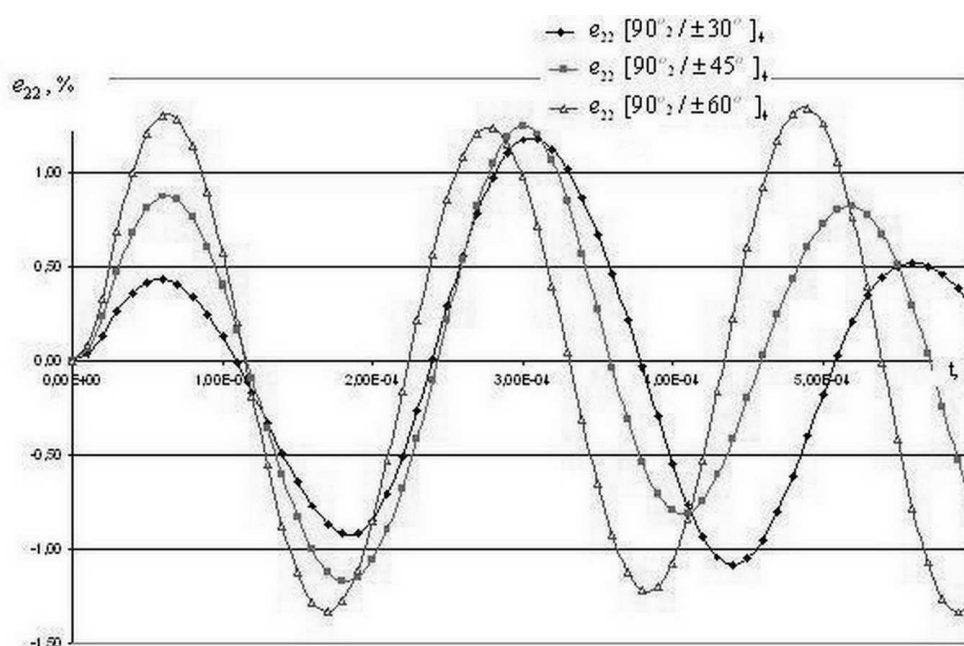


Рисунок 2 – Окружные деформации в зависимости от схемы чередования слоев

и тем самым повысить ее несущую способность. С увеличением массы заряда максимальные окружные деформации в фазе растяжения достигают предельного значения, которое для композитного материала составляет около 2,3%. Видно также, что наиболее предпочтительной структурой обладают оболочки, полученные на-

моткой чередующихся спиральных и кольцевых слоев.

Работа выполнена при частичном финансировании по Программе государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и РФФИ (грант 13-08-00742).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Абросимов Н. А. Баженов В. Г. . Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Издательство ННГУ, 2002. 400 с.
- [2] Новожилков В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
- [3] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 512 с.
- [4] Федоренко А. Г. Сырунин М. А. Иванов А. Г. Влияние структуры армирования ориентированных стеклопластиков на прочность круговых цилиндрических оболочек при взрывном нагружении изнутри // Механика композитных материалов. 1991. № 4. С. 631–640.

Abrosimov N. A., Elesin A. V., Lazarev L. N., Novoseltseva N. A. *Numerical simulation of the structure of reinforcement on the ultimate deformability and strength of composite cylindrical shells under transient effects.* The technique of numerical solution of the dynamic deformation of composite cylindrical shells, focused on the analysis of their ultimate deformability and strength, depending on the angle of reinforcement, stacking sequence and intensity of loading.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ СТРИНГЕРОВ И ТРЕЩИН В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

Агаян К. Л.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Рассматривается плоская контактная задача для упругой плоскости, ослабленной системой трещин и армированной симметрично расположенными упругими бесконечными включениями (стрингерами) пересекающих линии трещин. Исследуется взаимовлияние этих двух типов концентраторов напряжений, в частности стрингеров, на коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений на концах трещин.

Исследование влияния концентраторов напряжения типа стрингеров на поле напряжений в пластинах, полосах и прямоугольных областях, ослабленных трещинами, рассматривались многими авторами. Достаточно с полной библиографией таких работ можно найти в [1–7].

1. Пусть упругая плоскость с упругими характеристиками E и ν , ослаблена трещинами длиной $2l$, занимающими отрезки $[2nL - l, 2nL + l]$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) оси Oy , а по линиям $y = 2nL$ усилена бесконечными включениями малой толщины h_s с модулем упругости E_s . На берегах трещин действует нормальное давление $p^+(y)$, а в точках $x = \pm a$ включений приложены сосредоточенные растягивающие силы P . Кроме того, плоскость на бесконечности подвержена равномерному растяжению усилиями интенсивности σ_0 по направлению оси Ox (рис. 1).

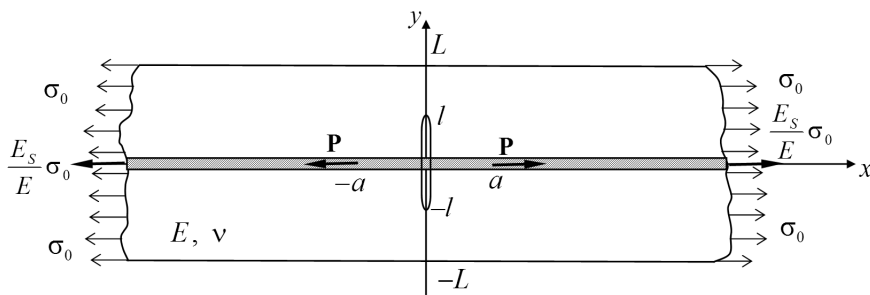


Рисунок 1

Предположим, что для стрингеров справедлива модель одноосного напряженного состояния [7] и определим основные характеристики смешанной задачи.

В силу периодичности и симметричности задача эквивалентна следующей смешанной задаче для полуполосы $\{0 < x < \infty; 0 < y < L\}$

$$\begin{aligned} v(x, 0) = v(x, L) = \tau_{xy}(x, L) = 0, \quad 0 < x < \infty \\ \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad 0 < y < L \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_x(0, y) = p^+(y) \quad 0 < y < l; \quad u(0, y) = 0, \quad l \leq y \leq L \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \frac{1}{h_s E_s} \left[P\theta(a - x) + \int_x^\infty \tau(s) ds \right] + \frac{\sigma_0}{E}, \quad 0 < x < \infty \quad (3)$$

$$\sigma_x(x, y) \rightarrow \sigma_0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, а $\tau(x) = 2\tau_{xy}(x, 0)$ — неизвестные контактные напряжения, возникающие на линиях соединения включения с плоскостью.

Из (3) для осевого усилия включения T_0 в сечении $x = 0$ получим

$$T_0 = \frac{h_s E_s}{E} \sigma_0 + P + \int_0^\infty \tau(s) ds \quad (4)$$

Решение задачи (1)–(3) построим при помощи функции напряжений Эри $F(x, y)$, связанной с перемещениями и напряжениями известными формулами [8], представляя ее в виде

$$F(x, y) = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda L \operatorname{ch} \lambda L}{\operatorname{sh}^2 \lambda L} - \frac{1 - \nu \operatorname{ch} \lambda (L - y)}{1 + \nu \operatorname{sh} \lambda L} + \lambda y \frac{\operatorname{sh} \lambda (L - y)}{\operatorname{sh} \lambda L} \right] C(\lambda) \cos \lambda x d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty (1 + x\mu_k) C_k e^{-\mu_k x} \cos \mu_k y + \sigma_0 y^2; \quad \mu_k = \pi k / L, \quad (5)$$

$$C_k = -\frac{2}{\pi k^2} \int_0^\beta g'(t) \sin kt dt, \quad \beta = \pi l / L,$$

где $g(t)$ — половина раскрытия трещины, удовлетворяющая условиям $g(0)=0$, $g(\beta)=0$.

Для определения $g'(t)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\beta \left[\frac{1}{t - y} - \frac{8 - (3 - \nu)(1 + \nu)}{(3 - \nu)(1 + \nu)} \frac{1}{t + y} + \frac{2(1 + \nu)}{3 - \nu} \frac{t(t - y)}{(t + y)^3} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^4 K_n(t, y) \right] g'(t) dt = \frac{L^2}{\pi^2} (f_0(y) - \sigma_0) - P f_1(y) \quad 0 < y < \beta, \quad (6)$$

$$K_0(t, y) = -\frac{4\gamma_s}{3 - \nu} e^{\gamma_s(t+y)} E_1 \gamma_s(t + y) \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} + \gamma_s y + \frac{3 + \nu}{2} \gamma_s t + \frac{1 + \nu}{2} \gamma_s^2 y t \right) \quad (7)$$

$$K_1(t, y) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{t - y}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t + y}{2} \right) - \left(\frac{1}{t - y} + \frac{1}{t + y} \right)$$

$$K_2(t, y) = \frac{4\gamma_s}{3 - \nu} \frac{1}{t + y} \left[y + \frac{3 + \nu}{2} t - \frac{1 + \nu}{2} \gamma_s y t - \frac{1 + \nu}{2} \frac{y t}{t + y} + \frac{1 + \nu}{2} \gamma_s^2 y t \right]$$

$$\begin{aligned}
K_3(t, y) &= \frac{4}{3-\nu} \int_0^\infty \left[-\frac{3+\nu}{1+\nu} + \lambda y + \frac{3+\nu}{2} \lambda t - \frac{1+\nu}{2} \lambda^2 y t \right] * \\
&\quad * \frac{\lambda \psi_3(\lambda \pi) e^{-\lambda(y+t)}}{(F_s + \lambda)(F_s + \lambda + \psi_3(\lambda))} d\lambda \\
K_4(t, y) &= \frac{4}{3-\nu} \int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{1+\nu}{2} \lambda t \right) e^{-\lambda t} \psi_1(\lambda, y) + \left(-\frac{3+\nu}{1+\nu} + \lambda y \right) e^{-\lambda y} \psi_2(\lambda, t) + \right. \\
&\quad \left. + \psi_1(\lambda, y) \psi_2(\lambda, t) \right] \frac{d\lambda}{K(\pi \lambda)} \\
f_1(y) &= -\frac{2L^2}{\pi^2} \frac{E}{h_s E_s (3-\nu)} \int_0^\infty \left[\left(-\frac{3+\nu}{1+\nu} + \lambda y \right) e^{-\lambda y} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\text{ch } \lambda y}{e^{\lambda \pi} \text{sh } \lambda \pi} - \frac{\pi \lambda \text{ch } \lambda y}{\text{sh}^2 \lambda \pi} \right] \frac{\sin(a \lambda \pi / L)}{\lambda \pi K(\lambda \pi)} d\lambda, \quad f_0(y) = p^+(\pi y / L) \\
\psi_1(\lambda, y) &= \frac{\lambda \pi \text{ch } \lambda y}{\text{sh}^2 \pi \lambda} - \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\text{ch } \lambda y}{e^{\pi \lambda} \text{sh } \pi \lambda} - \frac{\lambda y \text{sh } \lambda y}{e^{\pi \lambda} \text{sh } \pi \lambda} \\
\psi_2(\lambda, t) &= \frac{\text{ch } \lambda t}{e^{\pi \lambda} \text{sh } \pi \lambda} \frac{1+\nu}{2} - \frac{\text{sh } \lambda t}{e^{\pi \lambda} \text{sh } \pi \lambda} - \frac{(1+\nu) \text{sh } \lambda t}{\text{sh}^2 \pi \lambda} \\
\psi_3(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi \lambda}{e^{\pi \lambda} \text{sh } \pi \lambda} - \frac{1+\nu}{3-\nu} \left(\frac{\pi \lambda}{\text{sh}^2 \pi \lambda} \right)^2 \right] \\
E_1(\gamma_s z) &= e^{-\gamma_s z} \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{\gamma_s + t} dt \quad F_s = 2EL / (1+\nu)(3-\nu) E_s h_s \\
K(\lambda) &= \text{cth}(\lambda) + \frac{\pi \gamma_s}{\lambda} - \frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{\lambda}{\text{sh}^2 \lambda}, \quad \gamma_s = \frac{4EL}{\pi(1+\nu)(3-\nu) h_s E_s},
\end{aligned}
\tag{8}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (6) на конечном интервале $(0, \beta)$. Для определения контактных напряжений получим

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \frac{16\pi(1+\nu)^{-1}}{(3-\nu)L^2} \int_0^{l/L} g'(\pi t) dt \int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{1+\nu}{2} \lambda t \right) e^{-\lambda t} - \frac{\text{sh}(\lambda t)}{e^\lambda \text{sh } \lambda} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1+\nu}{2} \lambda t \frac{\text{ch}(\lambda t)}{e^\lambda \text{sh } \lambda} + \frac{\lambda \text{sh } \lambda t}{\text{sh}^2 \lambda} \right] \frac{\sin(\lambda x / L) d\lambda}{K(\lambda)} - \\
&\quad - \frac{8PE(1+\nu)^{-1}}{(3-\nu)\pi L h_s E_s} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda a / L) \sin(\lambda x / L)}{\lambda K(\lambda)} d\lambda \quad (0 < x < \infty)
\end{aligned}
\tag{12}$$

2. Перейдя к решению уравнения (6), заметим, что ее ядро кроме обычной сингулярности типа Коши имеет также неподвижную особенность в точке $y = 0$,

$t = 0$ (точка пересечения включения с трещиной). Ядро $K_0(t, y)$ имеет логарифмическую особенность в точке $(0, 0)$, а ядра $K_n(t, y)$ ($n = \overline{1, 4}$) ограничены в квадрате $0 \leq t, y \leq \beta$. Следовательно [4, 5, 8], решение уравнения (6) следует искать в классе функций

$$g'(t) \sim t^{-\delta} \text{ при } t \rightarrow +0, g'(t) \sim (1-t)^{-1/2} \text{ при } t \rightarrow 1-0, \quad (13)$$

где δ — корень трансцендентного уравнения [8].

$$\cos(1-\delta)\pi - \frac{2(1+\nu)}{3-\nu}(1-\delta)^2 + \frac{8-(3-\nu)(1+\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} = 0. \quad (14)$$

Приведем уравнение (6) к интервалу $(-1, 1)$ и ее приближенное решение, при сохранении обозначений для искомой функции и переменных, ищем в виде

$$g'(x) = (1+x)^{-\delta}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{n-\delta+0.5} \sum_{i=1}^n \frac{G(\xi_i)}{x-\xi_i} \frac{P_n^{(-0.5, -\delta)}(x)}{P_{n-1}^{(0.5, 1-\delta)}(\xi_i)}. \quad (15)$$

где ξ_i ($i = \overline{1, n}$) — корни многочлена Якоби $P_n^{(-0.5, -\delta)}(\xi_i) = 0$ ($i = \overline{1, n}$), а $G(\xi_i)$ ($i = \overline{1, n}$) определяются из решения конечной системы линейных алгебраических уравнений.

Осевое усилие T_0 определяется из (4), а коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины определяется формулой:

$$K = \frac{2^{1-\delta}}{n-\delta+0.5} \frac{\Gamma(n+0.5)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{G(\xi_i)}{(1-\xi_i) P_{n-1}^{(0.5, 1-\delta)}(\xi_i)} \quad (16)$$

Анализ решений показывает, что контактные напряжения при $x \rightarrow 0$ имеют представления

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{4G(-1)\pi^{1-\delta}(1+\nu+\delta(1-\nu))}{Ll(3-\nu)(1+\nu)\cos(\pi\delta/2)} \frac{1}{x^\delta} + R_1(x), \quad (17)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{4G(-1)\pi^{1-\delta}}{Ll\sin(\pi\delta/2)} \left[\frac{(1-\nu)^2 + \delta(1-\nu^2)}{(3-\nu)(1+\nu)} + 1 - \delta \right] \frac{1}{x^\delta} + R_2(x), \quad (18)$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — ограниченные функции при $x \rightarrow 0$, а при $x \rightarrow \infty$ имеют порядок убывания $O(e^{-x})$.

В точках $x = \pm a$ $\tau_{xy}(x, 0)$ имеет логарифмическую особенность, а $\sigma_y(x, 0)$ — конечный скачок.

$$\tau_s(x) = -\frac{8PE}{(1+\nu)(3-\nu)\pi Lh_s E_s} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + O(1) \quad (19)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{PE}{2(1+\nu)(3-\nu)Lh_s E_s} [\operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x+a)] + O(1) \quad (20)$$

В таблице приведены значения отношения коэффициентов интенсивности напряжений K_1/K_{1s} , где K_1 и K_{1s} — коэффициенты интенсивности разрывающих напряжений в конце трещины соответственно при отсутствии и наличии стрингеров для различных значений геометрических параметров задачи.

Таблица 1

$\sigma_0 \neq 0$ ($p^+ = P=0$)	l/L γ_s	1/8	1/4	1/2	3/4	7/8
K_1/K_{1s}	0.1	0.5415	0.6712	0.7516	0.8571	0.9215
	0.5	0.5216	0.6521	0.7351	0.8316	0.9407
	1	0.5191	0.6431	0.7210	0.8150	0.9518
	5	0.5041	0.6115	0.0631	0.7902	0.9625

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Развитие теории контактных задач в СССР (под ред. Галина Л. А.). М.: Наука, 1976. 492с.
- [2] Агаян К. Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками // Изв.АН АрмССР, Механика, 1976, 29, №4, С. 3–15.
- [3] Мхитарян С. М., Агаян К. Л. Об одной периодической контактной задаче для упругой полосы, ослабленной трещинами и усиленной упругими стрингерами // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 3. С.3–17.
- [4] Агаян К. Л. Взаимодействие стрингеров с бесконечной пластиной, ослабленной двоякопериодической системой трещин // В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985, с.26-32.
- [5] Агаян К. Л. Контактная задача для бесконечной пластины о взаимодействии пересекающихся трещин и стрингеров // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван 2012. С.42–47.
- [6] Hakobyan V. Stress Concentration Near Defects in Homogeneous and Compound Bodies // LAP Lambert Academic Publishing AG&Co KG, Germany, 2011, 148 p.
- [7] Мхитарян С. М. О контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Сб. тр. межд. конф. Ереван 2012. С.74–78.
- [8] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

Agayan K. L. *Contact Problem on interaction of crossing stringers and cracks in elastic plane.* A plane contact problem for an elastic plane, weakened by a system of cracks and reinforced by symmetrically distributed elastic infinite inclusions (stringers) of the cracks intersecting lines, is considered. The interaction of these two types of the stresses concentrators, particularly, the influence of the stringers on the coefficients of the stresses intensity and the opening of the cracks banks is studied.

ОПИСАНИЕ БОЛЬШИХ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ПОМОЩЬЮ ТРЕХМЕРНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Азаров А. Д.¹, Азаров Д. А.²

¹*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

²*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

С помощью трехмерной механической модели получена система нелинейных уравнений для описания связи напряжений и деформаций в условиях больших сдвигов. Проведены расчеты для случаев чистого и простого сдвигов в условиях постоянного объема. Определены значения касательных и нормальных сил, обеспечивающих соответствующие деформированные состояния.

В статьях [1–3] была предложена новая модель для описания нелинейных упругих свойств материалов. Деформация элементарного объема (куба) при приложении внешних сил определяется реакциями внутренних пространственных связей двух типов между противоположными и смежными гранями. В случае одноосного растяжения были изучены свойства продольной упругости и свойства связи поперечных и продольных удлинений. В настоящей работе с помощью этой модели осуществлено описание больших деформаций сдвига.

Свойства упругой среды представляются в виде механической системы нормальных и диагональных внутренних связей между центрами граней элементарного объема (рис. 1). Модель допускает как малые, так и большие деформации. Рассматривается изначально изотропная среда, но за счет выбора свойств внутренних связей возможно описание и ортотропных сред (что отражено в обозначениях характеристик связей).

Характеристики упругости связей являются некоторыми интегральными оценками внутренних силовых взаимодействий среды, но не связаны с понятиями молекул или атомов. При этом допускаются положительные и отрицательные значения коэффициентов упругости связей, что является отражением сил отталкивания и притяжения в микроструктуре материала.

Геометрические параметры модели в недеформированном состоянии будем обозначать малыми буквами, а в деформированном — большими.

Рассмотрим сдвиг механической конструкции касательными силами T в плоскости A_3, A_6, A_4, A_5 на угол γ (рис. 1). При этом допускается изменение размеров (длин связей) a, b, c, l, n, p на соответствующие величины: $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_l, \delta_n, \delta_{p1}, \delta_{p2}$.

$$A = a + \delta_a, \quad B = b + \delta_b, \quad C = c + \delta_c,$$

$$L = l + \delta_l, \quad N = n + \delta_n, \quad P_1 = p - \delta_{p1}, \quad P_2 = p + \delta_{p2},$$

Длины граней элементарного куба в отсчетной конфигурации задаем одинаковыми и равными $2a = 2$, а диагональные размеры равными n (т.е. $a = b = c = 1$, $p = l = n = \sqrt{2}$).

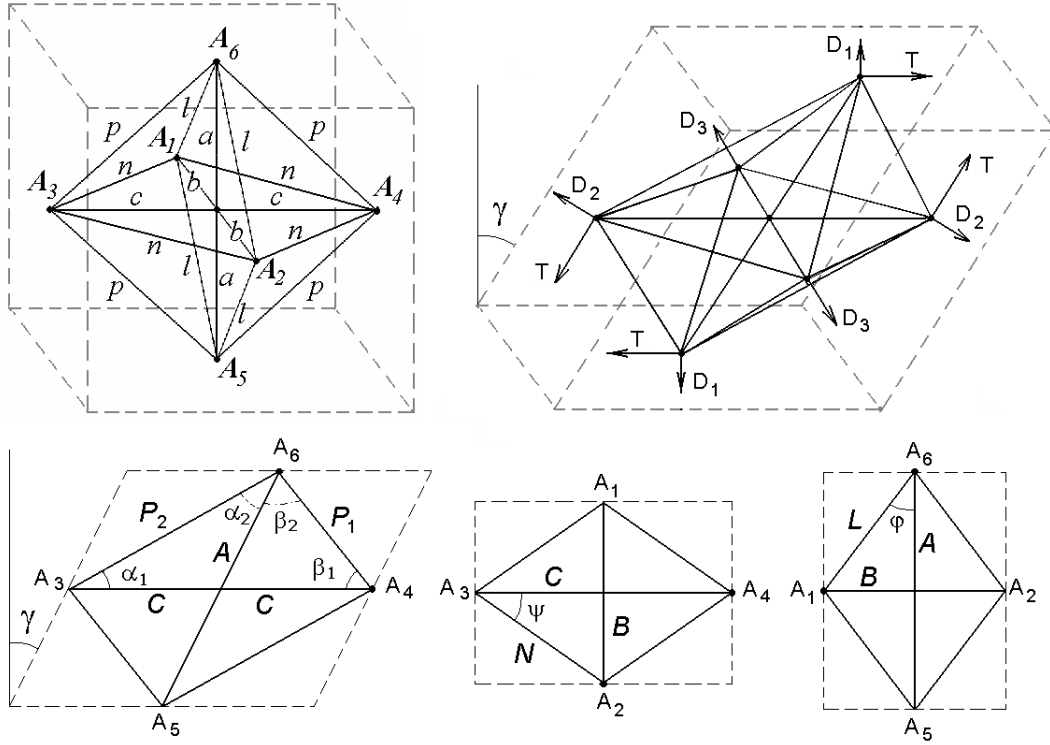


Рисунок 1 – Геометрия связей модели и внешние силы при сдвиге

Длины диагональных связей определяются через длины граней:

$$L^2 = A^2 + B^2, \quad N^2 = B^2 + C^2, \quad P_1^2 = A^2 + C^2 - 2AC \sin \gamma, \quad P_2^2 = A^2 + C^2 + 2AC \sin \gamma.$$

Отсюда получаются квадратные уравнения для определения диагональных удлинений в зависимости от δ_a и δ_c

$$\begin{aligned} \delta_l^2 + 2l\delta_l - q_l &= 0, \quad \delta_n^2 + 2n\delta_n - q_n = 0, \\ \delta_{p1}^2 - 2p\delta_{p1} - q_1 &= 0, \quad \delta_{p2}^2 + 2p\delta_{p2} - q_2 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= 2(\delta_a + \delta_c) - 2(1 + \delta_a + \delta_c + \delta_a\delta_c) \sin \gamma + \delta_a^2 + \delta_c^2, \\ q_2 &= 2(\delta_a + \delta_c) + 2(1 + \delta_a + \delta_c + \delta_a\delta_c) \sin \gamma + \delta_a^2 + \delta_c^2, \\ q_l &= 2(\delta_a + \delta_b) + \delta_a^2 + \delta_b^2, \quad q_n = 2(\delta_b + \delta_c) + \delta_b^2 + \delta_c^2 \end{aligned}$$

Ниже рассмотрен случай постоянного объема, который поддерживается нормальными силами D_1, D_2, D_3 приложенными к граням элементарного объема. Условие постоянства объема при деформировании $abc = ABC \cos \gamma$ позволяет получить явное выражение δ_b через δ_a и δ_c

$$\delta_b = (1 + \delta_a + \delta_c + \delta_a\delta_c)^{-1} \left(\frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma} - (\delta_a + \delta_c + \delta_a\delta_c) \right),$$

Постоянство объема не является обязательным условием. Оно может быть заменено некоторой экспериментальной зависимостью между удлинениями по разным направлениям.

Рассматривая геометрию треугольников после деформации, получаем формулы для вычисления углов между связями и гранями в трех сечениях модели (рис. 1):

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta_1 &= \left(\frac{C}{A} - \sin \gamma \right) / \cos \gamma, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} - (\beta_1 - \gamma), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}, \\ \operatorname{ctg} \alpha_1 &= \left(\frac{C}{A} + \sin \gamma \right) / \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \gamma), \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{B}{C}. \end{aligned}$$

Искажение углов при деформировании элементарного куба определяется не только величиной угла сдвига, но и удлинениями δ_a , δ_c . Все изменения длин диагональных связей определяются через удлинения поперечных (нормальных) связей и величину угла сдвига. Изменения размеров и углов приводит к появлению реакций связей (внутренних сил). При расчетах использован простой физический закон линейной упругости для реакции каждой связи:

$$R_i = k_i \delta_i, \quad i = a, b, c, l, n, p_1, p_2,$$

где k_i — константы свойств материала (характеристики упругости каждой связи).

Рассматривается достаточно общий случай, при котором возможно моделирование различных типов сдвиговых деформаций путем выбора внешних сил и дополнительных ограничений (условие постоянства объема при деформировании, условие неизменности размеров a , b , c — чистый сдвиг, условие постоянства высоты верхней грани элементарного объема — простой сдвиг).

Уравнение равновесия внешних сил и моментов, действующих на элементарный куб, имеет вид

$$(D_1 A - D_2 C) \sin \gamma - T(A - C) \cos \gamma = 0. \quad (1)$$

Уравнения равновесия внутренних и внешних сил в узлах A_6 (формулы (2) и (3)), A_4 (формулы (4) и (5)) и A_2 (формула (6)) имеют вид:

$$T = R_1 \cos \beta_1 + R_2 \cos \alpha_1 + R_a \sin \gamma + 2R_l \cos \varphi \sin \gamma, \quad (2)$$

$$D_1 = -R_1 \sin \beta_1 + R_2 \sin \alpha_1 + R_a \cos \gamma + 2R_l \cos \varphi \cos \gamma, \quad (3)$$

$$T \sin \gamma + D_2 \cos \gamma + R_1 \cos \beta_1 - R_2 \cos \alpha_1 - R_c - 2R_n \cos \psi = 0, \quad (4)$$

$$T \cos \gamma - D_2 \sin \gamma - R_1 \sin \beta_1 - R_2 \sin \alpha_1 = 0, \quad (5)$$

$$D_3 + R_b - 2R_n \sin \psi - 2R_l \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Общая система сил удовлетворяет уравнениям равновесия для сил и моментов, как в каждом узле механической модели, так и для всего элементарного объема в целом. Свойства материала при сдвиге определяются зависимостью между касательной силой T и углом сдвига γ с учетом влияния на эту зависимость изменения размеров элементарного объема.

Соотношения (2), (3), (4) и (6) дают возможность рассчитать значения сил T , D_1 , D_2 , D_3 . Их подстановка в выражения (1) и (5) дает два уравнения для определения удлинений δ_a и δ_c :

$$R_1 s_3 + R_2 s_4 + (R_a - R_c + 2R_l \cos \varphi - 2R_n \cos \psi) \operatorname{tg} \gamma = 0, \quad (7)$$

$$R_1 Q_1 - R_2 Q_2 + R_a Q_a - R_c Q_c + 2R_l Q_l - 2R_n Q_n = 0, \quad (8)$$

где использованы обозначения, зависящие явно только от углов:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\cos \beta_1}{\cos \gamma} + \cos \beta_1 \operatorname{tg} \gamma, \quad s_2 = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \gamma} - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma \\ s_3 &= s_1 - \sin \beta_1, \quad s_4 = s_2 - \sin \alpha_1, \quad s_5 = \sin \beta_1 \operatorname{tg} \gamma, \quad s_6 = \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma, \\ s_7 &= \sin \gamma_1 \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad s_8 = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \gamma}, \quad s_9 = s_1 \operatorname{tg} \gamma, \quad s_{10} = s_2 \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned}$$

и обозначения, зависящие как от углов, так и от удлинений δ_a и δ_c :

$$\begin{aligned} Q_1 &= s_3 \operatorname{tg} \gamma - (\delta_a - \delta_c) \cos \beta_1 - \delta_a s_5 + \delta_c s_9, \\ Q_2 &= s_4 \operatorname{tg} \gamma + (\delta_a - \delta_c) \cos \alpha_1 - \delta_a s_6 + \delta_c s_{10}, \\ Q_a &= \sin \gamma (1 - \delta_c) + s_7 (1 + \delta_c), \\ Q_c &= -(1 + \delta_c) s_8, \quad Q_l = Q_a \cos \varphi, \quad Q_n = -(1 + \delta_c) s_8 \cos \psi. \end{aligned}$$

Из уравнений (7) и (8) определяются решения δ_a и δ_c . В общем случае δ_a не равно δ_c , но численный анализ системы уравнений показывает, что ее корнями являются любые пары значений δ_a и δ_c равные между собой: $\delta_a = \delta_c$. Таким образом, задавая любое значение δ_a и любое значение угла сдвига γ , далее можно определить все силы T , D_1 , D_2 , D_3 , которые обеспечивают соответствующее деформированное состояние. Как показывает численный анализ, удлинения $\delta_a = \delta_c$ поддерживаются неравными силами $D_1 \neq D_2$. Сила D_3 обеспечивает постоянство объема. Чистому сдвигу соответствует случай $A = a$ и $C = c$, то есть $\delta_a = \delta_c = 0$. Обобщением чистого сдвига является случай, при котором задаваемое удлинение δ_a постоянно и не зависит от угла сдвига γ .

Результаты расчета внешних сил T , D_1 , D_2 , D_3 для чистого и простого сдвигов представлены на рис. 2 в зависимости от угла сдвига γ для разных сочетаний характеристик упругости связей.

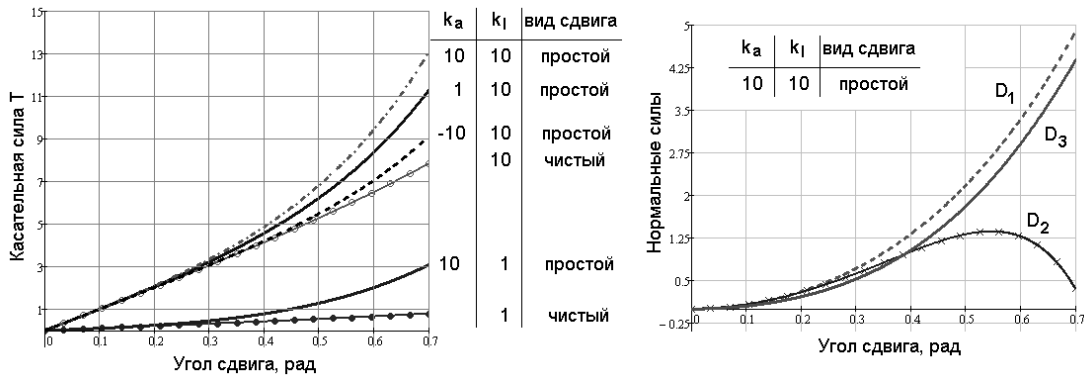


Рисунок 2 – Зависимости касательной и нормальных внешних сил от угла сдвига

Результаты расчета этих же внешних сил T , D_1 , D_2 , D_3 в зависимости, как от угла сдвига γ , так и от удлинений $\delta_a = \delta_c$ представлены на рис. 3. Все расчеты были выполнены для значений угла сдвига до 0.7 радиан (то есть порядка 40 градусов).

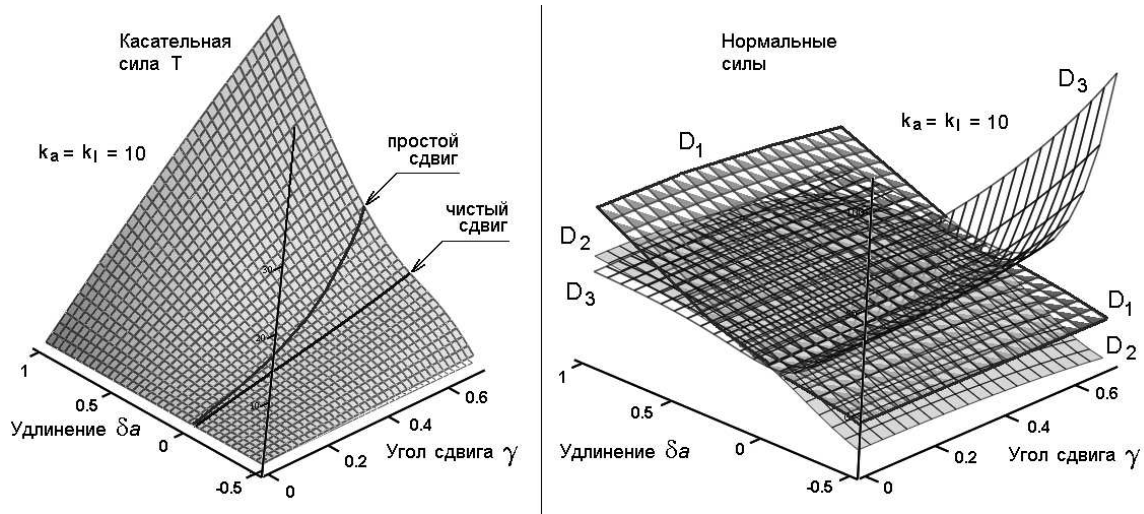


Рисунок 3 – Зависимость внешних сил от угла сдвига и удлинения

Надо отметить, что при больших деформациях сдвига в реальном материале происходят существенные структурные изменения. Настоящая модель позволяет учесть такие изменения путем введения зависящих от удлинений переменных характеристик упругости связей модели $k_i(\delta_i)$, $i = a, b, c, l, n, p_1, p_2$.

Если же задавать характеристики связей в зависимости от времени, то модель приобретает возможность описывать реологические свойства высокоэластичных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Азаров А. Д., Азаров Д. А. Трехмерная механическая модель для описания больших упругих деформаций при одноосном растяжении // Вестник ДГТУ, 2011, Т. 11, № 2(53), Ростов-на-Дону, С. 147–156.
- [2] Азаров А. Д., Азаров Д. А. Сопоставление трехмерной механической модели с законом состояния Мурнагана // Тр. XVI Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 16–19 октября 2012. Ростов-на-Дону: ЮФУ, Т. I. С. 5–9.
- [3] Азаров А. Д., Азаров Д. А. Нелинейно-деформируемая трехмерная механическая модель несжимаемых упругих материалов // Тр. XV Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 5–7 декабря 2011. Ростов-на-Дону: ЮФУ, Т. I. С. 11–15.

Azarov A. D., Azarov D. A. *Description of large shear deformations of the elastic continuum by 3d mechanical model.* The system of the nonlinear equations which describe the stress-strain correlation under the conditions of large elastic shear is received by means of three-dimensional mechanical model. Calculations were carried out for cases of pure shear and simple shear under the constant volume condition. The values of tangent and normal forces providing the correspondent deformed state were defined.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОВРЕЖДЕНИЯ В БАЛОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАШУМЛЕННЫХ ДАННЫХ О КРИВИЗНЕ МОД КОЛЕБАНИЙ

Акопьян В. А.¹, Калинин В. В.^{1,2}, Шевцов С. Н.^{1,2}

¹*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича*

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

²*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

На основе модели балки Тимошенко с раскрытой трещиной исследованы вероятностные характеристики чувствительности и разрешающей способности локализации повреждения методом анализа кривизны первых мод изгибных колебаний с учетом погрешности измерений с помощью группы распределенных акселерометров. Полагая, что максимальная невязка между двумя соответствующими модами колебаний (и их кривизнами, вычисляемыми как вторые производные мод) для идеальной и дефектной балок локализована вблизи предполагаемой трещины, с помощью массивов симуляций конечно-элементной модели прямой задачи построены эмпирические распределения правильной оценки этой локализации, что позволило оценить с некоторой вероятностью расположение трещины и различить случаи ее наличия или отсутствия. Показано, что рассмотренный метод в условиях присущей ему экспериментальной неопределенности обеспечивает удовлетворительную чувствительность и разрешающую способность только при анализе группы мод колебаний.

Состояние проблемы идентификации возможных повреждений в конструкции было рассмотрено в детальном обзоре последних лет [1–3], где методы неразрушающего контроля подразделены на локальные и глобальные. Локальные методы, включающие, например, ультразвуковые и рентгеновские, предполагают наличие предварительной информации о локализации возможного дефекта в конструкции. Методы идентификации, основанные на анализе частот и форм собственных колебаний, на практике выполняющие роль глобальных, позволяют с определенной точностью оценить расположение и степень повреждения в конструкции, что обусловило повышенный интерес к ним с целью создания средств диагностики технического состояния наиболее напряженных элементов конструкции самолетов и вертолетов [4, 5].

Подавляющая часть методов идентификации повреждений с помощью анализа мод и/или кривизн мод колебаний использует некоторую модель поврежденной конструкции [1–3]. В такой формулировке задача идентификации повреждения представляет собой обратную задачу, где результаты косвенных измерений амплитуд колебаний используются для оценки геометрического расположения и/или степени повреждения. По многим причинам, среди которых важнейшими являются погрешности измерений, вызванные ограниченной точностью аппаратуры, влияние внешних факторов, схема расположения на конструкции регистрирующих акселерометров, численная обработка результатов, в постановке такой об-

ратной задачи присутствует значительная неопределенность [6, 7]. Такие обратные задачи могут решаться одним из методов, базирующихся на традиционном детерминистическом подходе, но решение будет весьма чувствительно к экспериментальному шуму. В данной работе использован вероятностный подход, который описывает указанные неопределенности распределениями вероятностей событий, соответствующих возможным состояниям механической системы. Согласно этому подходу каждая переменная, описывающая в модели поврежденное состояние, рассматривается в терминах соответствующего распределения.

В качестве модели механической системы с повреждением использована ранее предложенная авторами и подтвержденная экспериментально модель консольной балки Тимошенко с открытой трещиной, описываемой малым, но резким изменением однородного прямоугольного поперечного сечения [8]. В безразмерном виде система уравнений и граничных условий приводится к виду

$$\begin{aligned}\eta u_{\tau\tau} - B(\eta u_\xi)_\xi + B(\eta \psi)_\xi &= \Phi \\ \zeta \psi_{\tau\tau} - (\zeta \psi_\xi)_\xi - A\eta u_\xi + A\eta \psi &= 0, \\ u|_{\xi=0} = \psi|_{\xi=0} = \psi_\xi|_{\xi=1} = (u_\xi - \psi)|_{\xi=1} &= 0\end{aligned}$$

где безразмерные переменные задачи

$$A = 6kL^2/[h^2(1 + \nu)]; \quad B = k/(1 + \nu); \quad \Phi = qL/(bhE)$$

выражены через геометрические параметры балки: длину L , размеры неповрежденного поперечного сечения b , h , формфактор $k = 6/5$ и свойства материала E , ν . При этом безразмерные функции, описывающие распределение толщины $\eta(\xi) = 1 - \delta(\xi)$ и момента инерции сечения $\zeta(\xi) \approx 1 - 3\delta(\xi) \cdot \eta^2(\xi)$ вдоль оси балки выражаются через функцию формы трещины

$$\delta(\xi) = d \cdot \begin{cases} \cos[\pi(\xi - l)/2\varepsilon]; & \xi \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon], \\ 0; & \xi \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon], \end{cases}$$

где $d \in [0; 1)$, $l \in (0, 1)$ и $\varepsilon \ll l$ представляют собой безразмерные глубину, координату на оси балки и полуширину дефекта — узкой дельтаобразной врезки.

Одномерная конечноэлементная реализация такой модели, выполненная в Comsol Multiphysics (PDE mode) показала хорошие изобразительные возможности и малую вычислительную трудоемкость, что важно при массированных симуляциях прямой задачи. Вычисление первых пяти мод колебаний производили для бездефектной балки и при случайно распределенных «трещинах» глубиной $d = 0.25; 0.4; 0.55; 0.7$. Как показано в работе [8], формы колебаний мало чувствительны к вариации параметра ε , а наименьшая погрешность при вычислении вторых пространственных производных по пятиточечной симметричной схеме достигается при использовании 40 точек, моделирующих расположение акселерометров с шагом $\Delta\xi$. Искусственный шум «измерений» достигался введением нормально распределенной в диапазоне $\pm 2\%$ погрешности в амплитуды смещений.

Первый тип анализа включал построение эмпирических распределений максимальных отклонений амплитуд смещений для пар сравниваемых мод колебаний

и их кривизн с последующим вычислением параметров Бета- или нормального распределения. Эти результаты, частично представленные на рис. 1, позволили оценить разрешающую способность мод и их кривизн для принятия решения о наличии или отсутствия повреждения.

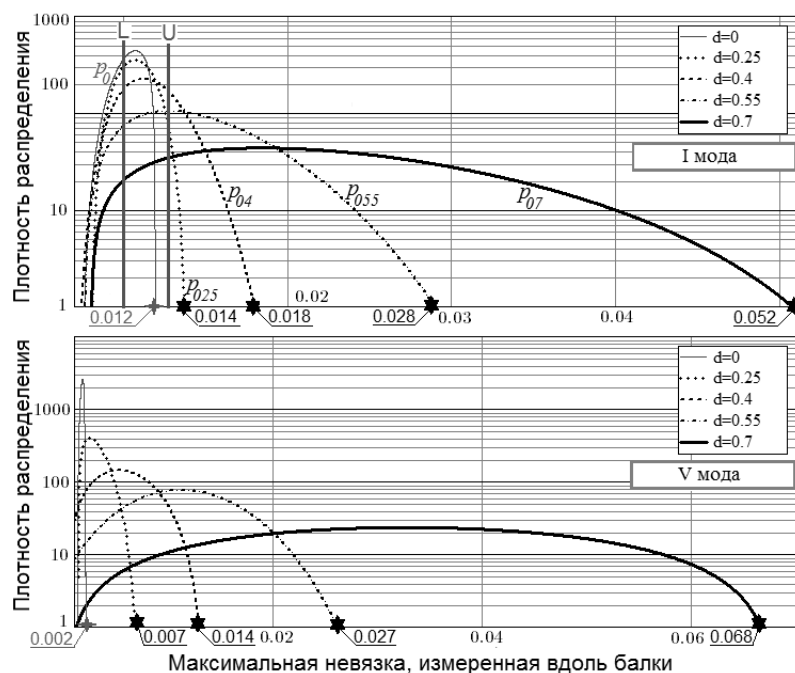


Рисунок 1 – Плотности распределений максимальных отклонений амплитуд первой и пятой мод колебаний консольной балки с различной степенью повреждения

Действительно, пусть выполнено три (или более) измерений какой-либо моды колебаний, и для этих трех измерений рассчитаны три наибольших отклонения от формы бездефектной балки. Для этих отклонений можно рассчитать верхнюю U и нижнюю L границы доверительного интервала при некоторой принятой доверительной вероятности (например, 0.95). Тогда вероятность повреждения i , описываемого распределением $p_i(\xi)$, где $i = 0$, соответствует неповрежденному состоянию, вычисляется простым интегрированием плотности $p_i(\xi)$ в интервале $[L; U]$. В частности, для ситуации, представленной на верхнем графике рисунка 1, соотношение вероятностей неповрежденного и ряда поврежденных состояний будет

$$P(0)/P(0.25)/P(0.4)/P(0.55)/P(0.7) \approx 0.7/0.3/0.11/0.06/0.015.$$

Анализ результатов показал, что наиболее надежно бездефектное состояние идентифицируется именно модами колебаний, но не их кривизнами.

Исследовались также чувствительности первых пяти мод колебаний и их кривизн к наличию повреждений различной глубины и локализации. Для этого балка по длине была разделена на десять равных участков, на каждом из которых рассчитывали доверительный интервал для отклонения от истинного (наперед заданного) положения дефекта и процент правильных локализаций дефекта. Было установлено (см. рис. 2), что чувствительность различных мод колебаний и их

кривизн различна, и меняется вдоль балки. Анализ локальных чувствительностей к повреждению показывает, что она максимальна в зонах наибольшей кривизны соответствующей моды колебаний. Для всех рассмотренных случаев чувствительность вблизи заделки и свободного конца балки минимальна.

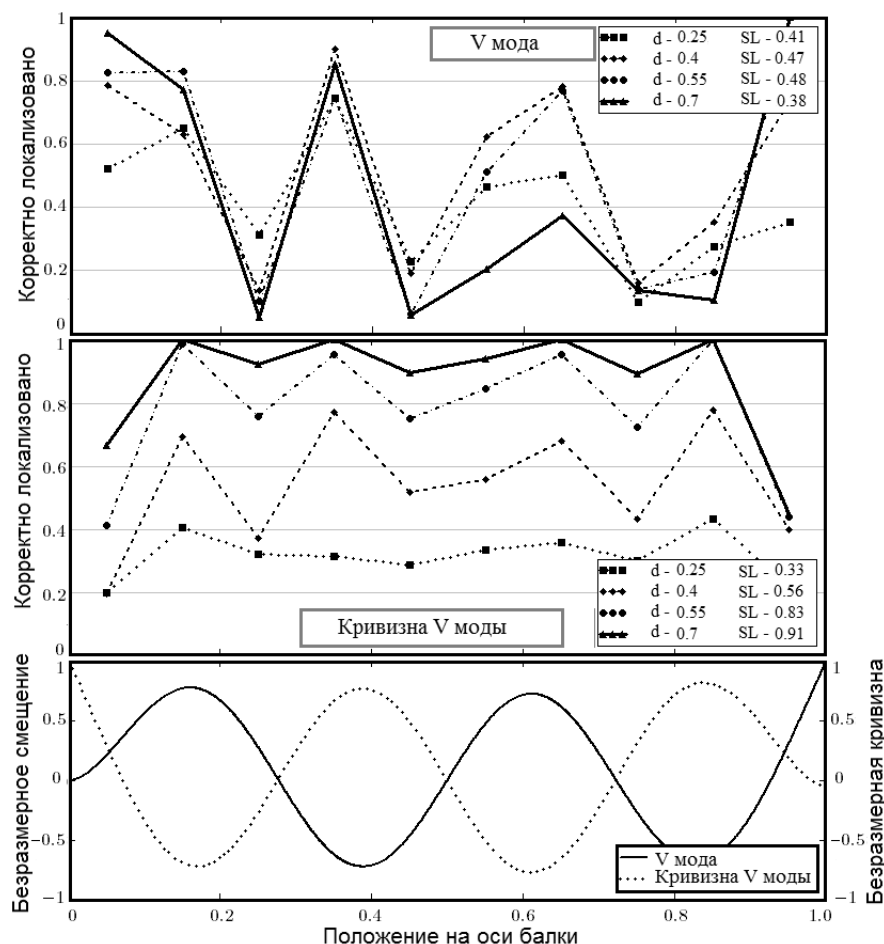


Рисунок 2 – Пространственное распределение вероятности корректной идентификации повреждения с использованием пятой моды колебаний и ее кривизны

Во врезках на рис. 2 показана средняя вероятность правильной локализации повреждения, обозначенная как SL (Successful Localization). Ее значение для минимальной исследованной степени поврежденности ($d = 0.25$) во всех случаях не превышает 30%, хотя локальная чувствительность, например, пятой моды на отдельных участках балки достигает 70%. Этот факт подтверждает необходимость создания многошагового интеллектуализированного алгоритма идентификации, учитывающего статистические характеристики результатов модального анализа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Carden E. P., Fanning P.* Vibration based condition monitoring: A review // *Structural Health Monitoring*. 2004. № 3(4). P. 355–357.
- [2] *Humar J., Bagchi A., Xu H.* Performance of vibration-based techniques for the identification of structural damage // *Structural Health Monitoring*. 2006. № 5. P. 215–242.
- [3] *Fan W. and Qiao P.* Vibration-based damage identification methods: A review and comparative study // *Structural Health Monitoring*. 2011. № 10(1). P. 83–111.
- [4] *Roy N., Ganguli R.* Helicopter rotor blade frequency evolution with damage growth and signal processing // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. № 283. P. 821–851.
- [5] *Santos F. L. M., et al.* Experimental damage detection of a helicopter main rotor blade based on modal properties // *Proc. of the International Conference on Engineering Structural Dynamics (Sesimbra, Portugal, June 17–19, 2013)*. 7 p.
- [6] *Kulaa J.* Structural health monitoring under non-linear environmental or operational influence // *Proc. of the International Conference on Engineering Structural Dynamics (Sesimbra, Portugal, June 17–19, 2013)*. 8 p.
- [7] *Tarantola A.* Inverse problem theory and methods for model parameters estimation. Philadelphia.: SIAM Press, 2005. 358 p.
- [8] *Shevtsov S. N., et al.* A probabilistic approach to the crack identification in the beam-like structure described by Timoshenko beam model // *Proc. of the International Conference on Fracture and Strength of Solids. (Jeju, Korea, June 9–13, 2013)*. 10 p.

Akopyan V. A., Kalinchuk V. V., Shevtsov S. N. *A probabilistic approach to the problem of damage identification in a beam-like structure using noisy data of the vibration modes curvatures.* On the basis of Timoshenko beam model with the opened crack the probabilistic properties of sensitivity and the ability to separate the damaged and undamaged cases have been studied by analysis of the first bending modes curvatures taking into account experimental uncertainty due to noisy measurements by the distributed accelerometers. Assuming that biggest discrepancy between corresponding vibration modes (and their curvatures calculated as second spatial derivatives) of intact and damaged beams is located close to the probable crack, the empiric probability distributions for the true prediction of the crack localization were reconstructed using numerous simulation of finite element model for the forward problem. The probability distributions allow to estimate the crack position on the beam and distinguishing the damaged and undamaged cases. It has been demonstrated that presented approach at inherent experimental uncertainty ensure a satisfactory sensitivity and reliability only by the joint analysis of several vibration modes.

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НАНОРАЗМЕРНЫХ ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ЭФФЕКТАМИ

Альтенбах Х.¹, Еремеев В. А.^{1,2,3}, Наседкин А. В.³

¹Отто фон Герике университет Магдебурга

²Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

³Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе предложены модели динамических задач для пьезоэлектрических (электроупругих) тел наноразмеров с учетом демпфирования и поверхностных эффектов. Аналогично упругим телам здесь при анализе пьезоэлектрических наноразмерных сред в модели введены поверхностные напряжения и распределенные электрические заряды посредством добавления на поверхности соответствующих упругих мембран и диэлектрических пленок.

Введение. Как известно, ряд наноматериалов имеют аномальные механические свойства, существенно отличающиеся от свойств обычных макроматериалов. Одними из факторов, отвечающих за такое поведение наноматериалов, могут являться поверхностные эффекты. Как показывают исследования последних лет ([1] и др.), для тел субмикро- и наноразмеров поверхностные напряжения играют существенную роль и оказывают влияние на деформирование тел в целом. В ряде последующих работ были предприняты попытки распространения методики учета поверхностных эффектов на наноразмерные пьезоэлектрические и флексоэлектрические тела. Так, по-видимому, впервые в [2] было предложено в функционал энергии для наноразмерного пьезоэлектрического материала добавить поверхностные интегралы с членами, содержащими поверхностные модули жесткости, поверхностные модули диэлектрических проницаемостей, поверхностные пьезомодули и компоненты тензора деформаций и напряженности электрического поля. Подобный подход получил развитие при исследованиях задач для пьезоэлектрических наноразмерных проволок, балок, пластин и наноразмерных пьезокомпозитных структур в работах [3–5] и др.

Между тем, несмотря на значительное число исследований, строгая теория учета поверхностных эффектов для наноразмерных пьезоэлектрических тел на данное время отсутствует. Более того, при принятии определяющих соотношений, связывающих поверхностные напряжения и поверхностную электрическую индукцию с деформациями и вектором напряженности электрического поля, включающим и его нормальную компоненту, корректные формулировки проблем полных классических и обобщенных постановок встречаются серьезные затруднения.

В настоящей работе, следуя [6, 7], предполагается, что «поверхностные пленки» не имеют поверхностного пьезоэлектрического эффекта, т. е. поверхностные напряжения связаны только с поверхностными деформациями, а поверхностная

электрическая индукция связана только с поверхностной напряженностью электрического поля. Естественно, что за счет общей связанности механических и электрических полей в объеме пьезоэлектрического тела данные поверхностные механические и электрические поля также будут связаны между собой. Принятые допущения позволяют для пьезоэлектрических наноразмерных тел построить строгую теорию, сформулировать полные постановки динамических краевых задач с учетом затухания, получить обобщенные постановки задач и исследовать различные математические вопросы.

1. Постановка задач. Пусть Ω — ограниченная в $\mathbb{R}^3$ область, занимаемая пьезоэлектрическим материалом; Γ — граница области; $\mathbf{n}$ — вектор внешней единичной нормали к Γ ; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор перемещений; $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ — электрический потенциал; t — время. Систему уравнений для пьезоэлектрического наноразмерного тела с учетом демпфирования в объеме Ω запишем, аналогично [8], в том же виде, что и для тела обычных размеров

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho (\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \dot{\mathbf{u}}), \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = q_\Omega, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} + \zeta_d \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e} \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры напряжений и деформаций второго ранга; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля; ρ — плотность материала; $\mathbf{c} = \mathbf{c}^E$ — тензор упругих модулей четвертого ранга, измеренных при постоянном электрическом поле; $\mathbf{e}$ — тензор пьезомодулей третьего ранга; $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^S = \boldsymbol{\varepsilon}^S$ — тензор диэлектрических проницаемостей второго ранга, измеренных при постоянной деформации; α_d , β_d , ζ_d — коэффициенты демпфирования; $\mathbf{f}$ — вектор плотности массовых сил; q_Ω — объемная плотность электрических зарядов; $(\dots)^T$ — операция транспонирования. Тензоры материальных модулей здесь имеют такие же свойства симметрии и положительной определенности, как и для пьезоэлектрических тел обычных размеров.

Сформулируем граничные условия для системы дифференциальных уравнений (1) с (2), (3). Эти граничные условия подразделяются на два типа (механические и электрические) и будут отличать наноразмерные тела от соответствующих тел макроразмеров.

Для формулировки механических граничных условий предположим, что существует разбиение границы Γ на два подмножества Γ_σ и Γ_u ($\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$). Будем считать, что на участке границы Γ_σ действуют обычные механические напряжения $\mathbf{p}_\Gamma$ и поверхностные напряжения $\boldsymbol{\tau}^s$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla^s \cdot \boldsymbol{\tau}^s + \mathbf{p}_\Gamma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad (4)$$

где ∇^s — поверхностный оператор градиента, связанный с пространственным набла-оператором формулой $\nabla^s = \nabla - \mathbf{n}(\partial/\partial r)$, r — координата, отсчитываемая по нормали к Γ , $\boldsymbol{\tau}^s$ — тензор второго ранга поверхностных напряжений. Как и для чисто упругого тела, при учете поверхностных напряжений примем, что поверхностные напряжения $\boldsymbol{\tau}^s$ связаны с поверхностными деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ определяющим соотношением $\boldsymbol{\tau}^s = \mathbf{c}^s \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^s + \beta_d^s \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^s)$, где $\boldsymbol{\varepsilon}^s = (\nabla^s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla^s \mathbf{u})^T)/2$, $\mathbf{c}^s$ —

тензор четвертого ранга поверхностных упругих модулей, β_d^s — дополнительный коэффициент демпфирования, $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, $\mathbf{I}$ — единичный тензор в $\mathbb{R}^3$. Свойства тензора поверхностных упругих модулей $\mathbf{c}^s$ здесь аналогичны соответствующим свойствам тензора $\mathbf{c}$, т.е. $\mathbf{c}^s$ — полусимметричный положительно определенный тензор относительно симметричных тензоров второго ранга со структурой $\boldsymbol{\varepsilon}^s$.

На части границы Γ_u примем как стандартные условия для перемещений, так и граничные условия контактного типа. Именно, пусть $\Gamma_u = \cup \Gamma_{uj}$, $j = 0, 1, \dots, L$, $\Gamma_{u0} \neq \emptyset$, участки Γ_{uj} не граничат друг с другом, и среди Γ_{uj} есть $L+1-l$ участков с заданными перемещениями $\mathbf{u}_{\Gamma j}$ ($j \in J_r = \{0, l+1, l+2, \dots, L\}$) и l плоских участков ($j \in J_p = \{1, 2, \dots, l\}$), контактирующих без трения с плоскими массивными штампами. С каждым из l плоских участков Γ_{uj} , $j \in J_p$, свяжем свои местные системы координат $O_\xi^{(j)} \xi_1^{(j)} \xi_2^{(j)} \xi_3^{(j)}$ таким образом, чтобы ось $\xi_3^{(j)}$ совпадала по направлению с направлением внешней нормали $\mathbf{n}$ в точке $O_\xi^{(j)}$, а оси $\xi_1^{(j)}$ и $\xi_2^{(j)}$ были бы главными осями инерции для j -ого штампа. При сделанных предположениях на участках Γ_{uj} можно принять следующие граничные условия

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sum_{k=0}^2 \alpha_{jk}^u \xi_k^{(j)}, \quad (\xi_0^{(j)} = 1), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad j \in J_p, \quad (5)$$

$$\int_{\Gamma_{uj}} \xi_p^{(j)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -(\ddot{\alpha}_{jp}^u + \alpha_d^p \dot{\alpha}_{jp}^u) M_p^{(j)} + P_{jp}, \quad p = 0, 1, 2, \quad j \in J_p, \quad (6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \nabla^s \cdot \boldsymbol{\tau}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad j \in J_p, \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Gamma j}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{uj}, \quad j \in J_r, \quad \Gamma_{u0} \neq \emptyset, \quad (8)$$

где в (5), (6) суммирование по повторяющимся индексам j и p отсутствует; величины α_{j0}^u имеют смысл общего смещения участка Γ_{uj} по нормали; $\alpha_{j1}^u = -\theta_2^{(j)}$, $\alpha_{j2}^u = \theta_1^{(j)}$ — углы поворота участка Γ_{uj} относительно осей $\xi_2^{(j)}$ и $\xi_1^{(j)}$ соответственно; $M_0^{(j)}$ — масса штампа; $M_1^{(j)} = J_{\xi_2^{(j)} \xi_2^{(j)}}^{(j)}$, $M_2^{(j)} = J_{\xi_1^{(j)} \xi_1^{(j)}}^{(j)}$ — главные моменты инерции штампа с номером j ; P_{jp} — силы (при $p = 0$) и моменты (при $p = 1, 2$), действующие на штамп с номером j ; α_d^p — коэффициент демпфирования при движении штампов; $\mathbf{u}_{\Gamma j}$ — заданные функции перемещений на участках Γ_{uj} , $j \in J_r$.

Заметим, что здесь при контакте наноразмерного тела со штампом без трения касательные напряжения не равны нулю, а уравниваются по (7) действием поверхностных напряжений, как и в (4).

Для определения электрических граничных условий предположим, что поверхность Γ разбита также на два подмножества: Γ_D и Γ_φ ($\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_\varphi$).

Участки Γ_D не электродированы, и на них выполняются условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \nabla^s \cdot \mathbf{d}^s - q_\Gamma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (9)$$

где вектор поверхностной электрической индукции $\mathbf{d}^s$ связан с вектором поверхностной напряженности электрического поля $\mathbf{E}^s = -\nabla^s \varphi$ определяющим соотношением $\mathbf{d}^s + \zeta_d^s \dot{\mathbf{d}}^s = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\kappa}^s \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}^s$; ζ_d^s — еще один коэффициент демпфирования; $\boldsymbol{\kappa}^s$ — симметричный положительно определенный относительно векторов $\mathbf{E}^s$ тензор второго ранга поверхностных диэлектрических проницаемостей, q_Γ — известная поверхностная плотность электрических зарядов.

Подмножество Γ_φ есть объединение $M + 1$ не граничащих друг с другом участков $\Gamma_{\varphi j}$ ($j \in J_Q \cup J_V$, $J_Q = \{1, 2, \dots, m\}$, $J_V = \{0, m, m + 1, \dots, M\}$), покрытых бесконечно тонкими электродами. На данных участках зададим следующие граничные условия

$$\varphi = \Phi_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad j \in J_Q, \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma_{\varphi j}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\Gamma = -Q_j, \quad I_j = \pm \dot{Q}_j \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad j \in J_Q, \quad (11)$$

$$\varphi = V_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad j \in J_V, \quad \Gamma_{j0} \neq \emptyset, \quad (12)$$

где величины Φ_j , I_j , Q_j и V_j зависят только от t , причем значения Φ_j изначально не известны, а знак «+» или «-» во второй формуле (11) для выражения тока I_j через заряд Q_j зависит от выбора направления тока во внешней цепи.

Замыкают постановку нестационарных задач для пьезоэлектрических сред начальные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_*(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_*(\mathbf{x}), \quad \varphi = \varphi_*(\mathbf{x}), \quad t = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (13)$$

причем при $\zeta_d = 0$, $\zeta_d^s = 0$ начальное условие на электрический потенциал не требуется.

2. Обсуждение и выводы. Представленная выше постановка нестационарных задач (1)–(13) для пьезоэлектрических наноразмерных тел позволяет адекватно учесть механическое и электрическое затухание и поверхностные эффекты. Для такой постановки в случае $\alpha_d = \alpha_d^s$, $\beta_d = \beta_d^s = \zeta_d = \zeta_d^s$ применим метод разложения по модам, аналогично [8]. Поверхностные эффекты, характерные для наноразмерных тел, здесь учтены в граничных условиях (4), (7), (9). Вместе с соответствующими определяющими соотношениями для поверхностных полей эти соотношения для нестационарных задач являются новыми.

Исходя из данной постановки, можно получить слабые формулировки динамических задач, причем как для нестационарных задач, так и для задач об установившихся колебаниях [6] и для задач на собственные значения [7], установить различные математические свойства решений (существование, единственность, дискретность спектра, теоремы об изменениях собственных частот при варьировании входных данных и т. д.), а также построить конечно-элементные аппроксимации. Как можно показать, для учета поверхностных эффектов можно использовать стандартное конечно-элементное программное обеспечение при дополнительном включении в расчетные модели поверхностных мембранных упругих элементов и поверхностных диэлектрических пленок. При решении получающихся конечно-элементных задач, аналогично [8], можно использовать различные численные алгоритмы, позволяющие сохранять симметричную седловую структуру конечно-элементных матриц, а также алгоритмы метода разложения по модам.

В качестве примеров в [6, 7] были представлены результаты вычислительных экспериментов по конечно-элементному решению задач об установившихся колебаниях и задач на собственные значения для продольно-поляризованного наноразмерного стержня из оксида цинка при различных варьируемых параметрах, характеризующих поверхностные эффекты.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00829, 13-01-00943).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Duan H. L., Wang J., Huang Z. P., Karimhaloo B. L.* Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress // *J. Mech. Phys. Solids*. 2005. Vol. 53. P. 1574–1596.
- [2] *Huang G. Y., Yu S. W.* Effect of surface piezoelectricity on the electromechanical behaviour of a piezoelectric ring // *Phys. Status Solidi B*. 2006. Vol. 243, № 4. P. R22–R24.
- [3] *Xiao J. H., Xu Y. L., Zhang F. C.* Size-dependent effective electroelastic moduli of piezoelectric nanocomposites with interface effect // *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 222, № 1–2. P. 59–67.
- [4] *Yan Z., Jiang L. Y.* Vibration and buckling analysis of a piezoelectric nanoplate considering surface effects and in-plane constraints // *Proc. R. Soc. A*. 2012. Vol. 468. P. 3458–3475.
- [5] *Zhang C., Chhn W., Zhang C.* On propagation of anti-plane shear waves in piezoelectric plates with surface effect // *Physics Letters A*. 2012. Vol. 376. P. 3281–3286.
- [6] *Nasedkin A. V., Eremeyev V. A.* Spectral properties of piezoelectric bodies with surface effects / In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 30. Surface effects in solid mechanics – Models, Simulations and Applications. Eds. Altenbach H., Morozov N. F. Springer–Verlag, Berlin, 2013. P. 105–121.
- [7] *Nasedkin A. V., Eremeyev V. A.* Harmonic oscillations of nanosize piezoelectric bodies with surface effects // *Proc. IRF'2013, IV Int. Conf. Integrity — Reliability — Failure*. Funchal, 23–27 Jun 2013. Eds. J.F. Silva Gomes, S.A. Meguid. Univ. Porto, Univ. Toronto, Univ. Madeira. INEGI, 2013. CD. Paper 4073. 19 p.
- [8] *Nasedkin A. V.* Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems / In: *Piezoceramic materials and devices*. Ed. I. A. Parinov. Nova Science Publishers, N.-Y., 2010. P. 177–218.

Altenbach H., Eremeyev V. A., Nasedkin A. V. *About some approaches to modeling of dynamic behaviours for piezoelectric nanodimensional bodies with surface effects.* The paper discusses about dynamic problems for piezoelectric (electroelastic) nanosized bodies with taking into account surface stresses and surface electric charges. Similar to the elastic bodies, when analyzing the piezoelectric nanosize media one can introduce surface stresses and distributed electric charges into the model by adding to the surface the corresponding elastic membranes and dielectric films.

РАЗРАБОТКА РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ДАВЛЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СМАЗКИ УПОРНОГО ПОДШИПНИКА, ОБЛАДАЮЩЕГО ПОВЫШЕННОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТЬЮ И ДЕМПФИРУЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

Ахвердиев К. С., Мукутадзе М. А., Лагунова Е. О.

Ростовский государственный университет путей сообщения

Как известно [1–3] при наличии в смазочной жидкости частиц присадок или продуктов износа, а также за счет пристенной ориентации ее молекул вблизи твердой опорной поверхности подшипника происходит расслоение смазки на слои с различной вязкостью. Слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре упорного и радиального подшипников рассматривалось в работах [4–9]. Существенный недостаток предлагаемой здесь методики заключается в том, что в расчетной модели не учитывается зависимость вязкости от давления. При больших значениях давления в смазочном слое вязкость смазки существенно возрастает и возникает необходимость учета зависимости вязкости от давления.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейная задача об установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости между ползуном и направляющей. Ползун с адаптированным профилем опорной поверхности считается неподвижным, а направляющая с пористым слоем на рабочей поверхности движется в сторону сужения зазора с заданной скоростью u^* . Предполагается, что зависимость вязкости смазки и проницаемости пористого слоя от давления выражаются формулами

$$\begin{aligned}\mu'_i &= \mu_{0i} e^{\tilde{\alpha}^* p'} \\ \tilde{k}' &= k_0 e^{\tilde{\alpha}^* p'}\end{aligned}\tag{1}$$

где μ_{0i} — характерные вязкости слоев; k_0 — характерная проницаемость пористого слоя; $\tilde{\alpha}^*$ — постоянная величина, определяемая экспериментально. В декартовой системе координат $x'O'y'$ уравнение адаптированного контура ползуна, границы раздела, а также направляющей с пористым слоем толщины H , можно записать в виде

$$\begin{aligned}y' &= h_0 + x' \operatorname{tg} \alpha^* - a' \sin \omega' x' = h'(x'), \quad y' = a' h'(x') \\ y' &= 0, \quad y' = -H,\end{aligned}$$

где α^* — угол наклона ползуна к оси Ox .

2. Основные уравнения. В качестве исходных уравнений берутся уравнения (1), а также безразмерные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости с учетом зависимости вязкости от давления и уравнение Дарси, учитывающее зависимость вязкости от давления ($i = 1, 2$)

$$\frac{\partial^2 \nu_i}{\partial y^2} = \frac{\Lambda_i}{e^{\tilde{\alpha}^* p}} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial \nu_i}{\partial x} = 0,\tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} + \frac{\tilde{\alpha} H^2}{l^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{H^2}{l^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

где размерные величины $x', y', u'_i, \nu'_i, p', \mu'_i$ в смазочном слое связаны с безразмерными $x, y, u_i, \nu_i, p, \mu_i$ соотношениями

$$y' = h_0 y, \quad x' = l x,$$

$$\nu'_i = u^* \nu_i, \quad u'_i = u^* \varepsilon u_i,$$

$$\varepsilon = h_0/l, \quad p' = p_a p, \quad \mu'_i = \mu_{0i} \mu_i, \quad \tilde{\alpha}^* = p_a \tilde{\alpha}.$$

В пористом слое переход к безразмерным переменным осуществлен по формулам

$$y' = H \zeta, \quad x' = l x, \quad P' = p_a P, \quad \tilde{k}' = k_0 \tilde{k}$$

P' — гидродинамическое давление в пористом слое.

3. Граничные условия. На поверхности ползуна и направляющей выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} u_1|_{y=0} &= -N \frac{\partial P}{\partial \zeta}|_{\zeta=0}, \quad \nu_1 = 1, \quad p(0) = p(1) = 1 \\ p &= P|_{\zeta=0}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta}|_{\zeta=-1} = 0, \quad u_2(1) = 0, \quad \nu_2 = 0, \quad \text{при } y = h(x) \\ h(x) &= 1 + \eta_1 x - \eta_2 \sin \omega x \\ \eta_1 &= \frac{l \operatorname{tg} \alpha^*}{h_0}, \quad \eta_2 = \frac{a'}{h_0}, \quad \omega = \omega' L \end{aligned} \quad (3)$$

На границе раздела слоев

$$\begin{aligned} u_1|_{y=\alpha h} &= u_2|_{y=\alpha h}, \quad \nu_1|_{y=\alpha h} = \nu_2|_{y=\alpha h}, \\ \frac{\partial \nu_1}{\partial y}|_{y=\alpha h} &= \frac{\mu_{02}}{\mu_{01}} \frac{\partial \nu_2}{\partial y}|_{y=\alpha h}, \\ \frac{u_i}{\nu_i}|_{y=\alpha h(x)} &= \alpha h'(x), \quad N = -\frac{k_0 l p_a}{\mu_{01} h_0 H u^*}, \\ h(x) &= 1 + \eta x - \eta_1 \sin \omega x, \end{aligned} \quad (4)$$

где α — граница раздела слоев.

Полагая толщину пористого слоя достаточно малой, уравнение Дарси осредним по толщине этого слоя

$$\int_0^{-1} \left(\frac{H^2}{l^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\tilde{\alpha} H^2}{l^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} \right) d\zeta = 0 \quad (5)$$

Находим точное автомодельное решение системы (2), удовлетворяющее граничным условиям (3) и (4) с учетом (5).

Гидродинамическое давление определяется по формуле

$$P = 1 + \frac{\tilde{c}_1}{\Lambda_1} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\eta x^2 - \frac{1}{2}\eta x + \frac{\eta_1}{\omega}(\cos \omega x - 1) - \frac{\eta_1 x}{\omega}(\cos \omega - 1)\right)$$

4. Определение основных рабочих характеристик подшипника. В случае, когда давление в начальном и конечном сечениях равно нулю для безразмерной нормальной силы воздействия смазки на движущуюся пластину и безразмерной силы трения, получим следующие выражения

$$W = \frac{\tilde{c}_1}{\Lambda_1} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}}{2}\right) \left(\frac{\eta}{12} + \frac{\eta_1}{\omega} - \frac{\eta_1}{\omega^2} \sin \omega + \frac{\eta_1}{2\omega}(\cos \omega - 1)\right) \quad (6)$$

$$L_{\text{тр}} = \int_0^1 \exp^{-\alpha p} \left(\frac{\tilde{\psi}''(0)}{h^2(x)} + \frac{\tilde{\nu}(0)}{h(x)} \right) dx =$$

$$= c_2 \left[1 - \eta - \frac{2\eta_1}{\omega} \cos(\omega - 1) \right] + c_6 \left[1 - \eta - \frac{\eta_1}{\omega} \cos(\omega - 1) \right]$$

Отметим, что предполагаемая модель имеет смысл, если область $0 \leq \zeta \leq 1$ охвачена вязким течением.

Безразмерные расходы Q_1 и Q_2 двухслойной смазочной жидкости определяются выражениями

$$Q_1 = \tilde{c}_2 \frac{\alpha^3}{6} + c_2 \frac{\alpha^2}{2} + c_3 \alpha$$

$$Q_2 = \frac{\tilde{c}_2}{6} + \frac{c_4}{2} + c_5 - c_6 \frac{\alpha^3}{6} - c_4 \frac{\alpha^2}{2} - c_5 \alpha$$

5. Основные выводы. Результаты численного анализа полученных аналитических выражений (6) для основных рабочих характеристик показывают:

1. Такой реально существующий фактор, как сложная двухслойная структура смазочной жидкости, приводит к изучению влияния структурного параметра α и вязкостного отношения k , а также параметра, обусловленного наличием пористого слоя на поверхности направляющей, на основные рабочие характеристики подшипника, прежде всего на поддерживающую силу и силу трения.

2. При значении $\omega = 3\pi/2$ несущая способность подшипника при любом значении $\alpha \in [0, 1]$ и $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$ практически в два раза выше, чем при $\omega = 0$.

3. Безразмерная сила трения имеет ярко выраженные точки максимума и минимума. Одна точка максимума совпадает с максимумом несущей способности, оптимальным значением параметра ω по несущей способности и силе трения является $\omega = 6$, $\alpha \in [0, 1]$, $\tilde{\alpha} \in [0, 1]$, соответствующее максимуму несущей способности и минимуму силы трения.

4. Наличие пористого слоя на рабочей поверхности направляющей обеспечивает подшипнику демпфирующие свойства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дерягин Б. В. К теории граничного трения // Развитие теории трения и изнашивания. М.: Изд. АН СССР. 1957. С. 15–26.
- [2] Ахматов А. С. Молекулярная физика граничного трения. Физматгиз, 1963.
- [3] Аэро Э. Л., Бессонов Н. М. Микромеханика межконтактных структурированных слоев жидкости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. 1989. № 23. С. 116–236.
- [4] Ахвердиев К. С., Мукутадзе М. А., Александрова Е. Е., Эркенов А. Ч. Математическая модель стратифицированного течения двухслойной смазочной композиции в радиальном подшипнике с повышенной несущей способностью с учетом теплообмена // Вестник РГУПС, № 1. 2011. С. 160–165.
- [5] Ахвердиев К. С., Александрова Е. Е., Мукутадзе М. А. Стратифицированное течение трехслойной смазки в зазоре упорного подшипника, обладающего повышенной несущей способностью // Новые материалы и технологии в машиностроении. Брянск. 2010. С. 3–6.
- [6] Ахвердиев К. С., Александрова Е. Е., Кручинина Е. В., Мукутадзе М. А. Стратифицированное течение двухслойной смазки в зазоре упорного подшипника, обладающего повышенной несущей способностью // Вестник ДГТУ, Т. 10, № 2 (45). 2010. С. 217–222.
- [7] Ахвердиев К. С., Александрова Е. Е., Мукутадзе М. А. Стратифицированное течение двухслойной смазки в зазоре сложнагруженного радиального подшипника конечной длины, обладающего повышенной несущей способностью // Вестник РГУПС, № 1, 2010. С. 132–137.
- [8] Ахвердиев К. С., Александрова Е. Е., Мукутадзе М. А. Стратифицированное течение двухслойной смазки в зазоре упорного подшипника, обладающего повышенной несущей способностью и демпфирующими свойствами // Проблемы синергетики в трибологии, трибоэлектрохимии, материаловедении и мехатронике. Материалы VIII международной научно-практической конференции. Новочеркасск, 2009. С. 14–23.
- [9] Ахвердиев К. С., Александрова Е. Е., Мукутадзе М. А., Копотун Б. Е. Стратифицированное течение двухслойной смазки в зазоре радиального подшипника, обладающего повышенной несущей способностью и демпфирующими свойствами // Вестник РГУПС, № 4, 2009. С. 133–139.

Achverdiev K.S., Mukutadze M.A., Lagunova E.O. *The development of two-layer hydrodynamic greasing elastic bearing with increased bearing ability and damping properties settlement model, taking into account dependence of viscosity on pressure.* Dependence of viscosity on pressure of two-layer hydrodynamic greasing elastic bearing at great values of pressure is investigated.

О НЕКОТОРЫХ АНОМАЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЯХ И ПРИРОДНЫХ ВИРУСАХ

**Бабешко В. А.¹, Евдокимова О. В.², Бабешко О. М.¹,
Федоренко А. Г.²**

¹*Кубанский государственный университет, Краснодар*

²*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

К числу природных вирусов относятся вирусы вибропрочности, достаточно детально исследованные в [1–14], а также новые, представленные в [15]. Приводятся примеры их особенностей.

1. Кратко напомним о вирусе вибропрочности [1–11]. Он формируется в слоистых линейно деформируемых полуграниченных средах для смешанных граничных задач, в частности, при наличии включений, трещин, штампов. Например, в случае воздействия штампа на упругий слой граничная задача приводит к вирусу вида [1–6]

$$\int_{-a}^a k(x - \xi)q(\xi)d\xi = 1 \quad |x| \leq a,$$
$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(u)e^{-iux}du Q(u) = \int_{-a}^a q(x)e^{iux}dx. \quad (1)$$

Символ интегрального уравнения $K(u)$ является четной мероморфной функцией и содержит счетное число нулей z_n и полюсов ξ_n , детально описанных в [2–6]. Конечное число нулей и полюсов $\pm z_n, \pm \xi_n, n \leq N$ являются вещественными, остальные — комплексные. Таким образом, имеет место представление вида

$$K(u) = \Pi(u)K_0(u), \Pi(u) = \prod_{n=1}^N (u^2 - z_n^2)(u^2 - \xi_n^2)^{-1} z_n > 0, \xi_n > 0,$$

$$n = 1, 2, \dots, N, K_0(u) > 0, K_0(u) |u| \rightarrow s, |u| \rightarrow \infty, s < \infty, \quad \text{Im } u = 0.$$

Количество вещественных нулей и полюсов зависит от частоты ω колебания штампа. Если частота колебания штампа меньше критической ω^* , т.е. $\omega < \omega^*$, вещественных нулей и полюсов нет [14]. С увеличением частоты количество вещественных нулей и полюсов растёт, причем появляется вначале вещественный полюс, затем вещественный нуль. Для простоты рассмотрим случай $N = 1$ на частоте, при которой имеет место излучение энергии в слое, т.е. $\omega > \omega^*$. Функция $K(u)$ имеет представление вида

$$K(u) = \Pi(u)K_0(u), \Pi(u) = (u^2 - z_1^2)(u^2 - \xi_1^2)^{-1}, \quad z_1 > 0, \xi_1 > 0. \quad (2)$$

При определенной ширине штампа и параметрах среды, на этой частоте имеет место локализация волнового процесса, что означает экспоненциальное убывание амплитуды колебания слоя при удалении от штампа [4, 6]. Условием локализации

является выполнение соотношения, названного «соотношением статичности». Это соотношение имеет следующий вид

$$Q_0(z_1) \equiv Vq_0(x) = 0, Vf = \int_{-a}^a f(x)e^{iux}dx. \quad (3)$$

Здесь функция $q_0(x)$ определяется из интегрального уравнения

$$\int_{-a}^a k_0(x - \xi)q_0(\xi)d\xi = 1, |x| \leq a. \quad (4)$$

Ядро имеет вид (1), в котором $K(u)$ заменяется на $K_0(u)$.

Условие локализации, означающее, что амплитуда колебания слоистой среды вне области, занятой штампом, экспоненциально убывает при удалении от штампа, приводит к тому, что энергия в системе «слоистая среда — штамп» в этом случае не излучается на бесконечность.

Как установлено в перечисленных работах, такое поведение слоистой среды имеет место для штампов, имеющих размеры a_p

$$a_p = \pi p + \theta + O(p^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad \theta = \arg K_0^+(z_1), \quad a_p \gg 1.$$

Здесь $K_0^+(u)$ является результатом факторизации функции $K_0(u)$, т. е. представления [12, 13] $K_0(u) = K_0^+(u)K_0^-(u)$.

Резонансная масса m в закритической области для выбранного a_p , для которого выполняется соотношение статичности, имеет значение [4, 6]

$$m = Q_0(0) \xi_1^2 z_1^{-2} \omega^{-2}, \quad Q_0(0) = \int_{-a}^a q_0(x)dx. \quad (5)$$

Этим результатом кардинально было изменено установившееся мнение о том, что в упругом слое для частот выше критических, начиная с которых в слое излучается на бесконечность энергия, резонанс массивного штампа не возможен.

2. Ради простоты приведем пример природного вируса, который содержится в смешанной граничной задаче для уравнения теплопроводности, описывающего состояние атмосферы в условиях высокого давления, приведшего к рассмотрению этой граничной задачи.

Смешанная начально-граничная задача задается соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= D\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \psi = \sigma(x, t), \quad x \in \partial\Omega^+; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega^m; \\ \psi &= T_p(x, t), \quad x \in \partial\Omega_p, \quad \psi = \psi_0(x, 0), \quad x \in \Omega, \quad x = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\psi(x, t)$ — искомая температура в области Ω ; $D^{-1} > 0$ — коэффициент температуропроводности среды, который считаем постоянным; n — внешняя к границе нормаль; $t \geq 0$ — время; $\psi_0(x, 0)$ — начальное значение температуры в области Ω . Примем во внимание, что исследование проводится на достаточно продолжительном, удаленном от начального состояния промежутке времени изменения температуры. Поэтому считаем, что в условный осеннее-зимний период (ОЗ)

температура $T(x, t)$ стабилизировалась и приняла на границе установившийся во времени режим охлаждения, описываемый соотношением

$$T_p(x, t) = f_{1p}(x)e^{-\omega t}, \quad \omega > 0. \quad (7)$$

Режим на верхней границе $\partial\Omega^+$ считаем в таком же виде установившимся во времени $\sigma(x, t) = \sigma_0 e^{-\omega t}$, $\omega > 0$, где σ_0 , можно считать постоянной.

Аналогично, в условно названный весенне-летний период (ВЛ) эта функция описывается соотношением нарастания нагрева территории, т. е.

$$T_p(x, t) = f_{2p}(x)e^{\varepsilon t}, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Здесь ω , ε — некоторые постоянные величины. Для новых неизвестных функций $\varphi(x)$, водимых для обоих случаев соотношениями

$$\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-\omega t}; \quad \psi(x, t) = \varphi(x)e^{\varepsilon t}, \quad (9)$$

получаем граничные задачи для (ОЗ) вида

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + k_1^2\varphi &= 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega^n; \\ \varphi &= f_{1p}(x), \quad x \in \partial\Omega_p, \quad k_1^2 = D\omega; \\ \varphi &= \sigma_0(x), \quad x \in \partial\Omega^+ \end{aligned} \quad (10)$$

и для (ВЛ) в форме

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - k_2^2\varphi &= 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega^n; \\ \varphi &= f_{2p}(x), \quad x \in \partial\Omega_p, \quad k_2^2 = D\varepsilon; \\ \varphi &= \sigma_0(x), \quad x \in \partial\Omega^+. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассматривая, ради упрощения, граничную задачу в прямоугольной декартовой системе координат в слое $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $0 \leq x_3 \leq h$ с плоскими границами, приходим к интегральным уравнениям вида

$$\begin{aligned} K_\lambda q_\lambda &\equiv \sum_p \int_{\partial\Omega_p} \int k_\lambda(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{\lambda p}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f_{\lambda s}^0(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \partial\Omega_s \\ k_\lambda(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \langle \alpha x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$K_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\lambda 3} h}{\alpha_{\lambda 3} \operatorname{ch} \alpha_{\lambda 3} h}, \quad \alpha_{13} = i\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_1^2} \quad \alpha_{23} = i\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k_2^2},$$

$$q_{\lambda s}(x_1, x_2) = P_{\Omega_s}(x_1, x_2) q_\lambda, \quad \lambda = 1, 2$$

$$f_{\lambda s}^0(x_1, x_2) = -f_{\lambda s}(x_1, x_2) + \sigma_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\langle \alpha x \rangle}}{\operatorname{ch} \alpha_{\lambda 3} h} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (13)$$

Имеют место следующие свойства

1) Пусть для системы интегральных уравнений (12) с ядром $K_{M\lambda}(\alpha_1, \alpha_2)$ со специальными правыми частями при $\lambda = 1$ выполняются условия проявления вируса (9) работы [4] последовательно для всех $m \leq m_0$, $\pi(m_0 - 0.5)h^{-1} \geq k_1$. Тогда в области $r > R$ имеет место соотношение

$$\frac{P_{r>R}\varphi(r)}{P_{\Omega_s}\varphi(\rho)} \rightarrow O(e^{-|Im\xi_m|(r-\rho)}), \quad m = m_0 + 1, \quad s = 1, 2, \dots P \quad (14)$$

Аналогично считаем, что для $\lambda = 2$ функция $\Pi_M(u)$ содержит для некоторого k_2^2 все нули и полюса вплоть до номера $m = m_0$ и $K_{M\lambda} = K_\lambda \Pi_M^{-1}$.

2) Пусть для системы интегральных уравнений (12) с ядром $K_{M\lambda}(\alpha_1, \alpha_2)$ со специальными правыми частями при $\lambda = 2$ выполняются условия проявления вируса (9) работы [4] последовательно для всех $m \leq m_0$. Тогда для любых фиксированных r и ρ в своих областях имеет место свойство

$$\frac{P_{\Omega_s}(x_1, x_2)\varphi(\rho)}{P_{r>R}(x_1, x_2)\varphi(r)} \rightarrow O(e^{|Im\xi_m|(r-\rho)}), \quad m = m_0 + 1, \quad s = 1, 2, \dots P \quad (15)$$

Таким образом, вирусы могут либо понижать температуру вне зоны неоднородностей, либо повышать в зоне неоднородностей.

Более общие природные вирусы встречаются в смешанных граничных задачах экологии, сейсмологии, теории прочности [15].

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (12-01-00330), (12-01-00332), (11-08-00381), м-(13-01-12003), р_юг_а (13-01-96502), (13-01-96505), (13-01-96508), (13-01-96509), грантов Президента РФ НШ-914.2012.1 и МК-2652.2013.1, программ ОЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В. А. «Вирусы» вибропрочности // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. 1994. Спец. выпуск. С. 90–91.
- [2] Бабешко В. А. О некоторых особенностях колебания полугораниченных тел // Письма в журнал технической физики. 1988. Т. 14. Вып. 8. С. 716–720.
- [3] Бабешко В. А. Эффект упругости слоя несжимаемой жидкости // Письма в журнал технической физики. 1988. Т. 14. Вып. 17. С. 1625–1627.

- [4] Бабешко В. А., Образцов И. Ф. О некоторых особенностях колебания полугораниченных областей // Доклады АН СССР. 1989. Т. 305. № 2. С. 306–309.
- [5] Бабешко В. А. Высокочастотный резонанс массивного штампа // Доклады АН СССР. 1989. Т. 306. № 6. С. 1328–1333.
- [6] Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Ф. Явление высокочастотного резонанса в полугораниченных телах с неоднородностями // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 3. С. 74–83.
- [7] Бабешко В. А. Среда с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 3. С. 5–9.
- [8] Бабешко В. А., Бужан В. В., Вильямс Р. (США) Вирусы вибропрочности в упругих твердых телах. Случай полупространства // ДАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 332–333.
- [9] Бабешко В. А., Бужан В. В., Вильямс Р. (США) К проблеме локализации вибрационного процесса в упругом твердом теле совокупностью плоских жестких включений // ДАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 765–767.
- [10] Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р. (США) К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей трещин // ДАН. 2002. Т. 382, № 5. С. 625–628.
- [11] Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В. Задачи о вибрации упругого полупространства, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 386, № 1. С. 43–45.
- [12] Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 473–477.
- [13] Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 183–186.
- [14] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 320 с.
- [15] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. 2012. Т. 447. № 1. С. 33–37.

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Fedorenko A. G. *Certain Anomalous Phenomena and Natural Viruses.* Natural Viruses are vibration-strength viruses which were investigated in reasonable detail in [1–14] and new which presented in [15]. The peculiarities of them are given in report.

АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

В работе анализируется поведение ударной контактной силы взаимодействия между соударяющимися телами в двухмассовой виброударной системе с двумя степенями свободы в зависимости от параметров периодической внешней нагрузки и характеристик жесткости самой системы. Решение уравнений движения выполняется численным методом продолжения решения по параметру в синтезе с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем и моделированием удара контактной силой на базе квазистатической теории Герца.

1. Введение. Виброударные машины и оборудование широко применяются в технике, поэтому изучение их динамического поведения, ударных сил взаимодействия между элементами в разных условиях работы вызывает значительный интерес и бурно развивается в последние десятилетия [1, 2]. Одной из важнейших характеристик виброударного движения механической системы является величина ударной силы. Виброударные системы — это сильно нелинейные системы, которые изменяют свою структуру за счет многократных соударений их элементов. Моделирование удара в таких системах с использованием волновой теории удара или дискретной модели с представлением твердого тела в виде некоторого числа конечных элементов вызывает значительные трудности, поэтому при исследовании динамики виброударных систем часто используются более грубые модели. Достаточно распространена модель, основанная на использовании квазистатической теории Герца [1, 3], рассматривающей лишь локальные деформации соударяющихся тел в зоне контакта. Удар предполагается упругим, низкоскоростным, коллинеарным, без трения, поверхности тел в зоне контакта — гладкими криволинейными, «Герцевыми». Действие удара моделируется нелинейной контактной силой, которая вводится в уравнения движения виброударной системы и присутствует лишь во время удара. Моделирование удара контактной силой Герца позволяет получить закон движения тел виброударной системы на всей временной оси, включая период удара, дает возможность учесть механические характеристики соударяющихся тел, определить длительность удара и величину ударной контактной силы.

Для построения решений нелинейных дифференциальных уравнений движения применяется метод продолжения решения по параметру [4] в синтезе с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем [5]. Эти методы в совокупности являются мощным численным инструментом решения нелинейных дифференциальных уравнений. Их применение позволяет находить решения шаг за шагом для каждого значения параметра, выбранного ведущим, пропуская переходный процесс и сокращая время построения решений уравнений

движения в установившихся режимах колебаний в десятки раз. При этом обеспечивается возможность достаточно простого распознавания зон неустойчивости найденных периодических колебаний. Эту методику удалось применить к исследованию динамики виброударных систем. Разработанные алгоритмы обеспечивают построение зависимостей полуразмахов колебаний тел, ударных сил контактного взаимодействия и других динамических характеристик сильно нелинейных виброударных систем от выбранного ведущего параметра, в частности, интенсивности внешней нагрузки и ее частоты. Анализ устойчивости полученных режимов позволяет найти зоны неустойчивых движений, где T -периодическое колебательное движение в действительности не реализуется (T — период внешней нагрузки) [6].

2. Постановка задачи. В работе анализируется контактное взаимодействие между телами двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы, состоящей из основного и присоединенного тел, связанных между собой линейными упругими пружинами и демпферами (рисунок 1). Основное тело подвержено действию внешней периодической нагрузки $F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где λ — параметр ее интенсивности. Эта виброударная система представляет собой классическую схему, где присоединенное тело может играть роль ударного гасителя колебаний. Удар моделируется силой контактного взаимодействия на базе теории

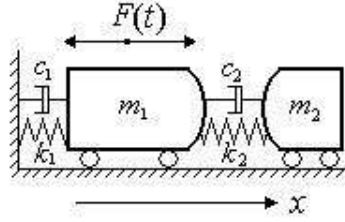


Рисунок 1 — Расчетная схема виброударной системы

Герца:

$$F_{con}(z) = K[H(z)z(t)]^{3/2}, K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \delta_i = \frac{1 - \mu_i^2}{E_i \pi}, i = 1, 2, \quad (1)$$

где $z(t)$ — относительное сближение тел за счет местной деформации в зоне контакта, $H(z)$ — ступенчатая функция Хевисайда, μ_i и E_i — коэффициенты Пуассона и модули Юнга материалов тел, A , B и q — характеристики местной геометрии зоны контакта. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{con}(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \\ &\quad - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{con}(x_2 - x_1)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$, $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$, $\chi = \frac{m_2}{m_1}$, ω_1 , ω_2 — парциальные частоты, $F_{con}(x_2 - x_1)$ — моделирующая сила контактного взаимодействия.

3. Характеристики ударной контактной силы. Нелинейные дифференциальные уравнения движения (2) интегрируются численным методом продолжения решения по параметру, который применяется в синтезе с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем [5, 6]. Зоны устойчивого и неустойчивого движения определяются по значениям мультипликаторов — собственных чисел матрицы монодромии. Зависимость максимального значения контактной силы от параметра интенсивности внешней нагрузки λ представлена на рисунке 2. В зонах неустойчивости T — периодического движения (участки

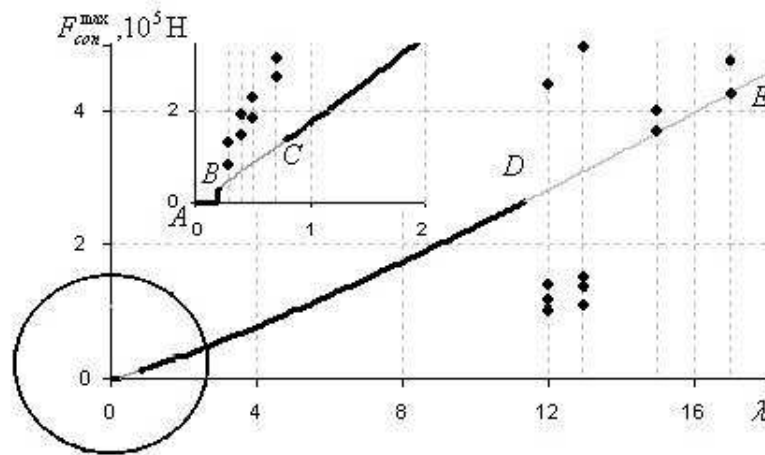


Рисунок 2 – Зависимость контактной силы от интенсивности внешней нагрузки

кривой BC и DE) реализуются nT — периодические многоударные режимы, в частности $4T$ — периодический 4-х ударный и $5T$ — периодический 2-х ударный, при малой внешней нагрузке (участок кривой AB) движение T — периодическое безударное. В каждом из k соударений в k — ударном режиме действует контактная сила. Их максимальные значения показаны точками при тех значениях λ , где решение уравнений движения при тех значениях, где решения уравнений движения были получены прямым численным интегрированием методом Рунге–Кутты 4-го порядка. С ростом интенсивности нагрузки сила контактного взаимодействия увеличивается. В многоударных режимах контактная сила больше по сравнению с одноударным. Зависимость максимального значения контактной силы от частоты внешней нагрузки ω дана на рисунке 3. В зоне резонанса (парциальные частоты $\omega_1 = 4,73$ рад/с, $\omega_2 = 6,28$ рад/с) контактная сила резко возрастает. Палитра зон неустойчивого движения достаточно разнообразна, контактная сила в таких режимах также возрастает. Особенно интересен диапазон частот $8,0$ рад/с $\leq \omega \leq 10,39$ рад/с, где существуют три разные ветви кривой. Две ветви соответствуют устойчивым режимам: ветвь LM — одноударному, а ветвь SN — безударному, а третья ветка MN — неустойчивому состоянию виброударной системы. Эти ветви получены при движении по кривой решений с разными начальными условиями и демонстрируют зависимость динамического состояния сильно нелинейной системы от ее начального состояния. На рисунке 4 в крупном масштабе времени изображены графики контактной силы за один удар при разных значениях жесткости соединительной пружины. Сильное уменьшение жестко-

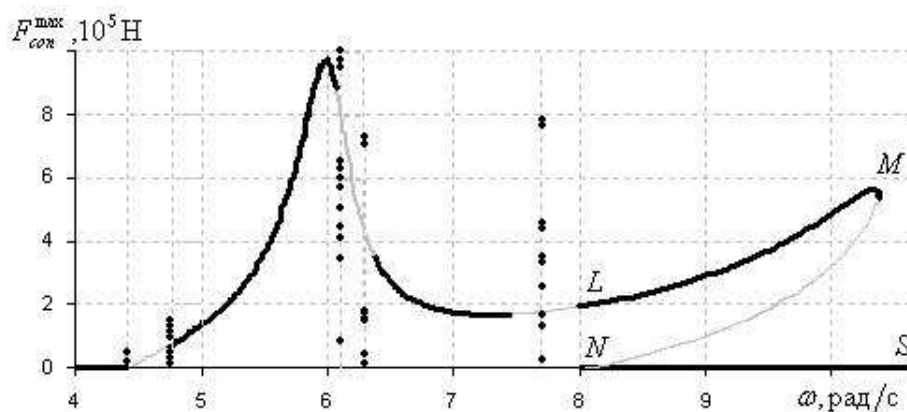


Рисунок 3 – Зависимость контактной силы от частоты внешней нагрузки.

сти ($k_1 = 22,3 \text{ Н/м}$) приводит к возникновению многоударных nT -периодических режимов. Значительно влияют на величину максимальной контактной силы ве-

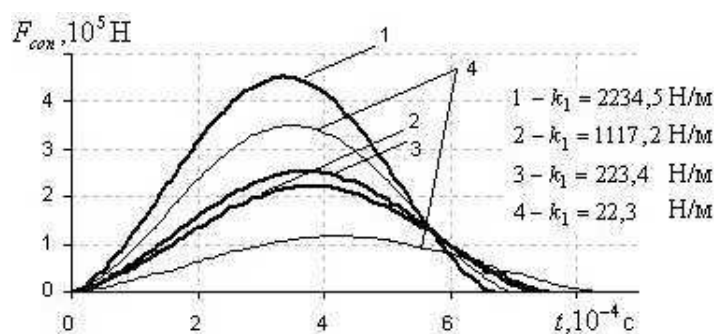


Рисунок 4 – Зависимость контактной силы от жесткости пружины

личины модулей упругости материалов контактирующих тел. В таблице 1 приведены значения максимальной контактной силы для четырех разных материалов ($E_1 = E_2$). Отметим интересный результат — модуль упругости каучука в 26000 раз меньше, чем стали, контактная сила меньше в 70 раз, при этом полуразмах основного тела уменьшился только в 1,24 раза!

Таблица 1 – Зависимость контактной силы от модулей упругости материалов тел

Материал	Сталь	Медь	Алюминий	Каучук
Модуль Юнга, 10^{11} Н/м^2	2,10	1,11	0,69	0,00008
F_{con}^{max} , 10^5 Н	4,51	3,49	2,89	0,065

Выводы. Величина ударной силы — одна из важнейших характеристик виброударного движения механической системы. Метод продолжения решения по параметру в синтезе с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем и моделированием удара силой контактного взаимодействия в соответствии с законом Герца дает исследователю мощный инструмент для численного

анализа динамического поведения виброударной системы, обеспечивая вычисление любых характеристик движения, в частности, контактной силы, в зависимости от параметра, выбранного ведущим. В работе проанализировано поведение силы контактного взаимодействия в зависимости от характеристик внешней нагрузки — ее интенсивности и частоты — и от параметров самой виброударной системы — жесткости соединительной пружины и модулей упругости материалов контактирующих тел. Разработанные методики существенно упрощают построения, связанные с исследованием режимов колебаний, в разы уменьшая вычислительные затраты, обеспечивая достаточно простое определение зон неустойчивости колебательного движения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Междунар. прогр. образования, 1997. 336 с.
- [2] Ibrahim R. J. *Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2009. № 43. P. 31–54.
- [3] Гольдсмит В. Теория и физические свойства соударяемых тел. Пер. с англ. М., Стройиздат, 1965. 449 с.
- [4] Шалашилин В.И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
- [5] Гуляев В. И., Баженов В. А., Дехтярюк Е. С., Гоцуляк Е. А., Лизунов П. П. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах. Львов:Вища школа, 1983. 286 с.
- [6] Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г. Анализ динамического поведения виброударных систем разных типов. LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH & Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. 132 с.

Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G. *Contact interaction analysis for strong nonlinear vibroimpact system by parameter continuation method.* The behaviour of contact interaction force between colliding bodies for two-mass two-degree-of-freedom vibroimpact system under periodic external load was analyzed. We examined dependences of the contact force from external load parameters and from vibroimpact system hardness characteristics. Solutions of nonlinear movement equations were found by numerical parameter continuation method in synthesis with method of periodical solutions construction for essentially nonlinear systems and with impact simulation by nonlinear contact force according to the quasistatic Hertz's theory.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛЗУЧЕСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ОДИНОЧНОГО ДЕФЕКТА СПЛОШНОСТИ В УСЛОВИЯХ РАЗВИВАЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Бажин А. А.¹, Буренин А. А.², Мурашкин Е. В.^{1,3}

¹*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток*

²*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре*

³*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*

В представленном сообщении рассматривается проблематика построения моделей обобщающих модель больших упругопластических деформаций на случаи учета реологических свойств деформирования материалов (ползучесть, релаксация напряжений). В качестве примера использования предлагаемой модели решена задача о сжатии полого шара под действием внешнего давления. По результатам численных экспериментов указаны законы движения границы микродефекта сплошности, границ пластической области, построены поля остаточных деформаций и напряжений после полной разгрузки среды.

1. Введение

Теория пластического течения подразумевает разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие. Из-за невозможности опытного измерения таких составляющих в отличие от полных деформаций, данное разделение оказывается произволом конструктора математической модели. Именно такой произвол является главной причиной существующего разнообразия в построениях моделей больших упругопластических деформаций [1–6]. Впервые геометрически корректная математическая модель больших упругопластических деформаций была построена в 1969 году [6], в которой разделение деформаций на обратимые и необратимые было связано с предположении о соответствии каждому деформированному состоянию единственного состояния разгрузки, когда обратимые деформации отсутствуют во всем продеформированном теле. В то же время такой подход остается доминирующим при построении моделей больших упругопластических деформаций [1, 4, 5]. Другой геометрически и термодинамически непротиворечивый подход к построению модели предложил В.П. Мясников [3], в котором в соответствии с формализмом неравновесной термодинамики определение обратимых и необратимых деформаций следовало из формулировки для них дифференциальных уравнений переноса. Вариант конкретизации источников и потоковых слагаемых в уравнении изменения (переноса) обратимых и необратимых деформаций был предложен в [2]. Здесь проведем обобщение модели [2, 9] на случай учета нелинейной вязкости деформируемой среды как в случае ее пластического течения, так и при разгрузке, и при деформировании, предваряющем течение.

2. Моделирование больших деформаций

Полагаем, что наряду с температурой (энтропией) параметрами состояния деформируемого тела являются обратимые и необратимые деформации. Компоненты последних в прямоугольной системе пространственных координат Эйлера обозначим через e_{ij} и p_{ij} соответственно. Постулируем уравнения изменения (переноса) для данных составляющих полных деформаций в форме

$$\begin{aligned}\frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - 0.5((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + \\ &\quad + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}\frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i}), \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = 0.5(v_{i,j} - v_{j,i}), \\ z_{ij} &= A^{-1}\{(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{km}e_{mj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mj}) + \\ &\quad + e_{ik}\varepsilon_{km}e_{mn}e_{nj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mn}e_{nj}\}, \quad z_{ij} = -z_{ji}, \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{jj}, \quad E_2 = e_{jm}e_{mj}, \quad E_3 = e_{jm}e_{mn}e_{nj}.\end{aligned}\quad (2)$$

В записи уравнений переноса для тензоров e_{ij} и p_{ij} наряду с естественными требованиями их симметрии принято условие обращения тензора p_{ij} в ноль при отсутствии источника ($\gamma_{ij} = 0$) в изменении данного тензора; согласно второму равенству из (1) компоненты p_{ij} тензора необратимых деформаций изменяются в таком случае также, как если бы тело (или система координат) поворачивалась как жесткое целое ($Dp_{ij}/Dt = 0$). Из уравнений переноса (1) и (2) разделение полных деформаций Альманси d_{ij} получается естественным образом в форме

$$\begin{aligned}d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\ d_{ij} &= 0.5(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{i,k}u_{k,j})\end{aligned}\quad (3)$$

В (3) u_i — компоненты вектора перемещений точек деформированной среды. Согласно (3) в качестве тензора обратимых деформаций следовало бы выбрать тензор $s_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$, так как при $p_{ij} = 0$ имеем $d_{ij} = s_{ij}$. Введение в рассмотрение тензора e_{ij} вызвано не только относительной простотой в записи для него уравнения переноса (1), но и в простоте записи с таким тензором аналога формулы Мурнагана. Аналог формулы Мурнагана можно получить как следствие гипотезы о независимости свободной энергии от необратимых деформаций. В условиях принятия данной гипотезы, как и в [9] получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}) \quad (4)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \gamma_{ji} \quad (5)$$

Таким образом обратимые деформации задают консервативный механизм деформирования: по известным таким деформациям определяются, как и в классической среде Прандтля-Рейса, напряжения, если только упругий потенциал $W = W(e_{ij})$ определен (ρ_0 — плотность среды в свободном ее состоянии). Диссипативный механизм деформирования задается источником в правой части уравнения баланса энтропии (5), который определяется скоростями γ_{ij} накопления необратимых деформаций. Заметим, что (4) непосредственно переходит в известную в нелинейной теории упругости формулу Мурнагана при отсутствии необратимых деформаций ($p_{ij} \equiv 0$)

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj})$$

Далее будет использоваться аналог формулы Мурнагана (4), переписанный для случая несжимаемой среды

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \text{ при } p_{ij} \neq 0. \quad (6)$$

В качестве упругого потенциала изотропной и несжимаемой среды будем использовать разложение

$$\begin{aligned} W = W(J_1, J_2) &= (\alpha - \mu)J_1 + \alpha J_2 + \beta J_1^2 - \xi J_1 J_2 - \chi J_1^3, \\ J_1 &= s_{jj}, \quad J_2 = s_{ij}s_{ji}, \quad s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) параметр среды μ отождествляется с модулем сдвига, α, β, ξ, χ — упругие модули более высокого порядка. Считаем, что вязкие свойства среды проявляются с самого начала процесса деформирования. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, введя потенциал $V = V(\sigma_{ij})$ в форме

$$\begin{aligned} V(\sigma_{ij}) &= B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}\{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\}}, \\ \sigma &= \frac{1}{3}\sigma_{jj} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, B, n — постоянные материала. Инвариант Σ тензора напряжений с точностью до постоянного множителя совпадает с октаэдрическим напряжением (интенсивностью напряжений). Для источника γ_{ij} в уравнении (1) изменения (переноса) необратимых деформаций, считая последние деформациями ползучести, полагаем

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (9)$$

Таким образом γ_{ij} отождествляется с тензором скоростей деформаций ползучести ε_{ij}^v , а диссипативный потенциал выбран в форме степенного закона ползучести [7]. Очевидно, что выбор закона ползучести в форме (8) и (9) является только

одной из возможностей. Записанные выше соотношения составляют замкнутую математическую модель изотермического деформирования.

Когда напряженное состояние в некоторых точках деформируемой среды достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования в окрестностях таких точек меняется — начинается пластическое течение. С целью конкретизации последующего принимаем, что поверхностью нагружения в пространстве главных напряжений является цилиндрическая поверхность Мизеса с уравнением

$$f(\sigma_{ij}) = \tau_{ij}\tau_{ji} - \frac{8}{3}k^2 = 0, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma, \quad (10)$$

В (10) k — постоянная материала (предел текучести). Согласно (10) вязкими свойствами материала в условиях его пластического течения пренебрегается. Принимая условия принципа максимума Мизеса [7], формулируем ассоциированный закон пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0 \quad (11)$$

В областях пластического течения γ_{ij} отождествляется со скоростями пластических деформаций. Отмечаем, что (10) и (11) задают простейшую конкретную модель течения, которая может при необходимости уточняться.

3. Заключение.

В [9] на примере одиночного дефекта сплошности (микропора, микротрещина) в среде с упругими и пластическими свойствами и допускающей большие деформации было показано, что неучёт реологических свойств среды приводит к эффекту «приспосабливаемости» среды к нагрузкам по типу «нагрузка - разгрузка». В таком случае размеры дефекта после каждой разгрузки оказываются одинаковыми, неизменным остается и уровень и распределение остаточных напряжений в окрестности дефекта. Если учитывать вязкость среды только при её пластическом течении [9], то с ростом циклов размеры дефекта будут возрастать, что задает степень роста поврежденности и снижение усталостной прочности. Известен противоположный эффект, когда за счет предварительной квазистатической обработки материала значительным гидростатическим давлением его усталостная прочность возрастает, что объясняется [10] явлением «залечивания» микродефектов в условиях ползучести материала. Таким образом учет реологических свойств материала выводит из парадоксальной ситуации приспособляемости к циклическим нагрузкам по типу «нагрузка - разгрузка». В [11] предпринималась попытка объяснения упрочнения материала при таких нагрузках, когда до стадии пластического течения и при разгрузке свойства материала моделировались тензорно-линейным уравнением вязкоупругости. Оказалось, что действительно на каждом шаге цикла нагружения и разгрузки размеры дефекта уменьшаются, как и уровень остаточных напряжений. Однако, количественная оценка данного эффекта оказалась незначительной. Построенная здесь математическая модель больших деформаций в отличие от используемой в [11] базируется на нелинейном законе ползучести (8) и (9) и потому предоставляет возможность оценить эффект залечивания микродефектов сплошности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Левитас В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 232 с.
- [2] *Быковцев Г. И., Шитиков А. В.* Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С 59–62.
- [3] *Мясников В. П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
- [4] *Чернышов А. Д.* Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120–128.
- [5] *Роговой А. А.* Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикл. мех. и техн. физика. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
- [6] *Lee E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1969. Vol. 36, № 1. P. 1–6.
- [7] *Локощенко А. М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
- [8] *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [9] *Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 316–325.
- [10] *Горелов В. И.* Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикл. мех. и техн. физика. 1984. № 5. С. 157–158.
- [11] *Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мурашкин Е. В.* Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикл. мех. и техн. физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 110–119.

Bazhin A. A., Burenin A. A., Murashkin E. V. *Simulation of the creep in the vicinity of a single defect of continuity in terms of the plastic flow evolution*. In the present report we focuses on the problems of construction of models generalizing model of large elastic-plastic deformation to the case of the rheological properties of the material deformation (creep, stress relaxation). As an example of using the proposed model the problem of compression of a hollow sphere under external pressure is solved. According to the results of numerical experiments the laws of motion of the boundary microdefect continuity, limits the field of plastic, constructed field of residual stresses and strains after a full discharge protection are shown.

ОПТИМИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ НА УПРУГИХ ОПОРАХ

Баничук Н. В.¹, Барсук А. А.², Макеев Е. В.¹,
Синицын А. В.¹

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

²Молдавский государственный университет, Кишинев

Исследуется задача оптимизации по критерию устойчивости бесконечной балки лежащей на периодической системе упругих опор. В качестве управляющей функции выбрано распределение толщин балки из класса периодических функций с периодом равным расстоянию между соседними опорами. С использованием теоремы Флоке многоточечная спектральная краевая задача об устойчивости неограниченной неразрезной балки формулируется на конечном и равном периоде интервале. Решение задачи оптимизации строится в форме квадратур.

Для описания изгиба балки при потере ее устойчивости введем ось x , совмещающую ее с осью недеформированной балки с началом в одной из опор ($x_n = nl$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Обсуждаемая задача об устойчивости неразрезной балки [1], сжимаемой силой P , представляет собой многоточечную периодическую спектральную задачу

$$(EI(x)w_{xx})_{xx} + Pw_{xx} = 0, x_{n-1} < x < x_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

$$w^+(x_n) = w^-(x_n), w_x^+(x_n) = w_x^-(x_n), \quad (2)$$

$$EI^+(x_n)w_{xx}^+(x_n) = EI^-(x_n)w_{xx}^-(x_n), \quad (3)$$

$$(EI^+(x_n)w_{xx}^+(x_n))_x - (EI^-(x_n)w_{xx}^-(x_n))_x = -kw(x_n), \quad (4)$$

где E — модуль Юнга, $I(x) = A_m S^m(x)$ — момент инерции поперечного сечения, $S(x)$ — распределение площадей поперечных сечений, A_m ($m = 1, 2, 3$) — коэффициенты, характеризующие тип поперечных сечений. Принимается, что $S(x) \equiv (S(x + jl))$, ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — периодическая функция с периодом l (l — расстояние между соседними опорами). Верхними символами $^\pm$ отмечаются предельные значения соответствующих величин в точках при стремлении к этим точкам справа (символ $^-$) и слева — (символ $^+$). Условия сопряженности (2)–(4) означают непрерывность прогиба, производной прогиба, изгибающего момента, условие сопряжения для упругой опоры.

Теорема Флоке [2] позволяет представить решение в виде

$$w(x, \alpha) = w^0(x) \exp(i\alpha x), -\infty < x < \infty, w^0(x + jl) = w^0(x), \alpha \in [0, 2\pi/l],$$

где j произвольное целое число.

При этом многоточесная периодическая спектральная задача (1)–(4) в предположении выполнения условий непрерывности жесткостных характеристик в точках x_n : $EI^+(x_n) = EI^-(x_n)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ формулируется на интервале периодичности $[0, l]$

$$(EI(x)w_{xx})_{xx} + Pw_{xx} = 0, 0 < x < l, \quad (5)$$

$$w(l, \alpha) = w(0, \alpha) \exp(i\alpha l), w_x(l, \alpha) = w_x(0, \alpha) \exp(i\alpha l), \quad (6)$$

$$EI(l)w_{xx}(l, \alpha) = EI(0)w_{xx}(0, \alpha) \exp(i\alpha l), \quad (7)$$

$$(EI(l)w_{xx}(l, \alpha))_x = [(EI(0)w_{xx}(0, \alpha))_x + kw(0, \alpha)] \exp(i\alpha l) \quad (8)$$

Уравнение равновесия допускает двукратное интегрирование и преобразуется к виду

$$EI(x)w_{xx} + Pw = D_1x + D_2,$$

где D_1, D_2 — неопределенные постоянные.

Спектральной краевой задаче (5)–(8) соответствует ее вариационная формулировка:

$$P(\alpha) = \min_{w(x, \alpha) \in B, w^*(x, \alpha) \in B^*} \frac{\frac{1}{2} \int_0^l EI(x)w_{xx}(x, \alpha)w_{xx}^*(x, \alpha)dx + \frac{1}{2}kw(0, \alpha)w^*(0, \alpha)}{\frac{1}{2} \int_0^l w_x(x, \alpha)w_x^*(x, \alpha)dx} \quad (9)$$

Символом B обозначен класс функций $w(x, \alpha)$, удовлетворяющих граничным условиям (6)–(8), B^* — соответственно класс комплексно сопряженных функций $w^*(x, \alpha)$, удовлетворяющих комплексно сопряженным к (6)–(8) граничным условиям.

Варьируя функционал (9), получим в качестве уравнения Эйлера уравнение (5).

Задача опимизации с учетом введения безразмерных величин (знак «тильды» в дальнейшем опускаем)

$$x = l\tilde{x}, S(x) = \frac{V\tilde{S}(x)}{l}, P = \frac{A_m V^m}{l^{m+2}}\lambda, \frac{kl^{m+3}}{A_n V^m} = \gamma, \int_0^l S(x)dx = V, m = 1, 2, 3$$

формулируется в виде

$$\lambda(S) \rightarrow \max_S, \int_0^1 S(x)dx = 1, \quad (10)$$

где

$$\lambda(S) = \min_{w(x) \in B, w^*(x) \in B^*} \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 S^m(x)w_{xx}(x)w_{xx}^*(x)dx + \frac{\gamma}{2}w(0)w^*(0)}{\frac{1}{2} \int_0^1 w_x(x)w_x^*(x)dx} \quad (11)$$

Необходимое условие экстремума $\delta\lambda(S) = 0$ для задачи оптимизации (10)–(11) записывается в виде

$$M(x)M^*(x) = S^{m+1}, M(x) = S^m(x)w_{xx}, \int_0^1 w_x(x)w_x^*(x)dx = \frac{m}{\mu}, \quad (12)$$

где $\mu > 0$ — множитель Лагранжа, $m=1,2,3$. При этом уравнение равновесия относительно изгибающего момента записывается в виде

$$M_{xx}(x) + \lambda \frac{M(x)}{S^m(x)} = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad (13)$$

а оптимальное распределение толщин и соответствующие изгибающие моменты и прогибы разыскиваются в классе функций:

$$S(x) = S(1-x), w(x) = w^*(1-x), M(x) = M^*(1-x)$$

Запишем представление для двух первых интегралов для уравнения (13)

$$M_x(x)M_x^*(x) + (m+1)\lambda S(x) = C_1, C_1 - real, \quad (14)$$

$$M_x(x)M^*(x) - M(x)M_x^*(x) = 2iC_2, C_2 - real \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) и представляют собой первые интегралы для дифференциального уравнения (13) с функцией $S(x)$, удовлетворяющей необходимому условию оптимальности (12).

После выполнения необходимых преобразований приходим к нелинейному дифференцируемому уравнению относительно искомого оптимального распределения толщины $S(x)$

$$\frac{dS}{dx} = \pm \frac{2}{m+1} \frac{\sqrt{g_m(S)}}{S^m}, g_m(S) = C_1 S^{m+1} - (m+1)\lambda S^{m+2} - C_2^2, \quad (16)$$

$$g_m(S_0) = \frac{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{(1 - \frac{4\lambda}{\gamma} \sin^2 \frac{\alpha}{2})^2} S_0^{2(m+1)}, S_0 = S(x_0), m = 1, 2, 3, \quad (17)$$

С целью сокращения последующей записи введем обозначения (для случая $\lambda = 1$)

$$I_1(m, \beta, \beta_0, s) = \int_{\beta_0}^s \frac{\tau^m d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\beta)g_m^0(\beta, \tau)}}, \quad (18)$$

$$I_2(m, \beta, \beta_0) = \int_{\beta_0}^1 \frac{\tau^{m+1} d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\beta)g_m^0(\beta, \tau)}}, \quad (19)$$

$$I_3(n, \beta, \beta_0) = \int_{\beta_0}^1 \frac{d\tau}{\tau \sqrt{(1-\tau)(\tau-\beta)g_m^0(\beta, \tau)}}, \quad (20)$$

$$g_m^0(\beta, s) = \alpha_{m0} + \alpha_{m1}s + \dots + \alpha_{mm}s^m, \quad (21)$$

$$\alpha_{m0} = \frac{\beta^m(1-\beta)}{1-\beta^{m+1}} (m = 1, 2, 3), \alpha_{m1} = \frac{\beta^{m-1}(1-\beta^2)}{1-\beta^{m+1}} (m = 2, 3),$$

$$\alpha_{32} = \frac{\beta(1-\beta^3)}{1-\beta^4}, \alpha_{mm} = 1 (m = 1, 2, 3),$$

$$S(x) = S^*s(x), s(0) = \beta_0, s(1) = 1, \quad (22)$$

и представим решение задачи оптимизации в форме квадратур

$$\frac{\sqrt{m+1}}{2} S^{*\frac{m}{2}} I_1(m, \beta, \beta_0, s) = x, 0 \leq x \leq 0.5, (m = 1, 2, 3), \quad (23)$$

где параметры β, β_0, S^* определяются из следующей системы трансцендентных уравнений:

$$\frac{\sqrt{m+1}}{2} S^{*\frac{m}{2}} I_1(m, \beta, \beta_0, 1) = \frac{1}{2}, \quad (24)$$

$$\frac{m+1}{2} \sqrt{\frac{\beta^{m+1}(1-\beta)}{1-\beta^{m+1}}} I_3(m, \beta, \beta_0) = \frac{\alpha}{2}, \quad (25)$$

$$(m+1)(1-\beta_0)(\beta_0-\beta)g_m^0(\beta, \beta_0) = \frac{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{(1 - \frac{4}{\gamma} \sin^2 \frac{\alpha}{2})^2} \beta_0^{2m+2} S_*^m \quad (26)$$

Выражение для величины объема, отвечающего распределению $s(x)$ и значению $\lambda = 1$ имеет вид $V = \sqrt{m+1} I_2(m, \beta, \beta_0) S^{*\frac{m+2}{2}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-08-00030а), Программы ОЭММПУ РАН № 12 и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 2611.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Timoshenko S. P., Gere J. M.* Theory of Elastic Stability. NY., Toronto: McGrawHill, 1961. 550 p.
- [2] *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1971. 720 с.

Banichuk N. V., Barsuk A. A., Makeev E. V., Sinitsyn A. V. *Optimization of the stability of sustainable continuous beam on elastic supports.* Stability of sustainable continuous beams locating on a periodic system of elastic supports is considered. We formulate and investigate the problem of optimization of the stability of infinite beams location on a periodic system of elastic supports. As a control function we take the thickness distribution of the beam from the class of periodic functions with a constant distance between adjacent supports. By using Floquet theory multipoint spectral problem of the stability of unlimited continuous beam is formulated in the finite interval. The solution is obtained in the quadrature form for the optimization.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ КРОВИ В ЛЕВОМ ЖЕЛУДОЧКЕ СЕРДЦА

Батищев В. А., Гетман В. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследовано поведение малых спиральных возмущений в сходящемся стационарном потоке маловязкой жидкости в конфузоре. Эта задача относится к проблеме возникновения винтовых течений крови в левом желудочке сердца. Считается, что спиральное течение возникает в сердечном желудочке в диастолу и усиливается в систолу ввиду наличия особой закрученной природы слоев мускулатуры на стенках желудочка. В работе рассматривается дополнительный механизм возникновения винтовых течений крови в сердечном желудочке вблизи входа в аорту. Именно, предполагается, что этот механизм связан с неустойчивостью сходящегося потока жидкости в левом желудочке сердца. На примере течения жидкости в конфузоре (поверхность усеченного конуса) показано, что в сходящемся потоке маловязкой жидкости возникает невязкая спиральная неустойчивость, что и приводит к возникновению и усилению спиральных потоков.

1. Введение. Закрученные потоки крови в аортах человека и животных привлекли пристальное внимание ученых во второй половине прошлого века. Отметим, что впервые на этот факт указал еще Вильям Гарвей в 1628 г., обнаружив вращение крови в сердце при вскрытой грудной клетке. В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал по этой проблеме. Отметим, что винтовые течения крови возникают при наполнении кровью левого сердечного желудочка. В систолу при открытом аортальном клапане закрученный поток крови перемещается в восходящую часть аорты. К механизму возникновения спиральных течений в аорте относится и анизотропный характер тонких упругих стенок аорты. Это показано профессором Ю.А. Устиновым в его публикациях. В настоящее время считается, что винтовые течения крови в сердечном желудочке связаны с особенностями строения слоев мускулатуры на стенках желудочка и вызваны разнонаправленным сокращением мускулатуры желудочков. Этот закрученный поток возникает в диастолу при закрытом аортальном клапане и усиливается в систолу. В работе предполагается, что при открытии аортального клапана возникает быстрый сходящийся поток крови в левом желудочке сердца, который оказывается неустойчивым по отношению к спиральным возмущениям. По аналогии с течением в конфузоре, возникающие спиральные возмущения усиливаются вдоль сходящегося потока и создают закрученное течение жидкости на входе в аорту.

2. Постановка задачи. Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в конфузоре (область, оганиченная поверхностью усеченного конуса) на основе системы уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

На стенке конфузора S выполняется условие прилипания жидкости $\mathbf{v}|_S = 0$. Задача решается в сферических координатах r, θ, φ . Начало системы координат находится в точке пересечения образующих поверхности конфузора. Течение жидкости

считается осесимметричным, т. е. вектор скорости $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi)$ и давление не зависят от окружной координаты φ . Обозначим через Q средний расход жидкости, который считается постоянным. Пусть a радиус выходного сечения конфузора. α — величина угла между осью симметрии и образующей поверхности конфузора. Задача имеет безразмерные параметры: $\text{Re} = Ua/\nu$, $S_t = a\omega_*/U$, α . Здесь U — масштаб скорости, определяемый как среднерасходная скорость жидкости $U = Qa^{-2}$. Параметр ω_* вводится как частота колебаний малых спиральных возмущений. Re — число Рейнольдса. Задача решается для случая больших чисел Рейнольдса. Введем малый параметр $\varepsilon_\nu^2 = \nu/(Ua)$. Параметр $\varepsilon_\nu = 1/\sqrt{\text{Re}}$ определяет толщину пограничного слоя на стенке конфузора.

3. Стационарный режим. Ниже будет рассматриваться стационарный поток жидкости, на который наложены малые, периодические по времени спиральные возмущения. При больших числах Рейнольдса главным приближением стационарного потока является продольное течение идеальной жидкости в конфузоре и пограничный слой на стенке. Асимптотические разложения для описания этого потока представим в виде

$$v_r = v_{r0} + h_{r0} + O(\varepsilon_\nu), \quad v_\theta = \varepsilon_\nu(v_{\theta1} + h_{\theta1}) + O(\varepsilon_\nu^2), \quad \varepsilon_\nu \rightarrow 0.$$

Стационарный режим считается незакрученным, поэтому $v_\varphi = 0$. Аналогичное разложение вводится и для давления. Компонента v_{r0} удовлетворяет уравнениям Эйлера и получается в виде $v_{r0} = -1/r^2$. Знак минус означает, что поток движется от большего основания конуса к меньшему. На поверхности конфузора возникает стационарный пограничный слой, описываемый компонентами $h_{r0}, h_{\theta1}$. Сумма $v_{r0} + h_{r0}$ удовлетворяет уравнениям пограничного слоя Прандтля. Рассмотрим решение системы уравнений Прандтля в случае $a \ll l$, где l расстояние от начала координат вдоль поверхности конфузора до точки, лежащей на входном сечении поверхности конфузора. Система уравнений пограничного слоя упрощается, ввиду пренебрежения малыми порядка $O(a/l)$. Полученные уравнения описывают пограничный слой Блазиуса на плоской пластине, решение которого известно. Отметим, что при втекании равномерного потока в цилиндр, моделирующий крупный кровеносный сосуд, на стенке возникает пограничный слой, решение для которого в первом приближении также совпадает с решением Блазиуса.

4. Асимптотические разложения. Исследуем поведение спиральных возмущений, наложенных на стационарный поток. Предположим, что амплитуда этих возмущений мала и имеет порядок $O(\varepsilon_\varphi)$. Отметим, что теперь задача содержит два малых параметра $\varepsilon_\nu, \varepsilon_\varphi$. Асимптотические разложения решения задачи при $\varepsilon_\varphi \rightarrow 0$ построим в виде

$$v_r = (v_{r0} + h_{r0} + O(\varepsilon_\nu)) + \varepsilon_\varphi^2 v_r^1 + \dots$$

Функции v_{r0}, h_{r0} определяются при расчете стационарного режима. Слагаемое v_r^1 учитывает спиральные возмущения. Аналогичные ряды строятся для давления и компоненты скорости v_θ . Приведем уравнение для окружной компоненты скорости

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \text{ctg } \theta = \\ = \varepsilon_\nu^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \end{aligned}$$

Окружную компоненту скорости представим в виде суммы двух слагаемых $v_\varphi = w_\varphi + N$. Функция w_φ описывает решение во всей области, за исключением области пограничного слоя. Функция N определяет поправку к функции w_φ в области пограничного слоя. Функцию w_φ определим как решение следующей краевой задачи, которая учитывает асимптотические разложения для v_r, v_θ

$$\begin{aligned} S_t \frac{\partial w_\varphi}{\partial t} + v_{r0} \left(\frac{\partial w_\varphi}{\partial r} + \frac{w_\varphi}{r} \right) &= \frac{\varepsilon_\nu^2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w_\varphi}{\partial r} \right) \right) + \\ \frac{\varepsilon_\nu^2}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{w_\varphi}{\sin^2 \theta} \right), \\ w_\varphi &= 0(\theta = \pm \alpha), \quad w_\varphi(r, \theta, t + T) = w_\varphi(r, \theta, t). \end{aligned}$$

Краевые условия по координате r определяются условиями на входе в конфузор. Функция w_φ определяет основной вклад в выражение для окружной компоненты скорости v_φ и имеет порядок $O(\varepsilon_\nu)$. Функция N дает малую поправку к w_φ и имеет порядок $O(\varepsilon_\nu \varepsilon_\varphi)$. Особенностью уравнения для w_φ является то обстоятельство, что в области пограничного слоя это уравнение не учитывает влияния функций пограничного слоя h_{r0} и др., которые входят в асимптотические ряды для компонент v_r, v_θ . В этом случае возникает невязка в уравнениях. Однако, оказывается, что эта невязка мала и имеет порядок $O(\varepsilon_\nu \varepsilon_\varphi)$.

Замечание. Асимптотический метод, применяемый здесь для определения окружной компоненты скорости v_φ , в случае малой вязкости отличается от методов пограничного слоя и сращивания асимптотических разложений тем, что вне области пограничного слоя в главном приближении для компоненты v_φ решается не уравнение из системы Эйлера, а уравнение для этой компоненты из системы Навье–Стокса. Отметим, что для уравнений Эйлера окружная компонента скорости выражается через произвольную функцию координаты θ , причем для определения этой функции нет ни условий, ни уравнений. Выбор этой функции производится с помощью гипотез, например с помощью модели Бэтчелора–Лаврентьева. В рассматриваемом методе окружная компонента скорости определяется однозначно, без привлечения гипотез и моделей.

5. Метод решения. Задача для компоненты w_φ допускает разделение переменных $w_\varphi = W(r, t)F(\theta)/r$. Функция $F(\theta)$ определяется из краевой задачи на собственные значения

$$\begin{cases} \frac{d^2 F}{d\theta^2} + \frac{dF}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta - \left(\omega + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) F = 0, \\ F(\pm \alpha) = 0. \end{cases}$$

Последняя задача решена как численно, так и асимптотически. Параметр ω возник в результате процедуры разделения переменных и подлежит определению. Физический смысл параметра ω состоит в отражении связи между конвективными и диффузионными членами уравнения для компоненты w_φ . Этот параметр выражается по асимптотическим формулам через параметр α и может быть исключен. При малых значениях угла α приведем асимптотические формулы

$$\omega_m = -\frac{j_{1,m}^2}{\alpha^2} + O(1), \quad F_m = J_1(j_{1,m}\theta/\alpha) + O(\alpha^2), \quad (\alpha \rightarrow 0), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь параметры $j_{1,m}$ — это нули функции Бесселя $J_1(x)$. Численный расчет функции $F(\theta)$ и параметра ω показывает, что асимптотические решения можно применять не только для малых, но и для конечных значений угла α . Например, при

$\alpha = \pi/2$ точное значение равно $\omega = -6$, а асимптотическое — $\omega = -5.9504$. Относительная погрешность составляет менее процента. При $\alpha < \pi/2$ относительная погрешность рассчитанных значений ω убывает с уменьшением величины α . При $\alpha = \pi/4$ относительная погрешность составляет менее 0.05 процента. Заметим, что для $\alpha = \pi/2$ точные значения параметра ω находятся по формуле $\omega_m = -2m(2m+1)$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Функция $W(r, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$r^2 S_t \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial r} = \varepsilon_\nu^2 \left(r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \omega W \right).$$

В случае колебательных по времени возмущений функцию $W(r, t)$ представим в виде $W = V(r)e^{it}$. Амплитуда $V(r)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, которое имеет два линейно независимых решения. Одно из этих решений не имеет конечного предела при $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ и потому нефизично. Второе решение имеет конечный предел при исчезающей вязкости и в пределе описывает спиральные возмущения в идеальной жидкости для конечных значений угла α . Численные расчеты здесь затруднительны, так как сложно отделить нефизичное решение. Поэтому применяются асимптотические методы.

Замечание. Физический смысл применяемого здесь асимптотического метода для окружной компоненты скорости $w_\varphi = W(r, t)F(\theta)/r$ состоит в том, что при конечных значениях угла α диффузия в продольном направлении мала по сравнению конвекцией, поэтому в главном приближении в уравнении для функции $W(r, t)$ диффузионными членами можно пренебречь. Однако, в окружном направлении диффузия и конвекция имеют одинаковый порядок, что и было учтено при определении функции $F(\theta)$. Отметим, что при малых значениях угла α диффузия и конвекция имеют одинаковый порядок во всех направлениях, однако в данной статье этот случай не рассматривается.

При конечных значениях угла α параметр ω также конечен и асимптотические разложения спиральных возмущений W представим в виде ряда по степеням параметра ε_ν^2 . Главный член этого разложения W_0 удовлетворяет уравнению

$$r^2 S_t \frac{\partial W_0}{\partial t} - \frac{\partial W_0}{\partial r} = 0.$$

Общее решение этого уравнения представим в виде $W_0 = f(t + r^3 S_t/3 + \gamma)$, где f произвольная функция, а γ постоянный параметр. В случае периодических по времени колебаний получим решение $W_0 = \sin(t + r^3 S_t/3 + \gamma)$. Теперь приведем формулу для окружной компоненты скорости спиральных возмущений

$$w_\varphi = \frac{F_m(\theta)}{r} \sin(t + r^3 S_t/3 + \gamma) + O(\varepsilon_\nu^2).$$

Из последней формулы следует, что амплитуды невязких спиральных возмущений возрастают в направлении потока (при убывании координаты r).

На рис. 1 изображена зависимость амплитуды спиральных возмущений от продольной координаты. Поток жидкости движется в направлении убывания координаты r , в котором возрастают невязкие возмущения. Стрелка показывает направление потока. Пунктиром изображен график функции $1/r$, описывающей стационарную спиральную моду идеальной жидкости. При приближении к выходному

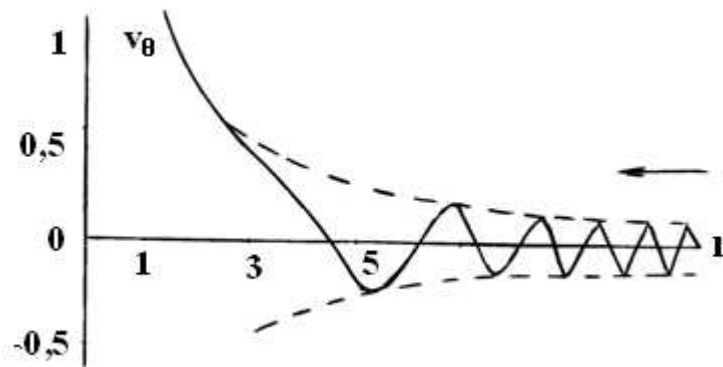


Рисунок 1 – Рост спиральных возмущений вдоль потока

сечению конфузора $r \rightarrow 1$ спиральные возмущения возрастают и выходят на стационарный режим.

Заключение. В работе показано, что стационарный сходящийся поток жидкости в конфузоре обладает свойством невязкой неустойчивости, что означает рост спиральных возмущений вдоль потока. Применение этих результатов к окрестности входа в аорту в левом желудочке сердца показывает, что в период систолы поток крови, получив спиральные возмущения от пристеночных слоев мускулатуры, усиливает эти возмущения. На выходе из сердечного желудочка закрученный поток достигает наибольшего значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00582-а).

Batishchev V. A., Getman V. A. *Emergence spiral flow of blood in the left ventricle of the heart.* The behavior of small disturbances in a spiral converging steady flow of low-viscosity fluid in confusor is studied. This problem relates to the problem of helical blood flow in the left ventricle of heart. In this paper the mechanism of the helical flow of blood in the ventricle of the heart into the aorta near the entrance is investigated. It is assumed that this mechanism associated with the instability of the fluid flow in the left ventricle. It is shown that in the converging flow of fluid in confusor arises a spiral non-viscous instability. This leads to the emergence and strengthening of the spiral fluid flows.

СДВИГ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОЛОСОВЫМ ШТАМПОМ, ПЕРЕМЕЩАЮЩИМСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ В НАПРАВЛЕНИИ, ОРТОГОНАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИЮ СДВИГА

Батурина Н. Ю.¹, Зеленцов В. Б.^{2,3}, Митрин Б. И.³

¹*Ростовский государственный строительный университет*

²*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича*

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

³*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается нестационарная динамическая контактная задача о чистом сдвиге полосовым штампом упругого полупространства. В процессе сдвига штамп смещается параллельно самому себе с постоянной скоростью в направлении, ортогональном сдвигу. Решение задачи сводится к двумерному интегральному уравнению, двумерное ядро которого зависит от разности аргументов по каждой из переменных. Приближенное решение двумерного интегрального уравнения построено до возникновения дифракционных волн в области контакта в двух скоростных диапазонах движения штампа, покрывающих весь спектр его скоростей. Подробно рассмотрено решение задачи об импульсном начальном воздействии на штамп.

1. Постановка задачи и её интегральное уравнение. Рассматривается нестационарная динамическая контактная задача о чистом сдвиге упругого полупространства ($|x| < \infty$, $0 \leq y < \infty$, $|z| < \infty$) полосовым штампом, движущимся параллельно самому себе с постоянной скоростью V в отрицательном направлении оси Ox . Ширина штампа $2a$ ($-a - Vt \leq x \leq a - Vt$, $y = 0$, $|z| < \infty$), а его сдвиг происходит по закону $w(x + Vt, 0, t) = \varepsilon(t)$ ($t \geq 0$), где w — упругое смещение в плоскости $y = 0$ (yOz) в направлении оси Oz . Поверхность полупространства вне области контакта штампа с упругим полупространством ($-\infty < x < -a - Vt$, $a - Vt < x < \infty$, $y = 0$, $|z| < \infty$) свободна от напряжений: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} — нормальные, σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} — касательные напряжения. На бесконечности в упругом полупространстве при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ смещения и напряжения стремятся к нулю. Так как до начального момента полупространство находилось в покое, то начальные условия задачи по w и w'_t нулевые.

Для получения постановки контактной задачи на фиксированной области контакта осуществляется переход в подвижную систему координат x' , y' , связанную со штампом, по формулам

$$x' = x + Vt, \quad y' = y.$$

Тогда смешанные граничные условия в подвижной системе координат принимают вид

$$y' = 0 \quad \sigma_{yz}(x', 0, t) = \varphi(x', t), \quad -a \leq x' \leq a, \quad (1)$$

$$w(x', 0, t) = \varepsilon(t), \quad -a \leq x' \leq a, \quad (2)$$

$$\sigma_{yz}(x', 0, t) = 0, \quad -\infty < x' < -a, \quad a < x' < \infty, \quad (3)$$

а дифференциальное уравнения движения среды приводится к виду [1]

$$\mu \Delta w = \rho (w''_{tt} + 2Vw''_{x't} + V^2w''_{x'x'}) . \quad (4)$$

В дальнейшем штрихи над x и y опускаются. На бесконечности в упругом полупространстве

$$w, w'_y \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Нулевые начальные условия задачи записываются в виде

$$w = w'_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (6)$$

В случае, если $\varepsilon(t)$ не задаётся при постановке задачи, то определяется из уравнения движения недеформируемого штампа с начальными условиями [1]

$$m\ddot{\varepsilon}(t) = T(t) + P(t), \quad \varepsilon(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = v_0 \quad (7)$$

где m — погонная масса штампа, v_0 — начальная скорость штампа, $T(t) = \int_{-a}^a \varphi(\xi, t) d\xi$ — сила сопротивления полупространства сдвигу штампа, $P(t)$ — другие силы, действующие на штамп.

Для сведения смешанной краевой задачи (1)–(4) с нулевыми начальными условиями (6) и условиями на бесконечности (5) к двумерному интегральному уравнению используются интегральные преобразования Лапласа (по времени t) и Фурье (по продольной координате x) [2] в следующих обозначениях:

$$w^{LF}(\alpha, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_{-\infty}^\infty w(x, y, t) e^{i\alpha x} dx, \quad (8)$$

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} dp \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty w^{LF}(\alpha, y, p) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (9)$$

Интегральные преобразования (8), (9) позволяют смешанную начально-краевую задачу (1)–(7) привести к решению двумерного интегрального уравнения

$$\int_0^\infty d\tau \int_{-a}^a \varphi(\xi, \tau) k(\xi - x, t - \tau) d\xi = -2\pi\mu c_V^{-1} \varepsilon(t), \quad |x| \leq a, \quad t < 0 \quad (10)$$

$$k(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} dp \int_\Gamma K(u) e^{iuxp/c_2} du, \quad K(u) = \frac{1}{c_V \sqrt{u^2 + (1 - iu\beta_2)^2}}, \quad (11)$$

$$\beta_2 = \frac{V}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_V = \lim_{|u| \rightarrow \infty} uK(u) = \begin{cases} \frac{1}{i\sqrt{\beta_2^2 - 1}}, & \beta_2 > 1, V > c_2, \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}, & \beta_2 < 1, V < c_2 \end{cases} \quad (12)$$

относительно неизвестных напряжений, возникающих в полупространстве под штампом $\sigma_{yz}(x, 0, t) = \varphi(x, t)$, c_2 — скорость упругой волны сдвига, Γ — контур интегрирования в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, проходящий под углом $-\arg(p)$ к действительной оси.

2. Решение интегрального уравнения задачи. Приближённое решение задачи $\varphi(x, t)$ — напряжения в полупространстве под штампом, определяющиеся из двумерного интегрального уравнения (10), в отсутствие дифракционных волн от краёв штампа, представляется в виде

$$\varphi(x, t) = \varphi^+(a + x, t) + \varphi^-(a - x, t) = \varphi^\infty(x, t), \quad 0 \leq t \leq 2a/c_2, \quad |x| \leq a, \quad (13)$$

суперпозиции решений $\varphi^\pm(x, t)$ соответствующих двумерных интегральных уравнений на координатной полуоси и решения $\varphi^\infty(x, t)$ соответствующего двумерного интегрального уравнения на всей оси, которое в нашем случае имеет вид

$$\varphi^\infty(x, t) = -\mu \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (14)$$

Напряжения $\varphi^\pm(x, t)$, а также смещения $w_\mp(x, t)$ свободной поверхности вне области контакта определяются из решения двумерных интегральных уравнений на координатной полуоси с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье и метода Винера–Хопфа решения соответствующих одномерных интегральных уравнений на полуоси [3] и в зависимости от диапазона имеют вид

I.

$$\varphi^+(x, t) = \begin{cases} -\mu \left[x^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-x\tau_1}^{t-x\tau_2} \varepsilon(\tau) G_+^+(x, c_2(t-\tau)) d\tau + \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2} \right], & t - x\tau_1 \geq 0, \quad x > 0 \\ -\mu \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2}, & t - x\tau_1 < 0, \quad x > 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$G_+^+(x, t) = \frac{K_+^+(0)}{i\pi} \frac{\sqrt{x\gamma_1 - t} \sqrt{t - x\gamma_2}}{t}, \quad \tau_k = \frac{\gamma_k}{c_2} \quad (k = 1, 2),$$

$$w_-(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x < 0, \quad (16)$$

$$\varphi^-(x, t) = -\mu \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (17)$$

$$w_+(x, t) = \begin{cases} (-x) \frac{ic_2}{\pi K_-^-(0)} \int_{t+x\tau_1}^{t+x\tau_2} \varepsilon(\tau) G_-^-(x, c_2(t-\tau)) d\tau, & x + x\tau_1 \geq 0, \quad x < 0 \\ 0, & t + x\tau_1 < 0, \quad x < 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$G_-^-(x, t) = \frac{1}{t\sqrt{x\gamma_1 - t} \sqrt{t - x\gamma_2}} \quad (19)$$

где $\gamma_1 = (\beta_2 - 1)^{-1}$, $\gamma_2 = (\beta_2 + 1)^{-1}$.

На передней (левой) кромке движущегося штампа напряжения $\varphi^+(x, t)$ имеют конечный скачок (15), а смещения перед штампом $w_-(x, t) = 0$ (16) — в процессе всего движения в этом скоростном диапазоне. На задней (правой) кромке штампа напряжения $\varphi^-(x, t)$ совпадают с напряжениями $\varphi^\infty(x, t)$ (14). Поле горизонтальных смещений $w_+(x, t)$ (18) на свободной поверхности вне области контакта за задней кромкой штампа имеет два фронта, один из которых относительно штампа распространяется со скоростью $V - c_2$ в направлении штампа, а другой со скоростью $V + c_2$ от штампа.

II.

$$\varphi^+(x, t) = \begin{cases} -\mu \left[x^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-x\tau_2} \varepsilon(\tau) G_+^+(x, c_2(t-\tau)) d\tau + \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2} \right] & t - x\tau_2 \geq 0, x > 0 \\ -\mu \frac{\varepsilon(t)}{c_2} & t - x\tau_2 < 0, x > 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$G_+^+(x, t) = \frac{K_+^+(0)}{\pi} \frac{\sqrt{t - x\gamma_2}}{t}$$

$$w_-(x, t) = \begin{cases} (-x)^{1/2} \frac{c_2}{\pi K_-^+(0)} \int_0^{t-x\tau_1} \varepsilon(\tau) G_-^+(x, c_2(t-\tau)) d\tau & t - x\tau_1 \geq 0, x < 0 \\ 0 & t - x\tau_1 < 0, x < 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$G_-^+(x, t) = \frac{1}{t - \sqrt{t - x\gamma_1}}$$

$$\varphi^-(x, t) = \begin{cases} -\mu \left[x^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t+x\tau_1} \varepsilon(\tau) G_+^-(x, c_2(t-\tau)) d\tau + \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2} \right] & t + x\tau_1 \geq 0, x > 0 \\ -\mu \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2} & t + x\tau_1 < 0, x > 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$G_+^-(x, t) = \frac{K_+^-(0)}{\pi} \frac{\sqrt{t + x\gamma_1}}{t}$$

$$w_+(x, t) = \begin{cases} (-x)^{1/2} \frac{c_2}{\pi K_-^-(0)} \int_0^{t+x\tau_2} \varepsilon(\tau) G_-^-(x, c_2(t-\tau)) d\tau & t + x\tau_2 \geq 0, x < 0 \\ 0 & t + x\tau_2 < 0, x < 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$G_-^-(x, t) = \frac{1}{t\sqrt{t + x\gamma_2}}$$

где γ_1 и γ_2 те же, что указаны после (18).

Напряжения $\varphi^\pm(x, t)$ (22), (20) имеют одинаковую особенность $x^{-1/2}$, отличающуюся коэффициентом при особенности, который зависит от V . Смещение свободной поверхности перед передней и задней кромками имеют гладкость порядка $x^{1/2}$, отличающиеся друг от друга коэффициентами перед ней, которые зависят от V .

3. Импульсное воздействие на движущийся штамп. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ штамп получает механический импульс, сообщаящий ему скорость v_0 в направлении оси Oz . Дифференциальное уравнение движения штампа при таком воздействии в подвижной системе координат дано в (7), в котором $P(t) = 0$, начальные условия совпадают с данными в (7), а $T(t)$ определяется поддиапазонно с помощью (14), (15), (17) или (22), (20). При малых t решение принимает наиболее простой вид

$$\varepsilon(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha}} e^{-\alpha_0 t} \begin{cases} \sin \sqrt{|\alpha|} t, & \alpha < 0, \\ \operatorname{sh} \sqrt{|\alpha|} t, & \alpha > 0, \end{cases} \quad \alpha = \alpha_0^2 - \frac{\mu}{m} d, \quad d = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1})^2}{\gamma_1 \gamma_2}, & V > c_2, \\ 1, & V < c_2, \end{cases} \\ \alpha_0 = \frac{\mu}{m} \frac{a}{c_2}, \quad (24)$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-08-01435-а, 13-07-00952-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
- [2] Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
- [3] Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит, 1962. 280 с.

Baturina N. Yu., Zelentsov V. B., Mitrin B. I. *Shear of elastic half-space by a strip punch moving with a constant velocity in the direction orthogonal to the shear.* We consider a non-stationary dynamic contact problem about a shear of an elastic half-space by a strip punch. During shear the punch moves parallelly to itself with a constant velocity in the direction orthogonal to the shear. The problem reduces to the two-dimensional integral equation, the two-dimensional kernel of which depends on the difference between arguments by each of variables. An approximated solution of the two-dimensional integral equation is constructed in the time range before the emergence of diffraction waves in the two ranges of the punch velocity, which cover all possible range of its speed. The solution of the problem about impulse initial impact on the stamp is considered in details.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧЕ О ДЕФОРМАЦИИ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Краковская Е. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается напряженно-деформированное состояние круглых цилиндрически ортотропных и трансверсально-изотропных пластин под действием нормального давления. Получены соотношения для прогиба пластин по приближенным моделям, основанным на гипотезах Кирхгофа–Лява (КЛ) и Тимошенко–Рейсснера (ТР), а также с помощью уточненной теории анизотропных пластин Амбарцумяна, теории анизотропных оболочек средней толщины Палия–Спиро (ПС) и уточненной итерационной теории Родионовой–Титаева–Черныха (РТЧ). Теория РТЧ в отличие от других теорий, основанных на механических гипотезах, предлагает математический подход к решению трехмерных уравнений теории упругости.

По классической теории КЛ безразмерный прогиб пластины под действием давления q зависит только от механических параметров срединной поверхности и имеет вид (для жестко защемленного края)

$$w^{KL}/q = \frac{1}{8(n^2 - 9)} \left(\frac{4r^{n+1}}{n+1} - r^4 + \frac{n-3}{n+1} \right),$$

при $n = 3$ $w^{KL}/q = (4r^4 \ln r - r^4 + 1)/192$. Здесь $n^2 = E_\theta/E_r$, $r = r_{dim}/R$, $w = w_{dim}/h$, $q = q_{dim}R^4/(D_r h)$, $D_r = E_r h^3/(12(1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}))$, h — толщина пластины, R — ее радиус, E_r — модуль упругости в радиальном направлении.

Теории ТР и Амбарцумяна дают для прогиба, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{w^{TR}}{q} &= \frac{w^{KL}}{q} + \frac{b_1}{2}(r^2 - 1), \\ \frac{w^A}{q} &= \frac{w^{KL}}{q} + b_1 \frac{r^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{b_2}{2(n^2 - 1)} \left(\frac{2r^{n+1}}{n+1} - r^2 + \frac{n-1}{n+1} \right), \\ b_1 &= -\frac{3D_r}{4hR^2 G_{rz}}, \quad b_2 = \frac{h^2}{10R^2}(\nu_{31}^* - \nu_{32}^*) - \frac{4(n^2 - 1)}{5}b_1, \end{aligned}$$

G_{rz} — модуль жесткости на сдвиг в плоскости (r, z) . Формулы, получающиеся по теориям ПС и РТЧ имеют более громоздкий вид. При уменьшении отношения $E_r h^2/(G_{rz} R^2)$ результаты, полученные по всем теориям, сближаются.

Для задачи о деформации решетчатой пластинки (РП) диска зрительного нерва под действием внутриглазного давления (ВГД) проведено сравнение решений задачи, получающихся по неклассическим теориям, с численным решением, полученным с помощью прикладного пакета ANSYS. РП близка к мягкой трансверсально-изотропной. Модуль упругости в направлении толщины пластинки на два порядка меньше тангенциальных модулей. Для этого конкретного случая теории оболочек ПС и РТЧ при давлениях, соответствующих внутриглазному давлению, дают величины прогибов, близкие к результатам, полученным в пакете ANSYS. Значения нормальных напряжений, полученных по теории РТЧ ближе к значениям, полученным методом конечных элементов.

1. Введение. Последнее время модели механики деформируемого тела часто используются в биомеханике и при моделировании медицинских проблем. Для более точного описания поведения биологических структур необходимо учитывать особенности их строения (многослойность), особенности тканей, которые, как правило, являются анизотропными, неоднородными. Классическая теория пластин, не учитывающая поперечные сдвиги и нормальные напряжения, иногда может давать большие погрешности при описании деформации. В связи с этим представляет интерес сравнение результатов расчета напряженно-деформированного состояния пластин, полученных по уточненным теориям.

2. Постановка задачи. Рассматривается круглая ортотропная пластина постоянной толщины h и радиуса R ($h \ll R$) в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Начало координат совпадает с центром пластины, r — радиальная координата, θ — полярный угол, z -координата нормальная к плоскости пластины.

Закон Гука для цилиндрически ортотропных пластин имеет вид

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{rz}}{E_z} \sigma_z, & e_{r\theta} &= \frac{\sigma_{r\theta}}{G_{r\theta}}, \\ e_{\theta\theta} &= -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta z}}{E_z} \sigma_z, & e_{\theta z} &= \frac{\sigma_{\theta z}}{G_{\theta z}}, \\ e_{zz} &= -\frac{\nu_{zr}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta} \sigma_\theta + \frac{1}{E_z} \sigma_z, & e_{zr} &= \frac{\sigma_{zr}}{G_{zr}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь e_i и σ_i — нормальные деформации и напряжения, e_{ij} и σ_{ij} — деформации и напряжения сдвига, E_i — модули Юнга в направлении i , ν_{ij} — коэффициенты Пуассона, G_{ij} — модули сдвига. Имеют место равенства $E_i \nu_{ij} = E_j \nu_{ji}$ ($i, j = r, \theta, z$). Таким образом, имеются 9 независимых упругих констант (три модуля упругости, три модуля сдвига и три коэффициента Пуассона). Для трансверсально-изотропной пластины, если $r - \theta$ — плоскость изотропии, независимых упругих коэффициентов пять $E_r, E_z, \nu_{r\theta}, \nu_{rz}, G_{rz}$.

Нижняя и верхняя поверхность пластины находятся под действием нормального давления

$$\sigma_{zz} = p^\pm \quad \text{для} \quad z = \pm h/2. \quad (2)$$

Предполагается, что край пластины $r = R$ жестко зашпелен, и приложенная нагрузка и граничные условия являются симметричными. Поэтому решение не будет зависеть от полярного угла θ .

Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q &= p^+ - p^-, \quad m = \frac{h}{2}(p^- + p^+), \\ \nu_{31}^* &= \frac{\nu_{zr} + \nu_{\theta r} \nu_{z\theta}}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}, \quad \nu_{32}^* = \frac{\nu_{z\theta} + \nu_{r\theta} \nu_{zr}}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}, \\ E_{33}^* &= \frac{E_z}{1 - \nu_{31}^* \nu_{rz} - \nu_{13}^* \nu_{\theta z}}. \end{aligned}$$

3. Классическая теория и теория Тимошенко–Рейсснера. По классической теории Кирхгофа–Лява безразмерный прогиб пластины под действием давления q зависит только от механических параметров срединной поверхности и для

жестко защемленной пластины имеет вид

$$\frac{w^{KL}}{q} = \frac{1}{8(n^2 - 9)} \left(\frac{4r^{n+1}}{n+1} - r^4 + \frac{n-3}{n+1} \right)$$

при $n = 3$ $w^{KL}/q = (4r^4 \ln r - r^4 + 1)/192$. Здесь $n^2 = E_\theta/E_r$, $r = r_{dim}/R$, $w = w_{dim}/h$, $q = q_{dim}R^4/(D_r h)$, $D_r = E_r h^3/(12(1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}))$, h — толщина пластины, E_r — модуль упругости в радиальном направлении.

Теория Тимошенко–Рейсснера, в которой предполагается, что нормаль к срединной поверхности остается прямой, но может поворачиваться на некоторый угол, дает для прогиба следующее соотношение

$$\frac{w^{TR}}{q} = \frac{w^{KL}}{q} - \frac{3D_r}{8hR^2 G_{rz} b_1} (r^2 - 1).$$

Здесь G_{rz} — модуль сдвига, характеризующий изменение угла в плоскости (r, z) . В работе [5] отмечается, что теория Тимошенко–Рейсснера несущественно уточняет классическую теорию и является асимптотически противоречивой для изотропных тонкостенных тел. Однако на ряде примеров в работе [5] показано также, что при «умеренно малой поперечной жесткости» на сдвиг теория Тимошенко–Рейсснера асимптотически непротиворечива и существенно уточняет теорию Кирхгофа–Лява. В нашем случае это справедливо при $\frac{h^2}{R^2} \ll \frac{G_{rz}}{E_{rz}} \ll 1$.

4. Теория Амбарцумяна. В уточненной теории Амбарцумяна [1] используются следующие гипотезы:

- нормальное к срединной плоскости пластинки перемещение не зависит от координаты;
- касательные напряжения и соответствующие деформации и по толщине пластинки меняются по заданному закону.

В этом случае выражение для прогиба имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{w^A}{q} &= \frac{w^{KL}}{q} + b_1 \frac{r^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{b_2}{2(n^2 - 1)} \left(\frac{2r^{n+1}}{n+1} - r^2 + \frac{n-1}{n+1} \right), \\ b_1 &= -\frac{3D_r}{4hR^2 G_{rz}}, \quad b_2 = \frac{h^2}{10R^2} (\nu_{31}^* - \nu_{32}^*) - \frac{4(n^2 - 1)}{5} b_1. \end{aligned}$$

Для трансверсально изотропной пластины ($n = 1$, $b_2 = 0$) и выражения для прогиба, полученные по теории Тимошенко–Рейсснера и Амбарцумяна, совпадают.

5. Теория Палия–Спиро. В теории оболочек средней толщины Палия–Спиро [2], используются следующие гипотезы:

- прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными (как и в теории Тимошенко–Рейсснера);
- косинус угла наклона таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига.

В этом случае соотношение для прогиб имеет вид

$$\frac{w^P}{q} = \frac{w^{KL}}{q} + b_{11} \frac{r^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{b_{22}}{2(n^2 - 1)} \left(\frac{2r^{n+1}}{n+1} - r^2 + \frac{n-1}{n+1} \right),$$

$$b_{11} = -\frac{D_r}{2hR^2 G_{rz}}, \quad b_{22} = \frac{h^2}{8R^2} (\nu_{31}^* - \nu_{32}^*) - (n^2 - 1)b_{11}.$$

6. Теория Родионовой–Титаева–Черныха. Итерационная теория Родионовой–Титаева–Черныха в отличие от рассмотренных выше теорий, основанных на механических гипотезах, предлагает математический подход к решению трехмерных уравнений теории упругости [3]. Эта теория основана на следующих гипотезах:

- поперечные касательные и нормальные напряжения распределены по толщине оболочки по закону квадратичной и кубической параболы соответственно;
- тангенциальные и нормальные составляющие вектора перемещения распределены по толщине оболочки по закону полинома соответственно третьей и второй степени.

Новая итерационная теория РТЧ позволяет получить деформацию пластины, учитывающую повороты волокон, их искривление, а также изменение их длины. В соответствии с принятыми гипотезами составляющие вектора перемещения с учетом симметрии имеют вид

$$u_r = u^* P_0(z) + \gamma_1^* P_1(z) + \vartheta_1^* P_2(z) + \varphi_1^* P_3(z),$$

$$u_z = w^* P_0(z) + \gamma_3^* P_1(z) + \vartheta_3^* P_2(z). \quad (3)$$

Здесь P_i , ($i = 0 \dots 3$) — полиномы Лежандра

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \frac{2z}{h}, \quad P_2 = \frac{6z^2}{h^2} - \frac{1}{2}, \quad P_3 = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}.$$

В самом общем случае получающаяся в [3] система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая теорию пластин с заданными на лицевых плоскостях кинематическими и статическими граничными условиями, имеет четырнадцатый порядок. Теории Амбарцумяна, Палия–Спиро и Тимошенко–Рейсснера имеют десятый порядок, классическая теория — восьмой.

По теории РТЧ также можно получить аналитическое выражение для нормального прогиба пластины, однако формула имеет очень громоздкий вид. Для трансверсально изотропной пластины (при $n = 1$, т.е. при $E_r = E_\theta$) выражение для прогиба имеет вид

$$\frac{w_{tr}^{RTC}}{q} = \frac{w^{KL}}{q} + \frac{3D_r}{10hR^2 G_{rz}} (1 - r^2) + \frac{D_r(1 + \nu)}{80E_z R^2} (1 - 6r^2) + \frac{5D_r^2 \nu'^2 (1 + \nu)}{6R^4 h^2} - \frac{D_r h}{10E_z R^4}$$

7. Сравнение результатов. На рис. 1 представлены графики безразмерного нормального прогиба для разных значений отношения модулей упругости.

Результаты показывают, что свойства пластины в направлении толщины пластины сильно влияют на величину прогиба. Видно также, что в этих случаях теории оболочек Палия–Спиро и Родионовой–Титаева–Черныха дают величины прогибов, близкие к результатам, полученным в пакете ANSYS.

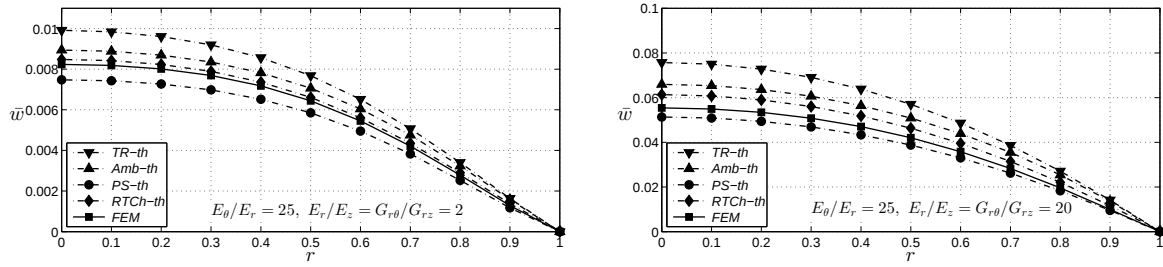


Рисунок 1 – Безразмерный прогиб срединной поверхности пластины при $E_r/E_z = G_{r\theta}/G_{rz} = 2$ (слева) и $E_r/E_z = G_{r\theta}/G_{rz} = 20$ (справа). Сплошная линия соответствует расчетам по конечно-элементной модели, пунктирные линии, отмеченные маркерами, треугольниками, смотрящими вниз, соответствуют расчетам по различным теориям оболочек (треугольник, смотрящий вниз, — теория ТР, треугольник, смотрящий вверх, — теория Амбарцумяна, ромб — теория РТЧ, круг — теория ПС).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
- [2] Палий О. М., Спино В. Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и анализ. Л.: Судостроение, 1977. 386 с.
- [3] Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: СПбГУ, 1996. 280 с.
- [4] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 635 с.
- [5] Товстик П. Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // СПб.: Вестник СПбГУ, 2007. вып.3. С. 49–54.

Bauer S. M., Voronkova E. B., Krakovskaya E. V. *Nonclassical theories of shells in problem on the axisymmetric bending of circular orthotropic plates.* Four so-called nonclassical, refined and high-order theories of plates of moderate thickness, worked out by Ambartsumyan, Paliy-Spiro and by Rodinova-Titaev-Chernykh are discussed. In these theories deformations, rotation and bending of the fibers and their elongations in the direction of the thickness of the shell are taken into account. These theories are based on two different principles: hypotheses of stressed and deformation states are used for the deduction from 3-dimensional system of equations to a 2-dimensional one in the Amb and the PS theories; the RTCh theory authors apply mathematical approaches to develop a set of 2-dimensional equations. The algebraic relationships for deflections and stresses, between solutions of the Kirchhoff-Love (KL) theory and those of the refined theories are presented. Numerical results for displacements found with these theories are compared with those obtained by FEM.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БАЛКАХ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Бахарева Е. А., Стружанов В. В.

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Рассмотрена задача о чистом изгибе балки прямоугольного поперечного сечения из материала, обладающего эффектом деформационного разупрочнения. Предложены итерационные методы определения напряженно-деформированного состояния балки из разупрочняющегося материала при чистом изгибе. Вычисления проводились до момента разрушения наиболее растянутых волокон.

Кинетические уравнения накопления повреждений при растяжении материала с переходом на стадию деформационного разупрочнения, которая характеризуется падающей ветвью диаграммы деформирования, получены в работе [1]. Их вывод основан на использовании эффекта выполаживания модуля разгрузки, происходящего вследствие образования микрповреждений. Итерационные методы, приведенные в [1, 2] для решения задачи о чистом изгибе прямоугольной балки в предположении о линейном характере распределения деформации по ее высоте и симметричной диаграммой деформирования, распространены на задачу об определении напряженного состояния при чистом изгибе балки со свойствами материала, различными при растяжении и сжатии.

1. Рассмотрим чистый изгиб достаточно длинной балки с прямоугольным поперечным сечением. Высота и ширина балки соответственно равны $2h$ и b . Деформирование осуществляем квазистатически при неизменной температуре, задавая либо монотонно возрастающий изгибающий момент M (мягкое нагружение), либо монотонно увеличивая кривизну балки κ (жесткое нагружение) (рис. 1).

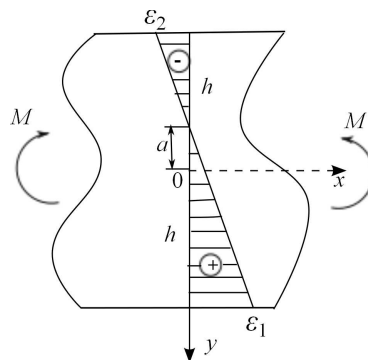


Рисунок 1 – Распределение деформаций

В случае чистого изгиба в балке возникают только продольные напряжения $\sigma_x = \sigma(y)$, а продольные деформации линейно распределены по ее высоте и вычисляются по формуле $\varepsilon_x = \varepsilon(y) = \kappa(y + a)$, $y \in [-h; h]$. Здесь a — отклонение

нейтральной линии, где нулевые напряжения и деформации, до оси симметрии Ox (рис. 1).

В процессе деформирования волокна выше нейтральной линии находятся в состоянии сжатия, а ниже — в состоянии растяжения. Поэтому свойства материала описывает полная диаграмма растяжения-сжатия (рис. 2)

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma^-(\varepsilon), & -\varepsilon_Z^- \leq \varepsilon < 0; \\ \sigma^+(\varepsilon), & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z^+, \end{cases}$$

обладающая восходящими и падающими, вообще говоря, до нуля участками. На (рис. 2) σ_B^+ и ε_B^+ (σ_B^- и ε_B^-) — напряжения и деформации, отвечающие пределу прочности при растяжении (сжатии), ε_Z^+ (ε_Z^-) — деформация разрушения при растяжении (сжатии), E — модуль Юнга.

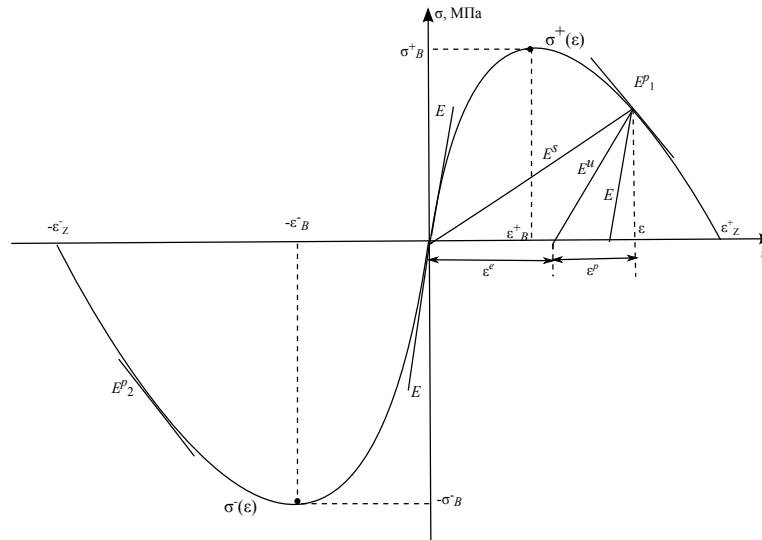


Рисунок 2 – Полная диаграмма растяжения-сжатия

Наклон диаграмм при сжатии и растяжении характеризует функция $E^p = \sigma_{,\varepsilon}$, имеющая смысл касательного модуля. На стадии упругости $E^p = E$. Знак модуля E^p определяет состояние материала. Если $E^p > 0$, то имеет место упрочнение материала; когда $E^p < 0$ — разупрочнение материала. Здесь и далее запятой обозначена частная производная по указанной величине.

В зависимости от процессов, происходящих в материале балки при деформировании, возможны три варианта разгрузки [3]. Первый — без остаточных деформаций с секущим модулем $E^s = \sigma(\varepsilon)/\varepsilon$, второй — с модулем разгрузки, равным модулю Юнга E , третий — с модулем разгрузки $E^u < E$ (рис. 2). Во втором и третьем случаях после разгрузки появляются остаточные деформации. Далее будем рассматривать последний вид материала. Считаем, что функция $E^u(\varepsilon) = \sigma/(\varepsilon - \varepsilon^p)$ известна. Здесь ε^p — остаточная пластическая деформация. Полная деформация представляется суммой $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$, где ε^e , ε^p — соответственно упругая и пластическая составляющие полной деформации. Последняя определяется по обобщенному

закону пластического течения [3]

$$d\varepsilon^p = \left(1 - \frac{E^p}{E^u}\right) d\varepsilon. \quad (1)$$

Соотношение между напряжениями и деформациями примем в виде

$$\sigma = E^u(\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (2)$$

2. Определим напряженно-деформированное состояние балки, используя связь между напряжениями и деформациями (2). При мягком нагружении граничные условия имеют вид [4]

$$b \int_{-h}^h \sigma(y) dy = 0, \quad b \int_{-h}^h \sigma(y) y dy = M, \quad (3)$$

а при жестком нагружении выполняются условия [4]

$$\varepsilon_1 = \kappa(h + a), \quad \varepsilon_2 = \kappa(-h + a). \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — соответственно деформации нижних и верхних волокон балки (рис. 1).

Исходная задача разбивается на две, а именно, основную задачу, где $\sigma' = E^u \varepsilon'$ и граничные условия (3) или (4) при $a = 0$, и корректирующую задачу, где $\sigma'' = E^u(e' - \varepsilon^p)$ и граничные условия

$$b \int_{-h}^h \sigma''(y) y dy = 0 \quad (5)$$

для мягкого нагружения и

$$\kappa = 0 \quad (6)$$

для жесткого нагружения.

Основная задача является обычной задачей изгиба упругой балки. Ее решение для мягкого нагружения имеет вид

$$\kappa' = \frac{M}{I^u}, \quad \varepsilon' = \kappa' y, \quad \sigma' = E^u(\kappa y) \varepsilon', \quad (7)$$

где $I^u = b \int_{-h}^h E^u(y) y^2 dy$ — жесткость при изгибе упругой балки с модулями $E^u(\varepsilon)$, а для жесткого нагружения —

$$M' = I^u \kappa, \quad \varepsilon' = \kappa y, \quad \sigma' = E^u \varepsilon'. \quad (8)$$

В первом случае κ' — кривизна, соответствующая изгибающему моменту M , во втором M' — момент, соответствующий κ .

Корректирующая задача — это задача об определении собственных (остаточных) напряжений в балке при заданной величине остаточной деформации ε^p . Ее решение для граничных условий (5) имеет вид

$$\kappa'' = \frac{M^\phi}{I^u}, \quad e' = \kappa'' y + \frac{R^\phi}{2bhE^u}, \quad \sigma'' = E^u(e' - \varepsilon^p) + \frac{R^\phi}{2bhE^u}, \quad (9)$$

причем $e' = \kappa''(y + a_0)$, $a_0 = (R^\Phi I^u)/(2bhM^\Phi)$. Для граничных условий (6) имеем

$$M'' = -M^\Phi, \quad e' = \frac{R^\Phi}{2bhE^u}, \quad \sigma'' = \frac{R^\Phi}{2bh} - E^u \varepsilon^p. \quad (10)$$

Здесь M'' — величина момента, удерживающего балку в положении $\kappa = 0$; M^Φ , R^Φ — соответственно фиктивные изгибающий момент и растягивающее усилие,

$$M^\Phi = bE \int_{-h}^h \varepsilon^p y dy, \quad R^\Phi = bE \int_{-h}^h \varepsilon^p dy.$$

Непосредственно проверяется, что решением исходной задачи при заданной функции $\varepsilon^p(y)$ является сумма решений основной и корректирующей задач.

Рассмотрим итерационную процедуру определения параметров положений равновесия при жестком нагружении. Пусть при некоторых M_0 , κ_0 балка находится в равновесии и в каждой точке ее сечения известны ε_0 , σ_0 , ε_0^p , E_0^p , E_0^u . Увеличим кривизну на $\Delta\kappa$. Сначала подставляя в формулы (8) вместо κ величину $\Delta\kappa$, получаем решение основной задачи σ'_1 , ε'_1 , M'_1 и вычисляем значения $\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon'_1$, $M_1 = M_0 + M'_1$, которые представляют собой первое приближение к решению исходной задачи для $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa$.

Далее, используя равенство (1) и подставляя $d\varepsilon = \varepsilon'_1$, $E^p = E_0^p$, $E^u = E_0^u$, вычисляем значения $d\varepsilon_1^p(y)$ — приближенное решение дифференциального уравнения (1) на отрезке $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$. Затем по формулам (10), в которых ε^p заменяем на $d\varepsilon_1^p$ и E^u на E_0^u , получаем решение корректирующей задачи σ''_1 , e'_1 , M''_1 . Тогда второе приближение равно $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma''_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + e'_1$, $M_2 = M_1 + M''_1$. В заключение второго этапа находим $E_2^p = E^p(\varepsilon_2)$ и $E_2^u = E^u(\varepsilon_2)$. Снова по формуле (1), где полагаем $d\varepsilon = e'_1$, $E^p = E_1^p$, $E^u = E_1^u$, вычисляем $d\varepsilon_2^p$ и повторяем корректировку.

Рассмотрим теперь случай мягкого нагружения. Возмутим положение равновесия, увеличив изгибающий момент на величину ΔM ($M_1 = M_0 + \Delta M$). Для определения параметров нового положения равновесия применяем ту же итерационную схему, только вместо формул (8), (10) используем формулы (7), (9) и при каждой корректировке дополнительно вычисляем значения a'_i .

3. В качестве примера приведем результаты расчета чистого изгиба стальной балки высотой $2h = 20$ мм и шириной $b = 10$ мм. Свойства материала описывает зависимость

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon \cdot \exp(\varepsilon/\varepsilon_B^-), & -\varepsilon_Z^- \leq \varepsilon < 0; \\ E \cdot \varepsilon \cdot \exp(-\varepsilon/\varepsilon_B^+), & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z^+, \end{cases}$$

где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\varepsilon_B^+ = 0.01$, $\varepsilon_B^- = 0.02$ — деформации пределов прочности при растяжении и сжатии, $\varepsilon_Z^+ = 0.09$ и $\varepsilon_Z^- = 0.18$ — деформации разрушения.

При жестком нагружении получаем диаграмму $M - \kappa$ (рис. 3). Точка Z соответствует разрушению наиболее растянутых волокон балки, соответствующих деформации разрушения ε_Z^+ . При мягком нагружении получается только восходящая ветвь диаграммы $M - \kappa$. После достижения точки N итерационный процесс расходится — деформирование балки приобретает динамический характер.

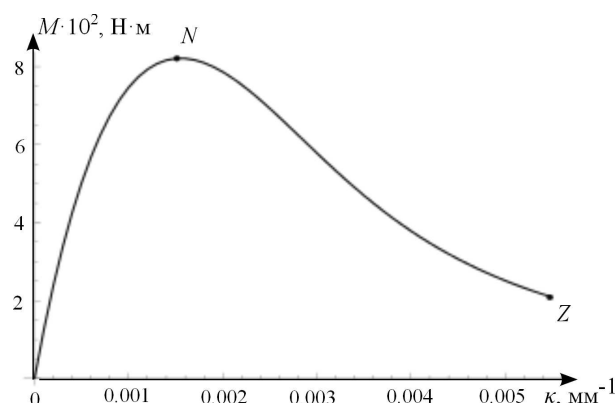


Рисунок 3 – Диаграмма чистого изгиба

Результаты расчетов подтверждают, что при сохранении состояния чистого изгиба разрушение при любом способе нагружения происходит в наиболее растянутых волокнах, когда они переходят уже на стадию разупрочнения, только для жесткого нагружения зона разупрочнения имеет большие размеры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 13–08–00186, 13–01–96008).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Стружанов В. В., Бахарева Е. А. Математические методы в теории чистого изгиба прямоугольных балок из разупрочняющегося материала с симметричной диаграммой растяжения-сжатия // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т 5., № 2. С. 158–167.
- [2] Стружанов В. В., Бахарева Е. А. Итерационные процедуры расчета параметров равновесия и устойчивость чистого изгиба балок из пластичных и хрупких разупрочняющихся материалов // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2010. № 1(10). С. 84–95.
- [3] Стружанов В. В., Миронов В. М. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 190 с.
- [4] Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.

Bakhareva E. A., Struzhanov V. V. *Iterative methods of stress estimation in rectangular beams from nonlinear material under the pure bending.* The article is concerned with pure bending of the beam with rectangular cross-section. The material possesses the property of deformational weakening. The iterative method for determining the stressed state in pure bending of a beam of such material are suggested. Calculations are performed up to the moment of destruction of the most stretched fibers. The destruction takes place after beginning of material weakening.

ОЦЕНКА ВРЕМЕННОЙ СТАБИЛЬНОСТИ ДАВЛЕНИЯ СРАБАТЫВАНИЯ ПРЕДОХРАНИТЕЛЬНЫХ МЕМБРАННЫХ УСТРОЙСТВ РЕАКТОРНОЙ УСТАНОВКИ

**Беликов Н. В., Занимонец Ю. М., Какурин А. М.,
Павлов В. В., Трепачева Г. Н.**

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Представлены результаты неразрушающего контроля давления срабатывания артифицированных хлопающих мембран для оценки их эксплуатационного ресурса.

Объектом исследования являются хлопающие предохранительные мембраны (МХ), входящие в состав мембранных предохранительных устройств (МПУ). Достоинствами хлопающих мембран является практически безынерционное срабатывание, полная герметичность при нормальном технологическом режиме, большая пропускная способность, высокая точность срабатывания, сравнительная дешевизна, простота и компактность конструкций. Это обуславливает все более широкое их применение в составе мембранных предохранительных устройств (МПУ) практически во всех отраслях промышленности.

Особенностью конструкции исследуемых хлопающих мембран является артифицированная форма их оболочки, которая формируется в процессе изготовления мембран путем коррекции формы куполообразной оболочки локальным силовым воздействием, противоположно направленным внутреннему (формообразующему) давлению вытяжки [1, 2]. В результате мембрана получает дозированное отклонение от той формы, которая получилась бы при свободной вытяжке, в сторону более выгодной конфигурации. Новая конфигурация куполообразной оболочки приводит к снижению чувствительности мембран к стохастическим технологическим несовершенствам, которые становятся вторичными по сравнению с детерминированными искусственными.

Артифицированная форма куполообразной оболочки позволяет добиться класса точности серийных образцов МПУ 1...3% благодаря решению следующих технологических задач:

- устранения влияния зон концентрации напряжений в прикраевой области купола мембран на стабильность давления срабатывания;
- уменьшения влияния неоднородностей толщины и анизотропии проката исходного листового материала на точность срабатывания мембран;
- обеспечения высокой стабильности и независимости давления срабатывания мембран от агрегатного состояния рабочей среды;
- обеспечения неразрушающего контроля давления срабатывания мембран путем анализа модели наблюдений, отражающей характер изменения параметров «давление — перемещение купола» рабочей характеристики мембран;
- автоматизации всех этапов технологического цикла изготовления мембран с использованием компьютерных технологических комплексов.

Для сопровождения технологического цикла изготовления, испытания и неразрушающего контроля давления срабатывания мембран используется компьютерный технологический комплекс «АСД-М».

Комплекс «АСД-М» предназначен для реализации следующих задач:

- автоматизации техпроцесса изготовления, испытания и неразрушающего контроля давления срабатывания мембран;
- автоматизации научного эксперимента по исследованию влияния основных механических, конструкционных и технологических параметров ХПМ на стабильность их физико-механических свойств с учетом их конструктивных особенностей и рабочих условий эксплуатации в МПУ;

Структура комплекса «АСД-М» в конфигурации, обеспечивающей испытания и прогнозирование давления срабатывания мембран, представлена ниже на рис. 1.

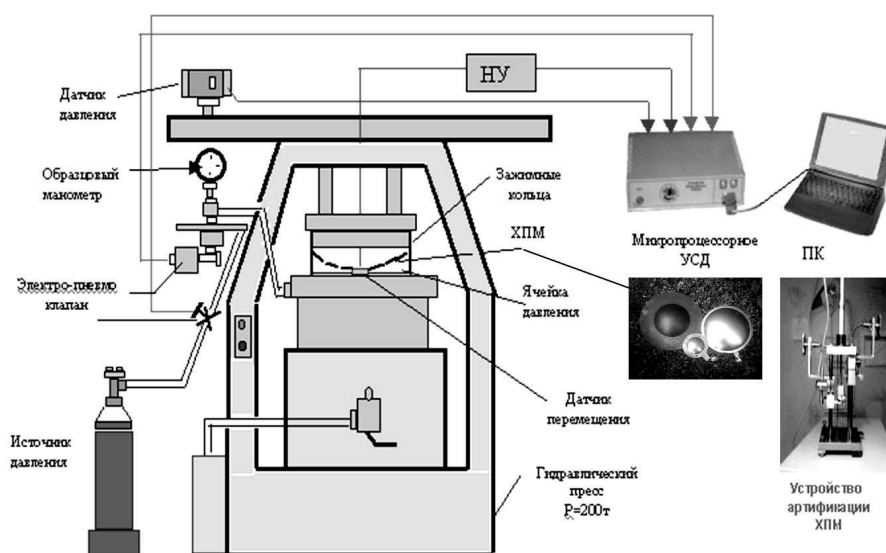


Рисунок 1 – Компьютерный комплекс «АСД-М»

В состав основного технологического оборудования комплекса входят:

- пресс гидравлический (нагрузка 200 тонн, $P = 200$ атмосфер);
- внешний источник давления (рабочая среда — сжатый воздух);
- зажимные кольца (мембранный узел) для закрепления мембраны на рабочем столе пресса;
- устройство артификации мембран;
- пневматические клапаны для управления подачей и сбросом давления;
- датчики давления и перемещения, фиксирующие соответственно давление под куполом мембраны и перемещение купола при воздействии давления;
- нормирующий усилитель (НУ) для прецизионного датчика перемещения;
- контрольные манометры;
- микропроцессорное устройство сбора данных (УСД);
- персональный компьютер (ПК).

Технические характеристики комплекса

- операционная среда ПО Windows;
- точность метода определения давления срабатывания для рабочих температур до 25°C, не более 1%;
- точность метода определения давления срабатывания для рабочих температур до 400°C, не более 3%;
- число измерительных каналов 24;
- программный выбор типа датчика;
- контроль подключения датчиков;
- настройка режимов измерений;
- визуальный контроль измеряемых параметров в реальном времени;
- мониторинг технических характеристик мембран;
- коррекция грубых ошибок измерений;
- настройка измерительных каналов УСД;
- автоматическая калибровка датчиков и измерительных каналов УСД.

Проверке временной стабильности давления срабатывания подвергалась партия артифицированных хлопающих мембран MX200 (зав.№ 65, 68, В25) после наработки 23300 часов эксплуатации в составе УПМ 4,5 ББН № 14-03/447 реакторной установки БН-600 третьего энергоблока Белоярской АЭС, а также резервная партия мембран MX200 (зав.№ 54, 62).

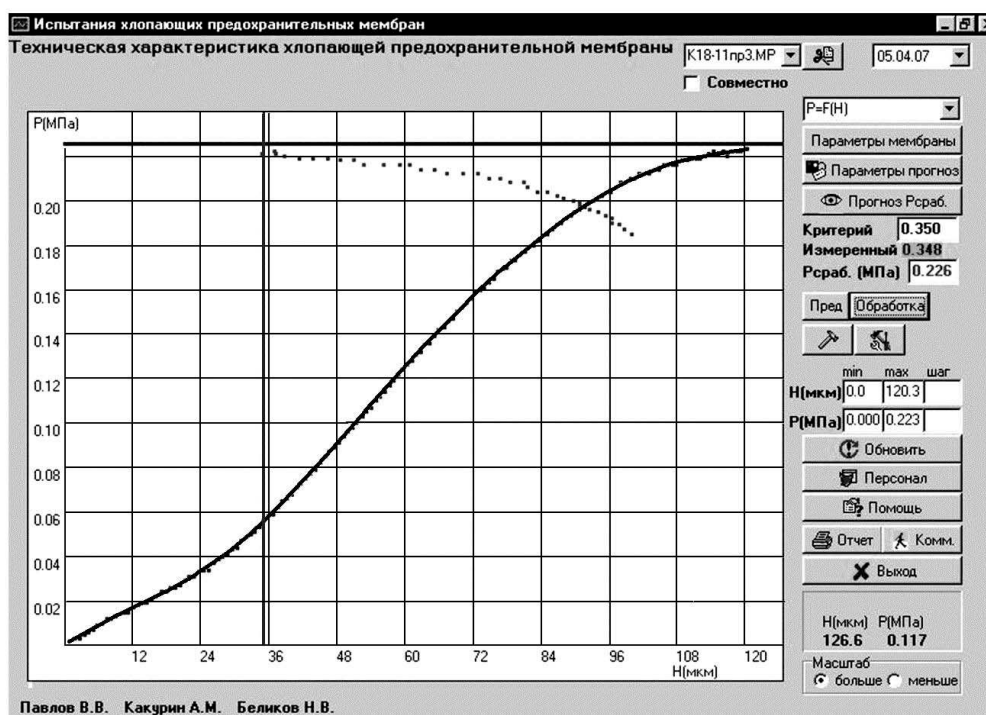


Рисунок 2 – Окно прогнозирования давления срабатывания мембран

После установки испытываемой мембраны в мембранный узел создаются необходимые рабочие условия ее краевого закрепления, которые обеспечивают абсолютную герметичность полости под куполом мембраны по отношению к внешней среде. В герметичную полость под купол мембраны от внешнего источника подается плавно нарастающее и равномерно распределенное по выпуклой поверхности мембраны давление рабочей среды.

На рис. 2 представлено рабочее окно программного модуля комплекса «АСД-М». В окне отображается график изменения давления под куполом мембраны и перемещение купола мембраны под воздействием давления рабочей среды.

В процессе прогнозирования давления срабатывания анализируется характер изменения рабочей характеристики мембраны «давление — перемещение купола». На интервале, определяемом количеством точек аппроксимации, моделируется нелинейная зависимость $P = f(x)$, и определяется момент достижения производной dP/dx критического значения, характеризующего момент приближения мембраны к состоянию потери устойчивости (хлопку). Точность прогнозирования давления срабатывания мембраны подбирается варьированием коэффициентами чувствительности алгоритма обработки экспериментальных данных. По результатам моделирования определяется давление срабатывания мембраны и вырабатывается сигнал на управление электромагнитным клапаном, который разгерметизирует ячейку под мембраной до момента ее разрушения.

В таблице 1 приведены результаты прогнозирования давления срабатывания партии мембран, выведенных из эксплуатации и резервных мембран.

Таблица 1

№ МХ	Прогнозируе- мое $P_{\text{сраб}}$ при темпера- туре 250°C МПа (кгс/см ²) (при изготов- лении)	Прогнозируе- мое $P_{\text{сраб}}$ при темпера- туре 250°C МПа (кгс/см ²) (после 23300 часов эксплуа- тации)	Прогнозируе- мое $P_{\text{сраб}}$ при темпера- туре 250°C МПа (кгс/см ²) (резервные)	Дата изготовления МХ
54	0.243 (2.48)		0.238 (2.43)	04.11.2003
62	0.251 (2.56)		0.239 (2.44)	04.11.2003
65	0.251 (2.56)	0.239 (2.44)		04.11.2003
68	0.253 (2.58)	0.244 (2.49)		04.11.2003
В25	0.248 (2.53)	0.238 (2.43)		12.03.2008

Проведенные испытания хлопающих мембран на работоспособность и стабильность давления срабатывания показывают:

- после 23300 часов эксплуатации мембран № 65,68, В25 в составе УПМ 4,5 ББН № 14-03/447 реакторной установки БН-600 их рабочие параметры давление и точность срабатывания не изменяются и остаются в заданных границах рабочего

диапазона $0.245 \text{ МПа} \pm 3\%$, указанного в технических требованиях к изготовлению и испытаниям мембран;

- давление и точность срабатывания резервных мембран № 54,62 также не изменяются и остаются в заданных границах рабочего диапазона $0.245 \text{ МПа} \pm 3\%$;

- временная стабильность давления срабатывания резервных мембран сохраняется в течение 10 лет хранения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пьянков Б. Г., Какурин А. М., Юдин А. С. // Изв. вузов. Сев. Кавк. регион. Естеств. науки. 1999. № 2. С. 22–24.
- [2] Belikov N. V., Zanimonets Y. M., Pavlov V. V., Kakurin A. M., Yudin A. S. New Approaches to the problem of increase of accuracy and stability of critical loadings of bursting disks // Abstracts of Russian-Taiwanese Symposium «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» (Rostov-on-Don, June 4–6, 2012). Rostov-on-Don: SFU Press, 2012. P. 12.

Belikov N. V., Zanimonets Yu. M., Kakurin A. M., Pavlov V. V., Trepacheva G. N. *Assessment of temporal stability of safety membrane buckling pressure for reactor devices.* The results of non-destructive control of buckling pressure of artificial clapping membranes for the assessment of their operational lifetime are presented.

О СТАТИЧЕСКОЙ И ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

Беляев А. К.¹, Морозов Н. Ф.², Товстик П. Е.²

¹ *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

² *Санкт-Петербургский государственный университет*

Рассматривается динамическое поведение тонкого стержня под действием продольного ударного воздействия с учетом распространения продольных волн. Результаты сравниваются с решением Ишлинского–Лаврентьева. Обнаружена существенная зависимость решения от продолжительности ударного импульса.

1. Введение. Основы исследований по статической устойчивости стержней заложены в трудах Л.Эйлера [1]. Экспериментальные и теоретические исследования, проведенные различными авторами [2–5], указывают на необходимость достаточно осторожного применения методов статики в условиях динамического нагружения. Желательно проследить вышеуказанное обстоятельство применительно к исследованию задач устойчивости [6,7]. В работе 1949 года Ишлинский и Лаврентьев [8] обратили внимание на специфику результатов, полученных при исследовании на устойчивость стержня под действием ударного нагружения. В предлагаемом докладе, основанном на результатах работ [9], проводится анализ задачи Ишлинского–Лаврентьева (ИЛ), определяются и уточняются зоны неустойчивости.

2. Определяющие уравнения в линейном приближении. В безразмерных переменных распространение продольных волн в вязко-упругом стержне и его поперечные колебания описываются соответственно уравнениями

$$\left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\varepsilon_0(t) = -\frac{P_0(t)}{ES}, \quad u(1, t) = 0, \quad (1)$$

$$\mu^2 \left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2)$$

Здесь все линейные размеры отнесены к длине стержня, а время — к времени пробега продольной волны по его длине, $u(x, t)$ и $w(x, t)$ — продольное и поперечное перемещения, $P_0(t) \geq 0$ — сжимающая сила на конце стержня, E — модуль Юнга, $\varepsilon(x, t)$ — продольная деформация ($\varepsilon(x, t) > 0$ при сжатии), δ — коэффициент вязкости, ω — характерная частота колебаний, μ — малый параметр толщины и $\ell = 1/\mu$ — параметр длины,

$$\mu^2 = \frac{J}{SL^2} = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \ll 1, \quad r = \sqrt{\frac{J}{S}}, \quad (3)$$

где L, S, J — длина стержня, площадь поперечного сечения и его момент инерции, r — радиус инерции поперечного сечения. В поперечном направлении концы стержня предполагаем шарнирно опертыми ($w(x, t) = w''(x, t) = 0$ при $x = 0, 1$).

2. Решение Ишлинского–Лаврентьева. Предполагается, что продольные волны в стержне отсутствуют (или исчезли в связи с затуханием) и рассматривается уравнение (2) при $\delta = 0$, $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 = \text{const} > 0$:

$$\mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Эйлерова критическая деформация равна $\varepsilon_* = \mu^2 \pi^2$. При $\varepsilon_0 > \varepsilon_*$ возможна потеря устойчивости по $m_0 = [\varepsilon_0/(\mu\pi)]$ первым формам, где $[z]$ — целая часть z . Запишем решение уравнения (4) в виде

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{m_0} (B_{m1} e^{\alpha_m t} + B_{m2} e^{-\alpha_m t}) \sin(m\pi x) + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} (B_{m3} \cos(\omega_m t + \beta_m) \sin(m\pi x),$$

где постоянные B_{mi} , β_m определяются из начальных условий,

$$\alpha_m = \sqrt{\varepsilon_0 m^2 \pi^2 - \mu^2 m^4 \pi^4}, \quad \omega_m = \sqrt{\mu^2 m^4 \pi^4 - \varepsilon_0 m^2 \pi^2}. \quad (5)$$

Будем характеризовать скорость роста амплитуды m -ой формы потери устойчивости параметром α_m . Эта скорость максимальна при одном из целых m , ближайших к значению $m_* = \sqrt{\varepsilon_0/2}/(\mu\pi)$. С ростом деформации сжатия ε_0 растет как максимальная скорость роста амплитуды $\alpha^0(\varepsilon_0) = \max_m \{\alpha_m(\varepsilon_0)\}$, так и номер соответствующей формы.

3. Распространение продольных волн. В подходе ИЛ предполагалось, что продольная деформация $\varepsilon(x, t)$ постоянна. Найдём сначала зависимость $\varepsilon(x, t)$ из задачи (1) при нулевых начальных условиях в предположении, что $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$, т. е. для импульса неограниченной продолжительности. Получаем [9]

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0(1 + \psi(x, t)), \quad \psi(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\nu_k} e^{-\delta \nu_k/2} \cos(\nu_k x) \sin(\nu_k t), \quad (6)$$

где $\nu_k = (k-0.5)\pi$ — частоты собственных колебаний стержня, один конец которого закреплён, а другой свободен. При $\delta = 0$ решение (6) является точным и функция $\varepsilon(x, t)$ периодична по времени ($u(x, t) = u(x, t+4)$). При $0 < \delta \ll 1$ решение (6) является приближенным.

Для кратковременного импульса длительности τ ($\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0$ при $t \leq \tau$ и $\varepsilon_0(t) = 0$ при $t > \tau$) имеем

$$\varepsilon(x, t) = 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{\nu_k} \sin(\nu_k x), \quad \psi_k(t) = \begin{cases} (1 - \cos(\nu_k t))e^{-\delta \nu_k t/2}, & t \leq \tau, \\ (\cos(\nu_k(t - \tau)) - \cos(\nu_k t))e^{-\delta \nu_k t/2}, & t > \tau. \end{cases} \quad (7)$$

При $\delta = 0$, $t > \tau$ решение (7) периодично ($u(x, t) = u(x, t+4)$).

4. Возбуждение поперечных колебаний, вызванных продольным ударом. Решение уравнения (2) ищем в виде ряда Фурье

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^M X_m(x) T_m(t), \quad X_m(x) = \sin m\pi x. \quad (8)$$

При $\delta = 0$ функции $T_m(t)$, $m = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \mu^2 m^4 \pi^4 T_m(t) - \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) T_n(t) = 0, \quad a_{mn}(t) = 2 \int_0^1 \varepsilon(x, t) X'_m(x) X'_n(x) dx. \quad (9)$$

Коэффициенты $a_{mn}(t)$ периодичны ($a_{mn}(t+4) = a_{mn}(t)$). Расчеты показали, что можно пренебречь взаимодействием форм колебаний, которое осуществляется через слагаемые с множителями $a_{mn}(t)$, $m \neq n$, а также комбинационными резонансами, ограничившись рассмотрением главных резонансов. Резонанс изгибной формы $X_m(x)$ имеет место при $4\mu_m m^2 \pi = 1$ или $\ell_m = 4m^2 \pi$.

Для определения скорости роста амплитуды при потере устойчивости численно интегрируем уравнения (9) при $a_{mn}(t) = 0$, $m \neq n$ и известным способом [6,7] находим характеристические показатели ρ_m . При $|\rho_m| > 1$ нулевое решение неустойчиво и параметр α_m , введенный в п.2, связан с характеристическим показателем по формуле $\alpha_m^v = \ln(|\rho_m|)/4$.

Рассмотрим сначала длительный импульс (6). Тогда $a_{mm}(t) = m^2 \pi^2 \varepsilon_0 + \hat{a}_{mm}(t)$, где среднее значение функции $\hat{a}_{mm}(t)$ равно нулю. При $\hat{a}_{mm}(t) = 0$ и $\varepsilon_0 > \mu^2 m^2 \pi^2$ имеет место потеря устойчивости в соответствии с решением ИЛ. Слагаемое $\hat{a}_{mm}(t)$, учитывающее продольные волны, замедляет рост амплитуды поперечных колебаний и приводит к появлению параметрических резонансов.

В качестве примера рассмотрим стержень с критической длиной $\ell_5 = 100\pi$, соответствующей m -ой форме. Замедление роста амплитуды по сравнению с моделью ИЛ иллюстрируется данными в таблице 1, где величина α^0 введена в п.2, а аналогичная ей величина α^v учитывает продольные волны.

Таблица 1 – Сравнение величин α^0 и α^v

ε_0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008
α^0	0.154	0.313	0.470	0.616	0.785	0.959	1.099	1.250
α^v	0.153	0.307	0.446	0.588	0.712	0.855	0.977	1.091

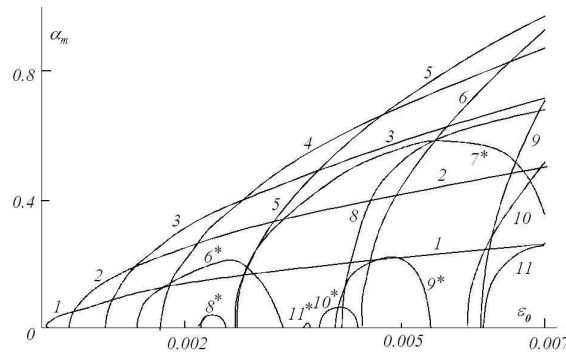


Рисунок 1 – Скорости роста амплитуд m -ой формы

На рис. 1 представлены величины $\alpha_m^v(\varepsilon_0)$ для $\varepsilon_0 \leq 0.007$. Номер формы m указан вблизи кривой и принимает значения $1 \leq m \leq 11$. Параметрические резонансы отмечены звездочками. Они появляются раньше эйлеровых

форм потери устойчивости. Раньше других имеет место резонанс с $m = 6^*$ при $0.00134 < \varepsilon_0 < 0.00334$. При $m \leq 5$ параметрических резонансов нет.

5. Поперечные колебания при кратковременном ударе. При кратковременном ударе длительностью τ продольная деформация $\varepsilon(x, t)$ задается формулой (7) и среднее значение коэффициента $a_{mm}(t)$ в уравнении (9) равно нулю. Поэтому определяющее влияние на потерю устойчивости имеют не эйлеровы критические нагрузки, а параметрические резонансы. В качестве примера возьмем $\tau = 1$ и стержень длиной $\ell_5 = 100\pi$, которая является критической для $m = 5$. На рис. 2 представлены скорости роста амплитуд $\alpha_m(\varepsilon_0)$ при $\varepsilon_0 \leq 0.007$.

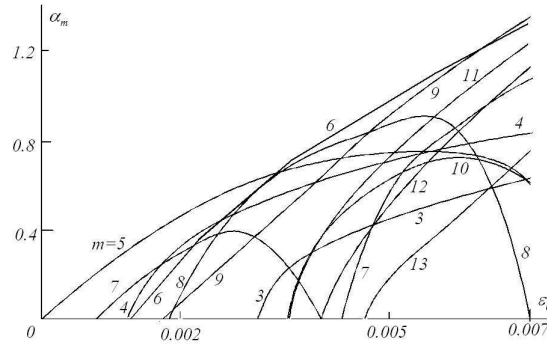


Рис. 2. Функции $\alpha_m(\varepsilon_0)$ при кратковременном ударе.

В отличие от длительного удара при $m = 5$ потеря устойчивость начинается со значения $\varepsilon_0 = 0$, формы $m = 1$ и $m = 2$ в рассматриваемом диапазоне ε_0 не возбуждаются, а остальные формы возбуждаются при $\varepsilon_0 \geq 0.0008$.

При $\tau = 1$ уровень возбуждения нерезонансных форм сопоставим с уровнем для длительного импульса, показанным на рис. 1. При $\tau \leq 2$ уровень возбуждения приближенно пропорционален импульсу $p = \varepsilon_0 \tau$.

6. Нелинейная модель. Неограниченный рост прогибов со временем говорит о том, что линейная модель пригодна лишь на начальном этапе движения. Учет сил сопротивления лишь незначительно меняет приведенные на рис. 1 и 2 результаты. Поэтому обратимся к нелинейной модели. Для длительного импульса при $\varepsilon_0 > \varepsilon_* = \mu^2 \pi^2$ стержень в конечном счете примет форму одной из устойчивых эластик Эйлера. Для кратковременного импульса при нелинейном подходе движение принимает характер биений с перекачкой энергии продольных колебаний в поперечные и наоборот.

Будем исходить из принципа Остроградского–Гамильтона, принимая выражение для потенциальной энергии в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\varepsilon^2 + \mu^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (10)$$

Приближенное решение ищем в виде рядов по формам колебаний

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \sin((k - 0.5)\pi x), \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n(t) \sin(n\pi x). \quad (11)$$

В результате минимизации энергии получаем нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $a_k(t)$ и $b_m(t)$.

Ниже представлено численное решение задачи Коши при $K = N = 5$ в (11), $\tau = 0.5$, $\varepsilon_0 = 0.002$ на интервале $0 \leq t \leq 1000$. Рассматриваем безразмерные длины $\ell_m = 4\pi m^2$, соответствующие главным резонансам при $m = 2, 3, 4$. Начальные условия, соответствующие m -ой форме поперечных колебаний берем равными $b_m(0) = 0.001$, а остальные начальные условия считаем равными нулю.

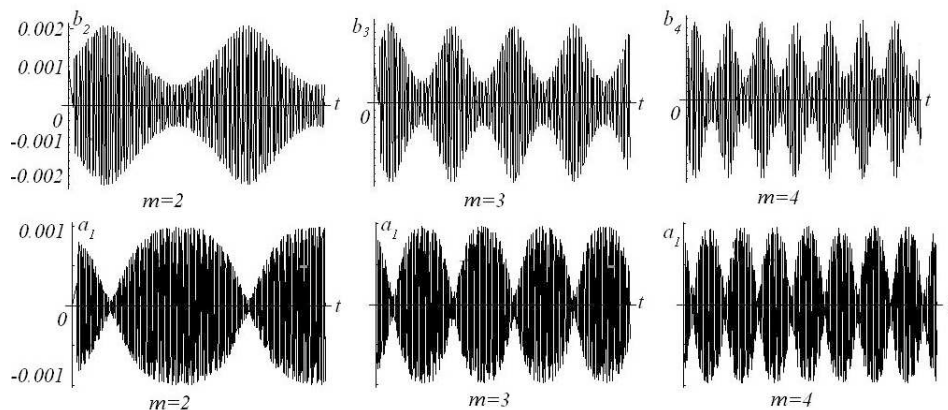


Рис. 3. Взаимодействие поперечных и продольных колебаний.

На рис. 3 показаны поперечные колебания при $m = 2, 3, 4$ и соответствующие графики функции $a_1(t)$, описывающей главную часть продольного возмущения.

При наличии сопротивлений приходим к затухающим биениям.

При поддержке РФФИ, гранты 12.01.92000.НИС-а, 13.01.00523-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Эйлер Л. Метод нахождения кривых, обладающих свойством максимума либо минимума. М.-Л. ГТТИ. 1934. 600 с.
- [2] Hutchinson W. J., Budiansky B. Dynamic Buckling Estimates // AIAA Journal. 1966. V. 4. № 3. P. 527-530.
- [3] Knauss W. G., Ravi-Chandar K. Intern. J. Fracture. 1985. V. 27. P. 127-143.
- [4] Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Проблемы динамики разрушения. Изд-во СПбГУ. 1997. 129 с.
- [5] Bratov V. A., Morozov N. F., Petrov Yu. V. Dynamic Strength of Continuum. St.Petersburg Univ. Press. 2009. 223 p.
- [6] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Наука. 1956. 600 с.
- [7] Вольмир А. С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении // Строит. мех. и расчет сооружений. 1960. № 1. С. 6-9.
- [8] Лаврентьев М. А., Иилинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 776-782.
- [9] Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. Динамика стержня при продольном ударе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С. 105-111.

Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E. *On static and dynamic instability of thin rods.* Dynamic behavior of thin rod under action of longitudinal impact is studied for propagation of the longitudinal waves. Results are compared with the solution obtained by Ishlinsky and Lavrent'ev. The results are shown to depend essentially on the impact duration.

ОСОБЕННОСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В УПРУГОЙ КЛИНОВИДНОЙ СРЕДЕ

Беркович В. Н.

*Филиал Московского государственного университета технологий и управления
им. К. Г. Разумовского, Ростов-на-Дону*

Вопросы локализации волнового процесса представляют интерес в различных вопросах геофизики, динамики строительных сооружений и машиностроительных конструкций, а также в связи с разработкой электронных устройств, основанных на использовании свойств поверхностно активных волн (ПАВ). Детальный анализ процессов локализации колебаний в горизонтально-слоистых средах дан в [1] и др. Для упругих областей клиновидного типа аналитические исследования вышеуказанных вопросов представлены в работах [2, 3, 4] лишь для случая малых углов раствора клина. Остальные результаты в этом направлении имеют эмпирический характер и обнаружены автором лишь в руководствах по сейсморазведке [5] и др.

В настоящей работе для анализа вопросов локализации волнового процесса в окрестности граней и ребра клиновидной среды предлагается подход, основанный на использовании вариационного принципа Гамильтона–Остроградского в форме Треффца [6]. При построении последовательности приближений в качестве координатных функций выбираются функционально-инвариантные решения (ФИР) Смирнова-Соболева для волнового уравнения, называемые плоскими «комплексными» волнами. Для исследования вопросов локализации волнового процесса в окрестности свободной границы клиновидной среды $\theta = \alpha$ общее решение динамических уравнений плоской теории упругости для вектора смещений $\mathbf{V}(r, \theta, t)$ в рассматриваемом случае выбирается в виде [7]:

$$2\mu\mathbf{V} = -\nabla F + 4(1 - \nu)\Psi, \quad F(r, \theta, t) = \Psi_0(r, \theta, t) + r\Psi_r(r, \theta, t)$$

$$\begin{cases} \Psi_r = \Psi_1(r, \theta, t) \cos(\alpha - \theta) + \Psi_2(r, \theta, t) \sin(\alpha - \theta) \\ \Psi_\theta = -\Psi_1(r, \theta, t) \sin(\alpha - \theta) + \Psi_2(r, \theta, t) \cos(\alpha - \theta) \end{cases}$$

$$\Psi = \{\Psi_r(r, \theta, t), \Psi_\theta(r, \theta, t)\}$$

$$\nabla^2 \Psi_0 - \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t^2} = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{s^2} \right) r \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \Psi_{1,2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Psi_{1,2}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Psi_1(r, \theta, t) = m \operatorname{Im} f_1 \left[t - \frac{r}{c} \cos \varphi - i \frac{r}{c} m \sin \varphi \right], \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \alpha - \theta \quad (1)$$

$$\Psi_2(r, \theta, t) = \operatorname{Re} f_1 \left[t - \frac{r}{c} \cos \varphi - i \frac{r}{c} m \sin \varphi \right], \quad \Psi_0(r, \theta, t) = \Phi_{00}(r, \varphi, t) - r\Psi_r(r, \varphi, t)$$

$$\Phi_{00}(r, \varphi, t) = \operatorname{Re} f_0 \left[t - \frac{r}{c} \cos \varphi - i \frac{r}{c} M \sin \varphi \right],$$

$$M = \sqrt{1 - c^2/p^2}, \quad m = \sqrt{1 - c^2/s^2}, \quad 0 < \theta \leq \alpha$$

При анализе процессов локализации волн в окрестности ребра пространственной клиновидной среды («клиновые волны») также используются результаты [7], при этом ФИР имеют вид, аналогичный предыдущему:

$$2\mu\mathbf{u} = -\nabla F + 4(1 - \nu)\Psi, \quad F = \Psi_0(r, \theta, z, t) + r\Psi_r(r, \theta, z, t) + z\Psi_z(r, \theta, z, t)$$

$$\begin{aligned}
\Psi = \{ \Psi_r(r, \theta, z, t), \Psi_\theta(r, \theta, z, t), \Psi_z(r, \theta, z, t) \} & \begin{cases} \Psi_r = \Psi_1(r, \theta, z, t) \cos \theta + \Psi_2(r, \theta, z, t) \sin \theta \\ \Psi_\theta = -\Psi_1(r, \theta, z, t) \sin \theta + \Psi_2(r, \theta, z, t) \cos \theta \\ \Psi_z = \Psi_3(r, \theta, z, t) \end{cases} \\
\Psi_{1,2} = \left\{ \Re f_{1,2} \left(t - \frac{z}{w} - i \frac{r}{w} \sqrt{1 - \frac{w^2}{s^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right) \cos \theta_0 \right. & (2) \\
\Psi_3 = \sqrt{1 - \frac{w^2}{s^2}} \left\{ \Im f_1 \left(t - \frac{z}{w} - i \frac{r}{w} \sqrt{1 - \frac{w^2}{s^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right) \cos \theta_0 + \right. \\
+ \Im f_2 \left(t - \frac{z}{w} - i \frac{r}{w} \sqrt{1 - \frac{w^2}{s^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right) \sin \theta_0 \Big\} \\
\Psi_0 = \Re \left\{ f_0 \left(t - \frac{z}{w} - i \frac{r}{w} \sqrt{1 - \frac{w^2}{s^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right) - r \Psi_1 \cos \theta + \Psi_2 \sin \theta - z \Psi_3 \right\}
\end{aligned}$$

В соотношениях (1), (2) θ_0 — свободный угловой параметр, угол $0 < \theta \leq \alpha$ отсчитывается от свободной границы $\varphi = \alpha$, соответствующей $\theta = 0$, функции $f_{0,1,2}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(0,1,2)} \zeta^k$ — произвольные аналитические функции комплексного аргумента ζ , величины s , p — скорости распространения поперечных и продольных волн соответственно, c , w — фазовые скорости поверхностных и клиновых волн соответственно. При задании режима установившихся гармонических колебаний области указанные функции можно выбрать в виде $f_{0,1,2}(z) = B_{0,1,2} \exp(-i\omega z)$, где $B_{0,1,2}$ — произвольные постоянные. Как следует из (1), (2) амплитуда искомых волн будет экспоненциально затухать при удалении по нормали от линии $\theta = 0$, либо ребра $r = 0$, что соответствует случаю возникновения поверхностных, либо клиновых волн соответственно.

В задаче исследования поверхностных волн для плоской клиновидной области удается в классическом смысле удовлетворить только одному из граничных условий $\{\sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}\}_{\theta=\alpha} = 0$, приводящему к уравнению для скорости волны Релея, не обладающей дисперсией. При анализе клиновых волн, также не имеющих дисперсии, попытка удовлетворить граничным условиям в классическом смысле не позволяет получить аналогичный результат. Для удовлетворения уравнениям динамической теории упругости и всем граничным условиям в рассматриваемых случаях отыскиваются точки стационарности (обобщенные однородные решения) функционала действия $H(\mathbf{u})$ Гамильтона - Остроградского [9] на множестве ФИР (1), (2):

$$H(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} a(\mathbf{u}) dt - \int_{t_1}^{t_2} b(\mathbf{u}) dt = A(\mathbf{u}) - B(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$a(\mathbf{u}) = \iint_{\Omega} W(\mathbf{u}) d\Omega, \quad b(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \rho \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 d\Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \varphi, z, t), \quad \forall t_2 > t_1 > 0$$

где $W(\mathbf{u})$ — упругий потенциал среды, ρ — её плотность. Произвольные аналитические функции в (2) можно выбрать среди функций вида :

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi^n, \quad g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \zeta^n \quad (4)$$

$$\xi = \exp \left[-i\omega(t - c^{-1}r \cos \varphi) - \omega c^{-1}Mr \sin \varphi \right]$$

$$\zeta = \exp \left[-i\omega(t - \frac{z}{w}) - \frac{r\omega}{w}P \cos(\theta - \theta_0) \right]$$

$$M = \sqrt{1 - c^2/p^2} \quad \left(M = \sqrt{1 - w^2/s^2} \right) \quad P = \sqrt{1 - w^2/p^2} \quad \left(P = \sqrt{1 - w^2/s^2} \right)$$

Введем функциональное пространство $L_{2,T} \{W_2^1(\Omega)\}$ со смешанной нормой:

$$\| \mathbf{u} \|_{L_{2,T} \{W_2^1(\Omega)\}}^2 = \int_T \| \mathbf{u}(t) \|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt, \quad T = (t_1, t_2)$$

Теорема 1. Следующие ниже системы функций, указанные в разложениях (4)

$$\left\{ \exp \left[-i\omega n(t - c^{-1}r \cos \varphi) - \omega c^{-1}n Mr \sin \varphi \right] \right\} \\ \left\{ \exp[-i\omega(t - zw^{-1}) - rw^{-1}\omega P \cos(\theta - \theta_0)] \right\}$$

полны в $L_{2,T} \{W_2^1(\Omega)\}$, $\Omega = \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, 0 < \varphi \leq \pi/2\}$, $\forall T = [t_1, t_2]$.

Доказательство основано на методах теории аппроксимации функций в комплексной области [10].

Аппроксимация функций $f_{0,1,2}(z)$ и их производных конечными линейными комбинациями полных систем функций из теоремы 1 приводит к аппроксимации вектора смещений в форме $\hat{\mathbf{u}}_N(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^N B_k^{(N)} \mathbf{u}_k(r, \varphi, t)$. Тогда, согласно методу Треффтца, из условия стационарности $\delta H(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_N) = 0$ при условии $(B(\hat{\mathbf{u}}_N), \hat{\mathbf{u}}_N) = 1$ вытекает однородная система линейных уравнений относительно $B_k^{(N)}$, где учтено граничное условие $\sigma(\mathbf{u})|_{\partial\Omega_\alpha} = \mathbf{0}$:

$$\sum_{n=1}^N B_n^{(N)} \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{u}_k dl dt - \iint_{\Omega} \mathbf{u}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} d\Omega \right] = 0, \quad \forall t_{1,2} \in R_+^1, k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для рассмотрения процесса установившихся колебаний следует применить принцип предельной амплитуды. В работе установлена математическая корректность применения этого принципа в рассматриваемых случаях. Полученный результат сформулирован ниже для плоского случая. В пространственном случае он имеет аналогичный вид.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u}(r, \varphi, t)$ есть обобщенное решение начально-краевой задачи в клиновидной области Ω , а функция $\mathbf{w}(r, \varphi, t) = \tilde{\mathbf{w}}(r, \varphi) \exp(-i\omega t)$ - решение соответствующей краевой задачи установившихся колебаний в той же области. Тогда справедлива оценка:

$$\| \mathbf{u}(r, \varphi, t) \exp(i\omega t) - \tilde{\mathbf{w}}(r, \varphi) \|_{W_2^1(\Omega)} < C \exp(-\varepsilon t), \quad t \rightarrow \infty \quad (C = \text{const}) \quad (6)$$

Доказательство основано на использовании метода вариационных неравенств [11,12].

В случае, если источник колебаний стохастический и генерирует случайный процесс типа Винера, то оказывается, что при достаточном удалении от источников колебательный процесс с течением времени, как и в детерминированном случае, стремится к установившемуся. В случае антиплоских колебаний справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $u(r, \varphi, t)$ есть обобщенное решение начально-краевой задачи для клиновидной области Ω , со случайным колебательным процессом типа Винера на участке границы Ω , а функция $w(r, \varphi, t) = \tilde{w}(r, \varphi) \exp(-i\omega t)$ - решение соответствующей краевой задачи об установившихся колебаний в той же области. Тогда с вероятностью 1 («почти наверное») существуют конечный предел :

$$\Pr \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \| u(r, \varphi, t) \exp(i\omega t) - \tilde{w}(r, \varphi) \|_{W_2^1(\Omega)} = 0 \right\} = 1 \quad (7)$$

Доказательство основано на использовании предыдущего результата и результатов теории случайных процессов [13, 14].

Из условия разрешимости системы (6) при детерминированных источниках колебаний вытекает с учетом результата теоремы 2 следующее уравнение для определения критических углов раствора α_* , при которых на гранях клина появляются поверхностные волны Релея:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \det \left\| \int_{t_0}^t \int_{\partial \Omega} \sigma(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{u}_k dl dt - \iint_{\Omega} \mathbf{u}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} \Big|_{t_0}^t d\Omega \right\|_{N \times N} \right\} = 0 \quad (8)$$

В случае стохастических источников излучения последний предел должен пониматься в вероятностном смысле (7) «почти наверное».

Отметим, что для получения в исходных равенствах (1), (2) уходящих волн в соответствии с принципом Зоммерфельда, критические углы раствора клина α_* должны удовлетворять условию $0 < \alpha_* \leq \pi/2$. При углах раствора клина $\alpha > \pi/2$ волновой режим вида (1), (2) на границе $\theta = 0$ меняет свой характер. При анализе локализации волнового процесса в пространственном клине используются пространственные ФИР. При этом в отличие от плоского случая клиновые волны в окрестности ребра появляются при любых острых углах α раствора клина, при этом $w = w(\alpha)$. В следующей ниже таблице представлены результаты численного анализа скоростей поверхностных волн Релея c_R и соответствующих им критических углов раствора α_* клиновидной области, рассчитываемых по уравнению (8), приведены для наиболее характерных геологических пород приповерхностного слоя земной коры. Как следует из таблицы, приведенной ниже, критические углы раствора α_* клиновидной области оказываются в интервале $0 < \alpha_* < \pi/2$. Поскольку при расчетах рассматриваются лишь однородные решения для клиновидной области, то значения критических параметров не зависят от характера колебательного процесса, генерируемого источниками на участке границы клиновидной среды. Результаты численного анализа скоростей $w = w(\alpha)$ клиновых волн представлены в работах [2,3]

Таблица 1 – Скорости волн и критические углы раствора клиновидной области

№	Материал	Скорость волны сдвига s , км/с	Скорость поверхностной волны Релея в клине c_R , км/с	Критический угол раствора клина α_* , град
1.	Почвы песчано-глинистые, сухие	0,100 0,150 0,200 0,300	0,092 0,138 0,184 0,276	81,9 81,2 80,6 79,4
2.	Мерзлота, лед	1,250 1,350 1,450	1,150 1,242 1,334	70,6 69,9 69,1
3.	Известняк	1,300 1,420 1,520	1,196 1,306 1,394	70,2 69,3 68,5
4.	Глина водонасыщенная	1,750 1,850	1,610 1,702	66,8 66,0

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
- [2] Бирюков С. В., Гуляев Ю. В. и др. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 415 с.
- [3] Ватульян А. О., Паринова Л. И. Исследование клиновых мод в ортотропной среде // Вестник ДГТУ. 2005. Т. 5. No 4 (26). С. 491–499.
- [4] Кулеш М. А., Шардаков И. Н. Волновая динамика упругих сред. РИО ПГУ. Пермь. 2007. 60 с.
- [5] Сейсморазведка: справочник геофизика. В двух книгах / Под ред. Номоконова В. П. М.: Недра, 1990. 336 с.
- [6] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
- [7] Зильбергейт А. С., Златина И. Н. О некоторых общих представлениях решения динамических уравнений теории упругости // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. No 1. С. 71–74.
- [8] Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др. Линейные уравнения математической физики. Серия СМБ. М.: Наука, 1964. 368 с.
- [9] Гельфанд И. М., Фомин С. И. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
- [10] Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986. 216 с.
- [11] Duvaut Q., Lions J. L. Les inéquations en mécanique et en physique. Paris, Dumon: 1972. 383 с.
- [12] Киндерлерер Д., Стампажкья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир. 1983. 256 с.
- [13] Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука. 1975. 319 с
- [14] Gettoore R. K., Sharpe M. J. Conformal martingales // Inventions math. 1972, v. 16, pp. 271–308.

Berkovich V. N. *Localization peculiarity of the wave process in the sphenoid medium.* The paper offers the investigation of the existence of surface and rib waves in the homogeneous wedge-shaped medium under plane deformation, ones being localized in the neighbourhood of the boundary of the elastic wedge. Analitical and numerical analysis of the dependence between the phase velocity of waves, critical span angles of a wedge and its mechanical parameters of the medium are given.

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БАНДАЖОМ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

Бесчетников Д. А., Львов Г. И.

*Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»*

В данной работе, с использованием теории упругих оболочек с конечной сдвиговой жесткостью, было выполнено исследование контактного взаимодействия стальной цилиндрической оболочки склеенной с бандажом из стеклопластика. Определено влияние геометрических параметров конструкции на появление отрывных усилий между ее элементами. Полученные результаты представлены в виде графиков.

1. Введение. Подавляющая часть транспортировки нефте-газопродуктов осуществляется магистральными трубопроводами, износ которых, в результате воздействия окружающей среды и рабочих нагрузок, требует проведения периодических мониторингов и ремонтных работ. В настоящее время одним из наиболее эффективных способов ремонта магистральных трубопроводов без остановки их эксплуатации является установка бандажей из полимерных композитных материалов [1, 2]. Такие материалы в сравнении с традиционными обладают рядом преимуществ, которые заключаются в обеспечении коррозионной стойкости, простоте и универсальности применения, легкости и вместе с этим достаточной прочности.

Для развития существующих, и создания новых методов неразрушающей диагностики трубопроводов, а также методов ремонта с использованием композитов, Еврокомиссия выделила грант на исследовательский проект «INNOPIPES» по 7-й Рамочной программе ЕС [3]. В целях проекта отмечается необходимость проведения детальных исследований, направленных на повышение эффективности, методик ремонта, использующих композитные материалы, ввиду несовершенства существующих стандартов их применения.

Важным аспектом в повышении эффективности бандажирования является обеспечение допустимых отрывных усилий между элементами ремонтного соединения, либо их полное устранение. Появление отрывных усилий следует из анализа реализации возможных конфигураций контакта, в которых отсутствует полное соприкосновение бандажа и цилиндрической оболочки [4, 5]. В данной работе для двух склеенных соосных цилиндрических оболочек из изотропного и ортотропного материалов выполняется исследование влияния параметров конструкции на реализацию отрывных контактных усилий.

2. Постановка задачи. Рассматриваемое ремонтное соединение показано на рисунке 1. Участок трубы моделируется как бесконечно-длинная изотропная цилиндрическая оболочка, а бандаж — как сплошная ортотропная оболочка конечной длины. Конструкция нагружена внутренним давлением P , а возможные осевые усилия в оболочке считаются равными нулю.

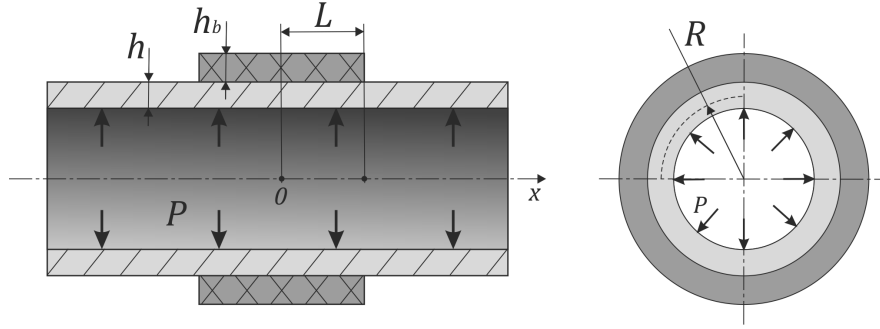


Рисунок 1 – Расчетная схема ремонтного соединения: R — радиус срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки; h_b — толщина бандажа; $2L$ — длина бандажа; P — внутреннее давление

Для проведения расчетов, параметры конструкции принимались следующими: $R=505$ мм; $h=10$ мм; $h_b=10$ мм; $L=100$ мм; $P=6$ МПа. Материалом оболочки является сталь: $E=200$ ГПа; $G=76,9$ ГПа. В качестве материала бандажа рассматривался стеклопластик со следующими механическими характеристиками: $E_1=18,6$ ГПа; $E_2=24,6$ ГПа; $E_3=6$ ГПа; $\mu_{12}=0,15$; $\mu_{13}=0,42$; $\mu_{23}=0,18$; $G_{12}=4$ ГПа; $G_{13}=3$ ГПа; $G_{23}=3$ ГПа. Предполагается, что главные оси ортотропии материала бандажа совпадают с главными направлениями кривизны его срединной поверхности.

Что бы исследовать отрывные усилия между склеенными оболочками, необходимо определить влияние параметров соединения на контактное давление. В точках, где осуществляется прижатие, контактное давление будет положительным. В точках, где возможно появление зазора — контактное давление станет отрицательным.

3. Математическое моделирование. Построение математической модели рассматриваемой конструкции выполнялось с использованием теории упругих оболочек типа Тимошенко [6, 7], которая учитывает деформацию сдвига и позволяет получить более обоснованные результаты в контактных задачах.

При исследовании взаимодействия оболочек применялся метод сопряжения. Расчетная схема разбивалась на два участка: I ($0 \leq x \leq L$); II ($x > L$). Разрешающая система дифференциальных уравнений относительно прогибов и углов поворота оболочек для первого участка имеет вид (1), а для второго — вид (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 W^I}{dx^2} + \frac{d\gamma^b}{dx} - 2g_b^2 W^I = \frac{-P_k}{kG_{13}h_b} \\ \frac{d^2 \gamma^b}{dx^2} - b_b \gamma^b - b_b \frac{dW^I}{dx} = 0 \\ \frac{d^2 W^I}{dx^2} + \frac{d\gamma^I}{dx} - 2g^2 W^I = \frac{-(P - P_k)}{kGh} \\ \frac{d^2 \gamma^I}{dx^2} - b\gamma^I - b \frac{dW^I}{dx} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 W^{II}}{dx^2} + \frac{d\gamma^{II}}{dx} - 2g^2 W^{II} = \frac{-P}{kGh} \\ \frac{d^2 \gamma^{II}}{dx^2} - b\gamma^{II} - b\frac{dW^{II}}{dx} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

В системах (1, 2) обозначено: W^I, W^{II} — прогибы оболочки на первом и втором участке (прогиб бандажа по условию склейки равен W^I); $\gamma^b, \gamma^I, \gamma^{II}$ — углы поворота нормального элемента в бандаже и оболочке; P_K — контактное давление; $2g_b^2, b_b$ — функции, отражающие упругие характеристики бандажа и его размеры; $2g^2, b$ — функции, зависящие от геометрических и упругих параметров оболочки; $k = 5/6$ — коэффициент сдвига [6].

Исключив из (1) контактное давление, получим систему уравнений относительно W^I, γ^I, γ^b . Решения для этих функций представлялись в виде суммы общего и частного решений однородной и неоднородной системы уравнений соответственно. Частное решение для углов поворота равно нулю, а для прогиба имеет вид: $\overline{W}^I = P(G_{13}h_b + Gh) / [(2g_b^2 G_{13}h_b + 2g^2 Gh)(G_{13}h_b - Gh)]$.

Поиск общего решения однородной системы дифференциальных уравнений привел к необходимости решать задачу на собственные значения с характеристическим уравнением шестого порядка, коэффициенты которого зависят от размеров и материала оболочек. Численные эксперименты показали, что в широких пределах варьирования параметров конструкции, для данного уравнения реализуются две пары комплексно-сопряженных корней $s_{1,2} = -\beta \pm i\alpha$, $s_{3,4} = \beta \pm i\alpha$ и два вещественных корня $s_{5,6}$. Решение для участка, где происходит контакт, в случае таких корней имеет вид:

$$W^I = (d_1 e^{-\beta x} + d_3 e^{\beta x}) \cos(\alpha x) + (d_2 e^{-\beta x} + d_4 e^{\beta x}) \sin(\alpha x) + d_5 e^{s_5 x} + d_6 e^{s_6 x} + \overline{W}^I \quad (3)$$

$$\gamma^I = (t_1 e^{-\beta x} + t_3 e^{\beta x}) \cos(\alpha x) + (t_2 e^{-\beta x} + t_4 e^{\beta x}) \sin(\alpha x) + t_5 e^{s_5 x} + t_6 e^{s_6 x} \quad (4)$$

$$\gamma^b = (k_1 e^{-\beta x} + k_3 e^{\beta x}) \cos(\alpha x) + (k_2 e^{-\beta x} + k_4 e^{\beta x}) \sin(\alpha x) + k_5 e^{s_5 x} + k_6 e^{s_6 x} \quad (5)$$

Константы d_i, t_i, k_i образуют собственные вектора для каждого из собственных значений s_i , и не являются взаимно-независимыми. Подставив (3) и (4) в последнее уравнение системы (1) и приравняв коэффициенты при соответствующих функциях, получим алгебраическую систему уравнений, из которой устанавливается связь констант t_i с d_i . Аналогичным образом выражаются константы k_i через d_i , если подставить (3) и (5) во второе уравнение системы (1). После определения всех взаимосвязей, неизвестные функции записываются через константы d_i .

Подобным образом выполнялось решение системы дифференциальных уравнений (2). Детальное описание решения для свободного участка оболочки представлено в работе [6]. Неизвестные константы решений, полученные в результате интегрирования дифференциальных уравнений, определялись из граничных условий, представленных ниже:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad & \gamma^I = 0; \quad \gamma^b = 0; \quad \frac{dW^I}{dx} = 0 \\ x = L : \quad & W^I = W^{II}; \quad \gamma^I = \gamma^{II}; \quad M_1^I = M_1^{II}; \\ & M_1^b = 0; \quad Q_1^I + Q_1^b - Q_1^{II} = 0 \end{aligned}$$

3. Анализ результатов. Для контрольных точек $x = 0$ и $x = L$ (центр и край бандажа), были построены графики зависимости значения контактного давления от геометрических параметров конструкции.

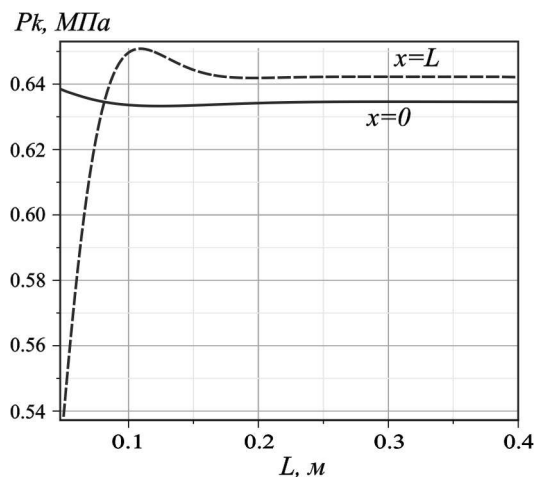


Рисунок 2 – Контактное давление в зависимости от длины бандажа

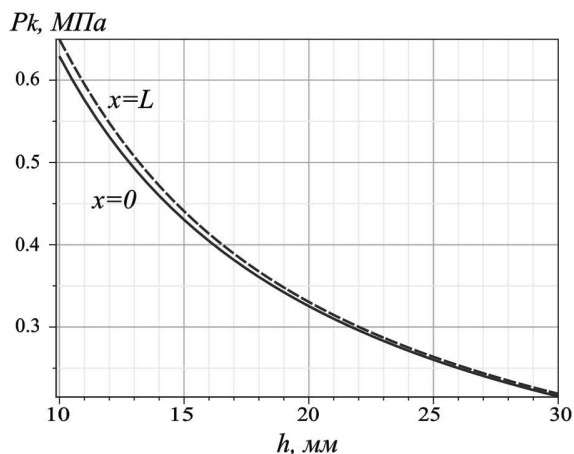


Рисунок 3 – Зависимость контактного давления от толщины оболочки

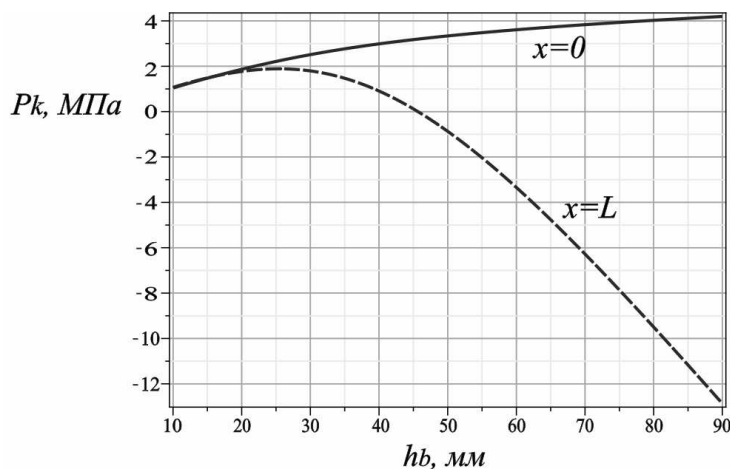


Рисунок 4 – Влияние толщины бандажа на контактное давление

При постепенном наращивании длины бандажа, контактное давление в контрольных точках приобретает постоянное значение и не изменяется (рисунок 2).

Очевидно, что при неограниченном увеличении толщины оболочки, контактное давление будет асимптотически стремиться к нулю, в следствие неограниченного роста жесткости оболочки. Данный процесс иллюстрируется графиком на рисунке 3, что подтверждает адекватность полученных результатов.

Из графика на рисунке 4 видно, что увеличение толщины бандажа приводит к появлению отрывных усилий около его края. При дальнейшем увеличении толщины бандажа отрывные усилия могут распространиться по всей его длине и превысить предел адгезионной прочности, что приведет к разрыву клеевого слоя и значительному снижению качества ремонта.

4. Выводы. С использованием теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью, выполнен анализ влияния геометрических параметров конструкции на возникновение отрывных контактных усилий в соединении изотропной оболочки с ортотропным бандажом.

Установлено, что основным параметром, влияющим на появление отрывных контактных усилий, является толщина бандажа. Ее увеличение приводит к возникновению зон с отрицательным контактным давлением, которые начинают свой рост от краев бандажа. Изменение длины бандажа и толщины оболочки к появлению отрыва не приводит.

Результаты данной работы могут быть полезны при проектировании бандажей из композитных материалов, которые используются для неразрушающего ремонта магистральных трубопроводов.

Авторы выражают большую благодарность за поддержку Европейской комиссии, в рамках программы Марии Кюри, контракт № PIRSES-GA-2012-318874, проект «Инновационный неразрушающий контроль и ремонт современными композитными материалами трубопроводов с объемными поверхностными дефектами» (INNOPIPES).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Md Shamsuddoha, Md Mainul Islam, Thiru Aravinthan, Allan Manalo, Kin-tak Lau.* Effectiveness of using fibre-reinforced polymer composites for underwater steel pipeline repairs // Composite structures: Elsevier. 2013. № 100. P. 40–54.
- [2] *Chris Alexander.* Strain-based design methods for composite repair systems // Proceedings of 7th International Pipeline Conference. Sept.29–Oct.3 2008. Canada IPC2008-64076
- [3] EU Research Projects «INNOPIPES» [Электронный ресурс] // CORDIS: [сайт]. Дата обновления: 16.08.2012 URL: http://cordis.europa.eu/projects/rcn/104754_en.html (дата обращения: 23.09.2013)
- [4] *Бесчетников Д. А., Львов Г. И.* Контактная задача для цилиндрической оболочки с бандажом из композитного материала // Вестник НТУ «ХПИ». 2012. № 67. С. 19–25.
- [5] *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Осесимметричные контактные задачи для цилиндрических и сферических оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. 1990. № 22. С. 3–69.
- [6] *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наукова думка, 1973. 246 с.
- [7] *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

Beschetnikov D. A., Lvov G. I. *Contact interaction of a cylindric shell with a composite bandage with shear stiffness consideration.* In this article research of contact interaction of a cylindrical steel shell with a glass-fibre plastic bandage which are glued was carried out using the theory of elastic shells with finite shear stiffness. The influence of geometrical parameters on tear forces was determined. The results are represented in graph form.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ВРЕМЕННОГО И ДЕТРЕНД АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КАРДИОСИГНАЛОВ

Богачева М. О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследованы 4 вида кардиосигналов, записанных во втором стандартном отведении: кардиосигнал здорового человека, пациента с инфарктом миокарда, кардиосигнал в случае гипертрофии сердца и кардиосигнал пациента с блокадой ножки пучка Гиса. Для данных кардиосигналов с помощью итерационного алгоритма определены основные кардиографические комплексы. На основании полученных данных проведен временной анализ и детренд-анализ флуктуаций. Приведенные методы позволяют определить различные отклонения от нормы по характеру кардиосигнала.

Введение

Кардиосигнал является сигналом нестационарной природы, который изменяется в зависимости от индивидуальных особенностей организма человека. Отчетливые нарушения в структуре кардиосигнала выявляются невооруженным глазом. Однако возможен целый ряд отклонений и пограничных состояний, которые не проявляются в виде контрастных признаков. В таких случаях особо важны методы, позволяющие идентифицировать даже незначительные отклонения кардиосигнала от нормы.

В данной работе рассматривается ряд методов анализа кардиосигналов здорового пациента и в случае трех патологий. В качестве источника данных была использована интернет-база биологических сигналов *PhisioNet* [1]. Все расчеты были реализованы в среде *Maple*.

Итерационный алгоритм идентификации кардиографических комплексов

1 этап. Предварительное обучение.

На данном этапе определяются максимальное, минимальное и среднее значение сигнала на интервале $[t_0, t_1]$, заведомо большем одного периода кардиограммы. Экстремальное значение максимума модуля отклонения от среднего значения отождествляется с R -зубцом. Определяется знаковая асимметрия кардиограммы (знак R -зубца).

2 этап. Оценка параметров кардиосигнала.

На втором этапе в соответствии с принятыми ограничениями на минимально и максимально возможные периоды кардиосигнала определяются R -зубцы как зубцы с максимальной амплитудой. После оценки периодов кардиосигнала на каждом RR -интервале определяется уровень изоэлектрической линии как среднее значение амплитуды ЭКГ-записи. Учитывая строгую хронологическую последовательность, далее определяются зубцы T , P , Q , S .

3 этап. Адаптация.

Полученные экстремальные значения амплитуд и периода используются для уточнения прогноза на следующий период. После этого осуществляется переход к этапу анализа следующего периода.

Таким образом, в регулярном режиме циклически выполняются этапы анализа текущего и прогноза следующего периодов кардиограммы с адаптацией к ее небольшим вариациям. В момент запуска алгоритма и при сбоях выполняется обучающий этап.

Возврат к обучающему этапу возможен в двух случаях: разность амплитуд соседних зубцов больше порогового значения или расстояние между соседними зубцами больше максимального периода.

Результат работы программы обобщен в Таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Средние значения амплитуд зубцов кардиосигналов

Зубец	Норма	Инфаркт миокарда	Гипертрофия	Блокада ножки пучка Гиса
P	1,19 мм	1,19 мм	1,17 мм	1,40 мм
Q	-1,15 мм	-0,18 мм	-0,52 мм	-0,85 мм
9 R	9,25 мм	7,88 мм	8,02 мм	7,08 мм
S	-2,22 мм	-1,50 мм	-1,21 мм	-0,74 мм
T	1,18 мм	1,19 мм	1,04 мм	2,45 мм
Изолиния	0,8 мм	1,1 мм	-0,5 мм	1,4 мм

Таблица 2 – Средние значения длительности кардиографических комплексов

Комплекс	Норма	Инфаркт миокарда	Гипертрофия	Блокада ножки пучка Гиса
RR	0,77 с	0,58 с	0,68 с	0,78 с
PQ	0,12 с	0,09 с	0,08 с	0,14 с
QRS	0,06 с	0,09 с	0,09 с	0,13 с
QRST	0,35 с	0,39 с	0,38 с	0,35 с

Результаты работы алгоритма позволяют сделать следующие выводы:

- увеличение амплитуды зубцов P и T , а также длительности комплекса QRS при блокаде ножки пучка Гиса;
- малая амплитуда зубца Q и длительность RR -интервала при инфаркте миокарда;
- уменьшение амплитуды зубца T и длительности интервала PQ при гипертрофии.

Временной анализ

Анализ графиков Пуанкаре

График Пуанкаре представляет собой набор точек, каждая из которых является парой RR -интервалов с лагом m (RR_i, RR_{i+m}). Основными характеристиками графика Пуанкаре являются S_1 и S_2 , определяющие малую и большую полуоси эллипса, ограничивающего облако точек [2].

По результатам исследования для кардиосигнала здорового человека, а также при гипертрофии и блокаде ножки пучка Гиса характерны незначительные различия в длительности соседних кардиоинтервалов, тогда как в случае инфаркта миокарда наблюдается увеличение размеров эллипса и его поворот на 90° (рис. 1).

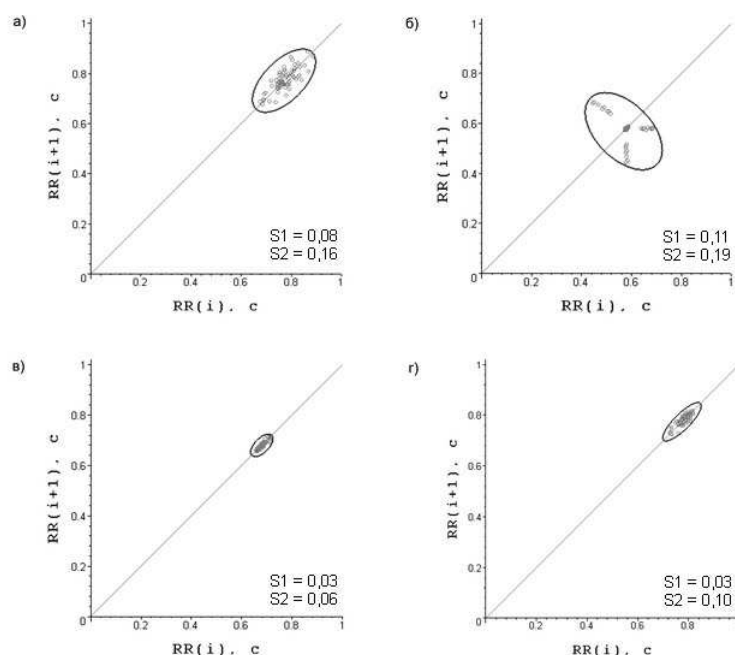


Рисунок 1 – Графики Пуанкаре при исследовании кардиосигналов здорового человека (а), при инфаркте миокарда (б), гипертрофии (в), блокаде ножки пучка Гиса (г)

Анализ гистограммы

Под гистограммой понимается графическое изображение сгруппированных значений продолжительности сердечных циклов, где по оси абсцисс откладываются временные значения, а по оси ординат — их количество или доля от общего числа. Иначе, гистограмма показывает закон распределения кардиоинтервалов как случайных величин.

Из приведенного графика (рис.2) видно:

- 1) для здорового человека характерна гистограмма, близкая по виду к кривой Гаусса;
- 2) эксцессивная, с ярко выраженной отдельной вершиной в случае инфаркта;
- 3) асимметричная, со смещением влево при гипертрофии;
- 4) с двумя вершинами при блокаде ножки пучка Гиса.

На основании полученных кардиокомплексов и гистограммы вычислены стандартные статистические характеристики для ряда RR -интервалов, представленные в Таблице 3:

Детренд анализ флуктуаций

При детренд анализе ЭКГ записи на каждом RR -интервале рассматривается отклонения сигнала от изолинии и определяется продолжительность отклонений τ в ту или иную сторону от изолинии. К полученной последовательности продолжительностей флуктуаций применяется детренд анализ, который состоит из нескольких этапов.

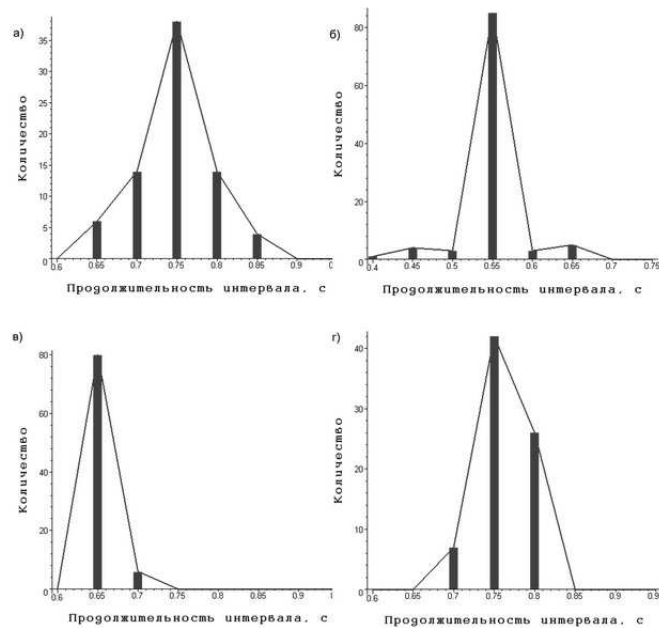


Рисунок 2 – Гистограммы здорового человека (а), при инфаркте миокарда (б), гипертрофии (в), блокаде ножки пучка Гиса (г)

Сперва строится новый временной ряд из y_k , определяемых формулой

$$y_k = \sum_{i=1}^k (\tau_i - \bar{\tau}) . \quad (1)$$

Полученный ряд разделяется на сегменты размера n . На каждом сегменте точки временного ряда аппроксимируются прямой y_k^n . Затем точки прямой вычитаются из временного ряда и вычисляется среднеквадратическое отклонение F_n :

$$F_n = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - y_k^n)^2} . \quad (2)$$

Таблица 3 – Статистические характеристики ряда RR -интервалов

Характеристика	Здоровый	Инфаркт миокарда	Гипертрофия	Блокада ножки пучка Гиса	Норма
Средняя продолжительность интервала	0,77 с	0,58 с	0,68 с	0,78 с	0,75–1 с
Мода	0,76 с	0,57 с	0,69 с	0,81 с	0,75–1 с
Среднеквадратическое отклонение	0,04 с	0,04 с	0,01 с	0,02 с	0,04–0,08 с
Межинтервальные различия	0,03 с	0,06 с	0,005 с	0,01 с	0,02–0,05 с
Вариационный размах	0,21 с	0,24 с	0,06 с	0,09 с	0,15–0,3 с
Коэффициент вариации	0,06	0,06	0,02	0,03	0,03–0,12
Частота появления быстрых изменений ритма	0,12	0,24	0	0	0,13±0,08

Этот процесс повторяется при различных значениях сегмента n для выявления зависимости $F = F(n) = n^\alpha$ [3].

Среднее значение параметра α для исследуемых кардиосигналов составляет: для кардиосигнала в норме $\alpha = -1,12$; в случае инфаркта миокарда $\alpha = -1,33$; при гипертрофии $\alpha = -1,20$; в случае блокады ножки пучка Гиса $\alpha = -1,15$.

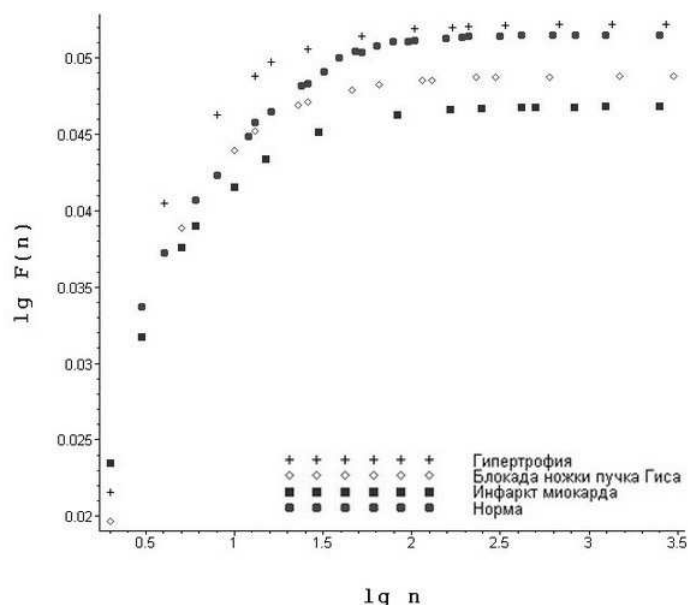


Рисунок 3 – Детренд анализ флуктуаций кардиосигналов здорового человека (а), при инфаркте миокарда (б), гипертрофии (в), блокаде ножки пучка Гиса (г)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Bousseljot R., Kreiseler D., Schnabel A.* Nutzung der EKG-Signaldatenbank CARDIODAT der PTB über das Internet // Biomedizinische Technik. 1995. Band 40. P. 317.
- [2] *Goshvarpour A. et al.* Analysis of lagged Poincare plots in heart rate signals during meditation // Digital Signal Processing. 2011. V. 21. P. 208–214.
- [3] *Reyes-Ramírez I., Guzmán-Vargas L.* Scaling properties of excursions in heartbeat dynamics // European Journal of Physics. 2010. V. 89. P. 431–437.

Bogacheva M. O. *The use of methods the time and detrend analysis for investigation of cardiac signals.* Investigated four types of cardiac signals recorded in the second standard lead: for healthy man, for patients with myocardial infarction, hypertrophy and bundle branch block. For these cardiac signals with help of iteration algorithm the main cardiographic complexes are identified. On the basis of the data the time analysis and detrend fluctuation analysis are performed. The above methods can identify various deviations in nature cardiac signal.

ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ДИФРАКЦИИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН НА НЕПЛОСКИХ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ УПРУГИХ ТЕЛ

Боев Н. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Получены явные выражения перемещений ультразвуковой продольной волны, распространяющейся в упругом теле вдоль его неплоской свободной граничной поверхности канонической формы, допускающей многократные переотражения. Проведен качественный и количественный анализ амплитуды отраженной волны в зависимости от удаленности источника и приемника от отражающих поверхностей. Установлены параметры траектории луча, при которых наблюдается фокусировка отраженной волны.

1. Постановка задачи. Распространение ультразвуковой (УЗ) продольной волны вдоль неплоской граничной поверхности может быть реализовано, например, в упругом образце с параллельными гранями, на одной из которых имеется выпуклая выточка в виде кругового полуцилиндра или полушара (рис. 1). На противоположной плоской грани возможно расположение источника УЗ волны и приемника при котором осуществимо переотражение УЗ волны в одной плоскости произвольное конечное число N раз (рис. 1). Точки зеркального отражения расположены в вершинах правильного $2N$ -угольника, вписанного в окружность диаметрального сечения сферы и кругового сечения цилиндра плоскостью перпендикулярной образующей. Уточним траекторию луча, которая представляет собой плоскую ломаную линию.

От УЗ датчика x_0 , находящегося на пересечении плоской грани и продолжении одной из перпендикулярных этой грани сторон правильного $2N$ -угольника, вписанного в окружность, на вогнутую часть граничного контура указанного сечения выпуклой выточки канонической формы в виде полуокружности падает по прямой, на которой находится выделенная сторона многоугольника высокочастотная монохроматическая продольная волна (зависимость по времени $e^{-i\omega t}$, ω — частота колебаний).

На полуокружности находятся N вершин многоугольника $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$, которые в ГТД являются точками зеркального отражения волны. При такой траектории многократно отраженного луча, луч, приходящий в точку приема x_{N+1} из последней точки зеркального отражения y_N^* будет параллелен исходному падающему лучу. Расстояние L_0 от источника x_0 до первой точки зеркального отражения y_1^* и расстояние L_N от точки y_N^* до приемника x_{N+1} равны между собой (рис. 1). После отделения временного множителя в волновом уравнении задача сводится к исследованию амплитуды давления рассеянного поля.

2. Метод решения. В самой общей постановке двумерная и пространственная задачи об определении перемещений в переотраженной продольной волне от скопления препятствий в упругой среде в случае высоких частот исследованы в

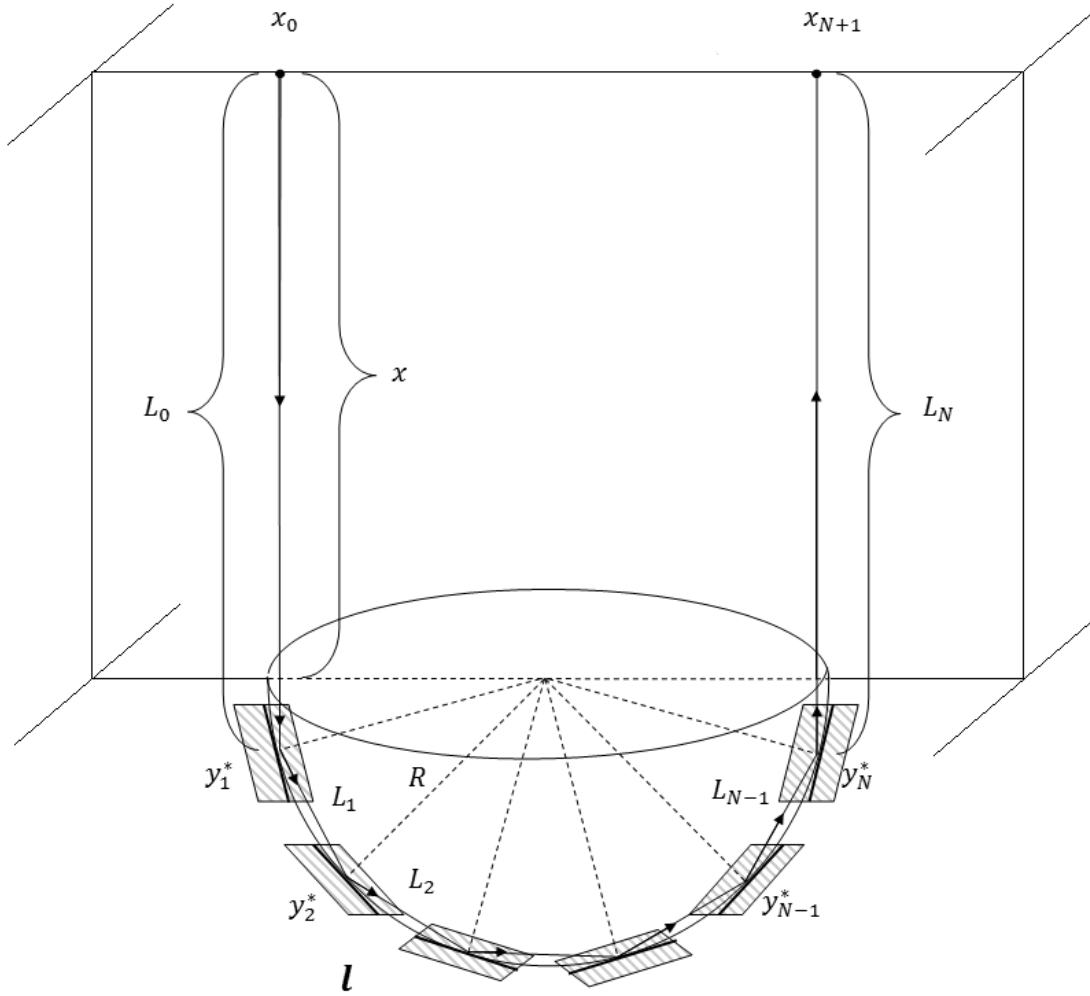


Рисунок 1 – N-кратное отражение высокочастотной продольной волны от свободной граничной поверхности упругого тела в виде вогнутой полусферы

работах Сумбатяна М.А. и Боева Н.В. [1, 2]. В этих работах на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа [3] получены дифракционные интегралы, главные члены асимптотических разложений которых исследованы методом многомерной стационарной фазы [4]. Полученные аналитические выражения давления в переотраженной волне соответствуют ГТД. Выпишем аналитические выражения для радиального перемещения в пространственной задаче [2] в точке приема.

$$u_r^{(p)}(x_{N+1}) = B \prod_{n=1}^N \cos(\gamma_n^*) V_{pp}(y_n^*) \frac{\exp\left(i \left[k_p \sum_{n=0}^N L_n + \frac{\pi}{4} (\delta_{2N}^{(p)} + 2N) \right]\right)}{\left(\prod_{n=0}^N L_n \right) \cdot \sqrt{|\det D_{2N}^{(p)}|}} \quad (1)$$

$$B = Q_q k_p^2 / (4\pi \mu k_s^2)$$

$$L_n = |y_n^* - y_{n+1}^*|, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad L_0 = |x_0 - y_1^*|, \quad L_N = |y_N^* - x_{N+1}|,$$

где $\delta_{2N}^{(p)} = \text{sign} D_{2N}^{(p)}$, матрица Гессе $D_{2N}^{(p)} = (d_{ij})$, $i, j = \overline{1, 2N}$ является ленточной (с шириной ленты равной семи) и симметричной $d_{ij} = d_{ji}$. $V_{pp}(y_n^*)$ — коэффициенты отражения продольной волны в точках зеркального отражения y_n^* , $n = \overline{1, N}$, а γ_n^* — угол между направлением падения волны и нормалью к поверхности y_n^* . Параметры λ, μ — коэффициенты Лямэ, $k_p = \frac{\omega}{c_p}$, $k_s = \frac{\omega}{c_s}$, c_p, c_s — волновые числа и скорости продольной и поперечной волн.

3. Отражатели канонической формы.

При рассматриваемой траектории плоского луча его параметры определяются соотношениями вписанного в окружность $2N$ -угольника:

$$\gamma_n^* = \frac{\pi(N-1)}{2N}, \quad n = \overline{1, N}, \quad \gamma_n^* = \gamma^*, \quad c = \cos \gamma^*,$$

$$L_0 = L_N = Rc + x, \quad x \in (-Rc, +\infty), \quad L_N = 2Rc, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

В дальнейшем будем исследовать величину радиальных перемещений в переотраженной волне в точке x_{N+1} .

При этом выражения амплитуды перемещения во всех случаях разные и связаны с вычислением определителя порядка N матрицы Гессе в случае двумерной задачи и определителей порядка $2N$ в случае пространственной задачи. Полученные определители ленточной структуры, симметричные и вычислены с использованием метода математической индукции.

В случае двумерной задачи, исходя из общей формулы [1] для определителя матрицы Гессе $D_N^{(\text{окр})}$ и перемещения получаем явные выражения:

$$\det D_N^{(\text{окр})} = 4(-1)^N (2Rc)^{-N} z(1+Nz)(1+z)^{-2},$$

$$|u_r^{(\text{окр})}(x_{N+1})| = B |2Rcz(1+Nz)|^{-1/2} \quad (2)$$

В случае пространственной задачи основу расчетов составляет выражение (1). Первым рассмотрим цилиндрический отражатель. В этом случае определитель матрицы Гессе в (1) для полуцилиндра имеет вид:

$$\det D_{2N}^{(\text{цил})} = 16(-1)^N (2Rc)^{-2N} z(1+Nz)(z+N)(1+z)^{-4}$$

а перемещение (1):

$$|u_r^{(\text{цил})}(x_{N+1})| = B \left(2Rc |z(1+Nz)(z+N)|^{1/2} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Для полусферы:

$$\det D_{2N}^{(\text{сф})} = 16(-1)^{N+1} (2Rc)^{-2N} z^2(1+Nz)(1+z)^{-4},$$

а перемещение (1):

$$|u_r^{(\text{сф})}(x_{N+1})| = B (2Rc)^{-1} |z^2(1+Nz)|^{-1/2}. \quad (4)$$

На основе полного исследования установлено поведение функций $|u_r(x_{N+1})|$ для всех типов отражателей:

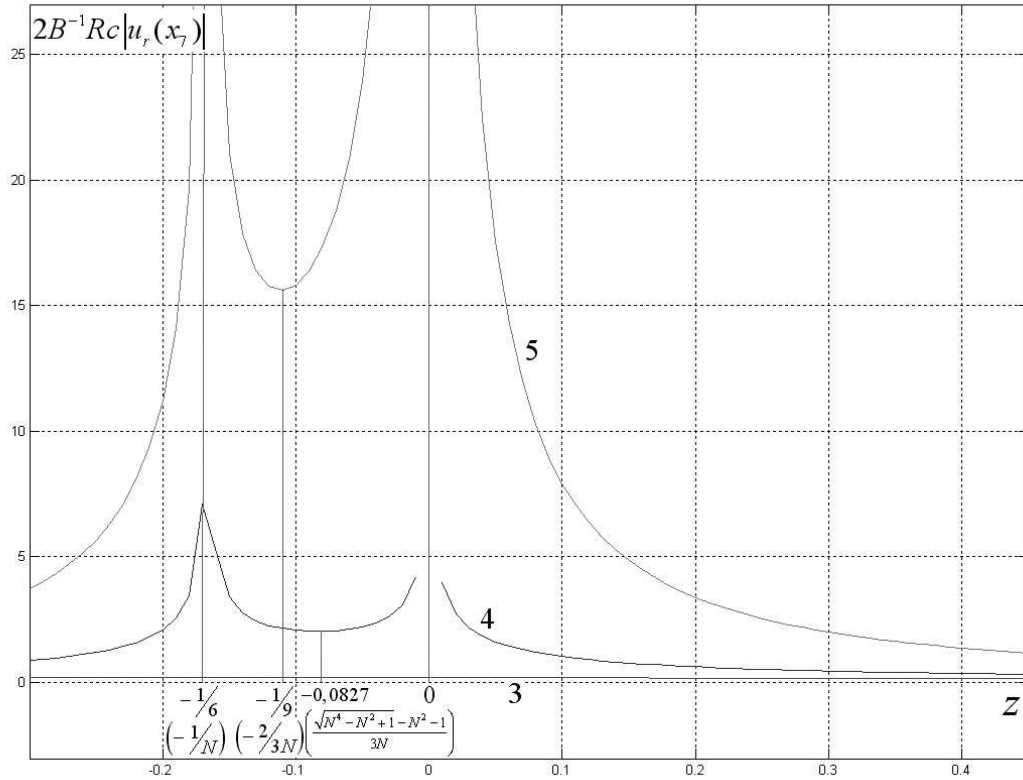


Рисунок 2 – Зависимость амплитуды радиальных перемещений в шестикратно отраженной продольной волне от полуцилиндра (кривая 4), от полусферы (кривая 5) и системы плоских отражателей (кривая 3) от удаленности источника и приемника волны. $z = x/Rc$, $c = \cos 75^\circ$

функции возрастают на множестве $z \in (-1, -N^{-1}) \cup (z_0, 0)$;

убывают на множестве $z \in (-N^{-1}, z_0) \cup (0, +\infty)$;

функции (2),(3),(4) имеют минимумы:

при $z_0 = (3N)^{-1} (\sqrt{N^4 - N^2 + 1} - N^2 - 1)$ ($z_0 \rightarrow -(2N)^{-1}$, $N \rightarrow \infty$)

$B^{-1}Rc \left| u_r^{(\text{цил})}(x_{N+1}) \right|_{\min} \rightarrow 1$;

при $z_0 = -(2N)^{-1}$ $B^{-1}\sqrt{Rc} \left| u_r^{(\text{окр})}(x_{N+1}) \right|_{\min} = \sqrt{2N}$;

при $z_0 = -2/(3N)$ $B^{-1}Rc \left| u_r^{(\text{сф})}(x_{N+1}) \right|_{\min} = (3\sqrt{3}/4)N$.

Прямые $z = N^{-1}$ и $z = 0$ являются вертикальными асимптотами. Это означает, что при расположении источника в точках $z = N^{-1}$ и $z = 0$ граничный контур отражателя допускает фокусировку акустической волны в точке приема.

Графики функций величины $2B^{-1}Rc|u_r(x_7)|$ в трехмерной задаче для шестикратно переотраженной волны приведены на рис. 2. Кривая 3 соответствует переотражениям волны от системы плоских отражателей, а кривые 4 и 5 - переотражениям волны соответственно от цилиндрического и сферического отражателей. Для N -кратно отраженной волны во множестве $z \in (-1, -N^{-1}) \cup (-N^{-1}, 0) \cup (0, 1)$ перемещение в отраженных волнах от неплоских отражателей больше, чем от си-

стемы плоских отражателей, а при $z \in (1, +\infty)$ меньше. При расположении источника волны в точке $z = 1$ ($x = Rc$) перемещения в отраженных волнах одинаковые.

4. Заключение.

В работе в рамках ГТД получены явные выражения радиального перемещения в многократно переотраженной продольной УЗ волне от вогнутой части кругового контура (2), граничных поверхностей цилиндрического (3) и сферического (4) отражателей. Проведен качественный и количественный анализ полученных выражений в зависимости от расстояний источника и приемника волны от поверхностей отражателей. На примере многократного отражения высокочастотной продольной волны от поверхностей отражателей канонической формы обсуждена практически важная проблема замены неплоских отражателей плоскими в прикладных задачах ультразвукового неразрушающего контроля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Sumbatyan M. A., Boyev N. V.* High-frequency diffraction by nonconvex obstacles // J. Acoust. Soc. Am. 1994. 95, № 5. (Part 1). P. 2347–2353.
- [2] *Боев Н. В.* Рассеяние высокочастотных волн на произвольной невыпуклой граничной поверхности упругого тела с учетом переотражений // Изв. РАН. МТТ. 2005. С. 65–80.
- [3] *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теории дифракции. // М.: Связь, 1978. 248 с.
- [4] *Федорюк М. В.* Метод перевала. // М.: Наука, 1977. 368 с.

Boyev N. V. *Explicit expressions for displacements in diffraction of Ultrasonic waves by non-plane boundary surfaces of elastic bodies.* We develop explicit expressions for displacements of an Ultrasonic longitudinal wave propagating in an elastic body along its non-plane free boundary surface of canonical shape, admitting multiple re-reflections. There is performed a qualitative and quantitative analysis of the reflected wave amplitude versus distance of the source and the receiver from the reflecting surface. There are evaluated the parameters of the ray trajectory which result in focusing of the reflected wave.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ, ОСЛАБЛЕННЫХ НАЛИЧИЕМ ДЕФЕКТОВ

Бочарова О. В.¹, Анджинович И. Е.²

¹*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

²*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Представлены результаты исследования особенностей волновых полей на поверхности структурно неоднородных тел. Показана возможность определения наличия дефекта, его размера и расположения по параметрам поверхностного волнового поля. Исследование проведено на основе численного и экспериментального моделирования динамических процессов в телах, ослабленных наличием дефектов.

Возможность неразрушающего контроля состояния, дефектов различных механических объектов всегда была и остаётся актуальной, что привлекает к созданию новых методик определения “здоровья” сложных конструкций. Современное развитие технологий производства новых материалов с одной стороны, повышенные требования к эксплуатационным характеристикам деталей и узлов конструкций, выполненных из этих материалов, и работающих в сложных условиях с другой стороны, приводят к необходимости создания простых и эффективных методов постоянного мониторинга состояния объекта. В [1] предложен метод и приведены результаты экспериментального исследования интегральных параметров динамических процессов и резонансных явлений на поверхности тел, выполненных из структурно неоднородных и композиционных материалов со сложными физико-механическими свойствами. Было отмечено, что важную роль в интегральной оценке динамических свойств играют резонансные свойства системы датчик – контролируемый объект за счет создания резонансного режима колебаний, обеспечивающего четкий контроль за изменением динамических свойств среды [2]. В [3] был предложен метод исследования поверхностных волновых полей за счет использования сегнетоэлектрических датчиков динамической деформации [4], позволяющих оценивать влияние динамических свойств контролируемого объекта на деформационные характеристики поверхностного волнового поля. В настоящей работе исследуется возможность оценки состояния и прочности структурно-неоднородных тел, основанной на контроле изменения параметров поверхностного волнового поля. Численно и экспериментально проведено исследование возможности определения размера и расположения дефекта по поверхностному волновому полю.

Исследуются особенности динамического процесса на поверхности прямоугольного параллелепипеда из экструдированного пенополистирола с размерами 45×80×960 мм, в котором прорезаны сквозные поперечные цилиндрические полости различных размеров. Нижняя грань параллелепипеда жестко приклеена к недеформируемому основанию. Поверхностные колебания в образце возбуждались импульсным воздействием вблизи его левой грани через легкий алюминиевый штамп. Дефект в виде цилиндрической полости располагался на расстоянии

280 мм от левого края образца. Диаметр полости, равно как и глубина ее залегания (расстояние от верхней точки полости до поверхности среды), варьировался. Колебания регистрировались миниатюрными акселерометрами фирмы PCB Piezotronics (США), расположенными на расстоянии 180 мм (1-й датчик – до полости), 280 мм (2-й датчик – над полостью) и 380 мм (3-й датчик – после полости) от левого края объекта. Блок-схема эксперимента представлена на рисунке 1.

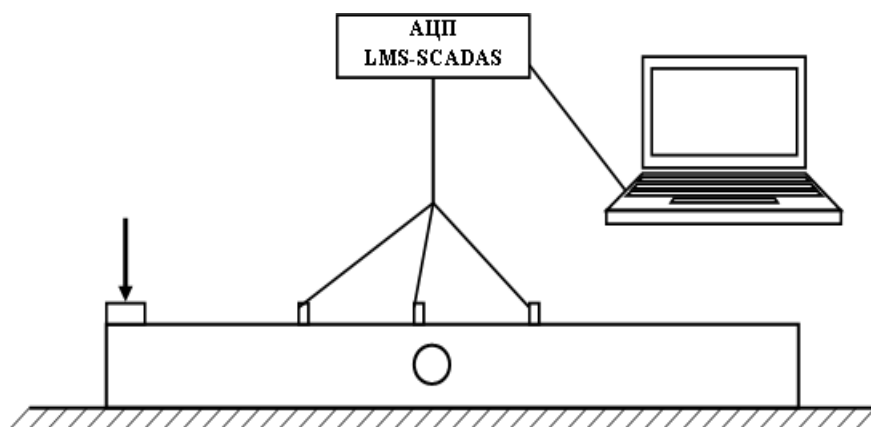


Рисунок 1 – Блок-схема эксперимента

Сигналы с акселерометров поступали на многоканальный анализатор LMS-Scadas фирмы LMS International (Бельгия), программно обрабатывались и представлялись в виде спектров сигнала в частотной области.

Параллельно для аналогичной модели проводился вычислительный эксперимент, основанный на использовании метода конечных элементов. Для расчета волнового поля на поверхности параллелепипеда, ослабленного наличием полости, был применен пакет ANSYS с использованием командного языка APDL. При расчетах принимались следующие значения: модуль Юнга $E = 22$ МПа, плотность $\rho = 50$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

На рисунках 2–3 представлены графики, иллюстрирующие влияние структуры среды, в частности наличие дефекта, его размера и расположения, на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) поверхностного волнового поля. На рисунке 2 показаны графики спектрального отклика на импульсное воздействие в точке, находящейся над полостью, для следующих образцов: 1 – образец без дефектов (пунктирная линия), 2 – образец с полостью диаметром 20 мм, расположенной на расстоянии 5 мм от верхней границы (сплошная линия), 3 – образец с полостью диаметром 30 мм, расположенной на расстоянии 5 мм от верхней границы (штрихпунктирная линия). По оси абсцисс отложена частота (в кГц), по оси ординат – вертикальная компонента смещения с множителем $k = 10^4$ (м). Как следует из графиков, наличие полости проявляется на АЧХ за счет увеличения амплитуды в окрестности в окрестности 4 кГц. Увеличение размера полости приводит к значительному увеличению амплитуды на той же частоте.

На рисунке 3 показан спектральный отклик системы, измеренный датчиком, находящимся над полостью, для следующих образцов: 1 – образец без дефектов (пунктир), 2 – образец с полостью диаметром 30 мм, расположенной на расстоянии

10 мм от верхней границы (сплошная линия), 3 – образец с полостью диаметром 30 мм, расположенной на расстоянии 5 мм от верхней границы (штрих-пунктир). Как следует из графика, заглубление дефекта приводит к уменьшению амплитуды.

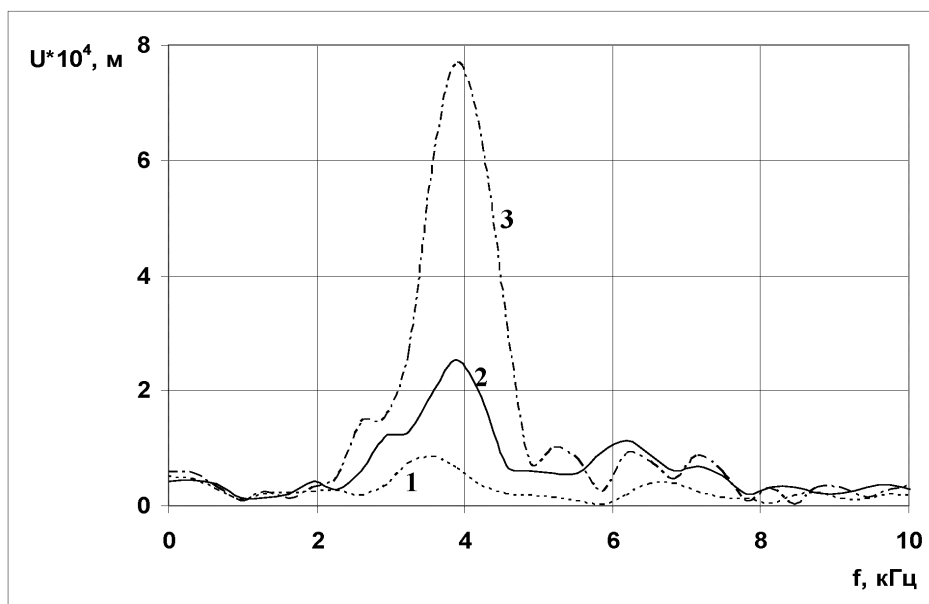


Рисунок 2 – АЧХ колебаний поверхности в зависимости от размера полости

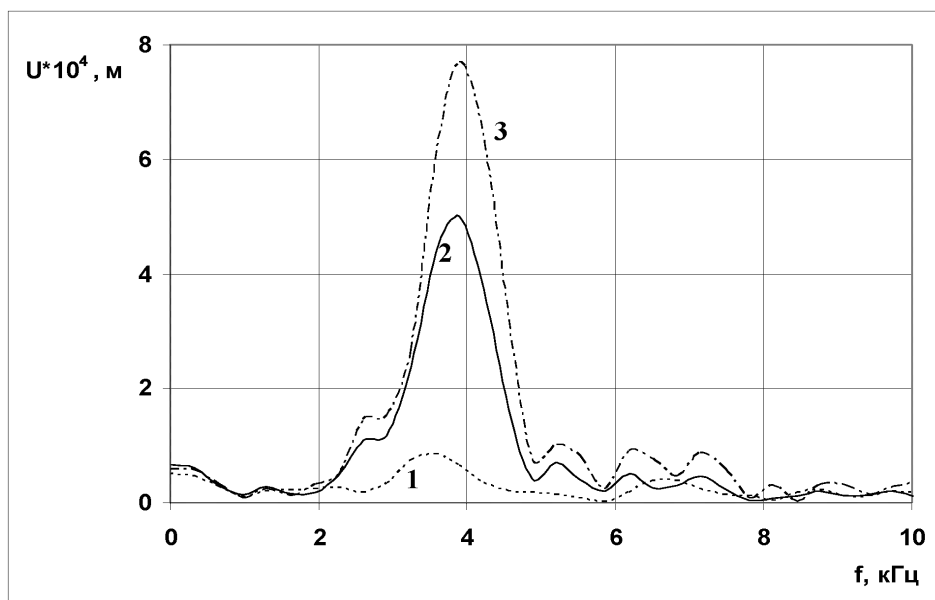


Рисунок 3 – АЧХ колебаний поверхности в зависимости от глубины залегания полости

На рисунке 4 представлены графики АЧХ трех датчиков, расположенных на расстоянии 180, 280 и 380 мм от края образца. Полость расположена на расстоянии

280 мм от края и на глубине 5 мм. Как следует из графиков, полость оказывает влияние лишь на ближний датчик, в то время как удаленные датчики наличие полости почти не чувствуют.

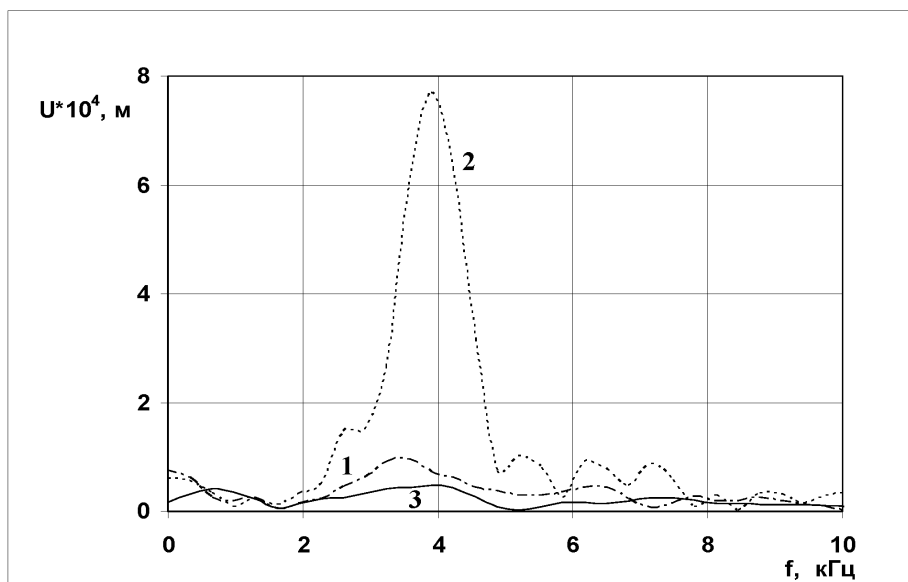


Рисунок 4 – АЧХ колебаний поверхности образца с полостью в трех точках (вычислительный эксперимент)

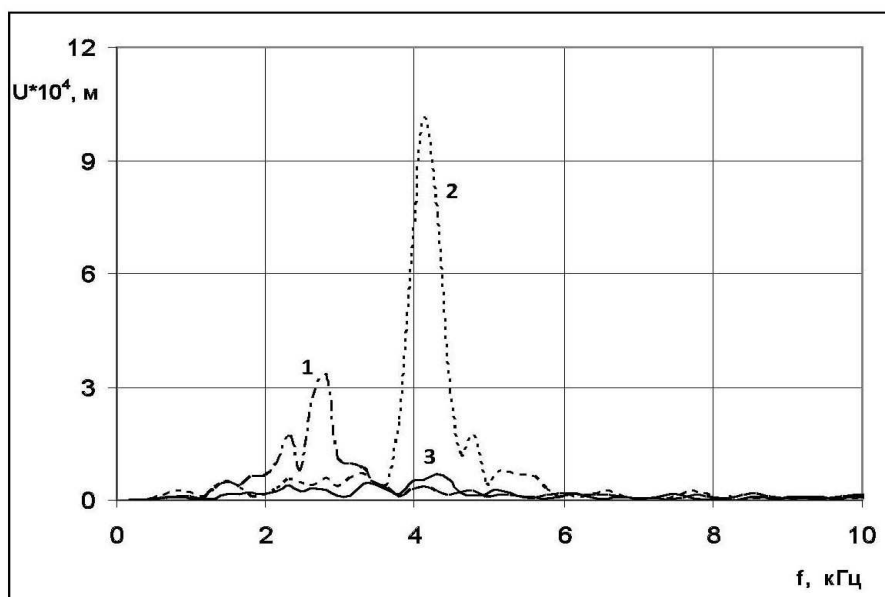


Рисунок 5 – АЧХ колебаний поверхности образца с полостью в трех точках (натурный эксперимент)

На рисунке 5 представлены графики, полученные в результате экспериментальных исследований динамики поверхности среды с полостью 30 мм, от трех датчиков, расположенных соответственно на расстоянии 180, 280 и 380 мм от края (на рисунках соответственно штрихпунктирная, пунктирная и сплошная кривые). Эти графики в определенной мере подтверждают результаты, полученные численным путем при моделировании динамических процессов на поверхности образца, ослабленного наличием полости.

Как следует из результатов численного и экспериментального моделирования, наличие дефекта существенно влияет на характеристики волнового поля в окрестности дефекта, при этом глубина расположения полости, размер полости оказывают существенное влияние на амплитуду АЧХ.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-6213.2012.1), Российского фонда фундаментальных исследований (11-08-00884).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белянкова Т. И., Анджилович И. Е., Шейдаков Д. Н. Резонансный мониторинг структуры слоисто-неоднородной среды // Вестник Южного научного центра. 2007. Т. 3. № 3. С. 3–8.
- [2] Бабешко В. А., Ворovich И. И., Образцов И. Ф. Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 74–83.
- [3] Мухортов В. М., Мухортов Вас. М., Бирюков С. В. Новый датчик динамической деформации на основе тонких пьезоэлектрических пленок, полученных ионно-плазменным напылением // Мир измерений. 2007. Вып. 7. С. 45–61.
- [4] Есипов Ю. В., Мухортов В. М., Калинин В. В., Анджилович И. Е. О возможности раннего диагноза состояния стержневых конструкций с применением сегнетоэлектрических датчиков динамической деформации // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. № 4. С. 29–35.

Bocharova O. V., Andzhikovich I. E. *Modeling of wave fields on the surfaces of bodies weakened by the presence of defects.* Research results are presented for specific features of wave fields on the surface of structurally heterogeneous bodies. Possibility of defect presence definition, its size and location through the parameters of a surface wave field is indicated. Research is carried out based on numerical and experimental modeling of dynamic processes in the bodies weakened by the presence of defects.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБЛЕГЧЕННОГО БЕТОНА НА ЗАПОЛНИТЕЛЯХ ИЗ ГОРЕЛЫХ ПОРОД

**Буравчук Н. И., Гурьянова О. В.,
Окороков Е. П., Павлова Л. Н.**

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Приведены результаты исследований физико-механических свойств облегченных бетонов, содержащих в качестве заполнителей материалы из горелых пород шахтных отвалов. Установлено, что с введением заполнителей из горелых пород максимально используется потенциальная способность цемента и это способствует улучшению показателей качества бетонов.

Основным компонентом облегченного бетона являются искусственно полученные пористые заполнители: керамзит, аглопорит. Однако в сложившихся экономических и экологических условиях в России доля производства и применения керамзита значительно уменьшилась. В связи с этим приоритетное направление получают преимущественно безобжиговые пористые заполнители из отходов производства. Для этого имеются достаточные объемы запасов шахтных горелых пород и золошлаковых отходов, многие из которых по своим свойствам являются потенциальным сырьем для такого рода заполнителей. В Ростовской области для этих целей можно использовать горелые породы некоторых шахтных отвалов (шахт им. Кирова, «Бургустинская № 2», «Алмазная» и др.).

В серии экспериментов по управлению физико-механическими свойствами бетонов исследовано влияние вида заполнителей на качество бетонов. В качестве объекта исследований использованы заполнители из горелых пород отвала шахты им. Кирова. Заполнители (крупные — щебень и мелкие — песчаная фракция) получены дроблением шахтных пород с последующим фракционированием продуктов дробления. Мелкий заполнитель из горелых пород — это отсев дробления. Частицам заполнителей из горелых пород свойственна пористая структура с развитой поверхностью. Это обуславливает пониженную насыпную плотность таких заполнителей в сравнении с традиционными. По этому показателю горелопородные заполнители сходны с искусственными пористыми заполнителями. Но в отличие от последних заполнители из горелых пород имеют большую прочность и более низкие значения по водопоглощению. Благодаря жесткой структуре кристаллической решетки, микропоры в частицах щебня не могут переходить в открытые поры, и молекулы воды не проникают в пространство микропор, поэтому водопоглощение щебня из горелых пород не высокое. Марка щебня по прочности при испытании на дробимость — 400, 600, 800, 1000; по истираемости — И2, по морозостойкости — F25, F50, насыпная плотность — 800–950 кг/м³, водопоглощение — 0,5–9,5 %. Мелкий заполнитель — отсев дробления пород имеет насыпную

плотность 850-950 кг/м³, модуль крупности — 2,3 — 3,5. В заполнителях из горелых пород отсутствуют глинистые и илистые частицы, нет глины в комках, содержание зерен слабых пород и примесей, относимых к вредным, не превышает допустимых пределов. Форма частиц угловатая, неокатанная, поверхность шероховатая. Содержание в щебне пластинчатых и игловатых зерен находится в пределах 8–15 %. Такие особенности заполнителей из горелых пород объясняются их происхождением. Горелые породы — продукт длительного обжига углевмещающих пород, извлеченных на поверхность при добыче угля и складированных в терриконах. Обжиг пустых шахтных пород происходит в отвале в естественных условиях при температурах, близких к 1000 °С. В результате термического воздействия частицы породы приобрели пористое строение. В породах при длительном обжиге происходили пиропроцессы, благодаря которым сформировалась пористая структура с порами различного вида и размеров. В породах имеются мелко-, средне- и крупнопористые структуры. Своеобразие структуры заполнителей из горелых пород определяет их невысокую плотность. Вещественный состав горелых пород существенно влияет на физико-химические процессы, происходящие при твердении и формировании структуры материала. Горелые породы содержат в значительном количестве глинистые, железистые и кремнеземистые гидравлические компоненты. Активность является наиболее важным свойством горелых пород, обуславливающим их применение в составе вяжущих и бетонов. Активность горелых шахтных пород связана с наличием в них нескольких активных компонентов: алюминатного в виде аморфизованного глинистого вещества и некоторого количества активной модификации Al_2O_3 , кремнеземистого в виде растворимой или активной кремнекислоты, железистого в виде растворимых Fe_2O_3 и Fe_3O_4 и алюмосиликатного стекла. Горелые породы проявляют свойства активного глиниста.

Опыт применения заполнителей из горелых пород в составах облегченных бетонов невелик. Наиболее известно использование при производстве облегченных и легких бетонов зол и золошлаковых отходов. Пористые заполнители из горелых пород отвала шахты им. Кирова вводили в состав бетонной смеси для получения облегченного бетона. В качестве крупного заполнителя использовали смесь фракций св. 5 до 15 мм. Соотношение фракций 5–10 и 10–15 мм в смеси составляет 1:1. На таком заполнителе получают конструкционные бетоны с плотностью 1800-2000 кг/м³. Уменьшить плотность бетона можно заменой обычного песка на керамзитовый песок или отсеvy дробления горелых шахтных пород. Регулировать прочность и плотность бетона можно также путем применения комбинированных заполнителей (щебень, и керамзит, песок, отсев и керамзитовый песок), взятых в различных соотношениях. Применение комбинированных заполнителей связано не только с необходимостью снизить плотность бетона, но также уменьшить расход дорогостоящего керамзита. Содержание керамзита составляло 20, 30, 40, 0 и 50 % от веса крупного заполнителя.

Состав бетона определяли расчетно-экспериментальным способом. Изготовленные по способу вибропрессования образцы кубы с размером ребра 10 см. Отформованные образцы выдерживаются в формах 15–18 часов, далее пропариваются по режиму: подъем температуры до 80 °С в течение 3 часов, изотермический про-

грев при температуре 85–87 °С в течение 8–9 часов и медленное охлаждение до комнатной температуры. Испытания образцов проводились через 4 часа после извлечения из пропарочной камеры и распалубки форм.

Результаты испытаний приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Составы и физико-механические свойства облегченного бетона

Класс (марка) бетона	Расход материалов					Прочность на сжа- тие, МПа	Плотность бетона, кг/м ³
	цемент	отсев	керамзит	щебень	вода		
B7,5 (100)	220	582	222	666	191	11,2	1690
- « -	240	524	196	590	196	13,3	1550
- « -	240	516	208	596	200	16,1	1580
- « -	260	516	232	542	189	13,4	1550
- « -	260	516	300	446	185	12,7	1522
B10 (150)	260	576	216	648	204	16,7	1700
B12,5 (150)	260	576	246	518	195	15,9	1700
B15 (200)	320	572	257	601	215	21,3	1750
- « -	340	564	254	592	213	22,4	1750
B22,5 (300)	420	572	257	601	215	31,9	1850
B25 (350)	460	556	235	549	213	36,6	1800

По результатам выполненных исследований можно сделать вывод, что в бетонах на заполнителях из горелых пород не только достигается заданная прочность, но и отмечается запас по прочности. Физико-механические свойства бетона с заполнителями из горелых пород обеспечиваются при тех же расходах цемента, что и на традиционных заполнителях и в тех же пределах, какие рекомендуют нормативные документы для конкретных марок бетона. При изготовлении изделий из предлагаемых составов следует выбирать варианты с расходом цемента, чтобы обеспечить требуемые показатели бетона по прочности, плотности, морозостойкости, водонепроницаемости, износо- и атмосферостойкости. При предъявлении к бетону требований только по прочности и плотности следует провести корректировку составов бетона, направленную на снижение расхода цемента.

В заводских условиях из составов для конструкционно-теплоизоляционного и конструкционного бетона были изготовлены экспериментальные партии изделий. Образцы-кубы для контрольных испытаний формовались и подвергались пропариванию в цехе одновременно с изделиями, а также другая партия образцов набирали прочность в условиях естественного твердения. В таблице 2 представлены результаты испытаний свойств бетона.

Для бетонов марок 150 и 200 относительная прочность после тепловой обработки по общепринятому для бетона режиму изменялась в пределах 0,825 — 1,18, для марок 50 и 75 — от 0,8 до 0,86, в то время как для контрольных образцов она находилась в пределах 0,68 — 0,72. Бетон для стеновых блоков марки 50 имел плотность 1200, марки 75 — 1400 кг/м³, для блоков подоконных — 1600 кг/м³, для перемычек — 1800 кг/м³. На изделиях из экспериментального бетона не было

признаков дефектов поверхности. Имело место экономия цемента от 5 до 10 % без ухудшения свойств бетона. Улучшились показатели водопоглощения, морозостойкости и водонепроницаемости бетона. Остаточная влажность бетона после пропаривания снижалась и составляла 5,3 — 6,0 % (у контрольных образцов 10,4 — 27,8 %). Эти особенности бетона на нетрадиционных заполнителях имеют важное значение для практики, так как из-за повышенной монтажной влажности наблюдаются случаи промерзания стен из керамзитобетона, а повышенное увлажнение тонкостенных конструкций резко ухудшает микроклимат в помещениях.

Таблица 2 – Физико-механические свойства облегченного бетона (экспериментальная партия)

Изделие, марка бетона, осадка конуса	Отпуск- ная проч- ность, %	Прочность на сжатие, МПа				Морозо- стойкость, марка	Водо- непрони- цаемость марка
		после пропари- вания	естественное твердение, сут.				
			28	60	180		
Перемычки 200, ОК — 2-3 см	70	16,5 (0,825)	19,8	22,5	23,6	F75	W4
Перемычки 150, ОК — 2-3 см	100	17,7 (1,18)	21,0	22,6	24,8	F75	W2
Блоки наружные стеновые 100, ОК — 2-3 см	70	8,3 (0,85)	10,9	12,4	13,0	F50	W2
Блоки подоконные 75, ОК — 2-3 см	70	6,0 (0,80)	7,8	8,3	9,0	F35	—
Блоки наружные стеновые 50, ОК — 2-3 см	70	4,3 (0,86)	5,7	6,8	7,3	F25	—

Бетон на пористых заполнителях из горелых шахтных пород стоек к действию агрессивных сред. Испытание экспериментальных бетонов проводилось на модельной установке, имитирующей натурные условия эксплуатации изделий в осложненных условиях (колебания влажности и температуры, действие биологически активных и агрессивных сред). Наблюдения велись в течение трех лет и подтвердили хорошие эксплуатационные качества испытываемого бетона. Признаков разрушения не обнаружено, капиллярное всасывание и водопоглощение в 1,7–2,2 раза меньше, а прочность на 18–27 % выше, чем у керамзитобетона. Такой бетон целесообразно использовать для устройства полов и стен не только в жилых, но и производственных зданиях, но и в помещениях с переменной влажностью и температурой, с воздействием нагрузок и агрессивных сред. Устройство полов производится по той же технологии, как и из керамзитобетона. Бетонную смесь укладывают на уплотненное щебеночное основание. Толщина слоя укладки 70–80 мм. Уложенный бетон после набора прочности покрывают цементно-песчаной стяжкой.

Бетоны, содержащие горелые шахтные и имеющие пористую структуру, требуют особого внимания к обеспечению сохранности арматуры от коррозии. В таких бетонах толщину защитного слоя необходимо выдерживать на 5–10 см больше,

чем в конструкциях из бетона той же марки на плотных заполнителях.

Улучшение свойств горелопородных бетонов с одной стороны связано со структурой частиц горелой породы (пористость, шероховатость и чистота поверхности, отсутствие засоряющих примесей, гидравлическая активность) способствующей хорошему сцеплению вяжущего с заполнителем. С другой – наличие активных компонентов в составе горелых пород интенсифицирует гидратацию цемента. Активные компоненты горелой породы взаимодействуют с продуктами гидратации цемента, образуя дополнительное количество новообразований. Таким образом, потенциальная способность цемента используется максимально. Процесс твердения бетонной смеси в присутствии горелых пород и состав основных продуктов гидратации цемента протекает по известной классической схеме, как и в составах на традиционных материалах. Такая точка зрения подтверждается и результатами других исследователей [1–4]. Результаты комплексных физико-химических исследований гидратированных цементно-горелопородных композиций подтверждают, что горелые породы практически не влияют на состав новообразований, но вызывают количественные изменения гидратных новообразований: увеличивается общее количество цементирующих веществ и растет число низкоосновных гидросиликатов, ответственных за набор прочности твердеющего материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Михеева Т. Е., Галыченко П. П., Каплан Б. Я., Мирошниченко Е. Г. Теоретические основы выбора оптимальных составов тампонажных растворов на основе горелых пород Донбасса // Тр.ВНИИОМШС. Харьков, 1978. Вып. 26. С. 56–64.
- [2] Книгина Г. И., Бalandина Т. С. Долговечные строительные материалы на основе горелых пород // Физико-химические основы и экологические проблемы использования отходов добычи и переработки твердых горючих ископаемых. Тез. докл. Всес. совещ. М., 1980. Ч. 1. С. 21–25.
- [3] Баженов Ю. М., Алимов Л. А., Воронин В. В. Развитие теории формирования структуры и свойств бетонов с техногенными отходами // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 7. С. 55–58.
- [4] Власов В. В. Структурные изменения при твердении вяжущих на основе природного и техногенного алюмосиликатного сырья // Изв. вузов. Строительство. 1997. № 5. С. 42–48.

Buravchuk N. I., Guryanova O. V., Okorokov E. P., Pavlova L. N. *The Study on physical and mechanical properties of lightweight concrete by fillers of burnt rocks.* Results of research on the physical and mechanical properties of lightweight concretes containing materials as fillers of burnt rocks the mine dumps. It is established that with introduction of fillers from burned breeds potential ability of cement is as much as possible used and it promotes improvement of indicators of quality of concrete.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ НА МЕХАНИКУ РАЗРУШЕНИЯ

Буханько А. А.¹, Лошманов А. Ю.², Хромов А. И.²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет
им. акад. С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

²Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

На основе теории пластического течения предлагается деформационно-энергетический подход к описанию процесса разрушения упругопластического материала. Данный подход представляет собой обобщение подходов, используемых в теории малоциклового усталости и механике разрушения.

1. Введение. С точки зрения механики разрушения процесс разрушения упругопластического материала представляется как совокупность двух процессов: доведения материала до предельного состояния (зарождение трещины) и образования новых свободных поверхностей (распространение трещины). Оба этих процесса обусловлены наличием пластических деформаций, накоплением рассеиваемой работы внутренних сил и исчерпанием пластичности. В работе процесс достижения материалом предельного состояния описывается в рамках упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела. Процесс распространения трещины рассматривается на основе идеального жесткопластического тела, при предположении, что процесс образования трещины сопровождается определенным пластическим течением, соответствующим предельному упрочнению материала. В качестве единой критериальной величины выбрана удельная работа внутренних сил W на пластических деформациях.

2. Предельное состояние пластических материалов. Под предельным состоянием пластических тел понимается состояние, непосредственно предшествующее процессу разрушения (моменту нарушения сплошности среды). Согласно многочисленным опытам в условиях малоциклового усталости предельное состояние материала при монотонном нагружении не является единственным, а существенно зависит от рассеяния механической энергии. Известно, что малоцикловая усталость мало зависит от упругих свойств материала. Поэтому процесс достижения материалом предельного состояния предлагается описывать в рамках упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела.

Основным соотношением теории малоциклового усталости является формула Коффина–Мэнсона [1, 2], энергетическая трактовка которой была дана С. Фелтнером, Дж. Морроу [3] и Д. Мартином [4]. Согласно этой трактовке разрушение наступает тогда, когда суммарная энергия, рассеиваемая в единице объема материала, вследствие наличия необратимых пластических деформаций достигает определенной критической величины, связанной с процессами упрочнения. Формула Коффина–Мэнсона может быть представлена в виде

$$\Delta\varepsilon_p N^m = M(W_{**}), \quad W_{**} = W_c - W_h,$$

где $\Delta\varepsilon_p$ — приращение пластических деформаций; N — число циклов; m , M — константы материала; W_{**} — работа внутренних сил, характеризующая зарождение макротрещины в исходном материале; W_h — работа внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала; $W_c = \sum_{N=1}^{N_p} W_N$ — суммарная работа внутренних сил, связанных с упрочнением за N -циклов; N_p — число циклов до разрушения; W_N — энергия, рассеиваемая в единице объема материала при N -ом цикле.

Таким образом, предполагается, что материал достигает предельного состояния, когда величина W достигает критического значения W_{**} , что соответствует исчерпанию пластичности материала и зарождению трещины. То есть, для определения предельного состояния используется только часть рассеиваемой энергии, соответствующая работе внутренних сил на пластических деформациях, связанных с упрочнением.

В работах [5–7] предельное состояние материала предлагается описывать линиями на поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела. В сечениях этой поверхности плоскостями, параллельными девиаторной плоскости в пространстве главных деформаций, предлагаемые линии имеют вид криволинейных треугольников. Связь между этими линиями и поверхностью нагружения материала устанавливается с помощью величины

$$h' = \frac{3\sigma_S(I_E)}{3 - 2I_E}$$

как функции параметра упрочнения, который совпадает с модулем первого инварианта I_E тензора конечных деформаций Альманси. Для определения величины h' необходимо перестроить диаграмму нагружения в виде $\sigma_S = \sigma_S(I_E)$, учитывая соотношения, полученные из кинематики цилиндрического образца при одноосном растяжении [8]:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\delta(2 + \delta)}{(1 + \delta)^2}, \quad E_2 = E_3 = -\frac{1}{2}\delta.$$

Здесь $E_i (i = \overline{1, 2})$ — компоненты тензора конечных деформаций Альманси; δ — относительное удлинение образца; $\sigma_S(I_E)$ — значение предела текучести, определяемое из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца и характеризующее состояние упрочнения материала на данном уровне деформаций.

Таким образом, при описании предельного состояния материала предлагается использовать поверхность нагружения, связанную с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела и отвечающую состоянию материала. В общем случае уравнение этой поверхности нагружения содержит второй и третий инвариант тензора напряжений, является гладким и симметричным [9]:

$$(\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1)(\sigma_3 + \sigma_1 - 2\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) + \\ + \frac{9}{2}\sigma_S(I_E) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 27\sigma_S^3(I_E) \left[1 - \frac{27}{(3 - 2I_E)^3} \right].$$

В рамках предложенного подхода рассматривается задача об установившемся пластическом течении при выглаживании жесткопластической поверхности гладким угловым индентором в условиях плоской деформации [7].

3. Распространение трещины внутри упругопластического тела. Процесс распространения трещины рассматривается на основе модели идеального жесткопластического тела в предположении, что процесс образования трещины сопровождается определенным пластическим течением, соответствующим предельному упрочнению материала. Предполагается, что разрушение частиц материала в окрестности трещины происходит, когда удельная работа W внутренних сил, необходимая для распространения трещины, достигает критического значения W_* .

Распространение трещины в упругопластическом теле рассматривается в условиях плоской деформации как движение углового выреза вместе с небольшой жесткопластической областью [10, 11]. При этом учитывается изменение конфигурации частиц, что позволяет исключить особенность поля деформаций в вершине трещины, возникающую в рамках деформационной теории пластичности [12]. Рассматривается предельная траектория движения частиц, стягивающаяся в вершину трещины. Получено распределение плотности рассеиваемой работы внутренних сил и деформаций вдоль траектории движения частицы в окрестности вершины трещины при адиабатических условиях.

Материал в окрестности вершины трещины представляется составным. Внешняя часть области, окружающей вершину трещины, является упругой. Напряженно-деформированное состояние в ней определяется с использованием известных методов и пакетов типа ANSYS, MSC и др. Внутренняя часть является жесткопластической, деформации в ней, имеющие большие (конечные) значения, описываются аналитически тензорами конечных деформаций. Кроме того, предполагается, что свободная поверхность трещины, примыкающая к жесткопластической области, прямолинейна; пластическое течение является установившимся; размеры жесткопластической области не меняются со временем; материал внешней области «набегает» на внутреннюю область со скоростью, пропорциональной скорости распространения трещины. Такое представление энергетически обосновано для небольших пластических областей, и позволяет получить соотношение

$$\frac{J_p}{W} = -\frac{2\sqrt{2} \cdot \lambda_1}{m} \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}},$$

которое может быть использовано для определения предельной величины W_* по критическому значению J -интеграла J_c , определяемого экспериментально. Здесь $J_p \approx J$ — значение J -интеграла при стягивании жесткопластического контура в точку; u, v — проекции скорости перемещения на криволинейные оси α, β в системе координат, связанной с вершиной трещины; φ — угол наклона α -линии к оси X ; m — скорость распространения трещины; λ_1 — единичная глубина по нормали к области пластического течения для объема сплошной среды.

В случае, если жесткопластическая область достаточно велика, и трещина распространяется с постоянной скоростью m , предлагается использовать J -интеграл по всей жесткопластической области (без стягивания контура в точку). Это приводит к соотношению

$$\frac{J}{W} = \frac{3a + 2\sqrt{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) d\varphi}{V - m \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{d\varphi}{u}} \lambda_1,$$

которое может быть использовано для определения характерного размера пластической области a , необходимого для доведения материала до предельного состояния при движении частицы вдоль предельной траектории с последующим ее разрушением при установившемся распространении трещины.

4. Заключение. Предложенный подход описания предельных состояний в пространствах главных напряжений и деформаций вместе с поверхностью нагружения учитывает эффект Баушингера и конечность деформаций материала. Соотношения, определяющие накопление рассеиваемой работы внутренних сил и распределение деформаций вдоль траектории частицы при пересечении ею пластической области в окрестности вершины трещины не имеют особенностей. Данное отличие объясняется учетом движения частиц в окрестности вершины трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-08-00580-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Coffin L. F. A study of the effects of cyclic thermal stresses in ductile metals // Transaction of ASME. 1954. V. 76. P. 931–950.
- [2] Manson S. S.. Behavior of materials under conditions of thermal stress. Heat Transfer Symposium, University of Michigan: Engineering Research Institute, 1953. P. 9–75.
- [3] Feltnor C. E., Morrow J. D. Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture // Basic Engineering. Transaction of ASME. 1961. V. 83, is. 1. P. 15–22.
- [4] Martin D. E. An energy criterion for low-cycle fatigue // Basic Engineering. Transaction of ASME. 1961. V. 83, is. 4. P. 565–571.
- [5] Хромов А. И., Григорьева А. Л., Кочеров Е. П. Деформационные состояния и условия разрушения жесткопластических тел // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413, № 4. С. 481–485.

- [6] Буханько А. А., Григорьева А. Л., Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационно-энергетический критерий разрушения жесткопластических тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 6. С. 178–186.
- [7] Хромов А. И., Буханько А. А., Овчинникова С. А. Предельное состояние и малоцикловая усталость пластических материалов // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, № 1. С. 148–158.
- [8] Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. Владивосток: Дальнаука, 2005. 159 с.
- [9] Буханько А. А. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, и особенности его приложения в теории идеальной пластичности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 1(30). С. 199–206.
- [10] Буханько А. А., Хромов А. И. Пластическое течение в вершине трещины, деформации и энергетический критерий разрушения // Доклады академии наук. 2012. Т. 442, № 3. С. 333–336.
- [11] Буханько А. А., Хромов А. И. Пластическое течение в окрестности вершины трещины. Энергетический критерий разрушения и его связь с J-интегралом // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 6. С. 112–120.
- [12] Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. 1968. V. 35, is. 4. P. 379–386.

Bukhanko A. A., Loshmanov A. Yu., Khromov A. I. *Generalization of theories of plastic flow and low-cycle fatigue to fracture mechanics.* Strain-energy approach to the description of the fracture process of the elastic-plastic material is proposed, based on the theory of plastic flow. This approach is a generalization of the approaches of the theory of low-cycle fatigue and fracture mechanics.

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Ge В SiGe ПЛЕНКЕ НА Si ПОДЛОЖКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИСЛОКАЦИОННЫХ ПЕТЕЛЬ И ДИСЛОКАЦИЙ НЕСООТВЕТСТВИЯ

Бычков А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Выполнен расчет распределения равновесной плотности упругой энергии в полупроводниковой пленке SiGe на Si подложке. Построена трехмерная модель плоской пленки с дислокацией. Расчет упругих деформаций выполнен с использованием метода конечных элементов. В расчете учтены неоднородность распределения компонент сплава из-за напряжений несоответствия на границе «пленка — подложка», проникающих дислокаций и дислокационных петель.

Образование дислокаций несоответствия является одним из механизмов релаксации упругой энергии в гетероэпитаксиальных полупроводниковых пленках, напыленных на подложку [1]. Обычно дислокации зарождаются на негладкой поверхности пленки и затем они скользят по направлению к границе «пленка — подложка» под действием напряжений несоответствия (сжатия в случае пленки SiGe на Si подложке). Эти дислокации скользят по плоскостям $\{111\}$ (вектор Бюргерса $a/2[101]$), которые наклонены под углом 60° к плоскости (001) подложки. Близлежащие 60° дислокации пересекаются и вступают в дислокационную реакцию $a/2[\bar{1}01] + a/2[01\bar{1}] = a/2[\bar{1}10]$, продуктом которой является сидячая чисто краевая дислокация с вектором Бюргерса $a/2[110]$ параллельном плоскости (001) подложки (дислокация Ломера). Если плоскости скольжения $\{111\}$ пересекаются не точно в гетерогранице, то близлежащие 60° дислокации или их отдельные ветви должны либо подняться в пленку, либо опуститься в подложку до линии пересечения наклонных плоскостей скольжения. Такое явление наблюдалось на эксперименте. Однако в большинстве случаев наблюдаемые краевые дислокации расположены точно в границе «пленка — подложка», что предполагает наличие других механизмов их образования, не предполагающих случайную встречу двух 60° дислокации. Напряжения, индуцируемые 60° дислокациями и дислокациями Ломера имеют противоположный знак относительно напряжений несоответствия, вызываемых когерентной границей и этим обуславливают процесс релаксации напряжений в пленке.

Другим механизмом релаксации упругой энергии в полупроводниковой пленке является неоднородное перераспределение атомов Ge и Si за счет их разноразмерности вблизи волнистой поверхности пленки и в островках, которые равномерно распределены в случае ее плоской поверхности [2]. В частности, расчет [3] для волнистой (undulated) поверхности пленки показал 9% снижение средней плотности упругой энергии по сравнению с упругой энергией при равномерном распределении компонент SiGe. Последнее обстоятельство обусловлено явлением механо диффузии в пленке. Что касается островков, то средняя плотность упругой энергии в них зависит от температуры напыления пленки: при низких температурах роста

упругая энергия дает основной вклад в формирование островка, а при температуре выше 873 К вклад энергии перемешивания преобладает [4]. Следовательно, при комнатной температуре вклад деформации играет решающую роль в определении композиционного профиля.

В [5] выполнен расчет распределения компонент сплава SiGe в окрестности дислокации Ломера, который учитывал упругую энергию дислокации и энергию перемешивания. Результаты расчета показали, в частности, что введение дислокации несоответствия в центре основания островка в виде усеченной пирамиды резко меняет распределение атомов Ge: в отсутствии дислокации вершина пирамиды обогащена атомами Ge, а введение дислокации несоответствия перемещает избыточные атомы Ge в окрестность ядра дислокации. В [5] фиксировано расположение дислокации несоответствия Ломера, которое соответствует минимальной упругой энергии в островке при однородном распределении компонент. Однако, в [6] показано, что при наличии линейной величины несоответствия $f = Az$ по толщине плоской пленки (graded film), первая дислокация несоответствия занимает положение равновесия на расстоянии z_C от границы «пленка — подложка». Величина z_C уменьшается с увеличением коэффициента A , но может превысить 40 нм при $A < 12 \text{ см}^{-1}$. Для широкой области изменения A величина z_C меняется от 6% до 11% от критической толщины пленки.

Цель настоящей работы заключается в исследовании релаксации полупроводниковой пленки за счет энергии деформации. При этом учитывается одновременно изменение упругой энергии несоответствия, как за счет дислокационной перестройки, так и за счет механизма неоднородного распределения состава компонент пленки.

Упругая задача для исследуемой модели в общем случае имеет вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \Omega$$

$$u_i = 0, \quad \Gamma_D$$

$$\sigma_{ij}n_j = 0, \quad \Gamma_N$$

где Ω — область занятая телом, $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ — граница тела, Γ_D — граница пленка-подложка, Γ_N — свободная граница пленки. Будем, аналогично [5], рассматривать деформацию несовместности пленки как собственную деформацию $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_m c(x, y, z) \delta_{ij}$, $\varepsilon_m = 0,04$. Тогда, закон Гука можно записать следующим образом $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*)$.

Потеря устойчивости равновесия плоской пленки определяется сменой знака у приращения свободной энергии δF участка поверхности пленки при наложении возмущения на плоскую пленку

$$\delta F = \int_{\Gamma_N} \gamma dS + \int_{\Omega} w dV - \gamma_0 S_0 - E_{el0},$$

где удельная поверхностная энергия γ определена формулой $\gamma = c\gamma_{Ge} + (1 - c)\gamma_{Si}$, γ_{Ge} и γ_{Si} — удельная поверхностная энергия для Ge и Si, соответственно, $c = c(x, y, z)$ — доля Ge в сплаве, γ_0 — удельная поверхностная энергия невозмущенной пленки, S_0 — площадь свободной поверхности невозмущенной пленки,

E_{elo} — упругая энергия невозмущенной пленки, плотность упругой энергии на поверхности пленки w имеет вид

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}.$$

Расчеты выполнены методом конечных элементов с помощью пакета FlexPDE для трехмерных образцов. Связь между неоднородностью распределения атомов Ge и деформацией определялась аналогично [7]. На рисунке 1 показана схема расположения дислокаций в полупроводниковой пленке, а на рисунке 2 приведен пример распределения концентрации атомов Ge в бездислокационной пленке с волнистой свободной поверхностью. На рисунке 3 показаны результаты расчета зависимости упругой энергии образца от высоты расположения набора из 5 дислокаций несоответствия от границы раздела пленка-подложка. Длина и ширина образца составляют 400 нм, угол между дислокациями и плоскостью подложки — 60° . Как видно из полученных результатов, упругая энергия убывает по мере увеличения высоты расположения дислокаций, а при высоте 18 нм достигает минимума. Учет неравномерного распределения Ge вносит поправку в значения упругой энергии образца.

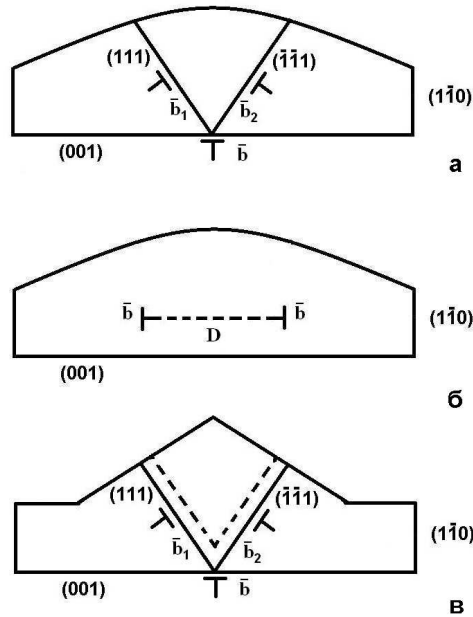


Рисунок 1 — Схема расположения проникающих дислокаций, дислокаций несоответствия и дислокационной петли; а,б — в пленке с волнистой поверхностью (undulated film); в — дислокации в пленке с островком (hut) на ее поверхности

Выполненные расчеты подтвердили выводы [6] о том, что равновесное положение дислокации несоответствия в двухкомпонентном упругом слое SiGe находится не на границе раздела пленка-подложка, а в глубине пленки. Причем этот вывод можно распространить и на проникающие дислокации, хотя изменение ориентации дислокации существенно меняет поле упругих напряжений и распределение компонент сплава в образце. Результаты расчета упругой энергии пленки, содержащей призматическую дислокационную петлю в виде окружности, показали значительное ее влияние на величину упругой энергии пленки. Однако учет влияния

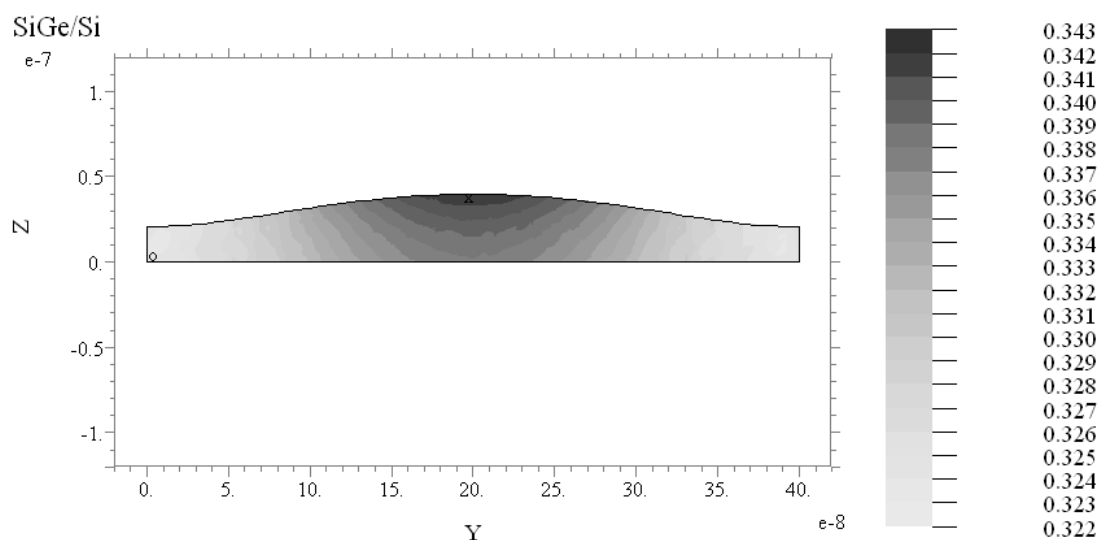


Рисунок 2 – Равновесная концентрация атомов Ge в полупроводниковой пленке на подложке с волнистой свободной поверхностью. Средняя доля Ge $\eta=0,33$. Размер исследуемой области 400x400 нм

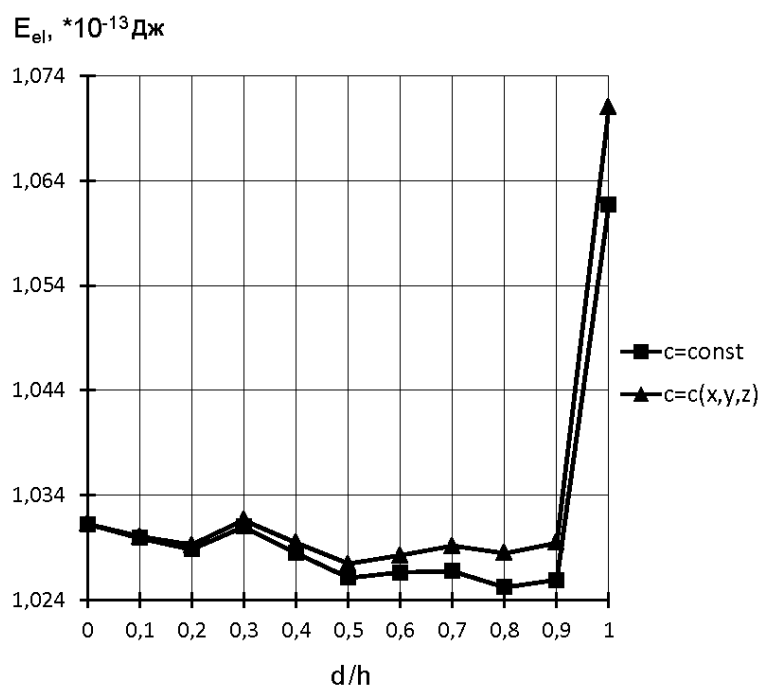


Рисунок 3 – Зависимость упругой энергии E_{el} образца $\text{Si}_{1-\eta}\text{Ge}_\eta$ пленки с волнистой поверхностью от относительной высоты расположения дислокаций dh/h относительно границы раздела пленка-подложка, при равномерном распределении Ge в образце, и при $c = c(x, y, z)$ (dh — высота расположения дислокаций, h — высота пленки, $\eta = 0,33$, $h = 22$ нм)

перераспределения компонент пленки не приводит к существенному изменению упругой энергии образца и критического значения высоты дислокации. В отличие от [6], где предполагалась плоская поверхность пленки, данный расчет предполагает более сложную форму поверхности.

Полученные результаты расчета упругой энергии пленки использованы для оценки условий формирования наноразмерных дефектов на свободной поверхности пленки на основе термодинамики поверхности. Расчеты показали, что учет влияния перераспределения компонент пленки приводит к ослаблению условий появления островков на поверхности (переход происходит при меньших размерах островков), этот эффект особенно заметен при малых концентрациях Ge.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ovidko I. A., Sheinerman A. G Misfit dislocations in nanocomposites with quantum dots, nanowires and their ensembles // Advances in Physics, 2006, V. 55. Nos.7-8. P.627–689.
- [2] Aqua J. N., Berbezier I., Favre L., Frisch T., Ronda A. Growth and self-organization of SiGe nanostructures // Physics Reports, 2013. V. 522. P.59–189.
- [3] Wu C. C., Hull R. Composition and stress fields in undulated $Si_{0.7}Ge_{0.3}/Si(100)$ thin films // J. Appl. Phys., 2006. V.100. 083510.
- [4] Wang D. -L., Yu Z. -Y., Liu Y. -M., Ye H., Lu P. -F., Zhao L., Guo X. -T. The equilibrium composition in Ge_xSi_{1-x}/Si self-assembled alloy quantum dot // Chin. Phys. B, 2010. V.19. No.8. 086801.
- [5] Ye H., Lu P. F., Yu Z. Y., Wang D. L., Chen Z. H., Liu Y. M., Wang S. M. Dislocation-induced compositional profile in alloy semiconductors // Solid State Communications, 2010. V.150. p.1275-1278.
- [6] Sidoti H. J., Xhurzhi S., Kujofsa T., Cheruku S. et al. Initial misfit dislocations in a graded heteroepitaxial layer // Journal of Applied Physics, N. 109, 2011, 023510.
- [7] Бычков А. А. Равновесие двухкомпонентного упругого слоя, содержащего дислокацию несоответствия // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XVI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 16-19 октября 2012 г. Т. II. С. 56-60.

Bychkov A. A. *Calculation of distribution Ge in SiGe film on Si substrate under the influence of dislocation loops and misfit dislocations.* It is realized the calculation of the elastic energy density distribution in the semiconductor SiGe film on the Si substrate. The three-dimensional model of a plane film with a dislocation is constructed. Calculation of elastic deformations has been executed with use of a finite elements method. The calculation takes into account the heterogeneity of alloy component distribution owing to misfit stress in the coherent film — substrate interface, sessile dislocations, threading dislocations and dislocation loops.

КОНТАКТ БЕРЕГА МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ

Васильева Ю. О.¹, Сильвестров В. В.²

¹ Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары

² Российский государственный университет нефти и газа
им. И. М. Губкина, Москва

Рассматривается напряженное состояние плоского кусочно-однородного упругого тела с полубесконечной трещиной вдоль линии раздела сред. В один из берегов трещины на некотором участке вдавливаются со сцеплением жесткий штамп. Тело растягивается на бесконечности заданными напряжениями.

Пусть кусочно-однородное упругое изотропное тело, составленное из верхней и нижней полуплоскостей с упругими постоянными μ_1, κ_1 и μ_2, κ_2 соответственно, на линии раздела сред $y = 0$ ослаблено полубесконечной открытой трещиной $[0, +\infty)$. В верхний берег трещины вдоль участка $[0, l]$ вдавливаются со сцеплением с заданным натягом абсолютно жесткий штамп, имеющий заданную форму поверхности. Остальная часть этого берега и весь нижний берег трещины нагружены заданными напряжениями:

$$\begin{aligned} u^+(x) + iv^+(x) &= s_1(x) + is_2(x) + i\varepsilon x + (u_0 + iv_0), \quad x \in (0, l] \\ \tau_{xy}^+(x) + i\sigma_y^+(x) &= p_1^+(x) + ip_2^+(x), \quad x \in (l, +\infty) \\ \tau_{xy}^-(x) + i\sigma_y^-(x) &= p_1^-(x) + ip_2^-(x), \quad x \in (0, +\infty) \end{aligned} \quad (1)$$

где $u + iv$ — вектор смещений, $\tau_{xy} + i\sigma_y$ — вектор напряжений, $s_1(x)$, $s_2(x)$, $p_1^\pm(x)$, $p_2^\pm(x)$ — заданные функции, непрерывные по Гельдеру на соответствующих промежутках, причем $p_j^\pm(x) = O(x^{-\rho})$, $\rho > 1$, $x \rightarrow +\infty$; ε — неизвестный угол поворота штампа, $u_0 + iv_0$ — комплексная константа, выражающая жесткое смещение всего тела. Индексами плюс и минус помечены значения функций на верхнем и нижнем берегах трещины. Функция $s_1(x)$ определяет величину натяга в точке x , а $s_2(x)$ — форму поверхности штампа. Вдоль луча $(-\infty, 0]$ полуплоскости жестко соединены друг с другом. На бесконечности верхняя и нижняя полуплоскости растягиваются заданными продольными напряжениями σ_{x1}^∞ и $\sigma_{x2}^\infty = \sigma_{x1}^\infty \mu_2(1 + \kappa_1)/[\mu_1(1 + \kappa_2)]$ соответственно. Заданы еще главный вектор $X_0 + iY_0$ внешних сил, действующих на штамп, и момент M_0 этих сил относительно вершины трещины.

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние тела, и исследовать поведение напряжений вблизи концов штампа, один из которых совпадает с вершиной трещины.

Механическая задача (1) с помощью видоизмененных формул Колосова–Мусхелишвили в форме Г.П. Черепанова [1] сводится к векторной краевой задаче

Римана на луче $[0, +\infty)$ для комплексных потенциалов $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ ($z = x + iy$):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi^+(x) \\ \Omega^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1^{-1} \\ -m & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^-(x) \\ \Omega^-(x) \end{pmatrix} + g_1(x), \quad 0 < x < l \\ \begin{pmatrix} \Phi^+(x) \\ \Omega^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -m & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^-(x) \\ \Omega^-(x) \end{pmatrix} + g_2(x), \quad l < x < +\infty \end{aligned} \quad (2)$$

$$m = \frac{1 + \mu_* \kappa_1}{\mu_* + \kappa_2}, \quad \alpha = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 2\mu_* \kappa_1}{\kappa_1(\mu_* + \kappa_2)}, \quad \mu_* = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 2\mu_1 \kappa_1^{-1} [s'(x) + i\varepsilon] \\ \alpha_3^{-1} p^-(x) - 2\mu_1 \kappa_1^{-1} \alpha_4 \alpha_3^{-1} [s'(x) + i\varepsilon] \end{pmatrix},$$

$$g_2(x) = \begin{pmatrix} p^+(x) \\ \alpha_3^{-1} p^-(x) - \alpha_4 \alpha_3^{-1} p^+(x) \end{pmatrix}$$

$$s'(x) = s'_1(x) + i s'_2(x), \quad p^+(x) = p_2^+(x) - i p_1^+(x), \quad p^-(x) = p_2^-(x) - i p_1^-(x),$$

$$\alpha_1 = (1 + \mu_* \kappa_1)/(1 + \kappa_2), \quad \alpha_2 = (1 - \mu_*)/(1 + \kappa_2), \quad \alpha_3 = 1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_1,$$

На бесконечности комплексные потенциалы ограничены, а в точках $z = 0$ и $z = l \pm i0$ могут иметь интегрируемые особенности.

Решение векторной задачи Римана (2) с кусочно-постоянным коэффициентом находится явно через гипергеометрическую функцию [2] и имеет вид

$$\Phi(z) = H_1(z/l), \quad \Omega(z) = H_2(z/l) \quad (3)$$

$$H_j(\zeta) = [A_0 + A_1 \zeta + \varepsilon \mu_1 J_1(\zeta) + J_1^*(\zeta)] \chi_{j1}(\zeta) + [A_2 + \varepsilon \mu_1 J_2(\zeta) + J_2^*(\zeta)] \chi_{j2}(\zeta)$$

$$A_0 = -\frac{X + iY}{2\pi l c_3 (\alpha_1 + \alpha_3)} - \frac{a(a+1-c)}{a+1-b} (A_1 + A_2), \quad A_1 = \frac{\sigma_{x1}^\infty}{4c_3}, \quad A_2 = \frac{A_1}{a-b}$$

$$X + iY = X_0 + iY_0 - i \int_l^{+\infty} p^+(x) dx + i \int_0^{+\infty} p^-(x) dx$$

$$c_3 = \frac{c_1 \xi_2 e^{i\pi a} \Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a) \Gamma(b)} + \frac{c_2 \xi_1 e^{i\pi(a+1-c)} \Gamma(2-c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b+1-c) \Gamma(1-a)}$$

$$c_1 = \frac{(1 - \xi_1) e^{-i\pi c} \Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c) \Gamma(1-b)}, \quad c_2 = \frac{(1 - \xi_2) \Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)}, \quad \xi_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\kappa_1^{-1}} \right)$$

$$a = 1 - \frac{\ln \xi_1}{2\pi i}, \quad b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi i} (\ln m - \ln \xi_1), \quad c = 1 + \frac{1}{2\pi i} (\ln \xi_2 - \ln \xi_1)$$

$$(0 < \arg \xi_1 \leq \pi, \quad \pi \leq \arg \xi_2 < 2\pi, \quad \operatorname{Im} \xi_1 \geq 0, \quad \operatorname{Im} \xi_2 \leq 0)$$

$$\varepsilon \mu_1 = - \left(\frac{M_0}{(1 + \kappa_1) l^2} + \frac{\mu_1}{\kappa_1} \int_0^1 t s'_1(lt) dt + \int_0^1 t \operatorname{Re} [(A_0 + A_1 t + J_1^*(t)) \chi_{11}^+(t) + \right.$$

$$\left. + (A_2 + J_2^*(t)) \chi_{12}^+(t) \right] dt \cdot \left(\int_0^1 t \operatorname{Re} [\chi_{11}^+(t) J_1(t) + \chi_{12}^+(t) J_2(t)] dt \right)^{-1}$$

$$J_j(\zeta) = \frac{1}{\kappa_1 \pi} \int_0^1 \frac{h_j(t) dt}{t - \zeta}, \quad j = 1, 2$$

$$J_j^*(\zeta) = \frac{\mu_1}{\kappa_1 \pi i} \int_0^1 \frac{h_j(t) s'(lt) dt}{t - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} \frac{h_j(t) p^+(lt) dt}{t - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\eta_j(t) p^-(lt) dt}{t - \zeta}$$

$$h_1(t) = [\chi_{22}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{12}^+(t)] / \det \mathbf{X}^+(t)$$

$$h_2(t) = -[\chi_{21}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{11}^+(t)] / \det \mathbf{X}^+(t)$$

$$\eta_1(t) = -\alpha_3^{-1} \chi_{12}^+(t) / \det \mathbf{X}^+(t), \quad \eta_2(t) = \alpha_3^{-1} \chi_{11}^+(t) / \det \mathbf{X}^+(t)$$

где интегралы $J_j(\zeta)$, $J_j^*(\zeta)$ сходятся, $\chi_{ij}(z)$ — элементы канонической матрицы $\mathbf{X}(z)$ однородной задачи (2)

$$\mathbf{X}(\zeta) = \zeta^\lambda \mathbf{C} \begin{pmatrix} F(a, b; c; \zeta) \\ \zeta^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; \zeta) \\ a(1 - \zeta) F(a + 1, b; c; \zeta) \\ (a - c + 1) \zeta^{1-c} (1 - \zeta) F(a - c + 2, b - c + 1; 2 - c; \zeta) \end{pmatrix} \\ |\zeta| < 1, \zeta \notin [0, 1]$$

$$\mathbf{X}(\zeta) = \zeta^\lambda \mathbf{CP}^\pm \begin{pmatrix} F(a, b; a + b + 1 - c; 1 - \zeta) \\ ((\zeta - 1)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c + 1 - a - b; 1 - \zeta) \\ \frac{a(a+1-c)}{a+b+1-c} (1 - \zeta) F(a + 1, b; a + b + 2 - c; 1 - \zeta) \\ (a + b - c) (\zeta - 1)^{c-a-b} F(c - a - 1, c - b; c - a - b; 1 - \zeta) \end{pmatrix} \\ |\zeta - 1| < 1, \operatorname{Im}(\pm \zeta) > 0$$

$$\mathbf{X}(\zeta) = \zeta^\lambda \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \zeta^{-a} F(a, a + 1 - c; a + 1 - b; \zeta^{-1}) \\ \zeta^{-b} F(b, b + 1 - c; b + 1 - a; \zeta^{-1}) \\ \frac{a(a+1-c)}{b-1-a} \zeta^{-a-1} (1 - \zeta) F(a + 1, a + 2 - c; a + 2 - b; \zeta^{-1}) \\ (a - b) \zeta^{-b} (1 - \zeta) F(b, b + 1 - c; b - a; \zeta^{-1}) \end{pmatrix} \\ |\zeta| > 1, \operatorname{Im}(\pm \zeta) > 0$$

$$\lambda = -\frac{\ln \xi_1}{2\pi i}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \xi_2 & c_2 \xi_1 \\ c_1 m & c_2 m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^+ = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i c} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^+ = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} e^{-2\pi i c} & p_{22} e^{-2\pi i c} \end{pmatrix}$$

$$p_{11} = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)}, \quad p_{12} = \frac{e^{i\pi(a+b-c)} \Gamma(c) \Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}$$

$$p_{21} = \frac{\Gamma(2 - c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(1 - a) \Gamma(1 - b)}, \quad p_{22} = \frac{e^{i\pi(a+b-c)} \Gamma(2 - c) \Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a + 1 - c) \Gamma(b + 1 - c)}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \\ -c_3 & c_4 m \end{pmatrix}, \quad c_4 = \frac{c_1 \xi_2 e^{i\pi b} \Gamma(c) \Gamma(a - b)}{\Gamma(a) \Gamma(c - b)} + \frac{c_2 \xi_1 e^{i\pi(b+1-c)} \Gamma(2 - c) \Gamma(a - b)}{\Gamma(a + 1 - c) \Gamma(1 - b)}$$

где $F(a, b; c; \zeta)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

На основании решения (3) следует, что вблизи вершины трещины $x = 0$ на действительной отрицательной полуоси $x < 0$ вектор напряжений имеет следующую асимптотику

$$\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) = \frac{K_I - iK_{II}}{\sqrt{2\pi}|x|^{\gamma_2 - i\delta_2}} + \frac{K_{III} - iK_{IV}}{\sqrt{2\pi}|x|^{\gamma_1 - i\delta_1}} + O(1), \quad x \rightarrow 0 - 0$$

$$\gamma_j = \arg \xi_j / (2\pi), \quad \delta_j = \ln |\xi_j| / (2\pi), \quad j = 1, 2; \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_2 \in [0, 5; 1)$$

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{2\pi}(\xi_1 + m)D_2 e^{-i\pi(\gamma_2 - i\delta_2)}, \quad K_{III} - iK_{IV} = \sqrt{2\pi}(\xi_2 + m)D_1 e^{-i\pi(\gamma_1 - i\delta_1)}$$

$$D_j = c_j[A_0 + \varepsilon\mu_1 J_1(0) + J_1^*(0) + (1 - \gamma_j + i\delta_j)(A_2 + \varepsilon\mu_1 J_2(0) + J_2^*(0))]l^{\gamma_j - i\delta_j}$$

где $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$ — коэффициенты интенсивности напряжений.

В окрестности правого конца штампа $z = l + i0$ поведение напряжений полностью определяется представлением функции $\Phi(z)$ вблизи этой точки:

$$\Phi(z) = \frac{N_I - iN_{II}}{\sqrt{\pi}(z - l)^{1/2 - i\beta}} + O(1), \quad \beta = \frac{\ln \kappa_1}{2\pi}, \quad z \rightarrow l + i0 \quad (4)$$

$$N_I - iN_{II} = \sqrt{\pi}(c_1 \xi_2 p_{12} + c_2 \xi_1 p_{22})B$$

$$B = [A_0 + A_1 + \varepsilon\mu_1 J_1(1) + J_1^*(1) + (1/2 - i\beta)(A_2 + \varepsilon\mu_1 J_2(1) + J_2^*(1))]l^{1/2 - i\beta}$$

где N_I, N_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений.

Вблизи точки $z = l - i0$ комплексные потенциалы, а значит, и напряжения ограничены.

Рассмотрим частный случай задачи, когда штамп прямолинейный, вдавливаются в полуплоскость без натяга $s'(x) = 0$, а к берегам трещины в точках $x = x_0 \pm i0$, $x_0 > l$, приложены сосредоточенные силы $p^\pm(x) = \pm iF_c \delta(x - x_0)$, где F_c — величина силы, $\delta(x - x_0)$ — дельта-функция Дирака, все остальные нагрузки нулевые. Графики контактных напряжений под штампом для $x_0 = 2l$, а также графики угла поворота штампа, коэффициентов $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$ и коэффициентов N_I, N_{II} в зависимости от расстояния $\Delta = |x_0 - l|$ представлены на рис. 1. На рисунке принято $F_c = F(0.1 + i)$, $F > 0$, $\kappa_1 = 1.8$, $\kappa_2 = 2.2$, $\mu_2/\mu_1 = 2$.

Методом, указанным выше, решается задача о вдавливании жесткого штампа бесконечной длины в берег полубесконечной открытой межфазной трещины [3]. Штамп прямолинейный, жестко сцеплен с верхней полуплоскостью вдоль луча $[\tilde{l}, +\infty)$. Вблизи вершины трещины в данном случае у вектора напряжений возникает степенно-осциллирующая особенность, характерная для классической межфазной трещины:

$$\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) = \frac{\tilde{K}_I - i\tilde{K}_{II}}{\sqrt{2\pi}|x|^{1/2 - i\delta}} + O(1), \quad \delta = \frac{\ln m}{2\pi}, \quad x \rightarrow 0 - 0$$

где $\tilde{K}_I, \tilde{K}_{II}$ — коэффициенты интенсивности напряжений.

Вблизи конца штампа $z = \tilde{l} + i0$ напряжения имеют представление, аналогичное представлению (4).

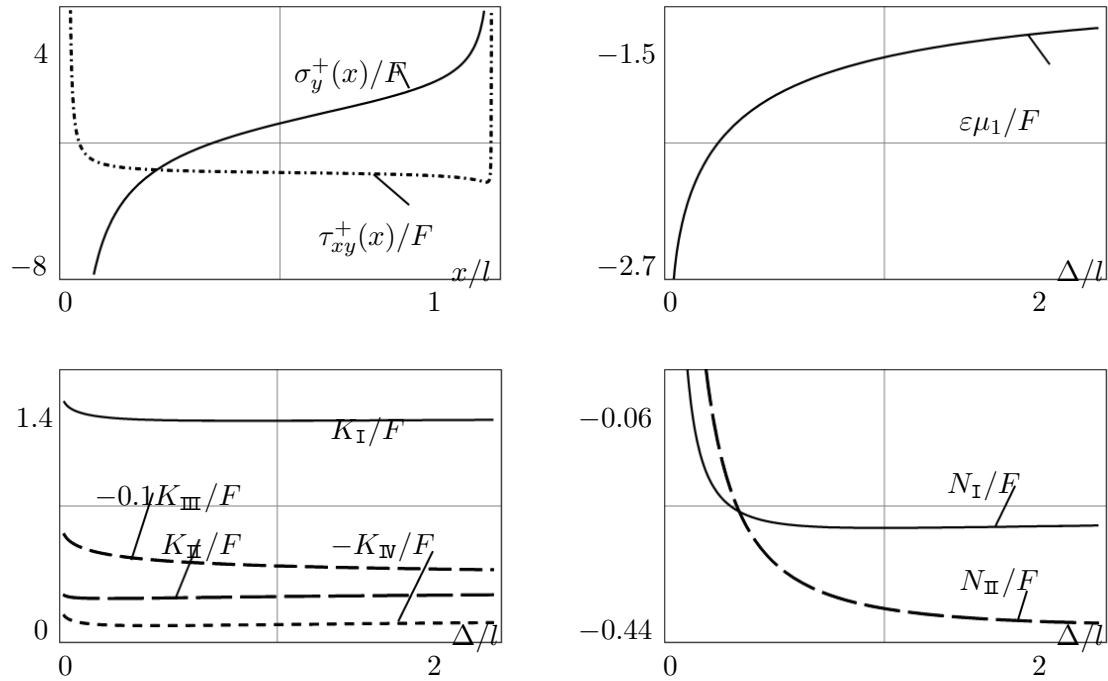


Рисунок 1

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 12-01-31387, 13-01-00003.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
- [2] Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
- [3] Васильева Ю. О. Мочалов Е. В. Распределение напряжений под полубесконечной жесткой накладкой на берегу межфазной трещины в случае действия сосредоточенной силы // Вестник Чувашского университета. 2013. № 3. С. 3–7.

Vasilyeva Yu. O., Silvestrov V. V. *A contact of an interface crack edge with a rigid patch plate.* Stress state of a plane piecewise-homogeneous elastic body with a semi-infinite crack along the substances dividing line is considered. One of the crack edges is pressed with adhesion by a rigid patch plate along an interval. The body is stretched by specified stresses at infinity.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ЕГО РЕКОНСТРУКЦИЯ ПО ДАННЫМ АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Ватульян А. О.^{1,2}, Дударев В. В.², Недин Р. Д.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

Представлена общая постановка задачи об установившихся колебаниях тел при наличии неоднородного предварительного напряженного состояния (ПНС). Рассмотрены три группы наиболее распространенных моделей предварительных напряжений (ПН), отличающиеся видом определяющего соотношения. Осуществлено сравнение моделей; проведена оценка влияния ПН на динамические характеристики пластин. Рассмотрены обратные задачи об идентификации неоднородного ПНС в пластине и кольцевой области на основе метода акустического зондирования. Проведены вычислительные эксперименты.

1. Общая постановка задачи. Рассмотрим упругое тело в трех конфигурациях. В первой (естественной) конфигурации κ_1 тело свободно от напряжений. Во второй конфигурации κ_2 в теле создается поле напряжений, характеризующееся тензором $\underline{\underline{\sigma}}^0$, которые являются самоуравновешенным $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$. Далее будем называть $\underline{\underline{\sigma}}^0$ тензором предварительных напряжений (ПН). Накладывая малые деформации на конечные деформации конфигурации κ_2 , получим третью конфигурацию κ_3 . Будем считать, что в конечной конфигурации κ_3 тело имеет объем V , ограниченный поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$, на S_u задано поле перемещений, на S_σ задана нагрузка.

На основании определяющих соотношений, полученных в работах [1–3], можно показать, что линеаризованная краевая задача об установившихся колебаниях предварительно напряженного тела после отделения временного множителя имеет вид:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \rho \omega^2 \underline{u} = 0, \quad (1)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{\sigma}}^0, \nabla \underline{u}) + \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad (2)$$

$$\underline{u}|_{S_u} = 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\underline{T}}|_{S_\sigma} = \underline{P}, \quad (3)$$

где $\underline{u}$ — вектор смещения относительно конфигурации κ_2 , ρ — плотность, $\underline{\underline{T}}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы, $\underline{\underline{\Gamma}}$ — тензор, зависящий в общем случае от тензора $\underline{\underline{\sigma}}^0$ и градиента смещений $\nabla \underline{u}$, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$ — тензор малых деформаций, $\underline{\underline{L}}$ — тензор линейной упругости, задаваемый материальными константами и тензором $\underline{\underline{\varepsilon}}$ [2]. В случае линейно-упругого тела тензор $\underline{\underline{L}}$ можно определять в соответствии с обобщенным законом Гука $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{L}}$, где $\underline{\underline{C}}$ — тензор упругих модулей 4-го ранга.

В представленной задаче (1)–(3) уравнение (2) является определяющим соотношением, связывающим тензор напряжений Пиолы $\underline{\underline{T}}$ с тензором $\underline{\underline{\sigma}}^0$ и тензором

$\underline{\underline{L}}$. При этом от компонент $\underline{\underline{\sigma}}^0$ зависит только тензор $\underline{\underline{\Gamma}}$, который является билинейным оператором относительно $\underline{\underline{\sigma}}^0$ и $\nabla \underline{u}$. Современные модели ПН отличаются структурой тензора $\underline{\underline{\Gamma}}$. Выпишем три основные группы моделей ПН:

I. Модель, предложенная Е. Треффтцем, В.В. Новожиловым, К. Васидзу, А.Н. Гузем [1] и Л. Робертсоном: $\underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{\sigma}}^0, \nabla \underline{u}) = \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \nabla \underline{u}$;

II. Модель, предложенная М. Био, А. Хогер [3]: $\underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{\sigma}}^0, \nabla \underline{u}) = 1/2 (\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0) - \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\underline{\omega}}$;

III. Модель, предложенная М. Био и Р. Саусвеллом, К. Трусделлом [2]: $\underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{\sigma}}^0, \nabla \underline{u}) = (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\sigma}}^0 - \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0 - \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\underline{\omega}}$, где $\underline{\underline{\omega}} = 1/2 (\nabla \underline{u}^T - \nabla \underline{u})$ — тензор поворотов.

Нетрудно показать, что модель I является упрощением модели II. Однако, авторы, предложившие эту модель, получили ее различными способами.

2. Сравнение моделей. Анализ представленных моделей проведен для одноосного распределения поля ПН ($\sigma_{11}^0(x_1) \neq 0$). На основе вариационного принципа Лагранжа с учетом гипотез Кирхгофа–Лява сформулированы постановки краевых задач об установившихся продольных и изгибных колебаниях предварительно растянутой (или сжатой) консоли. Отметим, что единственной моделью, в которой компонента σ_{11}^0 входит в продольные уравнения колебаний стержня, является модель I. В случае изгибных колебаний в рамках каждой из моделей общий вид уравнения движения остается неизменным, кроме того, что ПН вносят вклад в жесткость на изгиб только в модели I: к модулю Юнга E прибавляется величина σ_{11}^0 . В реальных механических конструкциях величины ПН редко выходят за пределы диапазона $\max |\sigma_{11}^0|/E = 10^{-5} \div 10^{-3}$. Если во всех полученных постановках пренебречь величиной σ_{11}^0 по сравнению с модулем Юнга, то для всех трех моделей будем иметь известную постановку краевой задачи о продольных колебаниях (без вклада ПН) и постановку задачи об изгибных колебаниях стержня [4].

Численное сравнение решений для каждой из моделей осуществлено с помощью метода конечных элементов по динамическим характеристикам (АЧХ и собственные частоты). Расчеты проведены для тонкой прямоугольной пластины в режиме планарных колебаний, вызываемых равномерно распределенной на верхней грани периодически меняющейся нагрузкой с амплитудой q . Параметры пластины: $l = 1(\text{м})$ — длина, $b = 0.5(\text{м})$ — ширина, $h = 0.1(\text{м})$ — толщина, $E = 1.96 \cdot 10^{11}(\text{Па})$ — модуль Юнга, $\nu = 0.28$ — коэффициент Пуассона, $\rho = 7.8 \cdot 10^3(\text{кг/м}^3)$ (материал — сталь). Поле ПН — одноосное и однородное $\sigma_{11}^0 = \text{const}$, $\sigma_{11}^0/E = 0.5 \cdot 10^{-2}$. В результате проведенных расчетов получены данные об АЧХ в точке $\{x = l, y = 0\}$ для вертикальной компоненты смещения u_2 до первой резонансной частоты. При этом ветви АЧХ, соответствующие всем трем моделям, практически совпадают друг с другом и достаточно далеко отстоят от ветви, соответствующей ненапряженному состоянию ($\sigma_{11}^0 = 0$). Таким образом, несмотря на различную структуру определяющих соотношений (I–III), для одноосного напряженного состояния различие АЧХ оказалось несущественным. Также проведен анализ собственных частот (СЧ) для трех моделей ПН на примере узкой прямоугольной пластины с параметрами $l = 1(\text{м})$, $b = 0.05(\text{м})$, $h = 0.1(\text{м})$ (материал — сталь): наиболее существенное влияние ПН оказывают на первые (нижние) СЧ. Стоит отметить, что численные результаты анализа влияния ПН на динамические характеристики узких пластин не противоречат данным реальных экспериментов проведенных для

металлических балок.

3. Идентификация плоских предварительных напряжений в пластине. Рассмотрим задачу об идентификации неоднородного поля ПН $(\sigma_{xx}^0(x, y), \sigma_{yy}^0(x, y), \sigma_{xy}^0(x, y))$, содержащегося в тонкой пластине, заземленной одним концом. Планарные колебания вызываются периодически меняющейся касательной нагрузкой, приложенной к верхней грани пластины [5]. Параметры материала (коэффициенты Ламе и плотность), размеры пластины и нагрузка $\underline{\tau}|_{l_\sigma}$ считаются заданными. Также будем считать, что известна дополнительная информация о поле смещений $\underline{u}|_{l_\sigma}$ под нагрузкой в конечном наборе частот $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$. Сформулированная задача об отыскании неоднородного ПНС представляет собой малоисследованную коэффициентную обратную задачу, которая является нелинейной некорректной проблемой. Для построения ее решения использован итерационный метод. Выведено соотношение, позволяющее определять значения поправок компонент тензора ПН по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{xx}^{0(n)} K_{xx}^{(n-1)} + \sigma_{yy}^{0(n)} K_{yy}^{(n-1)} + \tau_{xy}^{0(n)} K_{xy}^{(n-1)}] d\Omega = F^{(n-1)}, \quad (4)$$

где $\sigma_{xx}^{0(n)}$, $\sigma_{yy}^{0(n)}$, $\sigma_{xy}^{0(n)}$ — поправки к соответствующим компонентам ПН на текущей итерации (при этом $\sigma_{ij}^{0(0)}$ — заранее выбранное начальное приближение), $K_{xx}^{(n-1)} = (u_{x,x}^{(n-1)})^2 + (u_{y,x}^{(n-1)})^2$, $K_{yy}^{(n-1)} = (u_{x,y}^{(n-1)})^2 + (u_{y,y}^{(n-1)})^2$, $K_{xy}^{(n-1)} = 2(u_{x,x}^{(n-1)} u_{x,y}^{(n-1)} + u_{y,x}^{(n-1)} u_{y,y}^{(n-1)})$, $F^{(n-1)} = \int_{l_\sigma} \tau(u_x^{(n-1)} - f_x) dl_\sigma$. f_x — компонента заданного поля смещений под зондирующей нагрузкой, (n) и $(n-1)$ — номера итераций, $l_\sigma = \{x \in [0, l], y = h/2\}$ — верхняя грань пластины под зондирующей нагрузкой.

Предложено два подхода к решению уравнения (4). Первый основан на представлении функции Эри в виде $\Phi = \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k$ (α_k — неизвестные коэффициенты разложения, ψ_k — базисные функции). Определив координатные функции ψ_k и зафиксировав несколько частот колебаний $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$, можно свести решение уравнения (4) к плохо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений относительно α_k (для ее решения использовался метод регуляризации Тихонова). Второй подход аналогичен первому и основан на разбиении области пластины на прямоугольные сегменты (суперэлементы), на каждом из которых определена функция Эри, задаваемая квадратичным полиномом, т. е. компоненты ПН моделируются в виде кусочно-постоянной функции, определенной на всей области пластины. Результаты проведения вычислительных экспериментов в рамках первого подхода показали, что реконструкция проходит успешно, если порядок полиномов в представлении восстанавливаемой функции Эри не превышает трех, что соответствует линейным зависимостям компонент ПН. При этом начальное приближение ПН полагалось нулевым.

В рамках второго подхода в качестве начального приближения использовалось решение обратной задачи, получаемое в классе линейных функций ПН с помощью первого метода. Вычислительные эксперименты продемонстрировали приемлемую точность получаемой реконструкции для различных примеров разбиения области.

При проведении обоих экспериментов, частоты колебаний фиксировались между первой и второй резонансными частотами (всего было зафиксировано 7 частот, равномерно распределенных в выбранном диапазоне); выявлено, что концы диапазона должны быть достаточно близко к резонансам, чтобы получить приемлемую точность реконструкции. Также стоит отметить, что рассмотрение частотного диапазона ниже первой резонансной частоты дает реконструкцию худшей точности. Таким образом, результаты вычислительных экспериментов демонстрируют возможность использования предложенной схемы идентификации достаточно гладких неоднородных компонент ПН в классе линейных функций.

3. Идентификация ПНС в кольцевой области. Рассмотрим задачу о радиальных колебаниях кольцевой области ($r_1 < r < r_2$) при наличии неоднородного ПНС. Предполагается, что среди компонент тензора ПНС отличными от нуля являются компоненты $\sigma_{rr}^0(r)$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^0(r)$, которые удовлетворяют условию равновесия. Колебания вызываются осесимметричной нагрузкой приложенной на внешней границе области, внутренняя область свободна от нагрузок. Уравнение движения и граничные условия после обезразмеривания имеют вид:

$$(1 + g)U'' + (g' + \frac{1 + g}{\xi})U' - (\frac{1 + g}{\xi^2} + \frac{g'}{\xi} - \kappa^2)U = 0, \quad (5)$$

$$(1 + g)U' + k\frac{U}{\xi}|_{\xi=1} = p^*, \quad (1 + g)U' + k\frac{U}{\xi}|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad (6)$$

где λ, μ — параметры Ламе, $p^* = -pr_2/(\lambda + 2\mu)$, $\kappa^2 = \rho\omega^2r_2^2/(\lambda + 2\mu)$ — волновое число, $\xi \in [\xi_0, 1]$ — радиальная координата, $\xi_0 = r_1/r_2$, $k = \lambda/(\lambda + 2\mu)$, $g(\xi) = \sigma_{rr}^0/(\lambda + 2\mu)$ — функция, характеризующая закон изменения компоненты σ_{rr}^0 , $u_r(r) = r_2U(\xi)$ — радиальная компонента смещения. Решение прямой задачи об определении значений функции $U(\xi)$ при известной функции $g(\xi)$ осуществлено численно в пакете Maple на основе метода пристрелки. Проведены вычислительные эксперименты о влиянии уровня ПНС на амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты. Стоит отметить, что это влияние существенно только вблизи резонансов и для более высоких значений собственных частот.

При решении обратной задачи о реконструкции неоднородного ПНС рассмотрено два подхода. При первом подходе в качестве дополнительной информации считаются известными узловые значения функции смещения в конечном наборе точек для некоторой фиксированной частоты. При этом уравнение движения может быть рассмотрено как дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $g(\xi)$. Его решение представлено в виде квадратур, а численная реализация осуществлена с помощью конечномерных аппроксимаций. Для вычисления первых и вторых производных функции смещения использован сплайн пятого порядка, построенный по заданным узловым значениям. При втором подходе в качестве дополнительной информации считаются известными данные об амплитудно-частотной характеристике на внешней границе кольцевой области в заданном частотном диапазоне $d(\kappa)$, $\kappa \in [\kappa_-, \kappa_+]$. В этом случае численное решение построено с помощью итерационного метода. На основе метода линеаризации сформулировано соотношение относительно поправок к восстанавливаемой

функции $g_1(\xi)$:

$$\int_{\xi_0}^1 g_1(\xi U_0'^2 + \frac{U_0^2}{\xi}) d\xi + \int_{\xi_0}^1 g_1' U_0^2 d\xi = p^*(U_0(1, \kappa) - d(\kappa)), \quad \kappa \in [\kappa_-, \kappa_+] \quad (7)$$

где U_0 — функция смещения, вычисленная на предыдущем шаге итерационного процесса из решения прямой задачи. Полученное соотношение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение с непрерывными ядрами, решение которого осуществлено численно с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции законов изменения ПНС. Проведен анализ полученных результатов, даны практические рекомендации по осуществлению наиболее эффективной процедуры реконструкции в рамках каждого из предложенных подходов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 13-01-00196-а, 12-01-31501 мол_а) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашения 14.132.21.1358, 14.132.21.1360).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гузь А. Н., Мажорн Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость. Киев: Наукова думка, 1977. 162 с.
- [2] К. Трусделл. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [3] A. Hoger. On the determination of residual stress in an elastic body // Journal of Elasticity. 1986. V. 16. P. 303–324.
- [4] V. V. Dudarev, A. O. Vatulyan. On restoring of the pre-stressed state in elastic bodies // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2011. V. 91. № 6. P. 485–492.
- [5] R. Nedin, A. Vatulyan. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // International Journal of Solids and Structures. 2013. № 50. P. 2107–2114.

Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Nedin R. D. *Modeling of residual stress state and its reconstruction by acoustical probing data.* The general statement of the problem of steady-state vibration of bodies in presence of inhomogeneous residual stress (RS) state is given. Three groups of the most widespread RS models differing by the form of constitutive relation are considered. The comparison of the models is occurred; the effect of the RS on the plate dynamical characteristics is estimated. The inverse problems on the identification of the inhomogeneous RS state in a plate and a ring region on the basis of the acoustical probing. The computational experiments are conducted.

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ СЛОИСТЫХ ФГМ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ

Ватульян А. О.^{1,2}, Явруян О. В.², Богачев И. В.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

Исследована задача о реконструкции неоднородных свойств вязкоупругого ортотропного слоя в рамках установившихся плоских колебаний по данным акустического зондирования. Предлагаемая схема связана с предварительным упрощением исходной задачи и разделением ее на более простые краевые задачи относительно восстанавливаемых функций. Дальнейшее исследование сведено к последовательному решению полученных задач с применением итерационных схем и регуляризующих алгоритмов решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Представлены численные результаты восстановления неоднородных вязкоупругих характеристик ортотропной слоистой среды.

Введение. Активное внедрение в практику функционально-градиентных материалов (ФГМ) ставит перед учеными новые актуальные задачи, связанные с уточнением математических моделей, описывающих поведение ФГМ в критических условиях, а также с вопросами совершенствования схем определения их механических свойств. Количественное определение неоднородных характеристик ФГМ позволит моделировать реальное поведение механических объектов в каждом отдельном случае. В работе исследована возможность восстановления неоднородных свойств функционально-градиентных слоистых сред с учетом вязкости в рамках ортотропной модели.

Постановка обратной коэффициентной задачи. Рассмотрим колебания неоднородного вязкоупругого ортотропного слоя толщины h , нижняя грань которого жестко закреплена, на части верхней границы приложены нагрузки.

Краевая задача, описывающая установившиеся колебания рассматриваемой области в рамках плоской деформации имеет вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j = 1, 3 \quad (1)$$

$$\sigma_{kk} = C_{1k}^* u_{1,1} + C_{k3}^* u_{3,3}, \quad k = 1, 3 \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = C_{55}^* (u_{1,3} + u_{3,1})$$

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : \quad u_i &= 0 \\ x_3 = h : \quad \sigma_{i3} &= \begin{cases} p_i, & x_1 \in [a, b] \\ 0, & x_1 \notin [a, b] \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Механические свойства вязкоупругого слоя описываются на основе принципа соответствия [1]:

$$C_{lm}^*(x_3, i\omega) = \frac{i\omega n C_{lm}'(x_3) + C_{lm}''(x_3)}{1 + i\omega n} \quad (4)$$

где $C'_{lm}(x_3)$ и $C''_{lm}(x_3)$ — функции, характеризующие зависимости мгновенных и длительных модулей среды, удовлетворяющие условию неотрицательности и $C'_{lm}(x_3) > C''_{lm}(x_3)$, n — время релаксации (const).

Обратная коэффициентная задача состоит в восстановлении функций $C'_{lm}(x_3)$ и $C''_{lm}(x_3)$ по информации о полях смещений, измеренных на верхней границе слоя

$$u_1(x_1, \omega) = f_1(\omega), \quad u_3(x_1, \omega) = f_3(\omega), \quad (5)$$

2. Сведение к системам интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Использованная в работе [2] схема восстановления неоднородных свойств ортотропного слоя развита для случая вязкоупругой неоднородной слоистой среды.

После применения интегрального преобразования Фурье по координате x_1 и введения безразмерных переменных

$$\begin{aligned} x_3 &= hx, \quad \tilde{u}_s = hU_s, \quad k^2 = \rho\omega^2 h^2 / C'_{55}(0), \\ C^*_{lm} &= C'_{55}(0)c^*_{lm}, \quad \tilde{p}_s = C'_{55}(0)P_s, \quad s = 1, 3, \quad l, m = 1, 3, 5 \\ \nu &= n\sqrt{C'_{55}(0)/\rho h^2}, \quad c^*_{lm}(x, ik) = (ik\nu c'_{lm}(x) + c''_{lm}(x))/1 + ik\nu, \\ c''_{lm}(x) &= C''_{lm}(x_3)/C'_{55}(0), \quad c'_{lm}(x) = C'_{lm}(x_3)/C'_{55}(0) \end{aligned}$$

Раскладывая функции трансформант Фурье по степеням α

$$\begin{aligned} U_j(x, \alpha) &= U_j^{(0)}(x) + \alpha U_j^{(1)}(x) + \alpha^2 U_j^{(2)}(x) + \dots \\ P_j(\alpha) &= P_j^{(0)} + i\alpha P_j^{(1)} + \alpha^2 P_j^{(2)} + \dots, \quad j = 1, 3, \end{aligned} \quad (6)$$

приравнивания операторные коэффициенты при одинаковых степенях α , получим серию краевых задач, разделенных относительно восстанавливаемых функций $c^*_{lm}(x, ik)$ и неизвестных функций $U_j^{(m)}(x)$, которые решаются последовательно [2] с привлечением итерационных схем для восстановления функций $c'_{33}(x)$, $c''_{33}(x)$, $c'_{55}(x)$, $c''_{55}(x)$ и регуляризующих методов решения систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами относительно $c'_{13}(x)$, $c''_{13}(x)$ и $c'_{11}(x)$, $c''_{11}(x)$.

Стоит отметить, что при последовательном восстановлении неизвестных функций наблюдается накопление погрешности на последних этапах реконструкции и в большей степени это будет наблюдаться при восстановлении модулей $c'_{11}(x)$, $c''_{11}(x)$.

3. Численные эксперименты. Ниже представлены результаты реконструкции функций, соответствующих мгновенным и длительным модулям. Восстановление происходит в 4 этапа. На первом и втором этапах при реконструкции функций $c'_{55}(x)$, $c''_{55}(x)$, $c'_{33}(x)$, $c''_{33}(x)$ начальное приближение разыскивалось на основании минимизации функционала невязки в классе линейных функций (или констант). На третьем и четвертом этапах в соответствии с предложенной вычислительной схемой знание начального приближения не требуется. Параметр, соответствующий времени релаксации считался известным $\tau = 0.1$. На графиках сплошной линией показан график исходной функции, пунктиром — начального приближения, точками — восстановленной.

1 этап. Восстановление функций $c'_{55}(x) = 0.5 \sin(\pi x) + 0.5$, $c''_{55}(x) = 0.4 \sin(\pi x) + 0.4$. Начальные приближения найдены в виде: $c^{0'}_{55}(x) = 0.7$, $c^{0''}_{55}(x) = 0.6$. Частотный

диапазон выбран из анализа АЧХ: $k \in [1.44, 2.7]$. Для восстановления функций потребовалось $N=10$ итераций. Погрешность восстановления не превосходит 9% в крайних точках.

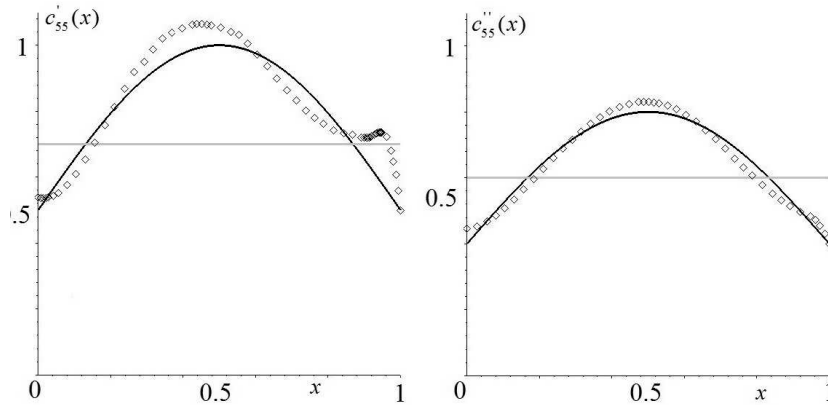


Рисунок 1 – Результат восстановления $c'_{55}(x)$ и $c''_{55}(x)$

2 этап. Восстановление функций $c'_{33}(x) = 0.8 + 0.4 \cos(\pi x + \pi/2)$, $c''_{33}(x) = 1 + 0.5 \cos(\pi x + \pi/2)$. Начальные приближения найдены в виде: $c_{33}^{0'}(x) = 0.8$, $c_{33}^{0''}(x) = 0.6$, $k \in [1.45, 2.5]$, $N=15$. Погрешность восстановления не превосходит 12% в крайних точках.

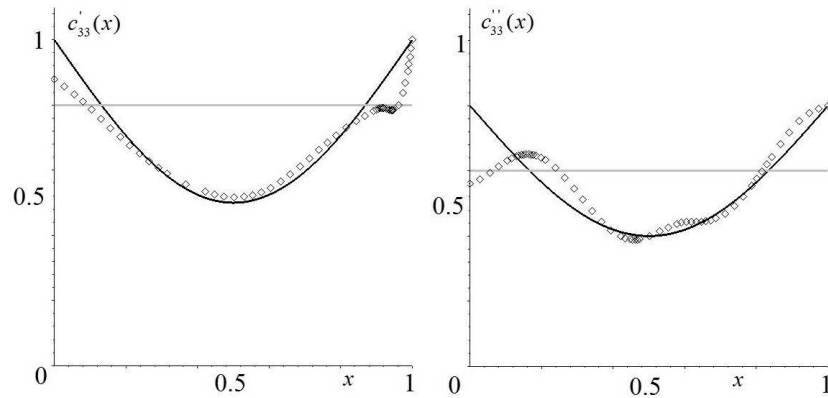


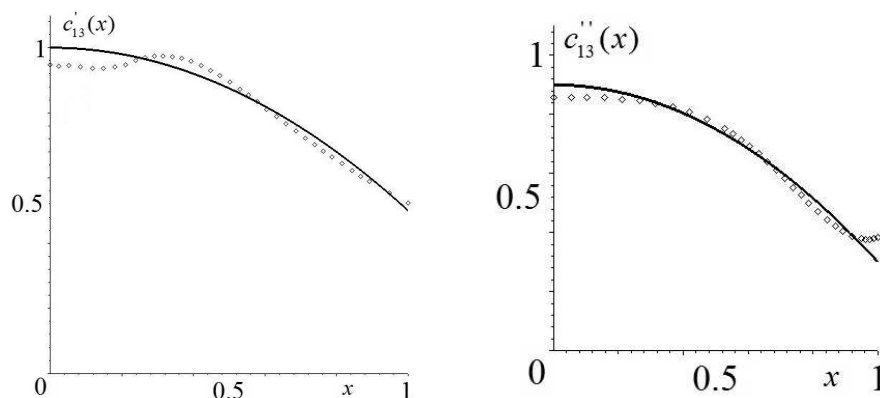
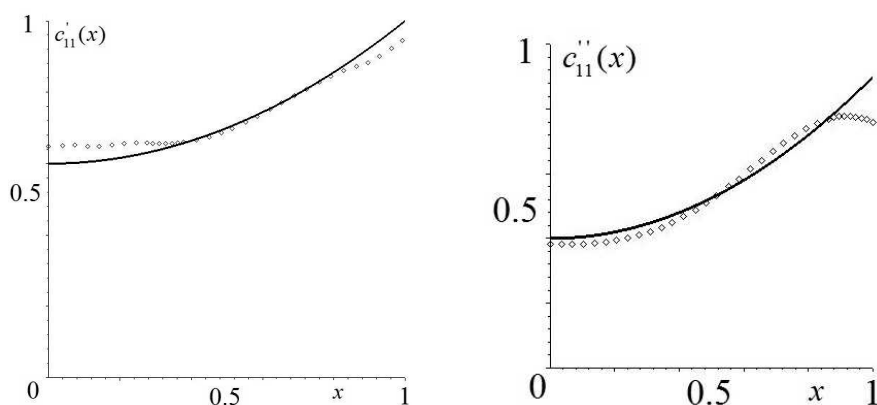
Рисунок 2 – Результат восстановления $c'_{33}(x)$ и $c''_{33}(x)$

3 этап. Восстановление функций $c'_{11}(x) = 1 - 0.5x^2$, $c''_{11}(x) = 0.9 - 0.6x^2$, $k \in [1.4, 2.8]$. Погрешность восстановления не превосходит 13% в крайних точках.

4 этап. Восстановление функций $c'_{11}(x) = 0.6 + 0.4x^2$, $c''_{11}(x) = 0.4 + 0.5x^2$, $k \in [1.7, 2.6]$. Погрешность восстановления не превосходит 14% в крайних точках.

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают эффективность применения предлагаемой схемы идентификации неоднородных свойств материалов для слоистых сред с учетом вязкости.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-01-31501мол-а, № 13-01-00196, внутреннего гранта ЮФУ № 213.01-24/2013-74 и Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.132.21.1358 и № 14.132.21.1360.

Рисунок 3 – Результат восстановления $c'_{13}(x)$ и $c''_{13}(x)$ Рисунок 4 – Результат восстановления $c'_{11}(x)$ и $c''_{11}(x)$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1974. 338 с.
- [2] Богачев И. В., Ватульян А. О., Явруян О. В. Об идентификации неоднородных свойств ортотропной упругой полосы // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XVI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 г., С. 45–49.

Vatulyan A. O., Yavruyan O. V., Bogachev I. V. *On a scheme of identification of layered FGM with viscosity.* The problem on the reconstruction of the viscoelastic properties of the of inhomogeneous orthotropic layer under steady-plane vibrations based on acoustic sensing is considered. The proposed scheme is associated with pre-simplification of the original problem and dividing it into simpler boundary value problems concerning recoverable functions. Further research is reduced to the solution the problem obtained using iterative schemes and regularizing algorithms of solving Fredholm integral equations of the first kind. Numerical results identification of inhomogeneous viscoelastic orthotropic characteristics of the layered medium are presented.

ГРАНИЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ПОДХОДЫ К ЗАДАЧЕ О ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ МАССИВОВ

Ворона Ю. В., Козак А. А., Черненко Е. С.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

К решению задачи о нестационарных колебаниях упругих массивов применяются два граничноэлементных подхода. Первый из них связан с переходом в частотную область, а второй реализует шаговую по времени процедуру. Сопоставление методик производится в процессе решения задачи об импульсном нагружении пространства с двумя цилиндрическими полостями.

Эффективным средством решения задач о колебаниях упругих массивов, ослабленных разного рода полостями и включениями, является метод граничных элементов (МГЭ). При этом решение задачи может быть получено двумя путями. В первом случае с помощью преобразования Фурье производится перевод задачи в частотную область, тогда как во втором случае применяется шаговая по времени процедура. В обоих случаях алгоритмической основой задачи служит граничный аналог формулы Соммиеран для перемещений, связывающий между собой известные и заданные граничными условиями перемещения и напряжения в точках границы. Разрешающее уравнение, описывающее двумерные гармонические колебания упругого массивного тела, при отсутствии объемных сил имеет вид

$$\frac{1}{2}u_j(\vec{x}, \omega) = \int_{\Gamma} q_k(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y, j, k = 1, 2, \quad (1)$$

где ω — круговая частота колебаний; $\vec{x} \{x_1, x_2\}$, $\vec{y} \{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ — граница области, занимаемой телом; $u_j(\vec{x}, \omega)$, $q_j(\vec{x}, \omega)$ — комплексные амплитуды соответственно перемещений и напряжений на границе; $U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ — фундаментальное решение задачи [1], которое задается выражением

$$U_{jk} = \frac{i}{4\mu} \delta_{jk} \left[H_0^{(1)}(\varphi_1) - \frac{H_1^{(1)}(\varphi_2)}{(\varphi_2)} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(\varphi_1)}{(\varphi_1)} \right] + \\ + \frac{i}{4\mu} r_{,j} r_{,k} \left[H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] \quad (2)$$

$\varphi_j = \frac{\omega r}{C_j}$; $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; $\alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}$; ρ — плотность материала; λ и μ — константы Ламе; $r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{y_j - x_j}{r}$; $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$; $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ — обобщенная производная фундаментального решения (напряжения на площадках с компонентами нормали $n_j(\vec{y})$, которые возникают в упругом двумерном пространстве от действия в точке $\vec{x}$ сосредоточенной единичной силы в направлении оси x_k); $H_m^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода порядка m .

В соответствии с коллокационной процедурой МГЭ граница тела представляется в виде совокупности элементов, вводится гипотеза о характере изменения неизвестных в пределах каждого ГЭ, назначается система полюсов $\vec{x}_l$, согласованная с введенной гипотезой, после чего поочередно в каждом из полюсов записываются уравнения (1). Результатом такой процедуры является система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений амплитуд перемещений и напряжений в точках коллокации $\vec{x}_l$. Коэффициентами системы служат интегралы по граничным элементами от произведений ядер $U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ или $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ и соответствующих функций формы. Когда расстояние r между точкой наблюдения $\vec{x}$ и точкой интегрирования $\vec{y}$ стремится к нулю, т.е., если полюс расположен на том же ГЭ, по которому производится интегрирование, функции Ханкеля, а вместе с ними и подынтегральные выражения, принимают бесконечно большие значения, что делает невозможным вычисление диагональных коэффициентов матрицы системы с помощью численного интегрирования.

Для преодоления указанного препятствия функции Ханкеля приближенно заменяются начальными отрезками ряда Маклорена. После такой замены ядра интегральных уравнений удастся представить следующим образом:

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) \approx U_{jk}^s(\vec{x}, \vec{y}) + U_{jk}^*(\vec{x}, \vec{y}, \omega); \quad T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) \approx T_{jk}^s(\vec{x}, \vec{y}) + T_{jk}^*(\vec{x}, \vec{y}, \omega), \quad (3)$$

где $U_{jk}^s(\vec{x}, \vec{y})$ и $T_{jk}^s(\vec{x}, \vec{y})$ — соответственно фундаментальное решение плоской задачи статики и его обобщенная производная.

Поскольку интегрирование ядер статической задачи трудностей не вызывает, а регулярные добавки $U_{jk}^*(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ и $T_{jk}^*(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ могут быть определены с любой степенью точности, то проблему алгебраизации системы граничных интегральных уравнений (1) при первом подходе можно считать решенной.

При втором подходе возникает необходимость в решении системы гранично-временных интегральных уравнений, которая при нулевых начальных условиях и отсутствии массовых сил имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_k(\vec{x}_0, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U_{kj}(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) q_j(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T_{kj}(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) u_j(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$U_{kj}(r, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \left[\frac{H(C_1 t - r)}{C_1 r^2} f_{kj}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}, t) + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2 r^2} f_{kj}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}, t) \right];$$

$H(\tau)$ — функция Хевисайда; $f_{kj}^{(1)}(r, t) = \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1}\right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} d_1$,
 $f_{kj}^{(2)}(r, t) = \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2}\right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} \left(d_2 + \frac{r^2}{d_2}\right)$, $d_1 = \sqrt{(C_1 t)^2 - r^2}$, $d_2 = \sqrt{(C_2 t)^2 - r^2}$;
 $T_{jk}(r, t)$ — обобщенная производная фундаментального решения $U_{jk}(r, t)$.

Особенность данного подхода заключается в том, что к числу переменных, от которых зависит решение, добавляется время. Соответственно возникает необходимость в разделении временного интервала на отдельные промежутки и аппроксимации неизвестных в пределах каждого промежутка. Если предположить, что

граничные напряжения на каждом шаге сохраняют постоянные значения, то интегрирование по времени в первом из слагаемых в правой части уравнения (4) может быть выполнено аналитически [2].

Также в замкнутой форме может быть проинтегрировано по времени второе слагаемое в правой части уравнения (4). Более того, полученные выражения также могут быть представлены в виде, подобном соотношению (3), т. е. в виде суммы соответственного статического ядра и некоторой регулярной добавки. Таким образом, и в этом случае удастся преодолеть все принципиальные препятствия, стоящие на пути численного решения задачи [2].

Сопоставление разработанных алгоритмов было выполнено на задаче о нестационарных колебаниях упругого пространства с двумя круговыми цилиндрическими отверстиями радиуса $R=3\text{м}$, граница одного из которых подвергается радиальному воздействию параболического импульса, задаваемого формулой $q_R(t) = 4 \frac{qt(T-t)}{T^2}$ (рис. 1). Время действия импульса $T = \frac{20R}{C_1} = 0.0108\text{с}$.

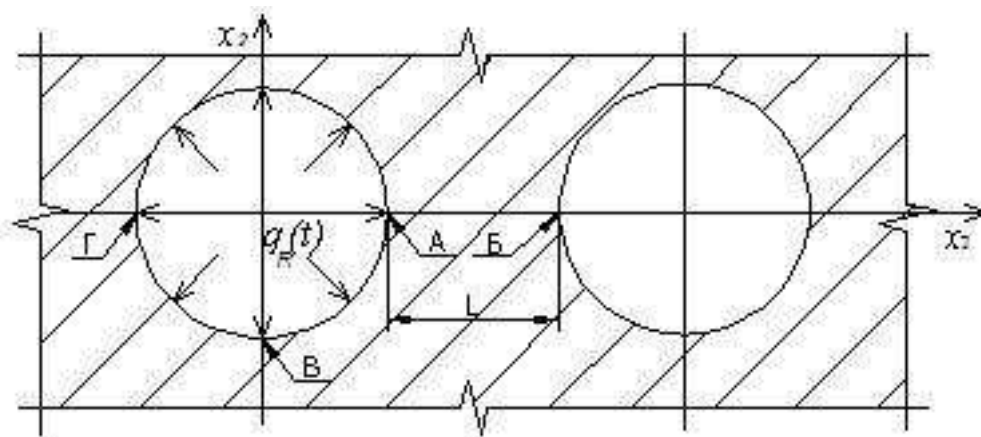


Рисунок 1 – Расчетная область

Результаты расчетов приведены на рисунках 2,3. На этих рисунках цифрами 1 и 4 обозначены кривые, полученные в результате решения системы (4). Цифрами 2 и 5 обозначены графики, построенные в рамках первого подхода при использовании 12 членов ряда Фурье, а цифрами 3 и 6 - графики, для построения которых удерживались 4 члена ряда. При этом графики 1,2,3 характеризуют параметры НДС в точке А, а графики 4,5,6 - в точки В границы (рис. 1).

Экстремальные значения нормированных параметров напряженно-деформированного состояния, полученные с помощью двух подходов, содержатся в таблицах 1- 4. Нормировка значений радиальных перемещений осуществлялась по формуле $U_R^n = u_R \frac{\mu}{qR}$, а тангенциальных напряжений σ_s — по формуле $\sigma_s^n = \frac{\sigma_s}{q}$. Через $U_R^{n,t}$, $\sigma_s^{n,t}$ обозначены данные, полученные с помощью решения системы гранично-временных интегральных уравнений (2-й подход), а через $U_R^{n,\omega}(m)$, $\sigma_s^{n,\omega}(m)$ — данные, полученные путем перехода в частотную область (1-й подход), причем величина m соответствует числу удерживаемых гармоник.

Данные, приведенные в рисунках и в таблицах, свидетельствуют об удовле-

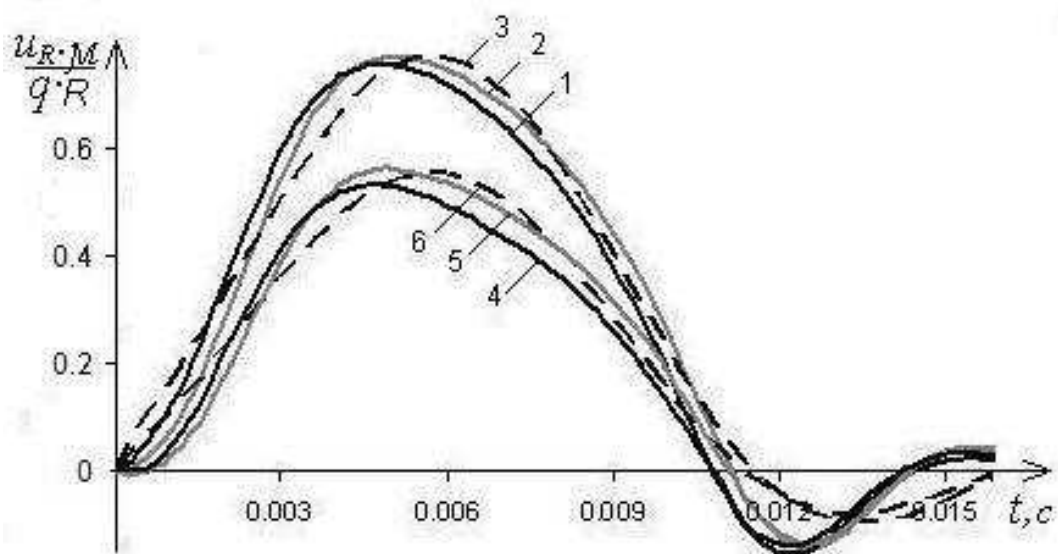
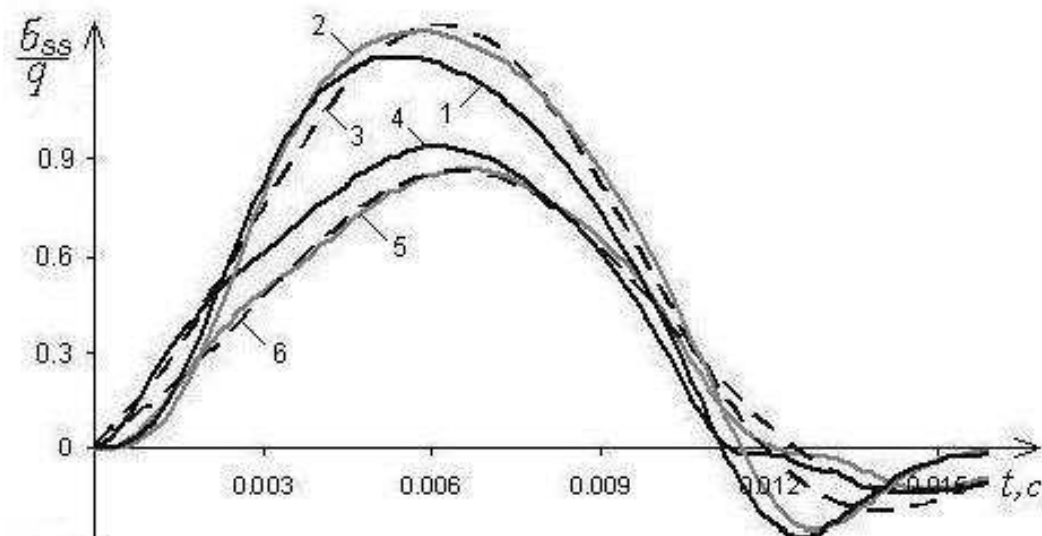
Рисунок 2 – Радиальные перемещения в точках А и Б границы при $L=3m$ Рисунок 3 – Тангенциальные напряжения в точках А и Б границы. $L=3m$

Таблица 1 – Нормированные радиальные перемещения в точках границы

Точка	$U_{R,max}^{n,t}$	$U_{R,max}^{n,\omega}(4)$	$U_{R,max}^{n,\omega}(12)$	$U_{R,min}^{n,t}$	$U_{R,min}^{n,\omega}(4)$	$U_{R,min}^{n,\omega}(12)$
А	0.764	0.777	0.775	-0.155	-0.096	-0.144
Б	0.502	0.521	0.502	-0.043	-0.055	-0.036
В	0.526	0.528	0.524	-0.080	-0.057	-0.071
Г	0.536	0.562	0.567	-0.134	-0.078	-0.135

Таблица 2 – Нормированные тангенциальные напряжения в точках границы, $L=3$ м

Точка	$\sigma_{s,max}^{n,t}$	$\sigma_{s,max}^{n,\omega}(4)$	$\sigma_{s,max}^{n,\omega}(12)$	$\sigma_{s,min}^{n,t}$	$\sigma_{s,min}^{n,\omega}(4)$	$\sigma_{s,min}^{n,\omega}(12)$
А	0.929	0.855	0.860	-0.144	-0.138	-0.131
Б	1.288	1.248	1.250	-0.262	-0.168	-0.249
В	1.046	1.065	0.993	-0.130	-0.118	-0.114
Г	1.202	1.302	1.283	-0.273	-0.199	-0.255

Таблица 3 – Нормированные радиальные перемещения в точках границы, $L=6$ м

Точка	$U_{R,max}^{n,t}$	$U_{R,max}^{n,\omega}(4)$	$U_{R,max}^{n,\omega}(12)$	$U_{R,min}^{n,t}$	$U_{R,min}^{n,\omega}(4)$	$U_{R,min}^{n,\omega}(12)$
А	0.619	0.625	0.625	-0.105	-0.085	-0.102
Б	0.511	0.527	0.509	-0.053	-0.048	-0.045
В	0.531	0.537	0.530	-0.077	-0.059	-0.070
Г	0.312	0.323	0.325	-0.104	-0.063	-0.098

Таблица 4 – Нормированные тангенциальные напряжения в точках границы, $L=6$ м

Точка	$\sigma_{s,max}^{n,t}$	$\sigma_{s,max}^{n,\omega}(4)$	$\sigma_{s,max}^{n,\omega}(12)$	$\sigma_{s,min}^{n,t}$	$\sigma_{s,min}^{n,\omega}(4)$	$\sigma_{s,min}^{n,\omega}(12)$
А	1.054	1.030	0.992	-0.120	-0.116	-0.970
Б	1.234	1.183	1.182	-0.225	-0.169	-0.211
В	1.122	1.076	1.060	-0.147	-0.106	-0.129
Г	0.550	0.576	0.583	-0.151	-0.119	-0.144

творительной качественной согласованости данных, полученных при использовании разных подходов. Необходимо отметить, что при увеличении количества членов ряда Фурье графики, полученные в рамках первого подхода, становятся всё более подобными кривым, построенным на основе решения системы гранично-временных интегральных уравнений (4), то есть с использованием соотношений второго подхода.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бенерджи П. Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир., 1984. 494 с.
- [2] Dominguez J. Boundary Elements in Dynamics. Southampton, Boston.: Computational Mechanics Publication, 1993. 454 с.

Vorona Yu. V., Kozak A. A., Chernenko O. S. *Vibrations of 2-d solids with opening-mode cracks.* Two Boundary Element approaches are applied to the 2D transient dynamics of elastic solids. The first one is connected with transition into frequency domain and the second one is based on the time stepping procedure. Comparison of the approaches is performed while solving the problem of infinite body with two cylindrical holes impulse loadings.

ВЛИЯНИЕ СРЕД И ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Гиниятуллин Р. Р., Якупов Н. М.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

На поверхности металла в агрессивной среде образуется защитный слой, при разрушении которого начинается коррозионный износ. Среди факторов, влияющих на разрушение защитного слоя — физические поля. Приводятся результаты по изучению влияния магнитного поля и ультрафиолетового излучения на процессы коррозии.

Введение. Конструкции и сооружения работают под воздействием различных сред и физических полей. Известно, что на поверхности металла, находящегося в агрессивной среде, образуется защитный слой, при разрушении которого начинается коррозионный износ. При этом, наряду с утонением элементов конструкций, происходит процесс разрыхления материала, что существенно для тонкостенных элементов. Очевидно, среди факторов, влияющих на разрушение защитного слоя — физические поля. Для исследования влияния отмеченных факторов на коррозию тонкостенных образцов используется экспериментально — теоретический метод [1–4]. На экспериментальном этапе тонкостенный образец зажимают по контуру, нагружают поверхностным давлением и снимают зависимость «прогиб — давление». Для проведения экспериментальных исследований образцов разработаны установки и предложены способы, на которые получены патенты РФ на изобретение. На теоретическом этапе, используя экспериментальные данные и соотношения нелинейной теории оболочек [5, 8–10], строятся кривые изменения напряжений и модуля упругости (или условного модуля) от деформаций. Малоизученными являются вопросы влияния физических полей, в частности, магнитного поля и ультрафиолетового излучения на процесс коррозионного износа. В частности, в работе [6] рассмотрен вопрос снижения коррозионной активности путем обработки перекачиваемой жидкости переменным магнитным полем. В работе [7] отмечается эффект влияния постоянного магнитного поля на свойства стали 17Г1С. Британский ученый А. Давенпорт с коллегами установили [13], что в присутствии магнитного поля общая коррозия меди существенно ускоряется, а скорость локальной коррозии железа, никеля и нержавеющей сталей зависит от направления магнитного поля. Исследования коррозионного износа материала, находящегося в жидкой среде и под воздействием ультрафиолетового излучения (УФ), встречаются редко. Небольшое ускорение коррозионного износа сплава цинка под влиянием УФ отмечено в работе [11]. Коррозия цинка, алюминия, серебра, углеродистой стали при воздействии УФ излучения неоднозначна, наблюдалось как ускорение, так и замедление коррозионного износа [12]. В работе приводятся некоторые результаты исследований по изучению влияния магнитного поля и ультрафиолетового излучения на процессы коррозионного износа тонкостенных

элементов конструкций. Вопросы влияния физических полей на коррозию чрезвычайно важны для практики.

Результаты исследования влияния магнитного поля. Исследуемые образцы из листовой стали марки Сталь 3 с диаметром рабочей зоны 110 мм и толщиной для группы образцов № 1 — 0.6 мм и для группы № 2 — 0.5 мм, помещались в агрессивную среду и подвергались всесторонней коррозии. При этом часть образцов подвергалась прерывистому воздействию магнитного поля, а другая часть не подвергалась воздействию магнитного поля. Напряженность магнитного поля между катушками составила 5000 Эрстед (5 кЭ). Экспериментальные данные для рассмотренных групп образцов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Экспериментальные данные

Образцы группы	Группа № 1		Группа № 2	
Время износа/ время воздействия магнитного поля	1728 часов / 265 часов		1872 часа / 223 часа	
Воздействие магнитного поля	да	нет	да	нет
Толщина (мм) после износа	0.590	0.577	0.475	0.452

Кривые деформирования «прогиб H — давление P » для образцов из группы № 1 представлены на рисунке 1.

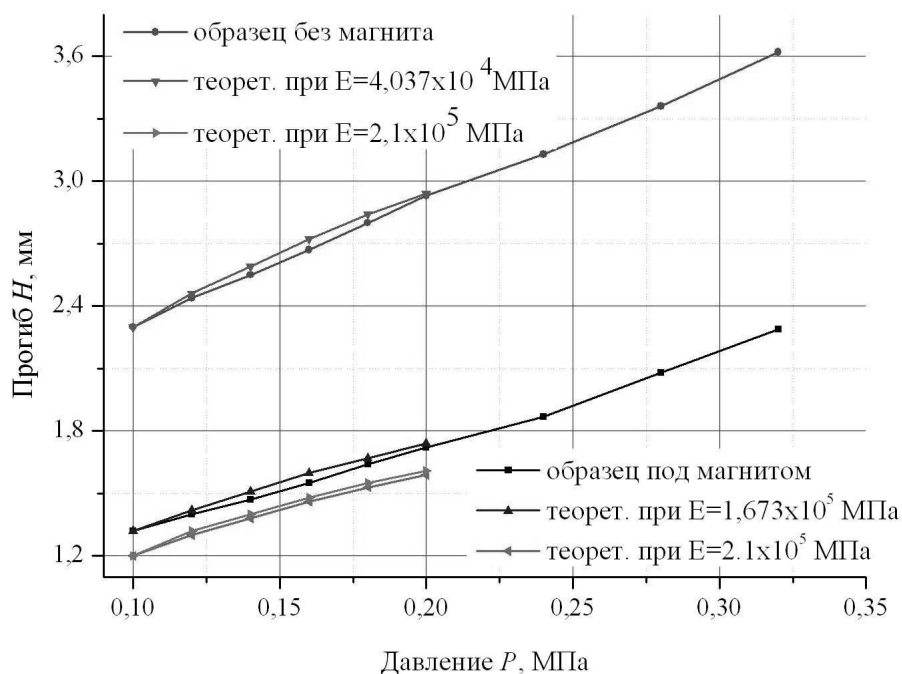


Рисунок 1 – Зависимость «прогиб H — давление P » (образца из группы № 1)

На рисунке 1, кроме кривых для образцов подверженного и не подверженного воздействию магнитного поля, представлены также кривые при расчетных значениях прогиба для образцов с толщиной $t_1 = 0.59$ мм (соответствующей

толщине образца из группы № 1 после выдерживания в агрессивной среде) при $E_{исх} = 2.1 \cdot 10^5$ МПа и $E_{прибл} = 1.673 \cdot 10^5$ МПа, при котором кривая прогиба максимально приближается к экспериментальной кривой «давление P — прогиб H » для образца из группы № 1.

Кривые деформирования «давление P — прогиб H » для образцов из группы № 2 представлены на рисунке 2.

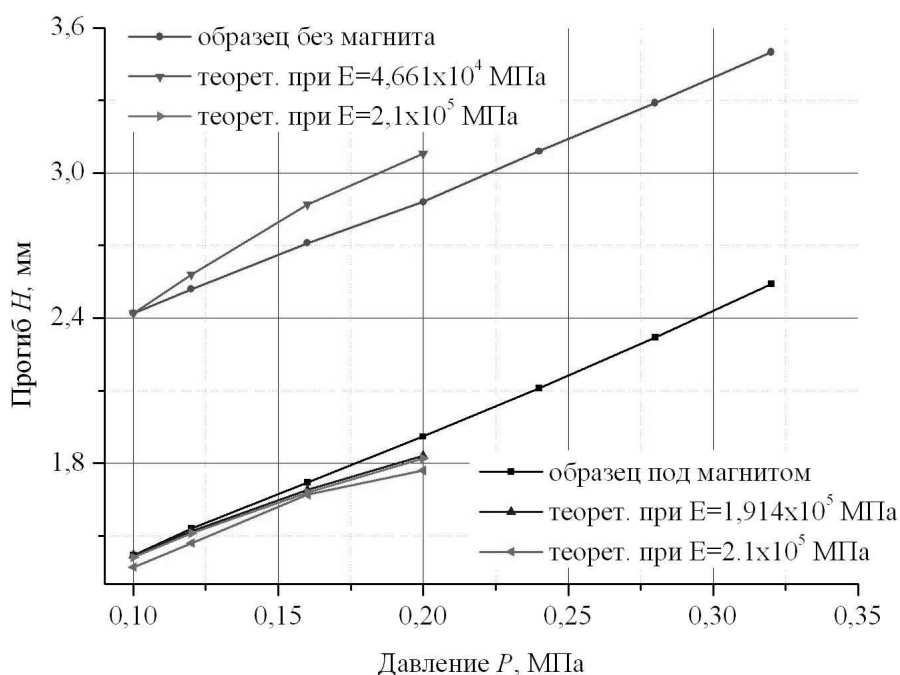


Рисунок 2 – Зависимость «прогиб H — давление P » (образца из группы № 2)

Из представленных результатов видно, что периодическое воздействие магнитного поля на стальной образец замедляет процесс коррозии.

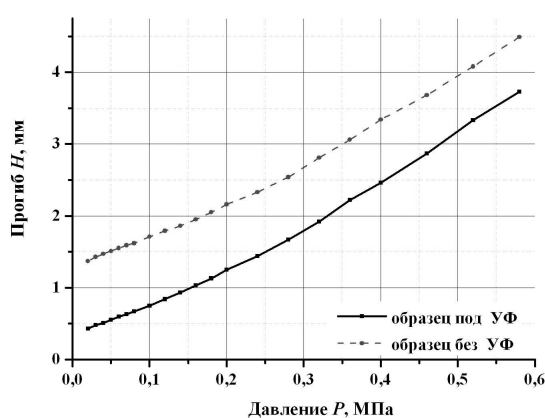
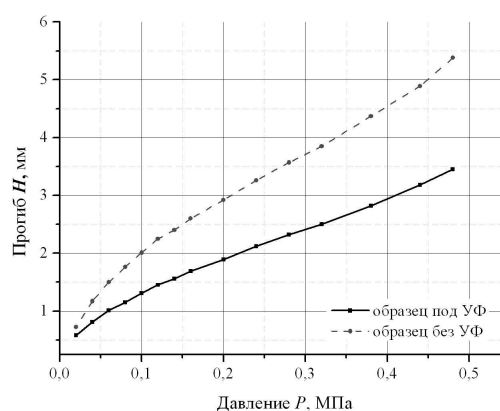
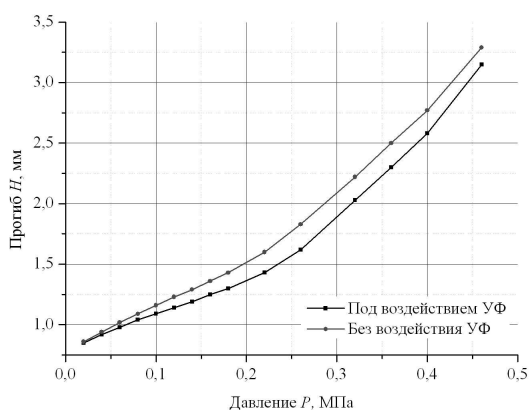
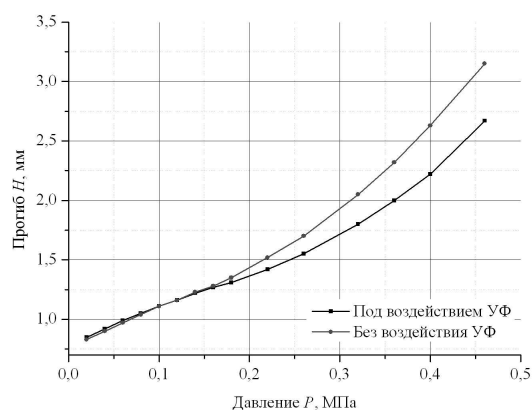
Результаты исследования влияния ультрафиолетового излучения. Исследуемые образцы круглой формы диаметром $D = 110$ мм из тонколистовой стали марки Сталь 3 толщиной $t = 0.6$ мм помещались в основную и контрольную емкости с агрессивной жидкостью и находились в этой среде в течение заданного времени. При этом один из образцов подвергался прерывистому ультрафиолетовому излучению, а другой нет. Параметры эксперимента представлены в таблице 2.

По экспериментальным данным были построены графики зависимости «давление P — прогиб H » (рисунки 3, 4, 5, 6), для образцов подвергавшихся и не подвергавшихся воздействию ультрафиолетового излучения.

Как видно из рисунков, прогибы образцов, подвергавшихся прерывистому воздействию УФ, меньше, чем у образцов, не подвергавшихся воздействию УФ.

Таблица 2 – Экспериментальные данные

Образцы группы	Группа № 1		Группа № 2		Группа № 3.1		Группа № 3.2	
Время износа/ время воздейст вия УФ	2784 часа / 1111 часов		1055 часов / 146 часов		1016 часов / 280 часов		1016 часов / 280 часов	
Воздействие УФ	да	нет	да	нет	да	нет	да	нет
Толщина (мм) после износа	0.580	0.575	0.570	0.588	0.459	0.425	0.466	0.477
Среда	кислая		кислая		кислая		вода	

Рисунок 3 – Зависимость давление P — прогиб H (образцы из группы № 1)Рисунок 4 – Зависимость давление P — прогиб H (образцы из группы № 2)Рисунок 5 – Зависимость давление P — прогиб H (образцы из группы № 3.1)Рисунок 6 – Зависимость давление P — прогиб H (образцы из группы № 3.2)

Работа выполнена в рамках проекта: «Исследование механических свойств и поведения тонких структур при воздействии полей и сред» по Программе ОЭММ-ПУ РАН № 12.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н. Методика испытания пленок и мембран в условиях равномерного распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 11. С. 54–56.
- [2] Галимов Н. К., Якупов Н. М., Якупов С. Н. Экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик сферических пленок и мембран со сложной структурой // МТТ. 2011. № 3. С. 58–66.
- [3] Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н. Способ определения прочностных свойств тонкослойных материалов. Патент № 3.2310184.
- [4] Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Гиниятуллин Р. Р., Якупов С. Н. Методика анализа работы конструкций, подверженных коррозионному изнашиванию // Вестник машиностроения. 2012. № 10. С. 36–40.
- [5] Галимов К. З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях // ПММ. 1951. Т. XV. вып. 6. С. 723–742.
- [6] Хайдаров Ф. Р. Повышение работоспособности промысловых трубопроводов за счет снижения коррозионной активности перекачиваемых жидкостей // Нефтегазовое дело. 2002. № 1. С. 1–9.
- [7] Худяков М. А., Алтынова Р. Р. Влияние постоянного магнитного поля на циклическую трещиностойкость и коррозионную стойкость стали 17Г1С // Нефтегазовое дело. 2006. Т. 4. № 1. С. 286.
- [8] Федосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М.: Госиздательство оборонной промышленности, 1949. 343 с.
- [9] Муштаров Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
- [10] Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [11] Thompson E. A., Burleigh T. D. Accelerated corrosion of zinc alloys exposed to ultraviolet light // Corrosion Engineering, Science and Technology. September 2007. Vol. 42. № 3. P. 237–241.
- [12] Burleigh T. D., Ruhe C., Forsyth J. Photo-Corrosion of Different Metals during Long-Term Exposure to Ultraviolet Light // Journal Corrosion. September 2003. Vol. 59. Issue 9. P. 774–779.
- [13] News [Электронный ресурс] // Наука и жизнь: [сайт]. Дата обновления: 03.08.2006. URL: <http://www.nkj.ru/news/5875/> (дата обращения: 27.09.2009).

Giniyatullin R. R., Yakupov N. M. *Influence of environments and physical fields on mechanical characteristics of thin-walled elements.* On a metal surface in an excited environment the protective layer at which destruction corrosion deterioration begins is formed. Among the factors influencing destruction of a protective layer are physical fields. Known works are noted, results on studying of influence of a magnetic field and ultra-violet radiation on corrosion processes are resulted.

ВОЛНОВОЙ НЕРАЗРУШАЮЩИЙ КОНТРОЛЬ СКРЫТЫХ ДЕФЕКТОВ И ОЧАГОВ КОРРОЗИИ В СЛОИСТЫХ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А.,
Евдокимов А. А.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар

Рассматриваются задачи дифракции упругих волн, возникающие при ультразвуковом неразрушающем контроле элементов конструкций, изготовленных как из традиционных, так и из новых композитных материалов. Основным методом их решения, используемым при создании компьютерных моделей, является метод слоистых элементов (МСЭ). В докладе предполагается представить и обсудить следующие теоретические и экспериментальные результаты:

- прохождение бегущих волн через зоны утоньшения, возникающие в элементах конструкции при коррозии;
- вейвлет и оконный Фурье анализ регистрируемых сигналов, выявление в них характерных признаков коррозии и разработка методов оценки степени коррозионного поражения по изменению волновых характеристик;
- анализ изменения положения точек дискретного спектра рассматриваемых краевых задач в комплексной плоскости частоты в зависимости от изменения упругих и геометрических параметров зондируемой структуры, а также анализ резонансных эффектов, связанных с почти вещественными точками спектра;
- частотно-зависимая направленность излучения бегущих волн, генерируемых круговыми актуаторами в анизотропных слоистых композитах.

В качестве примера ниже приводятся результаты, относящиеся к разработке методов обнаружения и идентификации зон коррозии.

1. Рассматриваются плоские гармонические колебания $\mathbf{u}(x, z) = (u_x, u_z)e^{-i\omega t}$ слоистого изотропного упругого волновода $D : \{\mathbf{x} = (x, z) : |x| < \infty, -H < z < 0\}$, содержащего неоднородность в виде поверхностной выемки с незамкнутой границей S , моделирующей результат коррозионного воздействия (рис. 1). Перемещения $\mathbf{u}$ точек волновода описываются уравнениями Ламе и удовлетворяют условиям отсутствия напряжений на горизонтальных поверхностях волновода: $\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \boldsymbol{\tau}|_{z=-H} = 0$, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz}, \sigma_{zz}\}$, и на границе выемки S (здесь и далее гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен).

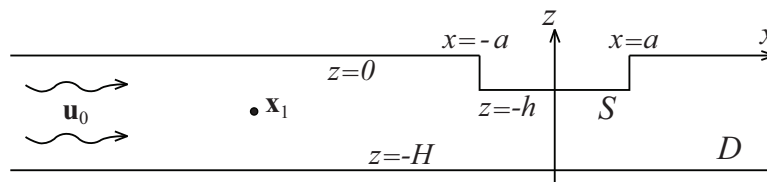


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Суммарное поле $\mathbf{u}$ складывается из исходного волнового поля $\mathbf{u}_0$ и неизвестного поля $\mathbf{u}_{sc}$, возникающего при дифракции на препятствии. В качестве $\mathbf{u}_0$ рассматриваются нормальные моды вида

$$\mathbf{u}_0^+(x) = \mathbf{a}_{0,k}^+(z)e^{i\zeta_k x}, \quad \mathbf{a}_{0,k}^+ = -i \operatorname{res} K(\alpha, z)|_{\alpha=-\zeta_k} \mathbf{Q}(-\zeta_k),$$

где $K(\alpha, z)$ и $\mathbf{Q}(\alpha)$ — Фурье-символы матрицы Грина для волновода без повреждений и вектора поверхностной нагрузки $\mathbf{q}$, моделирующей источник; ζ_k — вещественные полюса элементов матрицы K .

Отраженное поле ищется в виде потенциала простого слоя [1] с ядром — матрицей фундаментальных решений $l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = [\mathbf{l}_1 : \mathbf{l}_2 : \mathbf{l}_3]$ для слоистого волновода в целом :

$$\mathbf{u}_{sc}(\mathbf{x}) = \int_S l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

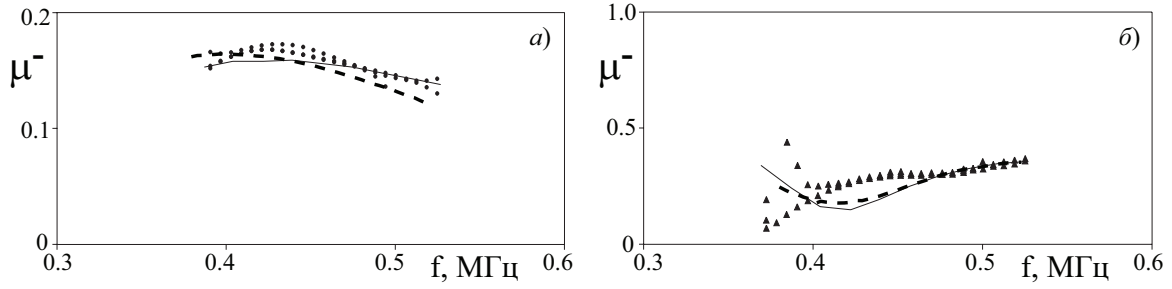
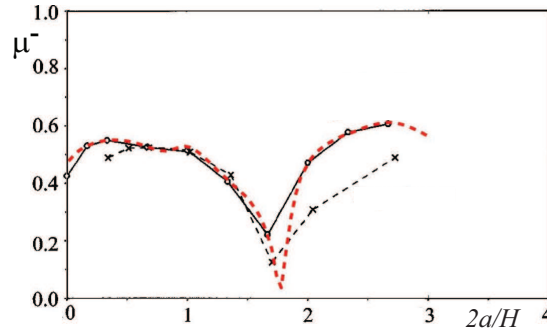
В отличие от матрицы фундаментальных решений для безграничной упругой среды столбцы $\mathbf{l}_j$ по построению удовлетворяют граничным условиям на плоскопараллельных границах волновода [2, 3]. Для определения неизвестной плотности потенциала $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ используется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). После подстановки соотношения (1) в граничные условия на контуре S ГИУ относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ примет вид:

$$\boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{x}_S) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_S} \int_S r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 0, \quad \mathbf{x}_S \in S \quad (2)$$

Предельный переход осуществляется здесь после применения операции интегрирования [4]; $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = T_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, где $T_{\mathbf{n}}$ — оператор напряжений на поверхности с внешней нормалью $\mathbf{n}$. Численное решение ГИУ (2) строится методом граничных элементов (МГЭ) с помощью сплайн-аппроксимации неизвестной вектор-функции $\mathbf{c}$, используя технику вращения в пространстве Фурье-трансформант [5].

2. Для проверки правильности результатов, получаемых в рамках предлагаемого выше подхода, наряду с проверкой граничных условий и условия энергетического баланса проводилось сопоставление с независимыми теоретическими и экспериментальными данными работ [6, 7] для алюминиевой пластины толщины $H = 3$ мм с прямоугольной выемкой длины $2a$ и глубины h (рис. 1). В цитируемых работах в экспериментах использовались источники колебаний, позволяющие возбуждать почти чистые симметричную (s_0) или антисимметричную (a_0) фундаментальные моды. Численное моделирование осуществлялось методом конечных элементов (МКЭ) в плоской постановке.

На рис. 2 приводится частотная зависимость величины коэффициента отражения μ^- для моды a_0 , полученная экспериментально (точки), с помощью МКЭ (сплошная линия) и МГЭ-МСЭ (пунктирная линия), для $h = 0.17H$, $a = 0.5H$ (рис. 2 а) и $h = 0.5H$, $a = 0.5H$ (рис. 2 б). Экспериментальные значения μ^- определяются как отношение частотных спектров исходного и отраженного сигналов, измеренных в точке поверхности пластины, находящейся посередине между источником и выемкой. Следуя [6, 7], теоретическое значение μ^- вычисляется по

Рисунок 2 – Зависимость коэффициента отражения моды a_0 от частотыРисунок 3 – Зависимость коэффициента отражения моды s_0 от отношения длины выемки к толщине волновода

формуле

$$\begin{aligned} \mu^- &= |u_{sc,z}(\mathbf{x}_1)|/|u_{0,z}(\mathbf{x}_1)| \quad \text{для моды } a_0, \\ \mu^- &= |u_{sc,x}(\mathbf{x}_1)|/|u_{0,x}(\mathbf{x}_1)| \quad \text{для моды } s_0. \end{aligned}$$

Зависимость μ^- от величины $2a/H$ для моды s_0 показана на рис. 3, где пунктирной линией с маркерами отмечены экспериментальные данные, сплошной линией — результат МКЭ, а пунктирной — МГЭ-МСЭ. В обоих случаях наблюдается хорошее качественное и количественное совпадение результатов МГЭ-МСЭ с результатами работ [6, 7].

3. В данном разделе анализируется влияние размеров неоднородности на распределение энергии набегающей волны между модами, возникающими при дифракции. Используются следующие обозначения: $E_0(\zeta)$ — энергия, переносимая через поперечное сечение волновода набегающей нормальной модой с волновым числом ζ , $E^\pm(\zeta)$ — энергия, переносимая модой ζ справа («+») и слева («-») от неоднородности ($\zeta = \zeta_1$ или ζ_2 для a_0 или s_0 , соответственно). В двухмодовом частотном диапазоне условие энергетического баланса имеет вид:

$$E_0(\zeta) = E^+(\zeta_1) + E^-(\zeta_1) + E^+(\zeta_2) + E^-(\zeta_2)$$

Коэффициенты прохождения, отражения и трансформации энергии определяются следующими соотношениями:

$$\kappa_{\zeta_i \rightarrow \zeta_j}^\pm = E^\pm(\zeta_j)/E_0(\zeta_i)$$

($i = j$ — прохождение-отражение, $j \neq i$ — трансформация мод)

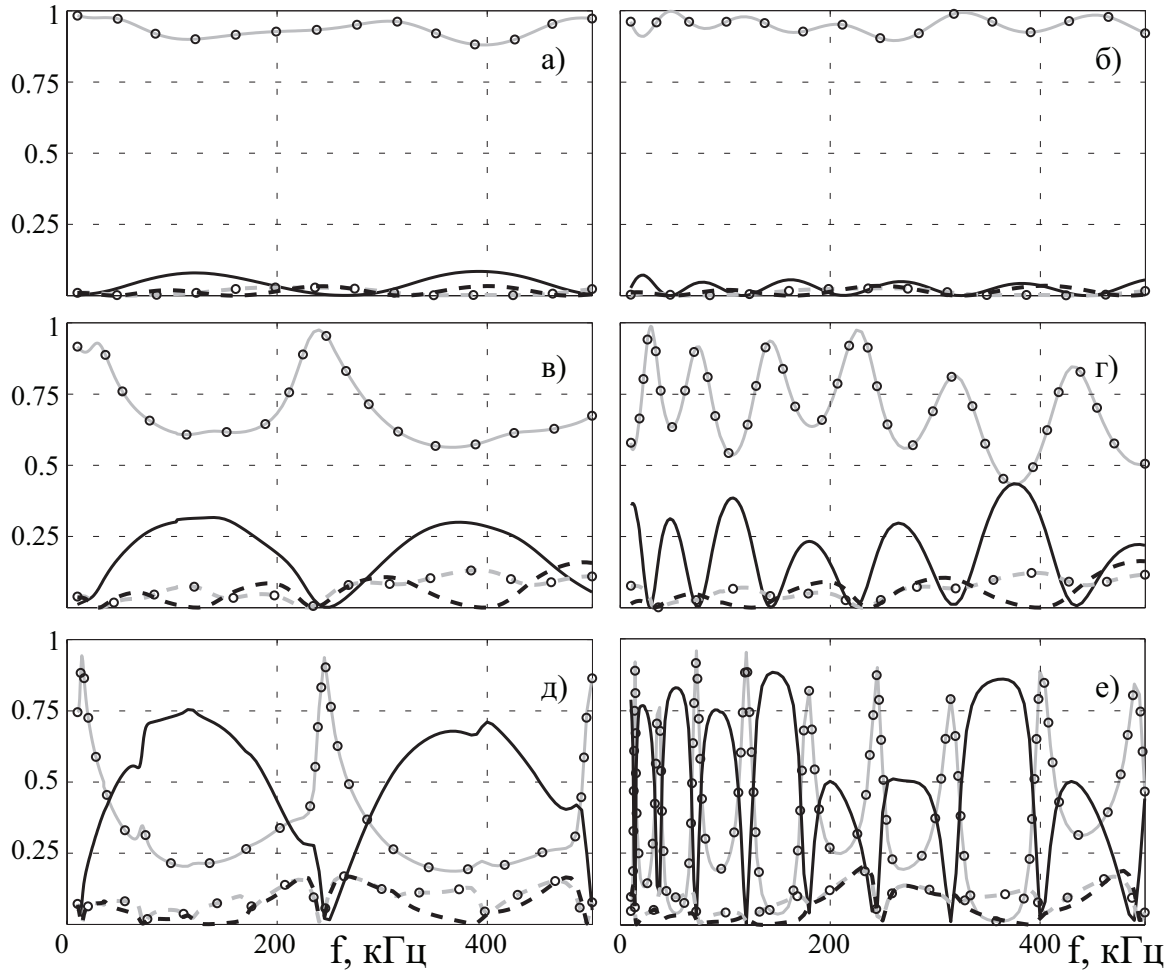


Рисунок 4 – Частотные зависимости коэффициентов прохождения $\kappa_{\zeta \rightarrow \zeta}^+$ (сплошная линия с маркерами), отражения $\kappa_{\zeta \rightarrow \zeta}^-$ (сплошная линия) и трансформации $\kappa_{\zeta_i \rightarrow \zeta_j}^\pm$ (пунктирные линии) для набегающей моды s_0 (графики а, в, д) и a_0 (графики б, г, е)

На рис. 4 показаны зависимости данных коэффициентов от частоты колебаний для прямоугольных выемок длины $2a = 10H$ и глубины $h = 0.25H$ (рис. 4 а, б), $0.5H$ (рис. 4 в, г) и $0.75H$ (рис. 4 д, е). Для графиков $\kappa_{\zeta \rightarrow \zeta}^\pm$ характерно чередование локальных минимумов и максимумов, связанное со сложением в фазе или противофазе волновых пакетов, отраженных правой и левой кромками выемки [6, 7]. С увеличением глубины выемки амплитуда локальных максимумов и минимумов для коэффициентов прохождения и отражения также увеличивается. В то же время при использовании в качестве исходного сигнала тональной посылки с узким частотным спектром возможна ситуация, когда для препятствия больших размеров (например, для $h = 0.75H$ и $f = 245$ кГц) вся энергия проходит за зону с повреждением не только практически без отражения, но и без конвертации одного типа моды в другой. Тем самым зондирование с этой центральной частотой не позволяет обнаружить коррозионное поражение данных размеров. Данный пример указывает на необходимость использования широкополосных измерений и многофакторных методов для обнаружения и идентификации дефектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00320 и № 13-01-96516).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
- [2] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
- [3] Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Михаськив В. В. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // ПММ. 2009. Т. 73, № 4. С. 622–634.
- [4] Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
- [5] Glushkov E., Glushkova N., Ekhlakov A., Shapar E. An analytically based computer model for surface measurements in ultrasonic crack detection // Wave Motion. 2006. Vol. 43. P. 458–473.
- [6] Lowe M. J. S., Cawley P., Kao J.-Y., Diligent O. The low frequency reflection characteristics of the fundamental antisymmetric Lamb wave a_0 from a rectangular notch in a plate // J. Acoust. Soc. Am. 2002. № 112(6). P. 216–227.
- [7] Lowe M. J. S., Diligent O. Low-frequency reflection characteristics of the s_0 Lamb wave from a rectangular notch in a plate // J. Acoust. Soc. Am. 2002. № 111(1). P. 64–74.

Glushkov E. V., Glushkova N. V., Eremin A. A., Evdokimov A. A. *Guided wave based non-destructive testing of hidden defects and corrosion in fiber metal laminates.* Guided wave (GW) diffraction problems are considered, which arise in the ultrasonic non-destructive testing of engineering structures made from traditional materials as well as from novel composite ones. The mathematical modeling of the phenomena considered is based on semi-analytical integral approach and layered elements method (LEM). In the report the following results are to be presented and discussed:

- GW transmission through the local thinning zones caused by corrosion;
- wavelet and short-time Fourier transform analysis of the measured transient signals; development of approaches for corrosion detection and characterization using changes in GW dispersion and amplitude characteristics;
- investigation of the defect type, location and size influence on the location of the spectral points of the related boundary value problem in the complex frequency plane; analysis of the resonant phenomena which occur at the almost real natural frequencies;
- frequency dependent directivity of GWs, generated by circular actuators in anisotropic layered composites.

In the paper the results concerning development of GW based techniques for corrosion zones detection and identification are presented.

УЛЬТРАЗВУКОВАЯ НЕРАЗРУШАЮЩАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Глушков Е. В.¹, Ламмеринг Р.², Еремин А. А.¹,
Мякишева О. А.¹**

¹*Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар*

²*Институт механики, Университет им. Гельмута Шмидта, Гамбург, Германия*

В докладе рассматривается неразрушающий подход к определению упругих модулей слоистых волокноно-армированных композитов, основанный на минимизации невязки между теоретическими и экспериментально измеренными дисперсионными характеристиками бегущих упругих волн Лэмба, возбуждаемых поверхностными пьезоактивными элементами. Численное моделирование осуществляется в рамках трехмерной линейной динамической теории упругости для слоистых анизотропных сред и базируется на интегральных представлениях и асимптотиках, использующих матрицы Грина для рассматриваемых многослойных композитных материалов. Для минимизации квадратичного функционала невязки используется вещественнозначный микрогенетический алгоритм.

1. Волоконно-армированные слоистые композитные материалы получили широкое распространение благодаря высокой прочности, относительно небольшой плотности и слабой подверженности трещинообразованию. При расчете, проектировании и эксплуатации инженерных конструкций из композитных материалов, например, элементов аэрокосмических изделий из армированных углепластиков, существенным является знание их упругих свойств. Поэтому актуальность задачи определения эффективных упругих модулей таких материалов неразрушающими методами с течением времени только возрастает.

К настоящему времени имеется большое количество подходов к измерению эффективных упругих свойств композитных материалов. Традиционные методики, такие как сжатие, растяжение и сдвиг, являются разрушающими и позволяют определить только один-два упругих модуля в рамках одного эксперимента. Вибрационные и ультразвуковые методы не только позволяют определять большее количество модулей из одного эксперимента, но и являются неразрушающими по своей природе. В первом случае для предсказания механических свойств композитного материала используются экспериментально измеренные собственные частоты исследуемого образца [1], тогда как методики второй группы используют ультразвуковые объемные волны или бегущие волны (волны Лэмба) [2, 3]. Существенным практическим ограничением, характерными как для вибрационного подхода, так и для методов, основанных на объемных упругих волнах, является необходимость использования специально подготовленных образцов материала небольших размеров, а также массивного и сложного экспериментального оборудования. В то

же время волны Лэмба обладают достаточной чувствительностью ко всем упругим модулям, а оборудование, необходимое для реализации таких методов, может быть легко интегрировано в исследуемую инженерную структуру.

2. Рассматриваются слоистые волокно-армированные композиционные материалы с сонаправленной или перекрестной укладкой одноправленных препрегов. Для определения их эффективных упругих свойств предлагается методика, основанная на минимизации невязки между рассчитанными теоретически и измеренными экспериментально дисперсионными характеристиками бегущих волн, возбуждаемых тонкими пьезоактивными элементами, приклеенными к поверхности исследуемого образца. В качестве входных данных для предлагаемого алгоритма используются частотные зависимости групповых скоростей фундаментальных антисимметричной (a_0) и симметричной (s_0) волн Лэмба, измеренные с помощью лазерной виброметрии вдоль нескольких заданных направлений распространения колебаний. Исследуемые композитные образцы моделируются как многослойные линейно-упругие материалы, состоящие из трансверсально-изотропных слоев с одинаковыми упругими свойствами, толщина и плотность которых известна. Таким образом, необходимо определить 5 упругих модулей, а именно C_{11} , C_{12} , C_{22} , C_{44} , C_{55} . Предполагается также, что волокна верхнего слоя ориентированы вдоль оси x .

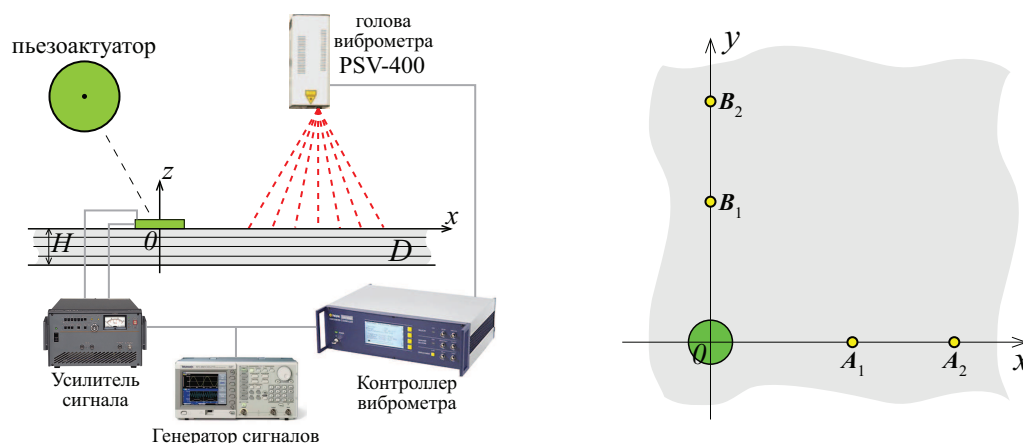


Рисунок 1 – Схематическое изображение экспериментальной установки и геометрии задачи

Предлагаемый алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Бегущие упругие волны генерируются поверхностной локализованной нагрузкой (например, пьезоактивным элементом), возбуждаемой тональной посылкой с меняющимися центральными частотами. С использованием сканирующего лазерного виброметра измеряется вертикальная компонента скоростей точек поверхности вдоль направления укладки волокон в верхнем слое (точки A_i) и в перпендикулярном направлении (точки B_i) (см. рис. 1).
2. Для определения групповых скоростей по измеренным волновым сигналам к ним применяется вейвлет-преобразование с вейвлетом Габора. Показано [4], что, используя максимальные значения амплитуды вейвлет-коэффициентов,

можно определить время прихода волнового пакета для соответствующей центральной частоты. Групповые скорости мод a_0 и s_0 вычисляются путем деления расстояния, пройденного волновым пакетом, на найденное время прихода. Полученные значения затем осредняются вдоль рассматриваемого направления.

3. На следующем этапе строится квадратичный функционал невязки:

$$ERR(C) = \sum_{j=1}^N a_j^2 (v_{g,j}^m - v_{g,j}^c)^2, \quad (1)$$

где C — матрица упругих постоянных (возможное решение оптимизационной задачи), компоненты которой ограничены некоторыми наперед заданными значениями, v_g^m и v_g^c — измеренные и рассчитанные значения групповых скоростей, N — общее количество измеренных скоростей (для мод a_0 и s_0); $a_j = v_{max}/v_{g,j}^m$ — нормирующие коэффициенты, $v_{max} = \max(v_{g,j}^m)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Для вычисления v_g^c используются формулы из работы [5]:

$$\mathbf{v}_g = \begin{pmatrix} v_{gx} \\ v_{gy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial W / \partial \alpha \\ \frac{\partial W}{\alpha \partial \alpha} \end{pmatrix},$$

где $\omega = W(\alpha, \gamma)$ — дисперсионное уравнение, полученное из элементов Фурье-символа матрицы Грина $K(\alpha, \gamma)$ [6, 7]; α и γ — Фурье-переменные в полярной системе координат. Эффективность реализованной численной процедуры обеспечивается применением устойчивого рекурсивного алгоритма для построения $K(\alpha, \gamma)$ [7].

4. Соотношение (1) представляет собой взвешенную сумму квадратов невязок между расчетными и измеренными значениями групповых скоростей, которая должна быть минимизирована. Для этого предлагается использовать вещественнозначный микрогенетический алгоритм [8] с моделируемым двоячным скрещиванием. При этом каждая хромосома кодирует возможную матрицу C , и, следовательно, величина $ERR(C)$ является значением целевой функции.

После численного тестирования разработанного алгоритма на композитах с известными свойствами, методика была применена для экспериментального образца со схемой укладки слоев $[0^\circ]_4$, толщиной $H = 1.1$ мм и с плотностью $\rho = 1482$ кг/м³ с заранее неизвестными упругими свойствами. В результате были получены следующие значения компонент матрицы C (в ГПа):

$$C_{11} = 95.9, \quad C_{12} = 3.6, \quad C_{22} = 9.6, \quad C_{44} = 3.0, \quad C_{55} = 3.5$$

или инженерных констант:

$$E_1 = 94.0 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 8.2 \text{ ГПа}, \quad \mu_{12} = 0.24, \quad G_{23} = 3.0 \text{ ГПа}, \quad G_{12} = 3.5 \text{ ГПа}$$

На рис. 2 приводятся зависимости измеренных и рассчитанных с использованием приведенных выше констант значений длин волн моды a_0 от частоты вдоль

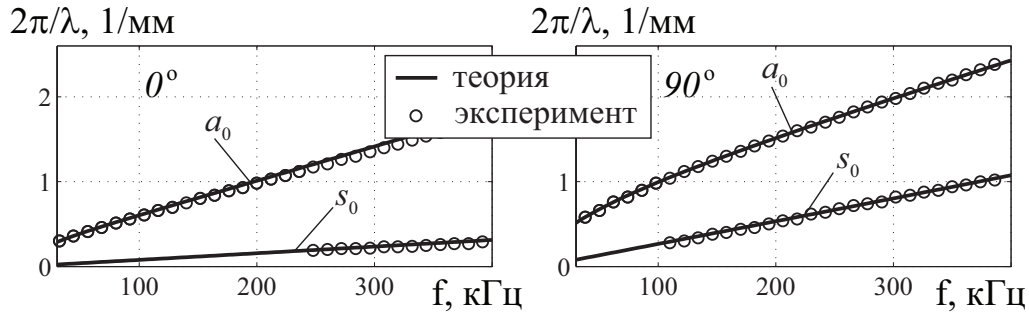


Рисунок 2 – Волновые числа $k = 2\pi/\lambda$ мод a_0 и s_0 в направлении вдоль волокон (левый график) и в перпендикулярном (правый график)

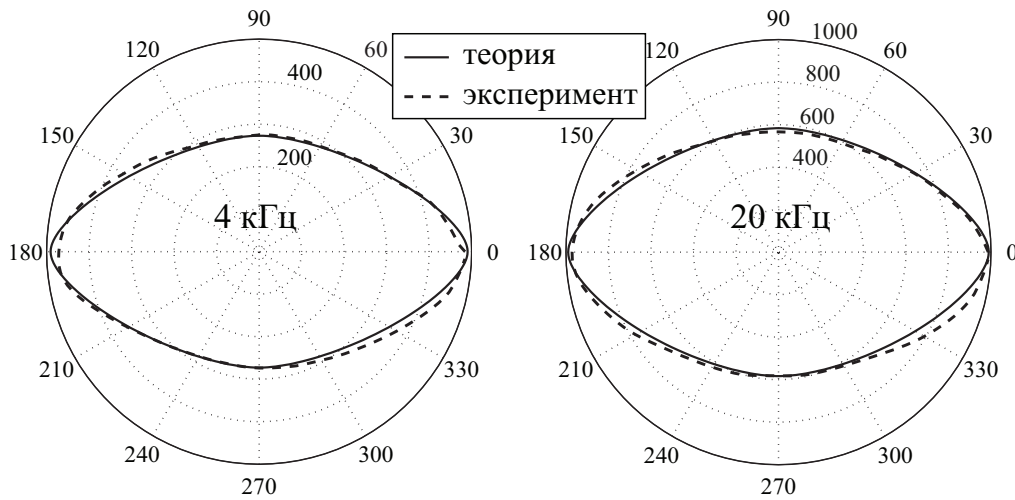


Рисунок 3 – Угловая зависимость групповой скорости моды a_0 для $f = 4$ кГц (левый график) и $f = 20$ кГц (правый график)

осей x и y . Зависимость групповой скорости a_0 от угла распространения для частот $f = 4$ кГц и $f = 20$ кГц приводится на рис. 3. В обоих случаях наблюдается хорошее совпадение результатов; относительная погрешность не превышает 5%.

Кроме того, с использованием традиционного разрушающего эксперимента на растяжение были получены следующие значения для модулей Юнга: $E_1 = 105.7$ ГПа, $E_2 = 7.5$ ГПа и модуля сдвига $G_{12} = 3.35$ ГПа (данные предоставлены М.-Н. Нойманом, Институт механики, Университет им. Гельмута Шмидта, Гамбург), что хорошо согласуется с результатами, полученными с использованием разработанного алгоритма. Некоторые расхождения в значениях E_1 (около 10%) связаны, по-видимому, с погрешностью в измерении групповой скорости моды s_0 . Последняя вызвана относительной малостью вертикальной компоненты амплитуды симметричной моды в направлении вдоль волокон, в то время как лазерный виброметр, использовавшийся в экспериментах, позволяет измерять именно вертикальные колебания поверхности образца. Для решения данной проблемы видится перспективным совместное использование двух методик измерения волновых полей: пьезосенсоров, чувствительных к радиальной компоненте поля перемещений, и лазерных виброметров.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-33011) и Немецко-Российского междисциплинарного научный центра — G-RISC (проект № М-2013а-4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Maletta C., Pagnotta L.* On the determination of mechanical properties of composite laminates using genetic algorithms // *Int. J. Mech. Mater. Des.* 2004. № 1. P. 199–2004.
- [2] *Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C., Balasubramaniam K.* Genetic algorithm reconstruction of orthotropic composite plate elastic constants from a single non-symmetric plane ultrasonic velocity data // *Composites Part B: Engineering*. 2007. № 38(2). P. 216–227.
- [3] *Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C. V., Balasubramaniam K.* Genetic algorithm based reconstruction of the elastic moduli of orthotropic plates using an ultrasonic guided wave single-transmitter-multiple-receiver shm array // *Smart Mater. Struct.* 2007. № 16(5). P. 1639–1650.
- [4] *Kishimoto K., Inoue H., Hamada M., Shibuya T.* Time frequency analysis of dispersive waves by means of wavelet transform // *J. Appl. Mech.* 1995. № 62(4). P. 841–846.
- [5] *Wang L., Yuan F.* Group velocity and characteristic wave curves of lamb waves in composites: Modeling and experiments // *Composites Science and Technology*. 2007. № 67(7-8). P. 1370–1384.
- [6] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Кривонос А. С.* Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // *ПММ*. 2010. № 74(3). С. 419–432.
- [7] *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // *J. Ac. Soc. Am.* 2011. № 129(5). P. 2923–2934.
- [8] *Krishnakumar K.* Micro-genetic algorithms for stationary and non-stationary function optimization // *Proc. SPIE: Intell. Contr. Adapt. Syst.* 1990. № 1196. P. 289–296.

Glushkov E. V., Lammering R., Eremin A. A., Mjakisheva O. A. *Ultrasonic nondestructive approach for determination of the layered anisotropic composite effective elastic moduli.* The paper presents a nondestructive technique for the estimation of the layered fibre-reinforced composite elastic moduli which is based on the minimization of discrepancy between the theoretically calculated and experimentally measured guided Lamb wave dispersion curves in the course of elastic constants variation. Numerical simulations are performed in the context of 3D linear elastodynamics for layered anisotropic solids and rely on wavefield integral and asymptotic representations in terms of the Green's matrix for the problem considered. The minimization of the least-square error sum between the measured and calculated data is achieved through a real coded micro-genetic algorithm.

ЭФФЕКТ ЭСТАФЕТНОЙ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ МЕЖДУ МОДАМИ БЕГУЩИХ ВОЛН В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ВНУТРЕННИМ КАНАЛОМ

Глушкова Н. В., Фоменко С. И.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар

Исследуются энергетические характеристики бегущих волн, возбуждаемых в слоистом или градиентном (непрерывно-стратифицированном) полупространстве заданным гармоническим поверхностным источником. Анализируется распределение энергии, отдаваемой источником в среду, между возбуждаемыми модами, а также распределение энергии каждой моды по глубине в зависимости от частоты. Рассматриваются среды с одним или несколькими внутренними каналами, для которых характерен эффект переноса основной части энергии источника только одной из бегущих волн, а именно модой с высшим номером, возбуждаемой в рассматриваемом частотном диапазоне. С ростом частоты это выглядит как эстафетная передача энергии от предыдущей моды к следующей, только что появившейся для данной частоты, бегущей волны. Анализ распределения энергии по глубине указывает на возможность ее концентрации во внутренних каналах как в форме энергетических вихрей высокой плотности, так и за счет обратных потоков энергии, идущих из бесконечности.

1. Введение.

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой анализировались характерные особенности возбуждения поверхностных волн в материалах с функционально-градиентным покрытием. Были рассмотрены четыре типа покрытий, из которых покрытия с внутренней мягкой прослойкой (с внутренним звуковым каналом по терминологии Л. М. Бреховских [2]) демонстрируют эффект локализации максимальной амплитуды колебаний каждой из поверхностных волн только в определенном частотном диапазоне ([1], рис. 11–12). Очевидно, в каждом из этих диапазонов волновая энергия, отдаваемая источником в среду, переносится преимущественно такой модой с максимальной амплитудой колебаний поверхности среды.

Для проверки этого предположения, а также для изучения особенностей распределения возбуждаемых мод по глубине был проведен анализ энергетических потоков, формирующихся в средах с одним или несколькими внутренними каналами. Анализ проводился на основе представлений для осредненного за период колебаний потока энергии, переносимого в поле гармонических колебаний через произвольную горизонтальную поверхность $z = \text{const}$, боковую поверхность цилиндра $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}$ и поверхность нижней полусферы [3].

В качестве примера приводятся результаты, демонстрирующие эстафетную передачу волновой энергии между нормальными модами. Аналогичный эффект доминирующего влияния отдельных мод в определенных частотных диапазонах был ранее обнаружен для бегущих волн, возбуждаемых в упругом слое пьезоактуатором-накладкой, приклеенным к его поверхности [4]. В отличие от

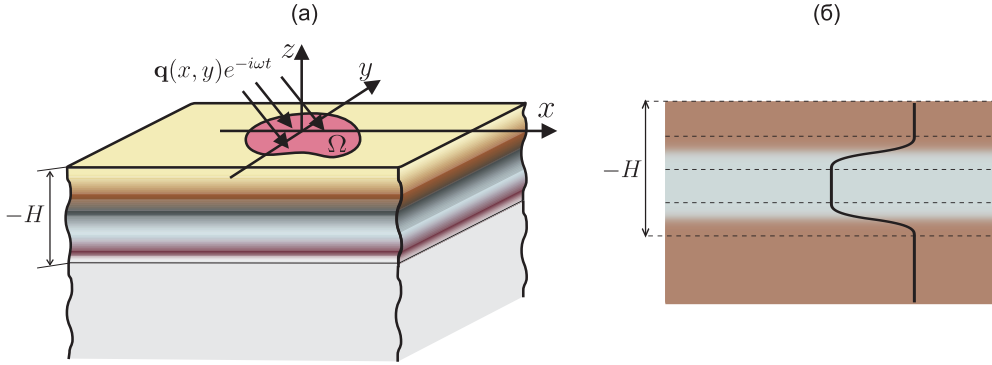


Рисунок 1 – Функционально-градиентное упругое полупространство с поверхностной нагрузкой

указанных выше работ в настоящей статье рассматривается также и распределение энергии, переносимой отдельными модами, по глубине с целью выявления зон ее концентрации во внутренних каналах.

2. Постановка и решение задачи.

Рассматривается упругое изотропное полупространство, занимающее в декартовой системе координат объем $-\infty < x, y < \infty$, $-\infty < z \leq 0$. Модули упругости λ, μ и плотность ρ с глубиной могут меняться в промежутке $-H \leq z \leq 0$ либо непрерывно, моделируя тем самым функционально-градиентное покрытие толщины H , либо скачкообразно, если имеет место классическая многослойная среда (рис. 1). Установившиеся гармонические колебания среды $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ с круговой частотой ω возбуждаются нагрузкой $\mathbf{q}e^{-i\omega t}$, приложенной к свободной от напряжений поверхности $z = 0$ в ограниченной области Ω . Комплексные амплитуды перемещений $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ и тензор напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

В случае кусочно-непрерывной зависимости λ, μ и ρ от z уравнения (1) определены в открытых областях (слоях) $S_m: z_{m+1} < z < z_m$, ($m = 1, 2, \dots, M$, $z_1 = 0, z_{M+1} = -\infty$), а на их границах задаются дополнительные условия непрерывности перемещений $\mathbf{u}$ и напряжений $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$. На бесконечности выполняются условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения.

В случае осесимметричной нагрузки поле смещений $\mathbf{u}$ представимо в виде однократного контурного интеграла Фурье–Бесселя:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(-i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial y}, \alpha, z) J_0(\alpha r) \mathbf{Q}(\alpha) \alpha d\alpha, \quad (2)$$

в котором $K(\alpha_1, \alpha_2, \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, z) = \mathcal{F}_{x,y}[k(x, y, z)]$, и $\mathbf{Q} = \mathcal{F}_{x,y}[\mathbf{q}]$ — символы Фурье матрицы Грина и вектора нагрузки. Здесь и далее используются обозначения работ [1, 3–5]. Вклад вычетов в вещественных полюсах ζ_n элементов матрицы K дают асимптотику бегущих волн, возбуждаемых заданной нагрузкой $\mathbf{q}$.

Осредненный за период поток энергии гармонических колебаний $E_z(z)$ через произвольную горизонтальную плоскость $z = \text{const}$ определяется интегралом [3]

$$E_z = \frac{\omega}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) dx dy = \frac{\omega}{2} \frac{1}{4\pi^2} \text{Im} \int_0^{\infty} G(\alpha, z) \alpha d\alpha, \quad (3)$$

в котором функция G выражается через элементы матрицы K . Она комплекснозначна на отрезке $0 \leq \alpha \leq \kappa_s$, где κ_s — волновое число объемных S волн в подстилающем однородном полупространстве, а вещественные полюса ζ_n расположены вне зоны комплекснозначности ($\zeta_n > \kappa_s$). Тем самым вклад в мнимую часть интеграла (4) (т.е. в величину E_z) дает только отрезок комплекснозначности и вычеты в полюсах ζ_n :

$$\begin{aligned} E_z(z) &= E_V(z) + E_R(z) \\ E_V(z) &= \frac{\omega}{2} \frac{1}{4\pi^2} \text{Im} \int_0^{\kappa_s} G(\alpha, z) \alpha d\alpha \\ E_R(z) &= \sum_n E_n(z), \quad E_n(z) = \frac{\omega}{2} \frac{1}{4\pi} \text{res } G(\alpha, z) \alpha|_{\alpha=\zeta_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Корректное вычисление вычетов в полюсах ζ_n , которые для функции G становятся двукратными, осуществляется на основе принципа предельного поглощения. Подробно техника их вычисления описана в работе [3]. Там же было показано, что величина $E_V(z)$ определяет количество энергии, переносимой через плоскость $z = \text{const}$ объемными волнами; причем она фактически не зависит от z ($E_V(z) = E_V(0)$). Каждое из слагаемых E_n , составляющих $E_R(z)$, дает количество энергии, переносимой через эту плоскость бегущей волной, соответствующей полюсу ζ_n . Бегущие волны переносят энергию от источника на бесконечность в горизонтальном направлении, поэтому величина $E_R(z)$ обычно убывает монотонно с глубиной z за счет такого оттока энергии. Однако в градиентном или многослойном полупространстве возможно нарушение монотонности убывания $E_R(z)$, которое объясняется возникновением обратных потоков энергии, идущих из бесконечности на определенной глубине и подпитывающих тем самым поток энергии через горизонтальную плоскость $z = \text{const}$ [5].

3. Распределение энергии поверхностного источника в упругом полупространстве с внутренним каналом.

В приведенных ниже расчетах рассматривается трехслойное покрытие оксид алюминия — алюминий — оксид алюминия (рис. 1б); упругие колебания генерируются точечной вертикальной нагрузкой. Свойства рассматриваемых материалов, а также анализ влияния непрерывного изменения упругих свойств покрытия на дисперсионные кривые приведены в [1] (покрытие IV). На рисунке 2а приводятся дисперсионные кривые (медленности бегущих волн $s_n = \zeta_n/\omega$ в зависимости от безразмерной круговой частоты $\tilde{\omega} = 2\pi f H/v_s = H\kappa_s$, f — размерная частота) для кусочно-однородного полупространства с внутренним каналом толщины $h = H/3$. В дальнейшем волна над $\tilde{\omega}$ опущена. В рассматриваемом диапазоне возбуждается до 10 бегущих волн. Количество энергии, переносимой каждой из них, показано

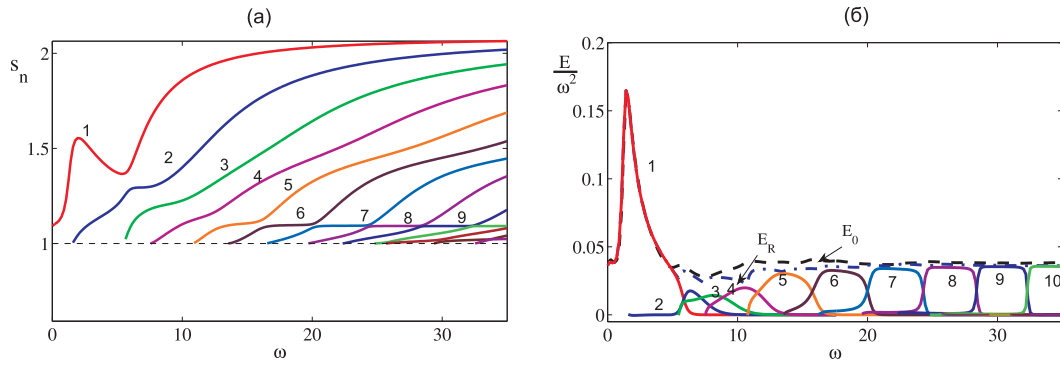


Рисунок 2 – Дисперсионные кривые (медленности) s_n бегущих волн (а) и нормированная волновая энергия E/ω^2 (б) в частотном диапазоне $0 \leq \omega \leq 35$; суммарная энергия источника $E_0 = E_z(0)$ – пунктир, доля релеевских волн $E_R = E_R(0)$ – штрих-пунктир и энергия каждой моды — сплошные линии

на рис. 2б сплошными линиями с соответствующими номерами. Данные графики наглядно демонстрируют эстафетную передачу энергии от одной моды к другой, которая принимает регулярный характер при $\omega > 10$. На более низких частотах также наблюдается доминирование только одной моды на тех частотах, где ее энергия достигает максимума.

На рисунке 3 приводятся диаграммы распределения энергии бегущих волн по частоте и глубине. Интенсивность цвета определяет уровень величины $\eta_n(\omega, z) =$

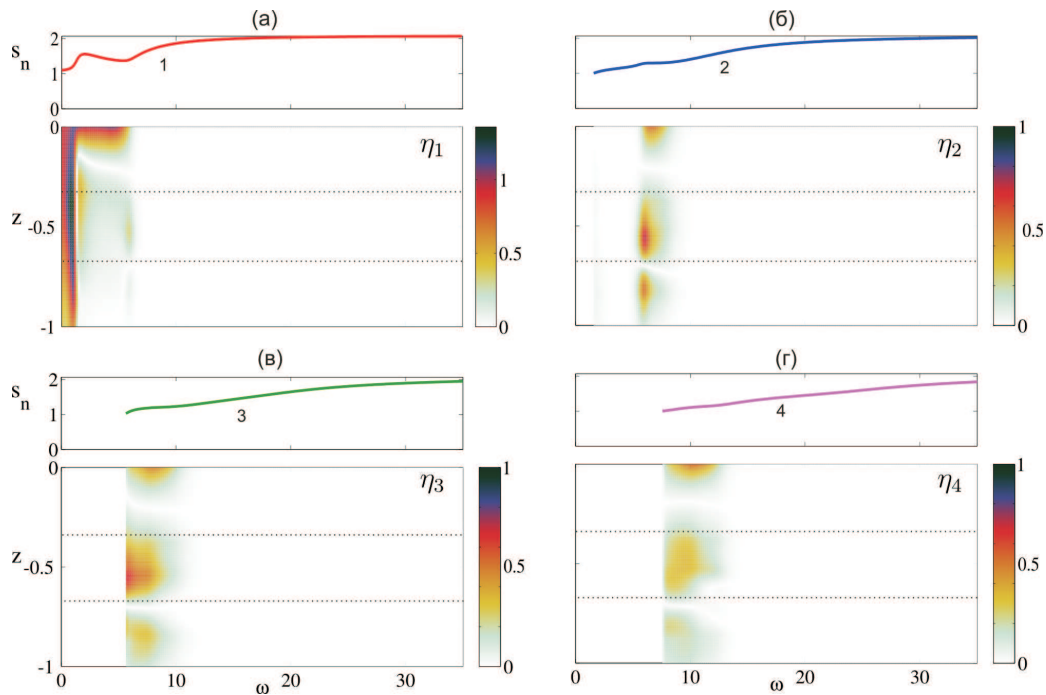


Рисунок 3 – Частотные зависимости медленностей отдельных мод (сверху) и количество энергии, переносимой данными модами через плоскость $z = \text{const}$, в зависимости от частоты ω и глубины z (снизу)

$E_n(\omega, z)/E_z(\omega, 0)$, характеризующей долю энергии источника переносимую модой с номером n через плоскость $z = \text{const}$. Здесь также хорошо видна локализация энергии каждой моды в определенном частотном диапазоне. Увеличение мощности потока энергии первых трех мод в пределе мягкой прослойки (диапазон глубины $-2H/3 < z < -H/3$, рис. 3а-в; $H = 1$) указывает на наличие обратных потоков энергии, идущих из бесконечности вплоть до ближней зоны источника, в которой они разворачиваются встречным потоком энергии источника и снова уходят на бесконечность. Фактически это вихревая циркуляция энергии через бесконечность, не нарушающая энергетического баланса в целом: суммарная энергия, уходящая на бесконечность, равна энергии источника E_0 . Однако плотность как прямых, так и обратных потоков энергии в канале и его окрестности, как и количество энергии, запасенное в вихревых зонах, может существенно превышать соответствующие характеристики энергетических потоков в приповерхностной зоне, что указывает на аккумуляцию волновой энергии в канале.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 13-01-96520).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акустический журнал, 2012, том 58, № 3, С. 370–385.
- [2] Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах, М.: Наука, 1973, 2-ое изд., 343 с.
- [3] Глушков Е. В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // Прикл. математика и механика, 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 94–100.
- [4] Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Зеemann В., Кваша О. В. Возбуждение упругих волн в слое пьезокерамическими накладками // Акустический журнал, 2006. Т. 52. Вып. 4. С. 470–479.
- [5] Babeshko V. A., Glushkov E. V., Glushkova N. V. Energy vortices and backward fluxes in elastic waveguides // Wave Motion, 1992. Т. 16. Р. 183–192.

Glushkova N. V., Fomenko S. I. *The effect of wave energy successive forwarding among the guided waves in an elastic half-space with internal channel.* Energy characteristics of traveling waves excited by a harmonic surface load in an elastic layered or functionally graded half-space are considered. The distribution of source energy among the excited normal modes, as well as depending on the depth and frequency, are analyzed. The consideration is focused on the case of media with a soft inner channel or several channels. Guided wave propagation in such media is featured by dominant energy carriage by only one of the excited guided waves. Specifically, this is the mode of highest number in the frequency band under consideration. The analysis of energy depth distribution points out on a possibility of its concentration in inner channels in the form of energy vortices and backward energy fluxes coming from infinity.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН НЕПРОКЛЕЙКИ И КОНЦЕНТРАЦИИ МИКРОДЕФЕКТОВ НА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ИНТЕРФЕЙСАХ

Голуб М. В., Дорошенко О. В.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар

Динамическое поведение трещиноватой среды или зоны, содержащей множественные внутренние дефекты, можно описать введением распределения микротрещин или введением пружинных граничных условий. Такие граничные условия позволяют описывать более широкий класс отслоений, нежели условия отсутствия напряжений на берегах разреза. В настоящей работе производится обобщение пружинных граничных условий в двумерной постановке на случай трещин различных размеров. Приводятся и обсуждаются формулы для пружинной жёсткости, выведенные путем учёта высших степеней разложения для коэффициента прохождения.

Введение

Появление новых композитных материалов делает актуальными задачи обнаружения и идентификации внутренних неоднородностей, в частности, с помощью ультразвукового неразрушающего контроля. Динамическое поведение поврежденной зоны описывают путем введения распределения микротрещин (полостей) [1, 2] или пятен контакта [3]. Получили также развитие и другие подходы к моделированию поврежденных материалов: замена поврежденной зоны тонким вязкоупругим слоем, в том числе в комбинации с рассматриваемым в настоящей работе введением пружинных граничных условий (ПГУ) [3].

Использование ПГУ видится весьма эффективным, что подтверждается экспериментальными работами, например, [4]. ПГУ являются более общими граничными условиями нежели условия свободных от напряжений берегов трещины и позволяют описывать более широкий класс отслоений. Кроме того, при решении обратных задач об идентификации дефектов ПГУ могут дать знание о степени поврежденности. В трехмерном случае ПГУ в точке $\mathbf{x}$ поверхности S с нормалью $\mathbf{n}$ можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \kappa (\mathbf{u}_{\mathbf{n}-}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\mathbf{n}+}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S,$$

где κ — матрица жёсткостей 3×3 , $\mathbf{n}_{\pm}$ — внешняя и внутренняя нормали к поверхности в точке $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}$ — нормальные и касательные компоненты тензора напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ в $\mathbf{x}$, а $\mathbf{u}$ — вектор перемещений. В [5, 6] были получены соотношения для жёсткостей в ПГУ для антиплоского и плоского случаев в предположении, что все трещины имеют одинаковую ширину $2l$. Для интерфейса с поврежденностью C между материалами A и B , где дефекты неограничены вдоль оси x_2 и нормаль $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ совпадает с осью x_3 , в антиплоском случае имеется одна ненулевая компонента

$$\kappa_{22} = \frac{4}{\pi Cl} \cdot \frac{\mu^A \mu^B}{\mu^A + \mu^B} \quad (1)$$

и две ненулевые компоненты κ_{11} и κ_{33} в плоском случае, которые имеют вид

$$\kappa_{11} = \kappa_{33} = \frac{8}{\pi\beta Cl}, \quad \beta = \frac{\lambda^A + 2\mu^A}{(\lambda^A + \mu^A)\mu^A} + \frac{\lambda^B + 2\mu^B}{(\lambda^B + \mu^B)\mu^B} \quad (2)$$

и выражаются через константы Ляме μ^i и λ^i или плотности ρ^i . В настоящей работе проводится обобщение ПГУ [3, 5, 6] на случай интерфейса с трещинами различных размеров и приводятся уточнённые соотношения для жёсткости.

1. Общая схема решения для одиночной трещины.

Рассмотрим вначале прохождение плоской упругой SH-волны из нижнего полупространства в другое с расположенной на их стыке интерфейсной полосовой трещиной. Схема вывода решения аналогична описанной [6]. Декартова система координат выбрана так, что ось z ортогональна интерфейсу, на котором расположена трещина $|x| < l$, а волна падает под нормальным углом к интерфейсу. При распространении SH-волны в плоскости Oxz вектор перемещений имеет только одну ненулевую компоненту u_y . Гармонические установившиеся с частотой ω колебания в каждом из изотропных полупространств $j = A(z < 0)$ и $j = B(z > 0)$ определяются уравнениями, записанными относительно перемещений u_y^j . Ненулевые компоненты тензора напряжений σ_{yz}^j выражаются через перемещения согласно закону Гука. Полное волновое поле — суперпозиция поля без дефекта $u_y^{j,\text{in}}$ и рассеянного трещиной поля $u_y^{j,\text{sc}}$. Поле без дефекта записывается через амплитудные коэффициенты прохождения и отражения

$$u_y^{\text{in}} = \begin{cases} e^{ik^A z} + R^- e^{-ik^A z}, & z < 0, \\ T^- e^{ik^B z}, & z > 0, \end{cases} \quad R^- = \frac{\mu^A k^A - \mu^B k^B}{\mu^A k^A + \mu^B k^B}, \quad T^- = \frac{2\mu^B k^B}{\mu^A k^A + \mu^B k^B},$$

здесь k^j — волновые число, μ^j — модули сдвига для полупространств.

Рассеянные и падающие поля удовлетворяют уравнению движения, а также граничным условиям на интерфейсе

$$\begin{cases} u^{A,\text{sc}} = u^{B,\text{sc}}, & \sigma_{yz}^{A,\text{sc}} = \sigma_{yz}^{B,\text{sc}}, & |x| > l \\ \sigma_{yz}^{A,\text{sc}} = \sigma_{yz}^{B,\text{sc}} = -\sigma_{yz}^{A,\text{in}}, & & |x| < l. \end{cases} \quad (3)$$

Для построения решения вводится функция раскрытия берегов трещины

$$v_y(x) = u_y^{A,\text{sc}}(x, 0^-) - u_y^{B,\text{sc}}(x, 0^+),$$

применение преобразования Фурье и простейших преобразований к которой дает функциональное уравнение для Фурье-символа напряжений на границе

$$Q(\alpha) = [K^A(\alpha, 0) - K^B(\alpha, 0)]^{-1} \cdot V(\alpha) = L(\alpha)V(\alpha),$$

$$L(\alpha) = \frac{\mu^A \mu^B \gamma^A \gamma^B}{\mu^B \gamma^B + \mu^A \gamma^A}, \quad \gamma^j = \sqrt{\alpha^2 - (k^j)^2}.$$

Подстановка рассеянных трещиной полей в виде интегралов Фурье [7] в граничные условия приводит к уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} L(\alpha)V(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha = -i\mu^A k^A (1 - R^-), \quad |x| < l.$$

Неизвестный скачок смещений раскладывается в ряд по полиномам Чебышёва

$$v_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x/l), \quad \psi_n(x/l) = \frac{\sin(n \arccos s)}{\sin s}, \quad \Psi_k(\alpha l) = \int_{-l}^l \psi_k(x/l) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

которые составляют полную систему функций на интервале $[-1; 1]$ и учитывают поведение у краев. Подстановка разложения в интегральное уравнение с последующим применением метода Бубнова–Галёркина дает бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha) \Psi_n(\alpha l) \Psi_k(\alpha l) d\alpha = -i\mu^A k^A (1 - R^-) \Psi_k(0), \quad k = \overline{1, \infty}$$

Для $v_y(x)$ известна асимптотика [6], которая имеет вид

$$v_y^{\text{as}}(x) = 2iK\sqrt{l^2 - x^2}, \quad K = \frac{(\mu^A + \mu^B)k^B k^B}{\mu^A k^A + \mu^B k^B}.$$

2. Распределение трещин различных размеров.

Следующим шагом рассматривается задача с набором из N интерфейсных трещин различной длины в предположении, что дефекты распределены случайным образом, а взаимодействием между трещинами можно пренебречь. Для определения рассеянного поля используется среднее по ансамблю значение, которое вдали от границ полупространств представляется в виде плоских волн. Затем к полям u_y^{in} и u_y^{sc} применяется теорема Бетти для прямоугольного контура интегрирования S^- , ограниченного линиями $x = \pm x_0$, $z = -z_0$ и $z = 0^-$. Аналогично теорема Бетти применяется для контура S^+ , симметричного к S^- относительно оси $z = 0$. Интегралы вдоль вертикальных отрезков $x = \pm x_0$ в обоих контурах обратились в ноль. После подстановки выражений для полей остаются только интегралы по горизонтальным отрезкам:

$$\left(\int_{z=z_0} - \int_{z=-z_0} \right) (u_y^{\text{in}} \sigma_{yj}^{\text{sc}} - u_y^{\text{sc}} \sigma_{yj}^{\text{in}}) dx - \int_D v_y \sigma_{yz}^{\text{in}} dx = 0$$

Здесь $D = \{\cup |x - x_j| < l_j\}$ — поврежденная часть границы между полупространствами. При этом среднее по ансамблю рассеянное волновое поле представляет собой плоские волны, распространяющиеся от интерфейса в направлении $\pm z$ амплитудами $P^\pm$. После подстановки выражений u_y^{in} и u_y^{sc} уравнение упрощается и принимает вид

$$ik^A \mu^A P^-(2x_0) = 1/2 i\mu^A k^A (1 - R^-) \pi \sum_{j=1}^N l_j^2$$

Для трещин разных размеров на интервале $[-x_0; x_0]$ можно ввести трещиноватость аналогично используемой для модели с одинаковыми по размеру трещинами

$$C_l = \sum_{j=1}^N l_j / x_0$$

и выразить полный коэффициент прохождения

$$\tilde{T}^- = T^- \left(1 - \frac{i}{4} C_l K \pi l^* \right), \quad l^* = \frac{D_l + (M_l)^2}{M_l}$$

через математическое ожидание и дисперсию для набора трещин

$$M_l = \sum_{j=1}^N l_j / N, \quad D_l = \left(\sum_{j=1}^N l_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N l_j \right)^2 \right) \frac{1}{N}.$$

Заключительный этап состоит в выводе зависимости между жесткостью в пружинных граничных условиях и параметрами поврежденного интерфейса. С этой целью вычисляется коэффициент прохождения плоской волны через два полупространства, сцепление между которыми задается пружинными граничными условиями с неизвестной жесткостью:

$$\hat{T}^- = \frac{2\mu^A k^A \kappa}{i\mu^A k^A \mu^B k^B + \kappa(\mu^A k^A + \mu^B k^B)}.$$

3. Поправка для пружинной жесткости.

Жесткость определяется из предположения о равенстве коэффициентов прохождения для распределенной пружины $\hat{T}^-$ и распределения трещин на интерфейсе. При переходе к пределу $\kappa_y \rightarrow \infty$ волновые поля можно считать непрерывными и коэффициент $\hat{T}^-$ совпадает с $\tilde{T}^-$, а при $\kappa_y \rightarrow 0$ имеет место полное отражение. Предварительно необходимо преобразовать коэффициенты к общему виду, что осуществляется разложением в ряд по степеням κ_y коэффициента прохождения

$$\hat{T}^- = T^- \left(1 - \frac{i\mu^A k^A \mu^B k^B}{\mu^A k^A + \mu^B k^B} \cdot \kappa_{22}^{-1} - \left(\frac{\mu^A k^A \mu^B k^B}{\mu^A k^A + \mu^B k^B} \right)^2 \cdot \kappa_{22}^{-2} \right) + o(\kappa_{22}^{-3})$$

Приравнявая коэффициенты прохождения получим жесткость пружины

$$\kappa_{22} = \frac{2(1 + d_2)}{\pi C_l l^*} \cdot \frac{\mu^A \mu^B}{\mu^A + \mu^B}, \quad d_2 = \sqrt{1 + \pi K C_l l^*}.$$

Вектор смещений в плоском случае имеет две ненулевые компоненты $\mathbf{u}^j = (u_x^j, 0, u_z^j)$ и удовлетворяет уравнениям Ламе. Здесь рассматривается два типа волн: плоская P- ($s = 3$) или SV-волна ($s = 1$). Далее, аналогично схеме, примененной к антиплоской проблеме, выполняется переход к решению задачи о множествах интерфейсных трещинах. В результате полный коэффициент прохождения через интерфейс с распределением трещин различной величины

$$\tilde{T}_s = T_s^- \left(1 - i \frac{1}{8} \pi \beta C_l H_s x_0 \right),$$

$$H_s = \frac{c_s^A c_s^B k_s^A k_s^B}{c_s^A k_s^A + c_s^B k_s^B}, \quad k_s^j = \omega \sqrt{\rho^j / c_s^j}, \quad c_3^j = \lambda^j + 2\mu^j, \quad c_1^j = \mu^j.$$

Учитывая равенство $\hat{T}^-$ и $\tilde{T}^-$, а также условие малости дефектов $\omega l^* \ll 1$, получаем одинаковые константы для ПГУ вне зависимости от типа волн

$$\kappa_{11} = \kappa_{33} = \frac{4(1 + d_1)}{\pi\beta C_l l^*}, \quad d_1 = \sqrt{1 + i \frac{\pi\beta C_l l^*}{2}}.$$

Можно видеть, что в частном случае одинаковых дефектов формулы совпадают с полученными в [5, 6], но являются более общими и точными. Данные соотношения могут служить для решения обратных задач о степени отслоения слоистых композитов, если известны законы распределения характерных усталостных дефектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-01-33011-мол_вед_а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В. А. К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел // Доклады академии наук. 1989. Vol. 304. Issue 2. P. 318–321.
- [2] Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. Southampton: Computational Mechanics Publ., 1998.
- [3] Baik J. M., Thompson R. B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // J. Nondestr. Eval. 1984. V. 4. P. 177–196.
- [4] Ueda S. et. al On the stiffness of spring model for closed crack // International Journal of Engineering Science. 2006. V. 2006. P. 874–888.
- [5] Golub M. V., Boström A. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // Wave Motion. 2011. V. 48(2). P. 105–115.
- [6] Boström A., Golub M. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions. Quart. J. Mech. Appl. Math. 2009. V. 62. P. 39–52.
- [7] Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

Golub M. V., Doroshenko O. V. *Modeling of imperfect plane interfaces and concentration of micro-defects.* Dynamics of cracked media or a domain with multiple defects can be described using distribution of microcracks or spring boundary conditions. Spring model is quite efficient, that is approved theoretically and experimentally. Besides, spring model is more general boundary conditions and it allows to describe wider class of delamination. The present work generalize spring model for in-plane case via considering cracks of different sizes with a given distribution law. The expression for spring stiffness is specified via taking into account higher coefficients in the expansion of transmission coefficient.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАЗНЫХ ТИПОВ СЛОИСТЫХ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН И РАССЕЯНИИ НА ОТСЛОЕНИЯХ

Голуб М. В., Фоменко С. И., Александров А. А.

Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар

Рассматривается динамическое поведение слоистого фононного кристалла при прохождении модулированных плоских волн, падающих на кристалл под произвольным углом к интерфейсу. Композит состоит из повторяющихся ячеек с прослойками из функционально-градиентных материалов. Ячейки представляют из себя многослойный пакет, где слои могут быть упругими, функционально-градиентными и пьезоэлектрическими. С помощью преобразования Лапласа проблема может быть сведена к нахождению гармонических колебаний на частотах, которые содержатся в спектре входного импульса. Анализируется структура запрещённых зон и влияние одиночных дефектов на волновую картину в кристалле.

Введение

Концепция фононных кристаллов появилась в 1990-х годах, являясь во-многом продолжением работ по фотонным кристаллам [1]. Фононные кристаллы состоят из периодических включений в матрицу или слои и являются композитными материалами. Фононные кристаллы обладают различными частотными характеристиками, например, запрещёнными частотными зонами. В запрещённой зоне, распространение волн фактически невозможно. Это явление может быть использованным в широком спектре технологий и в различных масштабах. Приложения включают в себя фокусировку, минимизацию вибрации, звуковую коллимацию, акустическую маскировку, опто-механические волновые преобразования в фотонных устройствах, снижение теплопроводности в полупроводниках и др. [2, 3]. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [4, 5] и посвящена исследованию распространения плоских P- и SV-волн в неповрежденных и поврежденных периодических композитах.

Рассмотрим двумерные плоские гармонические продольные (P) и поперечные (SV) волны, распространяющиеся в многослойной упругой структуре, которая состоит из двух полупространств, между которыми находится квазипериодическая структура слоев, состоящая из N периодически повторяющихся ячеек составленных из упругих однородных или функционально-градиентных слоёв. В некоторой ячейке с индексом M на расстоянии d от интерфейса $z = a_{M-1}$ расположена трещина в виде полосы длиной $2l$. Вводится декартова система координат $\mathbf{x} = (x, z)$, центр которой совпадает с центром трещины. Граница трещины и ось координат x направлены параллельно интерфейсу структуры. Слой j , занимающей объем $|x| \leq \infty, a_{j-1} \leq z \leq a_j$ толщины $d_j = a_j - a_{j-1}$ характеризуется константами Ламе λ_j, μ_j и плотностью ρ_j . Индексы $j = 0$ и $j = N + 1$ соответствуют нижнему и верхнему полупространству.

Непрерывность напряжений сохраняется во всём композите, перемещения тоже непрерывны по всему пространству, за исключением трещины $\{|x| < l, z = 0\}$.

Суммарное волновое поле в слоистом композите является суперпозицией волнового поля падающей волны $\mathbf{u}^{\text{in}}$ и рассеянного волнового поля $\mathbf{u}^{\text{sc}}$: $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{in}} + \mathbf{u}^{\text{sc}}$. Итоговое поле перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{in}} + \mathbf{u}^{\text{sc}}$ непрерывно в слоистой структуре композита, кроме трещины, где выполняются следующие граничные условия

$$\boldsymbol{\tau}(x, z) = \{\tau_{xz}(x, z), \tau_{zz}(x, z)\} = 0, \quad (x, z) \in \Omega = \{|x| < l, z = 0\}. \quad (1)$$

Поэтому, рассеянное поле напряжений непрерывно на интерфейсах $z = a_i$, но противоположно по знаку к падающему напряжению на трещине, то есть $\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}} = -\boldsymbol{\tau}^{\text{in}}$.

2. Волновое поле в неповрежденном фононном кристалле.

Падающее волновое поле в нижнем полупространстве $\mathbf{u}^{\text{in}}$ без учёта трещины состоит из набегающей и отражённой волн. Волновое поле $\mathbf{u}^{\text{in}}$ в верхнем полупространстве также является суммой плоских Р- и SV-волн. Перемещения падающей гармонической по времени плоской волны с волновым числом k_0 и углом падения θ к поверхности слоёв может быть выражено как

$$\mathbf{u}_j^{\text{in}}(x, z; t) = \tilde{\mathbf{u}}_j^{\text{in}}(z) \exp(ik_0 x \sin \theta - i\omega t). \quad (2)$$

В дальнейшем множитель $\exp(ik_0 x \sin \theta - i\omega t)$, где это возможно, будет опускаться. Таким образом, поле перемещений вне трещины $\mathbf{u}^{\text{in}}$ может быть представлено в терминах потенциалов поперечных и продольных волн a_{1s} и a_{2s} как

$$a_{rs} = \begin{cases} I_{rs} e^{ik_s^0 z \cos \theta} + R_{rs} e^{-ik_r^0 z \cos \theta_{0rs}}, & z < 0, \\ T_{rs} e^{-ik_r^{N+1} z \cos \theta_{(N+1)rs}}, & z > N \cdot H, \end{cases} \quad s = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь индекс $s = 1, 2$ определяет тип набегающей волны с волновым числом $k_0 = k_s$ и углом падения θ , а $r = 1, 2$ и указывает на тип отражённых волн. Коэффициенты I_{rs} определяются в терминах символа Кронекера $I_{rs} = \delta_{rs}$. Углы распространения θ_{jrs} прошедших и отражённых волн удовлетворяют закону Снеллиуса.

Коэффициенты прохождения и отражения T_{rs} и R_{rs} плоских волн вычисляются из условий непрерывности напряжений и перемещений на интерфейсах слоистых структур композитов с использованием метода Т-матриц [4]. Матрица переноса (Т-матрица) рассматриваемой периодической структуры находится как степень Т-матрицы одной ячейки кристалла T_c , т. е. $T = T_c^N = G^{-1} \cdot \Lambda^N \cdot G$, где $\Lambda = \text{diag}\{1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2\}$ — диагональная матрица Жордана, G — матрица перехода к базису Жордана, причем собственные числа упорядочены в соответствии с неравенством $|\lambda_2| \geq |\lambda_1| \geq 1$. Асимптотика коэффициентов прохождения T_{rs} при неограниченном увеличении числа ячеек ($N \rightarrow \infty$) имеет вид:

$$\{T_{r1}, T_{r2}\} \sim (\mathbf{m}_{r2} \lambda_2^{-N} + \mathbf{m}_{r1} \lambda_1^{-N}) / (\Delta_2 + \Delta_1 \lambda_1^{-2N}),$$

где $\mathbf{m}_{r1}$, $\mathbf{m}_{r2}$, Δ_1 , Δ_2 полуаналитически выражаются через элементы матрицы перехода G , а также свойства внешней среды. Анализ полученной асимптотики позволяет классифицировать частотные диапазоны для фононных кристаллов и свести результаты в таблицу 1. В четвертом столбце таблицы приводится асимптотика энергетического коэффициента прохождения κ^+ через периодическую структуру. Первые две строки таблицы соответствуют классическим стоп- или запрещённым зонам (СЗ-I, СЗ-II), в которых падающая на кристалл волна полностью

отражается от него. Стоп-зона II (СЗ-II) имеет место только для случая вертикального угла падения волны ($\theta = 0$). Четвертая строка таблицы соответствует случаю прохождения волны через кристалл (разрешённая зона, РЗ). Промежуточными зонами, возникающими, как правило, из СЗ-II при изменении угла падения, являются разрешённые зоны малого прохождения (РЗМП), условия на которые приводятся в третьей строке таблицы 1 ($\varepsilon < 10^{-1}$). В этих зонах имеет место незначительное прохождение волновой энергии через кристалл даже для бесконечно большого набора ячеек, однако, с инженерной точки зрения они подобны запрещённым зонам, т. к. энергетический коэффициент прохождения $\kappa^+ < 10^{-2}$.

Таблица 1 – Классификация частотных диапазонов возбуждения фононных кристаллов

Тип зоны	Собственные значения T_c	Дополнительные условия	Поведение κ^+ при $N \rightarrow \infty$
Стоп-зона — I	$ \lambda_2 > 1$ & $ \lambda_1 > 1$	$\mathbf{m}_2 \neq 0$ & $\Delta_{12} \neq 0$	$\kappa^+ = O(\lambda_1 ^{-2N})$
		$\mathbf{m}_2 = 0$ & $\Delta_{12} \neq 0$	$\kappa^+ = O(\lambda_2 ^{-2N})$
Стоп-зона — II	$ \lambda_2 > 1$ & $ \lambda_1 = 1$	$\mathbf{m}_2 = 0$	$\kappa^+ = O(\lambda_2 ^{-2N})$
Разрешённые зоны малого прохождения	$ \lambda_2 > 1$ & $ \lambda_1 = 1$	$0 < w < \varepsilon < 1$ $w = \mathbf{m}_2 / (\Delta_{12} + \Delta_{23}\lambda_1^{-2N}) $	$\kappa^+ = O(w ^2)$
Разрешённые зоны	$ \lambda_2 > 1$ & $ \lambda_1 = 1$	$w > \varepsilon$	$\kappa^+ = O(1)$
	или $ \lambda_2 = 1$		

3. Волновое поле в фононном кристалле с одиночной трещиной.

Рассеянное поле перемещений $\mathbf{u}^{\text{sc}}(x, z)$ в структуре композита двух многослойных полупространств, между которыми расположена трещина, может быть записано для каждого полупространства в виде интегрального представления аналогично антиплоскому случаю [5]. На поверхности обоих полупространств приложена неизвестная нагрузка $\mathbf{p}(x)$, тогда имеет место следующее интегральное представление для рассеянного поля [6]

$$\mathbf{u}^{\pm}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^{\pm}(\alpha, z) \mathbf{P}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{P}(\alpha)$ — Фурье-образ неизвестного вектора напряжений $\mathbf{p}(x)$, и α — параметр интегрального преобразования. $K^{\pm}(\alpha, z)$ — Фурье-образ матрицы Грина по переменной x [6]. Столбцы матрицы $K^{\pm}(\alpha, z)$ — Фурье-образы фундаментальных решений для нормальной и касательной нагрузки соответствующих полупространств, находятся описанным выше методом Т-матриц, а также разработанными для многослойных упругих полупространств алгоритмами, описанными в [6].

Неизвестные напряжения $\mathbf{p}(x)$ и скачок смещений берегов трещины $\mathbf{v}(x) = \mathbf{u}^-(x, 0) - \mathbf{u}^+(x, 0)$ связаны, в преобразованиях Фурье соотношение имеет вид:

$$\mathbf{P}(\alpha) = [K^-(\alpha, 0) - K^+(\alpha, 0)]^{-1} \mathbf{V}(\alpha) = L(\alpha) \mathbf{V}(\alpha),$$

что приводит к интегральному уравнению с неизвестным скачком $\mathbf{v}$ на трещине. Для решения уравнения $\mathbf{v}(x)$ раскладывается в ряд по полиномам Чебышёва второго рода с весом $(\phi_n(x))$. Для решения интегральных уравнений используется метод Галёркина: подстановка представления скачка на трещине в уравнения и затем проектирование на пространство полиномов Чебышёва $\phi_n(x)$. В итоге приходим к следующей дискретизированной форме интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n'=1}^{\infty} \mathbf{c}_{n'} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha) \Phi_n(\alpha) \Phi_{n'}(\alpha) d\alpha = \mathbf{p}_n(x) = -\tilde{\tau}^{\text{in}}(0) \Phi_n(lk_0 \sin \theta). \quad (5)$$

Здесь, $\Phi_n(\alpha) = J_{n+1}(\alpha l)/\alpha$ — Фурье-образ $\phi_n(x)$, $\mathbf{c}_n$ — коэффициенты разложения $\mathbf{v}(x)$, а интегралы в левой части (5) получаются путем интегрирования по контуру вдоль вещественной оси α , обходящему полюса ядра интегрального уравнения $L(\alpha)$. Система алгебраических уравнений (5) решается методом редукции.

4. Численные примеры и анализ.

В качестве демонстрации влияния геометрии фононного кристалла на запрещённые зоны рассматриваются влияние отношения $K = h_A/h_B$ между толщинами однородных слоев A и B . Внешнее пространство, окружающее кристалл, имеет свойства материала A , а качестве материалов используется оксид алюминия (A) и алюминий (B), значения параметров приводятся в [4]. На рисунке 1 показаны зависимости запрещённых и разрешённых зон от K в логарифмическом масштабе для угла падения $\theta = 0^\circ$ (а) и $\theta = 20^\circ$ (b). Местоположение, форма и ширина запрещённых зон сильно изменяются внутри диапазона $10^{-1} < K < 10$. Плотность различных зон растет с увеличением частоты колебаний, которые при увеличении концентрации одного из материалов становятся более узкими. При $K \rightarrow 0$ или $K \rightarrow \infty$ коэффициент локализации в зонах стремится к нулю, так как среда становится однородной. С увеличением концентрации жёсткого материала (A) запрещённые зоны смещаются в более высокие частотные диапазоны. Стоит

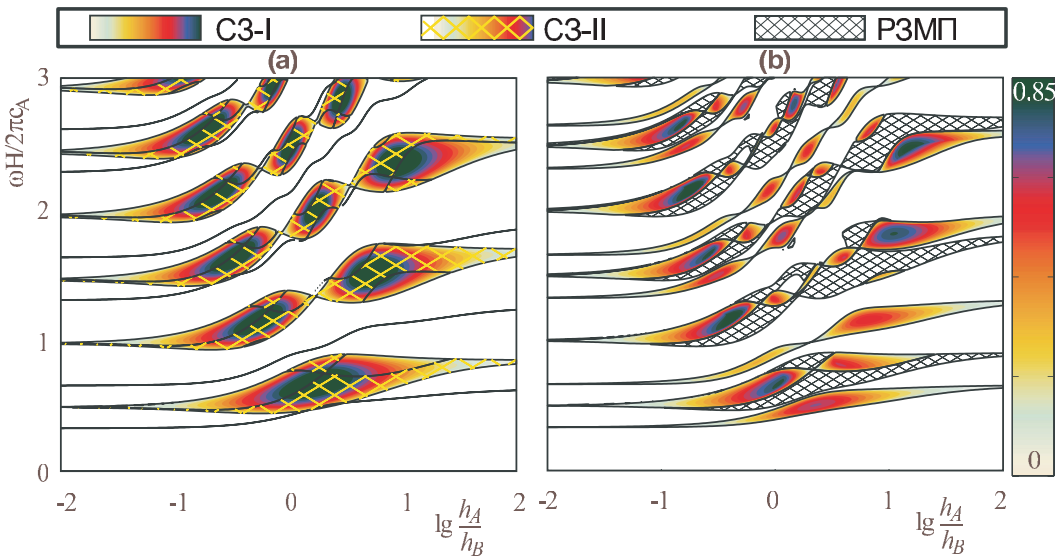


Рисунок 1 – Влияние отношения между толщинами однородных слоев в ячейке кристалла на запрещённые зоны в фононном кристалле без дефектов для $\theta = 0^\circ$

отметить, что для всех приведенных углов падения при достаточно большой концентрации жёсткого материала A ($K > 10$) запрещённые зоны являются более широкими, чем при большей концентрации мягкого материала ($K < 10^{-1}$). Присутствие мягкого материала B даже в малых концентрациях ($h_A = 100h_B$) приводит к появлению запрещённых зон в фононном кристалле. Кроме того, численные расчёты показывают, что наличие одиночных дефектов не влияет на запрещённые зоны, хотя при этом существенно изменяет поток волновой энергии в окрестности трещины, особенно в резонансных ситуациях.

Работа выполнена в рамках проекта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (14.В37.21.0387) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12–01–31001).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Kushwaha M. S., Halevi P., Dobrzynski L., Djafari-Rouhani B.* Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites // *Physics Review Letters*. 1993. Vol. 71. Pp. 2022–2025.
- [2] *Olsson R., El-Kady I.* Microfabricated phononic crystal devices and applications // *Measurement Science and Technology*. 2009. Vol. 20. 012002.
- [3] *Bilal O., Hussein M.* Ultrawide phononic band gap for combined in-plane and out-of-plane waves // *Physical Review E, American Physical Society*. 2011. Vol. 84. 065701.
- [4] *Golub M. V., Fomenko S. I., Bui T. Q., Zhang Ch., Wang Y.-S.* Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. Pp. 344–354.
- [5] *Golub M. V., Zhang Ch., Wang Y.-S.* SH-wave propagation and scattering in periodically layered composites with a damaged layer // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Pp. 3141–3154.
- [6] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

Golub M. V., Fomenko S. I., Aleksandrov A. A. *Simulation of wave propagation and scattering on defects in various layered phononic crystals.* Dynamic behaviour of a layered phononic crystal caused by plane modulated wave incoming on the structure with arbitrary angle to the interfaces is analyzed. Composite is a periodic set of unit-cells composed of functionally-graded, elastic and piezoelectric layers. Laplace transform is applied in order to reduce the problem to construction of harmonic solutions for the frequencies in the spectrum of input impulse function. The band-gap structure and influence of single cracks on wave pattern are investigated.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ ПРИ ФРЕТТИНГЕ

Горячева И. Г.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Предложен численно-аналитический метод исследования изменения напряженного состояния и формы изнашиваемых поверхностей при фреттинге в условиях полного или частичного проскальзывания поверхностей в области контактного взаимодействия. Частичное проскальзывание возникает в условиях вибраций малой амплитуды и характеризуется наличием зон сцепления и проскальзывания в области контактного взаимодействия. Такой режим трения реализуется в том случае, если тангенциальная сила, приложенная к взаимодействующим телам, по модулю не превышает предельной силы трения. При осциллирующей тангенциальной силе повторяющееся проскальзывание имеет место в зонах скольжения, следствием которого является износ взаимодействующих поверхностей (явление фреттинга). Формоизменение поверхности в результате ее изнашивания приводит к перераспределению контактных напряжений, что, в свою очередь, влияет на скорость ее износа.

Метод базируется на введении двух масштабов времени: времени одного цикла изменения тангенциальной нагрузки и времени, которое соответствует заданному числу циклов. Для оценки формоизменения поверхности при изнашивании используется закон Арчарда. Эволюция контактных напряжений, размера области контакта и величины зазора рассчитывается с применением пошагового алгоритма. Получены аналитические выражения для расчета асимптотических значений напряжений и формы изношенной поверхности. Рассмотрены случаи полного или неполного удаления частиц износа из зоны трения.

Проведено исследование кинетики изменения напряженного состояния в контакте упругих тел различной конфигурации. Исследован случай наличия тонкого слоя оксидной пленки на поверхности одного из взаимодействующих тел. Анализ полученных решений показал, что распределение давлений претерпевает существенные изменения при фреттинге. Значения давлений возрастают внутри зоны сцепления и убывают в зонах проскальзывания, где имеет место изнашивание поверхностей. При возрастании числа циклов давление на границе зон проскальзывания и сцепления неограниченно возрастает. Решение системы уравнений позволяет также рассчитать эволюцию зазора между поверхностями, а также напряженного состояния в подповерхностных слоях материала, что является существенным для анализа характера разрушения поверхностей при фреттинге.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 11-01-00650 и 12-08-90434).

Goryacheva I. G. *Modelling of change in a form and stress state of bodies under fretting.* The numerically analytical method of investigation of change in stress state and form of surfaces worn out during fretting under conditions of full or partial slip of surfaces in a contact area.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Гукасян Л. С.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

В работе предложен метод реконструкции переменных модулей упругости на основе исследования задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Введение. В настоящее время метод акустического зондирования является одним из наиболее популярных методов, получивших наибольшее развитие на практике. Суть метода заключается в снятии информации о полях перемещений внутри исследуемого объекта путем возбуждения механических колебаний.

На основе данных, полученных методом акустического зондирования, решаются обратные коэффициентные задачи теории упругости, направленные на реконструкцию переменных модулей упругости [1]. При этом математически задача описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания неоднородной изотропной упругой среды в двухмерном случае [2]. Пусть область $S \subset R_2$ ограничена гладкой кривой $l = l_1 \cup l_2$.

$$\begin{cases} (\lambda(u_{1,1}+u_{2,2}))_{,1} + (\mu(u_{1,2}+u_{2,1}))_{,2} + \mu(2u_{1,1})_{,1} + \rho\omega^2 u_1 = 0 \\ (\lambda(u_{1,1}+u_{2,2}))_{,2} + (\mu(u_{2,1}+u_{1,2}))_{,1} + \mu(2u_{2,2})_{,2} + \rho\omega^2 u_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где λ, μ — параметры Ляме, ρ — плотность, ω — частота колебаний. Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_i|_{l_1} &= 0, \\ (\lambda(u_{1,1}+u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1})n_1 + \mu(u_{1,2}+u_{2,1})n_2|_{l_2} &= P_1 \\ \mu(u_{1,2}+u_{2,1})n_1 + (\lambda(u_{1,1}+u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2})n_2|_{l_2} &= P_2 \end{aligned} \quad (2)$$

2. Построение решения на основе разностной трактовки

2.1 Исследование прямой задачи.

Обезразмерив параметры и функции задачи (1)

$$g = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad q = \frac{\lambda}{\mu_0}, \quad \kappa^2 = \frac{\rho_0 \omega^2 a^2}{\mu_0}, \quad a = \text{diam} S, \quad q, g \in C_+^1(S)$$

$$C_+^1(S) = \{f | f \in C^1(S), f \geq f_0 > 0\}$$

получаем

$$\begin{cases} (q(u_{1,1}+u_{2,2}))_{,1} + (g(u_{1,2}+u_{2,1}))_{,2} + (g(2u_{1,1}))_{,1} + \kappa^2 u_1 = 0 \\ (q(u_{1,1}+u_{2,2}))_{,2} + (g(u_{2,1}+u_{1,2}))_{,1} + (g(2u_{2,2}))_{,2} + \kappa^2 u_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим задачу решения дифференциального уравнения (3) с переменными коэффициентами в области $S = [0, b] \times [-c, c]$ со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} u_1|_{x_1=0} &= 0, \quad u_2|_{x_1=0} = 0 \\ q(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2gu_{1,1}|_{x_1=b} &= P_1, \quad g(u_{1,2} + u_{2,1})|_{x_1=b} = P_2 \\ q(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2gu_{1,1}|_{x_2=\pm c} &= 0, \quad g(u_{1,2} + u_{2,1})|_{x_2=\pm c} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Прямая задача состоит в решении системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами (3) относительно неизвестных функций $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, удовлетворяющей краевым условиям (4) при заданном законе изменения $g(x_1, x_2)$, $q(x_1, x_2)$ в некотором диапазоне изменения κ . Задача решалась методом разностных аппроксимаций [3,4].

2.2 Исследование обратной задачи.

Целью обратной задачи является восстановление неизвестной функции $g(x_1, x_2)$, $q(x_1, x_2)$ по известным узловым значениям функций $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, полученным в результате решения прямой задачи методом разностных аппроксимаций.

Отметим что, при соответствующих граничных условиях (если $P_2 \neq 0$) задача (3)–(4) сводится к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами. Основной проблемой на этом пути является преодоление некорректности в задаче вычисления производной от функции, заданной в наборе точек, что характеризует измерения, фиксируемые датчиками внутри области. Обратная задача решается методом разностных аппроксимаций путем послойного продвижения от границы области, где заданы воздействия, к границе, которая заземлена, причем для вычисления производных на каждом шаге строились кусочно-гладкие функции методом сплайн аппроксимаций [5].

Для оценки точности разностного подхода введем в рассмотрение величину, характеризующую относительную погрешность [4]. На рисунке 1 представлены результаты восстановления функций $g(x_1, x_2)$, $q(x_1, x_2)$, где задана касательная нагрузка на границе $x_1 = b$, $b : c = 1 : 2$.

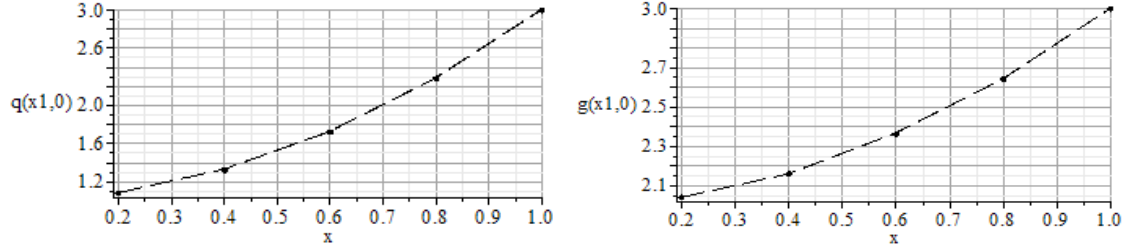
После проведения серии вычислительных экспериментов отметим, что погрешность вычислений не превышает 0,5 % в частотной области до первого резонанса. На рисунке 2 проиллюстрированы результаты решения обратной задачи в случае, когда касательная нагрузка задана на границе $x_2 = c$.

После проведения серии вычислительных экспериментов, отметим, что в данной задаче наблюдается зависимость погрешности от типа нагружения.

Выводы

Предложен способ решения обратной задачи о восстановлении неизвестных функций, характеризующих распределение модулей упругости в плоской прямоугольной области. Решение построено на основе анализа задачи Коши с использованием разностных и сплайн-аппроксимаций. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции переменных модулей упругости, проанализирована точность решения в зависимости от типа нагрузки и частотного диапазона.

а) $q = 1 + 2x_1^2 + x_2^2, g = 2 + x_1^2 + x_2^2, P_1 = 0, P_2 = 1, \kappa = 1; \nu_g = 0.0066\%, \nu_q = 0.016\%$



б) $q = 3 - x_1^2 - x_2^2, g = 4 - 2x_1^2 - x_2^2, P_1 = 0, P_2 = 1, \kappa = 1; \nu_g = 0.04\%, \nu_q = 0.22\%$

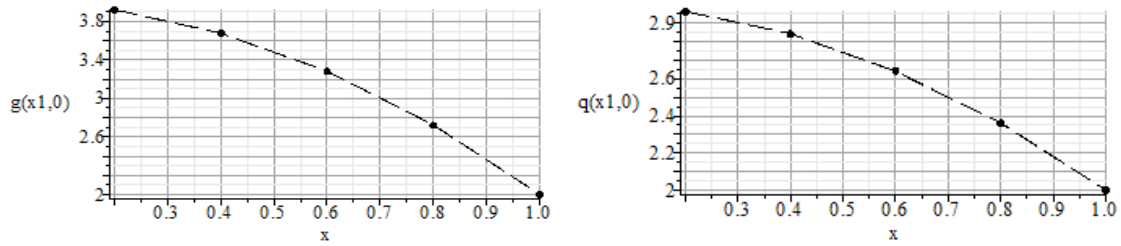
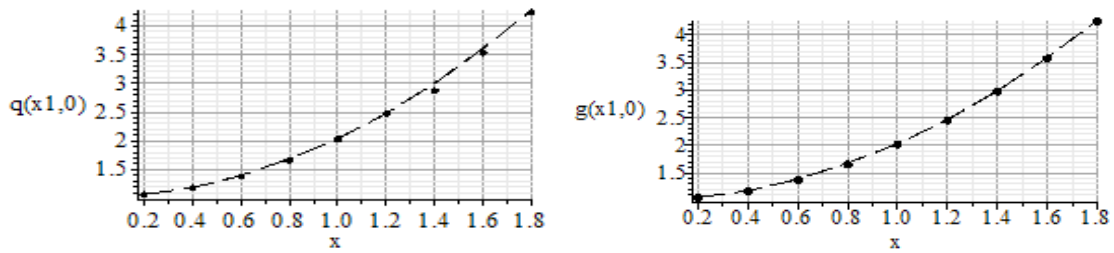


Рисунок 1 – Результаты решения обратной задачи при нагружении на границе $x_1 = b$

а) $b : c = 1 : 2; \nu_g = 0.059\%, \nu_q = 6\%$



б) $b : c = 1 : 1; \nu_g = 0.0028\%, \nu_q = 0.003\%$

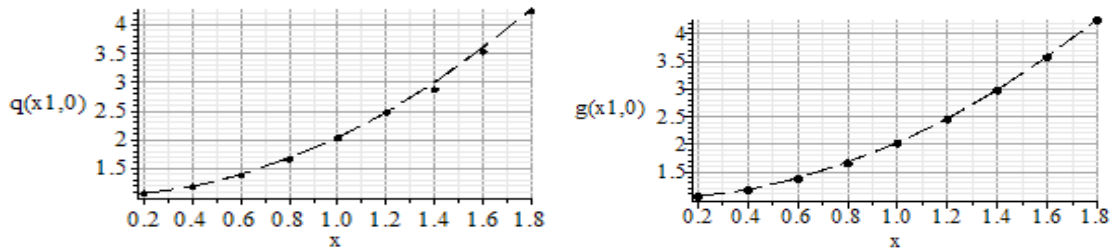


Рисунок 2 – Результаты решения обратной задачи при нагружении на границе $x_2 = c$

Автор благодарит проф. А. О. Ватульяна за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [2] *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
- [3] *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
- [4] *Ватульян А. О., Гукасян Л. С.* О задаче Коши для уравнения в частных производных первого порядка и ее приложениях в теории обратных задач // Вестник ДГТУ №7, 2012. С. 11–20.
- [5] *Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972. 316 с.

Gukasyan L. S. *On the determination of the elastic module of the variables based of acoustic sounding.* In this work we propose a method for reconstructing the variable elastic module based on a study of the Cauchy problem for a system of first order differential equations.

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И РАЗГРУЗКИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Дац Е. П.¹, Мокрин С. Н.², Мурашкин Е. В.^{1,2}

¹Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

²Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Работа посвящена изучению процессов формирования необратимых деформаций металлических изделий вследствие влияния на них высоких градиентов температур. Получено решение задачи о термоупругопластическом деформировании полого цилиндра при нагреве его на одной из граничных поверхностей и процессе последующего охлаждения. Вычислены необходимые и достаточные условия возникновения и развития зон необратимого деформирования, разгрузки и повторного пластического течения.

1. Введение

Различные технологические процессы термомеханической обработки металлоизделий (сварки, изготовления композиционных материалов и др.), связаны с локальным нагревом материала до высокой температуры. Температурные напряжения, возникающие вследствие перепада температур, в значительной степени определяют поведение многих современных конструкций. Потребность в материалах, которые могли бы успешно функционировать при таких высоких уровнях температуры, является одной из наиболее актуальных и трудных задач, определяющих лицо современной техники. Трудность усугубляется тем, что помимо высоких уровней температуры, в рабочих условиях напряжённое состояние может выйти на предел текучести. Следствием этого является процесс зарождающегося пластического течения в окрестности нагрева. Изучению вопросов моделирования необратимого деформирования материалов в условиях неизотермических процессов посвящены, например, работы [1–4]. Проблема определения поля перемещений в теории идеального упругопластического тела впервые была рассмотрена Д. Д. Ивлевым [5]. Была показана возможность вычисления перемещений в статически определимых задачах теории идеальной пластичности и указаны условия, когда данная возможность осуществляется. Указанный способ вычисления перемещений используется и для решения поставленной задачи.

2. Модель термоупругопластической среды

Материал цилиндра считаем упругопластическим, подчиняющимся математической модели типа Прандтля–Рейса [1, 2] в которой деформации e_{ij} полагаются малыми и принимается их аддитивное разложение на упругую e_{ij}^e и пластическую e_{ij}^p составляющие

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

Уровень и распределение упругих деформаций и температуры в шаре задают напряжения в нем, определяемые согласно закону Дюгамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - m\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad \theta = T(x_i, t) - T_0 \quad (2)$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе, $m = 3\alpha K$, K — модуль всестороннего сжатия материала, α — коэффициент линейного температурного расширения материала, $T(x_i, t)$ — текущая температура.

Начало процесса пластического течения в материале свяжем с выполнением условия пластичности в форме Треска – Сен-Венана [2]

$$f(\sigma_{ij}, \theta) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k(\theta) = 0 \quad (3)$$

где σ_i — главные напряжения, $k(\theta)$ — предел текучести материала при заданной температуре. Далее в расчетах для $k(\theta)$ принимается простейшая линейная зависимость $k(\theta) = k_0 - \beta\theta$, в которой k_0 — предел текучести материала при комнатной температуре, β — теплофизическая постоянная материала, задающая степень падения предела текучести с повышением температуры и определяемая на основе экспериментальных данных. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [2] поверхность (3) становится пластическим потенциалом, следствием которого является ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{lk}^p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Если к соотношениям (1) – (4) добавить локальные следствия законов сохранения (уравнение движения и уравнение баланса внутренней энергии) и постулировать закон теплопроводности, например, в форме Фурье, то получим замкнутую математическую модель деформирования.

2. Температурные напряжения полого цилиндра

Рассмотрим бесконечно длинный полый цилиндр, свободный от внешних нагрузок при начальной температуре T_0 . Внешняя поверхность поддерживается при постоянной начальной температуре. На внутренней поверхности температура повышается до некоторого максимального значения T_m , причем процесс роста температуры считается достаточно медленным для того, чтобы пренебречь скоростью распространения тепла в материале цилиндра. Такой процесс деформирования связан с краевыми условиями

$$\theta(a) = \theta_k, \quad \theta(b) = 0, \quad \sigma_{rr}(a) = 0, \quad \sigma_{rr}(b) = 0 \quad (5)$$

В условиях цилиндрической симметрии решением стационарного уравнения теплопроводности при граничных условиях (5) будет функция

$$\theta(r) = \theta_k \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \quad (6)$$

Интегрирование уравнения равновесия в случае термоупругого деформирования материала цилиндра приводит к следующим зависимостям для напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} u(r) &= mw^{-1}F(a, r) + (r^2 - a^2)r^{-1}c_1 + c_2r^{-1} \\ \sigma_{rr}(r) &= -2\mu r^{-1}u(r) + wc_1 \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= 2\mu r^{-1}u(r) + \lambda c_1 - 2\mu mw^{-1}\theta(r) \end{aligned} \quad (7)$$

$$F(x, y) = 0.25\theta_k (x^2 - y^2 - 2x^2 \ln(x/b) + 2y^2 \ln(y/b)) / \ln(a/b)$$

Неизвестные интегрирования можно определить из краевых условий (5).

При определенном уровне ($\theta_k = \theta_1$) на внутренней поверхности цилиндра выполняется условие пластичности

$$|\sigma_{rr}(a) - \sigma_{\theta\theta}(a)| = 2k(\theta(a)) \quad (8)$$

что свидетельствует о начале пластического течения в окрестности внутренней поверхности. В процессе увеличения температуры область пластического течения растет, что означает необходимость интегрировать уравнение равновесия как в области термоупругого деформирования, где перемещения и напряжения вычисляются по формулам (7), так и в области течения.

Для определения полей перемещений и напряжений в зоне необратимого деформирования воспользуемся методом предложенным Д. Д. Ивлевым в [5]. Интегрированием уравнения равновесия можно определить напряжения в зоне пластического течения. С другой стороны, обратив закон Дюгамеля–Неймана (2), можно получить выражения для упругих деформаций. Воспользовавшись условием пластической несжимаемости, как следствием ассоциированного закона пластического течения (4) и условия пластичности Треска–Сен-Венана (3), и подставив полученные упругие деформации, получим уравнение для определения перемещений в зоне необратимого деформирования

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) - \frac{m}{g} \frac{d\theta}{dr} + \frac{2k}{gr} + \frac{1}{g} \frac{dk}{dr} = 0$$

решением которого определим перемещения и, следом, напряжения

$$\begin{aligned} u(r) &= m(gr)^{-1} F(a, r) - rg^{-1} G(a, r) + c_3 r^{-1} \\ \sigma_{rr}(r) &= -2G(a, r) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= -2G(a, r) - 2k(r) \\ G(x, y) &= k_0 \ln(y/x) (1 + \theta_k \beta \ln(\sqrt{xy}/b) / \ln(a/b)) \end{aligned} \quad (9)$$

Постоянные интегрирования теперь следует определять не только по краевым условиям (5), но и учитывая условия непрерывности параметров напряженно-деформированного состояния на упругопластической границе $r = a_1$, которую можно определить, найдя корень уравнения

$$\frac{m\mu F(a_1, b) + (\mu a_1^2 + b^2 g) G(a, a_1)}{\mu g(b^2 - a_1^2)} - \frac{m}{2w} \theta(a_1) + \frac{k(a_1)}{2\mu} = 0 \quad (10)$$

При дальнейшем увеличении температуры до значения ($\theta_k = \theta_2$) возможно ситуация, когда условие текучести (8) может выполниться на внешней поверхности, но с противоположным знаком. При ($\theta_k > \theta_2$) границы обоих пластических течений движутся навстречу друг другу по мере увеличения параметра θ_k . Теперь уравнения равновесия следует интегрировать в трех областях, откуда получим

выражения для напряжений и перемещений в области внешнего пластического течения ($b_1 \leq r \leq b$)

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= 2G(b_1, r) + c_4 \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= 2G(b_1, r) + 2k(r) + c_4 \\ u(r) &= m(gr)^{-1}F(b_1, r) + rg^{-1}G(b_1, r) + c_4(r^2 - b_1^2)(2gr)^{-1} + c_5r^{-1}\end{aligned}\quad (11)$$

в области термоупругого деформирования ($a_1 \leq r \leq b_1$) согласно соотношениям (7) и в области внутреннего пластического течения ($a \leq r \leq a_1$) по формулам (9). Неизвестные интегрирования, как и прежде, найдем по краевым условиям (5) и условиям равенства напряжений и перемещений на упругопластических границах a_1, b_1 .

Границы областей необратимого деформирования a_1 и b_1 определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2c_2w\mu - m\mu\theta(a_1)a_1^2 + k(a_1)wa_1^2 = 0 \\ 2c_2w\mu + (4\mu^2mF(a_1, b_1) - m\mu\theta(b_1) - k(b_1)w)b_1^2 = 0 \end{cases}$$

При достижении заданного уровня температуры ($\theta_k = \theta_3$) начнем уменьшать температуру на внутренней поверхности, тем самым начав процесс разгрузки тела. В области обратимого деформирования ($a_1 \leq r \leq b_1$) перемещения и напряжения вычисляются зависимостями (7). В областях с накопленными необратимыми деформациями ($a \leq r \leq a_1$) и ($b_1 \leq r \leq b$) зависимости для перемещений и напряжений весьма громоздки и поэтому не будем приводить их в этом сообщении, отметим лишь что процесс получения необходимых формул вполне аналогичен описанному ранее для областей пластического течения. Упругие деформации можно вычислить через известные накопленные необратимые и полные, зависящие от перемещений. Подставляя полученные выражения для упругих деформаций в закон Дюгамеля–Неймана и затем в уравнение равновесия, приходим к уравнению для определения перемещений. Оказывается, что если уровень накопленных необратимых деформаций достаточно высок на граничной поверхности может произойти выход на условие пластичности, что будет означать начало повторного пластического течения. А значит, уравнение равновесия придется интегрировать независимо в четырех областях, учитывая при этом непрерывность параметров напряженно-деформированного состояния на границах раздела этих областей.

3. Заключение

Построенное решение позволяет прогнозировать уровень остаточных напряжений полого цилиндра при тепловом воздействии на него. По результатам численного счета можно получить распределения перемещений и напряжений по толщине деформируемого материала. Указаны возможности определения критической температуры нагрева, при которой начнется пластическое течение. Найдена максимальная температура нагрева, при которой уровня накопленных необратимых деформаций не хватит для возникновения повторного пластического течения в окрестности внутренней граничной поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-776.2012.1) и гранта РФФИ (мол_a_вед 12-01-33064).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 520 с.
- [2] Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 168 с.
- [3] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [4] Качанов Л. М. Упругопластическое равновесие неравномерно нагретых толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления // Журнал технической физики. 1940. № 10(14). С. 1167–1172.
- [5] Ивлев Д. Д. К определению перемещений в задаче Л. А. Галина // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, Вып. 5. С. 716–718.
- [6] Ульяновцев В. П., Макаров А. Ф. Упругопластическое деформирование цилиндра при неравномерном нагреве // Пластичность машиностроительных материалов. Тула: Приокское кн. изд-во, 1987. С. 102–113.
- [7] Ульяновцев В. П., Макаров А. Ф. Влияние неравномерного температурного поля на деформирование цилиндров // Проблемы технологии машиностроения. Тула: Изд-во ТулПИ, 1991. С. 35–41.
- [8] Шорр Б. Ф. К расчету неравномерно нагретых цилиндров в упругопластической области // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 57–62.

Dats E. P., Mokrin S. N., Murashkin E. V. *Calculation of thermal stresses in the plastic flow and unloading* The report presents a solution of the problem of elastic–plastic deformation of a hollow cylinder in the process of heating–cooling. According to the results of numerical experiments have been constructed field of residual stresses and strains. We calculate the necessary and sufficient conditions for the emergence and development of irreversible deformation zones, unloading and re-plastic flow.

КОЭФФИЦИЕНТЫ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОЕ ТКАНОГО КОМПОЗИТА ПОЛОТНЯНОГО ПЛЕТЕНИЯ С ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Дедков Д. В., Ташкинов А. А.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Разработана модель слоя тканого композита полотняного плетения. Определены значения коэффициентов концентрации напряжений, вызванной наличием локальных технологических дефектов (разрывы нитей основы и/или утка, туннельные и внутренние поры). Установлены механизмы, инициирующие разрушение поликристаллической матрицы.

Создание элементов конструкций из композитов, армирующий каркас которых состоит из слоев керамической ткани полотняного плетения (саржа 1/1 с равными рапортами по основе и утку), а матрица — поликристаллический материал, является одним из приоритетных направлений развития техники и технологий. Преимуществами этих материалов является высокая теплостойкость, малая плотность и стойкость к тепловому удару. Кроме того, эти материалы обладают высокими прочностными характеристиками при обычной и повышенной температурах.

При производстве тканых композитов неизбежны технологические дефекты, снижающие эксплуатационные свойства изделий. К числу типичных дефектов относятся возникающие при прошивке слоев разрывы нитей основы или утка, а также внутренние поры, которые возникают в областях, расположенных вблизи участков волокон с наибольшей кривизной, и обнаруживаются только на этапе выходного ультразвукового контроля изделия. Эти области труднодоступны для проникновения поликристаллической матрицы (углеродной, осаждаемой из газовой фазы или получаемой при карбонизации полимеров), матрицы на основе терморасширенного графита или керамики также затруднено.

Плотняное плетение обеспечивает наиболее короткие перекрытия волокон, наибольшую прочность, плотность и повышенную жесткость, однородную, геометрически идентичную с лицевой и изнаночной стороны поверхность ткани. Будем предполагать, что армирующие нити имеют неизменное по длине круглое поперечное сечение. Искривление нитей задается дугой с центральным углом $\alpha = \pi/4$ (этот угол остается неизменным во всем диапазоне изменения внешних нагрузок из-за высокой жесткости керамических волокон) и прямой [1]. Коэффициенты армирования в направлении основы и утка при этом совпадают и принимают значение 0,14. В слоях тканого композита волокна могут быть окружены материалом матрицы или соприкасаться между собой в местах наибольшей кривизны, образуя поверхность контакта с трением.

Разработана двухуровневая модель тканого композита с искривленными волокнами и поликристаллической матрицей, которая на основе численного решения краевых задач о произвольном комбинированном нагружении слоя материала

в своей плоскости позволила определить коэффициенты концентрации напряжений, вызванные наличием локальных технологических несовершенств (рисунок 1): внутренняя закрытая пора, отсутствие нити утка, разрыв нити утка, одновременный разрыв нитей основы и утка (без и с дополнительной пропиткой и карбонизацией связующего в области дефекта) [2, 3].

Построение геометрической модели слоя осуществлялось при помощи платформы SALOME, которая представляет собой набор пре- и постпроцессинга, объединяет различные модули, применяемые в приложениях: от численного моделирования в САПР до параллельных вычислений, используется как база для проекта NURESIM (European Platform for NUClear REactor SIMulations), предназначенного для полномасштабного моделирования реакторов. Дискретизация проводилась на 16-узловые тетраэдральные и 20-узловые гексаэдральные изопараметрические элементы. Степень дискретизации выбиралась таким образом, чтобы полученные в результате численного решения значения структурных перемещений, деформаций и напряжений в слое тканого композита ни качественно, ни количественно не изменялись при уменьшении характерных размеров конечных элементов.

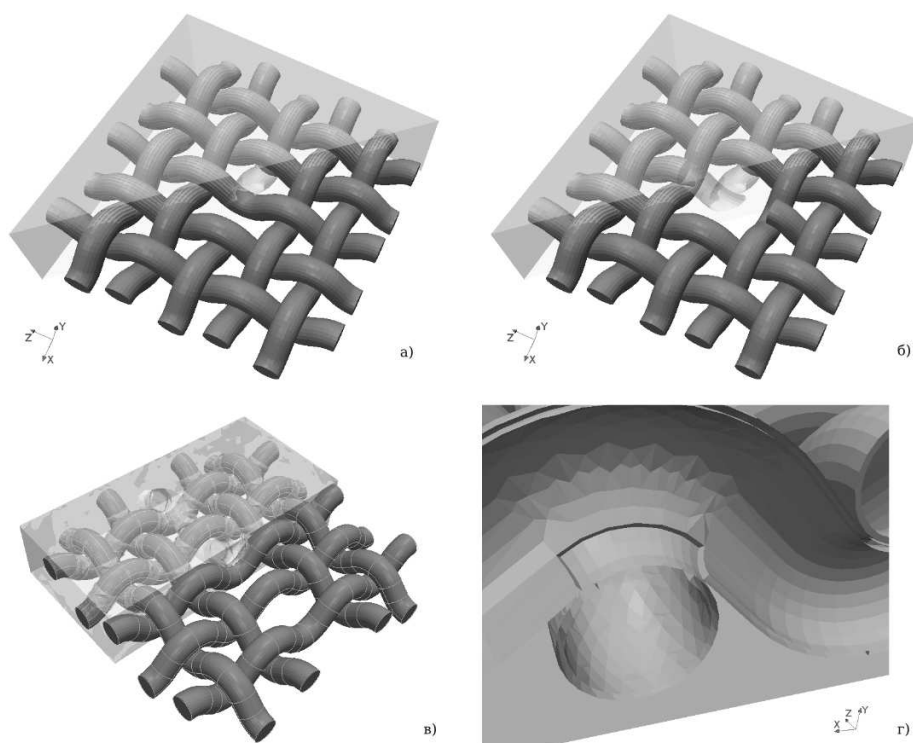


Рисунок 1 – Локальные технологические дефекты тканых композитов полотняного плетения: разрыв нити основы (а), разрыв нитей основы и утка (б), туннельная пора на месте пропущенной нити основы (в) и внутренняя технологическая пора (г)

Исследовано совместное влияние условий контакта искривленных волокон ткани полотняного плетения (отсутствие прямого контакта из-за гарантированного слоя матрицы или контакт с кулоновским трением) и наличия локальных технологических дефектов на характер распределения напряжений и их инвариантов. Полученные численные решения краевых задач методом конечных элементов поз-

волили установить, что наибольший вклад в коэффициенты концентрации (отношение компонент тензора напряжений в точке слоя тканого композита с дефектом к соответствующим компонентам тензора напряжений в слое бездефектного материала с идеально периодической структурой в этой же точке: $K_{\sigma_{ij}} = \sigma_{ij}/\sigma_{ij}^{per}$) вносят касательные составляющие тензора напряжений. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала нитей армирующего каркаса принимали значения: $E_f = 280$ ГПа и $\nu_f = 0,20$. Упругие модули поликристаллической матрицы были выбраны следующими: $E_m = 0,28$ ГПа и $\nu_m = 0,40$. Статический коэффициент трения $\mu = 0,12$ соответствовал определялся экспериментально при скольжении керамического волокна по поверхности поликристаллической матрицы. Выбор точек, в которых определяются значения коэффициентов концентрации напряжений, обусловлен необходимостью исключения областей сингулярности поля напряжений, которые имеют место вблизи границ технологических дефектов.

В качестве примера на рисунке 2 показано распределение коэффициентов концентрации интенсивностей напряжений в нитях, а в таблице 1 представлены максимальные значения $K_{\sigma_{ij}}$ в матрице слоя тканого композита в геометрическом центре межволоконного пространства, вблизи локального дефекта (разрыв искривленных волокон основы и/или утка). Области поликристаллической матрицы, в которых анализировалось напряженное состояние, были выбраны таким образом, чтобы исключить точки сингулярности поля напряжений, которые могут возникать на границах полостей технологических дефектов.

Коэффициенты концентрации интенсивностей напряжений достигают максимальных значений в местах наибольшего искривления нитей и располагаются строго периодически. Исключение составляют области вблизи локального дефекта, где исследуемый параметр достигает значений 1,6 и 2,5 для случаев, когда армирующие элементы окружены гарантированной прослойкой матрицы и имеют контакт с трением соответственно.

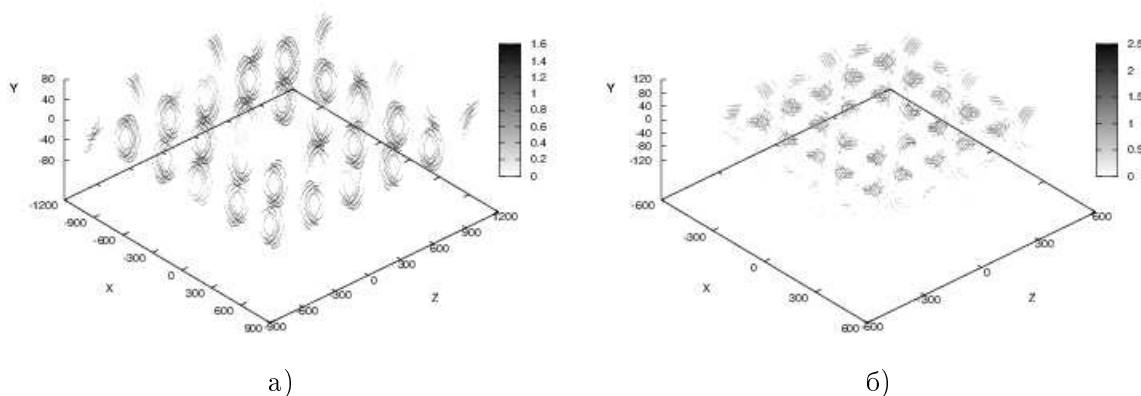


Рисунок 2 – Распределение коэффициентов концентрации интенсивностей напряжений в слое тканого композита: нити армирующего каркаса окружены гарантированной прослойкой матрицы (а), имеют контакт с трением (б)

В случае разрыва нитей основы и/или утка при условии, что каждое волокно композита окружено гарантированным слоем матрицы, наибольший вклад в коэф-

Таблица 1 – Максимальные коэффициенты концентрации напряжений в матрице слоя тканого композита при чистом формоизменении

Дефект	Условия контакта нитей	$K_{\sigma_{11}}$	$K_{\sigma_{22}}$	$K_{\sigma_{33}}$	$K_{\sigma_{12}}$	$K_{\sigma_{13}}$	$K_{\sigma_{23}}$
Разрыв нити основы	Наличие гарантированной прослойки матрицы	1,34	1,02	2,00	1,21	1,06	1,15
	Наличие контакта с трением	1,39	1,86	2,72	1,31	1,13	1,32
Разрыв нити основы (дополнительное насыщение поры)	Наличие гарантированной прослойки матрицы	1,36	1,13	1,99	1,15	0,96	1,09
	Наличие контакта с трением	1,30	3,44	5,41	0,99	0,88	1,87
Разрыв нитей основы и утка	Наличие гарантированной прослойки матрицы	1,50	1,47	2,24	1,24	0,98	1,30
	Наличие контакта с трением	1,41	2,00	1,05	1,41	1,05	1,76
Разрыв нитей основы и утка (дополнительное насыщение поры)	Наличие гарантированной прослойки матрицы	1,38	1,21	2,16	1,18	1,06	1,32
	Наличие контакта с трением	1,24	4,68	1,39	1,07	0,96	2,08

коэффициенты концентрации напряжений вносят нормальная составляющая σ_{33} . Полученные результаты (таблица 1) свидетельствуют о том, что при макроскопически однородном чистом формоизменении фрагмента тканого композита разрушение матрицы в рассматриваемой точке может быть инициировано по механизмам отрыва в направлении утка.

При наличии контакта с трением между искривленными волокнами тканого композита увеличиваются в 1,4–2,7 раз коэффициенты концентрации напряжений (таблица 1). Это связано с тем, что в рассматриваемом случае в слое армированного материала кроме концентраторов, вызванных контактом с трением, появляются внутренние замкнутые области в местах наибольшего искривления переплетенных нитей, не содержащие материала связующего.

Дополнительное насыщение полости, возникающей на месте разрыва утка и основы, не приводит к смене механизма возможного разрушения слоя: как и прежде, начало потери несущей способности будет вызвано отрывом в направлении утка. Насыщение материалом матрицы полости, возникающей на месте разорванной нити основы, приводит локальному изменению (на масштабах, соизмеримых с характерным размером волокон) симметрии армирующего каркаса и, как следствие —

смене механизма разрушения (об этом свидетельствует превышающее в 1,85–2,34 раз значение коэффициента $K_{\sigma_{22}}$). В рассматриваемом случае доминирующими механизмами начала разрушения являются разрыв матрицы в направлении, перпендикулярном плоскости слоя.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для повышения способности тканым композитом сопротивляться внешнему воздействию необходимо предусмотреть в технологическом процессе операции, обеспечивающие проникновение связующего в полости технологических локальных дефектов (дополнительная пропитка, доуплотнение и карбонизация, доосаждение поликристаллической матрицы из газовой фазы) в случае, если обнаруживаются закрытые внутренние поры. В противном случае возможно разрушение материала матрицы по механизмам сдвига и отрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ-Урал № 11–01–96033).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иманкулова А. С. Текстильные композиты. Б.: Издательский центр «МОК», 2005. 152 с.
- [2] Дедков Д. В., Зайцев А. В., Ташкинов А. А. Концентрация напряжений в слое тканого композита с закрытыми внутренними технологическими порами // Вестник ПНИПУ. Механика 2011. № 4. С. 29–36.
- [3] Дедков Д. В., Ташкинов А. А. Коэффициенты концентрации напряжений в слое тканого композита с локальными технологическими дефектами при чистом формоизменении // Вычислит. механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 1. С. 103–109.

Dedkov D. V., Taskinov A. A. *Stress concentrators coefficients of a woven textile composite layer with a polycrystalline matrix.* A new model has been developed to simulate a woven textile composite layer with a polycrystalline matrix. Based on the numerical solution of the boundary-value problem by the finite-element method, the values of stress concentration caused by local processing defects (break in a fiber, closed internal pore) are obtained. It is shown that application of additional processing operations to fill the formed voids by matrix material can decrease stress concentration and increase the ability of a material to withstand external force loads. The mechanisms responsible for initiation of damages in a polycrystalline matrix are determined.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВНУТРЕННИХ ПОЛОСТЕЙ В УПРУГОМ СЛОЕ

Диденко А. В., Сыромятников П. В.

Южный научный центр РАН, Краснодар

В плоской постановке решается обратная задача определения параметров внутренней полости прямоугольной или эллиптической формы в упругом изотропном слое. Для решения прямой задачи моделирования распространения волн в блочной структуре с полостями используется метод блочного элемента и метод конечных элементов. Для решения обратных задач используются генетические алгоритмы. Информацией для решения обратной задачи определения параметров полостей служат смещения, рассчитанные или измеренные на поверхности слоя.

Изотропная линейно-упругая полоса, содержащая полость прямоугольной или эллиптической формы, моделируется в виде блочной структуры из нескольких плоских блоков. На поверхности слоя действует статический или гармонический источник колебаний. Механические напряжения на поверхности полосы вне источника и на внутренней поверхности полости считаются нулевыми. Блоки в блочной структуре, моделирующей полосу с полостью, рассматривались плоские, прямоугольные или трапециевидные. Структура с прямоугольной полостью моделировалась четырьмя прямоугольными блоками: двух — в виде полосы, двух — в виде полуполосы. Полость эллиптической формы в слое аппроксимировалась несколькими конечными трапециевидными и двумя полубесконечными прямоугольными блочными элементами. Предполагается, что одна из граней прямоугольной полости и одна из полуосей эллипса параллельна поверхности полосы. Для решения задачи применялся двухэтапный подход. На первом этапе при заданных параметрах блочной структуры, включающих в себя параметры полости определенного типа и источника колебаний, решалась прямая задача расчета смещений в определенных точках на поверхности одного из блоков блочной структуры. На втором этапе решается обратная задача определения параметров неоднородности по рассчитанным на первом этапе т. н. эталонным смещениям. Вычисляемые эталонные смещения имитируют результаты физического эксперимента. Решение прямой задачи на первом этапе основано на методе блочного элемента (МБЭ) и, в качестве контроля, методе конечных элементов. В работе [1] предложены различные подходы для исследования напряженно-деформированного состояния тел сложной конфигурации. Другой подход [2, 3] нацелен на построение и решение интегральных уравнений для блочной структуры и позволяет рассматривать предельно малое количество уравнений. Приведем основные соотношения метода блочного элемента для плоской линейно-упругой блочной структуры [4]. Считаем, что область Ω блочной структуры состоит из блоков, занимающих области Ω_b , $b = 1, 2, \dots, B$ с границами $\partial\Omega_b$. Часть границы блока, называем контактирующей, является общей с границей другого блока. Остальная часть может быть свободной или подвергаться внешним воздействиям. В каждой области краевая задача ставится для

систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, в общем случае различными. Для каждого блока краевую задачу для системы P дифференциальных уравнений в частных производных в блочной двумерной области можно записать в виде

$$K_b(\partial x_1, \partial x_2)\varphi_b = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P = A_{spm n}^b \varphi_{bp x_1 x_2}^{(m)(n)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, P_b,$$

$$A_{spm n}^b = const, \quad \varphi_b = \{\varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \dots, \varphi_{bP}\}, \quad b = 1, 2, \dots, B$$

$$\varphi = \{\varphi_s\}, \quad \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2), \quad x = \{x_1, x_2\}, \quad x \in \Omega_b$$

На контактирующей границе $\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d$ задаются условия сопряжения:

$$R_b(\partial x_1, \partial x_2)\varphi_b + R_d(\partial x_1, \partial x_2)\varphi_d = \quad (1)$$

$$= \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{p=1}^P = [B_{spm n}^b \varphi_{bp x_1 x_2}^{(m)(n)} + B_{spm n}^d \varphi_{dp x_1 x_2}^{(m)(n)}] = f_{bds}$$

$$s = 1, 2, \dots, s_{b0} < P, \quad x \in \partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d, \quad M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad b, d = 1, 2, \dots, B.$$

Данная краевая задача исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $H_s(\Omega)$, описанных в [2, 3]. Граничные условия (1) в общем виде [4] описывают случай контакта блоков, когда на общих границах принимается условие совпадения необходимых компонент физических полей, если учитываются не только упругие взаимодействия. В данном случае при $f = 0$ условия (1) будут представлять собой частный случай равенства на общей границе решений и их производных. Для границ блоков, не являющихся общими ни с каким другим блоком, принимаются граничные условия краевой задачи, рассмотренной в работах [2, 3]. Следуя алгоритму дифференциального метода факторизации, краевая задача может быть сведена к системе функциональных уравнений вида [4]:

$$K_b(\alpha)\Phi_b = \int_{\partial\Omega_b} \omega_b, \quad K_b(\alpha) \equiv -K_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \|k_{bnm}(\alpha)\|, \quad b = 1, 2, \dots, B.$$

Опуская подробности преобразования, подробно изложенные в [2, 3], получаем в случае блоков, занимающих выпуклые области, представление решения в каждом блоке в виде

$$\varphi_b(x^\nu) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (K_{rb}^{-1}(\alpha_2^\nu) K_b^{-1}(\alpha_2^\nu)) \int_{\partial\Omega} \omega_b \exp(-i\langle \alpha_2^\nu x_2^\nu \rangle) d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu, \quad x^\nu \in \Omega_b \quad (2)$$

В том случае, когда блок представляет собой полупространство или слоистую среду, появляющиеся в процессе решения краевой задачи псевдодифференциальные уравнения вырождаются в алгебраические, после обращения которых решение

может быть построено в конечном виде [2, 3]. Если рассматриваемый блок не является выпуклым телом, для исследования краевой задачи необходимо применить метод обобщенной факторизации [5].

Определение параметров неоднородности на втором этапе приводит к задаче минимизации функционала невязки между эталонным полем смещений и пробным полем смещений, определяемым предполагаемыми параметрами полостей [9].

Предполагается, что в некоторых точках на поверхности блочной структуры x_j известны из физического эксперимента или численного моделирования значения перемещений $u(x_j, 0) = g(x_j)$. В этом случае задача идентификации неизвестных параметров полости может быть сведена к вычислению (2) и минимизации невязок, определенных в точках замеров на поверхности полосы:

$$\min \sum_j \|g(x_j) - u(x_j)\| \quad (3)$$

Неявным образом в выражение (3) входят параметры блочной структуры. Дополнительно необходимо наложить некоторые ограничения на диапазон допустимых изменений параметров блоков, полостей и их расположения относительно поверхностного источника. Поскольку расчет (2) возможен только численно, то целевая функция в (3) имеет тип черного ящика, для ее оптимизации требуется применение соответствующий алгоритмов. В качестве алгоритмов решения задачи оптимизации использовались как методы случайного глобального поиска - генетические алгоритмы [7], так и методы глобального или локального поиска [8]. Поскольку каждая полость описывается четырьмя параметрами, решение задачи оптимизации (3) требует многократного вычислений (2), что в действительности означает необходимость вычислять поверхностные перемещения для полостей с заданными параметрами (прямая задача), а затем сравнивать их с известными данными. Для решения проблемы минимизации вычислений используются два подхода. Первый основан на различных способах оптимизации вычисления многомерных интегралов Фурье, через которые представляется решение в МБЭ (2). Второй подход связан с уменьшением числа итераций за счет усовершенствования стратегий оптимизации. Для решения задачи распространения волн в среде с полостью известной конфигурации, реализован алгоритм расчета поверхностных перемещений на основе метода конечных элементов, предложенный в [6]. Поскольку рассматривалась задача распространения волн в бесконечной по горизонтальной координате полосе, требуется выбрать в конечной структуре условия на удаленных границах специальным образом, не допускающим отражения волн. Исходный бесконечный слой моделируется конечной областью с возрастающим по мере удалением от центра координат внутренним трением.

Погрешность в симулированные измерения вносилась при помощи генерирования случайных отклонений. Достигнутая в численных экспериментах относительная погрешность определения параметров прямоугольной полости имела порядок погрешностей эталонных смещений, для эллиптической полости погрешности были в несколько раз выше.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ и администрации Краснодарского края 12-08-00880-а, 13-01-96511-р-юг-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Акбаров С. Д., Гузь А. Н., Мовсумов Э. А., Мустафаев С. М. Механика материалов с искривленными структурами. Киев: Наук. думка. 1995. 320 с.
- [2] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // Докл. РАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596–599.
- [3] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 321–323.
- [4] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Мухин А. С., Федоренко А. Г., Шестопапов В. Л. К проблеме медленных сейсмических волн // Механика твердого тела. 2012. № 6. С. 37–43.
- [5] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // Докл. РАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
- [6] Liu G. R., Quek Jerry S. S. A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method // Finite Elements in Analysis and Design. 2003. № 39. P. 403–417.
- [7] Liu G. R., Han X. Computational Inverse Techniques in Nondestructive Evaluation. CRC Press, 2003.
- [8] Gablonsky J. M. DIRECT Version 2.0 User Guide. Technical Report CRSC-TR01-08, Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University, April 2001.
- [9] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.

Didenko A. V., Syromyatnikov P. V. *Determining the parameters of internal cavities in an elastic layer.* This paper considers the solution of the plane of the inverse problem to determine the parameters of the internal cavity of rectangular or elliptical shape in an isotropic elastic layer. To solve the direct problem of modeling of wave propagation in the block structure with cavities using a block element method and finite element method. For the solution of inverse problems were used genetic algorithms. Information for the inverse problem of determining the parameters of the cavities are displacements calculated for the body surface.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЛИТЫ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ СРЕДНИМ СЛОЕМ

Еремеев В. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках нелинейной теории упругости решена задача о потере устойчивости трехслойной пластинки, внутренний слой которой предварительно сжат или растянут. Проведен анализ зависимости критических усилий от начальных деформаций при комбинированном нагружении.

1. Введение. В статических и динамических задачах как линейной, так нелинейной теории упругости за отсчетную конфигурацию, от которой отсчитывается деформация, обычно принимают естественное, ненапряженное состояние тела. Однако бывают ситуации, когда отсчетную конфигурацию невозможно выбрать так, чтобы она была ненапряженной для всего тела. Такой случай имеет место, когда тело содержит предварительно напряженные включения, которые создают несовместные (разрывные) деформации. Предварительно напряженные включения возникают, например, при соединении элементов конструкций с натягом, в конструкциях с остаточными напряжениями, обусловленными пластическими деформациями, неравномерным нагревом, фазовыми переходами, напылением поверхностного слоя и другими факторами. В указанных случаях за отсчетную конфигурацию следует принимать такую, которая является естественной для одних частей тела и напряженной для других частей.

2. Начальное состояние. Рассмотрим состояние трехслойной плиты с начальными напряжениями. В качестве модели материала рассмотрим неогуковский материал. Пусть плита имеет толщину $2h$, внутренний слой имеет толщину $2h_1$, и декартовы координаты в плоскости плиты принимают следующие значения: $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$. Пусть средний слой растянут в α раз вдоль оси x_1 , в β раз вдоль оси x_2 , а затем скрепляется с одинаковыми верхним и нижним слоями. После этого плита деформируется однородным образом как одно целое, под действием сил, приложенных к боковой поверхности.

Уравнения нелинейной теории упругости относительно отсчетной конфигурации записываются следующим образом (массовые силы отсутствуют) [2]

$$-\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{C}), \quad (1)$$

где ∇ — оператор градиента в отчетной конфигурации, $\mathbf{D}$ — тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{C}$ — градиент деформации.

Тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{C}$ зависят от выбора отсчетной конфигурации. Пусть мы имеем две отсчетные конфигурации κ и κ' , $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ — соответствующие им градиенты деформации, отвечающие одной текущей конфигурации χ : $\mathbf{C} : \kappa \rightarrow \chi$, $d\mathbf{C}' : \kappa' \rightarrow \chi$. Справедлива следующая формула преобразования градиента деформации при изменении отсчетной конфигурации: $\mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}'$, $\mathbf{P} : \kappa \rightarrow \kappa'$, где $\mathbf{P}$ — градиент деформации при переходе от одной отсчетной конфигурации к другой.

Запишем выражения для тензоров Пиолы в разных отсчетных конфигурациях

$$\mathbf{D} = (\det \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{D}' = (\det \mathbf{C}')\mathbf{C}'^{-1} \cdot \mathbf{T}.$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши. Отсюда выводим связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}'$: $\mathbf{D}' = (\det \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}$. В случае несжимаемого материала определители градиента деформации в разных отсчетных конфигурациях и градиента деформации перехода равны единице: $\det \mathbf{C} = \det \mathbf{C}' = \det \mathbf{P} = 1$.

Модель несжимаемого неогуковского материала относительно ненапряжений отсчетной конфигурации задается следующим выражением удельной потенциальной энергии деформации W и тензора напряжений Пиолы

$$W = \frac{\mu}{2} [\text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T) - 3], \quad \mathbf{D} = \mu\mathbf{C} - p\mathbf{C}^{-T},$$

где μ — параметр материала, играющий роль модуля сдвига, p — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию.

Тензор напряжений Пиолы для неогуковского материала относительно преднапряженной отсчетной конфигурации, согласно полученным выше соотношениям, имеет вид $\mathbf{D}' = \mu\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}' - p'\mathbf{C}'^{-T}$.

Для однородной деформации трехслойной плиты с преднапряженным средним слоем имеем $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \beta\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \alpha^{-1}\beta^{-1}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$. Для крайних слоев отсчетная конфигурация ненапряженная, для среднего — предварительно напряженная, с градиентом деформации $\mathbf{P}$. Рассмотрим задачу о невозмущенном (докритическом) состоянии составной плиты, считая, что в этом состоянии каждый из слоев испытывает однородную деформацию. Так как после склеивания слои деформируются совместно, имеем

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}' = \lambda_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + (\lambda_1\lambda_2)^{-1}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3.$$

Здесь λ_1, λ_2 — коэффициенты растяжения плиты в направлениях x_1 и x_2 соответственно. Тогда условия равновесия принимают вид $2hD_1 + h_1D'_1 = 0$, $2hD_2 + h_1D'_2 = 0$, $D'_3 = D_3 = 0$, где D_1, D_2, D_3 — напряжения в крайних слоях (диагональные компоненты тензора напряжений Пиолы), D'_1, D'_2, D'_3 — напряжения в среднем слое, которые даются формулами

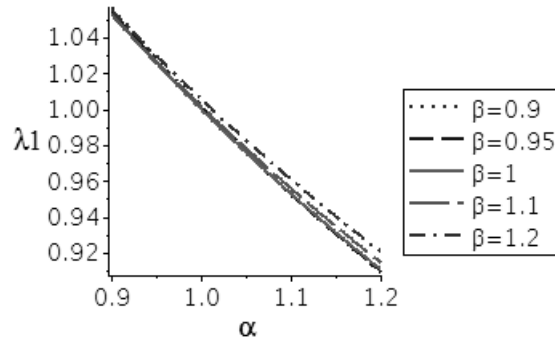
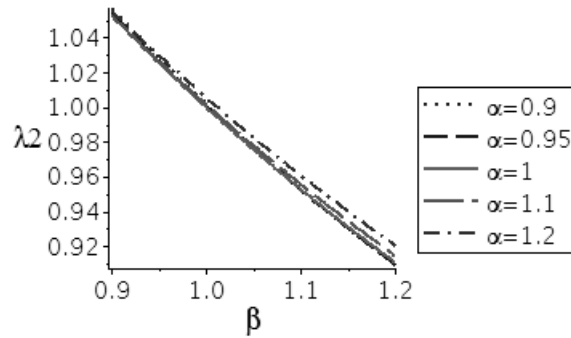
$$D_1 = \mu\lambda_1 - p\lambda_1^{-1}, \quad D_2 = \mu\lambda_2 - p\lambda_2^{-1}, \quad D_3 = \mu\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} - p\lambda_1\lambda_2,$$

$$D'_1 = \mu'\lambda_1\alpha^2 - p'\lambda_1^{-1}, \quad D'_2 = \mu'\lambda_2\beta^2 - p'\lambda_2^{-1}, \quad D'_3 = \mu'\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\alpha^{-2}\beta^{-2} - p'\lambda_1\lambda_2.$$

Здесь μ — модуль сдвига крайних слоев, μ' — модуль сдвига среднего слоя, p и p' — давления в слоях.

Величины p и p' находятся из условия равенства нулю вертикальных составляющих напряжений среднего и крайних слоев и даются выражениями $p = \mu\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}$, $p' = \mu'\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-2}$. Коэффициенты деформации плиты находятся следующим образом

$$\lambda_1 = \frac{(2h\mu + h_1\mu'\beta^2)^{\frac{1}{6}}(2h\mu + h_1\mu'\alpha^{-2}\beta^{-2})^{\frac{1}{6}}}{(2h\mu + h_1\mu'\alpha^2)^{\frac{1}{3}}},$$

Рисунок 1 – Коэффициент деформации плиты λ_1 Рисунок 2 – Коэффициент деформации плиты λ_2

$$\lambda_2 = \frac{(2h\mu + h_1\mu'\alpha^2)^{\frac{1}{6}}(2h\mu + h_1\mu'\alpha^{-2}\beta^{-2})^{\frac{1}{6}}}{(2h\mu + h_1\mu'\beta^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

На рис. 1 и 2 построены графики коэффициентов деформации плиты λ_1 и λ_2 от начальной деформации среднего слоя при фиксированных параметрах β и α , соответственно. Существенного качественного влияния на коэффициенты деформации вдоль осей x_1 и x_2 начальной деформации вдоль осей x_2 и x_1 , соответственно, не выявлено.

3. Потеря устойчивости. Для формулировки задачи устойчивости равновесия применяется метод линеаризации нелинейных уравнений [2]. Этот метод состоит в том, что на известное состояние однородной деформации плиты, которое называется невозмущенным, накладывается малая деформация. Линеаризованные уравнения равновесия выводятся путем разложения решения в ряд по степеням малого параметра η . Полагаем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \eta\mathbf{w}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \eta\dot{\mathbf{D}} + \dots$

$$\dot{\mathbf{D}} = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{C} + \eta\nabla\mathbf{w}) \right|_{\eta=0}.$$

Здесь знак «0» внизу относится к невозмущенному состоянию, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек тела в деформированном состоянии, $\mathbf{w}$ — вектор малых добавочных перемещений. Подставляя эти разложения в нелинейные уравнения равновесия и граничные условия, удерживая члены только первого порядка относительно параметра η , получим линейную однородную краевую задачу для векторной функции $\mathbf{w}(x_1, x_2, x_3)$.

Для неогукковского материала линеаризованные уравнения состояния имеют вид [3]

$$\dot{\mathbf{D}} = \mu \nabla \mathbf{w} - \dot{p} \mathbf{C}^{-T} + p \mathbf{C}^{-T} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{C}^{-T}. \quad (2)$$

Аналогично находится $\dot{\mathbf{D}}'$:

$$\dot{\mathbf{D}}' = \mu \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{w} - \dot{p}' \mathbf{C}^{-T} + p' \mathbf{C}^{-T} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{C}^{-T}, \quad \mathbf{A} = \alpha^2 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \beta^2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + (\alpha\beta)^{-2} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \quad (3)$$

Для несжимаемого материала в число разрешающих уравнений входит условие несжимаемости, линеаризованная версия которого имеет вид

$$\text{tr}(\mathbf{C}^{-1} \cdot \nabla \mathbf{w}) = 0. \quad (4)$$

Таким образом, линеаризованная задача для трехслойной плиты состоит из уравнений равновесия (1), в которых используются линеаризованные уравнения состояния (2) для внешних слоев и (3) для внутреннего слоя, линеаризованное условие несжимаемости (4), дополненных соответствующими граничными условиями, которые здесь не приводятся.

Неизвестными функциями трех переменных x_1, x_2, x_3 в каждом слое являются следующие: $w_k, \dot{p}$ ($k=1, 2, 3$). Для каждого слоя решение разыскивается в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x_3) \cos \frac{nx_1}{a} \sin \frac{mx_2}{b}, & w_2 &= W_2(x_3) \sin \frac{nx_1}{a} \cos \frac{mx_2}{b}, \\ w_3 &= W_3(x_3) \sin \frac{nx_1}{a} \sin \frac{mx_2}{b}, & \dot{p} &= P(x_3) \sin \frac{nx_1}{a} \sin \frac{mx_2}{b}, \end{aligned} \quad (5)$$

$m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ В результате получается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно множителей, зависящих от x_3 . Ее решение весьма громоздко и здесь не приводится. Подстановка найденного решения в краевые условия приводит к уравнению, связывающему критические деформации, вида $D(\lambda_1, \lambda_2; \alpha, \beta, h, h_1, \mu, \mu', m, n) = 0$.

4. Результаты расчетов. В качестве тестового примера вначале рассмотрена однослойная плита. Показано, что наблюдается очень хорошее совпадение при малых толщинах с результатами теории пластин [1]. При увеличении толщины пластинки наблюдаются более существенные расхождения критических усилий, полученных на основе трехмерной и двумерной теорий.

Рассмотрим теперь влияние начальных напряжений на потерю устойчивости для трехслойной плиты. На рис. 3 показаны критические усилия $N_k = \int_{-h}^h D_{kk} dx_3$ для разных значений начального удлинения α и β . Видно, что начальное растяжение приводит к увеличению критического усилия. Также показаны значения критических усилий как функций номера моды выпучивания. Использованы значения: $h = 0.01$; $h_1 = 0.005$; $\mu = \mu' = 1$.

Полученные результаты показывают существенное влияние начальных напряжений на потерю устойчивости.

В заключение отметим, что более простая задача об устойчивости трехслойной преднапряженной плиты при однопараметрическом нагружении в условиях плоской деформации решена ранее [4].

Автор благодарит Л. М. Зубова за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

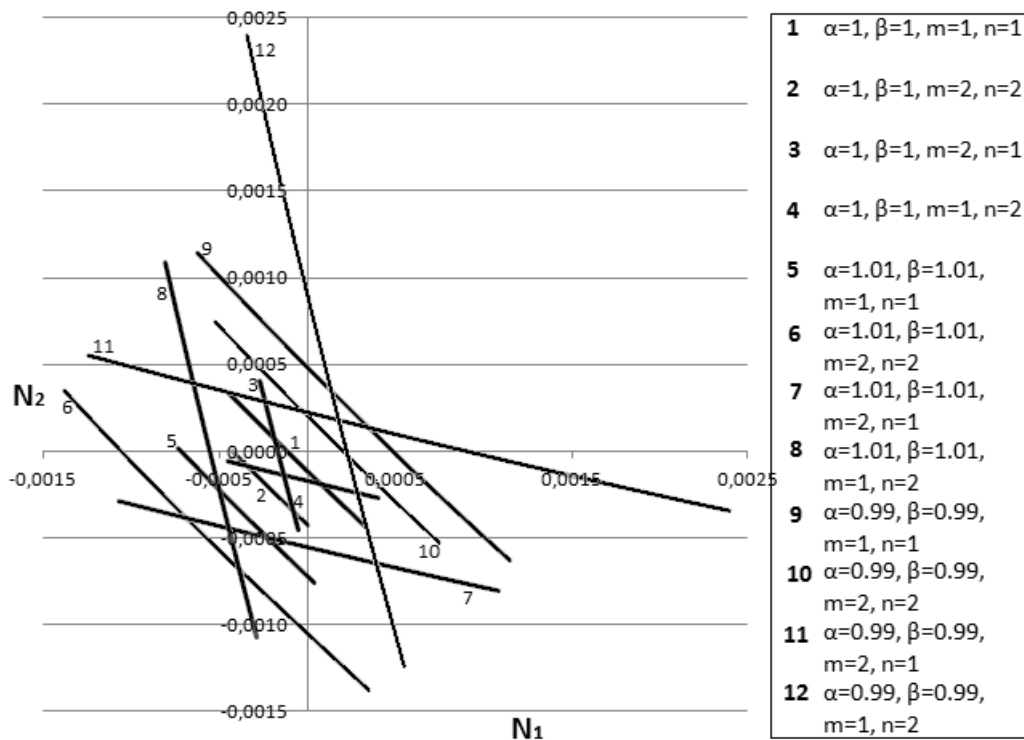


Рисунок 3 – Критические усилия N_1, N_2 для различных параметров α, β и различных мод выпучивания m, n

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1990. 512 с.
- [3] Zubov L. M. Выпучивание пластинок из неогукковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ. 1970. Т.34. Вып. 4. С.632–642.
- [4] Еремеев В. В. О потере устойчивости трехслойной нелинейно упругой полосы с предварительными напряжениями // Труды XV межд. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”. Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ. 2011. Т. 2. С. 66–70.

Eremeev V. V. *On the stability of three-layered non-linear elastic plate with prestressed middle layer.* Within the framework of the three-dimensional nonlinear elasticity we consider the infinitesimal stability of a three-layered plate with prestressed internal layer. The dependence of critical loads on the initial strains under combined loading is analyzed.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ЭКСПЛУАТАЦИИ КОЛЕЦ ИЗ ТЕРМОРАСШИРЕННОГО ГРАФИТА В КРАНАХ С УПЛОТНЕНИЕМ ПО ШТОКУ

**Зайцев А. В.¹, Исаев О. Ю.², Караваев Д. М.¹,
Смирнов Д. В.², Ханов А. М.¹**

¹*Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

²*ООО «Силур», Пермь*

Разработана модель начального режима работы изготавливаемых крупносерийными партиями колец из ТРГ, которая позволила получить новые численные решения краевых задач для уплотнительных элементов и их пакетов методом конечных элементов. Проведена оценка начальной прочности по совокупности критериев. Полученные из вычислительных экспериментов данные о местах расположения областей, в которых начинается разрушение ТРГ, согласуются с результатами, наблюдаемыми при эксплуатации кранов с уплотнениями по штоку.

Терморасширенный графит (ТРГ) — уникальный наноструктурированный материал, который вне зависимости от условий эксплуатации (повышенные температуры, термоциклирование, время контакта с агрессивными средами) обладает высокой термо-химической стойкостью, низким коэффициентом трения, высокими упругими свойствами. Уплотнительные элементы (УЭ) из ТРГ надежны и не требуют дополнительного уплотнения при эксплуатации, работают при температурах до 560°C и давлении 40,0 МПа. В настоящее время происходит интенсивное внедрение УЭ из ТРГ на предприятиях и промышленных объектах аэрокосмического, металлургического, нефтегазового и химического комплексов, предприятий энергетики и ЖКХ. Традиционные способы отработки УЭ из ТРГ (на натурных конструкциях и опытных образцах) неоправданы вследствие высокого риска возникновения аварий, сопровождающихся серьезным экологическим и экономическим ущербом. Поэтому большое значение приобретают методы математического моделирования поведения ТРГ, с помощью которых можно прогнозировать теплофизико-механические свойства этого материала, описывать поведение, проектировать новые УЭ и пакеты УЭ, оптимально соответствующие условиям нагружения конкретного узла или агрегата [1, 2].

Рассматривались кольцевые УЭ и пакеты из двух одинаковых УЭ, каждый из которых являлся толстостенным, ограниченным по высоте h , однородным трансверсально-изотропным цилиндром с осью симметрии бесконечного порядка z ($0 \leq z \leq h$), совпадающей с образующей. Поперечные сечения цилиндров ограничены двумя концентрическими окружностями с радиусами a и b ($a < b$).

При построении модели термомеханического поведения УЭ (или пакета УЭ) предполагалось, что ТРГ является упругим материалом, внешнее термо-силовое воздействие на который приводит к бесконечно малому изменению объема и формы физических точек. Краевая задача состояла из уравнений равновесия в отсутствие массовых сил, геометрических и определяющих соотношений, записанных в цилиндрических ортогональных координатах, а также уравнения Лапласа.

Решение указанной краевой задачи осуществлялось численно методом конечных элементов. Тестирование конечноэлементных алгоритмов проводилось на основе сравнения численных с полученными новыми точными аналитическими решениями краевых задач для ограниченных по высоте трансверсально-изотропных толстостенных цилиндрических тел: о стационарном распределении температуры при наличии изотермических боковых поверхностей и равновесии с заданными на внутренней поверхности условиями контакта с трением.

Предполагалось, что на изотермических внутренней и внешней боковых поверхностях УЭ и пакета УЭ были заданы постоянные температуры высокоагрессивных и реакционноспособных газов или жидкостей T_{int} и окружающей среды T_{ext} . Внешняя боковая поверхность соприкасается с внутренней поверхностью сальниковой камеры так, что исключаются радиальные, осевые и окружные перемещения. На участке отдельного УЭ или пакета, контактирующем с нажимной втулкой, задавалось в направлении образующей торцевое давление герметизации p_{zz}^{front} (однородность этого давления обеспечивается прижимными болтами) и отсутствие касательных напряжений. На участке торцевой поверхности, контактирующей с грандбуксой, ограниченном двумя концентрическими окружностями с радиусами a и d ($a < d$), задавалось однородное рабочее давление p_{zz}^{work} , а на участке той же поверхности, но ограниченном окружностями с радиусами d и b ($d < b$) — исключались перемещения в радиальном, осевом и окружном направлениях. Точки, принадлежащие участкам торцевых поверхностей, закреплялись так, что оказывались не способными свободно перемещаться в своей плоскости. Предполагая движение штока возвратно-поступательным, задавалось однородное распределение осевых перемещений $\pm u_z^{\text{int}}$ на внутренней боковой поверхности УЭ (знак перемещений определяет направление движения штока: положительное значение — в сторону нажимной втулки, отрицательное — в противоположном направлении). На участке поверхности контакта колец, входящих в пакет, предполагалось равенство температур и тепловых потоков, а также идеальное сопряжение, проскальзывание или контакт с кулоновским трением.

Рассматривался начальный режим работы изготавливаемых крупносерийными партиями УЭ (используются в кранах с уплотнениями по штоку), внутренний, внешний радиусы и высота которых равны $a = 15,0$ мм, $b = 22,5$ мм, а $h = 8,0$ мм соответственно. При численном решении краевых задач в трехмерной постановке методом конечных элементов с использованием пакета ANSYS 12.0 температуры рабочей и окружающей сред принимались равными $T_{\text{int}} = 300^\circ\text{C}$, $T_{\text{int}} = 550^\circ\text{C}$ и $T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$. Рабочее давление и торцевое давление герметизации на поверхности контакта с нажимной втулкой были равны $p_{zz}^{\text{work}} = 40,0$ МПа и $p_{zz}^{\text{front}} = 2p_{zz}^{\text{work}}$. Упругие и теплофизические постоянные ТРГ определялись экспериментально [4] или выбирались следующими [3]: $E = 9,04$ ГПа и $\hat{E} = 0,75$ ГПа — модули Юнга, $\nu = 0,03$ и $\hat{\nu} = 0,05$ — коэффициенты Пуассона, $G = 0,47$ ГПа и $\hat{G} = 0,35$ ГПа — поперечный и продольный модули сдвига; $\alpha = 1,21 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ и $\hat{\alpha} = 2,77 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $\lambda = 122,0 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ и $\hat{\lambda} = 87,0 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ при $T_{\text{int}} = 300^\circ\text{C}$, $\lambda = 90,0 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ и $\hat{\lambda} = 70,0 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ при $T_{\text{int}} = 550^\circ\text{C}$ — коэффициенты теплопроводности и линейного термического расширения в плоскости изотропии и направлении образующей.

Были разработаны и реализованы программные комплексы определения значений независимых инвариантов тензоров напряжений [5]

$$j_{\sigma}^{(1)} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2, \quad j_{\sigma}^{(2)} = \sigma_{zz}, \quad (1)$$

$$j_{\sigma}^{(3)} = [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2}, \quad j_{\sigma}^{(4)} = [\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2]^{1/2}$$

относительно ортогональных преобразований, допустимых над цилиндрически трансверсально-изотропным телом с осью симметрии z бесконечного порядка. Эти инварианты определяются нормальными (радиальные σ_{rr} , окружные $\sigma_{\theta\theta}$ и продольные σ_{zz}) и касательными σ_{rz} , $\sigma_{\theta z}$ и $\sigma_{r\theta}$ компонентами. Несмотря на то, что эти величины позволяют описать механизмы разрушения трансверсально-изотропного тела (потеря несущей способности от растяжения или сжатия в плоскости изотропии или осевом направлении, от поперечного или продольного сдвига), их вычисление в пакете ANSYS 12.0 не предусмотрено.

Результаты, представленные в таблице 1 позволили сделать вывод о том, что наиболее чувствительными к изменению температуры рабочей среды T_{int} являются первый, третий и четвертый инварианты. Кроме того, изменение условий на поверхности контакта УЭ из ТРГ с идеального сопряжения на скольжение при одной и той же T_{int} приводит к увеличению максимальных по абсолютной величине значений $j_{\sigma}^{(1)}$, $j_{\sigma}^{(3)}$ и $j_{\sigma}^{(4)}$, а также снижению $j_{\sigma}^{(2)}$. Обратим внимание на то, что ни одно из приведенных в табл. 1 значений не превосходит критические $j_{\sigma}^{(1)\text{cr}} = 173,3$ МПа, $j_{\sigma}^{(2)\text{cr}} = 138,4$ МПа, $j_{\sigma}^{(3)\text{cr}} = 138,8$ МПа и $j_{\sigma}^{(4)\text{cr}} = 84,2$ МПа (эти величины вычислены по экспериментально определенным прочностным постоянным в плоскости изотропии: $S^- = 173,3$ МПа и $\tau_{\text{max}} = 69,4$ МПа; в осевом направлении $\hat{S}^- = 138,4$ МПа и продольном сдвиге $\hat{\tau}_{\text{max}} = 59,5$ МПа).

Таблица 1 – Максимальные по абсолютной величине (МПа) значения инвариантов тензора напряжений в пакетах УЭ из ТРГ при возвратно-поступательном движении штока

$T_{\text{int}}, ^\circ\text{C}$	Движение в сторону нажимной втулки				Движение от нажимной втулки			
	$j_{\sigma}^{(1)}$	$j_{\sigma}^{(2)}$	$j_{\sigma}^{(3)}$	$j_{\sigma}^{(4)}$	$j_{\sigma}^{(1)}$	$j_{\sigma}^{(2)}$	$j_{\sigma}^{(3)}$	$j_{\sigma}^{(4)}$
300	6,3	57,4	10,5	73,6	6,5	57,6	10,7	66,1
550	7,2	57,4	12,1	80,5	7,3	57,6	12,3	72,8
Идеальное сопряжение УЭ в пакете					Скольжение на контактах УЭ в пакете			
300	6,7	57,3	12,2	76,3	7,2	57,1	14,3	78,5

Проанализировав факторы, существенно влияющие на характер распределения независимых инвариантов (1) в точках поперечных сечений УЭ, входящих в пакет (толщина, количество колец в сальниковой камере), была проведена оценка влияния механизмов разрушения на начальную прочность и сравнение различных режимов возвратно-поступательного движения штока (движение в сторону нажимной втулки и в противоположном направлении). На рисунке 1 представлены распределения третьего и четвертого инвариантов тензора напряжений в УЭ

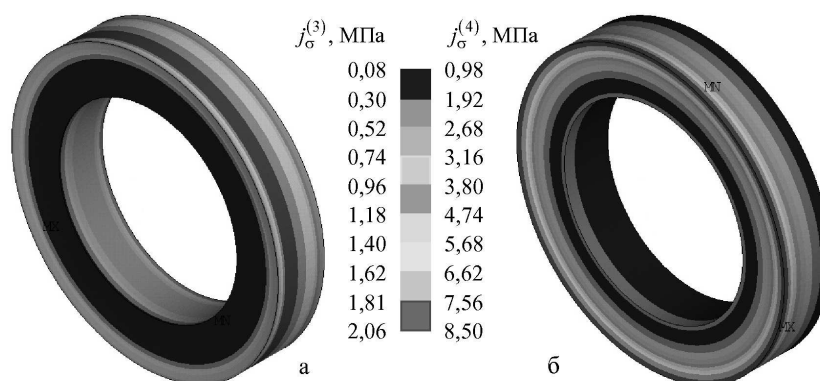


Рисунок 1 – Распределение третьих $j_{\sigma}^{(3)}$ (а) и четвертых $j_{\sigma}^{(4)}$ (б) инвариантов тензора напряжений в УЭ из ТГР при $T_{\text{int}} = 550^{\circ}\text{C}$

из ТРГ при движении штока в сторону нажимной втулки. Несмотря на то, что максимальные касательные напряжения наблюдаются вблизи внутренней боковой поверхности УЭ, контактирующей со штоком, наибольшие значения $j_{\sigma}^{(3)}$ имеют место на внешней боковой поверхности, а $j_{\sigma}^{(4)}$ — еще и на участке, контактирующем с нажимной втулкой.

На рисунке 2 представлены распределения третьего инварианта в пакете из двух УЭ при температуре рабочей среды $T_{\text{int}} = 300^{\circ}\text{C}$. На границе контакта колец были заданы условия проскальзывания. Как видим, наибольшие значения $j_{\sigma}^{(3)}$ имеют место на внешней и внутренней боковых поверхностях в областях, прилегающих к нажимной втулке и границе контакта УЭ в пакете. Поэтому слабое сопротивление ТРГ сдвиговому воздействию в плоскости изотропии является основной причиной наблюдаемой при эксплуатации кранов с уплотнением по штоку потери герметизации и разрушения на отмеченных участках.

Полученные численные решения позволили определить оптимальные давления герметизации, обосновать рекомендации по внесению изменений в существующие конструкции пакетов УЭ, а также разработать основы для создания методик

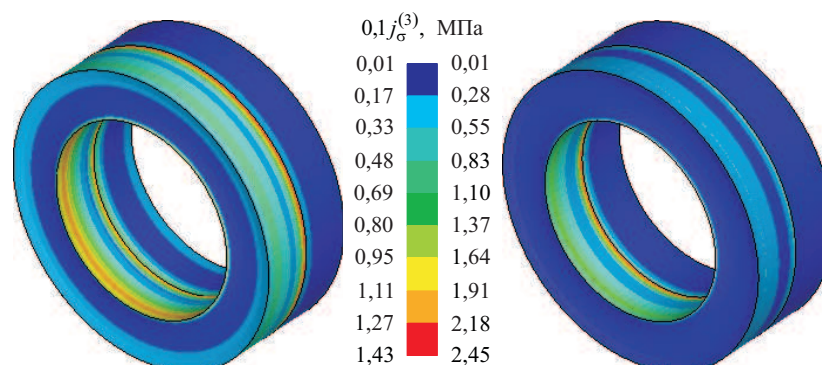


Рисунок 2 – Распределение третьих инвариантов тензора напряжений в пакете УЭ из ТРГ при возвратно-поступательном движении штока: от нажимной втулки (а) и в сторону нажимной втулки (б) при $T_{\text{int}} = 550^{\circ}\text{C}$

уточненного прочностного анализа для инженеров-конструкторов, учитывающих анизотропию теплофизических, деформационных и прочностных свойств ТРГ и реальные механизмы разрушения. Неожиданный результат — зависимость значений инвариантов от направления движения штока был объяснен на основе анализа полученного авторами [6] нового точного аналитического решения задачи о равновесии ограниченных по длине трансверсально-изотропных цилиндрических тел, на внутренней поверхности которых заданы условия контакта с трением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 11–01–96033).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белова М. Ю., Малкова И. А., Кузинова Т. М., Колышкин А. С., Исаев О. Ю. Модифицированные уплотнения из терморасширенного графита // Арматуростроение. 2006. № 3. С. 67–71.
- [2] Белова М. Ю., Исаев О. Ю., Розовский А. С., Смирнов Д. В. Уплотнения из терморасширенного графита: условия безопасного применения в среде жидкого и газообразного кислорода // Арматуростроение. 2006. № 2. С. 70–75.
- [3] Зайцев А. В., Злобин Н. Г., Исаев О. Ю., Смирнов Д. В. Моделирование условий эксплуатации и уточненный прочностной анализ уплотнительных элементов из терморасширенного графита // Вестник ПНИПУ. Механика. 2012. № 4. С. 5–19.
- [4] Караваев Д. М., Ханов А. М., Дегтярев А. И., Макарова Л. Е., Смирнов Д. В., Исаев О. Ю. Механические свойства композиционного материала на основе терморасширенного графита // Изв. Самарского НЦ РАН. 2012. Т. 14, № 1. С. 562–564.
- [5] Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
- [6] Зайцев А. В., Рогов Д. С. Моделирование начального режима работы кольца из термо-расширенного графита в кранах с уплотнением по штоку // Изв. Самарского НЦ РАН. 2012. Т. 14, № 1. С. 1235–1238.

Zaitsev A. V., Isaev O. Yu., Karavaev D. M., Smirnov D. V., Khanov A. M.
Mathematical model for describing behavior of flexible graphite o-ring seals under their exploitation in stop valves. The influence of thermoforce loading conditions on the character of stress-strain distributions along cross-sections of FG o-ring seals and their packs has been investigated. FEM Calculations have been made of estimation of damage mechanisms affection on strength, of a comparison of different loading modes, height and conditions on contact surfaces between seals on the maximum values of radial, hoop, axial, and shear stresses. The locations of damaged domains obtained from experiments correspond with the results of o-ring seals exploitation.

ТЕОРЕМА О СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ВЫСОКОПОРИСТЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЕНАХ, КЕРАМИКАХ И БИОКОМОЗИТАХ

Зайцев А. В., Кокшаров В. С., Соколкин Ю. В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

В рамках полидисперсных моделей механики композитов сформулирована и доказана теорема о знаке производной моментной функции второго порядка случайных полей напряжений и/или деформаций в 2D и 3D высокопористых материалах в точках, соответствующих нулевому значению аргумента. Доказана локальная изотропия этих полей, показано существенное влияние размера пор на значение производной.

Стохастическая многомасштабная структура высокопористых материалов и биокompозитов (пены, металлические губки, трабекулярная костная ткань) проявляется в случайности характерных размеров, формы и взаимного расположения пор. Прогнозирование эффективных деформационных свойств и определение статистических характеристик случайных полей напряжений и деформаций в компонентах этих материалов связаны с необходимостью решения стохастически нелинейных краевых задач, для построения приближенных решений которых требуются формулировка различных гипотез о характере парного и многочастичного взаимодействия в ансамбле пор.

На основе доказанных теорем о геометрическом смысле условных вероятностей [1, 2] предложен новый метод аналитического построения многоточечных моментных функций случайной структуры композитов с круглыми в поперечном сечении туннельными и сферическими порами (2D и 3D пористые материалы), который позволил записать выражения в виде рядов с конечным числом членов и разработать высокопроизводительные параллельные алгоритмы. Программная реализация этих алгоритмов, а также разработанных на основе комплексного применения аппарата кластерного и вейвлет анализа процедур идентификации и классификации фаз позволила вычислить значения моментных функций, определить стохастические закономерности модельных и реальных случайных структур, а также сформулировать новый критерий определения характерных размеров представительных объемов 2D и 3D пористых материалов. Детальный анализ сходимости рядов позволил также исследовать такие закономерности, как наличие или отсутствие локальности, а также параметров порядка — квазидетерминированных (эффект самоорганизации) и периодических составляющих в случайных полях структуры. Получены аналитические выражения и проанализировано влияние законов распределения, описывающих разброс характерных размеров пор на производные моментных функций случайной структуры композитов в точках, соответствующих нулевым (по модулю) значениям аргументов. Из этих выражений для производных безусловных второго и условных двухточечных моментных функций третьего и четвертого порядка в частном случае, когда туннельные и

сферические поры имеют одинаковый размер, при любых объемных наполнениях и малых значениях аргумента следуют равенства, впервые полученные П. Дебаем [3].

Если внутри фрагмента неоднородного материала можно выделить области, в пределах которых структурные поля напряжений и деформаций постоянны, то предложенный метод, после обобщения [4, 5], может быть применен для построения моментных функций этих полей.

Определение 1. Назовем прообразом фрагмент, представляющий конкретную реализацию случайной структуры с известным распределением полей напряжений и деформаций, разбитый на подобласти, в пределах которых исследуемые поля постоянны. Будем считать, что прообраз условно неподвижен.

Определение 2. Фрагмент, геометрически идентичный прообразу и содержащий информацию о характере распределения полей напряжений и деформаций, над которым могут быть осуществлены преобразования трансляции и произвольного пространственного разворота как жесткого целого, назовем образом.

Полидисперсные модели механики композитов позволяют не только получить точные (в рамках принятых гипотез) аналитические оценки для эффективных упругих модулей, но и определить производные условных моментных функций второго порядка случайных полей напряжений и деформаций [4, 5]. В рамках используемого приближения предполагается, что анализируемые высокопористые композиты являются конгломератами полых частиц ω_k (рисунок 1, а), имеющих внутренний произвольный радиус a_k и внешний радиус b_k ($c = a_k/b_k = const$, причем это условие оказывается справедливым вне зависимости от характерного размера поры). Кроме того, будем полагать, что напряжения и деформации в полых частицах, составляющих структуру 2D и 3D высокопористых материалах случайны и однородно распределены.

Пусть $\tau(\mathbf{r})$ — исследуемый параметр случайного поля структурных деформаций (напряжений). Тогда безусловная нормированная моментная функция второго порядка случайного поля $\tau(\mathbf{r})$ при $|\Delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$ может быть представлена в виде ряда с конечным числом членов:

$$\tilde{K}_{\tau}^{(2)}(|\Delta\mathbf{r}|, \varphi) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \sum_{k=1}^M \left[(\tau_k^{\circ})^2 \text{mes } \omega_k \cap \omega'_k + \tau_k^{\circ} \sum_{l=1}^L (\tau_l^{\circ} \text{mes } \omega_l \cap \omega'_k) \right] \quad (1)$$

где $\tau_k^{\circ}(\mathbf{r}) = \tau_k(\mathbf{r}) - \langle \tau_k(\mathbf{r}) \rangle \equiv const$ — пульсация исследуемого поля, M — количество содержащихся в рассматриваемом представительном объеме композита Ω полых частиц ω_k . Здесь $\text{mes } \omega_k \cap \omega'_l$ — меры пересечений, образованные в результате смещения k -ой полый частицы образа относительно той же частицы, принадлежащей прообразу (рисунок 1, а), а $\text{mes } \omega_l \cap \omega'_k$ — меры пересечений рассматриваемого полого включения с ближайшими, определяемыми координатным числом L (рисунок 1, б), а φ — угол, определяющий ориентацию вектора трансляции $\Delta\mathbf{r}$.

При смещении образа относительно прообраза в направлении вектора трансляции $\Delta\mathbf{r}$ изменяется расстояние $R = \sqrt{(r_l + r_k)^2 + |\Delta\mathbf{r}|^2 - 2|\Delta\mathbf{r}|(r_l + r_k) \cos \delta}$ между центром искомой полый частицы образа и центрами ближайших частиц, принадлежащих прообразу. Здесь δ — угол, образованный вектором трансляции

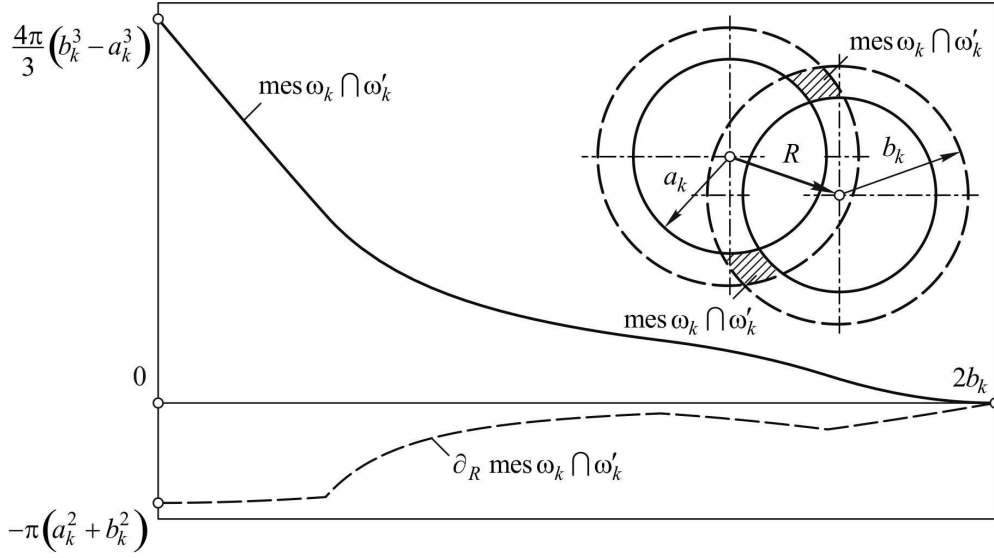


Рисунок 1 – К определению мер пересечений полых включений

и прямой проходящей через центры соседних частиц до начала движения (рисунок 1, б).

Используя формулы для мер ненулевого пересечения кругов и шаров различных радиусов r_k и r_l , запишем при $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$ слагаемые

$$\text{mes } \omega_l \cap \omega'_k = r_k^2 \arccos \left[H \left(1 - \frac{|\Delta \mathbf{r}| \cos \delta}{r_k} \right) \right] + r_l^2 \arccos \left[H \left(1 - \frac{|\Delta \mathbf{r}| \cos \delta}{r_l} \right) \right] - \sqrt{(r_k + r_l) [2r_k r_l - (r_k + r_l) |\Delta \mathbf{r}| \cos \delta] |\Delta \mathbf{r}| \cos \delta}, \quad (2)$$

$$\text{mes } \omega_l \cap \omega'_k = \frac{\pi}{3Q} \left\{ (r_k + r_l)^2 |\Delta \mathbf{r}|^2 \cos^2 \delta - 2[(r_k^4 + r_l^4) - r_k r_l (r_k^2 + r_l^2) + (r_k^3 + r_l^3) (|\Delta \mathbf{r}| \cos \delta + Q)] \right\}, \quad (3)$$

которые определяют выражение (1) вклад областей матрицы, ближайших (по отношению к рассматриваемой частице) полых круговых и шаровых включений. Здесь $p = (r_k + r_l + R)/2$, $H = (r_k + r_l)/Q$ и $Q = \sqrt{(r_k + r_l) (r_k + r_l - 2 |\Delta \mathbf{r}| \cos \delta)}$.

На рисунке 2 для случая $c = a_k/b_k = 3/5$ представлены зависимости мер пересечений и их частных производных от расстояния между центрами полых частиц. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. Производные условных и безусловных моментных функций второго порядка случайных полей напряжений и/или деформаций в 2D и 3D высокопористых композитах в точках, соответствующих нулевому значению аргумента, отрицательны, их значения не зависят от направления, в котором ведется построение этих функций, и координационного числа случайной структуры, а величина обратно пропорциональна суммарному периметру (площади) межфазных границ пора — матрица.

Доказательство. Выполняя подстановки (2) и (3) в равенство (1), найдем про-

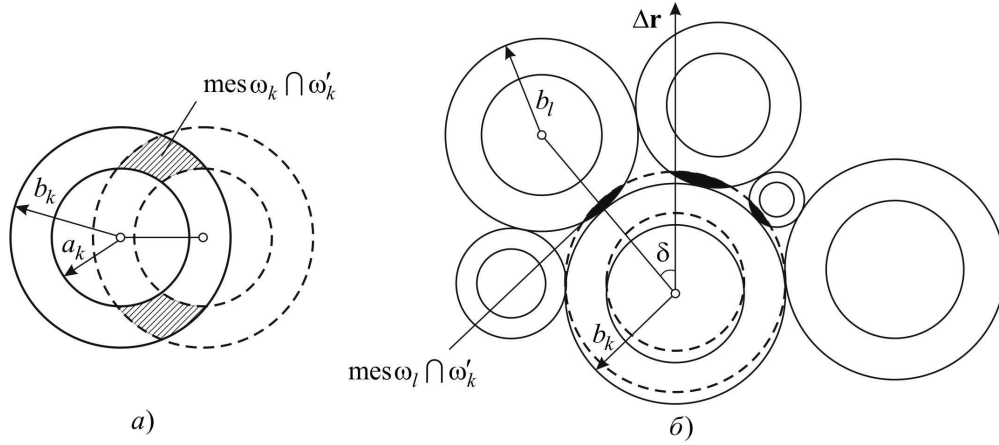


Рисунок 2 – Зависимость мер пересечения областей и их производных от расстояния между центрами пор

изводные при $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$

$$\left. \frac{\partial K_{\tau}^{(2)}}{\partial |\Delta \mathbf{r}|} \right|_{|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} = -\frac{2}{\text{mes } \Omega} \sum_{k=1}^M [(a_k + b_k) (\tau_k^{\circ})^2] = -\frac{2c}{\pi M (1 - c) \langle a_k^2 \rangle} \sum_{k=1}^M [a_k (\tau_k^{\circ})^2] \quad (4)$$

и

$$\left. \frac{\partial K_{\tau}^{(2)}}{\partial |\Delta \mathbf{r}|} \right|_{|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} = -\frac{\pi}{\text{mes } \Omega} \sum_{k=1}^M [(a_k^2 + b_k^2) (\tau_k^{\circ})^2] = -\frac{3c(1 + c^2)}{4M(1 - c^3) \langle a_k^3 \rangle} \sum_{k=1}^M [a_k^2 (\tau_k^{\circ})^2] \quad (5)$$

безусловных моментных функций второго порядка случайных полей $\tau(\mathbf{r})$ в 2D и 3D высокопористых композитах соответственно. Как видим, искомые производные отрицательны, а их знак не зависит от отношения $c = a_k/b_k$, определяющего объемную пористость, и направления, в котором строится $K_{\tau}^{(2)}(|\Delta \mathbf{r}|, \varphi)$. Последний вывод оказывается справедлив потому, что формулы (4) и (5) не содержат угол φ , определяющий ориентацию вектора трансляции $\Delta \mathbf{r}$. Теорема доказана.

Следствие. Если включения внутри представительных объемов Ω имеют одинаковый радиус, то искомые производные $\partial K_{\tau}^{(2)}(|\Delta \mathbf{r}|, \varphi) / \partial |\Delta \mathbf{r}|$ при $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$ обратно пропорциональны этому радиусу. Действительно

$$\left. \frac{\partial K_{\tau}^{(2)}}{\partial |\Delta \mathbf{r}|} \right|_{|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} = -\frac{2c}{\pi M (1 - c) a_k} \sum_{k=1}^M (\tau_k^{\circ})^2,$$

$$\left. \frac{\partial K_{\tau}^{(2)}}{\partial |\Delta \mathbf{r}|} \right|_{|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} = -\frac{3c(1 + c^2)}{4M(1 - c^3) a_k} \sum_{k=1}^M (\tau_k^{\circ})^2.$$

Замечание 1. Поскольку в знаменателе формул (4), (5) стоит вторая и третья степень радиуса частиц армирующего наполнителя, то существенное влияние на значение производной должен оказывать фракционный состав материала, предопределяемый типом закона распределения характерных размеров пор.

Замечание 2. Отсутствие зависимости производных $\partial K_{\tau}^{(2)}(|\Delta \mathbf{r}|, \varphi) / \partial |\Delta \mathbf{r}|$ при $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$ от угловых координат свидетельствует о локальной изотропии полей напряжений и/или деформаций в высокопористых материалах случайной структуры в приближении «малых расстояний».

При построении приближенных решений стохастических краевых задач механики высокопористых композитов используются различные гипотезы о характере многочастичного взаимодействия в ансамбле пор и аппроксимации моментных функций. Производные этих функций в точках, соответствующих нулевым значениям аргументов ($|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$), могут рассматриваться в качестве одного из возможных условий для верификации и отбраковки существующих и разрабатываемых моделей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 11-01-00910).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зайцев А. В. Моментные функции второго порядка случайной структуры односторонне армированных волокнистых композитов // Вестник УГТУ-УПИ. Механика микронеоднородных материалов и разрушение. 2006. № 12. С. 63–69.
- [2] Зайцев А. В., Покатов Я. К. Новый метод построения моментных функций второго порядка случайной структуры полимербетонов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2007. № 15. С. 28–45.
- [3] Debye P., Anderson H. R., Brumberger H. Scattering by an inhomogeneous solid. II. The correlation function and its application // J. Appl. Phys. 1957. Vol. 28, № 6. С. 679–683.
- [4] Зайцев А. В., Кислицын А. В., Кокшаров В. С. Общие закономерности структуры, случайных полей напряжений и деформаций в волокнистых и дисперсно-упрочненных композитах // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4, Ч. 4. С. 1485–1487.
- [5] Зайцев А. В., Кокшаров В. С. Статистическое описание случайных полей напряжений и деформаций в дисперсно-упрочненных композитах // Молодежная наука Прикамья. 2010. Вып. 11. С. 167–171.

Zaitsev A. V., Koksharov V. S., Sokolkin Yu. V. *Theorem on major regularities of random stress and strain fields in high-porous metallic foams, ceramics and biocomposites.* The new method for analytical calculation of multipoint correlation functions of random stress and strain fields in high-porous materials was developed. Theorem on the derivative sign of unconditional correlation functions of the second order at the points corresponding to zero values of arguments, and on the local isotropy of random fields was formulated and proved.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ УПРУГОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ ВНЕ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Залётов В. В.¹, Залётов С. В.², Хапилова Н. С.¹

¹*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк*

²*Таганрогский государственный педагогический институт им. А. П. Чехова*

Исследовано аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи теории упругости для полупространства с граничными условиями: в круговой области V на упругое тело действует распределенная нагрузка, зависящая от радиальной координаты, вне области V нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения на поверхности полупространства отсутствуют, на бесконечности напряжения обращаются в нуль. Получены формулы для компонент вектора перемещения на границе полупространства. Численно проанализировано влияние параметра, характеризующего упругие свойства полупространства и закрепление его поверхности, на распределение перемещений в граничной плоскости в случае, когда приложенная нагрузка равномерно распределена по круговой области.

Введение. Задача Буссинеска [1] о распределении напряжений и перемещений в изотропном полупространстве, к границе которого приложена нормальная сосредоточенная сила, является базовой моделью при построении решений прикладных задач в геомеханике, машиностроении, строительной механике, биофизике, инженерной медицине и других областях науки.

С помощью метода суперпозиции решений для сосредоточенных сил в монографии [2] получены формулы для перемещений и напряжений на границе полупространства, деформируемого нагрузкой, равномерно распределенной по круговой области.

В работах [3, 4] приведено аналитическое решение осесимметричной задачи о действии на полупространство распределенной по кругу нормальной нагрузки, при упругом закреплении границы вне области приложения внешних усилий.

Ниже на основе аналитического решения задачи изучено распределение перемещений на границе полупространства с упруго закрепленной поверхностью в случае нагрузки, отвечающей условиям осевой симметрии. Численно исследована зависимость радиального перемещения от параметра, характеризующего закрепление поверхности и упругие свойства полупространства, при действии в круговой области нормальной нагрузки постоянной интенсивности.

1. Постановка задачи. Граничные условия.

Система уравнений линейной теории упругости включает уравнения равновесия, соотношения Коши, закон Гука и условия совместности деформаций. Для исследования осесимметричной деформации упругого полупространства введем цилиндрическую систему координат r, θ, z . Её начало поместим в центре круговой области приложения нормальной нагрузки. Сформулируем математическую

постановку задачи. В области $\{0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq z < \infty\}$ найти неизвестные компоненты тензора напряжений $\sigma_r(r, z), \sigma_\theta(r, z), \sigma_z(r, z), \tau_{rz}(r, z)$ и вектора перемещений $u(r, z), w(r, z)$, удовлетворяющие основным уравнениям теории упругости и следующим смешанным условиям на границе полупространства:

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, 0) &= -q(r), r < a; \\ \sigma_z(r, 0) &= kw(r, 0), a < r < \infty; \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0, 0 < r < \infty.\end{aligned}\quad (1)$$

В формулах (1) введены обозначения: k — постоянный коэффициент пропорциональности напряжений и перемещений, $q(r)$ — нагрузка, распределенная по кругу радиуса a .

2. Аналитические формулы для перемещений на границе полупространства.

Решение задачи о симметричной деформации изотропного полупространства при смешанных граничных условиях (1) получено в работе [3]. Согласно решению [3] распределение перемещений в граничной плоскости $z = 0$ имеет вид

$$u(r, 0) = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \int_0^\infty \bar{\beta}(t) J_1(rt) \frac{tdt}{t + \chi}, \quad (2)$$

$$w(r, 0) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \int_0^\infty \bar{\beta}(t) J_0(rt) \frac{tdt}{t + \chi}. \quad (3)$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона, J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка, параметр χ находится из соотношения [3]

$$\chi = \frac{2k(1 - \nu^2)}{E}. \quad (4)$$

Через $\bar{\beta}(t)$ обозначена трансформанта функции $\beta(r)$ при интегральном преобразовании Ханкеля

$$\bar{\beta}(t) = \int_0^\infty \beta(r) r J_0(rt) dr. \quad (5)$$

Введенная при решении задачи функция $\beta(r)$ связана с внешней нагрузкой $q(r)$ равенством

$$\beta(r) = \begin{cases} q(r) + kw(r, 0), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (6)$$

Переходя в формулах (2)–(3) от трансформанты к оригиналу функции β , преобразуем соотношения для перемещений к виду

$$u(r, 0) = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \int_0^a \beta(\xi) g_u(\xi, r) d\xi, \quad (7)$$

$$w(r, 0) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \int_0^a \beta(\xi) g_w(\xi, r) d\xi. \quad (8)$$

В формулах (7), (8) функции g_u, g_w определяются равенствами

$$g_u(\xi, r) = \xi \int_0^\infty J_0(\xi, t) J_1(rt) \frac{tdt}{t + \chi}, \quad (9)$$

$$g_w(\xi, 0) = \xi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{tdt}{t + \chi}, \quad (10)$$

а функция $\beta(r)$ находится из решения интегрального уравнения

$$\beta(r) = q(r) + \int_0^a \beta(\xi) g_{1w}(\xi, r) d\xi, \quad r < a \quad (11)$$

где

$$g_{1w}(\xi, r) = \chi g_w(\xi, r). \quad (12)$$

Преобразуем несобственные интегралы в формулах (9)–(10) к виду

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi, r) &= \int_0^\infty J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{tdt}{t + \chi} = \\ &= \int_0^\infty J_0(\xi t) J_1(rt) dt - \chi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{dt}{t + \chi}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi, r) &= \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{tdt}{t + \chi} = \\ &= \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(rt) dt - \chi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{dt}{t + \chi}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислим [5] первые интегралы в правых частях соотношений (13), (14), получим

$$\varphi_1(\xi, r) = -\chi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_1(rt) \frac{dt}{t + \chi} + \frac{1}{r} \{0\}, [\xi \leq r], \quad (15)$$

$$\varphi_2(\xi, r) = -\chi \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(rt) \frac{dt}{t + \chi} + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\xi} K\left(\frac{\xi}{r}\right) \right\}, [\xi \leq r]. \quad (16)$$

Здесь $K\left(\frac{\xi}{r}\right)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. С учетом формул (7)–(10), (13), (14), представим компоненты перемещений на границе полупространства в виде

$$u(r, 0) = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} \int_0^a \beta(\xi) \xi \varphi_1(\xi, r) d\xi, \quad (17)$$

$$w(r, 0) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \int_0^a \beta(\xi) \xi \varphi_2(\xi, r) d\xi, \quad (18)$$

где функции $\varphi_1(\xi, r), \varphi_2(\xi, r)$ определяются соотношениями (15), (16).

3. Анализ численных результатов.

На рисунках 1а, 1б представлены графики распределения радиальных перемещений при изменении безразмерной координаты r/a от 1 до 4 для значений параметра χ , равных 0.2, 1, 1.8 (м^{-1}).

Расчёты по формуле (17) выполнялись при следующих значениях упругих постоянных: $\nu = 0, 25$; $E = 10^4$ МПа. Интенсивность нагрузки, равномерно распределенной по кругу единичного радиуса $a = 1$ м, полагалась равной $q_0 = 1$ МПа. Интеграл в соотношении (17) вычислялся по формуле трапеций. Для решения

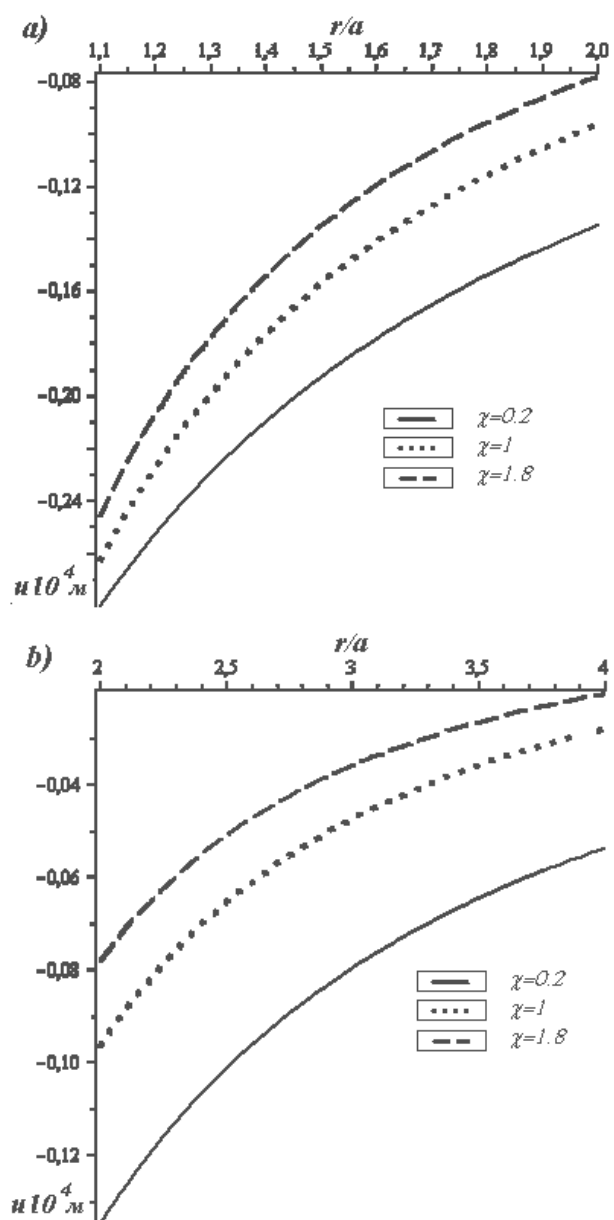


Рисунок 1 – Распределение радиальных перемещений на границе полупространства

интегрального уравнения (11) использовался метод последовательных приближений [6].

Из графиков видно, что при выбранных значениях параметра χ радиальные перемещения на отрезке $r/a \in [1; 4]$ с ростом r монотонно уменьшаются. Абсолютные значения $u(r)$ увеличиваются при уменьшении параметра χ . Из расчётов следует, что влияние параметра χ на распределение перемещений возрастает при удалении от границы области приложения нагрузки $r = a$ и становится существенным в интервале изменения радиальной координаты $[1.3, 3.0]$, при $r/a > 3$ появляется тенденция к сближению кривых на *рис.1б*.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Boussinesq J.* Application des Potentiels a l'Etude l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Gauthier-Villars, Paris. 1885. 721 p.
- [2] *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- [3] *Хапилова Н.С., Залётов С.В.* Осесимметричная деформация изотропного полупространства при упругом закреплении границы вне области приложения нормальной нагрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XV Международной конференции. Ростов-на-Дону. 4–7 декабря 2011г., 2011. Т. 2, С. 246–250.
- [4] *Хапилова Н.С., Залётов В.В., Залётов С.В.* Осесимметричная задача о действии распределенной нагрузки на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Т. 25. С. 251–259.
- [5] *Градштейн И.С. Рыжик Н.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1974. 1108 с.
- [6] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984. 752 с.

Zaletov V. V., Zaletov S. V., Khapilova N. S. *The distribution of displacements on the boundary of isotropic half-space with elastic fixing its surface outside a circular area of the application of normal load.* Investigated the analytical solution axisymmetric mixed problem of elasticity theory for a half-space with the boundary conditions: in a circular area of V on the half-space acts distributed load, depending on the radial coordinate, outside V the normal stresses and displacements are proportional, at the surface shear stresses are absent, at infinity — stresses vanish. Obtained formulas for components of the displacement's vector on the boundary of the half-space. Numerically analyzed the influence of the parameter, characterizing elastic properties of the half-space and fixing its surface, on the distribution the of displacements in the bounding plane for the case, when applied load is distributed uniformly on a circular area.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Зеленина А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена задача о больших деформациях чистого изгиба цилиндрических (призматических) упругих тел с непрерывно распределенными дислокациями. Исследование основано на системе уравнений трехмерной нелинейной теории упругости, состоящей из уравнений равновесия для напряжений, определяющих соотношений материала и уравнений несовместности. Упругое тело в отсчетной конфигурации имеет форму цилиндра произвольного поперечного сечения. Образующие цилиндра параллельны оси x_3 , а координаты x_1, x_2 отсчитываются в плоскости поперечного сечения. Задача об изгибе решена полуобратным методом, позволяющим отделить переменную x_3 и свести исходную трехмерную задачу к двумерной краевой задаче для плоской области σ в форме поперечного сечения бруса. Решение полученной двумерной краевой задачи позволяет, в частности, исследовать влияние дислокаций на нелинейную зависимость изгибающего момента от параметра β , характеризующего кривизну оси изогнутого стержня.

1. Исходные соотношения. Система уравнений равновесия нелинейно упругой среды с непрерывно распределенными дислокациями состоит [1, 2] из уравнений статики для несимметричного тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

определяющих соотношений упругого материала

$$\mathbf{D} = \frac{dW}{d\mathbf{C}} \quad (2)$$

и тензорного уравнения несовместности

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha}. \quad (3)$$

В (1)–(3) $\mathbf{C}$ — тензор дисторсии, $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор плотности дислокаций, W — удельная потенциальная энергия материала, div и rot — операторы дивергенции и ротора в координатах отсчетной конфигурации. В (1) принято допущение об отсутствии массовых сил. Тензор плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$, который считается заданной функцией лагранжевых координат, должен удовлетворять требованию соленоидальности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (4)$$

Если дислокации отсутствуют ($\boldsymbol{\alpha} = 0$), то тензор дисторсии может быть представлен в виде

$$\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R},$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек тела в деформированной конфигурации, grad — оператор градиента в отсчетной конфигурации. В этом случае $\mathbf{C}$ называется градиентом деформации, или градиентом места [3]. При $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ векторное поле $\mathbf{R}$

не существует. Для упругого тела с непрерывно распределенными дислокациями нельзя определить поле перемещений частиц, но можно найти поля вращений, деформаций и напряжений.

2. Приведение к двумерной краевой задаче. Рассмотрим упругое тело, которое имеет в отсчетной конфигурации форму призматического (цилиндрического) бруса произвольного поперечного сечения. Декартовы координаты x_1 и x_2 отсчитываются в плоскости поперечного сечения, а координата x_3 отсчитывается по оси стержня. Координатные орты обозначим $\mathbf{i}_k$ ($k=1,2,3$).

Предположим, что тензор плотности дислокаций не зависит от координаты x_3 и имеет следующее строение

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} = & \alpha_{13}(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \alpha_{23}(x_1, x_2)\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \\ & + \alpha_{31}(x_1, x_2)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha_{32}(x_1, x_2)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 \cos \beta x_3 + \mathbf{i}_3 \sin \beta x_3, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{i}_2 \sin \beta x_3 + \mathbf{i}_3 \cos \beta x_3, \quad \beta = \text{const.}$$

Условие соленоидальности (4) накладывает следующее ограничение на компоненты тензора $\boldsymbol{\alpha}$

$$\frac{\partial \alpha_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{23}}{\partial x_2} + \beta \alpha_{32} = 0. \quad (6)$$

Компонента α_{31} может быть произвольной дифференцируемой функцией переменных x_1, x_2 .

Тензор дисторсии будем разыскивать в виде [4], соответствующем нелинейному изгибу бруса в плоскости x_2, x_3

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & C_{11}(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + C_{12}(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \\ & + C_{21}(x_1, x_2)\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 + C_{22}(x_1, x_2)\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + C_{33}(x_1, x_2)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (7)$$

На основании (5), (7) уравнение несовместности (3) принимает следующую компонентную форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{33}}{\partial x_2} - \beta C_{22} &= \alpha_{13}, & -\frac{\partial C_{33}}{\partial x_1} + \beta C_{12} &= \alpha_{23}, \\ \frac{\partial C_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial C_{11}}{\partial x_2} &= \alpha_{31}, & \frac{\partial C_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial C_{12}}{\partial x_2} &= \alpha_{32}, \end{aligned} \quad (8)$$

Из четырех уравнений (8) только первые три являются независимыми. При помощи условия соленоидальности тензорной плотности дислокаций (6) легко проверить, что четвертое уравнение в (8) следует из первых двух. Таким образом, в задаче изгиба тензорное уравнение несовместности (3) приводится к трем скалярным соотношениям.

Для изотропного материала упругий потенциал W — функция инвариантов деформации

$$\begin{aligned} I_1 = \text{tr} \mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}^2 (\mathbf{G} - \text{tr} \mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{G}, \\ \mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{G}$ — мера деформации Коши [3]. Из (2) и (9) следует общее представление тензора напряжений Пиолы для изотропного тела

$$\mathbf{D} = a_1(I_1, I_2, I_3) \mathbf{C} + a_2(I_1, I_2, I_3) \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} + a_3(I_1, I_2, I_3) \mathbf{C}^{-T}. \quad (10)$$

где a_1, a_2, a_3 — некоторые функции инвариантов. Из (7) вытекает, что при изгибе бруса тензор $\mathbf{G}$ и его инварианты не зависят от координаты x_3 . Поэтому для однородного изотропного тела в силу (7), (10) тензор Пиолы представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & D_{11}(x_1, x_2) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + D_{12}(x_1, x_2) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \\ & + D_{21}(x_1, x_2) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 + D_{22}(x_1, x_2) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + D_{33}(x_1, x_2) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11) векторное уравнение равновесия (1) заменяется двумя скалярными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial D_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} &= \beta D_{33}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как величины D_{sk} выражаются через компоненты тензора дисторсии C_{mn} при помощи уравнений состояния материала, соотношения (12) вместе с первыми тремя уравнениями (8) образуют полную систему уравнений относительно пяти неизвестных функций двух переменных $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{33}$. Граничные условия для этой системы, выражающие отсутствие нагрузки на боковой поверхности призматического тела, имеют вид

$$\begin{aligned} n_1 D_{11} + n_2 D_{21} &= 0, \\ n_1 D_{12} + n_2 D_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i}_1 + n_2 \mathbf{i}_2$ — единичная нормаль к граничному контуру поперечного сечения.

Итак, задача о сильном изгибе призматического бруса с распределенными дислокациями приведена к двумерной нелинейной краевой задаче для плоской области в форме поперечного сечения стержня.

Как доказано ранее [4], реализация деформации (3) требует приложения к торцам бруса только изгибающего момента, действующего в плоскости $x_2 x_3$. После решения краевой задачи (8), (12), (13) изгибающий момент M можно определить по формуле

$$M(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} \iint_{\sigma} W d\sigma, \quad (14)$$

где σ — область, занимаемая поперечным сечением.

3. Функции напряжений и вариационная формулировка двумерной краевой задачи. Число неизвестных функций в двумерной краевой задаче, описывающей нелинейный изгиб стержня с распределенными дислокациями, можно

уменьшить. Для этого запишем общее решение уравнений равновесия (12) через функции напряжений Φ_1, Φ_2, Ψ [4]

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad D_{12} = \beta \Phi_2, \quad D_{31} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \\ D_{22} &= -\beta \Phi_1, \quad D_{33} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее предполагается, что определяющее соотношение (10) можно обратить, т. е. выразить тензор дисторсии $\mathbf{C}$ через тензор напряжений Пиолы. Тогда с учетом (15) компоненты дисторсии $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{33}$ будут выражены через функции Φ_1, Φ_2, Ψ и их производные. Поскольку уравнения равновесия (12) тождественно удовлетворены, функции напряжений остается подчинить трем уравнениям несовместности

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{33}}{\partial x_2} - \beta C_{22} &= \alpha_{13}, \quad -\frac{\partial C_{33}}{\partial x_1} + \beta C_{12} = \alpha_{23}, \\ \frac{\partial C_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial C_{11}}{\partial x_2} &= \alpha_{31}. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае односвязной области σ граничные условия (13) формулируются в терминах функций напряжений следующим образом

$$n_1 \Phi_2 - n_2 \Phi_1 = 0, \quad \Psi = 0. \quad (17)$$

Соотношения (16), (17) образуют двумерную нелинейную краевую задачу типа Дирихле относительно функций напряжений.

Важной особенностью использования функций напряжений в задачах равновесия упругих тел с непрерывно распределенными дислокациями является возможность перехода к вариационной постановке. Вариационная постановка основана на понятии удельной дополнительной энергии V как функции тензора напряжений Пиолы, связанной с удельной потенциальной энергией W преобразованием Лежандра [5]

$$V(\mathbf{D}) = \text{tr}(\mathbf{C}^T(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}) - W(\mathbf{D}).$$

По свойству преобразования Лежандра имеем

$$\mathbf{C}(\mathbf{D}) = \frac{dV(\mathbf{D})}{d\mathbf{D}}. \quad (18)$$

Функционал дополнительной энергии в задаче изгиба призматического тела с дислокациями имеет вид

$$\Pi[\Phi_1, \Phi_2, \Psi] = \iint_{\sigma} \{V[\mathbf{D}(\Phi_1, \Phi_2, \Psi)] - \alpha_{13}\Phi_1 - \alpha_{23}\Phi_2 - \alpha_{31}\Psi\} d\sigma. \quad (19)$$

Варьируемые функции напряжений должны быть подчинены краевым условиям (17), а напряжения D_{sk} выражены через функции Φ_1, Φ_2, Ψ при помощи (15).

Уравнениями Эйлера вариационной задачи о стационарности функционала Π являются уравнения несовместности (16).

4. Универсальное решение о сильном изгибе призматического бруса с распределенными дислокациями. Рассмотрим частный случай распределения дислокаций, когда $\alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$, $\alpha_{13} = \text{const}$. В этом случае при $\beta = -\alpha_{13}$ система (16) имеет следующее решение

$$C_{11} = 1, \quad C_{22} = 1, \quad C_{12} = C_{21} = 0, \quad C_{33} = 1,$$

которому, согласно (7), соответствует такой тензор дисторсии

$$\mathbf{C} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (20)$$

Выражение (20) представляет собой собственно ортогональный тензор, описывающий поворот сечения бруса на угол βx_3 вокруг орта $\mathbf{i}_1$. В силу ортогональности дисторсии тензор деформаций

$$\frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}),$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор, тождественно равен нулю. Значит, равны нулю и напряжения. Следовательно, при постоянной плотности краевых дислокаций стержень изгибается без всякого сопротивления.

Полученное решение носит универсальный характер в том смысле, что оно справедливо для любого материала и произвольной формы поперечного сечения цилиндрического тела.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zubov L. M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. В.: Springer, 1997. 205 p.
- [2] Deresin S. V., Zubov L. M. Disclinations in nonlinear elasticity // ZAMM Z. Angew. Math. und Mech. 2011. V. 91. P. 433–442.
- [3] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [4] Зеленина А. А., Zubov Л. М. Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел // ПММ. 2000. Т. 64. В. 3. С. 416–423.
- [5] Zubov Л. М. Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 241–245.

Zelenina A. A. *Nonlinear bending of prismatic bar with distributed dislocations.* Problem of cylindrical (prismatic) bodies with continuously distributed dislocations pure bending under large deformations is considered.

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Зеленцов В. Б.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается динамическая контактная задача о скольжении плоского штампа по границе упругой полуплоскости. В подвижных координатах, связанных с движущимся штампом, контактная задача сводится к решению двумерного интегрального уравнения, двумерное ядро которого зависит от разности аргументов по каждой из переменных. Приближенное решение интегрального уравнения задачи построено в четырёх скоростных диапазонах движения штампа, охватывающих весь спектр его скоростей. Рассматриваемая задача впервые была исследована Л. А. Галиным [1] методами теории функций комплексной переменной в дозвуковом диапазоне движения штампа. В [2, 3] рассматриваемая задача была решена в «режиме установившихся движений» без учета инерции основания, а в [4] задача решена предлагаемым методом в дозвуковом диапазоне.

1. Постановка задачи и её интегральное уравнение. Рассматривается динамическая контактная задача о движении по границе ($y = 0$) упругой полуплоскости ($|x| < \infty$, $0 \leq y < \infty$) с постоянной скоростью V в отрицательном направлении оси Ox плоского штампа ширины $2a$ ($-a - Vt \leq x \leq a - Vt$, $y = 0$). Движущийся штамп внедряется в упругую полуплоскость, смещаясь параллельно оси Oy по закону $y = \varepsilon(t)$ ($t > 0$), таким образом, что его основание остаётся параллельным оси Ox , а на границе упругой полуплоскости выполняется условие $v(x + Vt, 0, t) = \varepsilon(t)$ при $-a - Vt \leq x \leq a - Vt$, где v — вертикальное смещение упругой полуплоскости. Силы трения и сцепления между основанием штампа и упругой полуплоскостью отсутствуют. Поверхность полуплоскости вне области контакта штампа с упругой средой свободна от напряжений: $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$, где σ_{yy} — нормальные, а σ_{xy} — касательные напряжения. На бесконечности в упругой полуплоскости смещения u , v и напряжения σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{xx} стремятся к нулю. Начальные условия задачи нулевые: при $t = 0$ $u = v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

С помощью интегральных преобразований Лапласа (по времени t) и Фурье (по координате x) поставленная смешанная начально-краевая задача в подвижной системе координат, связанной со штампом, приводится к решению двумерного интегрального уравнения [4]

$$\int_0^t d\tau \int_{-a}^a \varphi(\xi, \tau) k(\xi - x, t - \tau) d\tau = -2\pi\mu c_V^{-1} \varepsilon(t), \quad |x| \leq a, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$k(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} dp \int_{\Gamma} K(u) e^{iuxp/c_2} du, \quad K(u) = (1 - iu\beta_2)^2 \sigma_2 R^{-1}(u) \quad (2)$$

$$R(u) = c_V \left[(2u^2 + (1 - iu\beta_2)^2)^2 - 4/u^2 \sigma_1 \sigma_2 \right] \quad (3)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{u^2 + (1 - iu\beta_2)^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 + \beta^2(1 - iu\beta_2)^2}, \quad \beta_k = V/c_k, \quad k = 1, 2$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}, \quad c_V = \lim_{|u| \rightarrow \infty} uK(u)$$

относительно нормальных напряжений $\sigma_{yy}(x, 0, t) = \varphi(x, t)$, возникающих под штампом на границе упругой полуплоскости, Γ — контур интегрирования в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, проходящий по прямой под углом $-\arg p$ к действительной оси, c_1, c_2 — скорости фронтов продольной и поперечной упругих волн, c_V — постоянная, зависящая от V .

Общие свойства подынтегральной функции $K(u)$ ядра интегрального уравнения указаны в [4], из которых отметим следующие:

$$K(u) = \frac{1}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \text{ при } |u| \rightarrow \infty, \quad 0 < \arg u < 2\pi \quad (4)$$

$$K(u) = K(0) + O(u) \text{ при } |u| \rightarrow 0, \quad K(0) = \beta/c_V. \quad (5)$$

В комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ функция $K(u)$ является многозначной и имеет следующие изолированные особые точки: четыре точки ветвления алгебраического типа $u = -i\gamma_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$), лежащие на мнимой оси, γ_k в которых вычисляются по формулам

$$\gamma_1 = \frac{\beta}{\beta_1 - 1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\beta_2 - 1}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\beta_2 + 1}, \quad \gamma_4 = \frac{\beta}{\beta_1 + 1}, \quad (6)$$

и два полюса Рэлея $u = -i\gamma_k$ ($k = 5, 6$), также лежащих на мнимой оси, для которых

$$\gamma_5 = \frac{\eta_R}{\beta_R - 1}, \quad \gamma_6 = \frac{\eta_R}{\beta_R + 1}, \quad \beta_R = \frac{V}{c_R}, \quad (7)$$

где $\pm i\eta_R$ являются корнями классического уравнения Рэлея

$$(2u^2 + 1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2 + 1}\sqrt{u^2 + \beta^2} = 0,$$

а c_R — скорость волны Рэлея.

2. Приближенное решение интегрального уравнения. Решение двумерного интегрального уравнения задачи (1) строится в виде [4, 5]

$$\varphi(x, t) = \varphi^+(a + x, t) + \varphi^-(a - x, t) - \varphi^\infty(x, t), \quad 0 \leq t < 2a/c_1, \quad |x| \leq a, \quad (8)$$

где $\varphi^\pm(a \pm x, t)$ являются решениями соответствующих двумерных интегральных уравнений на координатной полуоси, $\varphi^\infty(x, t)$ — решение соответствующего двумерного интегрального уравнения на всей оси

$$\varphi^\infty(x, t) = -\frac{\mu}{\beta} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (9)$$

Решения двумерных интегральных уравнений на координатной полуоси определяются с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье и метода Винера–Хопфа решения одномерных интегральных уравнений [4, 6].

Решение двумерного интегрального уравнения задачи (1) вида (8) построено в четырёх скоростных диапазонах изменения V : I. $V > c_1$; II. $c_2 < V < c_1$; III. $c_R < V < c_2$; IV. $V < c_R$, в которых для искомых $\varphi^\pm(x, t)$, $v_\mp(x, t)$ были получены следующие формулы:

$$\text{I. } \varphi^+(x, t) = \varphi^\infty(x, t)H(t) + x^{-1} \sum_{k=1}^2 \Phi_k^+(x, t)H(t - x\tau_k) \quad t > 0, x > 0 \quad (10)$$

$$\Phi_1^+(x, t) = \frac{\mu}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{t-x\tau_1}^{t-x\tau_2} + \int_{t-x\tau_3}^{t-x\tau_4} \right) \varepsilon(\tau) G_1^+(x, c_2(t - \tau)) d\tau$$

$$\Phi_2^+(x, t) = \frac{\mu}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-x\tau_2}^{t-x\tau_3} \varepsilon(\tau) G_2^+(x, c_2(t - \tau)) d\tau, \quad \tau_k = \frac{\gamma_k}{c_2} (k = 1, 2, 3, 4)$$

$$G_1^+(x, t) = b_1(x, t)R^{-1}(x, t), \quad G_2^+(x, t) = G_1^+(x, t) - b_2(x, t)R^{-1}(x, t)$$

$$b_1(x, t) = (-2t^2 + (x - \beta_2 t)^2)^2, \quad R(x, t) = t(x - \beta_2 t)^2 \sqrt{t - x\gamma_4} \sqrt{x\gamma_1 - t} \sqrt{\beta_1^2 - 1}$$

$$b_2(x, t) = 4t^2 \sqrt{t - x\gamma_4} \sqrt{x\gamma_1 - t} \sqrt{t - x\gamma_3} \sqrt{x\gamma_2 - t} \sqrt{b_1^2 - 1} \sqrt{b_2^2 - 1}$$

$$v_-(x, t) = 0 \quad t > 0, x < 0 \quad (11)$$

$$\varphi^-(x, t) = \varphi^\infty(x, t) \quad t > 0, x > 0 \quad (12)$$

$$v_+(x, t) = -\frac{1}{\pi\beta} \sum_{k=1}^2 V_k^+(x, t)H(t + x\tau_k) \quad t > 0, x < 0 \quad (13)$$

$$V_1^+(x, t) = \left(\int_{t+x\tau_1}^{t+x\tau_2} + \int_{t+x\tau_3}^{t+x\tau_4} \right) \varepsilon(\tau) B_1^+(x, c_2(t - \tau)) d\tau$$

$$V_2^+(x, t) = \int_{t+x\tau_2}^{t+x\tau_3} \varepsilon(\tau) B_2^+(x, c_2(t - \tau)) d\tau$$

$$B_1^+(x, t) = xt^{-1}b_1(x, t)R(x, t)R_1^{-1}(x, t), \quad B_2^+(x, t) = xt^{-1}R(x, t)R_2^{-1}(x, t),$$

$$R_1(x, t) = t(b_1^2(x, t) - b_2^2(x, t)), \quad R_2(x, t) = t(b_1(x, t) - b_2(x, t))$$

$$\text{II. } \varphi^+(x, t) = \varphi^\infty(x, t)H(t) - x^{-3/2}\Phi^+(x, t)H(t - x\tau_4) \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (14)$$

$$\Phi^+(x, t) = \frac{K_+^+(0)}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-x\tau_4} \varepsilon(\tau) G_+^+(x, c_2(t - \tau)) d\tau,$$

$$G_+^+(x, t) = \frac{(-x\gamma_5 + t)(x\gamma_6 - t)}{t\sqrt{t - x\gamma_4}r_+^+(-itx^{-1})}$$

$$v_-(x, t) = -(-x)^{-1/2}V_0^-(x, t)H(t - x\tau_1) \quad t > 0, \quad x < 0 \quad (15)$$

$$V_0^-(x, t) = \frac{1}{\pi K_-^+(0)} \int_0^{t-x\tau_1} \varepsilon(\tau) G_+^-(x, c_2(t - \tau)) d\tau,$$

$$G_-^+(x, t) = c_2 t^{-1} \sqrt{-x\gamma_1 + t} r_-^+(-itx^{-1})$$

$$\varphi^-(x, t) = \varphi^\infty(x, t)H(t) - x^{1/2}\Phi^-(x, t)H(t + x\tau_1) \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (16)$$

$$\Phi^-(x, t) = \frac{K_+^-(0)}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t+x\tau_1} \varepsilon(\tau) G_+^-(x, c_2(t - \tau)) d\tau$$

$$v_+(x, t) = -(-x)^{3/2}V_0^+(x, t)H(t + x\tau_4) \quad t > 0, \quad x < 0 \quad (17)$$

$$V_0^+(x, t) = \frac{1}{\pi K_-^-(0)} \int_0^{t+x\tau_4} \varepsilon(\tau) G_-^-(x, c_2(t - \tau)) d\tau,$$

$$G_-^-(x, t) = -\frac{c_2\sqrt{t+x\gamma_4}}{t(x\gamma_5 + t)(x\gamma_6 + t)} r_-^-\left(\frac{it}{x}\right)$$

III. Формулы $\varphi^\pm(x, t)$, $v_\mp(x, t)$ в этом скоростном диапазоне полностью совпадают с формулами предыдущего скоростного диапазона II, за исключением формул для $r_\pm^\pm(u)$ и $K_\pm^\pm(0)$.

$$\text{IV. } \varphi^+(x, t) = \varphi^\infty(x, t)H(t) + x^{-1/2}\Phi^+(x, t)H(t - x\tau_4) \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (18)$$

$$\Phi^+(x, t) = \frac{K_+^+(0)}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-x\tau_4} \varepsilon(\tau) G_+^+(x, c_2(t - \tau)) d\tau, \quad G_+^+(x, t) = \frac{x\gamma_0 - t}{t\sqrt{t - x\gamma_4}r_+^+(-itx^{-1})}$$

$$v_-(x, t) = (-x)^{1/2}V_0^-(x, t)H(t - x\tau_1) \quad t > 0, \quad x < 0 \quad (19)$$

$$V_0^-(x, t) = \frac{1}{\pi K_-^+(0)} \int_0^{t-x\tau_1} \varepsilon(\tau) G_-^+(x, c_2(t - \tau)) d\tau, \quad G_-^+(x, t) = \frac{c_2\sqrt{t-x\gamma_1}}{t(t-x\gamma_5)} r_-^+\left(-\frac{it}{x}\right)$$

$$\varphi^-(x, t) = \varphi^\infty(x, t)H(t) - x^{-1/2}\Phi^-(x, t)H(t + x\tau_1) \quad t > 0, x > 0 \quad (20)$$

$$\Phi^-(x, t) = \frac{K_+^-(0)}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t+x\tau_1} \varepsilon(\tau) G_+^-(x, c_2(t - \tau)) d\tau, \quad G_+^-(x, t) = \frac{x\gamma_5 + t}{t\sqrt{x\gamma_1 + tr_+}(-itx^{-1})}$$

$$v_+(x, t) = -(-x)^{1/2}V_0^+(x, t)H(t + x\tau_4) \quad t > 0, x < 0 \quad (21)$$

$$V_0^+(x, t) = \frac{1}{\pi K_-^-(0)} \int_0^{t+x\tau_4} \varepsilon(\tau) G_-^-(x, c_2(t - \tau)) d\tau, \quad G_-^-(x, t) = -\frac{c_2\sqrt{t + x\gamma_4}}{t(x\gamma_6 + t)} r_-^-\left(-\frac{it}{x}\right)$$

Формулы для $r_\pm^\pm(u)$ и $K_\pm^\pm(0)$ определяются в результате факторизации [5] подинтегральной функции $K(\pm u)$ ядра (2) интегрального уравнения (1) в каждом конкретном диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
- [2] Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 336 с.
- [3] Белокопъ А. В., Наседкин А. В. Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами. В кн. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 331–348.
- [4] Зеленцов В. Б., Батурина Н. Ю. О движении плоского штампа по границе упругой полуплоскости // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 3. С. 40–48.
- [5] Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
- [6] Флитман Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 4. С. 697–605.

Zelentsov V. B. *Dynamic contact problem about a flat punch moving along the boundary of an elastic half-plane.* Dynamic contact problem about sliding of a flat punch along the boundary of elastic half-plane is considered. In the moving coordinate system, relative to the moving punch, the contact problem reduces to the solution of the two-dimensional integral equation, which have a two-dimensional kernel depending on the difference between the arguments by each of the variables. An approximated solution of the integral equation of the problem is constructed in the four ranges of the punch velocity, which cover all possible values of the velocity. The problem was first considered by L. A. Galin [1] using methods of complex analysis in subsonic velocity range. Considered problem was solved in the «steady-state movement» mode without respect to inertia of the foundation in [2, 3]. In [4] the problem was solved by the proposed method in subsonic velocity range.

МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МЕХАНОДИФФУЗИИ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО СЛОЯ

Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.

*Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)*

Рассматривается задача об определении напряжённо деформированного состояния упругой двухкомпонентной среды с учётом структурных изменений, обусловленных наличием диффузионных потоков. Влияние диффузионных процессов на напряжённо-деформированное состояние среды учитывается с помощью локально равновесной модели упругой диффузии, включающей в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнения массопереноса. Для решения используется разложение искомых функций в ряды Фурье с последующим применением интегрального преобразования Лапласа по времени. Строится фундаментальное решение задачи. Рассмотрены примеры для случаев, когда диффузионный поток на границе затухает по экспоненциальному закону.

1. Постановка задачи. Пусть имеется однородный слой, представляющий собой твёрдый двухкомпонентный раствор. Будем предполагать, что на поверхностях $x = 0, L$ задано перемещение и диффузионные потоки. Физико-механические процессы в среде без учёта температурных эффектов в декартовой системе координат описываются уравнениями, которые в данном случае имеют вид (штрих — производная по пространственной координате, точка — производная по времени) [1]:

$$u'' = \ddot{u} + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2', \quad D_1 \eta_1'' = \dot{\eta}_1 + \Lambda_1 u''', \quad D_2 \eta_2'' = \dot{\eta}_2 + \Lambda_2 u''', \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_1(\tau), \quad u|_{x=L} = f_2(\tau), \\ (\Lambda_1 u'' - D_1 \eta_1')|_{x=0} &= f_3(\tau), \quad (\Lambda_2 u'' - D_2 \eta_2')|_{x=0} = f_5(\tau), \\ (\Lambda_1 u'' - D_1 \eta_1')|_{x=L} &= f_4(\tau), \quad (\Lambda_2 u'' - D_2 \eta_2')|_{x=L} = f_6(\tau), \\ u|_{\tau=0} &= \dot{u}|_{\tau=0} = \eta_q|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь все величины являются безразмерными и для них используются следующие обозначения (черта над символами в дальнейшем опускается):

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad u = \frac{\bar{u}}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad c^2 = \frac{C_{3333}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{n_0^{(q)} \alpha_{33}^{(q)}}{C_{3333}}, \quad f_k(\tau) = \frac{\bar{f}_k(\tau)}{cn_0^{(q)}}, \quad q = 1, 2,$$

$$\eta_q = \frac{\eta^{(q)}}{n_0^{(q)}}, \quad D_q = \frac{D_{33}^{(q)} g^{(q)}}{cL}, \quad \Lambda_q = \frac{\Lambda_{3333}^{(q)}}{cLn_0^{(q)}}, \quad \Lambda_{3333}^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} \alpha_{33}^{(q)} D_{33}^{(q)}}{RT_0},$$

где t — время; $\bar{x}$ — декартова координата, $\bar{u}$ — перемещение, L — толщина слоя, $\eta_q = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ — приращение концентрации q -ой компоненты вещества, $n_0^{(q)}$ — начальная концентрация веществ, C_{3333} — упругая постоянная; $\alpha_{33}^{(q)}$ — коэффициент,

определяемый типом кристаллической решётки, $D_{33}^{(q)}$ — коэффициенты самодиффузии, $g^{(q)}$ — термодинамический множитель Даркена, R — постоянная Больцмана, T_0 — температура.

2. Метод решения. Пусть $G_{uk} = u$ и $G_{\eta k}^q = \eta_q$ — функции Грина задачи (1)–(2).

С учётом того, что функции Грина связаны между собой соотношениями

$$G_{u2}(x, \tau) = G_{u1}(1 - x, \tau), \quad G_{u4}(x, \tau) = G_{u3}(1 - x, \tau), \quad G_{u6}(x, \tau) = G_{u5}(1 - x, \tau),$$

$$G_{\eta 2}^q(x, \tau) = G_{\eta 1}^q(1 - x, \tau), \quad G_{\eta 4}^q(x, \tau) = G_{\eta 3}^q(1 - x, \tau), \quad G_{\eta 6}^q(x, \tau) = G_{\eta 5}^q(1 - x, \tau),$$

решение задачи (1)–(2) представимо в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^3 [G_{u,2k-1}(x, \tau) * f_{2k-1}(\tau) + G_{u,2k-1}(1 - x, \tau) * f_{2k}(\tau)], \\ \eta_q &= \sum_{k=1}^3 [G_{\eta,2k-1}^q(x, \tau) * f_{2k-1}(\tau) + G_{\eta,2k-1}^q(1 - x, \tau) * f_{2k}(\tau)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, для определения перемещения и приращения концентрации достаточно найти только функции G_{uk} и $G_{\eta k}^{(q)}$ при $k = 1, 3, 5$. Применяя к задаче (1)–(2) преобразование Лапласа по времени и выполняя редукцию к нулевым граничным условиям получим

$$\begin{aligned} s^2 U^L - U^{L''} + \alpha_1 H_1^{L'} + \alpha_2 H_2^{L'} &= F_1(x, s), \\ s H_1^L - D_1 H_1^{L''} + \Lambda_1 U^{L'''} &= F_3(x, s), \quad s H_2^L - D_2 H_2^{L''} + \Lambda_2 U^{L'''} = F_5(x, s), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U^L|_{x=0} &= 0, \quad U^L|_{x=1} = 0, \\ (\Lambda_1 U^{L''} - D_1 H_1^{L'})|_{x=0} &= 0, \quad (\Lambda_2 U^{L''} - D_2 H_2^{L'})|_{x=0} = 0, \\ (\Lambda_1 U^{L''} - D_1 H_1^{L'})|_{x=1} &= 0, \quad (\Lambda_2 U^{L''} - D_2 H_2^{L'})|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$U^L = u^L - \varphi, \quad H_q^L = \eta_q^L - \psi_q, \quad (6)$$

u^L и η_q^L — трансформанты Лапласа искомых функций u и η_q ; функции φ и ψ_q определяются равенствами

$$\varphi(x, s) = \varphi^*(x) f_1^L(s), \quad \psi_1(x, s) = \psi_1^*(x) f_3^L(s), \quad \psi_2(x, s) = \psi_2^*(x) f_5^L(s),$$

$$\varphi^*(x) = 1 - x, \quad \psi_1^*(x) = \frac{1}{D_1} \left(\frac{x^2}{2} - x \right), \quad \psi_2^*(x) = \frac{1}{D_2} \left(\frac{x^2}{2} - x \right),$$

$$F_1(x, s) = \varphi^*(x) \left[-s^2 f_1^L(s) + \frac{\alpha_1}{D_1} f_3^L(s) + \frac{\alpha_2}{D_2} f_5^L(s) \right],$$

$$F_3(x, s) = [1 - s\psi_1^*(x)] f_3^L(s), \quad F_5(x, s) = [1 - s\psi_2^*(x)] f_5^L(s),$$

f_1^L , f_3^L и f_5^L — трансформанты Лапласа функций, входящих в правые части граничных условий (2).

Решение задачи (4)–(5) ищется в виде рядов по собственным функциям

$$U^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^L(s) \sin \lambda_n x, \quad H_q^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{qn}^L(s) \sin \lambda_n x, \quad (7)$$

при этом записываем в виде аналогичных рядов функции φ , ψ_q и правые части уравнений в (4).

В результате, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно функций U_n^L , H_{nq}^L решая которую находим далее по формулам (6), (7) функции u^L и η_q^L , которые с учётом (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} u^L &= G_{u1}^L(x, s) f_1^L(s) + G_{u3}^L(x, s) f_3^L(s) + G_{u5}^L(x, s) f_5^L(s), \\ \eta_q^L &= G_{\eta 1}^{(q)}(x, s) f_1(s) + G_{\eta 3}^{(q)}(x, s) f_3(s) + G_{\eta 5}^{(q)}(x, s) f_5(s), \end{aligned} \quad (8)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} G_{u1}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{u1n}^L(s) \sin \lambda_n x, \quad G_{u3}^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{u3n}^L(s) \sin \lambda_n x, \\ G_{u5}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{u5n}^L(s) \sin \lambda_n x, \quad G_{\eta 1}^{1L}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 1n}^{1L}(s) \cos \lambda_n x, \\ G_{\eta 3}^{1L}(x, s) &= G_{\eta 30}^{1L}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 3n}^{1L}(s) \cos \lambda_n x, \quad (9) \\ G_{\eta 5}^{1L}(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 5n}^{1L}(s) \cos \lambda_n x, \quad G_{\eta 1}^{2L}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 1n}^{2L}(s) \cos \lambda_n x, \\ G_{\eta 3}^{2L}(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 3n}^{2L}(s) \cos \lambda_n x, \quad G_{\eta 5}^{2L}(x, s) = G_{\eta 50}^{2L}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 5n}^{2L}(s) \cos \lambda_n x, \\ G_{\eta 30}^{1L}(s) &= G_{\eta 50}^{2L}(s) = \frac{1}{s}, \\ G_{u1n}^L(s) &= 2\lambda_n \frac{s^2 + a_{1n}s + a_{2n}}{P_{4n}(s)}, \quad G_{u3n}^L(s) = \frac{2\alpha_1 \lambda_n (s + a_{3n})}{P_{4n}(s)}, \quad G_{u5n}^L(s) = \frac{2\alpha_2 \lambda_n (s + a_{4n})}{P_{4n}(s)}, \\ G_{\eta 1n}^{1L}(s) &= -\frac{2\Lambda_1 \lambda_n^2 (s^3 + a_{3n}s)}{P_{4n}(s)}, \quad G_{\eta 3n}^{1L}(s) = 2 \frac{s^3 + a_{3n}s^2 + \lambda_n^2 s + a_{5n}}{P_{4n}(s)}, \quad G_{\eta 5n}^{1L}(s) = \frac{2\alpha_2 \Lambda_1 \lambda_n^2}{P_{4n}(s)}, \\ G_{\eta 1n}^{2L}(s) &= -\frac{2\Lambda_2 \lambda_n^2 (s^3 + a_{4n}s)}{P_{4n}(s)}, \quad G_{\eta 3n}^{2L}(s) = \frac{2\alpha_1 \Lambda_2 \lambda_n^2}{P_{4n}(s)}, \quad G_{\eta 5n}^{2L}(s) = 2 \frac{s^3 + a_{4n}s^2 + \lambda_n^2 s + a_{6n}}{P_{4n}(s)}, \\ a_{1n} &= \lambda_n^4 (D_1 + D_2 + \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_2), \quad a_{2n} = \lambda_n^4 (D_1 D_2 - \alpha_1 \Lambda_1 D_1 - \alpha_2 \Lambda_2 D_1), \\ a_{3n} &= D_2 \lambda_n^2, \quad a_{4n} = D_1 \lambda_n^2, \quad a_{5n} = \lambda_n^4 (D_2 - \alpha_1 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2), \quad a_{6n} = \lambda_n^4 (D_1 - \alpha_1 \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2), \\ P_{4n}(s) &= (s^2 + \lambda_n^2) (s + D_1 \lambda_n^2) (s + D_2 \lambda_n^2) - \alpha_1 \Lambda_1 \lambda_n^4 (s + D_2 \lambda_n^2) - \alpha_2 \Lambda_2 \lambda_n^4 (s + D_1 \lambda_n^2). \end{aligned}$$

3. Вычисление оригиналов функций влияния. Перейдём теперь к вычислению оригиналов функций влияния. Для этого дроби входящие в (9), разлагаются на элементарные. В результате получаем

$$G_{u1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (A_{11n} \cos z_n \tau + A_{12n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{13n} e^{s_{3n} \tau} + A_{14n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{u3} = 2\alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (A_{12n} \cos z_n \tau + A_{22n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{23n} e^{s_{3n} \tau} + A_{24n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{u5} = 2\alpha_2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (A_{32n} \cos z_n \tau + A_{32n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{33n} e^{s_{3n} \tau} + A_{34n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{\eta 1}^1 = -2\Lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (A_{42n} \cos z_n \tau + A_{42n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{43n} e^{s_{3n} \tau} + A_{44n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{\eta 3}^1 = H(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_{52n} \cos z_n \tau + A_{52n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{53n} e^{s_{3n} \tau} + A_{54n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{\eta 5}^1 = 2\alpha_2 \Lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (A_{62n} \cos z_n \tau + A_{62n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{63n} e^{s_{3n} \tau} + A_{64n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{\eta 1}^2 = -2\Lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (A_{72n} \cos z_n \tau + A_{72n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{73n} e^{s_{3n} \tau} + A_{74n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{\eta 3}^2 = 2\alpha_1 \Lambda_2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (A_{62n} \cos z_n \tau + A_{62n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{63n} e^{s_{3n} \tau} + A_{64n} e^{s_{4n} \tau}),$$

$$G_{\eta 5}^2 = H(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_{82n} \cos z_n \tau + A_{82n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{83n} e^{s_{3n} \tau} + A_{84n} e^{s_{4n} \tau}),$$

где $H(\tau)$ — функция Хевисайда, $z_n^2 = s_1 s_2$, s_1, s_2 — комплексные корни, а s_3, s_4 — действительные корни многочлена P_{4n} , A_{prn} , $p = \overline{1, 8}$, $r = \overline{1, 4}$ — коэффициенты разложения дробей в (9) на элементарные [1].

Используя полученные выражения для функций влияния, решение исходной задачи (1)–(2) находится по формулам (3). В качестве примера рассмотрена задача, в которой на поверхности $x = 0$ задан диффузионный поток для первой компоненты вещества в виде $f_3(\tau) = e^{-\tau}$. Результаты расчёта представлены на графиках, приведенных ниже.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-08-00064 и гранта ФЦП (соглашение № 14.В37.21.0381 от 02.08.2012).

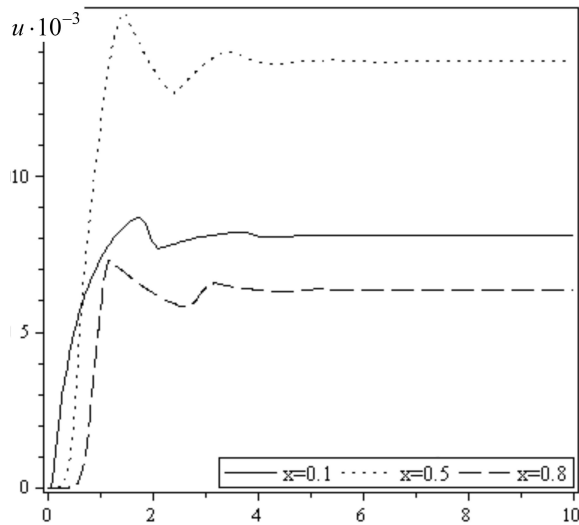


Рисунок 1 – Зависимость перемещений от времени: Сплошная линия соответствует $x = 0.1$, линия с точками — $x = 0.5$, пунктирная — $x = 0.8$.

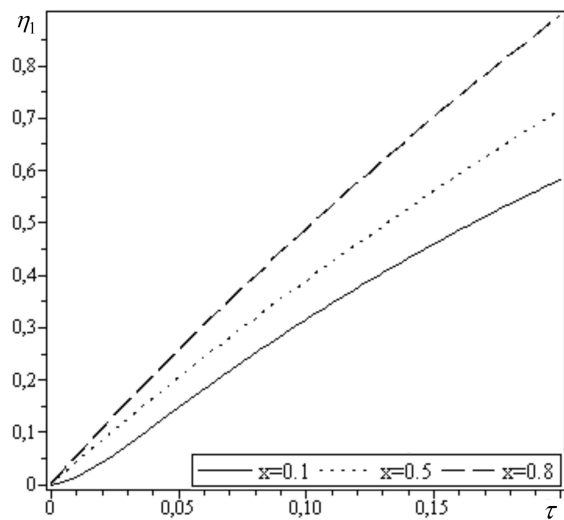


Рисунок 2 – Зависимость приращения концентрации от времени для первого вещества: Сплошная линия соответствует $x = 0.1$, линия с точками — $x = 0.5$, пунктирная — $x = 0.8$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гойхбург Д. М., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Двухкомпонентный упруго диффузионный слой под действием одномерных нестационарных возмущений // Вестник Московского авиационного института. 2013, Т. 20. № 2. С. 226–237.

Zemskov A. V., Tarlakovsky D. V. *Non-stationary diffusion model of elasticity for two-component layer.* The problem of determining the stress strain state of an elastic medium, taking into account the structural changes caused by the presence of diffusion fluxes. The influence of diffusion processes on the stress-strain state of the environment is taken into account by using the locally equilibrium model of elastic diffusion, which includes the coupled system of equations of motion of an elastic body and the equations of heat and mass transfer. For solutions used decompositions of the unknown functions in Fourier series and then applying the integral Laplace transform with respect to time. We construct a fundamental solution of the problem. For examples the cases where the diffusion flux at the boundary is decays exponentially are considered.

ОДНОРОДНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследован вопрос об универсальных однородных деформациях микрополярной изотропной упругой среды. Найденное в работе множество универсальных деформаций характеризуется тем, что градиент деформации может быть произвольным неособым постоянным тензором, а тензор микроповорота либо совпадает с тензором макropоворота, либо отличается от него полуоборотом вокруг некоторых осей.

1. Универсальными деформациями для данного класса материалов в механике сплошной среды называют также деформации, которые удовлетворяют уравнениям равновесия для любого материала из этого класса при отсутствии массовых нагрузок. Ценность универсальных деформаций заключается в их удобстве для экспериментального определения уравнений состояния материалов. Для простых (неполярных) упругих материалов, как известно [1, 2], универсальными являются любые однородные деформации, т. е. такие, для которых градиент деформации $\mathbf{F}$ постоянен (не зависит от координат). В более узком классе упругих материалов, а именно для изотропных несжимаемых тел существует набор неоднородных универсальных деформаций [1, 2]. Класс неоднородных универсальных деформаций для изотропных микрополярных тел построен в [3].

Ниже исследуется вопрос об универсальных однородных деформациях для микрополярной однородной упругой среды (континуума Коссера), в которой поле вращений кинематически независимо от поля перемещений. Однородными деформациями микрополярного тела называются такие, в которых постоянны градиент деформации и тензор микроповорота.

Система уравнений равновесия упругой микрополярной среды при отсутствии массовых сил и моментов имеет вид [4]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} = -\mathbf{H} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{H})^T + \frac{1}{2} \operatorname{Itr}[\mathbf{H} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{H})^T] \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathbf{R}, \quad W = W(\mathbf{E}, \mathbf{L})$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений типа Кирхгофа, $\mathbf{H}$ — собственно ортогональный тензор микроповорота, $\mathbf{E}$ — мера деформации, $\mathbf{L}$ —

тензор изгибной деформации, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{R}$ — вектор положения частицы среды в деформированной конфигурации, W — удельная потенциальная энергия деформации. Символы grad, div и rot означают соответственно операции градиента, дивергенции и ротора в координатах отсчетной конфигурации тела. Через $\Phi_{\times}$ обозначен векторный инвариант тензора второго ранга Φ :

$$\Phi_{\times} = (\Phi_{sk} \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k)_{\times} \triangleq \Phi_{sk} \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_k .$$

2. В дальнейшем будем рассматривать изотропный микрополярный материал. Требование изотропности накладывает следующие ограничения на тензорные функции $\mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{L})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{E}, \mathbf{L})$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T, \varepsilon \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{K}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T, \varepsilon \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^T) &= \varepsilon \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varepsilon = \det \mathbf{Q}$$

где $\mathbf{Q}$ — любой ортогональный тензор.

При однородной деформации тензоры $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ постоянны, а тензор $\mathbf{L}$ согласно (3) равен нулю. Из однородности среды вытекает, что тензоры напряжений $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$ постоянны. Поэтому первое уравнение равновесия в (1) удовлетворяется тождественно, а второе в силу (2), (3) принимает вид

$$(\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{P})_{\times} = 0 \quad (5)$$

Уравнение (5) выражает собой баланс моментов при однородной деформации. Оно эквивалентно требованию симметричности тензора $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{P}$ и при заданном градиенте деформации служит для определения тензора микроповорота $\mathbf{H}$. Решение уравнения (5), вообще говоря, может быть найдено только при известном определяющем соотношении материала, т.е. при заданной функции $W(\mathbf{E}, \mathbf{0})$. Тем не менее, как показано в данной работе, в классе изотропных микрополярных материалов существуют решения уравнения (5), которые не зависят от определяющих соотношений. Такие решения называются универсальными для изотропных материалов. При построении этих решений будет использоваться следующая

Т е о р е м а. *В случае изотропного континуума Коссера уравнение (5) удовлетворяется при таких однородных деформациях, для которых мера деформации $\mathbf{E}$ будет симметричным тензором.*

Доказательство. Так как тензор $\mathbf{E}$ по условию симметричен, для него справедливо спектральное разложение

$$\mathbf{E} = E_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + E_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + E_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 \quad (6)$$

где $\mathbf{d}_k (k = 1, 2, 3)$ — ортонормированный набор собственных векторов. Положим в соотношениях (4) при $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ поочередно

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I} - 2\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 , \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 , \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_3 = \mathbf{I} - 2d_3 \otimes d_3 .$$

В силу (6) имеем $\mathbf{Q}_s \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_s^T = \mathbf{E}$, $s = 1, 2, 3$.

Из (4) теперь следуют равенства

$$\mathbf{Q}_s \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_s, \quad s = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Умножая обе части равенства (7) слева на вектор d_m , а справа на вектор d_n ($m \neq n$), получим

$$d_m \cdot \mathbf{P} \cdot d_n = 0, \quad m \neq n \quad (8)$$

Последнее равенство означает, что тензор $\mathbf{P}$ симметричен и соосен тензору $\mathbf{E}$, т. е. имеет следующее спектральное разложение

$$\mathbf{P} = P_1 d_1 \otimes d_1 + P_2 d_2 \otimes d_2 + P_3 d_3 \otimes d_3 \quad (9)$$

Из (6) и (9) непосредственно видна симметричность тензора $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{P}$, что и доказывает теорему.

В силу теоремы и определения (3) построение универсальных однородных деформаций изотропных микрополярных тел сводится к определению тензора микроповорота $\mathbf{H}$ из системы нелинейных уравнений

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{H} = 1 \quad (10)$$

3. Для решения системы (10) воспользуемся полярным разложением градиента деформации [2]

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{U}$ — симметричный положительно определенный тензор растяжения, $\mathbf{A}$ — собственно ортогональный тензор макроповорота. Согласно (10), (11) симметричный тензор $\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T)^2 = \mathbf{U}^2 \quad (12)$$

Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис собственных векторов тензора $\mathbf{U}$. Тогда спектральное разложение тензора растяжения записывается так

$$\mathbf{U} = U_1 e_1 \otimes e_1 + U_2 e_2 \otimes e_2 + U_3 e_3 \otimes e_3 \quad (13)$$

Если собственные значения U_k различны, то проекторы в (13) определены однозначно и уравнение (12) имеет восемь решений

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^T = \pm U_1 e_1 \otimes e_1 \pm U_2 e_2 \otimes e_2 \pm U_3 e_3 \otimes e_3 \quad (14)$$

При помощи (11) и (14) находим искомый тензор микроповорота

$$\mathbf{H} = (\pm e_1 \otimes e_1 \pm e_2 \otimes e_2 \pm e_3 \otimes e_3) \cdot \mathbf{A} \quad (15)$$

Из восьми тензоров (15) только следующие четыре являются собственно ортогональными

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= \mathbf{A}, \quad \mathbf{H}_2 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{H}_3 &= (-\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{H}_4 &= (-\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{A}\end{aligned}\quad (16)$$

Тензоры, заключенные в скобки в выражениях (16), описывают полуобороты (т.е. обороты на 180°) вокруг главных осей тензора $\mathbf{U}$. Таким образом, множество микроповоротов, удовлетворяющих уравнениям равновесия при однородной деформации изотропного микрополярного тела, включает в себя макropоворот, а также повороты, отличающиеся от макropоворота полуоборотами вокруг главных осей тензора растяжения.

Если собственные значения тензора $\mathbf{U}$ кратные, то множество решений уравнения (10) становится бесконечным. Например, при $U_1 = U_2 = U_3$ микроповороты, соответствующие однородным универсальным деформациям, выражаются формулами

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = (2\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A} \quad (17)$$

где $\mathbf{e}$ — любой единичный вектор. В случае двукратного собственного значения, когда $U_1 = U_2 \neq U_3$ вектор $\mathbf{e}$ в (17) не вполне произволен. Он может быть равен $\mathbf{e}_3$, а также любому единичному вектору, расположенному в плоскости, ортогональной $\mathbf{e}_3$.

Полученное полное описание множества решений системы (10) завершает построение набора универсальных однородных деформаций изотропной микрополярной среды.

4. Рассмотрим напряжения, возникающие в микрополярном теле при однородных универсальных деформациях, на примере физически линейного материала [4]. Данная модель задается квадратичной функцией удельной потенциальной энергии деформации

$$\begin{aligned}2W &= \lambda \text{tr}^2(\mathbf{E} - \mathbf{I}) + (\mu + \beta) \text{tr}[(\mathbf{E} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{E}^T - \mathbf{I})] + (\mu - \beta) \text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{I})^2 + \\ &+ \delta \text{tr}^2 \mathbf{L} + (\gamma + \eta) \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + (\gamma - \eta) \text{tr} \mathbf{L}^2\end{aligned}\quad (18)$$

где $\lambda, \mu, \beta, \delta, \gamma, \eta$ — материальные постоянные. Определяющие соотношения данного материала согласно (2), (18) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \lambda \mathbf{I}(\text{tr} \mathbf{E} - 3) + (\mu + \beta)(\mathbf{E} - \mathbf{I}) + (\mu - \beta)(\mathbf{E}^T - \mathbf{I}) \\ \mathbf{K} &= \delta \mathbf{I} \text{tr} \mathbf{L} + (\gamma + \eta) \mathbf{L} + (\gamma - \eta) \mathbf{L}^T\end{aligned}\quad (19)$$

Так как при однородной деформации $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, моментные напряжения в силу (19) также равны нулю, а тензор силовых напряжений при $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ симметричен и записывается так

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{I}(\text{tr} \mathbf{E} - 3) + 2\mu(\mathbf{E} - \mathbf{I}) \quad (20)$$

Если рассматривается универсальная деформация, в которой $\mathbf{H} = \mathbf{A}$ (микроповорот совпадает с макроповоротом), то имеем

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{I}(\text{tr} \mathbf{U} - 3) + 2\mu(\mathbf{U} - \mathbf{I}) \quad (21)$$

Для универсальных деформаций, в которых $\mathbf{H} = (2\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}$, где $\mathbf{e}$ — любой собственный вектор тензора $\mathbf{U}$, напряжения будут такими

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{I}(2\mathbf{e} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{e} - \text{tr} \mathbf{U} - 3) + 2\mu(2\mathbf{U} \cdot \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{U} - \mathbf{I}) \quad (22)$$

Согласно (22) при $\mathbf{U} = \mathbf{I}$, в отличие от (21) $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$. Это означает, что при отсутствии метрической деформации, т.е. при нулевых удлинениях и сдвигах материальных волокон в микрополярном теле с кинематически независимым полем вращений могут существовать равновесные ненулевые силовые напряжения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 522 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Зубов Л. М. Универсальные решения для изотропных несжимаемых микрополярных тел // Доклады РАН. 2010. Т. 435. № 1. С. 35–39.
- [4] Zubov L. M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. B.: Springer. 1997. 205 p.

Zubov L. M. *Uniform universal deformations of isotropic micropolar elastic solids.* The problem of uniform universal deformations of micropolar isotropic elastic medium is analyzed. The set of universal deformations is established for which the deformation gradient is any non-singular constant second-order tensor while the microrotation tensor coincides with the the macrorotation tensor or with the macrorotation tensor subjected by 180-degree rotations about some axes.

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Зубов Л. М.¹, Филиппова Л. М.²

¹*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

²*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

На основе нелинейной континуальной теории дислокаций рассмотрена задача о больших деформациях упругого полого шара, содержащего непрерывно распределенные дислокации. В рамках модели полуплинейного материала найдено точное решение задачи о собственных напряжениях, обусловленных специальным распределением краевых дислокаций. Тензор плотности дислокаций принимается антисимметричным и характеризуется одной скалярной функцией радиальной координаты.

1. Система уравнений равновесия упругой среды включает в себя уравнение равновесия для несимметричного тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (1)$$

определяющие соотношения материала

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{C}) = \frac{dW}{d\mathbf{C}} \quad (2)$$

и геометрические соотношения

$$\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R} \quad (3)$$

Здесь div и grad — операторы дивергенции и градиента в координатах отсчетной конфигурации, ρ — плотность материала, $\mathbf{b}$ — массовая сила, $\mathbf{R}$ — вектор положения частиц тела в деформированном состоянии, $\mathbf{C}$ — градиент деформации (градиент места), W — удельная потенциальная энергия материала. Вместо соотношения (3) можно использовать уравнение совместности

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = 0$$

(rot — оператор ротора в отсчетной конфигурации), которое получается путем исключения векторного поля $\mathbf{R}$ из уравнения (3).

Если в теле имеются непрерывно распределенные дислокации, то векторное поле $\mathbf{R}$ не существует, а уравнение совместности заменяется уравнением несовместности [2–4]

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор плотности дислокаций. Заданное тензорное поле второго ранга $\boldsymbol{\alpha}$ должно быть соленоидальным, т. е. удовлетворять условию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} = 0$$

При наличии распределенных дислокаций тензор $\mathbf{C}$ будем называть тензором дисторсии, поскольку соотношение (3) в этом случае несправедливо.

2. В настоящее время известно очень мало точных решений нелинейной теории упругости для тел с распределенными дислокациями. Ниже найдено решение новой задачи о больших деформациях упругого полого шара с распределенными краевыми дислокациями.

Введем в отсчетной конфигурации полого шара сферические координаты r , φ (долгота) и θ (широта), а единичные векторы, касательные к координатным линиям, обозначим $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_\theta$. Тензор плотности дислокаций зададим в виде

$$\boldsymbol{\alpha} = \beta(r)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi) \quad (5)$$

Легко проверить, что тензорное поле (5) удовлетворяет требованию соленоидальности при любой функции $\beta(r)$.

Учитывая симметрию задачи, тензор дисторсии будем искать в виде

$$\mathbf{C} = C_r(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + C_\varphi(r)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \quad (6)$$

Для изотропного упругого материала зависимость тензора напряжений Пиолы от тензора дисторсии можно представить так [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \zeta(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{C} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{G}$ — мера деформации Коши, $\zeta(\mathbf{G})$ — изотропная тензорная функция. Из (6) и (7) вытекает, что тензор $\mathbf{D}$ в рассматриваемой задаче имеет выражение, аналогичное (6)

$$\mathbf{D} = D_r(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + D_\varphi(r)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \quad (8)$$

В силу (5), (6), (8) уравнение равновесия (1) при отсутствии массовых сил и уравнение несовместности (4) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dD_r}{dr} + \frac{2(D_r - D_\varphi)}{r} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{C_r - C_\varphi}{r} - \frac{dC_\varphi}{dr} = \beta(r) \quad (10)$$

Здесь подразумевается, что напряжения D_r и D_φ выражены через функции C_r и C_φ при помощи определяющих соотношений (7).

3. В качестве конкретной модели изотропной упругой среды в дальнейшем будем рассматривать полулинейный (гармонический) материал [1], для которого уравнение состояния имеет вид

$$\mathbf{D} = \frac{2\mu}{1-2\nu}(\nu \text{tr} \mathbf{U} - 1 - \nu) \mathbf{A} + 2\mu \mathbf{C} \quad (11)$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C}$$

Здесь μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\mathbf{U}$ — симметричный положительно определенный тензор растяжения, $\mathbf{A}$ — собственно ортогональный тензор поворота [1]. Тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{A}$ являются элементами полярного разложения тензора дисторсии

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}$$

Поскольку согласно (6)

$$\det \mathbf{C} = C_r(C_\varphi)^2$$

отрицательные значения функции $C_r(r)$ не имеют физического смысла. Следовательно, решение задачи о равновесии шара с дислокациями должно удовлетворять условию

$$C_r(r) > 0$$

С учетом этого из (6) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= C_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + |C_\varphi| (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \\ \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + (\operatorname{sgn} C_\varphi) (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

На основании (11), (12) находим выражения напряжений для полулинейного материала

$$\begin{aligned} D_r &= \frac{2\mu}{1-2\nu} [2\nu|C_\varphi| + (1-\nu)C_r - 1 - \nu] \\ D_\varphi = D_\theta &= \frac{2\mu(\operatorname{sgn} C_\varphi)}{1-2\nu} [2\nu|C_\varphi| + \nu C_r - 1 - \nu] + 2\mu C_\varphi \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что согласно (12) при $C_\varphi(r) > 0$ тензор поворота совпадает с единичным тензором. Это значит, что материальные волокна упругого тела не испытывают поворотов. Решение, в котором $C_\varphi(r) < 0$, описывает деформацию, сопровождающуюся поворотом элементов объема шара на 180° вокруг радиальной оси. Если внешние нагрузки отсутствуют, то такое решение может быть реализовано только при достаточно большой плотности дислокаций. В дальнейшем два решения, в которых функция $C_\varphi(r)$ имеет разные знаки, будем рассматривать по отдельности.

4. Используя формулы (13), выразим компоненты дисторсии через напряжения Пиолы. В случае, когда

$$C_\varphi(r) > 0$$

получим

$$\begin{aligned} C_r &= 1 + \frac{D_r - 2\nu D_\varphi}{2\mu(1+\nu)}, \\ C_\varphi &= 1 + \frac{(1-\nu)D_\varphi - \nu D_r}{2\mu(1+\nu)} \end{aligned} \quad (14)$$

Из (9), (10) и (14) выводится уравнение относительно $D_r(r)$

$$r \frac{d^2 D_r}{dr^2} + 4 \frac{dD_r}{dr} = \frac{4\mu(1+\nu)}{\nu-1} \beta(r) \quad (15)$$

Считая, что внутренняя поверхность шара $r = r_1$ и внешняя $r = r_0$ свободны от внешней нагрузки, получим граничные условия

$$D_r(r_1) = 0, \quad D_r(r_0) = 0 \quad (16)$$

Решение краевой задачи (15), (16) записывается так

$$D_r(r) = -\frac{1}{3r^3} \int_{r_1}^r \rho^4 \gamma(\rho) d\rho + \frac{1}{3} \int_{r_1}^r \rho \gamma(\rho) d\rho + A_1 + A_2 r^{-3} \quad (17)$$

$$\gamma(r) = \frac{4\mu(1+\nu)}{\nu-1} \frac{\beta(r)}{r}, \quad A_1 = -\frac{A_2}{r_1^3}$$

$$A_2 = \frac{r_0^3 - r_1^3}{3r_0^3 r_1^3} \left(\int_{r_1}^{r_0} \rho \gamma(\rho) d\rho - \frac{1}{r_0^3} \int_{r_1}^{r_0} \rho^4 \gamma(\rho) d\rho \right)$$

Напряжение D_φ теперь определяется из (9):

$$D_\varphi = D_r + \frac{r}{2} \frac{dD_r}{dr} \quad (18)$$

а при помощи (14) находятся компоненты дисторсии.

В качестве простого примера рассмотрим случай сплошного шара ($r_1 = 0$) при

$$\beta(r) = \beta_0 r^\varkappa, \quad \beta_0 = \text{const}$$

В этом случае решение задачи (15), (16) при $\varkappa > -1$ имеет вид

$$D_r(r) = \frac{4\mu(1+\nu)\beta_0(r_0^{\varkappa+1} - r^{\varkappa+1})}{(1-\nu)(\varkappa+1)(\varkappa+4)} \quad (19)$$

Если $\varkappa = -1$, то напряжения выражаются формулами

$$D_r(r) = -\frac{4(1+\nu)\beta_0}{3(1-\nu)} \ln \frac{r}{r_0}$$

$$D_\varphi(r) = -\frac{2(1+\nu)\beta_0}{3(1-\nu)} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{r_0} \right)$$

и имеют логарифмическую особенность в центре шара.

5. Рассмотрим теперь решение, в котором

$$C_\varphi(r) < 0$$

В этом случае при помощи (13) получим

$$\begin{aligned} C_r &= 1 + \frac{D_r + 2\nu D_\varphi}{2\mu(1+\nu)}, \\ C_\varphi &= -1 + \frac{\nu D_r + (1-\nu) D_\varphi}{2\mu(1+\nu)} \end{aligned} \quad (20)$$

Подстановка соотношений (20) в (9) и (10) приводит к такому уравнению относительно $D_r(r)$

$$\frac{d^2 D_r}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{dD_r}{dr} - \frac{4\nu}{(1-\nu)r^2} D_r = \frac{4\mu(1+\nu)}{(1-\nu)r^2} [2 - r\beta(r)] \quad (21)$$

Решение уравнения (21), удовлетворяющее краевым условиям (16), имеет по сравнению с (17) более громоздкий вид и здесь не приводится.

В частном случае, когда

$$\beta(r) = 2r^{-1}$$

краевая задача (16), (21) имеет тривиальное решение, соответствующее нулевым напряжениям. Это решение интересно тем, что справедливо для любого упругого материала, т. е. носит универсальный характер. В самом деле, уравнение несовместности (10) при $\beta = 2r^{-1}$ имеет очевидное решение $C_r = 1$, $C_\varphi = -1$. Согласно (6) поле дисторсии, отвечающее этому решению, является собственно ортогональным тензором, который описывает неоднородное поле вращений. Каждый элементарный объем тела поворачивается на угол 180° вокруг радиальной оси. В силу ортогональности дисторсии удлинения и сдвиги в любой точке тела равны нулю. Значит, равны нулю и напряжения. Поэтому уравнения равновесия при отсутствии массовых сил удовлетворяются тождественно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 248 с.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [4] Derezin S. V., Zubov L. M. Disclinations in nonlinear elasticity // Z. Angew. Math. und Mech. 2011. V. 91. P. 433–442.

Zubov L. M., Filippova L. M. *Large deformations of thick-walled spherical shell with distributed edge dislocations.* The elastic hollow sphere with continuously distributed dislocations large deformations problem is considered on the basis of nonlinear continual dislocations theory.

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ: ЛОКАЛИЗАЦИЯ, НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ

Зуев Л. Б., Баранникова С. А., Данилов В. И.

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Предложена двухкомпонентная модель пластической деформации, объясняющая смену картин эволюции автоволновых процессов пластического течения и его перехода к разрушению в ходе деформирования как результат изменений характера взаимодействия информационнои и динамической подсистем.

1. Введение.

В наших работах [1–6] были установлены основные закономерности автоволновой природы пластического течения твердых тел, которые могут быть положены в основу новой модели развития пластического течения в твердых телах, учитывающей важную роль некоторых, обычно игнорируемых особенностей процесса. Особенно существенными предпосылками для разработки такой модели являются общие представления о том, что локализация деформации имеет автоволновой характер [1, 2], связанный со стадийностью пластического течения, а также следующие детали развития пластического течения, включающие в той или иной форме характеристики фононной подсистемы деформируемого кристалла:

- равенства, связывающие макрохарактеристики локализованной пластической деформации λ и V_{aw} (длина волны и скорость распространения) с микрохарактеристиками решетки r_i и N (ионный радиус и число валентных электронов на элементарную ячейку) соответствующих металлов [3, 4];

- содержащее вязкость фононного газа B и скорость поперечных ультразвуковых волн $V_{\perp}$ выражение коэффициента $\Xi = B \cdot V_{\perp} / \eta$, в формуле для скорости распространения автоволн локализованной деформации $V_{aw} = V_0 + \Xi / \theta$ [5]. Здесь η — вязкость, определяемая взаимодействием дислокаций и эффективных барьеров, $\theta = G^{-1} \cdot d\sigma / d\varepsilon$ — коэффициент деформационного упрочнения, V_0 — константа, G — модуль сдвига, σ и ε — напряжение и деформация, соответственно;

- равенство $\lambda \cdot V_{aw} \approx 1/2 \cdot d \cdot V_{\perp}$, устанавливающее взаимосвязь характеристик упругих волн в кристаллах (расстояние между наиболее плотно упакованными плоскостями d и скорость упругих поперечных волн $V_{\perp}$) с макрохарактеристиками автоволн локализации пластического течения (λ и V_{aw}) в них [6];

- равенство $\lambda V_{aw} \rho \approx h / r_i^3$, связывающее произведение макроскопических характеристик автоволновых процессов и материала в левой части с величиной вязкости фононного газа в деформируемых кристаллах в правой [6]. Здесь h — постоянная Планка, ρ — плотность материала.

Эти соотношения, содержащие акустические характеристики кристалла, указывают на важную роль фононной подсистемы в формировании автоволновых картин локализации пластического течения. Это кажется удивительным для процессов пластического течения с их макрохарактеристиками λ и V_{aw} . Существует,

однако, простое объяснение такой закономерности, состоящее в том, что в соответствии с уравнением Тейлора-Орована $\dot{\epsilon} = b\rho_d V_d$ дислокации с вектором Бюргера b и плотностью ρ_d дают вклад в пластическую деформацию, протекающую со скоростью $\dot{\epsilon}$, только при своем движении между эффективными стопорами, которое контролируется фононным и электронным газами в кристалле, то есть, если их скорость $V_d \neq 0$ [7]. Это обстоятельство объясняет появление характеристик фононного газа в описании медленных процессов развития локализованной пластичности.

2. О роли акустических импульсов в развитии пластичности.

Есть основания предполагать, что фононная подсистема играет более важную роль в развитии локализованного пластического течения твердых тел. Для обоснования этого предположения примем во внимание, что процесс пластического течения включает, по крайней мере, два типа взаимосвязанных событий, согласованно протекающих в деформируемой среде. С одной стороны это релаксационные акты движения дислокаций [8], их ансамблей и (в макроскопическом пределе) автоволн локализованного пластического течения [1, 2], то есть, собственно пластическое формоизменение. С другой стороны каждый элементарный акт пластичности сопровождается генерацией упругих волн (рождением фононов), связанной с перераспределением упругих деформаций в ходе релаксационных актов деформации, например, при скачках деформации разного масштаба. Этот эффект представляет собой акустическую эмиссию и, как известно [9], нашел широкое применение в методах неразрушающего контроля материалов и изделий из них.

Предлагаемая модель базируется на представлении о взаимодействии этих явлений, и ее основные черты состоят в следующем. В ходе каждого элементарного акта пластичности любой природы генерируются ультразвуковые волны акустической эмиссии, которые в объеме кристалла перераспределяют выделяющуюся упругую энергию между концентраторами напряжений. Это приводит к росту напряжений в окрестности концентраторов и, соответственно, инициирует их релаксацию в форме новых сдвигов, после чего последовательность событий повторяется. Решающим фактором в реализации таких актов является не амплитуда акустических импульсов, а их форма и спектр, обеспечивающие активацию в первую очередь концентраторов напряжений аналогичного типа и размера. На основании идеи об обмене энергией между последовательно релаксирующими концентраторами напряжений в нашей работе [10] удалось объяснить природу крупномасштабных корреляций в расположении очагов локализованной пластичности в системе, содержащей только объекты микроскопического масштаба — дислокации.

В пользу реалистичности такого механизма свидетельствуют, например, хорошо известные линии Вальнера — борозды, наблюдающиеся на поверхности хрупкого скола [11]. Они возникают под действием ультразвуковых импульсов с частотой ~ 10 МГц, излучаемых трещиной при росте и искривляющих ее фронт. Можно оценить снизу порядок величины энергии таких импульсов, полагая, что она расходуется на увеличение площади поверхности разрушения ΔS , и пренебрегая другими каналами диссипации. В согласии с приведенными в [11] данными $\Delta S \approx 10^{-8}$ м² при глубине борозд на поверхности разрушения ~ 1 мкм и диаметре образца $\sim 10^{-2}$ м. При характерном для металлов значении плотности поверх-

ностной энергии $\gamma \approx 1$ Дж/м² энергия импульса, искривляющего фронт трещины, $\Delta W \geq \gamma \Delta S \approx 10^{-8}$ Дж, то есть, такие импульсы в твердых телах могут обладать достаточно большой энергией.

Известно также обратное действие дефектной подсистемы на акустические характеристики кристаллов, состоящее в экспериментально наблюдавшихся изменениях скорости распространения ультразвука V_S в ходе пластической деформации [12]. Сложная форма зависимостей скорости распространения ультразвука V_S от пластической деформации ε и напряжения течения σ указывает на взаимосвязь акустических и деформационных свойств материалов в ходе пластической деформации.

3. Общая характеристика модели.

Базой развиваемых модельных представлений является общий принцип описания природы явлений самоорганизации, предложенный Б. Б. Кадомцевым [13]. Согласно этому принципу, способные к самоорганизации открытые системы имеют тенденцию самопроизвольно расслаиваться на информационную (управляющую) и динамическую подсистемы, взаимодействие которых вызывает самоорганизацию. Распространяя эту идею на деформируемые среды, предположим, что в этом случае роль информационной подсистемы играют сигналы акустической эмиссии, излучаемые в ходе элементарных релаксационных актов пластического течения, а динамическая подсистема включает процессы движения дислокаций и/или их ансамблей, ответственные за формоизменение. В рамках такого подхода процесс пластического течения обусловлен взаимосвязанными событиями в дефектной и фононной подсистемах деформируемого кристалла. Этим развиваемая модель отличается от дислокационных моделей, учитывающих только эволюцию дефектов. Объяснить коррелированное развитие пластического течения в очагах, удаленных друг от друга на макроскопическое расстояние $\sim \lambda$, можно, приняв во внимание важную роль, которую играют при деформировании импульсы акустической эмиссии с их большими длинами пробега.

Эта идея развивает предложенную в [14] двухкомпонентную модель процесса пластического течения, в которой скорости изменения деформаций $\partial\varepsilon/\partial t$ и напряжений $\partial\sigma/\partial t$ описываются реакционно-диффузионными уравнениями

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = f(\varepsilon, \sigma) + D_\varepsilon \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = g(\sigma, \varepsilon) + D_\sigma \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где нелинейные функции $f(\varepsilon, \sigma)$ и $g(\sigma, \varepsilon)$ имеют смысл локальных скоростей изменения деформации и напряжений на микроскопическом уровне, а «диффузионные» члены $D_\varepsilon(\partial^2\varepsilon/\partial x^2) \ll D_\sigma(\partial^2\sigma/\partial x^2)$ задают их мезо- и макромасштабное перераспределение, соответственно.

Для перехода от модели [14] к развиваемой достаточно положить, что (1) описывает изменения в динамической, а (2) — в информационной подсистеме, причем обе они характеризуются различными масштабами, которые как множители входят в диффузионные коэффициенты уравнений (1) и (2), представляемые в общем виде как $D \approx \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}$. Для информационной подсистемы масштаб $\mathbf{L} \approx \lambda$ порядка

размера образца, а для динамической он может быть отождествлен с размером дислокационного ансамбля $L \approx \bar{d} \ll \lambda$.

Таким образом, развиваемая двухкомпонентная модель основана на естественной взаимосвязи двух хорошо известных эффектов, изучавшихся ранее практически независимо друг от друга:

— собственно деформации, вызываемой движением решеточных дефектов разного типа, в частности, дислокаций, их ансамблей, двойников и т. п. (динамическая подсистема);

— акустической эмиссии, сопровождающей работу любых механизмов пластического течения (информационная подсистема). Роль импульсов акустической эмиссии сводится к перераспределению упругих полей, то есть, к передаче упругой энергии от релаксирующих концентраторов напряжений к возникающим.

4. Заключение.

1. Стадийность пластической деформации связана с последовательной сменой автоволновых картин локализованного течения по следующему сценарию: автоволна переключения $\rightarrow$ фазовая автоволна $\rightarrow$ диссипативная стационарная структура $\rightarrow$ коллапс автоволны локализованной пластичности.

2. Экспериментальные результаты и их интерпретация указывают также на важность учета тесной взаимосвязи ансамблей дефектов с фононной подсистемой в кристаллах. Предложенная на этой базе двухкомпонентная модель пластического течения правильно объясняет возникновение корреляций макроскопического масштаба при локализации пластического течения в деформируемых металлах и сплавах.

3. Сформулированные представления позволяют включить локализованное пластическое течение в ряд макроскопических явлений, таких, например, как сверхтекучесть и сверхпроводимость, в которых на макроскопическом масштабе проявляются квантовые свойства вещества [15, 16]. На эту возможность указывает совпадение форм дисперсионных кривых для автоволн пластического течения и для сверхтекучего He^4 [16]. Кроме того, квадратичная дисперсионная кривая автоволн локализованной пластичности, аналогична спектру элементарных возбуждений сверхпроводника [16]. Сходство названных явлений состоит в том, что лежащие в их основе коллективные эффекты не допускают возможности описания в рамках моделей, основанных на аддитивных свойствах индивидуальных носителей (в случае пластического течения — дислокаций). По этой причине для корректного описания пластического течения необходим учет явлений самоорганизации деформируемой среды в форме автоволн локализованной пластической деформации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zuev L. B. Wave phenomena in low-rate plastic flow in solids // Ann. Phys. 2001. V. 10. № 11–12. P. 965–984.
- [2] Zuev L. B. On the waves of plastic flow localization in pure metals and alloys // Ann. Phys. 2007. V. 16. № 4. P. 286–310.

- [3] Зуев Л. Б. Установившиеся волны локализованной пластичности при линейном законе деформационного упрочнения и соотношение де Бройля // Металлофизика и новейшие технологии. 2004. Т. 26. № 3, С. 361–370.
- [4] Zuev L. B. The linear work hardening stage and de Broglie equation for autowaves of localized plasticity // Int. J. Solids Structures. 2005. V. 42. №. 3. P. 943–949.
- [5] Зуев Л. Б. Автоволновая концепция локализации пластической деформации твердых тел // Металлофизика и новейшие технологии. 2006. Т. 28. № 9. С. 1261–1276.
- [6] Зуев Л. Б. О прямой связи решеточных характеристик и параметров локализованной пластической деформации // Металлофизика и новейшие технологии. 2007. Т. 29. № 9. С. 1147–1157.
- [7] Альшиц В. И., Инденбом В. Л. Динамическое торможение дислокаций // УФН. 1975. Т. 115. № 1. С. 3–39.
- [8] Комник С. Н., Бенгус В. З. О природе релаксации напряжений в деформированных кристаллах // ДАН СССР. 1966. Т. 166. № 4. С. 829–832.
- [9] Gillis P. P., Hamstad M. A. Some fundamental aspects of the theory of acoustic emission // Mater. Sci. and Engng. 1974. V. 14. № 1. P. 103–108.
- [10] Зуев Л. Б., Семухин Б. С., Зариковская Н. В. Перестройка автоволновой структуры при деформации поликристаллического Al. // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 5. С. 57–62.
- [11] Керкхоф Ф. Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. М.: Мир, 1971. С. 5–68.
- [12] Zuev L. B., Semukhin B. S. Some acoustic properties of a deforming medium // Phil. Mag. A. 2002. V. 82. №. 6. P. 1183–1193.
- [13] Кадомцев Б. Б. Динамика и информация. М.: Редакция журнала УФН, 1997. 397 с.
- [14] Зуев Л. Б. О формировании автоволн пластичности при деформации // Металлофизика и новейшие технологии. 1994. Т. 16. № 10, С. 31–36.
- [15] Тилли Д. Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. М.: Мир. 1977. 304 с.
- [16] Брандт Н. Б., Кульбачинский В. А. Квазичастицы в физике конденсированного состояния. М.: Физ-матлит. 2005. 631 с.

Zuev L. B., Barannikova S. A., Danilov V. I. *Two-Component Model of Plastic Flow: Localization, Instability and Prediction of Failure.* In the framework of the proposed two-component plastic deformation model, a change-over in the patterns of autowave processes of plastic flow evolution and a transition to fracture is attributed to the specific features of the interaction between information and dynamic subsystems.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОСТАВНОГО ПОРОУПРУГОГО ТЕЛА

Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Петров А. Н., Ипатов А. А.
НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского

Рассматривается теория пороупругости с четырьмя базовыми функциями — перемещениями и поровым давлением. Исследуется динамика составного тела методом граничных элементов, записанным в прямой постановке.

Введение. Исследуется процесс распространения динамического импульса в пороупругом теле в зависимости от величины значения коэффициента проницаемости. Для однородного пороупругого тела варьирование величины коэффициента проницаемости позволяет продемонстрировать эффект появления волны Био. Проводились исследования для составного пороупругого тела, когда в одной пороупругой части тела имеется сильное влияние волны Био, а в другой части тела волна Био традиционно слабо выражена.

Математическая модель. Рассмотрим кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела обозначим через S , границы однородных частей Ω_k ($k = 1, \dots, K$) — через S_k . Предполагается, что Ω_k являются изотропными телами. Параметры материала каждой однородной части Ω_k маркируем верхним индексом « k ». Динамическое состояние каждой части тела Ω_k описывается системой дифференциальных уравнений в обобщенных перемещениях [1]:

$$B^k u^k = 0, \quad v^k = (u^k, p^k),$$
$$B^k = \begin{bmatrix} G^k \nabla^2 + (K^k + \frac{1}{3}G^k) \partial_i \partial_j - s^2(\rho^k - \beta^k \rho_f^k) & -(\alpha^k - \beta^k) \partial_i \\ -s(\alpha^k - \beta^k) \partial_j & \frac{\beta^k}{s \rho_f^k} \nabla^2 - \frac{s(\phi^k)^2}{R^k} \end{bmatrix},$$

где u — вектор изображений обобщенных перемещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$, s — параметр преобразования Лапласа,

$$\beta^k = \frac{\kappa^k \rho_f^k \phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 \kappa^k (\rho_\alpha^k + \phi \rho_f^k)},$$

G^k , K^k — константы упругости, ϕ — пористость, κ — проницаемость, α^k — эффективный коэффициент напряжений, ρ^k , ρ_α^k , ρ_f^k — плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды.

Рассматриваются следующие типы граничных условий для Ω_k :

$$v_l^k(x, s) = f_l^k(x, s), \quad x \in S^u \cap S_k, \quad l = \overline{1, 4},$$

$$\tilde{t}_l^k(x, s) = g_l^k(x, s), \quad x \in S^\sigma \cap S_k,$$

$$v_l^k(x, s) = v_l^s(x, s), \quad \tilde{t}_l^k(x, s) = -\tilde{t}_l^s(x, s), \quad x \in S'_{ks}.$$

Здесь S^u и S^σ — части границы S тела Ω , по которым заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; S'_{ks} — граница контакта частей Ω_k и Ω_s . Функции $f_l^k(x, t)$ и $g_l^k(x, t)$ являются заданными функциями координат и времени.

Дискретная модель. Интегральное уравнение динамической пороупругости на основе метода взвешенных невязок можно построить из следующего объемного интеграла [1, 2]: $\int_{\Omega} \Gamma^T B \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p} \end{bmatrix} d\Omega = 0$, где $\Gamma = \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & \hat{U}^f \\ \hat{P}_j^s & \hat{P}^f \end{bmatrix}$.

Получаем итоговую систему интегральных уравнений в матричной форме

$$\begin{aligned} \int_S \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & -\hat{P}_j^s \\ \hat{U}_i^f & -\hat{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ \hat{q} \end{bmatrix} dS - \int_S \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^s & -\hat{Q}_j^s \\ \hat{T}_i^f & -\hat{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p} \end{bmatrix} dS = \\ = \int_{\Omega} (B^* \Gamma)^T \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p} \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{p} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\hat{t}_i = \hat{\sigma}_{ij} n_j$, $\hat{q} = -\beta/(s\rho_f)(\hat{p}_{,i} + \rho_f s^2 \hat{u}_i) n_i$, B^* — сопряженный к B оператор.

Методика построения дискретных аналогов ГИУ основана на гранично-элементном подходе к аппроксимации границы области, на обобщенных граничных перемещениях и обобщенных поверхностных силах и использовании методов численного обращения преобразования Лапласа [3–5]. В качестве проекционного метода применялся метод коллокации. Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматривается регуляризованное уравнение.

Численный эксперимент. Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t) = t^0 f(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м² на поверхность однородного пороупругого полупространства. В качестве закона изменения приложенной нагрузки возьмем функцию Хевисайда $f(t) = H(t)$. Дневная поверхность полупространства свободная и проницаемая: на дневной поверхности задано поровое давление $p = 0$ и поверхностные силы $t_i(t) = 0$ ($i = \overline{1, 3}$), кроме участка площадью 1 м², где $t_3(t) = t^0 f(t)$.

В качестве пороупругого материала возьмем водонасыщенный песок с параметрами: $K=2.1 \cdot 10^8$ Н/м², $G=9.8 \cdot 10^7$ Н/м², $\rho=1884$ кг/м³, $\phi=0.48$, $K_s=1.1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_f=1000$ кг/м³, $K_f=3.3 \cdot 10^9$ Н/м², $k=3.55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с). Исследуем влияние изменения коэффициента проницаемости на динамические отклики перемещений и потока в точке D дневной поверхности полупространства. На рис. 1, 2 представлены графики перемещений. В качестве идентификации графиков, построенных при значении коэффициента проницаемости $k=3.55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с) использован маркер «○», при $k=3.55 \cdot 10^{-7}$ м⁴/(Н·с) — маркер «*», при $k=3.55 \cdot 10^{-6}$ м⁴/(Н·с) — маркер «△», при $k=3.55 \cdot 10^{-5}$ м⁴/(Н·с) — маркер «□».

Исследование свидетельствует о том, что значение коэффициента проницаемости пороупругого материала, входящего в динамический закон Дарси, существенно влияет не только на амплитуду поверхностной волны, но и на ее скорость распространения.

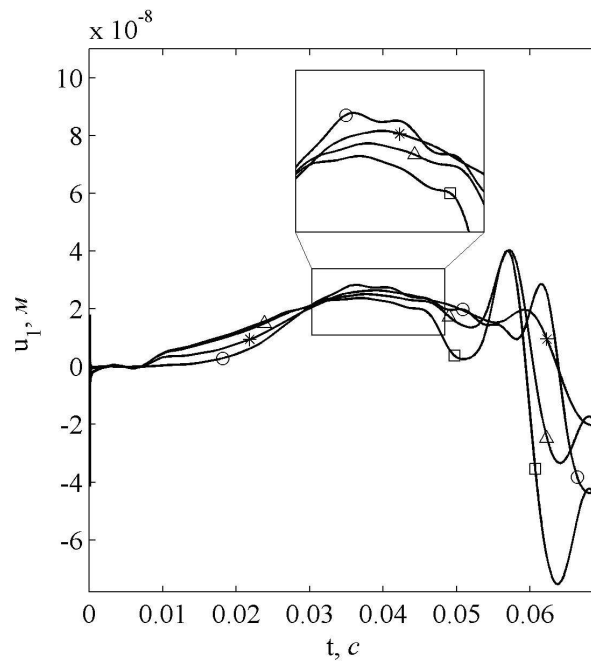


Рисунок 1 – $\circ - k=3.55 \cdot 10^{-9} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$, $* - k=3.55 \cdot 10^{-7} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$, $\Delta - k=3.55 \cdot 10^{-6} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$, $\square - k=3.55 \cdot 10^{-5} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$

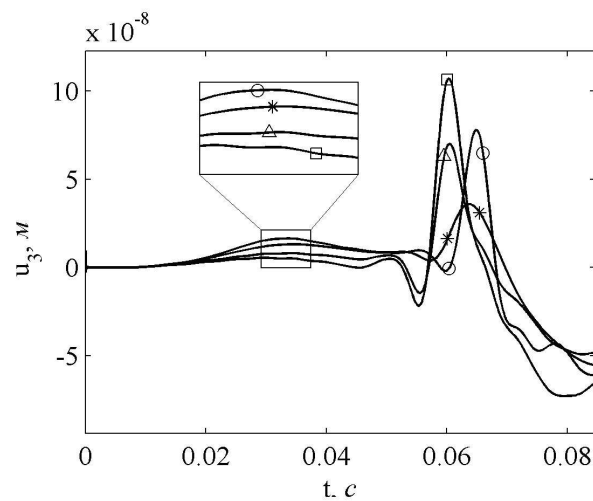


Рисунок 2 – $\circ - k=3.55 \cdot 10^{-9} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$, $* - k=3.55 \cdot 10^{-7} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$, $\Delta - k=3.55 \cdot 10^{-6} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$, $\square - k=3.55 \cdot 10^{-5} \text{ М}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России на 2009-2013 годы» (№14.В37.21.1137, №14.В37.21.1249), Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и при поддержке РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 13-08-97091 р-поволжье-а, 12-08-31572 мол-а, 13-08-00658-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Schanz M.* Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
- [2] *Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2009. № 71. С. 164–171.
- [3] *Аменицкий А. В., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2008. № 70. С. 71–78.
- [4] *Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С., Литвинчук С. Ю.* Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. № 40. С. 1–20.
- [5] *Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Численное решение краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости методом ГИУ // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тр. XXIII Межд. конф. ВЕМ-FEM-2009, 28 сент.–01 окт. 2009. СПб: 2009. С. 182–185.

Igumnov L. A., Litvinchuk S. Yu., Petrov A. N., Ipatov A. A. *Numerically modeling the dynamics of a compound poroelastic body.* The theory of poroelasticity with four basic functions (displacements and pore pressure) is considered. The dynamics of a compound body is analyzed using the boundary element method written in a direct formulation.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНО-ВРЕМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ И ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ

Игумнов Л. А., Ратаушко Я. Ю., Аменицкий А. В.,
Белов А. А.

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского

Рассматривается проблема построения шаговых по времени гранично-элементных схем для компьютерного моделирования решений краевых задач динамики трехмерных упругих и пороупругих тел. Гранично-элементные схемы опираются на применение метода квадратур сверток и аппарат формализации схем Рунге–Кутты с помощью коэффициентов таблиц Бутчера. Шаговые гранично-элементные схемы применены для решения конкретных трехмерных краевых задач.

Введение. Новый импульс к построению шаговых по времени схем метода граничных элементов (МГЭ) для решения динамических задач теории вязко- и пороупругости дали работы [1–3]. Различные модификации метода квадратур сверток применены в [4, 5].

Тесная связь работ [1, 2] с методом Рунге–Кутты позволяет строить новые модификации метода квадратур сверток [6]. Работа посвящена вопросу применения таких модификаций в рамках конкретной гранично-элементной схемы решения краевых трехмерных динамических задач теории упругости и пороупругости [7–10].

Математическая модель. Рассматривается изотропное однородное тело $\Omega \in R^3$, деформируемое в рамках моделей линейных теорий упругости или пороупругости [3, 11]. Система уравнений может быть записана следующим образом

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + (\lambda \operatorname{tr} \varepsilon - \alpha p\gamma)I, \quad \alpha = \varphi(1 - QR^{-1}), \quad \varphi = V^f V^{-1},$$

$$\varepsilon = 0.5 (\nabla u^T + (\nabla u^T)^T), \quad \xi = \alpha \operatorname{tr} \varepsilon + \varphi^2 R^{-1} p,$$

$$\dot{\xi} = \nabla^T q = 0, \quad q = \varphi(\dot{u}^f - \dot{u}),$$

$$(\nabla^T \sigma)^T + F = \rho \ddot{u} + \varphi \rho^f (\ddot{u}^f - \ddot{u})\gamma,$$

$$q = -k (\nabla p + \rho^f \ddot{u} + (\rho_\alpha + \varphi \rho^f) \varphi^{-1} (\ddot{u}^f - \ddot{u})) , \quad \rho_\alpha = C \varphi \rho^f,$$

где $V = V^s + V^f$ — объем пористого образца, $\varphi = V^f/V$ — пористость, $\rho = (1 - \varphi)\rho^s + \varphi\rho^f$ — плотность пористого образца, λ, μ — параметры Ламе, α — коэффициент эффективного напряжения, $\rho_\alpha = C\varphi\rho^f$ — плотность присоединенной массы. Зависимость между скелетом и наполнителем характеризуется параметрами Q и R .

Уравнения, содержащие параметр γ , относятся к теории упругости ($\gamma = 0$) и теории пороупругости ($\gamma = 1$).

Краевые условия на обобщенные перемещения $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma p)$ и обобщенные поверхностные силы $t = (t_1, t_2, t_3, \gamma q)$ позволяют корректно сформулировать краевую задачу. Итоговая система дифференциальных уравнений в частных производных записывается в изображениях по Лапласу $L_{t \rightarrow s}(\cdot)$ с параметром s .

Формально решение краевой задачи может быть сведено к решению граничного интегрального уравнения вида:

$$\alpha_{\Omega} u_k(x, t) + \int_{\Gamma} (T_{ik}(x, y, s) u_i(y, s) - T_{ik}^0(x, y, s) u_i(x, s) - U_{ik}(x, y, s) t_i(y, s)) \partial \Gamma = 0,$$

$$(x \in \partial \Gamma), u = (u_1, u_2, u_3, \gamma p), t = (t_1, t_2, t_3, \gamma q)^T,$$

$$U(x, t) = L_{t \rightarrow s}^{-1}(U(x, s)), T(x, t) = L_{t \rightarrow s}^{-1}(T(x, s)),$$

$$U(x, s) = \begin{bmatrix} U_{ij}^s(x, y, s) & -P_j^s(x, y, s) \\ U_i^f(x, y, s) & -P^f(x, y, s) \end{bmatrix}, \quad T(x, s) = \begin{bmatrix} T_{ij}^s(x, y, s) & -Q_j^s(x, y, s) \\ T_i^f(x, y, s) & -Q^f(x, y, s) \end{bmatrix}$$

где $U(x, s)$, $T(x, s)$ — соответственно фундаментальные [3] и сингулярные [3, 5] решения системы дифференциальных уравнений в частных производных трехмерной теории пороупругости.

Дискретная модель. Выделение особенностей ГИУ позволяет провести регуляризацию и построить гранично-элементную схему [3, 7, 8]. Ядра базового ГИУ записаны в изображениях по Лапласу, поэтому для построения шаговой схемы применяется метод квадратур сверток [1, 2]. Здесь использована его модификация — расширение на семейство методов Рунге–Кутты, удовлетворяющих заданным требованиям.

Для уравнения в свертках $y(t) = f(t) * g(t)$, $*$ — свертка Вольтера, можем записать

$$y_{n+1} = b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g_k, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$g_n = (t_n + c_l \Delta t), \quad l = \overline{1, m},$$

$$\omega_n(\Delta t) = R^{-n} L^{-1} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f}((\Delta t)^{-1} \Delta (Re^{i2\pi/L})) e^{-nl2\pi/L},$$

$$\Delta(z) = A^{-1} - z A^{-1} I b^T A^{-1},$$

где A — матрица Бутчера метода Рунге–Кутты, b^T , c — коэффициенты таблицы Бутчера метода Рунге–Кутты, $t_n = n \Delta t$.

Численные результаты. Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы на поверхность полупространства с полостью. Рассматриваются два варианта

полости — сферическая и кубическая. В качестве действующей силы рассматривается вертикальная сила $P(t) = P_0 f(t)$ на площади $S = 1 \text{ м}^2$ дневной поверхности полупространства. Рассматривается случай, когда внутри полупространства на глубине $h = 7.5 \text{ м}$ (центр полости) расположена сферическая полость радиуса $R = 5 \text{ м}$, и случай, когда на глубине $h = 7.5 \text{ м}$ (центр куба) расположена кубическая полость с длиной ребра 10 м .

Гранично-элементная сетка строится с учетом двух плоскостей симметрии. Четверть сетки содержит для полупространства — 864 элемента, для полости — 150 элементов.

Параметры упругого материала выбраны следующими: $E = 2.5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.298$, $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$ ($c_1 = 425 \text{ м/с}$, $c_2 = 228 \text{ м/с}$).

В качестве пороупругого материала возьмем водонасыщенный песок с параметрами: $K = 2.1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 9.8 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0.48$, $K_s = 1.1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $K_f = 3.3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k = 3.55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$.

Рассматривается следующая нагрузка: $f(t) = H(t)$, $P_0 = 1 \text{ Н/м}^2$.

На рисунках 1 и 2 приведены графики вертикальных перемещений на поверхности полупространства на расстоянии 15 м от границы действия силы для упругого и пороупругого материалов, соответственно. Кривая 1 — решение задачи для полупространства без полости, кривая 2 — решение задачи со сферической полостью, кривая 3 — решение задачи с кубической полостью.

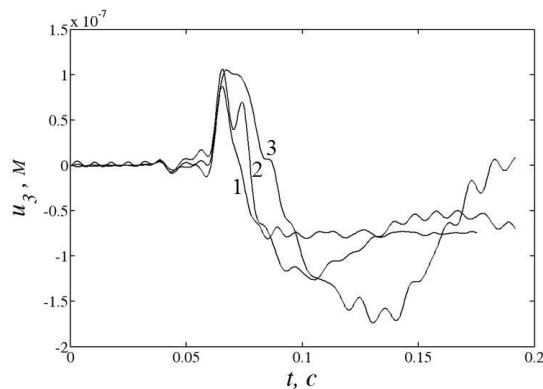


Рисунок 1

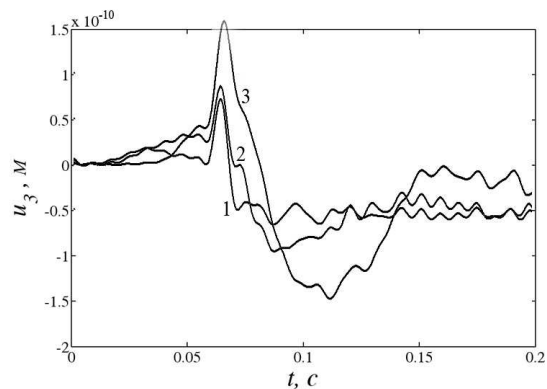


Рисунок 2

Приведенные расчеты позволяют говорить о влиянии формы полости на пороупругий отклик по сравнению с дренированными и не дренированными его оценками.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России на 2009–2013 годы» (№14.В37.21.1137, №14.В37.21.1249), Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и при поддержке РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 13-08-97091 р-поволжье-а, 12-08-31572 мол-а, 13-08-00658-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Lubich C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 129–145.
- [2] *Lubich C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. II // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 413–442.
- [3] *Schanz M.* Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
- [4] *Баженов В. Г., Белов А. А., Игумнов Л. А.* Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. 180 с.
- [5] *Белов А. А.* Гранично-элементный расчет динамики составных вязкоупругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2008. № 70. С. 162–168.
- [6] *Schanz M.*, Runge-Kutta convolution quadrature for the boundary element method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2012. P. 90–101.
- [7] *Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2009. № 71. С. 164–171.
- [8] *Аменицкий А. В., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2008. № 70. С. 71–78.
- [9] *Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С., Литвинчук С. Ю.* Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. № 40. С. 1–20.
- [10] *Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Численное решение краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости методом ГИУ // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тр. XXIII Межд. конф. ВЕМ-FEM-2009, 28 сент. 01 окт. 2009. СПб: 2009. С. 182–185.
- [11] *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. № 28. P. 168–191.

Igumnov L. A., Rataushko Ya. Yu., Amenitsky A. V., Belov A. A. *Applying the time boundary-element method for modeling dynamic boundary-value problems of 3-d elastic and poroelastic bodies.* The issue of constructing time-step boundary-element schemes for computer modeling the analysis of dynamic boundary-value problems of 3-D elastic and poroelastic bodies is considered. Boundary-element schemes are based on using the convolution quadrature method and the apparatus for the formalization of Runge-Kutta schemes, using coefficients from Butcher's tables. Application of the step boundary-element schemes is illustrated by analyzing realistic 3-D boundary-value problems.

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА, СВЯЗАННОЙ С НЕОДНОРОДНЫМ УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Индейцев Д. А.¹, Мочалова Ю. А.¹, Семенов Б. Н.²

¹*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

²*Санкт-Петербургский государственный университет*

В работе рассматривается бесконечная балка, лежащая на упругом основании и поджатая силой P . Упругое основание имеет особенность — конечную область, характеризующуюся меньшим значением коэффициента жесткости.

В теории упругой устойчивости предполагается, что при достаточно малых нагрузках равновесие упругой системы устойчиво, и оно остается таковым вплоть до первой точки разветвления форм равновесия, за которой исходная форма становится неустойчивой. Критическая сила определяется как наименьшая сила, при которой наряду с исходной формой равновесия появляется близкая к ней другая форма. Однако такой статический подход применим только для консервативных систем. Для определения устойчивости неконсервативных систем необходимо применять более общий динамический подход, основанный на рассмотрении колебаний системы вблизи равновесия. Теория применения обоих методов при решении задач устойчивости систем конечных размеров хорошо известна, однако вопрос касательно систем бесконечных размеров остается открытым.

В данной работе исследуется возможность локализации колебаний в области дефекта основания и особенности потери устойчивости балки в этом случае. Под локализованной формой колебаний будем понимать форму сосредоточенную вблизи области неоднородности основания и имеющую конечную энергию. Математически существование локализованных мод эквивалентно наличию как непрерывного, так и дискретного спектра собственных значений соответствующих краевых задач. Для рассматриваемой балки, лежащей на неоднородном упругом основании, продемонстрировано, что существование локализованной моды колебаний связано с возникновением точечного спектра собственных частот колебаний, который лежит ниже частоты отсечки балки. В работе показано, что потеря устойчивости балки связана с существованием локализованной формы колебаний в области дефекта. Получена зависимость частоты дискретного спектра от значения силы P . Стремление дискретной, собственной частоты в ноль определяет локализованную форму потери устойчивости и критическую силу, значение которой совпадает со значением, полученным из решения соответствующей статической задачи. Была построена функция Грина балки, поджатой силой, исходная краевая задача сведена к интегральному уравнению, что позволило получить приближенные оценки для частоты колебаний. Проанализировано влияние размеров области дефекта основания и его жесткости на величину критической силы.

Indeytsev D. A., Mochalova Yu. A., Semenov B. N. *Stability of infinite Bernoulli–Euler beam bounded with inhomogeneous elastic basis.* In the paper the possibility of oscillation localization in defect area of a basis and specifics of loss of its stability are considered.

БЕСПРОВОДНОЙ ДАТЧИК ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ С КОДОВЫМИ ОТРАЖАТЕЛЯМИ

Карапетьян Г. Я., Днепровский В. Г., Богданов М. И.

НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

При реализации датчика на поверхностных акустических волнах (ПАВ) с дополнительными кодовыми отражателями полезная информация о состоянии датчика (а следовательно, и наблюдаемого объекта) считывается в режиме реального времени с минимальными временными затратами. При этом оператор или пользователь может находиться на расстоянии от контролируемого объекта. Возможность приема переотраженного (резонатором или линией задержки) радиосигнала без использования механических и электрических соединений на расстоянии — основная особенность ПАВ-технологии. К тому же конструктивные и технологические решения, датчиков на ПАВ позволяют проводить мониторинг состояния объектов и их идентификацию в экстремальных условиях, например, в движении при повышенной радиации или в реактивных средах.

Конструкция устройства

В условиях сильных нестационарных помех амплитуда сигнала может сильно зависеть от времени измерения, даже если проводить усреднение, что может привести к существенному понижению точности измерения. Однако, если измерять не амплитуду сигнала, а задержку сигнала между опорным и отражательным встречно-штыревыми преобразователями (ВШП), то точность определения амплитуды не будет сказываться на результатах измерений. Более того, можно между опорным и отражательным ВШП расположить кодовые отражатели, которые для каждого датчика будут иметь разные положения. Тогда датчик можно рассматривать как радиочастотную идентификационную метку, в которой расстояние между импульсами будет зависеть от измеряемой физической величины. К конкурентным преимуществам пассивных датчиков на ПАВ с кодовыми отражателями, часто называемых ПАВ-метками, относятся: малая излучаемая мощность опрашивающего устройства; температурная стабильность кода метки (до 40 °С); возможность контроля температуры, давления и других физических параметров [1].

Для примера рассмотрим пассивный датчик температуры [2]. В этом случае из-за отличного от нуля температурного коэффициента задержки расстояние между отраженными импульсами будет зависеть от температуры, причем чем больше задержка между импульсами, тем сильнее будут сдвигаться импульсы относительно друг друга с изменением температуры.

На рис. 1 показана конструкция датчика температуры. Он расположен на подложке из ниобата лития размером 1,42x14x0,5 мм. Первый отражатель расположен на расстоянии 1,89 мм от приемо-передающего ВШП. Это позволяет при приеме отраженных импульсов от датчика исключить отраженные сигналы от различных



Рисунок 1 – Конструкция датчика температуры

металлических поверхностей в зоне считывателя, так как эти отраженные сигналы придут на считыватель значительно раньше, чем отраженные импульсы от датчика, поскольку при расстоянии 1,89 мм отраженные от датчика импульсы придут примерно через 1 мкс, что соответствует отражателям, находящимся на расстоянии 150 м. При таком расстоянии отраженные импульсы значительно ослабнут и не будут мешать приему отраженных от датчика импульсов. Информационные отражательные ВШП находятся в 4-х лотах, в каждом из которых предусмотрено 4 положения (слоты). Расстояние между слотами равно 0,8 мм, а расстояние между лотами равно 1,6 мм. В каждом лоте предусмотрен только один отражатель, который располагается в одном из 4-х слотов.



Рисунок 2 – Конструкция ПАВ отражателя (размеры указаны в мм)

Приемо-передающий ВШП выполнен, как и в предыдущих случаях, односторонним с внутренними отражателями. Ширина электродов в нем выбрана равной 2 мкм и 1 мкм, а межэлектродные зазоры равны 0,8 мкм. При этом ВШП эффективно излучает поверхностные акустические волны (ПАВ) только вправо в диапазоне частот 860-880 МГц (центральная частота равна 870 МГц). Отражатели состоят из двух ВШП с числом электродов равным 3, как показано на рис. 2. Расстояние между этими ВШП выбирается таким образом, чтобы суммарный ко-

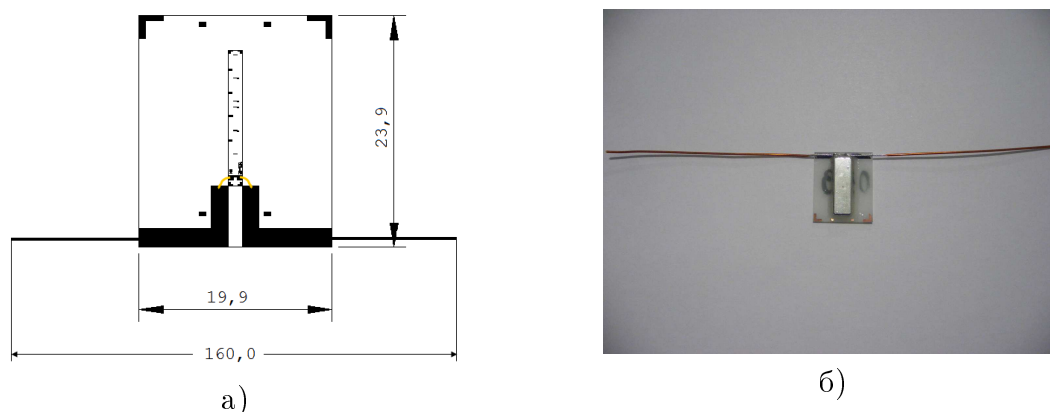


Рисунок 3 – Датчик на плате с антенной

эффицент отражения от них возрастал по мере удаления от приемо-передающего ВШП. Это позволяет сделать отраженные импульсы близкими по амплитуде, так как по мере распространения амплитуда ПАВ убывает из-за отражения от предыдущих отражателей.

Подложка ниобата лития с выполненными на ней ВШП и отражателями размещена на поликоровой подложке с размерами 19,9x23,9x0,5 мм. Как показано на рис. 3 а подложка располагается таким образом, чтобы обеспечить минимальную длину золотых проводников, соединяющих шины ВШП с выводами для антенны. На рис. 3 б представлено фото такого датчика. К выводам антенны припаиваются проводники из медной проволоки диаметром 0,5 мм и длиной 8 см, чтобы получилась антенна в виде полуволнового вибратора, длина которого равна половине длины электромагнитной волны. В данном случае это составляет 16 см. Для уменьшения размеров антенны необходимо будет использовать специальные материалы и более сложные виды антенн, выбор которых составляет специальную задачу, представляющую собой предмет отдельной разработки.

Для герметизации подложки использовалась металлическая крышка размером 20x6, которая приклеивалась к поликоровой подложке таким образом, чтобы углы корпуса совпадали с маленькими прямоугольниками, выполненными на поликоровой подложке. Так как клей является изолятором, то крышка не сможет замкнуть выводы антенны. Высота крышки должна быть не менее 1 мм, чтобы не замкнуть золотые проводники.

Результаты измерений

Импульсные отклики получались в результате Фурье преобразования частотных характеристик параметра S_{11} антенны в виде полуволнового вибратора на центральную частоту 870 МГц с длиной четвертьволновых вибраторов по 8 см (рис. 4 а). Корпусированные датчики с аналогичной антенной располагались параллельно антенне, подсоединенной к измерительному прибору на расстоянии 2 см. В этом случае сигнал от прибора излучается антенной, подсоединенной к прибору, и принимается антенной датчика-метки. Так как эта антенна подсоединена к приемо-излучательному ВШП датчика, то электромагнитный сигнал преобразо-

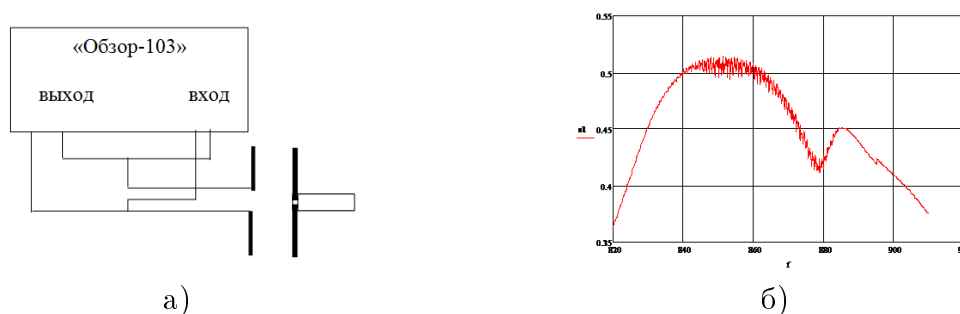


Рисунок 4 – Схема измерения параметров корпусированных датчиков и частотная зависимость параметра S_{11} антенны в виде полуволнового вибратора, подсоединенной к измерительному прибору

вываается в ПАВ и, отражаясь от ПАВ отражателей с определенной задержкой, попадает опять на приемо-передающий ВШП и излучается антенной датчика-метки, попадая на антенну, подсоединенную к измерительному прибору. Задержанные сигналы интерферируют с основным сигналом на этой антенне, что и приводит к изрезанности частотной зависимости параметра S_{11} , как показано на рис. 4 б. Число точек в приборе ИККП (измеритель комплексного коэффициента передачи) «Обзор-103» было выбрано равным 2097, что вполне достаточно, чтобы не пропустить все максимумы и минимумы на частотной зависимости параметра S_{11} .

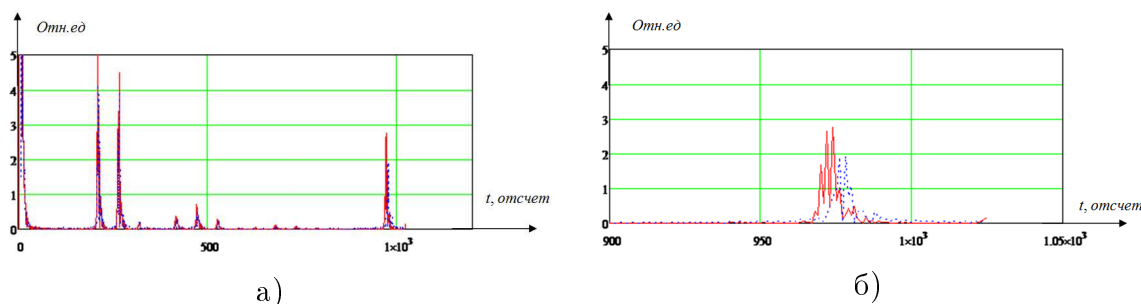


Рисунок 5 – Импульсные отклики датчика и их фрагмент при комнатной температуре 20 °С (сплошная кривая) и при температуре 70 °С (пунктирная кривая). По оси абсцисс отложено число отсчетов, причем один отсчет равен 6 нс

На рис. 5 а показаны импульсные отклики датчика при разных температурах. При нагревании отклик от последнего отражателя смещен вправо относительно отклика, измеренного при комнатной температуре, на 8 отсчетов при расстоянии между опорным и последним импульсами в 860 отсчетов. А на рис. 5 б показан фрагмент импульсного отклика. Таким образом, при изменении температуры на 50 градусов задержка изменилась на 0,9 %. Для повышения точности необходимо увеличить число отсчетов между отраженными импульсами. Так, например, при числе отсчетов между импульсами равным 1200, смещение отраженного импульса может возрасти до 12 отсчетов. Такое число отсчетов соответствует расстоянию между отражателями равному 15 мм, что дает возможность разместить такой датчик в корпус длиной 20 мм.

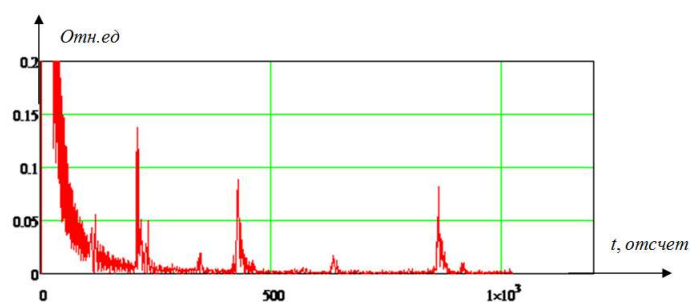


Рисунок 6 – Импульсные отклики датчика при комнатной температуре на расстоянии 30 см от антенны

На рис. 6 показан импульсный отклик датчика, когда расстояние между датчиком и антенной прибора равно 30 см. Таким образом, проведенные эксперименты свидетельствуют о возможности использования предложенных кодовых отражателей. Как видно, амплитуда сигнала уменьшилась в 33 раза по сравнению с амплитудой отраженного сигнала при расстоянии 2 см между антенной прибора и датчиком. Мощность на выходе прибора равна 2,5 мВт, что соответствует напряжению 0,33 В при сопротивлении 50 Ом. При мощности на выходе прибора в 250 мВт дальность может вырасти примерно в 10 раз и достичь 3 м при использовании антенны в виде полуволнового вибратора. Это расстояние может быть увеличено еще в 3–4 раза за счет оптимизации приемо-передающих антенн.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шубарев В. С. Микросистемотехника. Инновационное направление развития электроники // Электроника: НТБ, 2010. № 5. С. 184–188.
- [2] Карапетьян Г. Я., Днепровский В. Г., Багдасарян А. С. Исследование датчиков физических величин на поверхностных акустических волнах // Материалы 13-ой междунар. научно-технической конференции «Мат. модели физических процессов», 14–15 сентября 2007 года, Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2008. Р. 130–134.

Karapetyan G. Ya., Dneprovsky V. G., Bogdanov M. I. *Wireless temperature SAW sensor.* The surface acoustic wave (SAW) sensor with additional coding reflectors calculating observable object state in real time mode is observed. User may be removed from the controlling object. Possibility of receiving re-reflected signal by resonator or a delay line at distance without mechanical and electrical connections is the main feature the SAW technology. Besides constructive and technological solutions of the SAW sensors allow carry out monitoring of the object state and their identification in extremely conditions such as motion, violent radioactivity or in reactive mediums.

РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗОНД–ОБРАЗЕЦ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МИКРОКОНСОЛИ АТОМНО-СИЛОВОГО МИКРОСКОПА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОВОГО ШУМА

Карпинский Д. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Выполнен расчет характеристик колебаний микроконсоли атомно-силового микроскопа (АСМ) в малоамплитудном динамическом режиме. Уточнены условия работы атомно-силового микроскопа, когда единственной возмущающей силой является тепловой шум, а микроконсоль имеет в плане ступенчатую форму. Такая геометрия микроконсоли удовлетворяет условию внутреннего резонанса, при котором упругая энергия колебаний перераспределяется от основной моды к высшим модам. Расчет подтвердил, что среднеквадратичная амплитуда колебаний второй изгибной моды зонда АСМ заметно увеличивается и существенно меняется при учете взаимодействия зонд-образец.

1. Введение. Малоамплитудные динамические режимы (контактный и неконтактный) атомно-силового микроскопа (АСМ) являются линейными, так как амплитуда колебаний микроконсоли составляет порядка 0,1 нм при ее длине порядка 100 мкм. Это обстоятельство значительно упрощает анализ характеристик этих режимов, что позволяет восстановить распределения дальнodelствующих сил притяжения Ван-дер-Ваальса и короткодействующих сил отталкивания в задачах силовой спектроскопии. Однако, имеется препятствие для более широкого использования малоамплитудных динамических режимов в АСМ. Это препятствие связано с влиянием теплового шума на результаты измерений АСМ. Анализ тепловых шумов в показал, что необходимо учитывать их различные источники в АСМ. В частности, тепловой шум при комнатной температуре обуславливает колебания микроконсоли (жесткость 0,4 Н/м) со среднеквадратичной амплитудой 0.1 нм. Иными словами, для достаточно «мягких» микроконсоль АСМ тепловой шум является источником возбуждения малоамплитудных колебаний микроконсоли. Этот результат расчета убедительно подтвержден на опыте. Отметим, что режиму колебаний микроконсоли под действием теплового шума соответствует минимально возможная среднеквадратичная амплитуда, а частотный спектр является широкополосным и близок к спектру «белого» шума. Практическое применение динамического малоамплитудного режима АСМ при использовании теплового шума в качестве единственного источника возбуждения микроконсоли связано с калибровкой микроконсоли АСМ.

Среднеквадратичные отклонения вершины зонда кантилевера прямоугольной формы под действием теплового шума вычислены в [1]. В этой работе были учтены вертикальная и горизонтальная изгибные моды, а также крутильная мода. Расчеты [1] показали, что максимальные среднеквадратичные отклонения микроконсоли и энергии упругих колебаний соответствуют первой и второй изгибным модам. Вместе с тем, известно (см., например, [2]), что существуют ограничения

на величину собственной частоты микроконсоли, соответствующую второй изгибной моде ($f_2 < 500$ кГц) из-за свойств фотодетектора АСМ. В [2] показано, что при выборе ступенчатой формы микроконсоли АСМ (рис. 1) минимуму отношения f_2/f_1 соответствует равенство длин обеих ступеней $L_1 = L/2$, а для выбора ширины каждой ступени должно выполняться неравенство $W_2 < W_1$. Результаты [2] использованы в [3] для расчета динамических характеристик ступенчатой микроконсоли АСМ в условиях внутреннего резонанса ($f_2 = 2f_1$, $f_2 = 3f_1$) под действием одночастотного гармонического возмущения. Внутреннему резонансу при колебаниях ступенчатой микроконсоли соответствуют величины $W_2/W_1 = 0.04$, $W_2/W_1 = 0.2$ [3], соответственно. Условия внутреннего резонанса обуславливают перенос энергии от первой к второй изгибной моде и позволяют получать дополнительную информацию при силовой спектроскопии.

В настоящей работе представлены результаты расчета влияния короткодействующих сил в контактом и сил ван дер Ваальса в бесконтактном малоамплитудных режимах на оценку среднеквадратических отклонений зонда ДАСМ за счет тепловых шумов. Расчет учитывает ступенчатую форму микроконсоли АСМ, прикрепленную к основанию упругим шарниром жесткости k . Параметры формы микроконсоли АСМ L_1 , W_1 , W_2 выбраны таким образом, чтобы соответствовать условиям внутреннего резонанса 2 : 1 и 3 : 1. Отметим, что в отличие от [3] рассматривается широкополосное частотное возмущение микроконсоли.

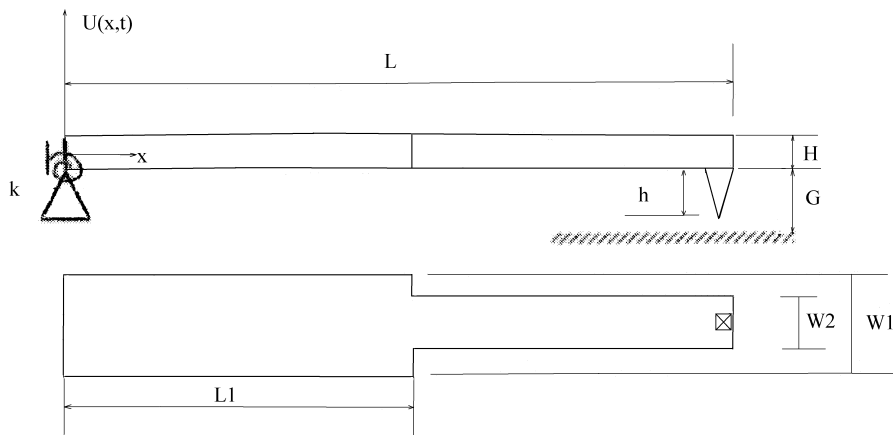


Рисунок 1 – Форма микроконсоли атомно-силового микроскопа

2. Постановка задачи. Рассмотрим теперь постановку задачи о собственных колебаниях ступенчатой микроконсоли с зондом, на вершину которого действуют сосредоточенные силы. В дальнейшем ограничимся расчетом характеристик первых двух изгибных мод колебаний микроконсоли АСМ. Уравнения движения микроконсоли ступенчатой формы имеют вид

$$\rho A_1 U_{1,tt} + EI_1 U_{1,xxxx} = 0, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (1)$$

$$\rho A_2 U_{2,tt} + EI_2 U_{2,xxxx} = 0, \quad L_1 \leq x \leq L.$$

В (1) ρ , A_i , U_i , E , I_i ($i = 1, 2$) — плотность материала микроконсоли, ее площади поперечного сечения ($A_i = W_i H$, $i = 1, 2$), перемещения вертикального изгиба,

модуль Юнга, моменты инерции сечений ($I_i = W_i H^3/12$, $i = 1, 2$), соответственно. Граничные условия (2) предполагают жесткое закрепление при $x = 0$ ($k \rightarrow \infty$), а при $x = L$ на вершину зонда действуют сосредоточенные сила и момент, которые подробно обсуждаются в [1]

$$\begin{aligned} U_1(0, t) = 0, \quad U_{1,x}(0, t) = 0, \\ EI_2 U_{2,xx}(L, t) = -K_t h^2 U_{2,x}(L, t) - mc^2 U_{2,txx}(L, t), \\ EI_2 U_{2,xxx}(L, t) = K_n U_2(L, t) + m U_{2,tt}(L, t). \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) коэффициенты K_n, K_t выбраны аналогично [1] и даны в таблице 1.

Таблица 1 – Силы взаимодействия зонд–образец. D – расстояние между зондом и образцом

режим	$D(\text{нм})$	$K_n(\text{Н/м})$	$K_t(\text{Н/м})$
нет взаимодействия	1.0	0	0
притяжение	0.5	-7.9	0
отталкивание	0.08	35	58

Соотношение непрерывности (3) при $x = L_1$ согласно [3] дополняет (1)–(2)

$$\begin{aligned} U_1(L_1, t) = U_2(L_1, t), \quad U_{1,x}(L_1, t) = U_{2,x}(L_1, t), \\ EI_1 U_{1,xx}(L_1, t) = EI_2 U_{2,xx}(L_1, t), \quad EI_1 U_{1,xxx}(L_1, t) = EI_2 U_{2,xxx}(L_1, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Численные значения для постоянных величин в задаче (1)–(3) выбраны аналогично [1]. Материал микроконсоли и зонда — кремний: плотность $\rho = 2330 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; длина микроконсоли — $L = 200 \text{ мкм}$, толщина — $H = 3.5 \text{ мкм}$, масса зонда — $m = 2 \cdot 10^{-13} \text{ кг}$, высота зонда — $h = 15 \text{ мкм}$, расстояние от центра масс зонда до нижней грани микроконсоли $c = 2/3 h$, ширина микроконсоли — $W_1 = 40 \text{ мкм}$, $W_2 = 0.04W_1; 0.2W_1$.

Общее решение задачи имеет вид

$$U_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n}(t) h_{1n}(x/L), \quad 0 \leq x \leq L_1; \quad U_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}(t) h_{2n}(x/L), \quad L_1 \leq x \leq L, \quad (4)$$

где $h_{1n}(x/L)$, $h_{2n}(x/L)$ — собственные формы моды n (безразмерные) для вертикального изгиба двух участков микроконсоли, соответственно, а $a_n(t)$ — соответствующие им возмущения (размерности длины) моды n в момент времени t . Собственные формы колебаний консоли, удовлетворяющие граничным условиям (2) и условиям непрерывности (3) имеют вид

$$h_{1n}(x/L) = G_1 [\cos(k_{1n}x/L) - \cosh(k_{1n}x/L)] + H_1 [\sin(k_{1n}x/L) - \sinh(k_{1n}x/L)], \quad (5)$$

$$h_{2n}(x/L) = G_2 \cos(k_{2n}x/L) + H_2 \cosh(k_{2n}x/L) + J_2 \sin(k_{2n}x/L) + M_2 \sinh(k_{2n}x/L).$$

Подстановка (4), (5) в (1) и (2) приводит к однородной системе 6 алгебраических линейных уравнений относительно постоянных $G_1, H_1, G_2, H_2, J_2, M_2$. Нетривиальное решение обусловлено нулевой величиной определителя этой системы и позволяет найти корни частотного уравнения, а также собственные формы микроконсоли. Собственные частоты микроконсоли f_n связаны с k_{1n} и k_{2n} соотношением

$$k_{jn}^4 = \frac{\rho f_n^2 A_j}{EI_j}, \quad j = 1, 2.$$

3. Результаты расчетов и их обсуждение. Расчеты подтвердили результаты [1], что в режиме притяжения собственные частоты микроконсоли уменьшаются по сравнению с режимом отсутствия взаимодействия, а в режиме отталкивания увеличиваются (таблица 2). Подтвердились также оценки [2] для отношения второй и первой собственных частот, которые при выбранной геометрии микроконсоли достигают минимума.

Таблица 2 – Собственные частоты колебаний первой f_1 второй f_2 мод вертикального изгиба для микроконсоли ступенчатой формы в условиях внутреннего резонанса 2:1. Числа в скобках указывают собственные частоты для микроконсоли прямоугольной формы [1]

режим	f_1 , КГц	f_2 , КГц
нет взаимодействия	100.6 (111.7)	340.2 (706.4)
притяжение	12.9 (15.0)	87.3 (698.1)
отталкивание	212.3 (245.2)	511.9 (752.8)

Рассмотрим далее энергетический вклад каждой моды колебаний вертикального изгиба микроконсоли. В случае взаимодействия зонд–образец потенциальная энергия моды n вертикального изгиба определяется численно по формуле

$$W_n^p(t) = E a_n^2(t) \left[I_1 \int_0^{L_1/L} h_{1n}''^2(x/L) d(x/L) + I_2 \int_{L_1/L}^1 h_{2n}''^2(x/L) d(x/L) \right]. \quad (6)$$

Аналогично [4], предположим, что каждой собственной моде микроконсоли соответствует энергия $k_B T/2$, где k_B — постоянная Больцмана, T — температура (теорема равнораспределения [5, 6]). Это обстоятельство позволяет получить оценку для величины $\sqrt{\langle u_n^2(1, t) \rangle}$ для каждой собственной моды.

Результаты расчетов в таблице 3 подтверждают предположение о перераспределении величин среднеквадратичных отклонений в условиях внутреннего резонанса под действием теплового шума.

Таблица 3 – Среднеквадратичное отклонение вершины зонда первой и второй мод вертикального изгиба с учетом взаимодействия зонд–образец за счет теплового шума в условиях внутреннего резонанса 2:1. Числа в скобках указывают соответствующие величины для микроконсоли прямоугольной формы [1]

режим	$\sqrt{\langle u_1^2(L, t) \rangle}, \text{нм}$	$\sqrt{\langle u_2^2(L, t) \rangle}, \text{нм}$
нет взаимодействия	0.029 (0.0303)	0.011(0.00716)
притяжение	0.309 (0.0321)	0.0094 (0.00709)
отталкивание	0.017(0.0226)	0.011(0.00746)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карпинский Д. Н., Шиликин А. Н. Оценка влияния теплового шума в малоамплитудных режимах атомно-силового микроскопа // Заводская лаборатория. 2012. № 5. С. 76–79.
- [2] Sadewasser S., Villanueva G., Plaza J. A. Special cantilever geometry for the access of higher oscillation modes in atomic force microscopy // Appl. Phys. Lett. 2006. V.89. 033106.
- [3] Hacker S., Gottlieb O. Internal resonance based sensing in non-contact atomic force microscopy // Appl. Phys. Lett. 2012. V.101. 053106.
- [4] Butt H.-J., Jaschke M. Calculation of thermal noise in atomic force microscopy // Nanotechnology. 1995. V. 6. P. 1–11.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 567 с.
- [6] Юдович В. И. Математические модели естественных наук. СПб.–М.–Краснодар: Лань, 2011. 335 с.

Karpinsky D. N. *Calculation of the probe-sample interaction influence on dynamical characteristics of the atomic force microscopy (AFM) cantilever by the thermal noise action.* It is fulfilled the vibration characteristics of the AFM microcantilever in the low dynamic amplitude regime. It is specified the conditions for AFM application, when the sole disturbance force is a thermal noise and microcantilever has a stepped shape. That microcantilever geometry satisfies the internal resonance condition at which the vibrational elastic energy is redistributed from the main mode to high-order modes. Calculations confirm that root mean square vibration amplitude of the second flexible mode is increased appreciably and is changed appreciably on account of the probe-sample interaction.

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ИЗМЕНЕНИЕ ДЛИНЫ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Карякин М. И.^{1,2}, Шубчинская Н. Ю.¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

Решена задача о сжатии и растяжении нелинейно-упругого цилиндра с внутренними напряжениями. В качестве источника внутренних напряжений рассмотрены изолированные дефекты — клиновья дисклинация и винтовая дислокация — на оси цилиндра. С использованием полубратного метода нелинейной теории упругости проанализировано напряженно-деформированное состояние цилиндра с дефектом для двух моделей материалов — полуплинейного и материала Блейтца и Ко общего вида. Методом последовательных приближений получены асимптотические формулы, описывающие изменение длины цилиндра в зависимости от материальных параметров рассматриваемых моделей материалов.

Клиновья дисклинация. Рассмотрим деформацию сплошной среды:

$$R = P(r), \Phi = \kappa\varphi, Z = \gamma z. \quad (1)$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты в отчетной конфигурации; R, Φ, Z — цилиндрические координаты в пространстве; κ, γ — положительные постоянные.

По представлению (1) определяются геометрические характеристики деформации — градиент деформации Коши $\mathbf{C}$, левый тензор искажений $\mathbf{U}$, тензор поворота $\mathbf{A}$ и мера деформации Коши–Грина $\mathbf{G}$, а также главные инварианты I_k , $k = 1, 2, 3$. Затем по заданной функции удельной потенциальной энергии $\mathbf{W}$ находится тензор напряжений Пиола $\mathbf{D}$, через который выписываются уравнения равновесия $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, которые превращаются в

$$\frac{dD_{rR}}{dr} - \frac{D_{rR} - \kappa D_{\varphi\Phi}}{r} = 0, \quad (2)$$

и граничные условия $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{D} = 0$, означающие отсутствие напряжений на боковых поверхностях цилиндра

$$D_{rR}|_{r=r_0, r_1} = 0. \quad (3)$$

Краевая задача (2)–(3) представляет собой систему, состоящую из обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $P(r)$ и граничных условий.

Для анализа удлинения по схеме, описанной в [1], воспользуемся представлением осевой силы в виде

$$F = \iint_S D_{zZ} dS, \quad (4)$$

S — площадь поперечного сечения.

В работе были использованы следующие модели материалов: гармонический

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 (\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \mu I_1 (\mathbf{U} - \mathbf{E})^2, \quad (5)$$

и материал Блейтца и Ко общего вида

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mu (1 - \beta) \left[I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^\alpha - 1) - 3 \right] + \frac{1}{2} \mu \beta \left[I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right], \quad (6)$$

здесь $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ — материальные параметры, причем при малых деформациях μ имеет смысл модуля сдвига, а параметр α связан с коэффициентом Пуассона ν соотношением $\alpha = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$.

В случае гармонического материала (5) система (2)–(3) имеет аналитическое решение [1], а в случае материала Блейтца и Ко (6) полученная краевая задача решалась численным образом.

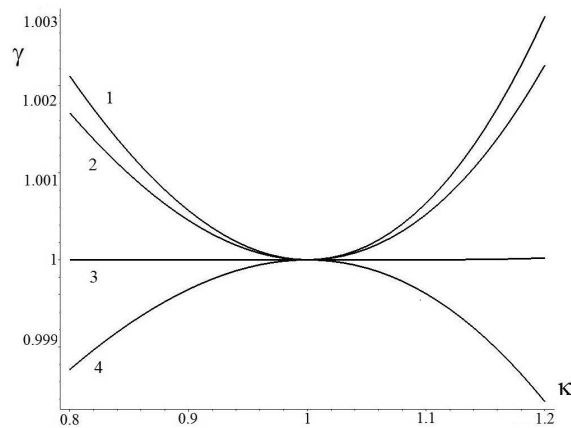


Рисунок 1 — Зависимость изменения длины цилиндра от параметра дисклинации

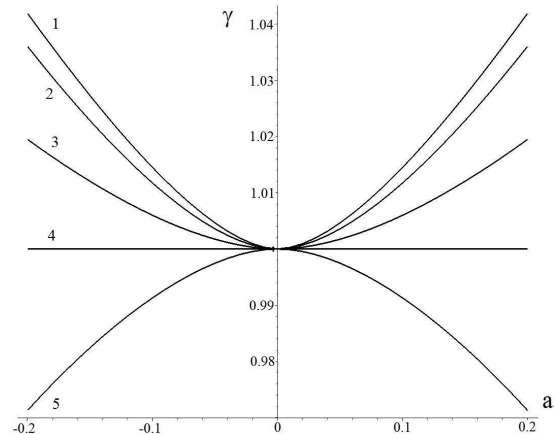


Рисунок 2 — Изменение длины цилиндра в зависимости от параметра дислокации

На рис. 1 изображена зависимость изменения длины цилиндра с $h = r_0/r_1 = 0.05$ от параметра дисклинации для модели гармонического материала (5) — линия 1, и для материала Блейтца и Ко (6): $\beta = 0.9$ — линия 2, $\beta = 0.6$ — линия 3, $\beta = 0.2$ — линия 4. Как известно при $\beta = 0$ модель материала (6) приводится к модели упрощенного материала Блейтца и Ко [2], в этом случае цилиндр укорачивается. Из графика видно, что характер изменения длины цилиндра для модели материала Блейтца и Ко зависит от материального параметра β .

Для проверки полученных численных результатов при построении решения воспользуемся методом последовательных приближений, описанным в [2]. Главным достоинством этого метода является то, что нет необходимости решать дополнительную задачу об эффектах второго порядка как в линейной теории упругости. Впервые этот метод применялся к задачам о кручении и растяжении стержня. В [3] приводится его сравнение с полуобратным методом нелинейной теории упругости

на примере задачи кручения кругового нелинейно-упругого стержня торцевыми моментами, там же описана подробная его схема.

Будем отыскивать решение в виде

$$P(r) = P_0(r) + \delta P_1(r) + \delta^2 P_2(r) + \dots, \quad (7)$$

где $\delta = 1 - \kappa$. Рассматривая последовательно задачи, соответствующие различным степеням параметра δ , получаем аналитические выражения для неизвестных функций $P_0(r)$, $P_1(r)$, $P_2(r)$. Условие отсутствия осевой силы $F = 0$ по (4) приводит к аналитической зависимости γ от κ следующего вида

$$\gamma = 1 - \frac{1}{45} \frac{(1 - \kappa)^2 (6\beta - 5) (h^4 - 2h^2 - 4\ln(h)^2 + 1)}{(h^2 - 1)^2}. \quad (8)$$

Сравнение численных расчетов с полученным асимптотическим приближением показывает, что при $\beta < 5/6$ цилиндр будет укорачиваться, при $\beta > 5/6$ цилиндр будет удлиняться.

Винтовая дислокация. Образование в цилиндре винтовой дислокации описывается полуобратным представлением вида:

$$R = P(r), \Phi = \varphi + \psi z, Z = \gamma z + \hat{a}\varphi, \quad (9)$$

здесь ψ — угол закручивания на единицу длины, $\hat{a} = \frac{|\mathbf{b}|}{2\pi}$ — параметр дислокации, $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса, $a = \hat{a}/r_1$. По (9) аналогичным образом определяются необходимые характеристики деформации и выписывается система (2)–(3). Для анализа удлинения потребуется еще одна силовая характеристика — крутящий момент:

$$M = \iint_S D_{z\Phi} R dS. \quad (10)$$

Пусть $\psi = 0$, тогда следуя схеме в [1], из условия $F = 0$ получаем зависимость изменения длины γ от параметра дислокации a . На рис. 2 изображена зависимость изменения длины цилиндра от параметра дислокации для материала Блейтца и Ко: $\beta = 0$ — линия 1, $\beta = 0.3$ — линия 2, $\beta = 0.7$ — линия 3, $\beta = 1$ — линия 4, для модели гармонического материала — линия 5, $h = 0.01$. Из графика понятно, что при $\beta = 1$ модели материала (6) длина цилиндра остается неизменной, при уменьшении β от 1 до 0 наблюдается удлинение цилиндра, а в случае гармонического материала цилиндр укорачивается.

При исследовании общей постановки задачи с тремя варьируемыми параметрами γ , ψ и a , требуется установить как влияет винтовая дислокация на изменение длины цилиндра и определить угол закручивания цилиндра. Из одновременно выполненных условий $M = 0$, $Q = 0$ находятся γ и ψ как функции от a . На рис. 3 изображена зависимость изменения длины цилиндра от параметра дислокации для материала Блейтца и Ко: $\beta = 0$ — линия 1, $\beta = 0.2$ — линия 2, $\beta = 0.8$ — линия 3, для модели гармонического материала — линия 4, $h = 0.05$. Цилиндр укорачивается в случае гармонического материала, а в случае материала Блейтца и Ко характер изменения длины цилиндра зависит от параметра β .

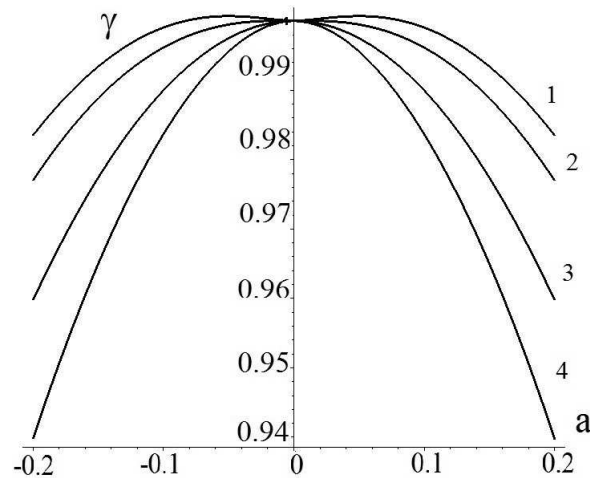


Рисунок 3 – Изменение длины цилиндра в зависимости от параметра дислокации

Чтоб проверить полученные численные результаты, воспользуемся методом последовательных приближений и построим аналитическую зависимость γ от a и β .

Представим решение для функции $P(r)$ в виде ряда по степеням малого параметра a и, аналогично предыдущему случаю, будем последовательно отыскивать неизвестные функции $P_0(r)$, $P_1(r)$, $P_2(r)$, в таком случае γ записывается как

$$\gamma = 1 - a^2 \frac{(h^2 + 1)(\beta - 1)3 + (h^2 - 1)(8 - 3\beta)}{5(h^4 - 1)}. \quad (11)$$

Полученное выражение показывает лишь характер поведения γ в малой окрестности изменения a , на рис. 4 изображено изменение длины цилиндра в зависимости от параметра дислокации для модели материала Блейтца и Ко при $\beta = 0$ и $h = 0.01$, где линия 3 — численный результат, а линия 1 — приближенный по формуле (11). Для того, чтобы изучить более точно влияние a на изменение длины цилиндра, нужно удерживать слагаемые с большим порядком малости:

$$P(r) = P_0(r) + aP_1(r) + a^2P_2(r) + a^3P_3(r) + a^4P_4(r) + \dots \quad (12)$$

Тогда получаем, что $P_3(r) = 0$, выражение для функции $P_4(r)$ не приводится в связи с громоздкостью, а представление (11) схематично записывается как

$$\gamma = \gamma_0 + a^4 t(\beta, h), \quad (13)$$

где $t(\beta, h)$ — некоторая функция, зависящая от степеней β и $h = r_0/r_1$, а γ_0 — соотношение (11).

На рис. 4 изображена же зависимость для модели материала (6) и при тех же значениях материальных параметров, где линия 2 — построена в соответствии с формулой (13). Видно, что предложенное уточнение решения в виде (13) достаточно точно описывает характер изменения длины цилиндра от a .

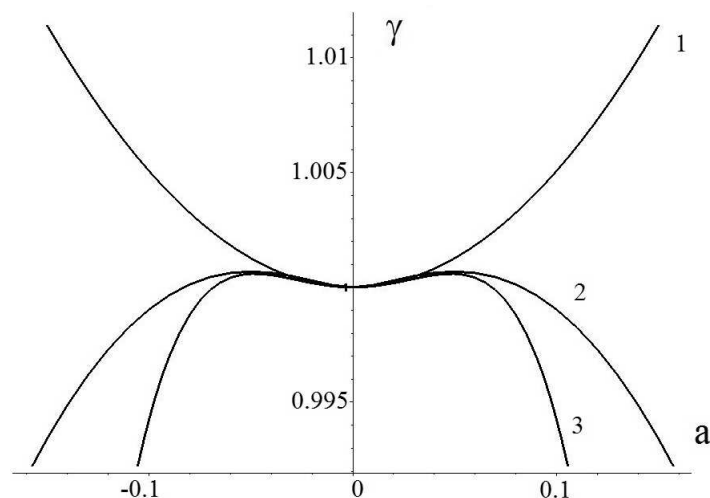


Рисунок 4

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубов Л. М.* Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №1. С. 69–73.
- [2] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [3] *Калашников В. В., Карякин М. И.* Эффекты второго порядка и принцип Сен-Венана в задаче кручения нелинейно-упругого стержня // Прикл. мех. и тех. физ. 2006. Т. 47, № 6. С. 879–885.

Karyakin M. I., Shubchinskaya N. Y. *An influence of internal stresses on length change of nonlinearly elastic cylinder.* The problem of compression and tension of nonlinearly elastic cylinder was presented. As causes of initial stresses were chosen isolated defects — wedge disclination and screw dislocation. By using semi-inverse method of nonlinear elasticity theory stress-strain state of cylinder with the defects was analyzed for two compressible material models: John material and Blatz and Ko material. Using method of successive approximation asymptotic formula for change of length of a cylinder depending on material parameter of considering material models were obtained.