

Российский Национальный комитет
по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Российский фонд фундаментальных исследований
Южный федеральный университет
Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южный научный центр РАН

**VII Всероссийская
(с международным участием)
конференция по механике
деформируемого твердого тела**

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ

г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.

ТОМ II

Ростов-на-Дону
2013

УДК 532.5
ББК 25.25
С 56

Отв. редактор А. О. Ватульян.
Редакторы: Л. М. Зубов, А. В. Наседкин, А. В. Попов, А. Н. Соловьев,
М. И. Чебаков, А. С. Юдин.

Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.: в 2 т. Т. II. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2013. – 264 с.
ISBN 978-5-9275-1146-4
ISBN 978-5-9275-1148-8 (2 том)

Сборник содержит научные доклады, представленные на VII Всероссийскую (с международным участием) конференцию по механике деформируемого твердого тела Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.).

В сборнике представлены результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности, в механике контактных взаимодействий и теории оболочек, в теории пластичности, механике разрушения, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и при их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

Программный комитет

Аннин Б. Д., Бабешко В. А., Баженов В. Г., Белоконь А. В., Ватульян А. О., Гольдштейн Р. В., Горячева И. Г., Губайдуллин Д. А., Зубов Л. М., Ильгамов М. А., Индейцев Д. А., Колесников В. И., Коссович Л. Ю., Куликовский А. Г., Липанов А. М., Ломакин Е. В., Любимов Г. А., Манжиров А. В., Матвеев В. П., Морозов Н. Ф., Панин В. Е., Победря Б. Е., Пухначев В. В., Радаев Ю. Н., Тарлаковский Д. В., Устинов Ю. А., Фомин В. М.

Организационный комитет

Карякин М.И., Калинин В.В., Наседкин А.В., Сафроненко В.Г., Сумбатян М.А., Чебаков М.И., Юдин А.С.

Оригинал-макет подготовлен в системе LaTeX Поповым А. В.
Статьи публикуются с файлов-оригиналов, представленных авторами в оргкомитет конференции.

ISBN 978-5-9275-1146-4
ISBN 978-5-9275-1148-8 (2 том)

УДК 532.5
ББК 25.25

VII Всероссийская (с международным участием) конференция по механике деформируемого твердого тела (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 13-01-06088

Содержание

Келлер И. Э. Интегрируемость уравнений медленного движения вязкопластической среды с N-образной зависимостью от скорости деформации	6
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Нелинейные уравнения гиперболического термоупругого континуума со сложной микроструктурой: теоретико-полевой подход	11
Ковтанюк Л. В., Русанов М. М. О распространении волны разгрузки в тяжелом слое при продолжающемся пластическом течении	16
Колесников В. И., Мигаль Ю. Ф. Совместимость химических элементов на границах зерен в стали и ее влияние на износостойкость узлов трения	21
Коновалова А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Взаимодействие неоднородно намагниченных частиц, заключенных в эластомер	26
Короткин В. И. Кинематика, напряжённость и модификация поверхностей круговых зубьев цилиндрических зубчатых передач Новикова	31
Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Фронт образования анизотропной упругой среды при объединении частиц	36
Курдина С. П. Осесимметричный контакт тел с поверхностно неоднородными покрытиями и систем жестких штампов	41
Кучумов А. Г., Самарцев В. А., Няшин Ю. И., Гаврилов В. А. Биомеханический подход к исследованию связи билиарной боли с опорожнением желчного пузыря	46
Лапина П. А., Явруян О. В. О влиянии предварительного напряжения на определение параметров трещины в слое	51
Леви Г. Ю. Поверхностные акустические волны в термоупругой предварительно напряженной среде	56
Леви М. О., Михайлова И. Б. Волны Гуляева–Блюштейна в предварительно напряженных магнитоупругих средах	61
Лекомцев С. В., Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Численное моделирование устойчивости оболочек вращения, содержащих текущую жидкость	66
Локшина Л. Я., Костандов Ю. А. Влияние внешнего и внутреннего трения на предельное состояние образца горной породы при сжатии жесткими штампами	71
Лыжов В. А. Динамические свойства наноразмерных сегнетоэлектрических пленок	76
Львов Г. И., Окорочков В. А. Исследование процесса автофретирования и последующей механической обработки	81
Макаров С. С., Устинов Ю. А. Исследование устойчивости и напряженно-деформированного состояния оболочек вращения	86

Марков И. П., Литвинчук С. Ю., Петров А. Н., Белов А. А. Гранично-элементные схемы с переменным шагом в трехмерных краевых задачах пороупругой динамики	91
Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А. Исследование структурной перестройки костной ткани методами механики сплошных сред	96
Мишустин И. В., Мовчан А. А. Моделирование поведения сплавов с памятью формы при немонотонно меняющихся напряжениях	101
Наседкин А. В. Методы многомасштабного моделирования ультразвуковых пьезоэлектрических излучателей с композитными элементами	106
Наседкина А. А. Моделирование многослойного угольного пласта с трещинами и физическими нелинейностями в материальных модулях	111
Недин Р. Д., Нестеров С. А. О некоторых обратных задачах при определении предварительного напряженного состояния	116
Нескородев Р. Н. Уравнения одного из вариантов уточненной теории изгиба ортотропных плит	121
Никитин Ю. Г., Диденко А. В., Сыромятников П. В. Оптимизация расчетов многослойных анизотропных композитов	126
Орлова Н. С. Уточнение интерполяционных коэффициентов в численной схеме моделирования массопереноса в виброкипящем слое	129
Осипов А. В. Идентификация параметров тонкого надреза для различных моделей балок	133
Перельмутер М. Н. Моделирование разрушения по границе соединения материалов	138
Полоник М. В., Рогачев Е. Е. О важности учета ползучести при моделировании снижения остаточных напряжений температурным воздействием	143
Пухначев В. В. Математические модели несжимаемых вязкоупругих сред Максвелла и Кельвина–Фойхта	147
Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Лучевые представления решений многомерных задач динамики нелинейно–упругих сред при ударных воздействиях	152
Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об учете фактора неоднородности среды в одномерных задачах деформации, приводящих к продольным ударным волнам	157
Роговой А. А., Столбова О. С. Модели поведения сплавов и полимеров с памятью формы при больших деформациях	162
Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. Математическая модель микрополярных ортотропных упругих тонких двухслойных оболочек	167
Сафроненко В. Г., Донченко Е. Н., Шутько В. М. Виброакустика оболочек вращения из композиционных полимерных материалов с учетом дискретных подкреплений круговыми ребрами	172

Свободина К. С. Алгоритм численной реализации термомеханической модели для описания динамики пластической среды	177
Симбиркин В. Н., Якушев В. Л., Филимонов А. В. Критерии определения опасных направлений сейсмического воздействия при расчете сооружений	181
Стружанов В. В. Обратная задача определения свойств материала по диаграмме чистого изгиба	186
Сумбатьян М. А. Теоретические и экспериментальные методы в задаче прохождения ультразвукового пучка волн через упругие среды со скоплениями микро-дефектов	190
Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Динамическая контактная задача с подвижными границами для двух тонких упругих цилиндрических или сферических оболочек	195
Углич П. С. Обратная коэффициентная задача для упругого слоя	200
Федотов В. П. Математическое моделирование связанных физико-механических процессов	205
Чебаков М. И., Абрамович М. В., Колосова Е. М. Взаимодействие штампа и трехкомпонентного цилиндрического основания при наличии сил трения	210
Черпаков А. В. Идентификация дефектов в стержнях, имеющих различные варианты закрепления	215
Швед О. Л. О возможных определяющих соотношениях нелинейной упругопластичности	219
Швед О. Л. Определяющие соотношения ортотропного упругопластического материала	224
Шейдаков Д. Н., Шейдаков Н. Е. Об устойчивости функционально неоднородных стержней из микрополярных материалов	229
Юдин А. С. Численно-аналитические модели виброакустики оболочек	234
Юдин С. А., Сигаева Т. В., Юдин А. С. Формы оболочек для создания больших перемещений и усилий распора	239
Якупов Н. М., Киямов Х. Г. К анализу сферических оболочек трехмерными элементами	244
Якупов С. Н. Исследование адгезии пленки к подложке	249
Якупов С. Н., Гиниятуллин Р. Р. Оценка точности экспериментально-теоретического метода	254
Lazarev V. E., Gavrilov K. V., Doikin A. A., Sequard-Base J., Vorlaufer G. Experimental and numerical investigations of the friction behavior and evaluation of wear parameters for "aluminum alloy — cast iron" contact interface	259

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ МЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С N-ОБРАЗНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

Келлер И. Э.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Рассматриваются уравнения равновесия и совместности несжимаемой вязкопластической среды с произвольной материальной функцией, связывающей интенсивности напряжений и скоростей деформации. Найден общий вид материальной функции, обеспечивающей полную интегрируемость уравнений в двумерной формулировке. Данная функция имеет N-образный (спинодальный) вид и в частных случаях соответствует линейно вязкой жидкости и идеально пластическому твердому телу. Смена знака чувствительности к скорости деформации соответствует смене типа системы и переходу через линию разрыва в сплошном теле. Найденная функция обеспечивает расщепление оператора на паре двумерных подпространств, в которых уравнения точно линеаризуются. Результат расширяет класс интегрируемых задач на т. н. «активные материалы» (или «материалы с внутренней динамикой»), к которым существует большой интерес.

1. Уравнения и их запись в виде квазилинейной системы. Рассматриваются уравнения равновесия несжимаемой вязкопластической среды

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\tau(\xi)}{2\xi}\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{D} — тензоры напряжений и деформаций скорости, p — гидростатическое давление, \mathbf{I} — единичный тензор второго ранга, \mathbf{v} — скорость перемещений, $\xi = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{D}:\mathbf{D}}$ — интенсивность деформации скорости¹, $\tau(\xi)$ — материальная функция, на которую априори не накладываются ограничения.

Ставится задача поиска частных видов функции $\tau(\xi)$, обеспечивающих полную интегрируемость системы (1).

Уравнения (1) в декартовых ортогональных координатах x, y имеют вид:

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0, \quad \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{\tau(\xi)}{2\xi}v_{x,x}, \quad \sigma_{yy} = -p - \frac{\tau(\xi)}{2\xi}v_{x,x}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\tau(\xi)}{4\xi}(v_{x,y} + v_{y,x}), \quad (3)$$

$$v_{x,x} + v_{y,y} = 0. \quad (4)$$

¹Числовой множитель в определении интенсивности деформации скорости адаптирован для двумерного случая так, чтобы для однородного одноосного растяжения пространства в силу определяющих соотношений системы (1) величина τ становилась равной растягивающему напряжению, а ξ — скорости деформации растяжения.

Система (1) для частного случая вязкопластической среды Бингама $\tau = \tau_* + 2\mu\xi$ изучалась А.А. Ильюшиным [1] и была сведена им к одному сильно нелинейному уравнению четвертого порядка в терминах функции напряжений или функции тока поля скоростей перемещений. Здесь предлагается другой путь, исключающий из уравнений радикал. Компоненты тензоров напряжений и деформации скорости представляются в виде [2]

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{\tau(\xi)}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_{yy} = -p + \frac{\tau(\xi)}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{\tau(\xi)}{2} \cos 2\varphi, \quad (5)$$

$$v_{x,x} = -\xi \sin 2\varphi, \quad v_{y,y} = \xi \sin 2\varphi, \quad v_{x,y} + v_{y,x} = 2\xi \cos 2\varphi, \quad (6)$$

удовлетворяющем уравнениям (3) и (4). Здесь φ — угол между линией максимального касательного напряжения и осью x . Выражения (5) подставляются в (2), а (6) вместе с выражением вихря скорости

$$q = \frac{1}{2} (v_{y,x} - v_{x,y})$$

позволяют образовать два уравнения совместности:

$$(v_{x,x})_{,y} = (v_{x,y})_{,x}, \quad (v_{y,y})_{,x} = (v_{y,x})_{,y}.$$

В итоге исходные уравнения записываются в виде системы однородных квазилинейных уравнений первого порядка

$$u_{,x} + \Lambda u_{,y} = 0, \quad \Lambda = A^{-1}B. \quad (7)$$

где $u = \{\xi, \varphi, p, q\}^T$,

$$A = \begin{bmatrix} \tau' \sin 2\varphi & 2\tau \cos 2\varphi & 2 & 0 \\ -\tau' \cos 2\varphi & 2\tau \sin 2\varphi & 0 & 0 \\ -\cos 2\varphi & 2\xi \sin 2\varphi & 0 & 1 \\ -\sin 2\varphi & -2\xi \cos 2\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\tau' \cos 2\varphi & 2\tau \sin 2\varphi & 0 & 0 \\ -\tau' \sin 2\varphi & -2\tau \cos 2\varphi & 2 & 0 \\ -\sin 2\varphi & -2\xi \cos 2\varphi & 0 & 0 \\ \cos 2\varphi & -2\xi \sin 2\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\tau' = d\tau/d\xi$, для исследования которой развиты методы [3].

2. Условия полной интегрируемости уравнений. Собственные числа матрицы Λ суть

$$\lambda_{1\pm} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \beta), \quad \lambda_{2\pm} = -\operatorname{ctg}(\varphi \pm \beta), \quad (8)$$

где

$$\operatorname{tg} 2\beta = \sqrt{-m}, \quad m \equiv \frac{d \ln \tau}{d \ln \xi} = \frac{\tau' \xi}{\tau} \quad (9)$$

является параметром чувствительности к скорости деформации, принимающий произвольные значения. Система (7) имеет локально гиперболический тип при $m < 0$ и эллиптический тип при $m > 0$.

Дифференциальные соотношения на характеристиках находятся умножением (7) на левые собственные векторы матрицы Λ и имеют вид

$$\begin{aligned} \mp \tau \xi^{-1} \sqrt{m(m-1)} d\xi - 2\tau \sqrt{1-m} d\varphi + 2dp \mp \tau \xi^{-1} \sqrt{-m} dq &= 0, \\ \pm \tau \xi^{-1} \sqrt{m(m-1)} d\xi + 2\tau \sqrt{1-m} d\varphi + 2dp \mp \tau \xi^{-1} \sqrt{-m} dq &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

для $\lambda_{1\pm}$ и $\lambda_{2\pm}$ соответственно.

Произвольную функцию $\tau(\xi)$ в пфаффовой системе (10) удается подчинить необходимым и достаточным условиям полной интегрируемости (условиям теоремы Фробениуса [4]), сводящимся к равенствам

$$\tau\sqrt{1-m} \equiv \alpha, \quad \tau\xi^{-1}\sqrt{-m} \equiv \gamma, \quad (11)$$

где α, γ — произвольные константы. Условия (11) с учетом (9) принимают вид двух дифференциальных уравнений

$$\tau' - \xi^{-1}\tau + \alpha^2\xi^{-1}\tau^{-1} = 0, \quad \tau' + \gamma^2\xi\tau^{-1} = 0,$$

которым удовлетворяет функция

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{\tau_*^2 - 4\mu^2\xi^2}, & 0 \leq \xi \leq \frac{\tau_*}{2\mu}, \\ \sqrt{4\mu^2\xi^2 - \tau_*^2}, & \xi > \frac{\tau_*}{2\mu}, \end{cases} \quad (12)$$

причем первая строка соответствует $\alpha = \tau_*$ и $\gamma = 2\mu$ в (11), а вторая — $\alpha = i\tau_*$ и $\gamma = i2\mu$.

3. Расщепление уравнений. С функцией (12) соотношения (10) интегрируются, и через эти интегралы (инварианты Римана) записываются неизвестные задачи. Для гиперболического случая:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2}(\beta + \varphi - \bar{p} + \bar{\mu}q), & 2\beta &= \chi + \eta + \lambda - \zeta, \\ \eta &= \frac{1}{2}(\beta + \varphi + \bar{p} - \bar{\mu}q), & 2\varphi &= \chi + \eta - \lambda + \zeta, \\ \lambda &= \frac{1}{2}(\beta - \varphi + \bar{p} + \bar{\mu}q), & 2p &= -\chi + \eta + \lambda + \zeta, \\ \zeta &= \frac{1}{2}(-\beta + \varphi + \bar{p} + \bar{\mu}q). & 2\bar{\mu}q &= \chi - \eta + \lambda + \zeta, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{\mu} = \mu/\tau_*$ и $\bar{p} = p/\tau_*$.

Система (7) в терминах (13) расщепляется на две пары несвязанных квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} \chi_{,x} + \text{tg}(\varphi + \beta)\chi_{,y} &= 0, & \eta_{,x} - \text{ctg}(\varphi + \beta)\eta_{,y} &= 0, \\ \lambda_{,x} + \text{tg}(\varphi - \beta)\lambda_{,y} &= 0, & \zeta_{,x} - \text{ctg}(\varphi - \beta)\zeta_{,y} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

каждую из которых можно подвергнуть преобразованиям годографа $(\chi, \eta) \rightarrow (x, y)$, $(\lambda, \zeta) \rightarrow (x, y)$ и получить линейную систему:

$$\begin{aligned} x_{,\chi} + \text{ctg}(\chi - \lambda)y_{,\chi} &= 0, & x_{,\eta} - \text{tg}(\chi - \lambda)y_{,\eta} &= 0, \\ x_{,\lambda} + \text{ctg}(\eta - \zeta)y_{,\lambda} &= 0, & x_{,\zeta} - \text{tg}(\eta - \zeta)y_{,\zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

и, наконец, с помощью подстановок

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos(\chi - \lambda) - y_1 \sin(\chi - \lambda), & y &= x_1 \sin(\chi - \lambda) + y_1 \cos(\chi - \lambda), \\ x &= x_2 \cos(\eta - \zeta) - y_2 \sin(\eta - \zeta), & y &= x_2 \sin(\eta - \zeta) + y_2 \cos(\eta - \zeta), \end{aligned} \quad (16)$$

применяемых к соответствующим строкам (15), привести к системе с постоянными коэффициентами

$$y_{1,\eta} - \frac{1}{2}x_1 = 0, \quad x_{1,\chi} - \frac{1}{2}y_1 = 0, \quad y_{2,\zeta} - \frac{1}{2}x_2 = 0, \quad x_{2,\lambda} - \frac{1}{2}y_2 = 0, \quad (17)$$

где каждая новая переменная удовлетворяет телеграфному уравнению:

$$x_{1,\chi\lambda} - \frac{1}{4}x_1 = 0, \quad y_{1,\chi\lambda} - \frac{1}{4}y_1 = 0, \quad x_{2,\eta\zeta} - \frac{1}{4}x_2 = 0, \quad y_{2,\eta\zeta} - \frac{1}{4}y_2 = 0. \quad (18)$$

Методы построения решений задачи Коши либо задачи Гурса для уравнений (18) разработаны. В частности, полагая любые три инварианта Римана (13) константами, получаем решения типа Прандтля–Майера.

В случае $\bar{\mu} = 0$ (12) трансформируется в функцию $\tau \equiv \tau_*$, соответствующую идеальной пластичности, $m \equiv 0$, $\beta \equiv 0$, среди собственных значений (8) появляется пара кратных, и (14)–(18) сводятся к известным результатам [2].

Аналогичные преобразования могут быть проделаны для эллиптического случая в терминах комплексных неизвестных.

Показано, что функция (12) обеспечивает выполнение необходимого и достаточного условия расщепления квазилинейной системы [5], заключающегося в инволютивности оператора Λ (имеющего простой спектр (8)) и его тензора Ниеенхейса относительно элементов подпространств, натянутых на ортогональные пары правых собственных векторов Λ .

4. О классе сплошных сред с N-образной зависимостью от скорости деформации. Материальная функция (12), гарантирующая полную интегрируемость уравнений (7) в плоском случае, имеет примечательный вид (рис. 1). Она допускает переход от гиперболического к эллиптическому режиму с образованием линий разрыва в сплошной среде. В отличие от уравнений газовой динамики [6] и уравнений Гейрингер общей плоской задачи идеальной пластичности [2] этот переход связан с метастабильностью кинетических, а не термостатических свойств среды.

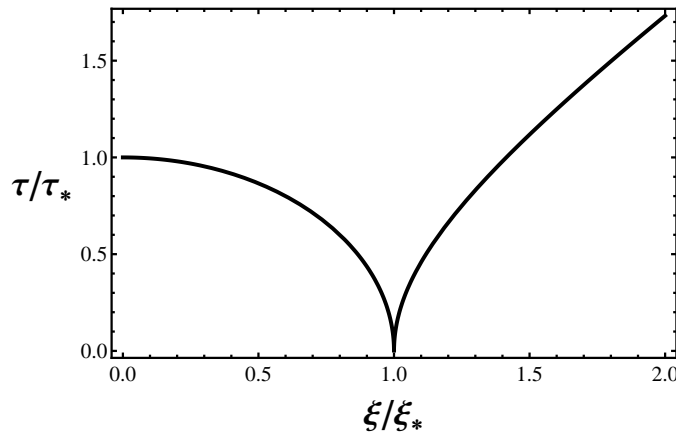


Рисунок 1 – График функции (12)

Класс таких материалов известен: металлы в условиях динамического деформационного старения, динамической рекристаллизации [8], мартенситных превращений, двойникования; твердые полимеры; среды с внутренним сухим трением (сыпучие среды и горные породы). Такая скоростная метастабильность среды в

соединении с ее упругими свойствами может отвечать за режимы деформирования, сопровождаемые распространением уединенных волн локализации деформаций и релаксационными автоколебаниями [7]. В частности, солитонику в подобных средах обеспечивает «клев» на кривой (12).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 13-01-00365 и Программы совместных исследований УрО, СО и ДВО РАН N 12-С-1-1015.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин А. А.* Деформация вязкопластического тела // Ученые записки МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
- [2] *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. 432 с.
- [3] *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1988. 686 с.
- [4] *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
- [5] *Vogoyavlenskij O. I.* Decoupling problem for systems of quasi-linear pde's // Commun. Math. Phys. 2007. № 269. P. 545–556.
- [6] *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.-Ижевск: ИКИ, 2003. 336 с.
- [7] *Lebyodkin M., Dunin-Barkowski L., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. P.* Spatio-temporal dynamics of the Portevin — Le Chatelier effect: experiment and modeling // Acta Materialia. 2000. Vol. 48, № 10. P. 2529–2541.
- [8] *Рудской А. И., Рудаев Я. И.* Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов. СПб: Наука, 2009. 218 с.

Keller I. E. *Integrability of slow motion equations for viscoplastic medium with N-shaped strain rate dependence.* The equilibrium and compatibility equations for viscoplastic medium with an arbitrary material function relating the stress intensity to the strain rate one is considered. A general form of the function ensuring complete integrability of the equations in two-dimensional formulation has been found. The function has an N-shaped (spinoidal) graph and in particular cases corresponds to a linearly viscous liquid and perfectly plastic solid. A change of the sign of the sensitivity to the strain rate corresponds to a change in the type of the system and a pass over the discontinuity line in a solid. The function provides decoupling of the operator in a pair of two-dimensional subspaces where the equations are exactly linearized. The results allows us to extend the class of integrable problems to so-called “active materials” (or “materials with internal dynamics”), which have aroused considerable interest.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА СО СЛОЖНОЙ МИКРОСТРУКТУРОЙ: ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ ПОДХОД

Ковалев В. А.¹, Радаев Ю. Н.²

¹Московский городской университет управления Правительства Москвы

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва

Рассматривается одна нелинейная математическая модель термоупругого континуума с «тонкой» (сложной) микроструктурой, характерной для упругих метаматериалов. Модель реализована в терминах 4-ковариантного лагранжева формализма теории поля. Микроструктура континуума задается микроструктурными d -тензорами, которые вводятся в теоретико-полевою схему как экстра-полевые переменные (d -переменные). Указывается «естественная» плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия. Сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. Ковариантные уравнения термоупругого поля в континууме с микроструктурой получены в канонической форме Эйлера—Лагранжа. Выполнен учет инерционности микроструктурной «составляющей» термоупругого поля. Вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия применяются для построения ковариантных тензоров термомеханики.

1. Вводные замечания. В последние годы интенсивно развивается механика упругих метаматериалов (elastic metamaterials), обладающих весьма необычной микроструктурой и аномальным механическим поведением. Под микроструктурой континуума в широком смысле понимается существование нескольких различных физических масштабов (структурных уровней), определяющих состояние континуума. Двумя ключевыми характеристиками континуума с микроструктурой являются самосогласованное взаимодействие различных структурных уровней и возможность передачи энергии с одного структурного уровня на другой. Теория таких континуумов, начиная с работ [1, 2], основывается на признании существования дополнительных (экстра) степеней свободы и возможности исследовать физически бесконечно малый объем не как материальную точку, а как существенно более сложный объект, с присущими ему дополнительными (помимо трех трансляционных) степенями свободы (ротационными, осцилляционными), как своего рода микроконтинуум, обладающий возможностью дополнительной микродеформации. Таким образом, несколько более реалистичная модель континуума получается в результате перехода от абстрактной, не существующей в действительности точки «нулевого размера», к экстраточке. Проблемы, связанные с изучением континуума с микроструктурой (microstructure continuum model), относятся к тем областям механики деформируемого твердого тела, которые отдают приоритет именно структурному моделированию. При этом явно просматривается тенденция решения нелинейных проблем механики континуума со сложной микроструктурой вне рамок имеющегося физически надежно обоснованного набора математических моделей.

Целью настоящей работы является разработка методами теории поля [3, 4] общей нелинейной теоретико-полевой модели термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой, представляемой конечным набором тензоров произвольно высоких рангов, и вывод замкнутой системы дифференциальных уравнений поля.

2. Экстра-полевые d -тензоры. Самым распространенным подходом к изучению деформации континуума является концепция сравнения пространственных положений составляющих его точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум. В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемых в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки.

В теориях континуума с микроструктурой произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

положения \mathbf{X} отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место \mathbf{x} пространства, сопровождается экстра-деформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некопланарных d -векторов \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\mathbf{X}, t). \quad (2)$$

Переменные \mathbf{X} и \mathbf{x} выступают как соответственно лагранжева (отсчетная) и эйлерова (пространственные) переменные, если пользоваться стандартной терминологией механики континуума. С этими переменными связаны метрики $G_{\alpha\beta}$, g_{ij} . Конвективная метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$.

Заметим, что лагранжевы переменные X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), дополненные четвертой временной координатой, выступают как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные x^j ($j = 1, 2, 3$) представляют собой физические поля. То же самое относится к «мягкой» системе d -векторов \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$). Но они классифицируются нами как экстра-полевые переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью пространственных компонент d_a^j ($a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$).

Система трех d -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно и задает микроструктуру континуума. «Тонкая» микроструктура континуума представляется экстра-полями контравариантных тензоров (d -тензоров) сколь угодно высоких рангов¹

$$d_c^{j_1 j_2 \dots} \quad (c = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Экстра-деформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (2).

¹Выбранная далее схема описания «тонкой» микроструктуры и возможность ее математического представления d -тензорами произвольно высоких четных рангов предложена в работе: Радаев Ю. Н. Континуальные модели поврежденности твердых тел / Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Институт проблем механики РАН. М., 1999. 380 с.

Поведение репера \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$) характеризуется как его возможной «чистой» деформацией (сдвигами трехгранника и удлинениями его ребер), так и поворотом. Ясно, что каждый элемент континуума с микроструктурой обладает большим число степеней свободы, чем классический континуум. С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$) может сводиться только к его «жестким» поворотам в пространстве; в этом случае помимо трех трансляционных степеней свободы микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы. Возможность исключительно «жесткой» трансформации указанного репера можно выразить уравнениями

$$g_{ij} d_a^i d_b^j = \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где δ_{ab} — символ Кронекера, которые, очевидно, имеют смысл дополнительных кинематических ограничений, накладываемых на экстра-полевые переменные \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$).

В более широком смысле дополнительное кинематическое ограничение может накладываться на экстра-деформацию континуума с микроструктурой в форме конечного уравнения

$$\mathcal{F}(d_1^{j_1 j_2 \dots}, d_2^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0, \quad (5)$$

связывающего экстра-полевые переменные $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots$).

3. Термоупругое действие и дифференциальные уравнения поля. В качестве основной термической полевой переменной выберем температурное смещение ϑ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ .

Перечислим все *определяющие* переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой: градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ ($j, \alpha = 1, 2, 3$); d -векторы d_a^j ($a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) вместе с их референциальными градиентами $\partial_\alpha d_a^j$ ($a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3$); d -тензоры $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и их референциальные градиенты $\partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots; \alpha = 1, 2, 3; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$); градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$ и скорость температурного смещения $\dot{\partial}_4 \vartheta$.

«Естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии имеет форму

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \quad (6)$$

Она может рассматриваться как разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathfrak{J}} d_a^i d_b^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \dots \overset{cd}{\mathfrak{J}} d_c^{j_1 j_2 \dots} d_d^{k_1 k_2 \dots} \dots - \\ & - \psi(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь точкой обозначается частное дифференцирование по времени ∂_4 при постоянных лагранжевых координатах X^α ; ρ_R — референциальная плотность; $\overset{ab}{\mathcal{J}}, \overset{cd}{\mathcal{J}}$ — тензоры инерции микроэлемента.

Вариационный интеграл термоупругого действия в силу указанной формулой (6) плотности действия будет иметь следующий вид:

$$\mathfrak{S} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta) d^4 X. \quad (8)$$

$(\mathbf{a} = 1, 2, 3; \mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; \alpha, \beta = 1, 2, 3; j, j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3)$

Соответствующие вариационному интегралу (8) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля получаются в ковариантной форме и естественно распадаются на четыре группы

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_{\cdot j}^{\alpha \cdot} - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{a}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^{\alpha \cdot} + \overset{a}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= 0 \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{c}{\mathcal{M}}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots} + \overset{c}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots} - \partial_4 \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} &= 0, \quad (9) \\ (\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; \alpha = 1, 2, 3; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3) \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Следующие полевые производные вводятся для записи дифференциальных уравнений поля (9):

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{a}{\mathcal{Q}}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_a^j}, \quad \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}}, \\ S_{\cdot j}^{\alpha \cdot} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{a}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^{\alpha \cdot} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_a^j)}, \quad \overset{c}{\mathcal{M}}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots})}, \quad (10) \\ \overset{a}{\mathcal{A}}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j}, \quad \overset{c}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_c^{j_1 j_2 \dots}}, \\ s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta}, \quad j_R^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}. \end{aligned}$$

В приведенных выше определяющих уравнениях приняты следующие обозначения: P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; $\overset{a}{\mathcal{Q}}_j, \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots}$ — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным степеням свободы; $S_{\cdot j}^{\alpha \cdot}$ — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа; $\overset{a}{\mathcal{M}}_{\cdot j}^{\alpha \cdot}, \overset{c}{\mathcal{M}}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\alpha \cdot \dots}$ — тензоры экстранапряжений; $\overset{a}{\mathcal{A}}_j, \overset{c}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots}$ — обобщенные силы—моменты, сопряженные экстра-полевым переменным d_a^j ($\mathbf{a} = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$), $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$); s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии); j_R^α — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Компоненты ковариантного тензора энергии—импульса термоупругого поля в континууме с «тонкой» микроструктурой, вычисляемые в плоском пространстве—времени с помощью хорошо известной процедуры, позволяют определить полный гамильтониан поля \mathcal{H} , вектор псевдоимпульса поля \mathcal{P}_λ , вектор Умова—Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P_{\cdot\lambda}^{\mu\cdot}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3$):

$$\mathcal{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{d}^l \overset{a}{\mathcal{Q}}_l + \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} + \dot{\vartheta} s - \mathcal{L}. \quad (11)$$

$$\mathcal{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l) P_l - (\partial_\lambda d^l) \overset{a}{\mathcal{Q}}_l - (\partial_\lambda d^{j_1 j_2 \dots}) \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} - s(\partial_\lambda \vartheta). \quad (12)$$

$$\Gamma^\mu = S_{\cdot l}^{\mu\cdot} \dot{x}^l + \mathcal{M}_{\cdot l}^{\mu\cdot} \dot{d}^l + \mathcal{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\mu\cdot \dots} \dot{d}^{j_1 j_2 \dots} - j_R^\mu \dot{\vartheta}. \quad (13)$$

$$-P_{\cdot\lambda}^{\mu\cdot} = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{\cdot l}^{\mu\cdot} (\partial_\lambda x^l) + \mathcal{M}_{\cdot l}^{\mu\cdot} (\partial_\lambda d^l) + \mathcal{M}_{\cdot j_1 j_2 \dots}^{\mu\cdot \dots} (\partial_\lambda d^{j_1 j_2 \dots}) - j_R^\mu (\partial_\lambda \vartheta). \quad (14)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Cosserat E. et F.* Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 pp.
- [2] *Toupin R. A.* Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. P. 85–112.
- [3] *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 156 с.
- [4] *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

Kovalev V. A., Radayev Y. N. *Nonlinear equations of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure: a field theoretical approach.* A new nonlinear mathematical model of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure attributed to elastic metamaterials is considered. The model is presented by 4-covariant field theoretical formulation. d -tensors take account of fine microstructure. They are playing role of extra field variables. A Lagrangian density (action density) extended by the extra field variables is given. Additionally, virtual microstructural inertia is taken into consideration in the action density. It is also concerned to the thermal inertia. The corresponding least action principle is formulated. 4-covariant field equations of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure are derived. Variational symmetries of the proposed thermoelastic action in a plane space–time are then used to obtain the energy–momentum tensor and covariant conservation laws.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ В ТЯЖЕЛОМ СЛОЕ ПРИ ПРОДОЛЖАЮЩЕМСЯ ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

Ковтанюк Л. В., Русанов М. М.

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Приводится решение краевой задачи теории больших упруго-вязкопластических деформаций. Расположенный на наклонной плоскости упруго-вязкопластический слой под приложенными к поверхности сдвиговыми усилиями, направленными вверх, начинает накапливать необратимые деформации. В некоторый момент времени на опорной границе слоя выполняется условие проскальзывания. Следует отметить, что в этот момент в слое наряду с областью вязкопластического течения присутствует и область обратимого деформирования. При переходе от трения к проскальзыванию сдвиговые напряжения претерпевают скачок, вследствие чего по среде начинает распространяться поверхность разрывов напряжений, которую назовем волной разгрузки. Особенность задачи в том, что со стороны нагруженной границы продолжается пластическое течение.

Задача теории больших упругопластических деформаций о распространении волны разгрузки в слое, накопившем как обратимые, так и необратимые деформации решена ранее [1]. Рассматривался случай, когда нагружающее усилие снималось в заданный момент времени с тяжелого слоя, закрепленного на наклонной плоскости. Ниже решается подобная задача, однако нагружающее усилие не снимается, сам слой не закреплен, а волна разгрузки начинает распространяться, когда на границе выполняется условие проскальзывания. Подобная постановка позволяет рассматривать, как распространяется упругая волна разгрузки при продолжающемся пластическом течении.

Начальные условия для решения динамической задачи с накопленными необратимыми деформациями получены за счет квазистатического деформирования. Здесь будет использоваться теория больших упругопластических деформаций, построенная в рамках теории пластического течения [2]. Считаем, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай учета вязких свойств материалов [3].

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta|\varepsilon_k^p|,$$

где σ_i и ε_k^p — главные значения тензоров напряжения и скоростей пластических деформаций, k — предел текучести, η — коэффициент вязкости.

Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_k^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_k^p) = k, \quad \lambda > 0.$$

Граничные условия краевой задачи имеют вид:

$$U(x_1 = 0) = 0, \quad \sigma_{11}(x_1 = 0) = -\sigma, \quad V_2 = \lambda t,$$

$U = U_2(x_1)$ — единственная отличная от нуля компонента вектора перемещения, σ и λ задаваемые постоянные

Решая квазистатическую задачу нам становится известно время начала пластического течения, момент выполнения условия проскальзывания, граница вязкопластического течения $m(t)$ в момент проскальзывания (рис. 1). Так как усилия направлены вверх, то волна разгрузки возникнет в области накопившей только упругие деформации.

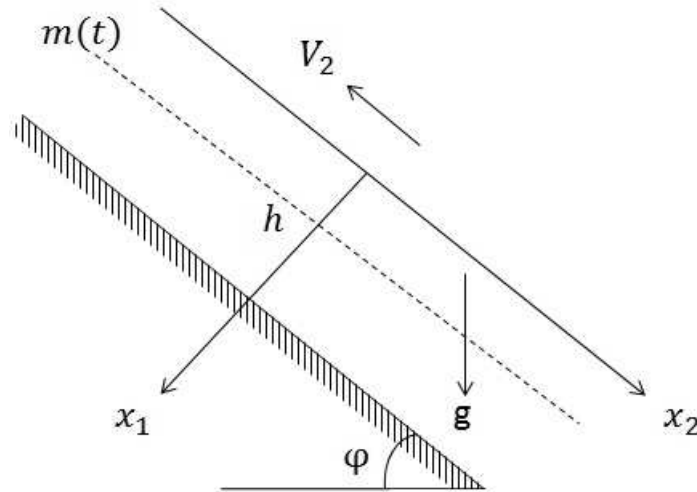


Рисунок 1 – Тяжелый слой, накопивший некоторый уровень необратимых деформаций

Используя закон сохранения импульса, получив волновое уравнение в момент проскальзывания ($t = t_1$) и решая его, используя краевые условия, получим перемещения в упругой области после проскальзывания ($t > t_1$):

$$U = \frac{\rho g_2 (-1/2 h^2 + h(-Gt_1 + x + Gt) - 1/2 x^2)}{\mu} + \frac{\lambda}{G} \left(h \left(1/4 \frac{t_1}{G} + 3/4 \frac{t}{G} \right) + \frac{G^2 (-1/4 t_1^3 - 1/4 t t_1^2 + 1/4 t^2 t_1 + 1/4 t^3) + 1/4 x^2 + 3/4 t x^2}{h} - 1/2 x t_1 - 3/2 t x \right).$$

Перемещения в упругой области после отражения волны разгрузки от вязкопластической границы ($t > t_2$):

$$\begin{aligned}
U = & -1/8 \frac{\rho g_2 t m^2}{\eta} - 1/8 \frac{\lambda m^2 t}{Gh} + 1/8 \frac{\lambda x^3}{G^2 h} - 1/8 \frac{G \lambda t_2^2 t}{h} + 1/8 \frac{\rho g_2 t_2 m^2}{\eta} \\
& - 1/8 \frac{G \rho g_2 t_2^2 m}{\eta} + 1/4 \frac{\lambda t_2 t x}{h} + 1/4 \frac{\lambda m t_2 t}{h} + 1/4 \frac{\lambda m t_2 x}{Gh} - 1/4 \frac{\lambda m t x}{Gh} + 1/8 \frac{G \rho g_2 t^2 x}{\eta} - 3/4 \frac{\lambda t x}{G} \\
& - 1/8 \frac{\rho g_2 t x^2}{\eta} - 1/24 \frac{\rho g_2 m^3}{G \eta} - 1/8 \frac{G \rho g_2 t^2 m}{\eta} - 5/4 \frac{\lambda m t_2}{G} + 1/8 \frac{G \rho g_2 t_2^2 x}{\eta} \\
& + 1/24 \frac{\rho g_2 x^3}{G \eta} + 1/4 \frac{\rho g_2 t x m}{\eta} + 1/4 \frac{G \rho g_2 t_2 t m}{\eta} - 1/8 \frac{\lambda m t^2}{h} + 5/8 \frac{h \lambda t_2}{G} + 1/24 \frac{G^2 \rho g_2 t_2^3}{\eta} \\
& + 1/8 \frac{\rho g_2 x m^2}{G \eta} + 1/8 \frac{\lambda t_2 x^2}{Gh} - 1/2 \frac{k m}{\mu} - 1/4 \frac{G \rho g_2 t_2 t x}{\eta} + 1/2 \frac{\rho g_2 x m}{\mu} - 3/8 \frac{\lambda x^2}{G^2} \\
& + 1/8 \frac{G \lambda t^3}{h} - 1/4 \frac{\rho g_2 t_2 x m}{\eta} - 1/8 \frac{G \lambda t_2^3}{h} - 1/8 \frac{\lambda m x^2}{G^2 h} + 1/2 \frac{G k t_2}{\mu} + 1/8 \frac{G \lambda t_2 t^2}{h} + 1/8 \frac{\lambda m^3}{G^2 h} \\
& - 1/4 \frac{\lambda t_2 x}{G} - 1/24 \frac{G^2 \rho g_2 t^3}{\eta} - 1/2 \frac{\rho g_2 m^2}{\mu} - 5/8 \frac{h \lambda m}{G^2} - 1/2 \frac{h^2 \rho g_2}{\mu} + 5/8 \frac{\lambda m^2}{G^2} \\
& + 1/2 \frac{k x}{\mu} - 1/2 \frac{G k t}{\mu} + 1/4 \frac{\lambda m t}{G} + 1/2 \frac{G \rho g_2 m t_2}{\mu} + 1/8 \frac{\rho g_2 t_2 x^2}{\eta} - 1/2 \frac{\rho g_2 x^2}{\mu} - 3/8 \frac{\lambda m^2 t_2}{Gh} \\
& + \frac{G h \rho g_2 t}{\mu} + 1/4 \frac{\lambda m x}{G^2} - 3/8 \lambda t^2 + \frac{h \rho g_2 m}{\mu} - 1/8 \frac{\rho g_2 x^2 m}{G \eta} + \frac{h \rho g_2 x}{\mu} + 3/8 \frac{\lambda t^2 x}{h} + 3/8 \frac{\lambda m t_2^2}{h} \\
& + 5/8 \lambda t_2^2 - 1/2 \frac{G \rho g_2 t m}{\mu} + 3/8 \frac{h \lambda t}{G} - 1/8 \frac{G^2 \rho g_2 t_2^2 t}{\eta} - 1/8 \frac{\lambda t_2^2 x}{h} + 3/8 \frac{h \lambda x}{G^2} + 3/8 \frac{\lambda t x^2}{Gh} \\
& - \frac{G h \rho g_2 t_2}{\mu} - 1/8 \frac{\lambda m^2 x}{G^2 h} - 1/4 \lambda t_2 t + 1/8 \frac{G^2 \rho g_2 t_2 t^2}{\eta}.
\end{aligned}$$

Перемещения в вязкопластической области после преломления волны разгрузки от границы вязкопластического течения ($t > t_2$):

$$\begin{aligned}
U = & -1/2 \frac{\rho g_2 x^2}{\mu} + 3/8 \frac{h \lambda t}{G} + 1/8 \frac{\rho g_2 G^2 t^2 t_2}{\eta} - 1/8 \frac{\rho g_2 G t^2 m}{\eta} + 1/8 \frac{\rho g_2 G t^2 x}{\eta} \\
& - \frac{7}{8} \frac{\rho g_2 x^2 t_2}{\eta} - \frac{17}{8} \frac{\rho g_2 x^2 m}{G \eta} + \frac{17}{24} \frac{\rho g_2 x^3}{G \eta} - 3/8 \frac{h \lambda m}{G^2} + 1/8 \frac{\lambda m^3}{G^2 h} + 1/8 \frac{\rho g_2 G t_2^2 x}{\eta} \\
& + 1/24 \frac{\rho g_2 G^2 t_2^3}{\eta} - 1/8 \frac{\rho g_2 m^2 t}{\eta} - 5/8 \frac{\lambda m t_2^2}{h} + 1/2 \frac{\rho g_2 m^2}{\mu} - \frac{G h \rho g_2 t_2}{\mu} + 1/2 \frac{G k t_2}{\mu} + \frac{17}{8} \frac{\rho g_2 m^2 x}{G \eta} \\
& + 1/2 \frac{k x}{\mu} - \frac{h k}{\mu} + 1/2 \frac{k m}{\mu} - 1/2 \frac{G k t}{\mu} - \frac{7}{8} \frac{\rho g_2 t_2 m^2}{\eta} + 5/8 \lambda t_2^2 - 1/24 \frac{\rho g_2 G^2 t^3}{\eta} - 1/8 \frac{G \lambda t_2^3}{h} \\
& + 7/4 \frac{\rho g_2 t_2 m x}{\eta} + 1/2 \frac{h^2 \rho g_2}{\mu} + 3/4 \frac{\lambda t_2 m}{G} + 1/2 \frac{\rho g_2 G m t_2}{\mu} - \frac{17}{24} \frac{\rho g_2 m^3}{G \eta} - 1/8 \frac{\rho g_2 G^2 t_2^2 t}{\eta} \\
& - 2 \frac{h \rho g_2 m}{\mu} - 1/8 \frac{\rho g_2 G m t_2^2}{\eta} - 1/8 \frac{\rho g_2 t x^2}{\eta} - 3/8 \frac{\lambda m^2 t_2}{Gh} - 3/8 \frac{h \lambda t_2}{G} + 1/4 \frac{\rho g_2 m t x}{\eta} \\
& - 1/2 \frac{\rho g_2 G m t}{\mu} - 1/4 \frac{\rho g_2 G t_2 t x}{\eta} + 1/4 \frac{\rho g_2 G m t_2 t}{\eta} + 1/8 \frac{\lambda m^2}{G^2} - 3/4 \frac{\lambda t x}{G} + 1/8 \frac{\lambda x^3}{G^2 h} + 3/8 \frac{\lambda t^2 x}{h} \\
& + 1/2 \frac{\rho g_2 m x}{\mu} + 3/8 \frac{\lambda t x^2}{Gh} - 1/8 \frac{\lambda x^2 m}{G^2 h} + 1/4 \frac{\lambda m t}{G} + 1/8 \frac{G \lambda t_2 t^2}{h} + 1/4 \frac{\lambda t_2 m x}{Gh} - 1/8 \frac{\lambda t_2^2 x}{h} \\
& - 1/4 \lambda t_2 t + \frac{G h \rho g_2 t}{\mu} + 1/8 \frac{G \lambda t^3}{h} - 1/8 \frac{\lambda m t^2}{Gh} + \frac{h \rho g_2 x}{\mu} - 1/8 \frac{\lambda x m^2}{G^2 h} - 3/8 \frac{\lambda x^2}{G^2} - 1/8 \frac{G \lambda t_2^2 t}{h} \\
& - 1/4 \frac{\lambda t x m}{Gh} - 1/8 \frac{\lambda t^2 m}{h} - 1/4 \frac{\lambda t_2 x}{G} + 1/4 \frac{\lambda t_2 t x}{h} + 1/4 \frac{\lambda t_2 m t}{h} + 3/8 \frac{h \lambda x}{G^2} + 1/4 \frac{\lambda m x}{G^2} \\
& + 1/8 \frac{\lambda t_2 x^2}{Gh} - 3/8 \lambda t^2.
\end{aligned}$$

Перемещения в вязкопластической области после отражения волны разгрузки

от нагруженной поверхности с последующим снятием нагрузок ($t > t_3$):

$$\begin{aligned}
 U = & -3/4 \frac{\lambda x^2}{G^2} - 2/3 \frac{\rho g_2 x^3}{G\eta} + \frac{\lambda m t}{G} + 3/4 \frac{h \lambda t}{G} + 5/4 \lambda t_3^2 - 3/2 \frac{G \rho g_2 m t^2}{\eta} \\
 & + \frac{G^2 \rho g_2 t_3^2 t}{\eta} + \frac{\rho g_2 t x^2}{\eta} - \frac{G^2 \rho g_2 t_3 t^2}{\eta} - \frac{\lambda m^2 t}{G h} - \frac{h k}{\mu} - 1/2 \frac{\lambda m x^2}{G^2 h} - 1/2 \frac{\lambda m t^2}{h} + 2 \frac{\rho g_2 m t_3 x}{\eta} \\
 & - 3/4 \frac{h \lambda t_3}{G} + 1/3 \frac{G^2 \rho g_2 t^3}{\eta} - 1/2 \frac{\rho g_2 x^2}{\mu} + 1/2 \frac{h^2 \rho g_2}{\mu} - 3/4 \lambda t^2 - 1/4 \frac{G \lambda t_3^2 t}{h} + \frac{\lambda t_3 m^2}{G h} \\
 & - 1/2 \frac{\lambda t_3^2 m}{h} + 1/4 \frac{\lambda t_3 x^2}{G h} + 2 \frac{G h \rho g_2 t}{\mu} + 3/4 \frac{\lambda t x^2}{G h} + 1/2 \frac{\rho g_2 m x^2}{G \eta} - 1/3 \frac{G^2 \rho g_2 t_3^3}{\eta} \\
 & - \frac{h \rho g_2 m}{\mu} - \frac{\rho g_2 m^2 t_3}{\eta} + \frac{\lambda m t_3 t}{h} - \frac{\lambda m t_3}{G} + 1/4 \frac{G \lambda t_3 t^2}{h} + 3 \frac{G \rho g_2 m t_3 t}{\eta} - 2 \frac{\rho g_2 t_3 x^2}{\eta} + 1/4 \frac{G \lambda t^3}{h} \\
 & - 3/2 \frac{G \rho g_2 m t_3^2}{\eta} - 1/4 \frac{G \lambda t_3^3}{h} - 2 \frac{G h \rho g_2 t_3}{\mu} - 1/2 \lambda t_3 t.
 \end{aligned}$$

По условию область вязкопластического течения меньше области обратимых деформаций, а следовательно преломленная волна достигнет границы раньше, чем отраженная. Далее представлено распределение перемещений по слою, в момент снятия нагрузки, в момент, когда волна достигает вязкопластичной области и в момент, когда волна достигает нагруженной границе слоя, при значениях постоянных:

$$\phi = \frac{\pi}{3} \quad \frac{\rho g_2 h}{\mu} = 3,6 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{k h}{\eta \nu_0} = 7,95 \cdot 10^{-4}, \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad \frac{k}{\mu} = 0,0007$$

приведено на рис. 2.

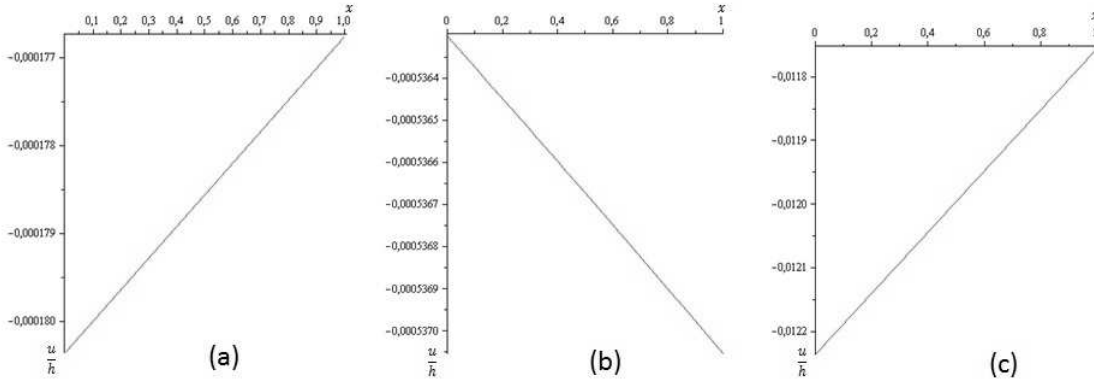


Рисунок 2 – (а) — распределение перемещений в момент проскальзывания, (б) — в момент когда волна достигает вязкопластическую область, (с) — в момент когда достигает границу слоя

Необходимо отметить, что линейность графиков на малом участке вызвана одновременным движением обеих границ слоя. Тем не менее из графиков видно, как граница, некогда неподвижная, за счет трения в момент времени, когда волна разгрузки дошла до области вязкопластического течения, обгоняет нагруженную границу. Дальнейшее колебание слоя незначительно по сравнению с представленными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин А. А., Ковтаныук Л. В., Кулаева Д. В. О взаимодействии одномерной волны разгрузки с упругопластической границей при ее распространении в упруговязкопластической среде // ПМТФ. 2012. Т. 53 № 1. С. 105–113.
- [2] Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтаныук Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
- [3] Знаменский В. А., Ивлев Д. Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.

Kovtanyuk L. V., Rusanov M. M. *About the propagation of waves of unloading in a heavy layer with continued plastic flow.* Representation of solutions of boundary-value problems in the theory of large elastic-viscoplastic deformation. Located on an inclined plane elastic-viscoplastic layer under applied to the surface shear forces directed upwards, begins to accumulate irreversible deformation. At some moment on the supporting layer boundary condition slip. It should be noted that at this point in the layer together with the area present viscoplastic flow region and reversible deformation. In the transition from friction to slip shear stress change rapidly, resulting in the area begins to spread surface of gaps stress, which we call a wave of unloading. Features of the problem is that in the boundaries of the loaded continues the plastic flow.

СОВМЕСТИМОСТЬ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ГРАНИЦАХ ЗЕРЕН В СТАЛИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ УЗЛОВ ТРЕНИЯ

Колесников В. И.¹, Мигаль Ю. Ф.²

¹*Ростовский государственный университет путей сообщения*

²*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Введение. Несмотря на успехи, достигнутые в области физики трения и износа, проблема управления фрикционно-контактным взаимодействием элементов металлических и металлополимерных трибосистем остается острой и нерешенной. Причины такого положения объясняются прежде всего определенным отставанием теории и экспериментальных методов исследования контактного взаимодействия от уровня, достигнутого, например, в физике твердого тела, где имеются значительные успехи — определились современные представления об электронном строении материи, сформулированы положения теории дислокаций, получили значительное развитие экспериментальные методы (рентгеноструктурный, рентгеноспектральный и др.). В этой связи трибологии, зародившейся как наука о процессах в макроскопических объектах, необходимо все шире выходить на микро- и наноуровень и все более детально заниматься изучением межатомных взаимодействий на поверхности трения. Прогресс в этом направлении невозможен без привлечения новейших экспериментальных и теоретических методов исследования. Как показывает практика, одними из наиболее эффективных методов изучения процессов на поверхности трения, являются методы рентгеноэлектронной спектроскопии (РЭС), оже-электронной спектроскопии (ОЭС) и квантовой химии. В течение ряда лет в нашей группе ведутся интенсивные исследования процессов трения и износа, в том числе и с помощью перечисленных выше методов. При этом применяются современные приборы и вычислительные методики. В частности, в последние годы активно используется система исследования поверхности фирмы SPECS, позволяющая проводить изучение элементного состава и электронного строения поверхностей трения по электронным спектрам, возбужденным мягким рентгеновским излучением. Наша группа одной из первых начала применять методы квантовой химии для решения трибологических задач, проводить с этой целью квантово-химические расчеты с помощью компьютерных программ, основанных на приближении теории функционала плотности (DFT).

Ниже речь пойдет об одной из фундаментальных проблем, связанных с износостойкостью материалов. При рассмотрении факторов, влияющих на износ узлов трения, важно учитывать неоднородность атомной структуры поверхностного слоя материала и, в том числе, наличие зерен. Одной из причин разрушения поликристаллов, указываемой в литературе, является зернограничная сегрегация, в ходе которой из объема зерен на границы между ними выходят атомы примесных и легирующих элементов. В результате связь между зернами может ослабляться. Эта идея была высказана давно [1], но несмотря на многочисленные экспериментальные исследования зернограничной сегрегации, связь этого явления с механизмом разрушения поликристаллических материалов выяснена не полностью.

Появившиеся в последние десятилетия методы квантово-химических расчетов, основанные на приближении DFT, позволяют провести достаточно точный анализ атомных взаимодействий, влияющих на разрушение металлов. Эти методы оказались эффективными при изучении различных явлений, в которых проявляются химические взаимодействия. Однако работы, в которых эти и подобные им методы применены к выявлению связи между явлением зернограничной сегрегации и проблемой разрушения и износостойкости металлов, все еще редки и в них рассматривается сегрегация только некоторых выбранных элементов [2]. На наш взгляд, для глубокого понимания проблемы необходимо провести систематический анализ, в котором изучалась бы большая группа сегрегированных элементов.

Модель и результаты расчетов. В наших расчетах использовался пакет программ ADF [3], основанный на приближении DFT. Он дает возможность изучать соединения переходных металлов, включающие сотни атомов. Это важно для применений в случае стали. Взаимодействия между зёрнами при наличии сегрегированных атомов изучались нами с помощью модельных многоатомных кластеров. Многоатомный кластер, имитирующий сегрегацию в поликристаллическом материале, должен, очевидно, содержать некоторое количество атомов матрицы (из прилегающих слоев двух соседних зёрен), а также сегрегированных или про-диффундировавших атомов, расположенных на границе. Размер кластера должен быть достаточно большим, чтобы с его помощью возможно точнее воспроизводились основные качественные и количественные закономерности сегрегации. С другой стороны, практика квантово-химических расчетов показывает, что во многих случаях кластеры сравнительно малых размеров на качественном и полуколичественном уровнях могут воспроизводить особенности изучаемого явления [4]. Из наших расчетов следует, что многоатомные кластеры с числом атомов порядка 18 или более позволяют на качественном и полуколичественном уровнях исследовать изменения энергии связи между сегрегированными атомами и поверхностями зёрен железа [5]. Этот факт указывает на то, что исследуемый эффект является достаточно сильным, он хорошо воспроизводится модельными кластерами со сравнительно малым числом взаимодействующих атомов.

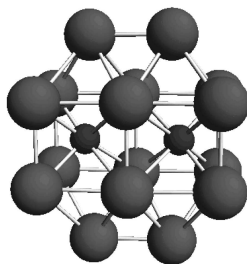


Рисунок 1 – Кластер, содержащий атомы железа (матрица) и примесного элемента (сегрегационный слой).

При моделировании условий, при которых происходит сегрегация, использовали тот известный факт, что на наиболее узком участке границы между зёрнами в поликристалле (т. е. в месте контакта зёрен) ширина границы порядка постоянной решетки. Это позволило рассмотреть следующую простую модель границы

(рисунок 1): в 18-атомном кластере железа атомы из среднего слоя заменены сегрегированными атомами. При этом два верхних и два нижних слоя имитируют соответственно верхнее и нижнее зерна поликристалла, а средний слой представляет собой границу между зернами. В случае металла высокой чистоты модельный кластер содержит только атомы *Fe*. Безусловно, такая модель не учитывает всего разнообразия условий, важных для процесса сегрегации и проблемы износостойкости. Основное назначение предлагаемой модели — во-первых, оценить влияние ближайшего атомного окружения на химическую связь между сегрегированными атомами и атомами матрицы в месте контакта зерен, и, во-вторых, изучить, как эта связь влияет на прочность микроскопических областей и поверхностных слоев поликристалла. Если в этой модели убрать атомы двух верхних слоев, то оставшиеся атомы (нижние слои + слой примесных атомов) имитируют явление адсорбции на поверхности (100) железа.

Были проведены расчеты энергии связи $E_{св}$ кластеров, которые содержат адсорбированные и сегрегированные атомы химических элементов первых пяти периодов таблицы элементов Менделеева с порядковыми номерами от 1 до 54 (от водорода до ксенона) [5–9]. Эти дополнительные атомы размещались либо на внешней поверхности кластера (в случае адсорбции), либо в среднем слое (в случае сегрегации). В обоих случаях рассматривалось положение дополнительных атомов над центрами квадратов из атомов железа (позиция fourfold) или над сторонами этих квадратов (позиция twofold). Выбирались позиции, соответствующие минимуму энергии кластера. В расчетах, как правило, применялся базис TZ2P и использовались основные «замороженные» орбитали (опция «Small», см. [3]).

Если сегрегационный кластер разделить на две части, одна из которых содержит дополнительные атомы (фактически это адсорбционный кластер), а другая состоит только из атомов железа, то, вычисляя энергии исходного кластера (E_0) и двух его частей (E_1 и E_2), можно найти энергию, необходимую для разрыва кластера $E_p = |E_0 - E_1 - E_2|$. Таким образом, можно получить оценку энергии связи двух ближайших зерен из железа, разделенных атомами различных элементов.

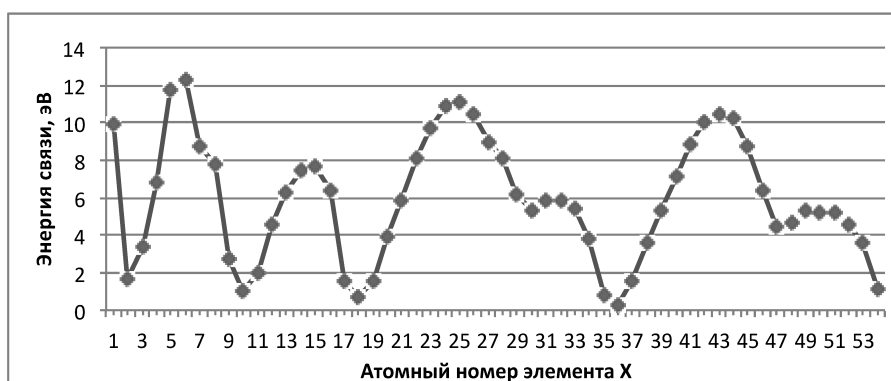
Результаты расчетов сведены в таблице 1. Данные этой таблицы, построенной по аналогии с таблицей Менделеева, фактически отражают совместимость различных элементов с железом на его поверхностях. Из таблицы следует, что для элементов начала периода связь с железом слабая, но с ростом номера элемента она вначале увеличивается, а затем, во второй половине периода, уменьшается. (Для элементов четвертого периода характерен излом этой зависимости в точке перехода от меди к цинку, завершающему совокупность переходных 3d-элементов.) При перемещении вдоль группы связь ослабевает (исключение составляют группа инертных газов в адсорбированном состоянии и атомы магния). Подобные свойства характерны как для адсорбированных, так и для сегрегированных атомов. Из полученных результатов следует, что свойства химической связи различных элементов с железом находятся в периодической зависимости от заряда ядра атомов, что соответствует Периодическому закону Менделеева. Для большей наглядности данные из таблицы 1 представлены в виде графика (рисунок 2).

Результаты расчетов показывают, что атомы углерода, азота, марганца, молибдена прочно «сшивают» зерна железа, поскольку энергия связи кластеров, содер-

Таблица 1 – Энергия, необходимая для разрыва кластеров $Fe_8X_2Fe_8$ (эВ)

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			0
1	H 9.9										He 1.7
2	Li 3.4	Be 6.8	B 11.7	C 12.3	N 8.7	O 7.8	F 2.7				Ne 1.0
3	Na 2.0	Mg 4.6	Al 6.3	Si 7.5	P 7.7	S 6.4	Cl 1.6				Ar 0.7
4	K 1.6	Ca 3.9	Sc 5.8	Ti 8.1	V 9.7	Cr 10.9	Mn 11.1	Fe 10.4	Co 9.0	Ni 8.1	
	Cu 6.2	Zn 5.3	Ga 5.8	Ge 5.8	As 5.4	Se 3.8	Br 0.8				Kr 0.3
5	Rb 1.6	Sr 3.6	Y 5.3	Zr 7.1	Nb 8.8	Mo 10.0	Tc 10.5	Ru 10.2	Rh 8.7	Pd 6.4	
	Ag 4.5	Cd 4.7	In 5.3	Sn 5.2	Sb 5.2	Te 4.6	I 2.6*				Xe 1.1*

жащих эти атомы, оказывается ниже, чем энергия связи кластера того же размера, состоящего из чистого железа. Наоборот, атомы лития, кремния, фосфора, серы, меди и никеля, хотя и вступают в химическую связь с железом, ослабляют связь между зернами, поскольку энергия связи соответствующих кластеров выше, чем энергия связи кластера из чистого железа. Очевидно, ослабление связи между зернами в поверхностном слое уменьшает износостойкость стали. Несмотря на

Рисунок 2 – Зависимость энергии, необходимой для разрыва кластеров $Fe_8X_2Fe_8$, от атомного номера элемента X.

приближенный характер наших вычислений, их результаты согласуются с известными экспериментальными фактами [1]. Мы полагаем, что более точные расчеты подтвердят найденную зависимость упрочняющих (или разупрочняющих) свойств элементов от заряда ядра их атомов. Эта зависимость может служить теоретической базой для предсказания прочностных свойств поликристаллических материалов, в которые вводятся различные легирующие добавки.

Если полученные результаты применять на практике (например, решать задачу повышения износостойкости стали путем введения в ее поверхностные слои атомов упрочняющих элементов), то необходимо учитывать свойство растворимости элементов. Вводимые упрочняющие элементы могут растворяться в объемной фазе железа (т. е. в зернах) и та их часть, которая остается на поверхности зерен, может оказаться слишком малой и недостаточной для создания эффекта упрочнения стали. С этой точки зрения наиболее эффективным может оказаться введение в сталь бора, который, хотя и уступает углероду по значению величины E_p , но значительно меньше углерода растворим в стали. Достаточно ввести в сталь

бор в количестве, обеспечивающем заполнение межкристаллитных границ (фактически, это сотые доли процента от общего объема образца), и можно ожидать существенного повышения износостойкости стали. Однако, если количество бора увеличивать, то часть атомов бора будет проникать в зерна железа, и внутри них будут возникать химические соединения бора с железом, углеродом и другими металлами — бориды и карбиды. Эти соединения значительно уступают в прочности железу, и свойства стали будут ухудшаться. Таким образом, улучшать прочность и износостойкость стали следует только с помощью малых концентраций бора.

Заключение. Энергия связи атомов различных элементов с поверхностью зерен находится в периодической зависимости от атомного номера элементов, что соответствует периодическому закону Менделеева. Этот факт может служить теоретической базой для прогнозирования прочностных свойств стали с различным составом легирующих и примесных элементов.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 11-08-00640-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Анализ поверхности методами оже- и рентгеноэлектронной фотоэлектронной спектроскопии / Под ред. Д. Бриггса, М.П. Сиха. М.: Мир, 1987. 598 с.
- [2] *Gesari S. B., Pronsato M. E., Juan A.* Effect of manganese on grain boundary segregation of sulfur in iron // *Applied Surface Science*. 2007. V. 253. P. 5939–5942.
- [3] *Te Velde G., Bickelhaupt F.M., van Gisbergen S. J. A., Fonseca Guerra C., Baerends E. J., Snijders J. G., Ziegler. T.* Chemistry with ADF // *J. Comput. Chem*. 2001. V. 22. № 6. P. 931–967.
- [4] *Lebedev. M. V.* Mechanism of H_2S molecule adsorption on the GaAs (100) surface: Ab initio quantum-chemical analysis // *Physics of the Solid State*. 2006. V. 48. P. 164–171.
- [5] *Колесников В. И., Мигаль Ю. Ф., Мижирицкая С. Н., Доронькин В. Н.* Квантово-химический анализ изменений прочности железа, вызванных зернограницной сегрегацией // *Вестник Южного научного центра РАН*. 2007. Т. 3. № 2. С. 12–19.
- [6] *Колесников В. И., Мигаль Ю. Ф., Мижирицкая С. Н., Доронькин В. Н.* Квантово-химическое исследование влияния зернограницной сегрегации на износостойкость стали // *Трение и износ*. 2008. Т. 29. № 2. С. 134–143.
- [7] *Kolesnikov V. I., Kozakov A. T., Migal Yu. F.* Study of friction and wear in the wheel-rail system by X-ray electron and auger-electron spectroscopy and quantum chemistry // *Journal of Friction and Wear*. 2010. V. 31. P. 11–22.
- [8] *Колесников В. И., Мигаль Ю. Ф., Доронькин В. Н.* Квантово-химический анализ межатомных взаимодействий на зернограницных поверхностях в стали // *Трение и смазка в машинах и механизмах*. 2010. № 12. С. 8–13.
- [9] *Migal Yu. F., Kolesnikov V. I., Doronkin V. N., Novikov E. S.* Interaction of Atoms with Grain Surfaces in Steel: Periodic Dependence of Binding Energy on Atomic Number and Influence on Wear Resistance // *Advances in Materials Physics and Chemistry*. 2012. V. 2. № 4. P. 201–207.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННЫХ ЧАСТИЦ, ЗАКЛЮЧЕННЫХ В ЭЛАСТОМЕР

Коновалова А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Описан численный расчет магнитостатической силы, действующей между двумя частицами изотропного ферромагнетика, находящимися в постоянном однородном внешнем поле. Показано, что при близком расположении частиц (доли радиуса) магнитная сила значительно отличается от предсказаний модели точечных диполей. Кроме этого, сильно сужается интервал углов между полем и межцентровым вектором частиц, соответствующий отталкиванию. Последнее означает, что в плотной системе неоднородно поляризованных (намагниченных) частиц доминирующим типом взаимодействия является притяжение. Полученные силовые зависимости использованы для оценки равновесного расстояния между частицами, находящимися в упругом массиве, при их намагничивании.

1. Введение Функциональность мягких магнитных эластомеров (ММЭ) как материалов для практического применения обусловлена их сильным откликом на приложенное поле. Объяснение и описание этого эффекта являются предметом фундаментального исследования и составляет содержание магнитомеханики ММЭ. Целью настоящей работы является уточнение одного из главных приближений этой теории. А именно: большинство моделей ММЭ исходят из того, что магнитное взаимодействие частиц ферромагнетика, то есть чувствительной к полю компоненты материала, можно рассматривать, полагая их точечными диполями. Возьмём наиболее изученный класс таких композитов: дисперсии микрочастиц карбонильного железа в эластомерной (например, силиконовой) матрице. Легко убедиться, что для них указанное предположение малореалистично. В самом деле, зерна железа размером $a \sim 1$ мкм являются многодоменными, а, значит, по отношению к приложенному полю \mathbf{H} — магнито-поляризуемыми. В поле \mathbf{H} , которое практически всегда можно считать независимым от координат, каждая частица приобретает магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ и становится источником индуцированного поля $|\mathbf{H}_{\text{in}}| \sim \mu/a^3$ с градиентом $\sim H_{\text{in}}/a$. Таким образом, в ММЭ локальное поле $\mathbf{H} + \mathbf{H}_{\text{in}}$ оказывается сильно неоднородным. Вследствие этого при близком расположении частиц (например, в парном кластере) рассчитанные значения межчастичной магнитной силы существенно отличаются от тех, что предсказывает модель точечных диполей. Очевидно, что изменение внутренних сил (напряжений) должно сказываться и на макроскопических деформационных свойствах ММЭ.

2. Сила магнитного взаимодействия Пусть две магнитомягкие сферические частицы с радиусами a помещены в однородное поле \mathbf{H}_0 , а их центры отстоят на вектор \mathbf{l} . То есть система представляет собой гантель, размер которой будем характеризовать безразмерной переменной $q = l/a$; при $q = 2$ частицы находятся в плотном контакте. Направим вдоль \mathbf{H}_0 ось Oz системы координат, а её начало поместим в центр масс гантели; угол α задает ориентацию вектора \mathbf{l} относительно Oz . Положим, что частицы намагничиваются изотропно по линейному закону

с независимой от поля восприимчивостью χ , то есть ограничимся областью много ниже поля насыщения.

Для расчёта межчастичных сил в намагниченной гантели необходимо найти распределения поля внутри частиц, и в окружающем их пространстве, решая полные уравнения магнитостатики. Эта задача включает два уравнения Максвелла и граничные условия к ним:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad B_n^{(i)}|_{\Gamma_k} = B_n^{(e)}|_{\Gamma_k}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad H_\tau^{(i)}|_{\Gamma_k} = H_\tau^{(e)}|_{\Gamma_k}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{B} — вектор магнитной индукции, B_n — его нормальная составляющая, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, а H_τ — её тангенциальная компонента; индексы (i) и (e) обозначают величины внутри и вне намагничивающейся области соответственно. Вводя скалярный магнитный потенциал ψ , представим \mathbf{H} как сумму внешнего поля \mathbf{H}_0 и поля $-\nabla\psi$, создаваемого намагниченным веществом. Учитывая определение $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, где M — намагниченность. Для материала с восприимчивостью χ имеем $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$. Таким образом, задача (1) принимает вид

$$\Delta\psi = 0, \quad \psi^{(i)}|_{\Gamma_k} = \psi^{(e)}|_{\Gamma_k}, \quad \frac{\partial\psi^{(e)}}{\partial n}|_{\Gamma_k} - (1 + 4\pi\chi)\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial n}|_{\Gamma_k} + 4\pi\chi H_{0n} = 0. \quad (2)$$

Её решение даёт распределение поля вне и внутри гантели, а магнитная энергия, заключённая в системе, подсчитывается по формуле

$$U_m = -\frac{1}{2}\chi \int_{V^{(i)}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0 dV, \quad (3)$$

где $V^{(i)}$ — объем, занимаемый магнитными частицами.

Магнитостатическая задача (2) решалась численно с помощью модуля `esys.escript`, реализующего метод конечных элементов на высокоуровневом языке `python`. Расчётная область представляла собой куб со свойствами вакуума ($\chi = 0$), куда помещалась магнитная гантель. На внешних границах куба задавались значения магнитного потенциала, создаваемого парой диполей, как если бы они располагались в центрах магнитных частиц. Из решения задачи был получен дискретный числовой массив $U(q, \alpha)$, на основе которого строилась аналитическая аппроксимация $U_m(q, \alpha)$. Угловая зависимость U_m была заимствована из стандартной записи парного дипольного потенциала в случае, когда магнитные моменты параллельны друг другу:

$$U_m(q, \alpha) = \omega_0(q) + \omega_2(q) \cos 2\alpha. \quad (4)$$

Отметим, что соотношение (4) является точным решением не только для точечных магнитных моментов, но и для однородно намагниченных сфер [2].

Энергия (4) фитировалась в интервале $2 < q < 4$, поскольку при $q > 4$ потенциал, найденный численно, практически совпадает с дипольным. При каждом q коэффициенты ω_0 и ω_2 определяли в области $\alpha \in [0, 90^\circ]$ из соображений наилучшего согласия с численными значениями $U(q, \alpha)$; погрешность не превысила 0.02%. По найденным дискретным зависимостям $\omega_0(q)$ и $\omega_2(q)$ были сконструированы их аппроксимации в форме степенных рядов по q ; итоговая погрешность приближения для обоих коэффициентов составила менее 0.1%.

Полученное выражение для парного потенциала U_m обладает непрерывностью и дифференцируемостью по обеим переменным. Его использование превращает вычисление сил

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_\tau = -\frac{\mathbf{l}}{l^2} \left(\mathbf{l} \cdot \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{l}} \right) - \frac{1}{l^2} \left(\mathbf{l} \times \left(\frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{l}} \times \mathbf{l} \right) \right), \quad (5)$$

в аналитическую процедуру, кардинально облегчая расчёты. Как видно из (5), составляющая \mathbf{f}_n направлена вдоль межцентровой линии частиц и задает их притяжение/отталкивание. Вторая компонента, \mathbf{f}_τ , перпендикулярна межцентровой линии и лежит в плоскости, образуемой векторами \mathbf{H}_0 и \mathbf{l} . Пара сил \mathbf{f}_τ создает вращающий момент

$$\mathcal{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{f}_\tau = -\mathbf{l} \times \partial U_m / \partial \mathbf{l}, \quad M = -\partial U_m / \partial \alpha. \quad (6)$$

Подстановка в (6) аппроксимационной формулы (4) даёт, как и должно быть, угловую зависимость дипольного приближения $\mathcal{M} \propto \sin 2\alpha$.

Анализ результатов показал, что анизотропия магнитного взаимодействия намагничивающихся сфер лишь в качественном отношении сходна со той, что имеет место для жестких диполей параллельных друг другу. Действительно, при расположении «голова-хвост» (вдоль оси z) частицы притягиваются с максимальной силой, а при расположении «бок о бок» ($\alpha = 90^\circ$) испытывают максимальное отталкивание. Однако на малых межчастичных расстояниях ($q \gtrsim 2$) и угловое распределение, и значения силы f_n существенно отличаются от классического случая. Как известно, если в паре жестких диполей выбрать одну из частиц за начало координат, то тогда поверхностью нулевой силы ($f_n(q, \alpha) = 0$) является пара прямых круговых конусов с углами раствора $\simeq 55^\circ$. Конусы совмещены вершинами в центре отсчётной частицы, а основаниями обращены в противоположные стороны; точки внутри конусов соответствуют взаимному притяжению, а вне их — отталкиванию. Как показывает рис.1, для намагничивающихся сфер поверхность нулевой силы, сохраняя осевую симметрию, имеет сложную форму. Сила $f_n(q)$ уже не является монотонной функцией угла, и при некоторых взаимных положениях частиц притяжение сменяется отталкиванием просто при сближении/удалении их центров.

При относительно небольшом расстоянии между частицами зависимость силовой компоненты f_n от расстояния между частицами q также отличается от той, что предсказывается приближением точечных диполей. Различия в величине силы, получаемой в результате численного расчета, и следующей из приближения точечных диполей, становятся заметными уже при $q \sim 3.5$. При сближении до $q \sim 2.5$ сила притяжения/отталкивания f_n , полученная из численного решения задачи магнитостатики, отличается от предсказаний модели точечных диполей, на сотни процентов.

4. Модель упругого взаимодействия Оценим в простейшем приближении упругую энергию, которая должна создаваться в полимерной матрице ММЭ при намагничивании. После включения поля частицы наполнителя приобретают магнитные моменты, и между ними возникают силы притяжения/отталкивания. Если внешнее поле \mathbf{H}_0 направлено вдоль вектора \mathbf{q} пары частиц, то последние будут

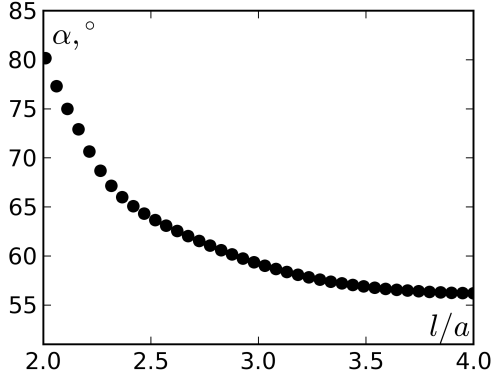


Рисунок 1 – Угол α при котором происходит смена знака силы притяжения / отталкивания f_n в зависимости от расстояния между частицами q

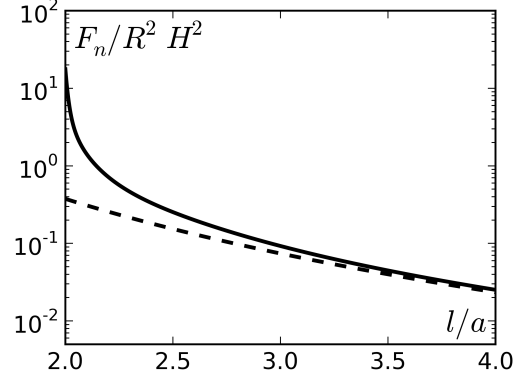


Рисунок 2 – Величина силы притяжения / отталкивания f_n при $\alpha = 0$ в сравнении с силой, предсказываемой моделью точечных диполей

притягиваться сжимая, прежде всего, область упругой матрицы, заключенную между ними. Для рассмотрения этого случая ($\alpha = 0$) используем простую стержневую модель. Будем считать, что к поверхностям частиц прикреплены абсолютно твердые пластинки, плоскости которых обращены друг к другу и перпендикулярны межцентровой линии гантели. Между пластинками вложен круглый стержень диаметром a , сделанный из несжимаемого материала, подчиняющегося закону Муни–Ривлина. В начальном состоянии длина стержня равна $q_0 - 2$, где q_0 — безразмерное расстояние между центрами частиц. Предположим, что под действием магнитостатических сил, передаваемых пластинками, стержень претерпевает однородное одноосное сжатие. В этом случае его энергия есть

$$U_Y = \frac{1}{4}\pi a^2 (q_0 - 2) [k_1 I_1(\mathbf{C}) + k_2 I_2(\mathbf{C})], \quad (7)$$

где $I_{1,2}(\mathbf{C})$ — первый и второй инварианты меры деформации Коши \mathbf{C} , записываемые через относительное удлинение стержня $\lambda = (q - 2)/(q_0 - 2)$ в виде

$$I_1(\mathbf{C}) = 2/\lambda + \lambda^2, \quad I_2(\mathbf{C}) = 2/\lambda^2 + 2\lambda.$$

Комбинируя эти выражения с аппроксимацией (4), запишем полную энергию U системы при $\alpha = 0$. Придавая ей безразмерную форму ($\tilde{U} = U/k_1 a^3$), получим

$$\tilde{U} = \tilde{H}_0^2 [\omega_0(\lambda q_0) + \omega_2(\lambda q_0)] + \frac{1}{4}\pi (q_0 - 2) \left[(2/\lambda + \lambda^2) + \tilde{k}_2 (1/\lambda^2 + 2\lambda) \right]; \quad (8)$$

здесь введены параметры $\tilde{H}_0 = H_0/\sqrt{k_1}$ и $\tilde{k}_2 = k_2/k_1$.

5. Анализ равновесных состояний В выражении (8) минимум магнитной составляющей достигается при плотном контакте частиц ($\lambda \rightarrow 0$), в то время как упругая энергия минимальна для недеформированного стержня ($\lambda = 1$). Отсюда видно, что упругие и магнитные силы конкурируют, и равновесное межчастичное расстояние определяется их балансом, что иллюстрирует рис.3. В слабом поле, когда магнитное притяжение частиц невелико, энергия имеет единственный минимум (кривая 1); при этом деформация мала. С ростом поля ситуация изменяется:

наряду с равновесием при малых смещениях появляется возможность создать баланс магнитных и упругих сил при существенном сближении частиц (кривая 2). При дальнейшем увеличении поля положение равновесия при малых смещениях исчезает, устойчивость сохраняет только сильно сжатая гантель (кривая 3).

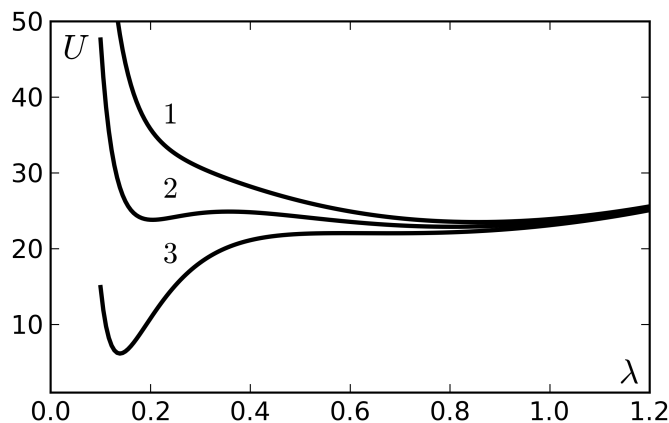


Рисунок 3 – Полная энергия системы при $\tilde{k}_2 = 0.1$, $q_0 = 12$ и значениях поля $\tilde{H}_0 = 44$ (1), $\tilde{H}_0 = 48$ (2), $\tilde{H}_0 = 52$ (3)

Способность магнитоупругих систем к бистабильности, в принципе, хорошо известна. Мы подтвердили наличие этого свойства у нашей модели. Как оказалось, гантель из намагничивающихся частиц проявляет бистабильность лишь в некотором интервале параметров. В дальнейшей работе планируется проверить и уточнить этот вывод, а также проследить, как отражается мезоскопическая бистабильность (кластеры частиц) на макроскопических свойствах ММЭ.

Работа выполнена при поддержке Программы РАН 12-П-1-1018, проектов РФФИ 11-02-96000 и 13-01-96056.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
- [2] Багаев В. Н., Бувечич Ю. А., Тетюхин В. В. К теории магнитоэластического взаимодействия и структурообразования в дисперсных системах // Магнитная гидродинамика. 1986. № 3. С. 35–40.

Konovalova A. M., Stolbov O. V., Raikher Yu. L. *The interaction of magnetized particles embedded in an elastomer.* Numerical calculation is described of the magnetostatic force between two particles made of an isotropic ferromagnet subjected to a constant uniform external field. It is shown that under close neighboring (a fraction of the radius) the magnetic force differs substantially from that predicted by the point dipole model. Besides that, the angle interval between the field and the particle inter-center vector, which corresponds to the particle repulsion, narrows considerably. This implies that in a dense system of non-uniformly polarized (magnetized) particles, attraction is the dominating type of interaction. The obtained force dependencies are used for estimating the equilibrium distance between the particles embedded in an elastic matrix under magnetizing.

КИНЕМАТИКА, НАПРЯЖЁННОСТЬ И МОДИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ КРУГОВЫХ ЗУБЬЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ НОВИКОВА

Короткин В. И.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассмотрены основные геометро-кинематические характеристики цилиндрических зубчатых передач Новикова с круговой продольной формой зубьев — уравнения боковых поверхностей и линий зацепления, подрезание зубьев, распределение контактных точек по полушевронам. Установлено, что напряжённость зуба не зависит от стороны приложения нагрузки. Показана высокая напряжённость в основании головки зуба при использовании некоторых исходных контуров, рекомендована продольная модификация активных поверхностей зубьев как эффективное средство повышения нагрузочной способности зубчатой передачи.

Несмотря на признанные [1–4] достоинства цилиндрических зубчатых передач с круговой (арочной) продольной формой зубьев, в том числе с зацеплением Новикова [2], теоретическим исследованиям геометрических и прочностных характеристик последних уделено недостаточно внимания. Большинство работ касается способов нарезания зубьев и конструкций режущего инструмента. Можно выделить работы [1–4], в которых рассматриваются некоторые вопросы нагруженности эвольвентных арочных передач, а также работу [5], посвящённую разработке обобщённой теории круговинтовых поверхностей, включая передачи Новикова.

Контактные точки движутся по полушевронам симметрично от торцов к середине зубчатого венца или наоборот. Особенности геометрии и кинематики арочных передач Новикова являются изменяющиеся в зависимости от фазы зацепления число контактных точек по обеим линиям зацепления, а также переменность параметров по полушевронам, что иллюстрируется таблицей 1, в которой обозначено: $i = 1, 2 \dots 2n$ — номер контактной точки, j — номер зуба в многопарном зацеплении, b_i — расстояние (в долях ширины b_w) контактной точки до середины ширины зубчатого венца (положительное в одну сторону и отрицательное — в другую), β — угол наклона зуба, ρ_α, ρ_β — соответственно профильный и продольный приведенные главные радиусы кривизны взаимодействующих поверхностей зубьев в контактных точках.

Уравнения боковых поверхностей круговых зубьев получены для общего случая в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = (\rho \sin \vartheta - b + r) \cos \varphi + [r\varphi + r_0 + (\rho \cos \vartheta - a - r_0) \cos \beta] \sin \varphi; \\ y = (\rho \sin \vartheta - b + r) \sin \varphi - [r\varphi + r_0 + (\rho \cos \vartheta - a - r_0) \cos \beta] \cos \varphi; \\ z = -(\rho \cos \vartheta - a - r_0) \sin \beta; \\ (r\varphi + r_0 - a \cos \beta - r \cos \beta) \sin \vartheta + b \cos \vartheta \cos \beta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Последняя строка — уравнение зацепления $f(\vartheta, \beta, \varphi) = 0$.

Таблица 1 – Распределение параметров круговых зубьев по полушевронам

Параметр	Первый полушеvron				Второй полушеvron			
	1	2	...	n	$n + 1$	$n + 2$...	$2n$
i	1	2	...	n	$n + 1$	$n + 2$...	$2n$
j	j_1	j_2	...	j_n	j_n	$j_{(n-1)}$...	j_1
b_i	b_1	b_2	...	b_n	$-b_n$	$-b_{(n-1)}$...	$-b_1$
β_i	β_1	β_2	...	β_n	β_n	$\beta_{(n-1)}$...	β_1
$\rho_{\alpha i}$	$\rho_{\alpha 1}$	$\rho_{\alpha 2}$...	$\rho_{\alpha n}$	$\rho_{\alpha n}$	$\rho_{\alpha(n-1)}$...	$\rho_{\alpha 1}$
$\rho_{\beta i}$	$\rho_{\beta 1}$	$\rho_{\beta 2}$...	$\rho_{\beta n}$	$\rho_{\beta n}$	$\rho_{\beta(n-1)}$...	$\rho_{\beta 1}$

В системе (1) начальный радиус $r = m_t z$, где m_t – торцовый модуль, z – число зубьев зубчатого колеса, ϑ – текущий угол профиля зуба, r_0 – номинальный радиус продольной формы зуба, φ – параметр обкатки; значения a, b , выражаемые через параметры исходного контура [6], приведены для равносмещённого сдвига ($x_1 = -x_2$) в таблице 2.

Таблица 2 – Параметры, входящие в систему (1) для контактной точки

Параметр	$k = 1$		$k = 2$	
	$i = 1, a$	$i = 2, f$	$i = 1, f$	$i = 2, a$
ρ	ρ_a	ρ_f	ρ_f	ρ_a
a	l_a	$l_a + (\rho_f - \rho_a) \cos \alpha_k$	$-(l_f + 0.5\pi m_0)$	$-(l_f + 0.5\pi m_0)$
b	$x_a - x_1$	$x_f - x_1$	$-(x_f + x_1)$	$-(x_a + x_1)$
ϑ	α_k	α_k	$\pi + \alpha_k$	$\pi + \alpha_k$
r	r_1	$-r_2$	r_1	$-r_2$
r_0	$r_0(-1)^{t+1}$	$r_0(-1)^{t+1}$	$r_0(-1)^{t+1}$	$r_0(-1)^{t+1}$
φ	φ_a	$\varphi_a z_1 / z_2$	φ_f	$\varphi_f z_1 / z_2$
β	$\beta_a(-1)^{t+1}$	$\beta_a(-1)^{t+1}$	$\beta_f(-1)^{t+1}$	$\beta_f(-1)^{t+1}$

Индексы означают: $i = 1$ относится к шестерне, $i = 2$ – к колесу; $k = 1$ – контакт головки зуба шестерни с ножкой зуба колеса, $k = 2$ – контакт ножки зуба шестерни с головкой зуба колеса; $t = 1$ – контакт вогнутой рабочей стороны зуба шестерни с выпуклой стороной зуба колеса, $t = 2$ – контакт выпуклой рабочей стороны зуба шестерни с вогнутой стороной зуба колеса. Индексы « a » и « f » относятся соответственно к головке и ножке зуба.

В неподвижной системе координат при $\vartheta_a = \vartheta_f = \alpha_k$ получены уравнения линий зацепления по головкам и ножкам зубьев, представляющие собой сильно вытянутые вдоль зуба эллипсы с эксцентриситетами, близкими единице.

Коэффициенты продольного перекрытия, определяемые как отношения углов поворота зубчатого колеса при прохождении контактной точки от середины до торца (или наоборот) к угловому шагу, равному $2\pi/z_1$, различны по головкам ($\varepsilon_{\beta a}$) и ножкам ($\varepsilon_{\beta f}$) и равны (в частности, для $t = 1$):

$$\varepsilon_{\beta a} = |z_1 [l_a - (x_a - x_1) \operatorname{ctg} \alpha_k \pm r_0] (\cos \beta_{a \max} - 1) / (2\pi r_1)|;$$

$$\varepsilon_{\beta f} = |z_1 \{ \pm r_0 - [0.5\pi m_0 + l_f - (x_f + x_1) \operatorname{ctg} \alpha_k] \} (\cos \beta_{f \max} - 1) / (2\pi r_1) |.$$

В таблице 3 приведены некоторые необходимые при проектировании результаты исследований ограничительных факторов, в частности, предельных значений коэффициентов смещения производящей рейки при нарезании арочных зубьев Новикова с исходным контуром РГУ-5 [6], превышение которых приводит к ухудшению качества зацепления.

Таблица 3 – Параметры, входящие в систему (1) для контактной точки

Коэфф. смещения	По условию					
	Неподрезания головки зуба		Допустимой толщины вершины зуба ¹		Допустимого положения полюсной линии	
	$z = 9$	$z = 25$	$z = 9$	$z = 25$	$z = 9$	$z = 25$
x_{\max}	0.407	0.621	0.147/0.430	0.615/1.113	0.177	
x_{\min}	-0.384	-0.598	Без ограничений		-0.177	

С целью оценки работоспособности арочных зубьев Новикова выполнено объёмное моделирование напряжённо-деформированного состояния с определением напряжений растяжения (σ_p) и сжатия (σ_c) в нижнем (НК) и верхнем (ВК) концентраторах зубьев производящих реек с различными исходными контурами. Нагрузка под расчётным углом к начальной плоскости прикладывалась по центру зубчатого венца как с вогнутой, так и с выпуклой стороны зуба. Задача решалась как симметричная с использованием конечно-элементного пакета ANSYS и высокопроизводительных кластеров.

В таблице 4 даны результаты вычисления напряжений растяжения и сжатия в сечении под силой для примеров с использованием исходных контуров по ГОСТ 30224-96 [6] и Дон-63 [7]. Наряду с этим на растянутой стороне зуба определены ответственные за разрушение зуба т. н. приведенные (критериальные) напряжения $\sigma_{np} = \sigma_e / \sqrt{1 - \mu + \mu^2}$ [8], где σ_e — эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности, μ — коэффициент Пуассона.

Из таблицы 4 следует: а) напряжённость зубьев в обоих концентраторах практически не зависит от стороны приложения нагрузки; б) напряжения на сжатой стороне зуба существенно превышают напряжения на растянутой стороне; в) напряжения растяжения у зубьев с исходным контуром Дон-63 превышают соответствующие напряжения у зубьев с исходным контуром по ГОСТ 30224-96: по НК на 17-20%, а по ВК на 45-60%; г) по критериальным напряжениям исходный контур по ГОСТ 30224-96 обеспечивает примерно равную работоспособность по НК и ВК, в то время как при исходном контуре Дон-63 «опасным» по разрушению зуба оказывается ВК.

Выше указывалось о возможности продольной модификации круговых зубьев простыми технологическими методами. С целью оценки эффективности продольной модификации нами проведено исследование передач Новикова с круговыми

Таблица 4 – Значения напряжений при действии сосредоточенной силы на зубья реек передач Новикова с исходными контурами по ГОСТ 30224-96 и Дон-63 [$m = 1$, $b_w = 25$, $F_t = 3000 \text{ Н}$]

Сторона приложения нагрузки	r_0 , мм	Исходный контур по ГОСТ 30224 – 96					
		σ_p , МПа		σ_{np} , МПа		σ_c , МПа	
		НК	ВК	НК	ВК	НК	ВК
Вогнутая	18	1244	917	1460	1502	2295	2196
	36	1252	931	1477	1538	2290	2191
Выпуклая	18	1221	921	1473	1585	2238	2135
	36	1239	924	1484	1578	2264	2160
		Исходный контур Дон-63					
Вогнутая	18	1473	1447	1686	2170	2079	1859
	36	1488	1475	1713	2228	2081	1855
Выпуклая	18	1466	1460	1750	2297	2016	1801
	36	1484	1468	1729	2284	2051	1826

зубьями различной степени точности, с помощью моделирования их продольной модификации за счёт торцового отвода δl_T поверхностей.

Результаты моделирования позволили дать рекомендации по назначению отвода δl_T , которые представлены в таблице 5. Коэффициенты λ_F и λ_H показывают, во сколько раз снижается соответственно изгибная и контактная напряжённость модифицированных зубьев по сравнению с немодифицированными ($\delta l_T = 0$) при прочих равных условиях.

Таблица 5 – Ориентировочные рекомендации по назначению величины δl_T

Степень точности по [9]	Рекомендуемое значение δl_T в долях модуля m_t	λ_F	λ_H
6...8	0.008...0.011	до 1.4	до 1.1
9...10	0.014...0.020	1.6...1.8	1.2...1.4
11	0.035	до 2	до 1.6
12	свыше 0.045	свыше 2	свыше 1.6

Из таблицы 5 следует, что продольная модификация поверхностей круговых зубьев передач Новикова является мощным инструментом снижения их напряжённости, при этом эффект тем больше, чем ниже точность передачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 13-08-00386.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Решетов Д. Н., Головачев М. И. К расчёту арочных передач на сопротивление контактной усталости // Вестник машиностроения. 1983. № 2. С. 12–16.
- [2] Догода М. И., Еремин В. Е., Догода А. И. Разработка и освоение высоконагруженных арочных передач и средств для их производства // Вестник машиностроения. 1990. № 9. С. 41–44.
- [3] Сирицын А. И., Беляев А. И., Сирицын Д. А. Особенности изготовления и применения высокоточных арочных тяговых зубчатых передач // Вестник машиностроения. 1997. № 1. С. 3–6.
- [4] Айрапетов Э. Л., Городничий В. П., Ерихов М. Л., Сызранцев В. Н. Нагруженность цилиндрических передач с арочными зубьями // Вестник машиностроения. 1986. № 2. С. 20–22.
- [5] Севрюк В. Н. Теория круговинтовых поверхностей в проектировании передач Новикова. Харьков: Изд-во ХГУ. 1972. 168 с.
- [6] Короткин В. И., Онишков Н. П., Харитонов Ю. Д. Зубчатые передачи Новикова. Достижения и развитие. М: Машиностроение-1, 2007. 384 с.
- [7] Росливер Е. Г. Прочность и жесткость зубьев передач с зацеплением М.Л. Новикова // Прочность корпусов судов и надежность деталей машин. Труды ГИИВТа. Горький: 1975. № 138. С. 50–138.
- [8] Короткин В. И., Колосова Е. М., Сухов Д. Ю. Коэффициент формы зуба при расчёте на изломную прочность цилиндрических эвольвентных зубчатых колёс, работающих в условиях локального контакта // Изв. вузов. Сев.-Кав. Регион. Технические науки. 2009. № 5. С. 78–84.
- [9] ГОСТ 1643-81. Передачи зубчатые цилиндрические. Допуски. М.: Изд-во стандартов. 1981. 69 с.

Korotkin V. I. *Kinematics, stress level and surfaces modification of circular teeth of cylindrical Novikov gearing.* Considered the basic geometry-kinematic characteristics of cylindrical Novikov gearing with circular longitudinal shape of teeth — the equation of lateral surfaces and lines of engagement, teeth undercut, the distribution of contact points on halves of herring-bone. Found that the tooth stress level does not depend from the side of the load application. Shown the high stress level at the base of the addendum with some basic rack profiles, recommended the longitudinal modification of active surfaces of the teeth as an effective means of increasing the load capacity of the gearing.

ФРОНТ ОБРАЗОВАНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПРИ ОБЪЕДИНЕНИИ ЧАСТИЦ

Куликовский А. Г.¹, Свешникова Е. И.²

¹*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва*

²*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Рассмотрен процесс превращения потока не взаимодействующих частиц в нелинейно несжимаемую упругую среду в плоском фронте слияния. Исследована структура этого фронта превращения в зависимости от параметров набегающего потока и образовавшейся упругой среды.

Рассматривается задача о превращении потока не взаимодействующих частиц среды (капель) в результате слияния и последующего превращения в нелинейно упругую несжимаемую анизотропную среду. Превращение происходит на плоском фронте, ортогональном оси x . Скорость потока капель \bar{V} направлена под некоторым углом к оси x и имеет по отношению к фронту нормальную компоненту V и проекции V_1, V_2 на оси координат x_1, x_2 , лежащие в плоскости фронта (рисунок 1). Изучается изменение в образовавшейся среде поперечных скоростей и появление поперечных деформаций. Образовавшаяся среда предполагается обладающей анизотропией в плоскости фронта. Такая задача при прямом набегающем потоке частиц и образовании изотропной несжимаемой среды рассмотрена в [1].

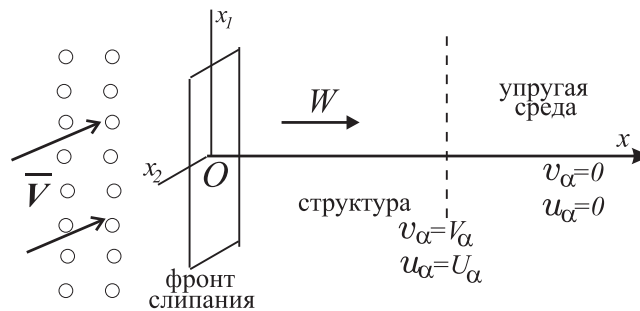


Рисунок 1

Рассмотрение ведется в системе координат, связанной с фронтом. В этой системе в упругой среде непосредственно за фронтом нормальная к фронту компонента скорости $v_x = W$. На поверхности разрыва, представляющей фронт превращения, должны выполняться законы сохранения массы и импульса. Из закона сохранения массы следует

$$W = V \frac{\rho_o}{\rho}$$

где ρ_o и ρ — плотности соответственно в потоке частиц и в упругой среде. Так как образовавшаяся среда предполагается несжимаемой, то $\rho = \text{const}$ и, следовательно, $v_x = W = \text{const}$ во всей области за фронтом. Таким образом движение среды вдоль оси x определено и дальнейшему изучению подлежат только касательные компоненты. Величина W может принимать разные значения в разных задачах.

Закон сохранения импульса для касательных компонент дает

$$\sigma_\alpha - \sigma_\alpha^- = -\rho W(v_\alpha - v_\alpha^-), \quad \alpha = 1, 2$$

$\sigma_\alpha^-, v_\alpha^-$ — напряжения и скорости перед фронтом, о которых известно, что $v_\alpha^- = V_\alpha$ и $\sigma_\alpha^- = 0$ из-за отсутствия взаимодействий в потоке частиц. По другую сторону при $x = \infty$ упругая среда находится в покое, то есть $v_\alpha = 0$. Таким образом, в упругой среде

$$\sigma_\alpha = \rho W V_\alpha \quad (1)$$

Как известно, на разрывах, кроме соотношений, следующих из законов сохранения, во многих случаях необходимо выставлять дополнительные граничные условия, обеспечивающие существование структуры разрыва.

Чтобы выяснить, как происходит процесс изменения параметров потока и найти дополнительные соотношения, рассмотрим стационарную структуру фронта слияния. Для описания структуры принята модель вязко-упругой среды Кельвина–Фойхта. Уравнения в системе координат, связанной с фронтом, имеют вид

$$\rho \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + W \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + W \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}$$

Здесь μ — коэффициент вязкости. Для задания компонент тензора упругих напряжений σ_α принята модель нелинейной анизотропной среды, для которой упругий потенциал может быть представлен многочленом по степеням сдвиговых компонент деформаций $u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x$ $\alpha = 1, 2$, где w_α — компоненты вектора перемещения [2]

$$\Phi(u_1, u_2) = \frac{f}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\varkappa}{4}(u_1^2 + u_2^2)^2 \quad (3)$$

Коэффициент f определяет скорость линейных поперечных волн в изотропной среде $c_0^2 = f/\rho$. Малый коэффициент g характеризует анизотропию среды. В присутствии анизотропии скорости двух волн малых поперечных возмущений различны $c_{1,2}^2 = (f \mp g)/\rho$. В данной работе принято $g > 0$, что может быть сделано соответствующим выбором осей x_1, x_2 .

Коэффициент нелинейности \varkappa может быть любого знака и указывает на направление выпуклости графика зависимости $\sigma(u)$ при $g = 0$: при $\varkappa > 0$ выпуклость графика обращена вверх, при $\varkappa < 0$ — вниз.

Для стационарной структуры ($\partial u_\alpha / \partial t = 0$, $\partial v_\alpha / \partial t = 0$) система уравнений (2) может быть один раз проинтегрирована по x . Во втором уравнении

$$v_\alpha = W u_\alpha + B_\alpha$$

постоянные интегрирования B_α определяются из условий при $x = \infty$ в области упругости, где среда покоится $v_\alpha = 0$, а компоненты деформации $u_\alpha = 0$ вследствие принятого предположения об отсутствии деформаций в среде Кельвина–Фойхта в момент ее образования. Тогда

$$v_\alpha = W u_\alpha$$

Это равенство позволяет в постановке задачи вместо компонент напряжения в равенстве (1) использовать компоненты деформации

$$U_\alpha = V_\alpha/W$$

на которые следует выйти после прохождения фронта слияния.

Интегрирование первой группы уравнений (2) после исключения v_α дает

$$\nu W \frac{du_\alpha}{dx} = W^2 u_\alpha - \sigma_\alpha - Q_\alpha, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4)$$

Компоненты напряжений определяются согласно заданному упругому потенциалу $\sigma_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}$, а постоянные интегрирования Q_α находятся из условий далеко за разрывом, где $\frac{du_\alpha}{dx} \rightarrow 0$ и $u_\alpha = U_\alpha$.

Для описания изменения величин внутри структуры волны, движущейся со скоростью W , получена система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \nu W \frac{du_1}{dx} &= \varkappa \left(\frac{W^2 - (f - g)}{\varkappa} + u_1^2 + u_2^2 \right) u_1 - Q_1 = L(u_1, u_2) \\ \nu W \frac{du_2}{dx} &= \varkappa \left(\frac{W^2 - (f + g)}{\varkappa} + u_1^2 + u_2^2 \right) u_2 - Q_2 = M(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$Q_1 = \varkappa U_1 \left(\frac{W^2 - (f - g)}{\varkappa} + R^2 \right), \quad Q_2 = \varkappa U_2 \left(\frac{W^2 - (f + g)}{\varkappa} + R^2 \right), \quad R^2 = U_2 + U_2^2$$

У системы (5) можно качественно исследовать поведение интегральных кривых на фазовой плоскости $u_1 u_2$ [3]. Среди них следует отыскать (если это окажется возможным) такую кривую, которая из состояния среды в момент образования среды Кельвина–Фойхта, что по предположению соответствует точке $(u_1 = 0, u_2 = 0)$, приведет в состояние за фронтом, где $\frac{du_\alpha}{dx} \rightarrow 0$ и решение для компонент u_1, u_2 асимптотически выйдет на постоянные значения. Таким состоянием может быть только какая-либо из особых точек системы (5).

Особые точки системы (5) на плоскости $u_1 u_2$ лежат на пересечении линий $L(u_1, u_2) = 0$ и $M(u_1, u_2) = 0$. Сами эти линии служат изолиниями для системы (5), которые интегральные кривые пересекают в направлении параллельном оси u_2 (линию $L = 0$) и параллельно оси u_1 (линию $M = 0$). На фазовой плоскости $u_1 u_2$ эти линии имеют качественно одинаковый вид и состоят из двух ветвей, одна из которых — овал, лежащий по одну сторону одной из осей координат (оси u_2 для $L = 0$ и u_1 для $M = 0$), другая ветвь лежит по другую сторону указанной оси и асимптотически приближаясь к ней уходит в $\pm\infty$. Расположение ветвей относительно осей координат и размеры овалов зависят от заданных параметров задачи W, U_1, U_2, \varkappa . Овалы (один или оба) могут вообще отсутствовать.

Пересечение линий $L = 0, M = 0$ дает на плоскости $u_1 u_2$ от одной до пяти особых точек в зависимости от указанных параметров. На рисунке 2 изображены эти точки A, B, C, D, F для случая, когда $\varkappa > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, W < f - g < f + g$.

Там же указаны знаки L и M в разных областях между изолиниями. Это позволяет определить типы особых точек. В рассматриваемом случае точка A — узел с входящими линиями, точки B и D — седла, точки C и F — узлы с выходящими линиями. На рисунке это изображено стрелками на касательных к интегральным кривым в окрестностях особых точек.

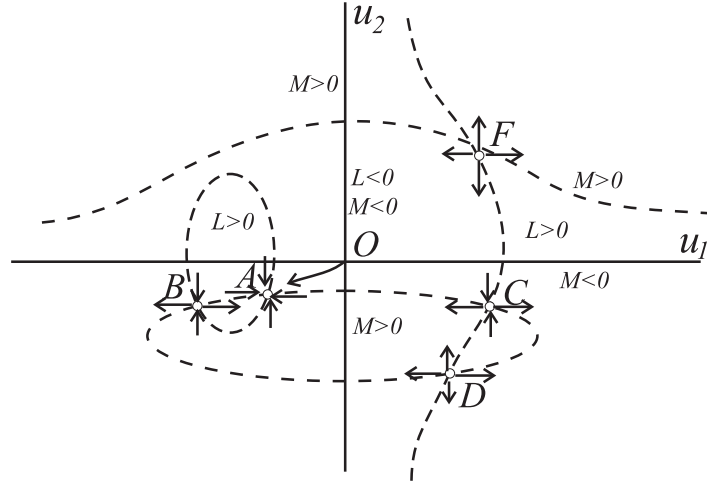


Рисунок 2

В области, где расположена начальная точка O , знаки $M < 0$, $L < 0$ указывают на то, что представляющая решение интегральная кривая, выходящая из точки O , должна идти в третью четверть плоскости $u_1 u_2$ и может сразу попасть в узел A . Это означает, что в данной волне сдвиговые деформации u_α при $x = 0$ достигли произвольно заданных значений U_α . Это связано с тем, что данная волна движется медленнее любых малых возмущений, которые ее догоняют и меняют обе компоненты деформации до нужных значений.

Однако при том же значении скорости фронта слипания $W < f - g$ при увеличении Q_1 (выше приведены формулы, показывающие, что $Q_1 \sim U_1$) овал, соответствующий $L = 0$, становится меньше и две особые точки A и B (узел и седло) сближаются и в конце концов сливаются в одну. Это соответствует тому, что скорость W совпала со скоростью c_1 медленной поперечной волны по состоянию за разрывом и выполнено условие Жуге. В этом случае непосредственно за волной Жуге может идти медленная волна Римана с той же скоростью переднего фронта.

Пусть теперь при тех же условиях $\varkappa > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ скорость фронта $W > f + g$. На плоскости $u_1 u_2$ пропадают оба овала и остается одна особая точка F . Но это узел с выходящими линиями и попасть в него из начального состояния нельзя. Это означает, что в рассматриваемой быстрой волне происходит слипание частиц и превращение их в упругую среду, но не происходит изменения касательных деформаций, они остаются нулевыми. Они будут изменяться в двух волнах, идущих следом за фронтом слипания с меньшими скоростями по уже образовавшейся упругой среде. Нахождение этих волн составляет задачу о поршне для упругой среды, когда деформации на поршне равны U_α , а состояние среды недеформированное. Решение этой задачи для любых ситуаций приведено в [2]. Для рассматриваемого случая это будет последовательность быстрой и медленной

волн Римана. (В среде с $\kappa > 0$ не могут идти ударные волны по недеформированному состоянию [4]).

Для случая $f - g < W < f + g$ в среде с $\kappa > 0$ и $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ особыми точкам будут C, D, F . Ни в одну из них нельзя попасть внутри структуры фронта слипания. Однако, в том случае, когда $Q_1 = 0$ (то есть $U_1 = 0$), точки C и D (седло и узел) окажутся на отрицательной части оси u_2 и интегральная кривая быстрой волны из начала координат попадает в ближайшую из точек C седло. В этой волне меняется только поперечная компонента деформации u_2 . Если достигнуто заданное значение $u_2 = U_2$, то следом за этой волной по полученному состоянию ($u_1 = 0$, $u_2 = U_2$) пойдет следующая медленная волна со скоростью $W < f - g$, в которой будет меняться другая поперечная компонента деформации u_1 . Структура такой медленной волны полностью описана в [2]. Если же U_2 оказалось больше, то точки C и D сближаются и сливаются, что говорит о том, что это быстрая волна Жуге и следом за ней непосредственно с той же скоростью переднего фронта может идти быстрая волна Римана. Это обеспечит изменение компоненты u_2 до нужного значения.

Таким образом, исследование структуры фронта образования упругой среды из потока капель, проведенное с помощью модели вязко-упругости Кельвина-Фойхта, показало следующее. Если $W > f + g$, то состояние за фронтом определяется двумя дополнительными соотношениями $U_1 = 0$, $U_2 = 0$. Если $f - g < W < f + g$, то имеется одно дополнительное соотношение $U_1 = 0$. При этом значение U_2 произвольно в некотором интервале, на границе которого за разрывом выполняется условие Жуге для быстрых упругих волн. Если $W < f - g$, то существует область допустимых значений U_1 и U_2 , в граничных точках которой за соответствующим разрывом выполняется условие Жуге для медленных волн в упругой среде.

Если образовавшаяся упругая среда обладает нелинейностью, соответствующей $\kappa < 0$, то исследование проводится аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Куликовский А. Г. О многопараметрических фронтах сильных разрывов в механике сплошных сред // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. Вып. 4. С. 531–550.
- [2] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1988. 412 с.
- [3] Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
- [4] Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. *Front of anisotropic elastic medium formation in particle aggregation.* A transition of noninteracting particle flow into a nonlinear incompressible elastic medium is considered at a plane front of particle aggregation. The structure of the front is investigated depending on parameters of the up-stream flow and the resulting elastic medium.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ КОНТАКТ ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТНО НЕОДНОРОДНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ И СИСТЕМ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ

Курдина С. П.

Московский государственный университет приборостроения и информатики

При воссоздании реальной картины процессов контактного взаимодействия тел с покрытиями необходимо учитывать такие факторы, как неоднородность покрытий и сложные формы контактирующих поверхностей. В работе исследуется осесимметричная задача о вязкоупругих телах с поверхностно неоднородными упругими покрытиями (такими покрытиями, неоднородность которых зависит от радиальной координаты), на которые действуют системы жестких штампов.

Введение. В работе исследуются контактные задачи для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Поверхностная неоднородность может быть обусловлена, например, особенностями нанесения покрытия на основной слой, а также возникнуть при поверхностной обработке уже нанесенных покрытий (лазерная обработка, ионная имплантация и т.д.). Она может появиться и вследствие использования различных материалов при изготовлении покрытий. Следует отметить, что неоднородность может описываться быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Для указанной задачи выведена система разрешающих смешанных интегральных уравнений, которая приведена к одному интегральному уравнению с тензорным ядром в функциональном векторном пространстве. Также выписана система дополнительных условий, являющихся условиями равновесия штампов на основании, которая также приведена к одному дополнительному уравнению. Так как применение метода разделения переменных Фурье и других классических методов (например, метода ортогональных многочленов) приводит к необходимости исследования бесконечных систем интегральных уравнений Вольтера, для решения полученного интегрального уравнения с дополнительным условием развит проекционно-спектральный метод для случая быстро осциллирующих функций в исходных данных. Указаны все варианты постановки задач. Для различных вариантов получены аналитические формулы для контактных напряжений под штампами и осадок штампов, причем в выражениях для контактных напряжений функция неоднородности покрытия выделена отдельным сомножителем, то есть удалось найти тонкую структуру решения.

1. Постановка задачи. На недеформируемом жестком подстилающем основании лежит однородный вязкоупругий слой с тонким упругим покрытием (рисунок 1), жесткость $R(r)$ которого меняется от точки к точке поверхности, но не меняется по глубине. Предполагается, что жесткость покрытия меньше жесткости нижнего слоя, или же они имеют один порядок. В некоторый момент времени на вышеописанное основание начинает действовать система жестких осесимметричных концентрических штампов, центры которых находятся в точке $r = 0$. Области контакта штампов с основанием со временем не изменяются и равны ширинам штампов, которые значительно больше толщины покрытия.

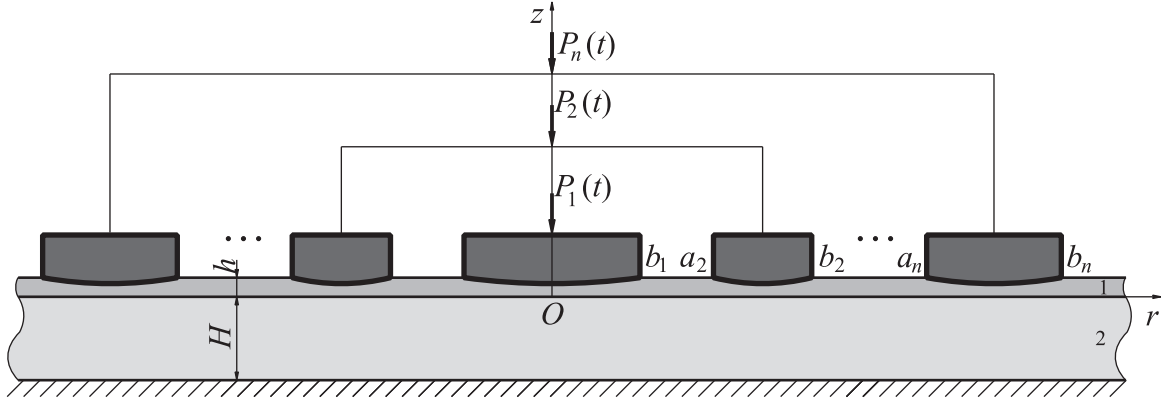


Рисунок 1 – Множественный осесимметричный контакт

Можно показать [1], что система интегральных уравнений поставленной задачи имеет вид:

$$\frac{q_i(r, t)h}{R(r)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H} (\mathcal{J} - \mathcal{V}) \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{as}} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right) \frac{q_j(\rho, t)\rho d\rho}{E_2(t - \tau_2)} = \delta_i(t) - g_i(r),$$

$$\mathcal{V} f(t) = \int_{\tau_0}^t K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) f(\tau) d\tau, \quad K^{(2)}(t, \tau) = E_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \tau \left[\frac{1}{E_2(\tau)} + C^{(2)}(t, \tau) \right],$$

$$r \in [a_i, b_i] \quad (i = \overline{1, n}), \quad t \geq \tau_0. \quad (1)$$

Здесь $q_i(r, t)$ — контактное давление под i -м штампом, H , ν_2 , $E_2(t)$, $C^{(2)}(t, \tau)$, τ_2 — толщина, коэффициент Пуассона, модуль упругомгновенной деформации, мера ползучести при растяжении и момент изготовления нижнего вязкоупругого слоя, соответственно, $h \ll \max_{j=\overline{1, n}} (b_j - a_j)$ — толщина покрытия, $\delta_i(t)$, $g_i(r)$ — осадка и форма основания i -го штампа, a_i , b_i — внутренний и внешний радиусы i -го штампа, $i = \overline{1, n}$, n — количество штампов; \mathcal{J} — тождественный оператор, \mathcal{V} — оператор Вольтера с ядром ползучести при растяжении $K^{(2)}(t, \tau)$, $\tau_0 \geq \tau_2$ — момент начала действия штампов на основание, $k_{\text{as}}(r, \rho) = \int_0^\infty L(u) J_0(ru) J_0(\rho u) du$ — ядро осесимметричной контактной задачи [2], $J_0(u)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а $L(u)$ зависит от условий соединения нижнего слоя подстилающего основания. Систему интегральных уравнений следует дополнить дополнительными условиями, являющимися условиями равновесия штампов на слое:

$$\int_{a_i}^{b_i} q_i(\rho, t)\rho d\rho = P_i(t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где $P_i(t)$ — сила, приложенная к i -му кольцевому штампу по его оси.

Для того, чтобы привести систему интегральных уравнений (1) с дополнительными условиями (2) к безразмерному виду, необходимо произвести в ней замену

переменных по формулам

$$\begin{aligned}
 r^* &= \sqrt{\frac{r^2 - a_i^2}{b_i^2 - a_i^2}}, \quad \rho^* = \sqrt{\frac{\rho^2 - a_i^2}{b_i^2 - a_i^2}}, \quad r, \rho \in [a_i, b_i], \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{b_1 - a_1}, \\
 \eta_j &= \frac{a_j}{b_1 - a_1}, \quad \zeta_j = \frac{\sqrt{b_j^2 - a_j^2}}{b_1 - a_1}, \quad \delta_i^*(t^*) = \frac{\delta_i(t)\zeta_i}{b_1 - a_1}, \quad g_i^*(t^*) = \frac{g_i(t)\zeta_i}{b_1 - a_1}, \\
 q_i^*(r^*, t^*) &= \frac{2q_i(r, t)(1 - \nu_2^2)\zeta_i}{E_2(t - \tau_2)}, \quad P_i^*(t^*) = \frac{P_i(t)(1 - \nu_2^2)\zeta_i}{\pi E_2(t - \tau_2)(b_i^2 - a_i^2)}, \\
 c^*(t^*) &= \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_0}, \quad m_i(r^*) = \frac{1}{1 - \nu_2^2} \frac{E_0}{R_i(r)} \frac{h}{2(b_1 - a_1)}, \\
 \mathcal{G}_{ij}^* f(r^*, t^*) &= \int_0^1 k_{ij}(r^*, \rho^*) f(\rho^*, t^*) \rho^* d\rho^*, \quad k_{ij}(r^*, \rho^*) = \frac{\zeta_i \zeta_j}{\lambda} k_{as}\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right), \\
 \mathcal{V}^* f(r^*, t^*) &= \int_1^{t^*} K_2(t^*, \tau^*) f(r^*, \tau^*) d\tau^*, \quad K_2(t^*, \tau^*) = K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Опустив в результирующих выражениях звездочки, получим:

$$\begin{aligned}
 c(t)m_i(r)q_i(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}) \sum_{j=1}^n \mathcal{G}_{ij}q_j(r, t) &= \delta_i(t) - g_i(r), \quad r \in [0, 1], \\
 \int_0^1 q_i(\rho, t)\rho d\rho &= P_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 1,
 \end{aligned}$$

или, в векторном виде,

$$c(t)\mathbf{D}(r)\mathbf{q}(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V})\mathcal{G}\mathbf{q}(r, t) = \boldsymbol{\delta}(t) - \mathbf{g}(r), \quad r \in [0, 1], \tag{4}$$

$$\int_0^1 \mathbf{q}(\rho, t)\rho d\rho = \mathbf{P}(t), \quad t \geq 1, \tag{5}$$

где $\mathbf{q}(r, t) = (q_1(r, t), \dots, q_n(r, t))^T$, $\boldsymbol{\delta}(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_n(t))^T$, $\mathbf{g}(r) = (g_1(r), \dots, g_n(r))^T$, $\mathbf{P}(t) = (P_1(t), \dots, P_n(t))^T$ — n -мерные векторы, $\mathbf{D}(r) = \text{diag}_n\{m_1(r), \dots, m_n(r)\}$, $\mathcal{G} = [\mathcal{G}_{ij}]_{n \times n}$ — матричный оператор $n \times n$, такой, что $\mathcal{G}f(r) = \int_0^1 \mathbf{k}(r, \rho)f(\rho)\rho d\rho$, $\mathbf{k}(r, \rho) = [k_{ij}(r, \rho)]_{n \times n}$. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}(r, t) &= \mathbf{D}^{1/2}(r)\mathbf{q}(r, t), \quad \mathbf{K}(r, \rho) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{k}(r, \rho)\mathbf{D}^{-1/2}(\rho), \\
 \mathcal{F}f(r) &= \int_0^1 \mathbf{K}(r, \rho)f(\rho)\rho d\rho,
 \end{aligned} \tag{6}$$

то уравнения (4) и (5) примут вид

$$c(t)\mathbf{Q}(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V})\mathcal{F}\mathbf{Q}(r, t) = \boldsymbol{\Delta}(r, t) - \mathbf{G}(r), \quad r \in [0, 1], \tag{7}$$

$$\int_0^1 \mathbf{D}^{-1/2}(\rho)\mathbf{Q}(\rho, t)\rho d\rho = \mathbf{P}(t), \quad t \geq 1, \tag{8}$$

где $\Delta(r, t) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\delta(t)$, $\mathbf{G}(r) = \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{g}(r)$. Как можно видеть, мы получили операторное уравнение (7), которое по своему виду практически совпадает с уравнением (10) из [4]. Поэтому метод решения этого будет аналогичен, а изменения будут связаны с наличием слагаемого $\mathbf{G}(r)$.

2. Варианты математической постановки. На каждом штампе можно задать один из двух типов условий: осадку или вдавливающую силу. Тогда осесимметричная задача множественного контакта допускает три варианта постановки:

- на всех штампах заданы кинематические условия (осадки);
- на всех штампах заданы квазистатические условия (вдавливающие силы);
- на части штампов заданы кинематические, а на части квазистатические условия.

Первые два случая относятся к задачам с одной группой штампов, последний — с двумя группами.

3. Решение задачи для двух групп штампов. Наиболее общим решением является решение задачи для двух групп штампов, то есть когда на части штампов заданы приложенные силы $P_p(t)$ ($p = \overline{1, n_0}$), а на части известны осадки $\delta_q(t)$ ($q = \overline{n_0 + 1, n}$). Действуя аналогично тому, как это было сделано в [3], можно прийти к решению, имеющему вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(r, t) &= \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{Q}(r, t), \quad \mathbf{Q}(r, t) = z_p^{(0)}(t)\mathbf{p}_p^{(0)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(r), \\ z_p^{(0)}(t) &= \frac{P_p(t)}{\sqrt{J_{0,p}}}, \quad z^{(k)}(t) = (\mathcal{J} + \mathcal{W}_k) \frac{\Delta^{(k)}(t)}{c(t) + \gamma_k}, \quad \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(r) = \psi_q^{(k0)}\mathbf{p}_q^{(0)}(r) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi_i^{(k\ell)}\mathbf{p}_i^{(\ell)}(r), \\ K_{pq}^{00}\psi_q^{(k0)} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{pj}^{0m}\psi_j^{(km)} &= \gamma_k\psi_p^{(k0)}, \quad K_{iq}^{\ell 0}\psi_q^{(k0)} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{\ell m}\psi_j^{(km)} = \gamma_k\psi_i^{(k\ell)}, \\ K_{ij}^{m_1 m_2} &= \int_0^1 \int_0^1 K_{ij}(r, \rho) p_i^{(m_1)}(r) p_j^{(m_2)}(\rho) r \rho dr d\rho, \quad K_p^{(k)} = K_{qp}^{00}\psi_q^{(k0)} + \sum_{m=1}^{\infty} K_{ip}^{m0}\psi_i^{(km)}, \\ \Delta^{(k)}(t) &= -(\mathcal{J} - \mathcal{V})K_p^{(k)}z_p^{(0)}(t) + \delta_q^{(k)}\delta_q(t) - g^{(k)}, \quad \delta_q^{(k)} = \sqrt{J_{0,q}}\psi_q^{(k0)}, \\ g^{(k)} &= \int_0^1 \mathbf{G}(\rho) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(\rho) \rho d\rho, \quad \mathcal{W}_k f(t) = \int_1^t R_k(t, \tau) f(\tau) d\tau, \\ k, \ell &= 1, 2, 3, \dots, \quad m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, n_0}, \quad q = \overline{n_0 + 1, n}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $R_k(t, \tau)$ — резольвента ядра $\gamma_k K_2(t, \tau)/[c(t) + \gamma_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$); $\{\mathbf{p}_i^{(k)}(r)\}$ — ортонормированная система функций ($i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^{(k)}(r) &= \mathbf{D}^{-1/2}(r)\mathbf{p}_i^{*(k)}(r), \quad \mathbf{p}_i^{*(k)}(r) = p_i^{*(k)}(r)\mathbf{i}^i, \quad J_{k,i} = \int_0^1 \frac{\rho^{2k+1}}{m_i(\rho)} d\rho, \\ p_i^{*(k)}(r) &= \frac{1}{\sqrt{d_{k-1,i}d_{k,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{k+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r^2 & \cdots & r^{2k} \end{vmatrix}, \quad d_{-1,i} = 1, \\ & \quad d_{k,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & \cdots & J_{k,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k,i} & \cdots & J_{2k,i} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Всюду считается, что по нижним повторяющимся индексам производится суммирование по i, j от 1 до n , по p от 1 до n_0 , по q от $n_0 + 1$ до n , если другая часть

формулы не зависят от этого индекса. Очевидно, что при $n_0 = n$ мы получим решение для случая задания вдавливающих сил на всех штампах, а при $n_0 = 0$ — решения при известных осадках.

Следует отметить, что в силу (9) и (10) решение имеет следующую структуру:

$$\mathbf{q}(r, t) = \mathbf{D}^{-1}(r)\mathbf{F}(t, r),$$

где $\mathbf{F}(t, r)$ — гладкая функция относительно аргумента r . То есть в решении в явном виде выделено слагаемое, связанное обратной зависимостью с жесткостью покрытия. Это позволяет производить вычисления для оснований, жесткости покрытий которых задаются быстроосциллирующими и разрывными функциями.

Кроме того можно получить уравнение для определения осадок $\delta_p(t)$ ($p = \overline{1, n_0}$) штампов, на которых заданы силы.

Выводы. Поставлена и решена задача об осесимметричном контакте вязкоупругого тела с поверхностно неоднородным упругим покрытием и системы кольцевых жестких штампов. Показано, что ее математическая модель имеет вид, аналогичный тому, который был получен для задачи об осесимметричном конформном контакте [3], и, следовательно, построение аналитического решения аналогично. Для поставленной проблемы указаны различные варианты постановки и выписано наиболее общее решение. Отмечено, что в выражении для контактных давлений в явном виде выделено слагаемое, связанное с жесткостью покрытия. Это позволяет получать эффективные решения в случаях, когда жесткость покрытия описывается быстроосциллирующей или даже разрывной функцией. Этого невозможно добиться другими известными методами

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00991).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
- [2] Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
- [3] Манжиров А. В., Курдина С. П., Кухарский С. О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 80–89.

Kurdina S. P. *Axisymmetric contact problem for solids with surface inhomogeneous coatings and systems of rigid punches* When we recreating a real picture for the processes of contact interaction of coated solids, we should take into account factors such as the coating inhomogeneities and complicated shapes of contacting surfaces. This paper investigates axisymmetric problem for viscoelastic solids with surface inhomogeneous elastic coating (such coatings, which inhomogeneity depends on the radial coordinate) and system of rigid punches.

БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ СВЯЗИ БИЛИАРНОЙ БОЛИ С ОПОРОЖНЕНИЕМ ЖЕЛЧНОГО ПУЗЫРЯ

Кучумов А. Г.¹, Самарцев В. А.², Няшин Ю. И.¹,
Гаврилов В. А.²

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет

²Пермская государственная медицинская академия

В данной работе сделаны первые шаги для построения модели опорожнения желчного пузыря, позволяющей оценить влияние трех значимых факторов для выявления связи с билиарной болью. В ходе реализации разработанной методики использовались модель Франка, теория мембран и конечно-элементное моделирование совместно с клиническими исследованиями.

1. Концепция

Для оценки факторов акалькулезной боли в настоящее время используются два критерия: степень опорожнения желчного пузыря (EF) и максимальное давление в пузыре (p_{\max}) (норма 14,7 мм рт. ст.) [4]. Однако данные критерии не всегда отражают истинную картину, поэтому авторами был предложен дополнительный критерий — напряжения в желчном пузыре (σ_{\max}).

На рис. 1 представлена концепция работы. Предварительно производится ультразвуковая диагностика пациента с наполненным желчным пузырем (производится измерение размеров и объёма желчного пузыря); далее пациента просят съесть что-нибудь → происходит выделение гормона холецистокинина → пузырь сжимается. Одновременно с этим производятся замеры объёма желчного пузыря. Вычисляется первый критерий — степень опорожнения желчного пузыря (EF).

$$EF = \frac{V_0 - V_{30}}{V_0} \cdot 100\% \quad (1)$$

где V_0 — объём желчного пузыря в начале опорожнения, V_{30} — объём желчного пузыря через 30 минут после начала опорожнения. Поскольку в некоторых случаях опорожнение происходит быстрее, чем через 30 минут, то данный параметр может быть принят за 100%. Болевой критерий для $EF < 35\%$ [1, 12].

Далее используется модель Франка, согласно которой можно определить зависимости $V(t)$ и $p(t)$ в резервуарах с податливыми стенками. Сопоставляя экспериментальные данные и модель Франка, можно найти её параметры. Подставляя параметры модели в зависимость $p(t)$ можно неинвазивно *in vivo* определить максимальное давление в желчном пузыре (p_{\max}), поскольку некоторые исследователи считают, что билиарная боль связана с давлением в желчном пузыре и желчных путях [6, 9–11].

В работе [4] были проведены измерения болевого порога для 40 пациентов до и после удаления желчного пузыря. Величина давления связанная с болевым порогом варьировалась от 14,7 до 59 мм рт. ст. Поскольку вышеуказанные критерии

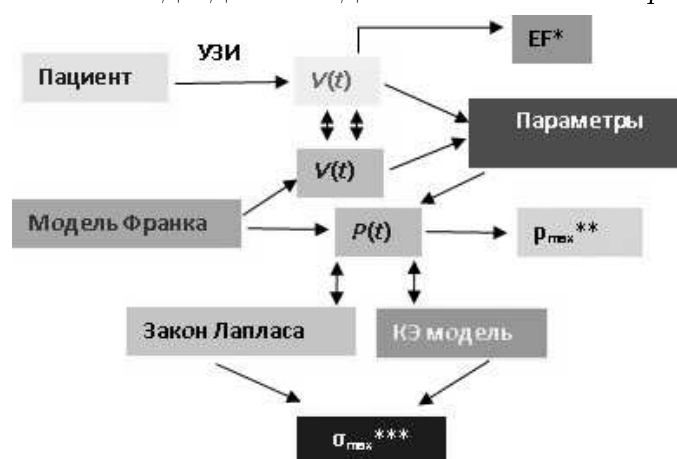


Рисунок 1 – Концепция работы

не всегда оказывались удачными для определения билиарной боли, было решено использовать новый критерий для связи болевых ощущений и биомеханических параметров:

$$\sigma_{\max} \geq [\sigma],$$

где $\sigma_{\max} = 200 \text{ мм рт.ст.} \approx 26 \text{ кПа}$ [8], $[\sigma]$ — нормальные напряжения в стенке желчного пузыря.

Если принять форму желчного пузыря в виде эллипсоида, то для оценки напряжений в стенке пузыря можно использовать модели Лапласа, тонкостенных оболочек и конечно-элементные модели. Зная зависимость p_{\max} , можно вычислить максимальные нормальные напряжения в желчном пузыре (σ_{\max}).

Далее проверяется работоспособность вышеуказанных критериев с клиническими случаями.

2. Физиология течения желчи

Согласно современным исследованиям, накопление желчи в пузыре и его опорожнение — это непрерывные процессы [10]. Приём пищи приводит к выделению специального гормона (холецистокинина) [8], который подаёт стимулирующий сигнал желчному пузырю для опорожнения. Максимальное опорожнение пузыря, в котором задействованы элементы нервной системы, происходит в течение 90 – 120 минут после приема пищи [11]. Опорожнение желчного пузыря происходит тогда, когда уровень давления внутри желчного протока (связанного со скоростью течения желчи и величиной давления сфинктера) становится выше, чем уровень давления в полости желчного пузыря. Нарушения моторной функции желчного пузыря могут привести к образованию камней [3]. Желчь вырабатывается печенью постоянно, однако в периоды между приемами пищи из печени она поступает в желчные протоки.

На (рис. 2) схематично изображено изменение давления и объема от времени во время наполнения и опорожнения пузыря. В начале фазы наполнения сфинктер Одди закрыт, а объем и давление в желчном пузыре ниже базального уровня [6].

При приеме пищи холецистокинин стимулирует сокращение желчного пузыря. Давление в желчном пузыре быстро возрастает до значения в точке 3, что превышает давление в общем желчном протоке. В то же время, холецистокинин также

действует на сфинктер Одди, который релаксирует и открывается. В результате, давление в общем желчном протоке в дальнейшем понижается (участок 3-4). Пузырь сокращается, и желчь попадает в двенадцатиперстную кишку вследствие градиента давления ($\Delta p = p - p_d$) (рис. 2) [2]. В норме доля выброса составляет около 70% от начального объема V_0 . Время наполнения (t_f) обычно примерно в шесть раз больше времени опорожнения (t_e). За это время желчный пузырь расслабляется, и внутреннее давление p можно считать постоянным ($p = 11$ мм рт. ст.) [9]; таким образом, считается, что наполнение желчного пузыря — изотонический процесс [11].

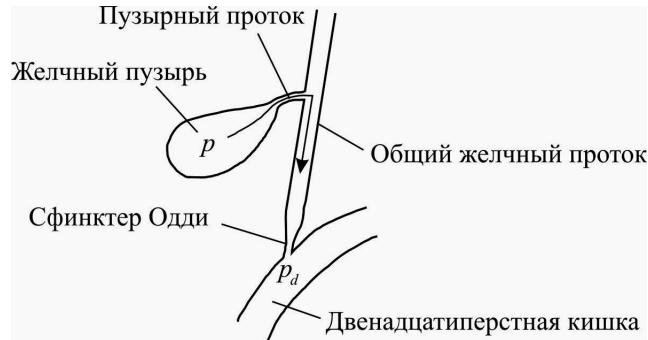


Рисунок 2 – Течение желчи в двенадцатиперстную ктшку вследствие гарадиента давлений $\Delta p = p - p_d$

3. Модель Франка для описания функционирования желчного пузыря и нахождение её параметров из клинических исследований

Схема течения (см. рис. 2) вследствие изменения градиента давления и взаимодействия с упругими стенками может быть описана с помощью модели Франка [5]:

$$-\frac{dV}{dt} = Q, \quad (2)$$

$$dV = d(C \cdot P), \quad (3)$$

$$Q = \frac{p - p_d}{R}. \quad (4)$$

где V — объём желчного пузыря, C — податливость стенок желчного пузыря, Q — расход желчи, поступающей из желчного пузыря, p — давление в желчном пузыре, p_d — давление в двенадцатиперстной кишке ($p_d = 6$ мм рт. ст.) [8], R — гидравлическое сопротивление.

Подставив (3) в (1) с учетом (2), в случае предположения функции податливости постоянной $C = \text{const}$, зависимость давлений от времени имеет вид:

$$p = p_d + (p_e - p_d)e^{-\frac{t_e - t}{RC}}, \quad (5)$$

где p_e — давление, когда пузырь опорожнен ($p_e = 11$ мм рт. ст.) [7], t_e — время опорожнения. Зависимость изменения объёма от времени может быть получена следующим образом:

$$V(t) = B + C(p_d - p_e)e^{-\frac{t_e - t}{RC}}, \quad (6)$$

где $B = V_e - C(p_d - p_e)$. Величину B можно определить из клинических наблюдений зависимости объёма пузыря от времени. На основании клинических измерений объёма желчного пузыря были найдены параметры модели Франка по формуле (6); далее по найденным параметрам строилась зависимость $p(t)$ ((5)) (рис. 3).

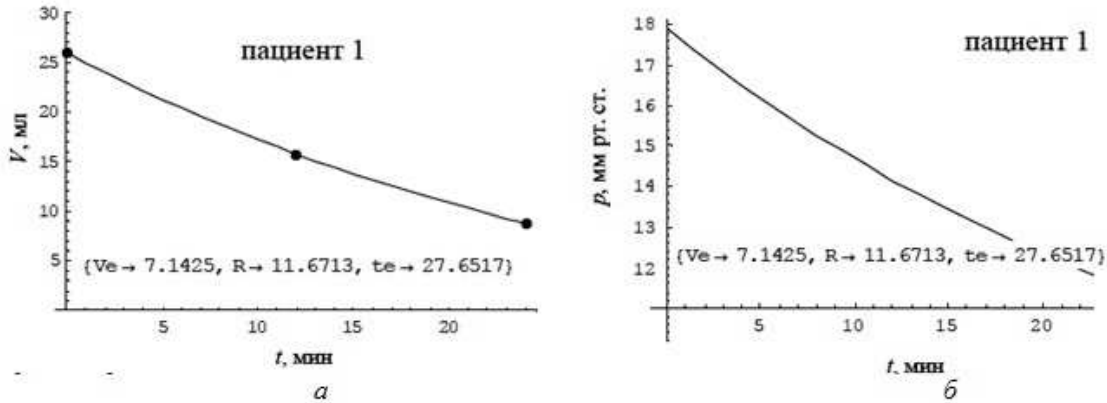


Рисунок 3 – Аппроксимация клинических измерений моделью Франка (точками показаны экспериментальные значения, сплошная линия — модельная зависимость): а — зависимость объёма от времени, б — зависимость давления от времени

4. Нахождение напряжений в стенке желчного пузыря

Конечно-элементная модель желчного пузыря в форме эллипсоида была построена в ANSYS. Модуль Юнга пузыря был выбран равным $5 \cdot 10^6$ Па [7], коэффициент Пуассона — 0,45 [4]. Модель разбивалась на конечные элементы Solid185 (число конечных элементов — 28 000).

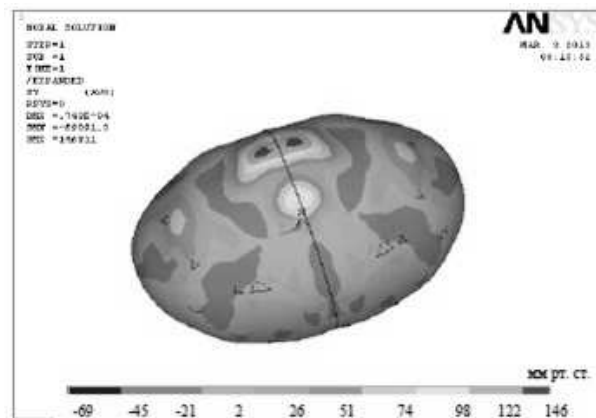


Рисунок 4 – Напряжения в желчном пузыре

К модели прикладывалось максимальное давление p_{\max} , определяемое из зависимости $p(t)$ (см. рис. 4, б). Распределение нормальных напряжений в стенке пузыря показано на (рис. 4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Bingener J., Richards M. L., Schwesinger W. H., Sirinek K. R.* Laparoscopic cholecystectomy for biliary dyskinesia // *Surgical Endoscopy*. 2004. № 18. P. 802–806.
- [2] *Bongard F. S., Stamos M. J., Passaro E.* Surgery: a clinical approach. Churchill Livingstone Publishing House, 1997. 358 p.
- [3] *Corazziari E., Shaffer E. A., Hogan W. J., Sherman S., Toouli J.* Functional disorders of the biliary tract and pancreas // *Gut*. 1999. № 45. P. 48–54.
- [4] *Csendes A., Kruse A., Funch-Jensen P., Oster M. J., Ornholt J., Amdrup E.* Pressure measurements in the biliary and pancreatic duct systems in controls and in patients with gallstones, previous cholecystectomy, or common bile duct stones // *Gastroenterology*. 1979. №. 77. P. 213–227.
- [5] *Fung Y. C.* Biodynamics Circulation. Springer-Verlag, 1984. 321 p.
- [6] *Girometti R., Brondani G., Cereser L.* Post-cholecystectomy syndrome: spectrum of biliary findings at magnetic resonance cholangiopancreatography // *British Journal of Radiology*. 2010. №. 83. P. 351–361.
- [7] *Herman I. P.* Physics of the Human Body. Berlin: Springer, 2007. 214 p.
- [8] *Luo X. Y., Li W. G.* On mechanical behaviour of the human biliary system: review // *World J. of Gastroenterology*. 2007. №. 13. P. 1384–1392.
- [9] *Ness T. J., Gebhart G. F.* Visceral pain: a review of experimental studies // *Pain*. 1990. №. 41. P. 167–194.
- [10] *Rastogi A., Slivka A., Moser A. J., Wald R.* Controversies concerning pathophysiology and management of acalculous biliary-type abdominal pain // *Digestive Diseases and Sciences*. 2005. №. 50. P. 1391–1401.
- [11] *Shaffer E.* Acalculous biliary pain: new concepts for an old entity // *Digestive and Liver Disease*. 2003. №. 35. P. 20–25.
- [12] *Yap L., Wycherley A. G., Morphet A. D., Toouli J.* Acalculous biliary pain: cholecystectomy alleviates symptoms in patients with abnormal cholescintigraphy // *Gastroenterology*. 1991. №. 101. P. 786–793.

Kuchumov A. G., Samarcev V. A., Nyashin Y. I., Gavrilov V. A. *Biomechanical approach to investigation of relation between biliary pain and gallbladder emptying.* In the given paper, the first steps of gallbladder emptying modelling were made to evaluate an influence of three significant parameters related to the biliary pain. Frank's model, membrane theory, and finite element modelling accompanying clinical research were involved in the investigation.

О ВЛИЯНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРЕЩИНЫ В СЛОЕ

Лапина П. А.¹, Явруян О. В.^{1,2}

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

В работе рассмотрены прямая и обратная геометрическая задачи для ортотропного предварительно напряженного вязкоупругого слоя с трещиной. Проанализировано влияние предварительных напряжений на волновые поля и процедуру реконструкции трещины.

Прочность материалов и конструкций в значительной степени зависит от наличия в них дефектов, развитие которых под действием внешних факторов может приводить к необратимым последствиям. С точки зрения механики разрушений трещины и расслоения являются наиболее опасными дефектами.

Вопросы распределения напряжений и перемещений в телах с трещинами и задачи идентификации местоположения и геометрических параметров трещины, являются важными проблемами современной механики разрушения. В последнее время интерес представляет изучение физических полей в телах, в которых имеются предварительные напряжения.

Данная работа посвящена изучению влияния предварительных напряжений на поля перемещений в вязкоупругом ортотропном слое, ослабленном внутренней трещиной, а также на процедуру идентификации трещины в слое.

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях ортотропного вязкоупругого слоя. Колебания вызываются антиплоской нагрузкой, приложенной на части верхней границы. Остальная часть верхней поверхности свободна от напряжений. Нижняя граница жестко закреплена. Слой ослаблен внутренней туннельной трещиной. Трещина моделируется как математический разрез, на берегах которого компонента поля перемещений терпит конечный скачок. На основе теории дислокаций действие трещины заменяется фиктивной массовой силой с носителем на трещине, которая выражается через функцию раскрытия трещины [6]. Будем считать, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют друг с другом и свободны от напряжений.

Вязкоупругие свойства учтены на основе принципа соответствия в рамках комплексных модулей [5], что позволяет, как и в упругой задаче, отделить временной множитель. В слое имеются предварительные однородные растягивающие напряжения, которые описываются при помощи модели Гузя [4].

Краевая задача об установившихся антиплоских колебаниях для слоя с трещиной и предварительным однородным растягивающим напряжением на бесконечности после отделения временного множителя принимает вид:

$$T_{2j,j} + \rho\omega^2 u + f = 0, \quad (1)$$

$$T_{21} = \sigma_{21} + u_{,1}\sigma_{11}^0; \quad T_{23} = \sigma_{23}, \quad (2)$$

$$\sigma_{21} = C_{44}^*(i\omega)u_{,1}; \quad \sigma_{23} = C_{66}^*(i\omega)u_{,3}, \quad (3)$$

$$u|_{x_3=0} = 0; \quad T_{23}|_{x_3=h} = p\delta(x_1 + L), \quad (4)$$

$$T_{2j}n_j^\pm|_{l_0^\pm} = 0, \quad j = 1, 3, \quad (5)$$

Здесь (1) — уравнение движения, (2) — условие, записанное согласно модели Гузя, связывающее предварительные и текущие напряжения, (3) — определяющие соотношения вязкоупругого материала в рамках концепции комплексных модулей, (4) — граничные условия, (5) — условие отсутствия напряжений на трещине, где σ_{2j} и T_{2j} — компоненты тензора напряжений, σ_{11}^0 — предварительное растягивающее напряжение, ρ — плотность среды, $C_{kl}^*(i\omega)$ — компоненты тензора комплексных модулей, $f_i = -(C_{66}^*(i\omega)n_1^+\chi_{,1} + C_{44}^*(i\omega)n_3^+\chi_{,3})\delta(\zeta)$ — фиктивные массовые силы, $\chi = u|_{l_0^+} - u|_{l_0^-}$ — функция раскрытия трещины, ζ — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности l_0^+ , $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака с носителем на трещине, n_j^\pm — компоненты единичных векторов нормалей к поверхностям l_0^\pm .

Исключив напряжения, получаем уравнение в перемещениях:

$$(C_{44}^*(i\omega) + \sigma_{11}^0)u_{,11} + C_{66}^*(i\omega)u_{,33} + \rho\omega^2u + f = 0, \quad (6)$$

и следующие граничные условия

$$u|_{x_3=0} = 0; \quad C_{66}^*(i\omega)u_{,3}|_{x_3=h} = p\delta(x_1 + L), \quad (7)$$

$$((C_{44}^*(i\omega) + \sigma_{11}^0)u_{,1}n_1^\pm + C_{66}^*(i\omega)u_{,3}n_3^\pm)|_{l_0^\pm} = 0, \quad (8)$$

Таким образом, в случае однородного растягивающего предварительного напряжения, σ_{11}^0 является «поправкой» комплексного модуля.

Задача идентификации трещины в слое состоит в определении местоположения и геометрии трещины по полям перемещений, измеренным на части верхней границы слоя $[a, b]$:

$$u(x_1, h) = g(x_1), \quad x_1 \in [a, b]. \quad (9)$$

Решение строится при помощи преобразования Фурье на основе принципа соответствия аналогично [3]. Интегральное представление поля перемещений имеет вид:

$$u_m(x) = u^{et}(x) + \int_{l_0^+} K(\xi, x)\chi(\xi)dl_\xi, \quad x \in S, \quad (10)$$

где $u^{et}(x)$ характеризует поле в слое без трещины от действия нагрузки, а второе слагаемое — поле, обусловленное наличием трещины (отраженное поле).

Используя граничное условие (8) и осуществив параметризацию трещины, сформулировано граничное интегральное уравнение относительно неизвестных функций раскрытия трещины:

$$\int_{-1}^1 G^{(1)}(t, \tau)(t - \tau)^{-2} \chi(t) dt + \int_{-1}^1 G^{(2)}(t, \tau) \chi(t) dt = F(\tau), \quad \tau \in [-1, 1] \quad (11)$$

Первый интеграл в (11) имеет гиперсингулярную особенность, и интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару. Для вычисления гиперсингулярных интегралов применяем регуляризующую формулу, предложенную в [2].

Полученное интегральное уравнение решается на основе метода граничных элементов. Относительно узловых значений компоненты функции раскрытия трещины составлена система линейных алгебраических уравнений в соответствии с методом коллокаций. Коэффициенты систем получены в виде однократных интегралов, для вычисления которых применялась составная квадратурная формула Гаусса восьмого порядка.

Далее представлены результаты численных расчетов. Для численного анализа взят вязкоупругий ортотропный композит, состоящий из эпоксидной смолы с 60-процентным содержанием продольных волокон из графита, описанный в [7].

На рисунке 1 представлено сравнение дисперсионных множеств для слоя без предварительных напряжений и для предварительно-напряженного слоя. Величина предварительного напряжения определяется следующим безразмерным параметром $r = \frac{\sigma_{11}^0}{C_{44}^*(0)}$. Для данного графика $r = 0.078$. При $r \ll 0.05$ ветви дисперсионных множеств различаются слабо.

Численный анализ проведен для прямолинейной налонной трещины, которая параметризована четырьмя инвариантными параметрами: длина l , угол наклона к положительному направлению горизонтальной оси θ , расстояние d от средней точки до нижней границы и расстояние L от средней точки до точки приложения нагрузки вдоль горизонтальной оси.

На рисунке 2 представлены поля перемещений для слоя без предварительных напряжений и для предварительно-напряженного слоя, где $r = 0.0156$. Параметры трещины выбраны следующим образом: $l = 0.2h$, $\theta = 65^\circ$, $d = 0.5h$, $L = 2.1h$. Безразмерная частота $k_0 = 4$ ($k_0 = \sqrt{\frac{\rho}{C_{44}^*(0)}} \omega h$).

Решение задачи идентификации параметров трещины по известным на части верхней границы полям перемещений сведено к минимизации функционала невязки. Численная реализация осуществлена генетическим алгоритмом [3].

Ниже представлены некоторые численные результаты. В качестве входной информации для решения обратной задачи использовались результаты решения прямой задачи с предварительными напряжениями. Обратная задача решалась в условиях отсутствия предварительных напряжений. При расчетах выбиралось 10 точек зондирования. Параметры трещины и частота выбраны так же, как и на рисунке 2. Область поиска была выбрана следующим образом: $0.1h < l < 0.3h$; $55^\circ < \theta < 115^\circ$; $2h < L < 2.3h$; $0.3h < d < 0.7h$. Относительные погрешности

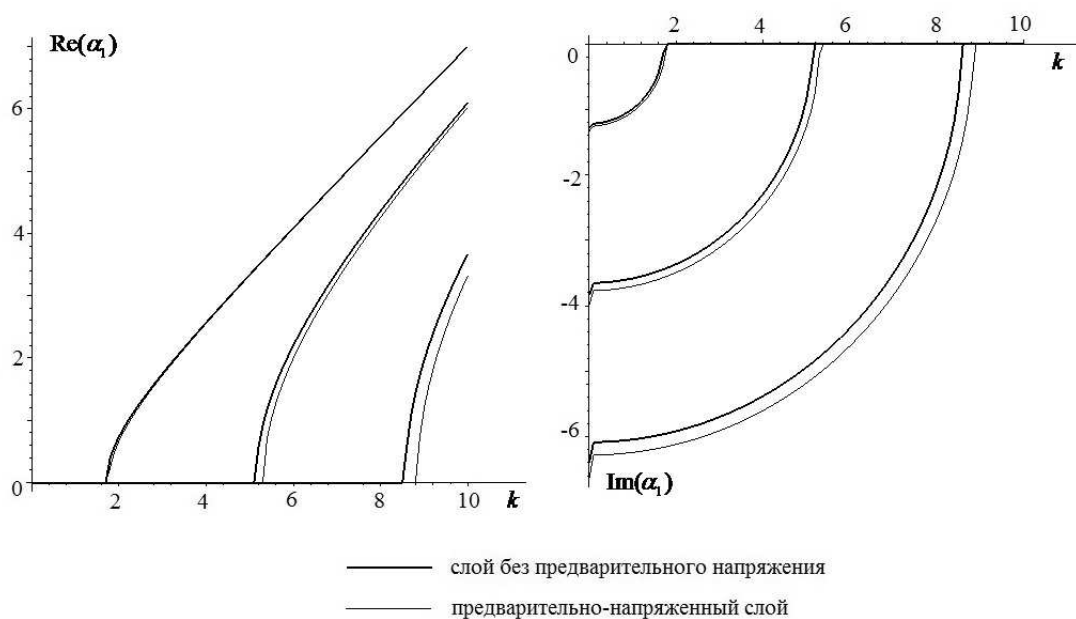


Рисунок 1 – дисперсионные множества

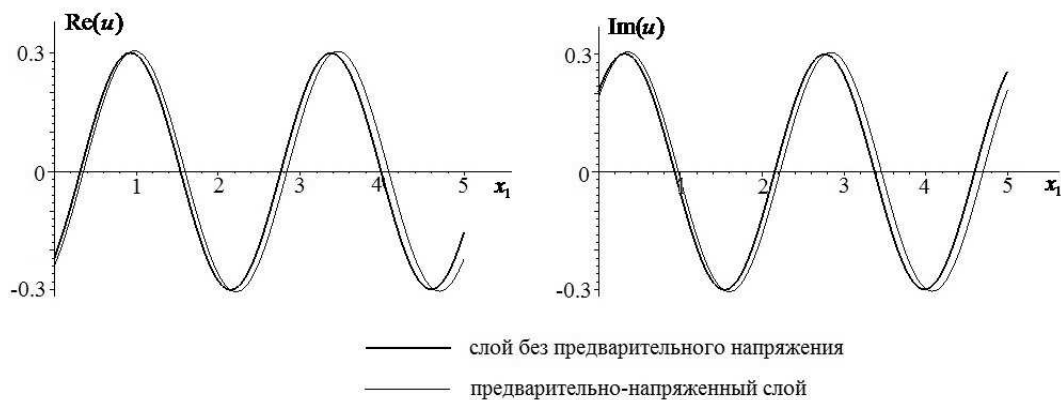


Рисунок 2 – поля перемещений

определения параметров трещины (в процентах) для разных значений предварительных напряжений представлены в таблице 1.

Полученные результаты свидетельствуют о применимости данного подхода при идентификации трещины для предварительных напряжений, удовлетворяющих условию $r \ll 0.001$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00196, №213.01-24/2013-74, РФФИ №12-01-31501 мол_а.

Таблица 1 – относительные погрешности восстановления параметров трещины

r	0	0.000156	0.00156	0.0156	0.156
ε_l	6	12.5	19	12.5	20
ε_θ	1	5	7	36	53
ε_d	0.5	0.5	1	1	1
ε_L	10	15	15	10	19

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 3. С. 14–26.
- [2] Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
- [3] Ватульян А. О., Азарова П. А., Явруян О. В. Идентификация параметров наклонной прямолинейной трещины в вязкоупругом слое // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 3. С. 461–472.
- [4] Гузь А. Н., Мазорт Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость. Киев: Наукова думка, 1977. 162 с.
- [5] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. Т. 7. 246 с.
- [7] Garnich M. R., Hansen A. C. A multicontinuum Approach to Structural Analysis of Linear Viscoelastic Composite Materials // J. of Applied Mechanics. December 1997. Vol. 64. P. 795–803.

Lapina P. A., Yavruyan O. V. *On the influence of the preliminary tension on the procedure of the crack parameter reconstruction in a layer*. The paper considers the direct and inverse geometric problems for the pre-stressed orthotropic viscoelastic layer with a crack. The influence of the preliminary stress on the wave fields and the crack reconstruction procedure is analyzed.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ТЕРМОУПРУГОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ СРЕДЕ

Леви Г. Ю.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

В рамках линеаризованной теории распространения термоупругих волн рассматривается динамическая связанная задача о возбуждении гармонических колебаний на поверхности преднапряженного термоупругого тела. Колебания осуществляются под действием распределенного в ограниченной области на поверхности среды осциллирующего теплового потока. Поверхность тела предполагается свободной от механических напряжений, вне области нагрузки – теплоизолированной. Начальное напряженное состояние предполагается однородным, создается за счет механических и тепловых воздействий. В качестве примера рассмотрена краевая задача о колебании слоя под действием заданной на поверхности среды тепловой нагрузки. Изучено влияние различных режимов предварительного напряжения на распространение поверхностных акустических волн на поверхности термоупругой среды.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим термоупругое тело, подвергнутое действию однородного начального напряжения, обусловленного механической нагрузкой и температурным воздействием. Колебания $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ($\{u_1, u_2, u_3\}$ – компоненты вектора механических перемещений, u_4 – температура) осуществляются под действием распределенной в области $\Omega = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq \infty\}$ на поверхности среды осциллирующей тепловой нагрузки

$$q_4(x_1, x_2, t) = q_{40}(x_1, x_2)e^{-i\omega t},$$

где $q_{40} = -K_{33} \frac{\partial u_4}{\partial x_3}$ – ориентированная по нормали компонента теплового потока. Поверхность тела предполагается свободной от механических напряжений, вне области нагрузки – теплоизолированной.

В общем случае колебания преднапряженной термоупругой среды описываются уравнениями движения и теплопроводности [1], [3–7]:

$$\theta_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \theta_{ij} = c_{ijkl}^* u_{k,l} - \beta_{ij}^* u_4, \quad (1)$$

$$K_{ik} u_{4,ik} = \kappa \frac{\partial u_4}{\partial t} + \theta_1 \beta_{ik}^* \frac{\partial u_{k,i}}{\partial t}, \quad \kappa = c_\varepsilon \rho_0 \frac{\theta_1}{\theta_0}. \quad (2)$$

Полагаем, что термоупругое тело предварительно нагрето до температуры $\theta_1 = \text{const}$ и подвергнуто действию начальных напряжений, которые приводят к однородной начальной деформации вида: $\mathbf{R} = \lambda \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{\Lambda} = \sum_{k=1}^3 \nu_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k$.

Участвующие в уравнениях (1), (2) константы среды при однородной начальной деформации и преднагреве определяются выражениями:

$$c_{ijkl}^* = \sum_{m=1}^3 \frac{\delta_{kj}}{2} c_{ilm} (\nu_m^2 - 1) + c_{ijkl} \nu_j \nu_k - (\theta_1 - \theta_0) \beta_{il} \delta_{kj}, \quad (3)$$

$$\beta_{ij}^* = \nu_j \beta_{ij}. \quad (4)$$

В формулах (3), (4) суммирование по повторяющимся индексам отсутствует.

Задача рассматривается в безразмерных величинах [2], [4, 5]:

$$x'_i = x_i \cdot \omega^* / V_L, \quad t' = \omega^* t, \quad V_L = \sqrt{c_{1111} / \rho_0}, \quad u'_i = u_i \cdot \rho_0 / \omega^* V_L \beta_{11} \theta_0, \quad i = 1 - 3,$$

$$u'_4 = u_4 / \theta_0, \quad c'_{ijkl} = c_{ijkl} / c_{1111}, \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij} / \beta_{11},$$

$$K'_{ij} = K_{ij} / K_{11}, \quad \omega' = \omega / \omega^*, \quad \omega^* = c_\varepsilon c_{1111} / K_{11}.$$

В формулах (1)–(4) c_{ijkl} , K_{ij} , α_{ij} , $\beta_{kl} = \alpha_{ij} c_{ijkl}$ — компоненты тензоров упругих постоянных, коэффициентов удельной теплопроводности, теплового расширения, термоупругости, ρ_0 — плотность материала в естественном состоянии, c_ε — удельная теплоемкость, θ_0 и θ_1 — соответственно температура тела в недеформированном и начальном деформированном состоянии, $\nu_k = 1 + \delta_k$, где δ_k ($k = 1, 2, 3$) — относительные удлинения волокон.

Колебания будем предполагать происходящими по гармоническому закону, поэтому все функции представляются в виде: $f = f_0 e^{-i\omega t}$. Рассмотрим плоскую задачу, т. е. $u_2 \equiv 0$, и все остальные характеристики задачи удовлетворяют условиям: $f = f(x_1, x_3)$, $\frac{\partial}{\partial x_2} f \equiv 0$.

Далее нули в индексах, экспоненты и штрихи опущены.

Рассмотрим частный случай, когда среда представляет из себя слой, занимающий область $|x_1|, |x_2| \leq \infty$, $0 \leq x_3 \leq h$. На его нижней грани предполагаются условия жесткого сцепления с недеформируемым основанием и теплоизоляции:

$$x_3 = h :$$

$$\theta_{31} = 0, \quad (5)$$

$$\theta_{33} = 0, \quad (6)$$

$$u_{4,3} = \begin{cases} -\frac{q_4}{K_{33}}, & x_1 \in \Omega \\ 0, & x_1 \notin \Omega \end{cases} \quad (7)$$

$$x_3 = 0 :$$

$$u_1 = u_3 = 0, \quad (8)$$

$$q_4 = 0. \quad (9)$$

2. Решение краевой задачи. После применения преобразования Фурье к системе уравнений движения (1), теплопроводности (2) и граничным условиям

(5)–(9) по координате x_1 их решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, x_3, \omega) &= -i\alpha \sum_{k=1}^3 f_{1k} (C_k sh\sigma_k x_3 + C_{k+3} ch\sigma_k x_3), \\ U_3(\alpha, x_3, \omega) &= \sum_{k=1}^3 f_{3k} (C_k ch\sigma_k x_3 + C_{k+3} sh\sigma_k x_3), \\ U_4(\alpha, x_3, \omega) &= \sum_{k=1}^3 f_{4k} (C_k sh\sigma_k x_3 + C_{k+3} ch\sigma_k x_3). \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) σ_k находятся численно для каждого значения α и ω из характеристического уравнения. Для отыскания неизвестных коэффициентов C_k подставим представление решения (10) в граничные условия (5)–(9) и получим систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{L}\mathbf{C} = \mathbf{Q}, \quad (11)$$

где $\mathbf{Q} = \{0, 0, Q_4, 0, 0, 0\}$, Q_4 — образ Фурье q_4 .

Дисперсионное уравнение задачи: $\det \mathbf{L} = 0$.

Найдя C_k из (11), решение краевой задачи (1),(2),(5)–(9) можем представить в виде [4, 5]:

$$\mathbf{u}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_3, \omega) \mathbf{q}(\xi) d\xi, \quad (12)$$

$$\mathbf{k}(s, x_3, \omega) = \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha_1, x_3, \omega) e^{-i\alpha_1 s} d\alpha_1. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{K}(\alpha_1, x_3, \omega)$ — матрица-функция Грина среды.

3. Исследование поверхностных акустических волн преднапряженного термоупругого слоя.

Представления (12) и (13) описывают перемещения и температуру в произвольной точке среды и позволяют проводить полное исследование динамического процесса в термоупругой среде. В частности, можно исследовать поверхностное волновое поле. Рассмотрим задачу о колебаниях слоя под действием теплового потока $q_{40} = const$.

Для численных исследований выбран селенид кадмия, материал класса 6 мм, описанный в [2]. Ниже приведены его физические характеристики:

$$c_{11} = 7.41 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{12} = 4.52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{13} = 3.93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$c_{33} = 8.36 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{44} = 1.32 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad Q_{11} = 0.621 \cdot 10^6 \text{ Н/}^\circ\text{К/м}^2,$$

$$Q_{33} = 0.551 \cdot 10^6 \text{ Н/}^\circ\text{К/м}^2, \quad c_\varepsilon = 260 \text{ Дж/кг/}^\circ\text{К}, \quad K_{11} = K_{33} = 9 \text{ Вт/м/}^\circ\text{К},$$

$$\rho_0 = 5504 \text{ кг/м}^3, \quad \theta_0 = 280^\circ\text{К}.$$

На рисунках 1–3 приведены графики, иллюстрирующие влияние различных режимов предварительных напряжений на распределение вертикальной компоненты вектора смещения поверхности термоупругого слоя при частоте $\omega = 0.5$. Введено обозначение $d\theta = (\theta_1 - \theta_0) / \theta_0$.

На рисунке 1 приведены эпюры распределения измененной вертикальной компоненты вектора смещения $\xi_\sigma = (u_{z\sigma} - u_z) \cdot 10^2$ на поверхности слоя в случае, когда предварительное тепловое воздействие отсутствует, среда находится под действием гидростатического растяжения $\nu = 1.005$ (линия 1) и сжатия $\nu = 0.995$ (линия 2). На рисунке 2 изображены графики распределения измененной вертикальной компоненты вектора смещения $\xi_\tau = (u_{z\tau} - u_z) \cdot 10^2$ в случае, когда отсутствуют начальные механические напряжения, среда под действием предварительного нагрева $d\theta = 0.01$ (линия 3) и охлаждения $d\theta = -0.01$ (линия 4). На рисунке 3 — $\xi_{\sigma\tau} = (u_{z\sigma\tau} - u_z) \cdot 10^2$ среда под действием предварительного нагрева $d\theta = 0.01$ и гидростатического растяжения $\nu = 1.005$ (линия 1) и сжатия $\nu = 0.995$ (линия 2). Сплошными линиями обозначены вещественные части, прерывистыми — мнимые.

Из рисунков 1, 2, 3 следует, что однородные начальные деформации и предварительные температурные воздействия значительно влияют на вертикальную компоненту вектора поверхностной волны среды. При этом сочетанием сжатия и нагрева можно усилить действие теплового потока на поверхности, а растяжения и нагрева — ослабить.

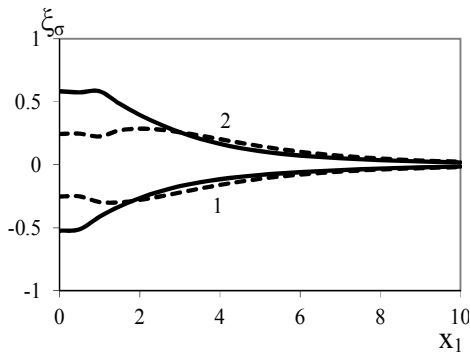


Рисунок 1 — $\nu = 1.005, \nu = 0.995$

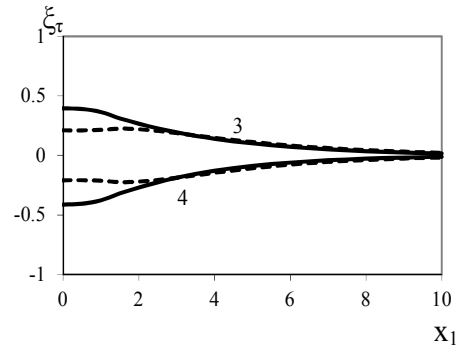


Рисунок 2 — $d\theta = 0.01, d\theta = -0.01$

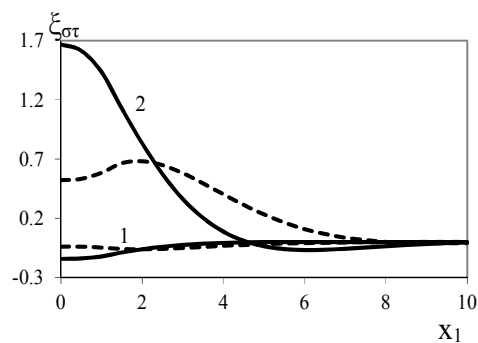


Рисунок 3 — $\nu = 1.005, \nu = 0.995, d\theta = 0.01$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-08-31458).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 301 с.
- [2] *Sharma J. N. Mohinder Pal, Dayal Chand/* Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials // *Journal of Sound and Vibration.* 2005. № 284. Pp. 227–248.
- [3] *Шейдаков Д. Н. Белянкова Т. И. Шейдаков Н. Е. Калинин В. В.* Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды // *Вестник ЮНЦ РАН.* 2008. № 3. С. 9–15.
- [4] *Суворова (Леви) Г. Ю. Анджинович И. Е. Калинин В. В.* Температурные эффекты в динамике преднапряженной термоупругой среды // *ПММ.* 2012. № 5. С. 811–822.
- [5] *Белянкова Т. И. Калинин В. В. Суворова (Леви) Г. Ю.* Об одной динамической контактной задаче для термоупругого предварительно напряженного слоя // *Вестник ЮНЦ РАН.* 2010. № 4. С. 18–23.
- [6] *Евдокимова О. В. Белянкова Т. И. Калинин В. В.* Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // *Вестник ЮНЦ РАН.* 2007. № 4. С. 19–25.
- [7] *Ворович И. И. Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Levi G. Yu. *Surface acoustic waves in a pre-stressed thermoelastic medium.* In the framework of the linearized theory of thermo-elastic waves dynamic coupled problem of excitation of harmonic vibrations on the surface of pre-stressed thermoelastic body is considered. Vibrations are effected by distributed in a limited region on the surface of the thermal medium of the oscillating flow. The body surface is assumed to be free from mechanical stress, regardless of the load - thermal insulated. Prestressed state is created by the mechanical and thermal effects. The effect of different modes of pre-stress on the propagation of surface acoustic waves on the surface of a thermoelastic medium is studied.

ВОЛНЫ ГУЛЯЕВА–БЛЮШТЕЙНА В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ МАГНИТОУПРУГИХ СРЕДАХ

Леви М. О., Михайлова И. Б.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассматривается связанная динамическая задача об установившихся гармонических колебаниях магнитоупругой среды состоящей из слоя и подстилающего его полупространства. Колебания среды осуществляются под действием осциллирующей на ее поверхности нагрузки произвольного вида. Среда представляет собой магнитоупругий слой толщины h , жестко сцепленный магнитоупругим полупространством: $|x_1|, |x_3| \leq \infty$; $-\infty \leq x_2 \leq h$, $u_1 = u_2 = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$, $u_n = u_n(x_1, x_2)$; Получена и исследована функция магнитоупругой Грина среды.

1. Введение. Волны Гуляева–Блюштейна нашли большое применение в акустоэлектронных устройствах обработки и генерации сигналов. Их высокая глубина проникновения и особое условие возникновения позволило создавать приборы с новыми качествами. Классический вариант предполагает возникновение ПАВ Гуляева–Блюштейна на границе электроупругой среды с вакуумом. В [1] рассматривались волны в электромагнитоупругих функционально-градиентных материалах без начальных напряжений. В [2] рассматривались дисперсионные особенности в электроупругой среде с начальными напряжениями. В данной работе показана возможность возникновения поверхностных волн при использовании магнитоупругих материалов. Исследуются влияние слабой неоднородности вызванной начальными напряжениями на волну Гуляева–Блюштейна.

2. Уравнения движения магнитоупругой среды. Краевая задача о колебаниях предварительно напряженной неоднородной среды описывается системой линеаризованных уравнений движения и магнитостатики [3]:

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot B^{(n)} = 0 \quad (2)$$

Здесь $\rho^{(n)}$ — плотность материалов слоя ($n=1$) и полупространства ($n=2$), $u^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}\}$ — расширенный вектор смещения произвольной точки среды ($u_4^{(n)}$ — потенциал магнитного поля в среде). $\Theta^{(n)}$ и $B^{(n)}$ — линеаризованные тензор напряжений и вектор индукции магнитного поля магнитоупругой среды, компоненты которых определяются формулами:

$$\begin{aligned} \theta_{lk}^{(n)} &= \sum_{s=1}^3 \sum_{p=1}^3 c_{lks p}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} + \sum_{p=1}^3 f_{lkp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)}, \\ b_l^{(n)} &= \sum_{s=1}^3 \sum_{p=1}^3 f_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - \sum_{p=1}^3 \mu_{lp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $c_{lksp}^{(n)*}$ и $f_{lkp}^{(n)*}$ — упругие и пьезомагнитные константы, $\mu_{lp}^{(n)*}$ — константы магнитной проницаемости слоя ($n=1$) или полупространства ($n=2$) в начально-деформированном состоянии, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. Поскольку колебания предполагаются установившимися, происходящими по гармоническому закону, все функции представляются в виде $F = F_0 e^{-i\omega' t'}$. Далее экспоненты и штрихи опущены. Перейдем к безразмерным параметрам: $f'_{lkp} = f_{lkp} \cdot k_f / c_{44}$, $\mu'_{lp} = \mu_{lp} \cdot k_f^2 / c_{44}$, $\omega' = \omega h / V_{sf}$, $k_f = 10^7$ м/А. Здесь V_{sf} — скорость сдвиговой волны в магнитоупругой среде, k_f — обезразмеривающая константа. Все упругие константы отнесены к c_{44} полупространства, линейные параметры отнесены к характерному размеру слоя, плотность — к характерной плотности полупространства.

3. Краевая задача о движении магнитоупругого слоя.

Рассмотрим колебания среды, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} = u_2^{(n)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \\ u_k^{(n)} = u_k^{(n)}(x_1, x_2), \quad u_3^{(n)} = 0, \quad k = 3, 4, \quad n = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (4)$$

Внося формулы (4) в уравнения (3), получим уравнения сдвиговых колебаний преднапряженной магнитоупругой среды

$$\begin{aligned} c_{1331}^{(n)*} u_{3,11}^{(n)} + c_{2332}^{(n)*} u_{3,22}^{(n)} + f_{231}^{(n)*} u_{4,11}^{(n)} + f_{232}^{(n)*} u_{4,22}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2}, \\ f_{231}^{(n)*} u_{3,11}^{(n)} + f_{232}^{(n)*} u_{3,22}^{(n)} - \mu_{11}^{(n)*} u_{4,11}^{(n)} - \mu_{22}^{(n)*} u_{4,22}^{(n)} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (5) дополняется уравнением Пуассона для вакуума $x_2 > h$

$$u_{4,11}^{(n)} + u_{4,22}^{(n)} = 0 \quad (6)$$

Граничные условия на поверхности раздела примут вид:

$$\theta_{23}^{(2)} = \theta_{23}^{(1)}, \quad u_3^{(2)} = u_3^{(1)}, \quad b_2^{(2)} = b_2^{(1)}, \quad u_4^{(2)} = u_4^{(1)} \quad (7)$$

На границе с вакуумом в случае магнито-открытой задачи:

$$x_2 = h : \theta_{23}^{(1)} = 0, \quad b_2^{(1)} = b_2^{(0)}, \quad u_4^{(1)} = u_4^{(0)} \quad (8)$$

На границе с вакуумом в случае магнито-закрытой задачи:

$$x_2 = h : \theta_{23}^{(1)} = 0, \quad u_4^{(1)} = u_4^{(0)} \quad (9)$$

Запишем граничные условия в компонентной форме: $x_2 = h$: Магнито-открытая задача:

$$\begin{aligned} c_{2332}^{(1)*} \cdot u_{3,2}^{(1)} + f_{232}^{(1)*} \cdot u_{4,2}^{(1)} = 0, \quad f_{232}^{(1)*} \cdot u_{3,2}^{(1)} - \mu_{22}^{(1)*} \cdot u_{4,2}^{(1)} = -\mu_0 \cdot u_{4,2}^{(0)}, \\ u_4^{(0)} = u_4^{(1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Магнито-закрытая задача:

$$\begin{aligned} c_{2332}^{(1)*} \cdot u_{3,2}^{(1)} + f_{232}^{(1)*} \cdot u_{4,2}^{(1)} = 0, \\ u_4^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} c_{2332}^{(2)*} \cdot u_{3,2}^{(2)} + f_{232}^{(2)*} \cdot u_{4,2}^{(2)} &= c_{2332}^{(1)*} \cdot u_{3,2}^{(1)} + f_{232}^{(1)*} \cdot u_{4,2}^{(1)}; u_3^{(2)} = u_3^{(1)}; \\ f_{232}^{(2)*} \cdot u_{3,2}^{(2)} - \mu_{22}^{(2)*} \cdot u_{4,2}^{(2)} &= f_{232}^{(1)*} \cdot u_{3,2}^{(1)} - \mu_{22}^{(1)*} \cdot u_{4,2}^{(1)}; u_4^{(2)} = u_4^{(1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Решения нашей краевой задачи будем искать в виде ($p = 3, 4$):

$$0 < x_2 \leq h : U_p^{(1)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^2 y_{pk}^{(1)} [c_k^{(1)} ch \sigma_k^{(1)} x_2 + c_{k+2}^{(1)} sh \sigma_k^{(1)} x_2]. \quad (13)$$

$$x_2 > h : U_4^{(0)}(\alpha, x_2) = c_1^{(0)} \exp(-\alpha x_2) \quad (14)$$

$$x_2 \leq 0 : U_p^{(1)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^2 y_{pk}^{(2)} [c_k^{(2)} \exp(\sigma_k^{(2)} x_2)]; \quad (15)$$

Характеристическое уравнение с учетом $\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \sigma^2 U$ для слоя и полупространства будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} -c_{1331}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} + c_{2332}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2 & -f_{231}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} + f_{232}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2} \\ -f_{231}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} + f_{232}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2} & \mu_{11}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} - \mu_{22}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2} \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Неизвестные $y_{pk}(k=1,2; p=3,4)$ являются нетривиальными решениями системы:

$$\begin{cases} (c_{1331}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} + c_{2332}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2) y_{3k}^{(n)} + (-f_{231}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} + f_{232}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2}) y_{4k}^{(n)} = 0, \\ (-f_{231}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} + f_{232}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2}) y_{3k}^{(n)} + (\mu_{11}^{(n)*} \alpha_i^{(n)2} - \mu_{22}^{(n)*} \sigma_i^{(n)2}) y_{4k}^{(n)} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Для отыскания неизвестных коэффициентов $c_k^{(n)}$ подставим представление решения (13)–(15) в граничные условия (7)–(12). Получим систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$A \cdot C = Q, \quad (18)$$

где $C = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, c_1^{(0)}\}$ — искомые коэффициенты,

$Q = \{Q_3, Q_4, Q_5, 0, 0, 0\}$ — компоненты вектора нагрузки.

Дисперсионное уравнение задачи имеет вид:

$$\det(A) = 0. \quad (19)$$

4. Начально-деформированное состояние. Начальное напряженное состояние в n -ой слое, входящем в структуру среды, определяется тензором Кирхгофа, компоненты которого с учетом свойств материала и предположений об однородности начальных механических воздействий принимают вид:

$$\begin{aligned} P_{11}^{(n)} &= c_{1111}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{1122}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{1133}^{(n)} S_{33}^{(n)} - f_{311}^{(n)} Y_3^{(n)}, \\ P_{22}^{(n)} &= c_{1122}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{2222}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{2233}^{(n)} S_{33}^{(n)} - f_{311}^{(n)} Y_3^{(n)}, \\ P_{33}^{(n)} &= c_{3311}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{2233}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{3333}^{(n)} S_{33}^{(n)} - f_{333}^{(n)} Y_3^{(n)}, \\ b_3^{(n)} &= f_{311}^{(n)} S_{11}^{(n)} + f_{311}^{(n)} S_{22}^{(n)} + f_{333}^{(n)} S_{33}^{(n)} + \mu_{33}^{(n)} Y_3^{(n)}. \end{aligned} \quad (20)$$

где $Y_3^{(n)}, b_k^{(n)}$ — компоненты вектора напряженности магнитного поля и вектора магнитной индукции в напряженно-деформированном состоянии. Для определения конкретного вида начального напряженного состояния достаточно задать любые четыре величины, остальные параметры будут найдены из уравнений (20). Компоненты тензора деформации Коши в начально деформированной конфигурации определяются выражением: $S_{ij}^{(n)} = 1/2\delta_{ij} \left(\nu_i^{(n)2} - 1 \right)$, коэффициенты $c_{lksp}^{(n)*}$, $f_{lsp}^{(n)*}$ и $\mu_{lp}^{(n)*}$ рассчитываются по формулам [3]: $c_{lksp}^{(n)*} = P_{lk}^{(n)}\delta_{ks} + \nu_k^{(n)}\nu_s^{(n)}c_{lksp}^{(n)}$, $f_{lsp}^{(n)*} = \nu_s^{(n)}f_{lsp}^{(n)}$, $\mu_{lp}^{(n)*} = \mu_0\nu_1^{(n)}\nu_2^{(n)}\nu_3^{(n)}\nu_l^{(n)-2}\delta_{lp} + \beta_{lp}^{(n)}$. Здесь $\beta_{kp}^{(n)}$ — константы магнитной восприимчивости, связанные с константами магнитной проницаемости соотношениями $\mu_{kp}^{(n)} = \mu_0\delta_{kp} + \beta_{kp}^{(n)}$.

Будем рассматривать следующие виды начального напряженного состояния магнитоупругой среды:

1. одноосное напряженное состояние: 1×1 : $\nu_1 = \nu$, $P_{11} = P$, $P_{22} = P_{33} = 0$; 1×2 : $\nu_2 = \nu$, $P_{22} = P$, $P_{11} = P_{33} = 0$; 1×3 : $\nu_3 = \nu$, $P_{33} = P$, $P_{11} = P_{22} = 0$;
2. двусосное напряженное состояние: 2×1 : $\nu_1 = \nu$, $P_{11} = 0$, $P_{22} = P_{33} = P$; 2×2 : $\nu_2 = \nu$, $P_{22} = 0$, $P_{11} = P_{33} = P$; 2×3 : $\nu_3 = \nu$, $P_{33} = 0$, $P_{22} = P_{11} = P$;
3. гидростатическое напряженное состояние 3×3 : $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, $P_{11} = P_{22} = P_{33} = P$;

5. Численные результаты. Ниже представлены графики фазовых скоростей для среды представляющей из себя слой жестко сцепленный с подстилающим его полупространством. Материал среды — CoFe_2O_4 .

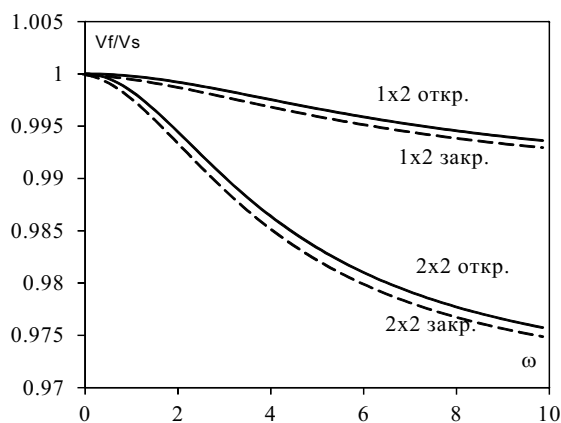


Рисунок 1

На рисунке 3 изображены скорости при НДС слоя ($\nu = 1.01$) и полупространства ($\nu = 0.99$) в режиме 2×2 осевой деформации среды. Из графика видно, что наибольшее изменение скоростей достигается в низкочастотной области, с ростом частоты появляются дополнительные моды. В случае магнито-закрытой задачи фазовые скорости волны уменьшаются по сравнению с магнито-открытой. Разница скоростей максимальна для первой моды и уменьшается при увеличении безмерной частоты κ .

На рисунке 1 изображены фазовые скорости волны Г-Б при начально деформированном состоянии слоя ($\nu = 1.01$), на рисунке 2 при НДС полупространства ($\nu = 0.99$) для разных граничных условий и осевом режиме деформации 1×2 . В этом режиме наблюдаются наибольшие отклонения фазовых скоростей от безнапряженного случая. Из графиков фазовых скоростей видно, что в случае магнито-закрытой задачи имеет место уменьшение фазовой скорости для всех представленных режимов осевой деформации.

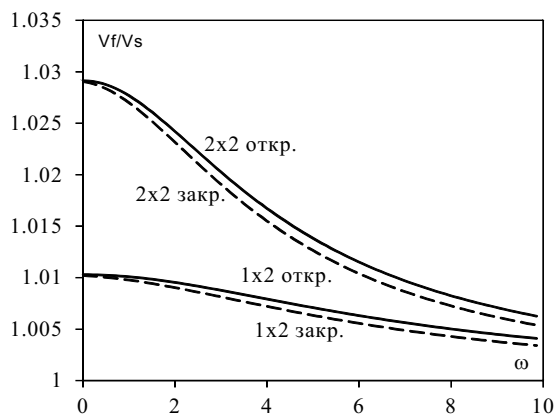


Рисунок 2

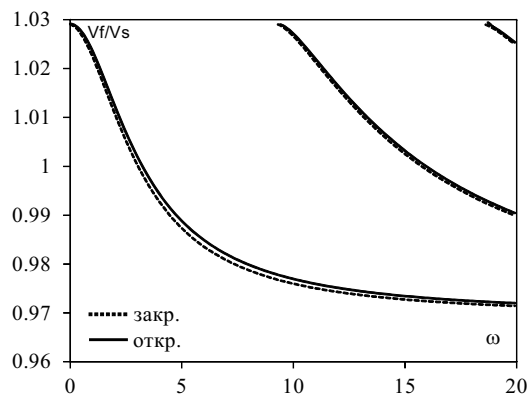


Рисунок 3

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Li P., Jin F., Qian Zh.* Propagation of the Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro-magneto-elastic half-space // *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2013. № 37. P. 17–23.
- [2] *Liu H., Kuang Z. B., Cai. Z. M.* Propagation of Bleustein–Gulyaev waves in a prestressed layered piezoelectric structure // *Ultrasonics*. 2003. № 41. P. 397–405.
- [3] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И., Шейдаков Д. Н.* Уравнения динамики предварительно напряженной магнитоупругой среды // *Вестник Южного научного центра*. 2013. Т. 9. Юбилейный выпуск. С. 20–28.
- [4] *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамика поверхностных неоднородных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 312 с.

Levi M. O., Mikhailova I. B. *B-G waves in prestressed magnetoelastic media.* The dynamic problem of Gulyaev–Blushtein waves in prestressed magnetoelastic media is considered. Green's functions with various types of axial deformations are investigated. The effects of different boundary conditions on the dynamics of magnetoelasticity layer and halfspace are studied. Phase velocity of layer and halfspace with different kinds of axial deformation are shown.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ ТЕКУЩУЮ ЖИДКОСТЬ

Лекомцев С. В., Бочкарёв С. А., Матвеев В. П.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Работа посвящена численному анализу собственных колебаний и устойчивости цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных неподвижной или текущей сжимаемой невязкой жидкостью, с учётом влияния различных силовых факторов, действующих на упругую конструкцию. Решение задачи осуществляется в двумерной (осесимметричной) и трёхмерной постановках с использованием метода конечных элементов. На примере круговых цилиндрических оболочек продемонстрирована тождественность результатов, полученных в рамках разных подходов. В качестве демонстрации возможностей пространственной реализации задачи представлено исследование гидроупругой устойчивости эллиптических цилиндрических оболочек.

1. Введение. На протяжении последних десятилетий взаимодействие цилиндрической, главным образом круговой, оболочки с жидкостью изучается интенсивно с использованием численных методов. Некоторые работы выполнены с применением конечно-элементного моделирования или смешанного подхода, где перемещения конструкции определяются с помощью метода конечных элементов (МКЭ), тогда как для жидкости используется метод граничных интегральных уравнений. Краткий обзор статей с различными численными реализациями приведён в [1]. За исключением работы [2], представленные решения являются двумерными. Большинство из них записано в рамках осесимметричных постановок, что ограничивает класс рассматриваемых задач телами вращения. Реальные конструкции, хотя часто и являются осесимметричными, подвергаются воздействию трёхмерных нагрузок, поэтому при взаимодействии оболочки с жидкостью, могут наблюдаться различные типы пространственных колебаний и неустойчивости. Аналитические решения для таких систем достаточно сложны и весьма ограничены. В данной работе устойчивость цилиндрических оболочек, содержащих текущую жидкость, исследуется с помощью осесимметричной и трёхмерной конечно-элементных реализаций. При аналогичных подходах к описанию жидкости продемонстрирована тождественность полученных результатов в случае различных линейных размеров, граничных условий и параметров внешней нагрузки. В качестве демонстрации возможностей пространственной реализации задачи представлено исследование влияния уровня заполнения жидкости на собственные частоты, формы колебаний и устойчивость тонкостенных круговых и эллиптических цилиндрических оболочек.

2. Разрешающие соотношения и численная реализация. Рассматривается тонкостенная изотропная оболочка длиной L произвольного поперечного сечения, взаимодействующая с установившимся внутренним потоком идеальной сжимаемой жидкости. Деформации, возникающие в оболочке в результате гидродинамического воздействия, являются малыми. Влияние пограничного слоя и

динамические явления на свободной поверхности в случае конструкций, частично заполненных жидкостью, не учитываются. Сжимаемая жидкость в рамках потенциальной теории описывается волновым уравнением, которое совместно с условием непроницаемости и соответствующими граничными условиями преобразуются с помощью метода Бубнова–Галёркина [3]. Деформации определяются в рамках теории тонких оболочек на основе гипотез Кирхгофа–Лява или уравнений теории упругости. В случае пространственной реализации предполагается, что криволинейная поверхность конструкции достаточно точно моделируется совокупностью плоских четырёхугольных элементов. Для математической постановки задачи динамики оболочки используется вариационный принцип возможных перемещений, учитывающий работу сил инерции, гидродинамическое давление, действующее на смоченной поверхности, и предварительное напряжённое недеформированное состояние, вызванное влиянием различных силовых факторов, действующих на оболочку.

Процедура метода конечных элементов позволяет получить связанную систему двух уравнений, которую в матричном виде можно представить следующим образом

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} + \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix} + \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_f \mathbf{C}_s \\ -\mathbf{C}_f & -\mathbf{C}_f^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_f \mathbf{A}_s \\ -\mathbf{A}_f & \mathbf{A}_f^c \end{bmatrix}.$$

Здесь: \mathbf{K}_s , \mathbf{K}_f — матрицы жёсткости оболочки и жидкости, соответственно; \mathbf{M}_s , \mathbf{M}_f — матрицы масс; \mathbf{K}_g — матрица геометрической жесткости; \mathbf{C}_s , \mathbf{C}_f — матрицы связи оболочки и жидкости; \mathbf{C}_f^c — матрица влияния сил Кориолиса в жидкости; \mathbf{A}_s , \mathbf{A}_f — матрицы жёсткости, обусловленные взаимодействием оболочки и жидкости; \mathbf{A}_f^c — матрица влияния центробежных сил в жидкости; ρ_f — плотность жидкости.

Представляя возмущенное движение оболочки и жидкости следующим образом: $\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i^* \omega t)$, $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \exp(i^* \omega t)$, где \mathbf{q} , \mathbf{f} — некоторые функции координат, $i^* = \sqrt{-1}$, а $\omega = \lambda_R + i^* \lambda_{im}$ — характеристический показатель, разрешающую систему уравнений (1) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{A}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \omega \mathbf{x}, \quad (2)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, $\mathbf{x} = \{ \mathbf{q} \ \mathbf{f} \ \dot{\mathbf{q}} \ \dot{\mathbf{f}} \}^T$. Вычисление собственных значений системы (2) осуществляется методом QR-преобразования для двумерных задач или Ланцоша — для пространственных.

Задача исследования динамики поведения нагруженных оболочек с протекающей внутри них жидкостью сводится к:

- решению статической задачи $\mathbf{KU} = \mathbf{P}_0$, из которой определяются усилия и моменты, вызванные приложенной нагрузкой;
- решению связанной системы уравнений (2) с учётом предварительного напряжённого недеформируемого состояния, обусловленного влиянием статических силовых факторов, действующих на оболочку.

3. Численные примеры. В первом примере рассмотрена круговая цилиндрическая оболочка, свободно опертая на обоих краях, взаимодействующая с внутренним потоком жидкости. При анализе полученных результатов используется безразмерная скорость $\Lambda = U/\xi$. Здесь: U — скорость потока жидкости; $\xi = [E/\rho_s(1-\nu^2)]^{0.5}$; E — модуль упругости; ρ_s — плотность материала оболочки; ν — коэффициент Пуассона. Из результатов, представленных на рисунке 1, *a* следует, что для оболочек полностью заполненных жидкостью, увеличение длины конструкции L приводит к заметному снижению критических скоростей дивергенции Λ_D . Данная зависимость носит немонотонный характер, обусловленный сменной формы колебаний, по которой осуществляется потеря устойчивости. В этом случае происходит резкий излом кривой критических скоростей, после которого вместо локального участка возрастания следует участок убывания. На рисунке 1 символами показаны результаты, полученные в рамках двумерной постановки на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов. При использовании такого подхода критические скорости потери устойчивости определяются для различных комбинаций волн в окружном и продольном направлениях. В трёхмерной постановке задаче спектр собственных частот расположен в произвольном порядке, и для корректного сопоставления данных необходимо построение форм колебаний. Однако такой подход позволяет анализировать системы, где поток жидкости занимает только часть внутреннего объёма оболочки. Численными экспериментами установлено (рисунок 1, *a*), что уменьшение уровня заполнения $k = V_f/V_i$ (V_f и V_i — объёмы жидкости и внутренней полости оболочки, соответственно) приводит к повышению критических скоростей течения жидкости, но не оказывает влияния на вид потери устойчивости.

На рисунке 1, *б* приведены критические скорости дивергенции для оболочек, содержащих текущую жидкость, и подвергающихся дополнительному воздействию внешнего или внутреннего статического давления. Из представленных данных следует, что увеличение нагрузки приводит к снижению или возрастанию как собственных частот колебаний, так и критических скоростей потери устойчивости оболочек. При этом, форма потери устойчивости может зависеть от величины и направления действия давления. Здесь и далее $P < 0$ соответствует внешнему давлению, а $P > 0$ — внутреннему.

На примере круговых цилиндрических оболочек оценено влияние статической нагрузки, появляющейся из-за повышения давления в жидкости, которое необходимо для преодоления сил вязкого сопротивления в замкнутом канале, а также сил трения на боковой поверхности оболочки. Для вычисления соответствующих осевого усилия и нормального давления в работе используется вариант соотношений, полученный в [4], на основе усреднённых по времени уравнений Навье–Стокса. На рисунке 1, *б* приведены критические скорости потери устойчивости

нагруженных оболочек, полностью и частично заполненных текущей жидкостью, с учётом стационарных сил вязкого сопротивления. В этом случае конструкция находится под действием неоднородных в окружном и продольном направлениях условий нагружения. Наравне с уровнем заполнения жидкостью, уменьшение которого приводит к повышению критических скоростей, преобладающим фактором, значительно меняющим границу гидроупругой устойчивости таких систем, является величина внешнего давления.

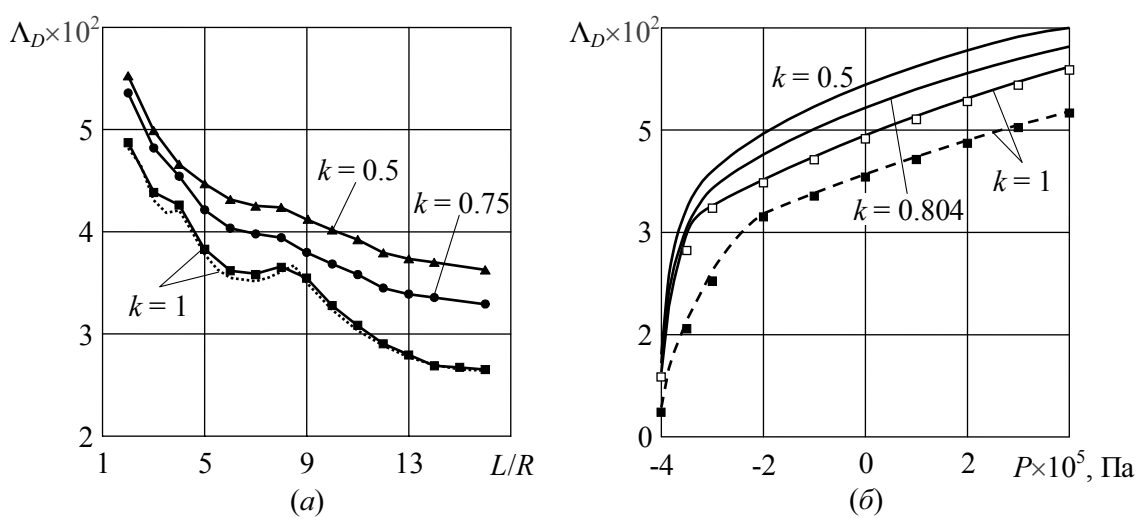


Рисунок 1 – Безразмерные критические скорости дивергенции Λ_D круговых цилиндрических оболочек: (а) — в зависимости от отношения L/R ; (б) — находящихся под действием давления: сплошные линии — с учётом стационарных сил вязкого сопротивления, пунктирная линия — без учёта, символы — двумерная постановка

На рисунке 1 для оболочек полностью заполненных текущей жидкостью приведено сравнение результатов, полученных в рамках двумерной и трёхмерной постановок. Представленные данные иллюстрируют тождественность найденных критических скоростей в случае различных линейных размеров и параметров внешней нагрузки. В качестве демонстрации возможностей пространственной реализации задачи рассмотрена устойчивость некруговых, в частности эллиптических, оболочек, взаимодействующих с внутренним потоком жидкости. Проведённые численные эксперименты демонстрируют, что граница гидроупругой устойчивости этих конструкций существенно зависит от отношения полуосей эллипса $\alpha = R_z/R_y$ (рисунок 2). Характерным для таких систем является достаточно монотонное снижение критических скоростей, которое имеет место при $L/R \geq 6$, приводящее в дальнейшем к существенному различию в критических скоростях течения жидкости между оболочками с эллиптическим и круговым поперечными сечениями. Это отличие обусловлено не только разницей в объёмах жидкости, но и, главным образом, особенностями геометрии конструкций некругового профиля. Для достаточно «растянутых» ($\alpha > 1.25$) оболочек возможны ситуации, когда критические скорости дивергенции фактически не зависят от уровня заполнения, например при $k > 0.5$ (рисунок 2, б).

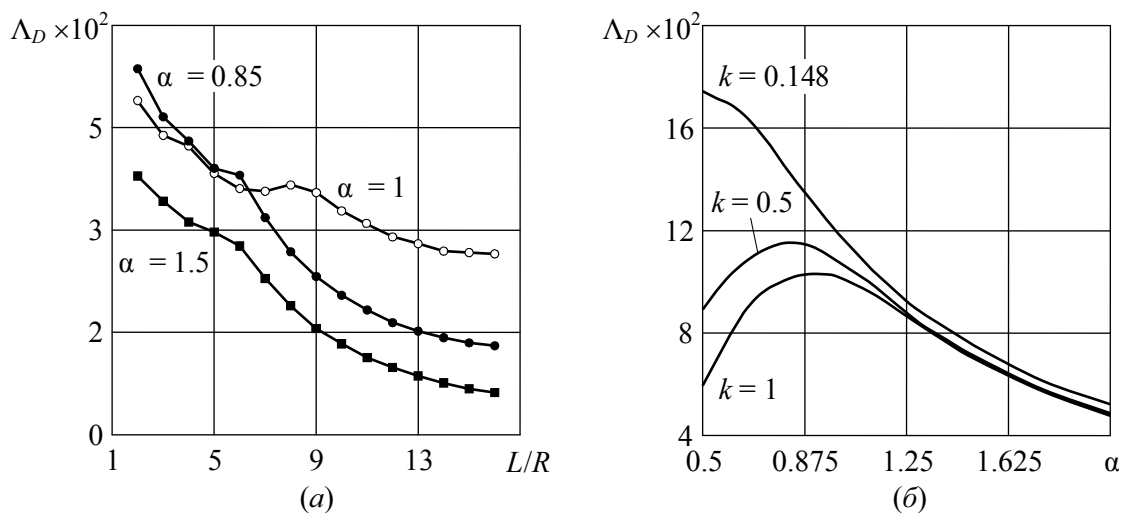


Рисунок 2 – Безразмерные критические скорости дивергенции Λ_D эллиптических цилиндрических оболочек в зависимости от: (а) — отношения L/R при $k = 1$; (б) — отношения полуосей эллипса α при разном уровне жидкости

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№12-01-00323-а и 12-01-31138) и программы УрО РАН (проект №12-С-1-1015).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Bochkarev S. A., Matveenko V. P.* Natural vibrations and stability of shells of revolution interacting with an internal fluid flow // *J. Sound Vib.* 2011. № 13. P. 3084–3101.
- [2] *Firouz-Abadi R. D., Noorian M. A., Haddadpour H.* A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.* 2010. № 5. P. 747–763.
- [3] *Бочкарёв С. А., Матвеевко В. П.* Анализ устойчивости нагруженных коаксиальных цилиндрических оболочек с внутренним течением жидкости // *Изв. РАН. МТТ.* 2010. № 6. С. 29–45.
- [4] *Païdoussis M. P., Misra A. K., Chan S. P.* Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *J. Applied Mech.* 1985. № 2. P. 389–396.

Lekomtsev S. V., Bochkarev S. A., Matveenko V. P. *Numerical modeling of stability of shells of revolution, containing flowing fluid.* The work deals with the numerical analysis of natural vibrations and stability of cylindrical shells fully or partially filled with quiescent or flowing compressible inviscid fluid, taking into account the influence of different forces acting on the elastic structure. The problem is solved in 2D (axisymmetric) and 3D formulations using the finite element method. Several numerical examples from circular cylindrical shells have been considered to demonstrate the identity of results obtained with the different approaches. To demonstrate the feasibility of three-dimensional solution of the problem, the hydroelastic stability of elliptical cylindrical shells have been analyzed.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ОБРАЗЦА ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПРИ СЖАТИИ ЖЕСТКИМИ ШТАМПАМИ

Локшина Л. Я., Костандов Ю. А.

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь

При рассмотрении напряженно-деформированного состояния (НДС) образца горной породы при одноосном сжатии жесткими штампами получено уравнение для расчета предела прочности материала, учитывающее внутреннее и внешнее трение. Найден вид траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН). Получены зависимости предельного напряжения и углов наклона ТМЭКН от внутреннего трения и контактного касательного напряжения, обусловленного внешним трением.

Предел прочности образцов горной породы при одноосном сжатии является одним из основных параметров оценки безопасного состояния подземных сооружений и возможности разрушения горных массивов исполнительными органами горных машин.

Авторами ранее получено уравнение состояния материала образца горной породы при сжатии жесткими штампами с учетом только внутреннего трения материала [1]. В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние образца горной породы при одноосном сжатии между жесткими штампами с учетом внутреннего трения материала и контактного трения на поверхности приложения нагрузки в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений [2]. Под понятием эффективного касательного напряжения τ_{ef} понимается активное касательное напряжение τ_α за вычетом фрикционной составляющей.

Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона

$$\tau_{ef} = \tau_\alpha - \mu\sigma_\alpha \leq k, \quad (1)$$

где τ_{ef} — эффективное касательное напряжение на ТМЭКН, τ_α — активное касательное напряжение на ТМЭКН, $\mu = tg\rho$ — коэффициент внутреннего трения материала, ρ — угол его внутреннего трения, σ_α — нормальное напряжение на ТМЭКН, k — предельная сопротивляемость материала сдвигу. Критерий (1) означает, что при $\tau_{ef} = k$ происходит разрушение, а при $\tau_{ef} < k$ материал находится в упругом состоянии.

Рассмотрим образец горной породы шириной $2a$ и высотой h при одноосном сжатии вдоль оси ОУ между жесткими штампами силой P , как показано на рисунке 1, при наличии контактного трения, которое обуславливает действие на контактирующих со штампами поверхностях образца касательных напряжений τ_k . Для аналогичной задачи авторами ранее получены уравнения состояния материала с учетом внутреннего трения материала и касательного напряжения, обусловленного внешним трением [3]. Однако при этом образец сжимался между жесткими

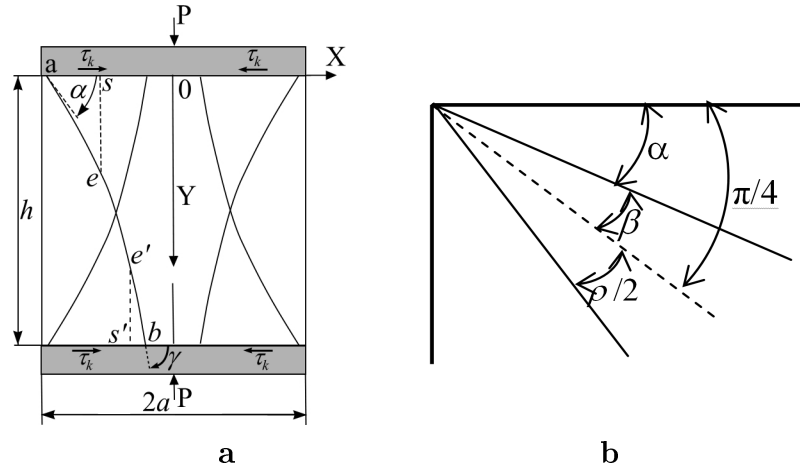


Рисунок 1 – Схемы расположения ТМЭКН в образце горной породы (а) и углов в точке a образца (б) при его одноосном сжатии

плитами пресса и полагалось, что во всех точках образца напряжение сжатия $\sigma_y = const$. В данной работе напряжение σ_y , действующее на контактирующих со штампами поверхностях образца, рассматривается как результат воздействия на них штампов и потому зависит от координаты x : $\sigma_y = \sigma_y(x)$.

Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично относительно его продольной оси, будем рассматривать только левую половину образца. Проведем ТМЭКН ab в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках a и b (рисунок 1а). Из условия равновесия треугольников aes и bes' , формируемых ТМЭКН ab , найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона α и γ к оси OX касательных к ТМЭКН в точках a и b соответственно:

$$\sigma_\alpha = -\frac{\sigma_{xв} - \sigma_{yв}}{2} + \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha, \quad (2)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha, \quad (3)$$

где τ_k — касательное напряжение от внешнего трения, $\sigma_{yв}$ и $\sigma_{xв}$ — нормальные напряжения в точке a , индекс «в» обозначает верхнюю контактирующую поверхность образца.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим уравнение для эффективного касательного напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{ef} = & \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \\ & - \mu \left(\frac{\sigma_{xв} - \sigma_{yв}}{2} - \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \cos 2\alpha + \tau_k \sin 2\alpha \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Получим, по аналогии, для треугольника bes' :

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_{xн} + \sigma_{yн}}{2} - \frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma, \quad (5)$$

$$\tau_\gamma = -\frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma,$$

$$\tau_{ef} = -\frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma - \mu \left(\frac{\sigma_{xn} + \sigma_{yn}}{2} - \frac{\sigma_{xn} - \sigma_{yn}}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma \right), \quad (6)$$

где σ_{yn} и σ_{xn} — нормальные напряжения в точке b , индекс «н» обозначает нижнюю контактирующую поверхность образца.

Дифференцируя уравнение (2) по α , получим $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha$. Подставляя в это уравнение критерий разрушения Кулона (1), получим важное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha). \quad (7)$$

Действуя по аналогии, получим для нижнего треугольника bes' :

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma). \quad (8)$$

Каждое из уравнений (7) и (8) является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Интегрируя (7) и полагая, что условие разрушения материала $\tau_{ef} = k$ выполняется в точке a и достигается в треугольнике aes раньше, чем в треугольнике bes' , получим

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma) - \ln(k + \mu\sigma_\alpha) = -2\mu(\gamma - \alpha). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) необходимо найти углы α и γ . Для нахождения угла α , при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение, приравняем производную $\frac{\partial\tau_{ef}}{\partial\alpha}$ нулю и получим:

$$tg2\alpha = \frac{1 + \mu tg2\beta}{tg2\beta - \mu},$$

где ρ — угол внутреннего трения материала, $\mu = tg\rho$, $tg2\beta = 2\tau_k/(\sigma_{xв} + \sigma_{yв})$, β — угол поворота ТМЭКН от внешнего трения. Следовательно (см. рисунок 1б), $\alpha = \pi/4 + \rho/2 - \beta$. По аналогии найдем угол γ для нижнего треугольника bes' :

$$tg2\gamma = ctg(2\theta - \rho),$$

где $tg2\theta = 2\tau_k/(\sigma_{xn} - \sigma_{yn})$, θ — угол поворота ТМЭКН от внешнего трения. Следовательно (см. рисунок 1б), $\gamma = \pi/4 + \rho/2 - \theta$.

Из анализа выражений для углов β и θ следует, что $|\beta| < |\theta|$ и $\theta < 0$, т.к. $\sigma_{xn} < \sigma_{yn}$. Следовательно $\alpha < \gamma$, что означает, что учет касательных напряжений, вызванных контактным трением, приводит к уменьшению поверхности разрушения и, следовательно, к увеличению сопротивляемости материала.

Поскольку $(\gamma - \alpha) = \beta - \theta$, выражение (9) можно записать в виде

$$\frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = \exp [2\mu(\theta - \beta)]. \quad (10)$$

Так как $\sigma_x = 0$ в точке a , из уравнений (2) и (4) следует, что в точке $x = a$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{yB}}{2} (1 + \cos 2\alpha) - \tau_k \sin 2\alpha; \quad (11)$$

$$\tau_{ef} = k = \frac{\sigma_{yB}}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \mu \left(\frac{\sigma_{yB}}{2} + \frac{\sigma_{yB}}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \right), \quad (12)$$

при этом $\beta = \arctg(2\tau_k/\sigma_{yB})/2$.

Для треугольника bes' найдем τ_{ef} из (6):

$$\tau_{ef} = -\mu \frac{\sigma_{xH} + \sigma_{yH}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \mu^2) [(\sigma_{xH} - \sigma_{yH})^2 + 4\tau_k^2]}. \quad (13)$$

Определим σ_{xH} в точке b из выражения (13):

$$\sigma_{xH} = \sigma_{yH} + \frac{2(\tau_{ef} + \mu\sigma_{yH})}{\cos \rho} \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b^2} \right). \quad (14)$$

где $b = \tau_k / (\tau_{ef} + \mu\sigma_{yH})$.

Найдем σ_γ в нижнем треугольнике bes' из выражения (5) с учетом (14):

$$\sigma_\gamma = \sigma_{yH} \left(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b^2} \right) - \cos \rho \tau_{ef} \sqrt{1 - b^2}. \quad (15)$$

Подставляя σ_α и σ_γ из (11) и (15) в (10), с учетом (12), получим

$$b^2 [I^2 + (2\tau_k \sin \rho)^2] - 4\tau_k b I + 4\tau_k^2 \cos^2 \rho = 0, \quad (16)$$

где $I = (2k + \mu\sigma_{yB} - \mu \sin \rho \sqrt{\sigma_{yB}^2 + 4\tau_k^2}) \exp 2\mu(\theta - \beta)$.

Уравнение (16) решается относительно b численным методом. Для каждого конкретного случая определяются значения σ_{yB} , σ_{yH} , τ_k , и β , а значения ρ , μ и k находятся из таблиц свойств материалов и подставляются в уравнение (15). После вычисления b определяются τ_{ef} и θ . Знание этих величин позволяет полностью определить вид траектории разрушения материала и углы наклона касательных к ТМЭКН.

Поскольку на горизонтальную поверхность образца действует жесткий штамп, то распределение нагрузки под штампом определяется из решения для контактной задачи теории упругости [4]:

$$\sigma_y(x) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (17)$$

Из (17) очевидно, что $\sigma_y(x)$ неограниченно возрастает при подходе к границам участка контакта $x = \pm a$. Однако в действительности реальный профиль штампа не имеет в сечении прямых углов, а имеет углы, закругленные с малым, но конечным радиусом. С учетом конечности величины кривизны закраин штампа распределение нагрузки под штампом определяется выражением

$$\begin{aligned} \sigma_y(x) = & \frac{2P(\pi - 2\varphi_0) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \ln \left| \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \right|}{\pi a (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)} + \\ & + \frac{2P \sin \varphi_0 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{(\varphi_1 + \varphi_0)}{2} \operatorname{tg} \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)}{2} \right|}{\pi a (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\sin \varphi_1 = \frac{x}{a}$, $\sin \varphi_0 = \frac{a_1}{a}$, $a = a_1 + r$, r — радиус закраин штампа.

Для установления распределения нагрузки на контактирующих поверхностях образца воспользуемся выражением (18). Для верхней поверхности в него подставим $\sin \varphi_1 = \frac{x_{\text{в}}}{a}$, $x_{\text{в}} = a_1 - \delta$, где $x_{\text{в}}$ — координата точки a , δ — малый параметр, значение которого задается при решении конкретной задачи. Для нижней поверхности $\sin \varphi_2 = \frac{x_{\text{н}}}{a}$.

Подставляя в (16) $\sigma_{\text{ув}}$ и $\sigma_{\text{ун}}$, определенные по формуле (18), можно найти τ_{ef} , характеризующее предельное состояние образца, и углы наклона касательной к ТМЭКН α и γ . Поскольку при разрушении на ТМЭКН $\tau_{ef} = k$, это, в свою очередь, дает возможность определить для каждой конкретной задачи значения координат $x_{\text{в}}$ точки a и $x_{\text{н}}$ точки b .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Локшина Л. Я. Параметры предельного состояния образца горной породы при одноосном сжатии жесткими штампами // Физико-технические проблемы горного производства. 2012. №15. С. 36–45.
- [2] Васильев Л. М. Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями // Геотехническая механика: Межведомств. сб. науч. работ. Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. Вып. 42. С. 73–80.
- [3] Локшина Л. Я. Исследование предельного состояния деформируемого тела с учетом внутреннего и внешнего трения // Современные проблемы механики сплошной среды: междунар. науч. конф. 3–7 декабря 2011 г.: труды конф. Ростов-на-Дону: Южный федеральный ун-т, 2011. С. 901–905.
- [4] Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 272 с.

Lokshina L. Ya., Kostandov Yu. A. *The influence of external and internal friction on the limiting state of the rock specimen at compression by rigid stamps.* The equation for calculation of material strength limit taking into account an internal and external friction by consideration of the stress-strain state of rock specimen at the monoaxial compression by rigid stamps is obtained. The view of a trajectory of maximum effective tangential stresses (TMETS) is found. Dependences of limiting stress and slope angles of TMETS from internal friction and contact tangential stress caused by an external friction are received.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОРАЗМЕРНЫХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

Лыжов В. А.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Проведено сравнение динамических характеристик тонких сегнетоэлектрических пленок с различными наборами материальных параметров. В качестве пленки рассматривается эпитаксиальный слой твердого раствора $\text{Ba}_{0.8}\text{Sr}_{0.2}\text{TiO}_3$ (BST08), выращенный на подложке MgO. Используются материальные константы, полученные из феноменологической теории твердых растворов, из феноменологической теории тонких сегнетоэлектрических пленок и из линеаризованной около начального напряженного состояния теории электроупругости. Начальные деформации в пленке задаются исходя из параметров решетки BST08 для объемного образца и пленки. Проведено сравнение областей существования и скоростей распространения поверхностных акустических волн релеевского типа для различных моделей.

Для описания поведения твердых растворов и тонких сегнетоэлектрических пленок в зависимости от различных параметров — концентрации, температуры, деформации несоответствия — успешно применяется феноменологическая теория Ландау [1–3], основной задачей которой является получение термодинамического потенциала. Одной из важных характеристик тонкой пленки является величина деформации несоответствия (misfit strain) в плоскости подложки. Значение деформации несоответствия определяется экспериментально с помощью рентгеноструктурного анализа. При конкретизации вида термодинамического потенциала могут быть построены определяющие соотношения и получены соответствующие материальные константы для сегнетоэлектрической пленки в некотором заданном состоянии. С другой стороны, фиксированные деформации среды для сегнетоэлектрической пленки позволяют использовать линеаризованную около некоторого конечного начального деформированного состояния теорию электроупругости [4, 5]. В случае сложного преднапряженного состояния среды определяющие соотношения также могут быть построены с помощью термодинамического потенциала Гельмгольца. В данной работе результаты феноменологической теории применены в целях моделирования динамического поведения тонких сегнетоэлектрических пленок. Проведено сравнение результатов расчета дисперсионных характеристик для констант из феноменологической теории и для констант, рассчитанных исходя из линеаризованной теории динамики преднапряженных электроупругих сред при конкретизации вида начального напряженного состояния.

1. Математическая модель тонкой пленки. Рассматривается задача о колебаниях тонкой сегнетоэлектрической пленки $\text{Ba}_{0.8}\text{Sr}_{0.2}\text{TiO}_3$ (BST08) на поверхности диэлектрического полупространства MgO. При нормальной температуре ($T = 300^\circ\text{K}$) пленка BST08 находится в тетрагональной фазе, спонтанная поляризация равна $p_0 = p_3 = 0.23$ Кл/м² [2].

Уравнения движения электроупругой среды в квазистатическом приближении при отсутствии объемных сил имеют вид:

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0. \quad (2)$$

индексом (n) отмечены значения величин в подложке (1) и пленке (2) , Θ — тензор деформаций, \mathbf{D} — электрическая индукция, \mathbf{u} — смещения точек среды, ρ — плотность. Линеаризованные определяющие соотношения для электроупругой среды могут быть представлены в форме:

$$\Theta_{lk}^{(2)} = C_{lksp}^{*(2)} \frac{\partial u_s^{(2)}}{\partial x_p} + e_{lkp}^{*(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_p}, \quad (3)$$

$$D_l^{(2)} = e_{lsp}^{** (2)} \frac{\partial u_s^{(2)}}{\partial x_p} + \varepsilon_{lp}^{*(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_p}, \quad (4)$$

где φ — электрический потенциал.

Коэффициенты C_{lksp}^* , e_{lkp}^* , e_{lsp}^{**} , ε_{lp}^* могут быть получены из феноменологической теории путем дифференцирования термодинамического потенциала Гельмгольца F :

$$C_{lksp}^* = \frac{\partial F}{\partial S_{lk} \partial S_{sp}}, \quad e_{lkp}^* = \frac{\partial F}{\partial S_{lk} \partial E_p}, \quad e_{lsp}^{**} = \frac{\partial F}{\partial E_l \partial S_{sp}}, \quad \varepsilon_{lp}^* = \frac{\partial F}{\partial E_l \partial E_p}. \quad (5)$$

Здесь S_{lk} — деформации пленки, \mathbf{E} — напряженность электрического поля.

В случае линеаризации около однородного начального напряженного состояния, связь между коэффициентами C_{lksp}^* , e_{lkp}^* , e_{lsp}^{**} , ε_{lp}^* и материальными константами среды в естественной конфигурации имеет вид [4]:

$$C_{lksp}^* = P_{lp} \delta_{ks} + \nu_k \nu_s c_{lksp}, \quad e_{lkp}^* = \nu_k e_{plk}, \quad e_{lsp}^{**} = \nu_s e_{lsp}, \quad \varepsilon_{lp}^* = -\frac{\nu_1 \nu_2 \nu_3}{\nu_l^2} \varepsilon_0 \delta_{lp} - \varepsilon_{lp}, \quad (6)$$

где P_{lp} — компоненты тензора напряжений в НДС, δ_{ks} — символ Кронекера, $\nu_i = 1 + \delta_i$, δ_i — относительное удлинение параметра элементарной ячейки в направлении оси x_i . В (6) повторяющиеся индексы не являются немymi, поэтому суммирование в данном случае отсутствует. Параметры P_{lp} являются решениями системы уравнений (1)–(2) для начального деформированного состояния, которое определяется механическими деформациями и спонтанной поляризацией пленки.

Для определения параметров напряженного состояния необходимо использовать некоторую априорную информацию. В качестве такой информации выбраны значения деформаций среды, определенные через изменения параметров решетки пленки по сравнению с объемным образцом, и электрической индукции, величину которой можно считать примерно равной поляризации $p_3 = 0.23$ Кл/м², так как значение диэлектрической восприимчивости для BST много больше единицы. Параметры решетки a и c для объемного образца BST08 и пленки BST08/MgO приведены в таблице 1, параметры решетки для твердого раствора BST08 рассчитаны по правилу Вегарда.

2. Результаты численного эксперимента. Пленка на подложке моделировалась преднапряженным пьезоэлектрическим слоем на поверхности диэлектрического полупространства. Механические напряжения на поверхности слоя предполагались равными нулю, на границе «пьезоэлектрик–диэлектрик» накладывались условия непрерывности механических смещений и напряжений, нормальной компоненты электрической индукции и потенциала. На бесконечности учитывались условия излучения Зоммерфельда.

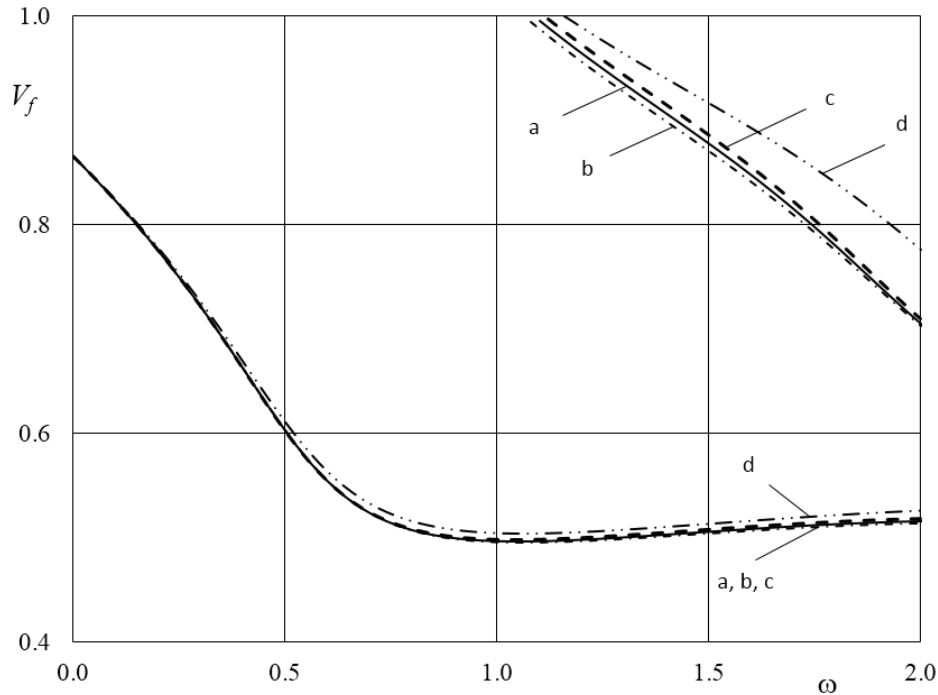


Рисунок 1 – Зависимость фазовых скоростей ПАВ релеевского типа от безразмерной частоты для различных наборов материальных параметров

Исследовались особенности возбуждения ПАВ при помощи системы планарных электродов для различных моделей — феноменологической теории и линеаризованной теории электроупругости для НДС. Задача рассматривалась в плоской постановке — предполагалось, что свойства среды не меняются вдоль электрода. Исследовались области существования и фазовые скорости распространяющихся поверхностных акустических волн релеевского типа.

Таблица 1 – Параметры решетки для компонент ВТ, СТ и твердого раствора BST08, а также для тонких пленок BST08 на подложке MgO

Материал	a , ангстрем	c , ангстрем	c/a
BaTiO ₃ [6]	3.992	4.030	1.010
SrTiO ₃ [6]	3.905	3.907	1.001
BST08 (объемный образец)	3.975	4.005	1.008
BST08/MgO ($h > 105\text{nm}$) [7]	3.955	4.035	1.020
BST08/MgO ($h < 40\text{nm}$) [7]	4.000	3.990	0.998

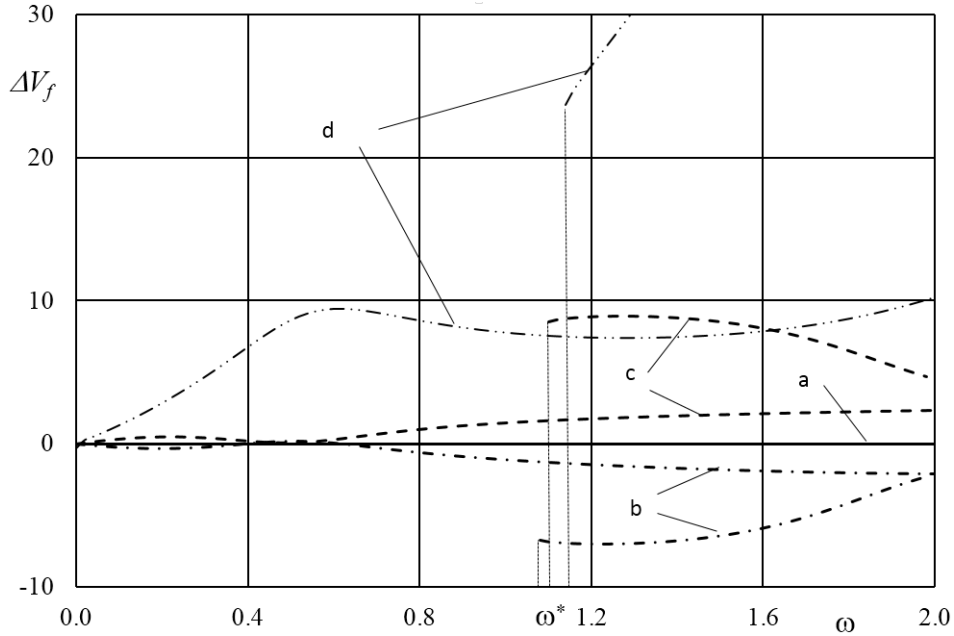


Рисунок 2 – Зависимость разности фазовых скоростей ПАВ $\Delta V_f = (V_f - V_f^{(a)}) \cdot 1000$ от безразмерной частоты для различных наборов материальных параметров.

На рисунке 1 приведена зависимость фазовых скоростей ПАВ от безразмерной частоты ω для различных наборов материальных параметров: а) объемный образец BST08 на подложке MgO; б) пленка BST08/MgO, $h < 40nm$ (линеаризация около НДС); в) пленка BST08/MgO, $h > 105nm$ (линеаризация около НДС); д) пленка BST08/MgO (феноменологическая теория с учетом misfit strain). Константы для объемного образца твердого раствора BST08 в естественном состоянии были взяты из [2].

На рисунке 2 представлена разность фазовых скоростей $\Delta V_f = (V_f - V_f^{(a)}) \cdot 1000$, обозначения соответствуют предыдущему рисунку. Из рисунков видно, что результаты расчетов по феноменологической теории значительно отличаются от результатов для твердого раствора BST08 с учетом НДС. При наличии сжимающих в плоскости подложки напряжений (в, д) фазовая скорость ПАВ увеличивается, при наличии растягивающих напряжений (б) — уменьшается. В области низких частот эффект изменения скорости незначителен, но с ростом частоты изменение скорости становится существенным. Точка выхода второй моды ω^* смещается в сторону высоких частот по мере увеличения сжимающих напряжений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод об адекватности предложенных в работе подходов к описанию динамических процессов в пьезоэлектрических структурах с покрытием из тонких сегнетоэлектрических пленок. Изменение динамических характеристик в обоих моделях под действием сжимающих напряжений качественно совпадает. Окончательно выбор расчетной модели можно будет сделать только после проверки на наилучшее совпадение с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-08-31219).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Широков В. Б., Юзюк Ю. И., Леманов В. В. Феноменологическое описание тонких пленок SrTiO_3 // ФТТ. 2009. Т. 51. С. 972–978.
- [2] Широков В. Б., Юзюк Ю. И., Калинин В. В., Леманов В. В. Материальные константы твердых растворов $(\text{Ba}, \text{Sr})\text{TiO}_3$ // ФТТ. 2013. Т. 55. № 4. С. 709–714.
- [3] Широков В. Б. Исследование устойчивости феноменологической модели твердых растворов $\text{Ba}_{1-x}\text{Sr}_x\text{TiO}_3$ // Вестник ЮНЦ РАН. 2012. Т. 8. № 2. С. 3–8.
- [4] Белянкова Т. И., Калинин В. В., Лыжов В. А. Связанная смешанная задача для системы электродов на поверхности преднапряженного электроупругого структурно неоднородного полупространства // ПММ. 2010. Т. 4. № 6. С. 898–910.
- [5] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 276 с.
- [6] Белянкова Т. И., Лыжов В. А. Некоторые особенности динамики слабо неоднородных пьезоактивных структур // Вестник ЮНЦ РАН. 2010. Т. 6. № 2. С. 3–10.
- [7] Головки Ю. И., Мухортов В. М., Юзюк Ю. И., Janolin P. E., Dkhi V. Структурные фазовые переходы в наноразмерных сегнетоэлектрических пленках титаната бария-стронция // ФТТ. 2008. Т. 50, № 3. С. 467–471.

Lyzhov V. A. *Dynamic properties of ferroelectric thin films.* A comparison of the dynamic characteristics of ferroelectric thin films with different sets of material parameters. Film it's a solid solution of an epitaxial layer of $\text{Ba}_x\text{Sr}_{1-x}\text{TiO}_3$ (BST08), grown on a substrate MgO. Apply the material constants obtained from the phenomenological theory of solid solution, of the phenomenological theory of ferroelectric thin films and of linearized theory of electrodynamics for initial stress state. The initial strain in the film are set on the basis of the lattice parameters for the bulk sample BST08 and thin film. A comparison of the regions of existence and velocity of propagation surface acoustic waves of Rayleigh type for different models.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА АВТОФРЕТИРОВАНИЯ И ПОСЛЕДУЮЩЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

Львов Г. И., Огороков В. А.

*Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»*

В статье рассматривается вопрос о влиянии повреждаемости материала и эффекта Баушингера на автофретирование и последующую механическую обработку. Представлены определяющие соотношения упругопластического деформирования с учетом повреждаемости, полученные на основе континуальной механики повреждаемости. Сформулирована краевая задача для толстостенного цилиндра в условиях плоской деформации.

1. Введение. Автофретирование широко используется в целях повышения прочности, а также продления ресурса при малоцикловой усталости для работающих при высоких давлениях компонент конструкций, используемых в самых различных сферах индустрии (элементы топливных систем в дизельных двигателях, элементы станков гидроабразивной резки, баллоны для содержания сжиженного газа, емкости для хранения химических веществ под давлением).

Идея автофретирования состоит в том, что элемент конструкции предварительно нагружают давлением выше рабочего для того, чтобы он деформировался пластически, и затем, после разгрузки в нем появляются остаточные сжимающие напряжения, которые суммируются с растягивающими напряжениями от рабочего давления и как результат снижается уровень суммарных напряжений.

Одной из важных проблем автофретирования является проявление эффекта Баушингера, который вызывает появление вторичных пластических деформаций при разгрузке, и как следствие ведет к уменьшению благоприятных остаточных напряжений [1]. Еще одним неблагоприятным явлением для автофретирования является разупрочнение материала, которое возникает вследствие увеличения зоны пластических деформаций и также ведет к уменьшению остаточных напряжений. Для моделирования этого эффекта в работе используется континуальная механика повреждаемости.

После того, как основной технологический процесс автофретирования завершен, может возникнуть необходимость в последующей механической обработке из-за того, что после пластического деформирования начальный размер заготовки изменяется. Таким образом, снятие материала с поверхности автофретированного компонента приведет к перераспределению остаточных напряжений, поэтому исследование остаточного напряженно-деформированного состояния после процедуры снятия материала также представляет большой интерес.

2. Определяющие соотношения для упругопластического деформирования материала с учетом повреждаемости. Для моделирования эффекта разупрочнения материала, возникающего из-за значительных пластических деформаций во время процесса автофретирования, использовалась континуальная

механика изотропной повреждаемости. Основные феноменологические модели повреждаемости, которая возникает вследствие упругопластического деформирования материала, а также методы измерения и идентификация параметров повреждаемости представлены в [2]. Согласно принципу эквивалентных деформаций, любое определяющее уравнение для поврежденного материала может быть заменено на такое же для неповрежденного материала путем введения эффективного тензора напряжений. Эффективный тензор напряжений вводится в соответствии с концепцией эффективных напряжений:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}, \quad (1)$$

где D — скалярный параметр повреждаемости, меняющийся от 0 до 1.

Для того, чтобы учитывать эффект Баушингера, необходимо выбирать модели пластичности со смещающейся поверхностью пластичности. В работе рассматривается модель с комбинированным упрочнением. Используя критерий текучести Мизеса поверхность пластичности с учетом концепции эффективных напряжений запишется в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}, X_{ij}^d, R) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{ij}^d}{1 - D} - X_{ij}^d \right) \left(\frac{\sigma_{ij}^d}{1 - D} - X_{ij}^d \right)} - R - \sigma_T = 0, \quad (2)$$

где X_{ij}^d — тензор добавочных напряжений; R — функция изотропного упрочнения; σ_{ij}^d — девиатор тензора напряжений; σ_T — предел текучести.

Для решения краевых задач по теории пластического течения необходимо сформировать соотношения между скоростями напряжений и скоростями деформаций. В статье [3] предлагается записывать эти соотношения с помощью тензора четвертого ранга, который зависит от текущего напряженного состояния, от констант упругости, а также от параметров характеризующих пластичность и рост повреждаемости:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = B_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (3)$$

где B_{ijkl} — тензор четвертого ранга, который получен в следующем виде:

$$B_{ijkl} = \frac{E_{ijkl}^{-1}}{1 - D} + C \left(\frac{3}{2\sigma_{eq}^A} \sigma_{ij}^A + \frac{Y}{S(1 - D)} \varepsilon_{ij}^e \right) \sigma_{kl}^A, \quad (4)$$

$$C = \left(\frac{2\sigma_{eq}^A}{3} (1 - D)^2 (c_1 + c_2) - \frac{Y}{S(1 - D)} \sigma_{mn}^A \sigma_{mn}^d \right)^{-1}, \quad (5)$$

где E_{ijkl} — упругий тензор жесткости; σ_{ij}^A — тензор активных напряжений; Y — термодинамическая сила, связанная с параметром повреждаемости; S — параметр, характеризующий рост повреждаемости; c_1 и c_2 — константы, которые могут быть определены из эксперимента на одноосное напряженное состояние.

3. Автофретирование толстостенного цилиндра. Процесс автофретирования моделируется следующим образом: на первом шаге решается задача нагружения, в результате которой определяется напряженно-деформированное состоя-

ние под действием давления автофретирования, далее давление снимается и решается задача разгрузки. Для решения задачи нагружения и разгрузки толстостенного цилиндра постоянной толщины необходимо вывести разрешающее уравнение. Физические соотношения (3) и геометрические соотношения для осесимметричной задачи в полярных координатах можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r &= H_{11}\dot{\epsilon}_r + H_{12}\dot{\epsilon}_\theta, & \dot{\epsilon}_r &= d\dot{u}/dr, \\ \dot{\sigma}_\theta &= H_{21}\dot{\epsilon}_r + H_{22}\dot{\epsilon}_\theta, & \dot{\epsilon}_\theta &= \dot{u}/r. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{d\dot{\sigma}_r}{dr} + \frac{\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta}{r} = 0. \quad (7)$$

Систему уравнений (6), (7) можно привести к разрешающему уравнению относительно приращений перемещений:

$$H_{11} \frac{d^2\dot{u}}{dr^2} + \left[\frac{dH_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(H_{12} - H_{21} + H_{11}) \right] \frac{d\dot{u}}{dr} + \left[\frac{1}{r} \frac{dH_{12}}{dr} - \frac{H_{22}}{r^2} \right] \dot{u} = 0. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка должно быть дополнено граничными условиями на внутреннем и внешнем радиусах r_a и r_b . Относительно приращений перемещений граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{11} \frac{d\dot{u}}{dr}(r_a) + \frac{H_{12}}{r_a} \dot{u}(r_a) &= -\dot{P} \\ H_{11} \frac{d\dot{u}}{dr}(r_b) + \frac{H_{12}}{r_b} \dot{u}(r_b) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для решения полученной краевой задачи для цилиндра удобно использовать метод конечных разностей совместно с методом Ньютона–Рафсона. Для того, чтобы учесть историю пластического деформирования с учетом повреждаемости материала необходимо приложенную к телу нагрузку разбивать на малые приращения, соответственно и разрешающие уравнения должны быть сформулированы относительно конечных приращений. Для определения пластических деформаций, а также эффективных напряжений на каждой равновесной итерации метода Ньютона–Рафсона использовалась неявная схема Эйлера с радиальным возвратным алгоритмом для критерия пластичности Мизеса, а для определения параметров повреждаемости использовалась явная схема интегрирования. В результате замены дифференциального оператора конечно-разностным возникала система линейных уравнений, матрица которой имеет трехдиагональный вид. Решалась данная система с помощью метода прогонки.

4. Моделирование процедуры снятия материала. Если в теле имеются остаточные напряжения, то процедура снятия материала внесет изменения в остаточное напряженно-деформированное состояние. Для того, чтобы определить новое напряженно-деформированное состояние после снятия материала необходимо воспользоваться методом сечения, согласно которому можно мысленно отбросить

часть тела и приложить по поверхности сечения действующие в теле напряжения. Тогда оставшаяся часть тела останется в прежних условиях, так как величина усилий, существовавших на поверхности не изменилась. Если проводится действительное сечение (часть материала удаляется), то поверхность полностью освобождается от напряжений. Тогда, если на поверхности сечения до среза действовали остаточные напряжения σ_{ij} , то можно считать, что после удаления материала к поверхности оставшегося тела приложена следующая поверхностная нагрузка [4]:

$$P_{in} = -\sigma_{ij}n_j. \quad (10)$$

Таким образом, в результате решения краевой задачи с граничными условиями (10) будет найдено поле добавочных напряжений $\check{\sigma}_{ij}$, которые возникли из-за удаления части материала. Новое остаточное напряженное состояние в теле будет определяться следующим образом:

$$\sigma_{ij}^R = \sigma_{ij} + \check{\sigma}_{ij}. \quad (11)$$

В реальных технологических процессах снятие материала происходит малыми порциями, поэтому вышеизложенные соотношения должны быть сформулированы для приращений напряжений. Тогда применительно к толстостенному цилиндру определение остаточных напряжений после снятия материала заключается в решении краевой задачи (8), которая решается для каждого среза. Граничное условие на предполагаемом новом внутреннем радиусе должно равняться остаточному радиальному напряжению с противоположным знаком. В результате решения получаются добавочные напряжения $\check{\sigma}_r^k$ и $\check{\sigma}_\theta^k$. Тогда новые остаточные напряжения будут определены согласно (11):

$$\begin{aligned} \sigma_r^k &= \sigma_r^{k-1} + \check{\sigma}_r^k, \\ \sigma_\theta^k &= \sigma_\theta^{k-1} + \check{\sigma}_\theta^k, \end{aligned} \quad (12)$$

где k — номер среза.

5. Результаты решения. В качестве примера была решена задача автофретирования и последующей механической обработки для толстостенного цилиндра с внутренним и внешним радиусами $r_a = 0.04m$ и $r_b = 0.08m$ со следующими параметрами материала: модуль упругости — $E = 200$ ГПа; коэффициент Пуассона — $\nu = 0.32$; предел текучести — $\sigma_T = 450$ МПа; модуль упрочнения — $E_T = 6$ ГПа; параметр, характеризующий рост повреждаемости — $S = 6$ МПа;

На первом этапе была решена задача нагружения и разгрузки, в результате чего было получено распределение остаточных напряжений, образовавшихся после действия давления автофретирования 650 МПа. Далее была проведена серия расчетов для определения остаточных напряжений после снятия материала с внутреннего радиуса цилиндра. И на последнем этапе к цилиндру после механической обработки прикладывалось рабочее давление 450 МПа. На рисунке 1 показано распределение по толщине цилиндра рабочих эквивалентных напряжений, возникающих от рабочего давления для случая без автофретирования, а также после автофретирования для случаев с разным количеством снятого материала. Видно, что с каждым последующим снятием материала рабочие эквивалентные напряжения возрастают и соответственно снижается эффект от первоначального автофретирования.

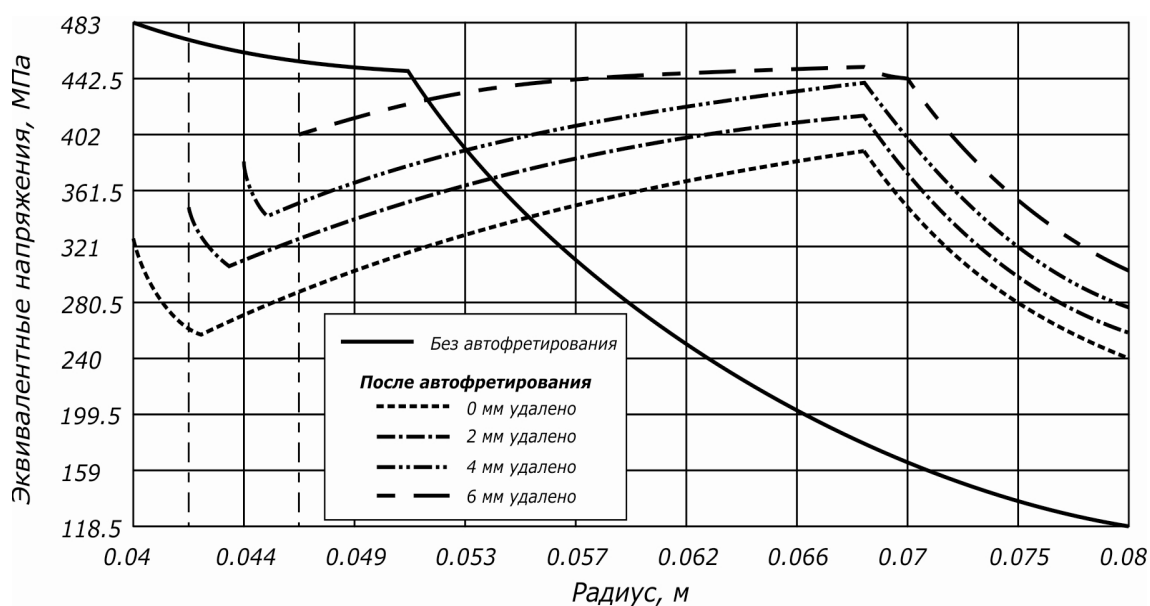


Рисунок 1 – Распределение эквивалентных напряжений

Авторы выражают благодарность поддержке Европейской Комиссии, программе Марии Кюри, контракту № PIRSES-GA-2012-318874, проекту «Инновационный неразрушающий контроль и ремонт современными композиционными материалами трубопроводов с объемными дефектами поверхности».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Farrahi G. H., George G. Voyiadjis, Hoseini S. H., Hosseinian E.* / Residual Stress Analysis of the thick-walled tube using nonlinear kinematic hardening // *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2013. № 135. P. 184–188.
- [2] *Murakami S.* Continuum Damage Mechanics. Springer, 2012. 402 p.
- [3] *Львов Г. И., Окорок В. А.* Влияние повреждаемости материала на автофреттирование толстостенных цилиндров // *Вестник Национально Технического Университета "ХПИ"*. 2012. № 55. P. 108–117.
- [4] *Бургер И. А.* Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 231 с.

Lvov G. I., Okorokov V. O. *Research of autofrettage process and post-machining.* The paper considers an issue about the influence of material damage and Bauschinger effect on the autofrettage and post-machining. Elastic-plastic-damage constitutive relations basing on continuum damage mechanics are presented. Boundary problem for thick-walled cylinder in case of plane strain is formulated.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Макаров С. С., Устинов Ю. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Работа посвящена исследованию устойчивости и напряженно-деформированного состояния трех типов оболочек вращения, находящихся под действием внешней нагрузки. Были рассмотрены случаи осевого сжатия и внешнего гидростатического давления. Исследования проведены в рамках нелинейных двумерных уравнений теории оболочек, основанных на гипотезах Киргофа–Лява. Для оценки области применимости линей теории оболочек численно исследованы зависимости полевых характеристик НДС оболочек от геометрических параметров и внешней нагрузки. Приведены результаты исследования устойчивости оболочек.

1. Основные полевые характеристики в базисе гауссовой системе координат. Ниже r, ϕ, z — цилиндрические координаты, $a = a(z)$ — радиус срединной поверхности оболочки, h — толщина, L — расстояние между торцами.

Срединные поверхности рассматриваемых оболочек задаются приведенной ниже формулой при соответствующих значениях параметров.

Имеем

$$a(z) = a_1 + K \sin^2 \frac{\pi n z}{L},$$

где a_1 — радиус торца оболочки $z = 0$, $K \geq 0$ — коэффициент выпуклости, n — натуральное число, определяющее количество гофров.

Исследования проводились для трех типов оболочек:

1. цилиндрической ($K = 0, n = 0, a(z) = a_1$);
2. выпуклой ($n = 1, a(z) = a_1 + K \sin^2 \frac{\pi z}{L}$);
3. гофрированной ($n = 10$, т. е. $a(z) = a_1 + K \sin^2 \frac{10\pi z}{L}$).

Ниже компоненты всех полевых характеристик (вектора смещений, тензора деформаций и т. п.) рассматриваются в гауссовой системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ как функции φ, z . При этом главные кривизны координатных линий α_1, α_2 и их коэффициенты Ляме определяются следующими формулами

$$k_1 = \frac{(1 + a'^2)^{1/2}}{a(z)}, \quad k_2 = \frac{a''}{(1 + a'^2)^{3/2}}, \quad A_1 = a(z), \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2}}$$

Уравнения равновесия в усилиях и моментах

$$\begin{aligned} A_1^{-1} \partial_\varphi T_{11} + A_2^{-1} \partial_z T_{12} + k_1 Q_1^* + q_1 &= 0 \\ A_1^{-1} \partial_\varphi T_{12} + A_2^{-1} \partial_z T_{22} + k_2 Q_2^* + q_2 &= 0 \\ A_1^{-1} \partial_\varphi Q_1^* + A_2^{-1} \partial_z Q_2^* - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + q_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь q_1, q_2, q_3 — проекции внешней нагрузки на орты гауссовой системы координат, $\partial_\varphi, \partial_z$ — производные по φ и z соответственно.

$$T_{11} = B(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad T_{12} = 1/2B(1 - \nu)\varepsilon_{12};$$

$$Q_1^* = Q_1 - S_1, \quad Q_1 = A_1^{-1}\partial_\varphi M_{11}, \quad S_1 = T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2, \quad (2)$$

$$Q_2^* = Q_2 - S_2, \quad Q_2 = A_2^{-1}\partial_z M_{12}, \quad S_2 = T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2, \quad (3)$$

$$M_{11} = D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}), \quad M_{22} = D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}), \quad M_{12} = D\frac{1 - \nu}{2}\kappa_{12},$$

где

$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Компоненты тензора конечных деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} e_{11} &= A_1^{-1}\partial_\varphi u_1 + u_3 k_1 + A_1^{-1}u_2, \quad e_{22} = A_2^{-1}\partial_z u_2 + k_2 u_3, \\ 2e_{12} &= A_2^{-1}\partial_z u_1 + A_1^{-1}\partial_\varphi u_2 + A_1^{-1}u_1, \\ \theta_1 &= -A_1^{-1}\partial_\varphi u_3 + u_1 k_1, \quad \theta_2 = -A_2^{-1}\partial_z u_3 + k_2 u_2, \end{aligned}$$

Здесь θ_1, θ_2 — углы поворота нормали относительно касательных к линиям главных кривизн. Компоненты тензора изменения кривизн

$$\kappa_{11} = A_1^{-1}\partial_\varphi\theta_1 + A_1^{-1}\theta_2, \quad \kappa_{22} = A_2^{-1}\partial_z\theta_2, \quad 2\kappa_{12} = A_1^{-1}\partial_\varphi\theta_2 + A_1^{-1}\theta_1 + A_2^{-1}\partial_z\theta_1$$

Граничные условия жесткой заделки на торцах оболочки имеют вид

$$u_1|_{x=0,L} = 0, \quad u_2|_{x=0} = u^*, \quad u_2|_{x=L} = 0, \quad u_3|_{x=0,L} = 0, \quad \theta_2|_{x=0,L} = 0 \quad (5)$$

Путем задания u^* можно, в частности, моделировать влияние монтажных или температурных напряжений.

2. Сведение задачи к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_8)$ с безразмерными компонентами

$$Y_i = u_i/L, \quad i = 1, 2, 3; \quad Y_4 = \theta_2; \quad Y_5 = T_{12}/B; \quad Y_6 = T_{22}/B; \quad Y_7 = LM_{22}/D; \quad Y_8 = Q_2^*/B,$$

При этом краевая задача (1)–(5) преобразуются к задаче интегрирования системы ДУ первого порядка

$$\partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{L}(\mathbf{Y}, \partial_\varphi \mathbf{Y}, \mathbf{q}) + \mathbf{N}(\mathbf{Y}, \partial_\varphi \mathbf{Y}, \mathbf{q}), \quad x = z/L, \quad (6)$$

где \mathbf{L} — линейный оператор, \mathbf{N} — нелинейный оператор. В случае осесимметричной деформации ($u_1 = 0, \partial_\varphi \mathbf{Y} = \mathbf{0}$) уравнения (6) преобразуются к системе 6-ти ОДУ

$$\frac{dY_i}{dx} = F_i(Y_j, \mathbf{q}), \quad i, j = 2, 3, 4, 6, 7, 8. \quad (7)$$

Граничные условия (5) примут вид

$$Y_2|_{x=0} = u^*, \quad Y_2|_{x=L} = 0, \quad Y_3|_{x=0,L} = 0, \quad Y_4|_{x=0,L} = 0. \quad (8)$$

3. Исследование устойчивости. Обозначим через

$$\mathbf{Y}_0 = (Y_{02}, Y_{03}, Y_{04}, Y_{06}, Y_{07}, Y_{08})$$

решение нелинейной осесимметричной задачи (7). Решение краевой задачи (6), (8) будем отыскивать в виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \varepsilon \mathbf{U}, \quad (9)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8)$ и

$$U_i = V_i(x) \cos(k\varphi + \psi_i). \quad (10)$$

Здесь $\psi_i = 0, i = 1, 3, 4, 5, 7, 8; \psi_i = \pi/2, i = 2, 6$. После подстановки (9)–(10) в (6) получаем линеаризованную систему уравнений:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dx} = \mathbf{H}(k, \mathbf{Y}_0, \mathbf{U}, \mathbf{q}). \quad (11)$$

Граничные условия жесткой заделки имеют вид

$$U_1|_{x=0} = u^*, \quad U_1|_{x=L} = 0, \quad U_2|_{x=0,L} = 0, \quad U_3|_{x=0,L} = 0, \quad U_4|_{x=0,L} = 0. \quad (12)$$

Задача о нахождении нетривиальных решений краевой задачи (11)–(12) была сведена к вопросу о существовании нетривиальных решений линейной неоднородной алгебраической системы уравнений, т. е. к задаче поиска нулей её определителя, элементы которого определяются на основе решения четырех задач Коши.

4. Результаты численного исследования Исследования устойчивости и напряженно-деформированного состояния были проведены для трех типов оболочек вращения — цилиндрической, выпуклой, гофрированной, и двух типов внешнего воздействия: 1) осевого сжатия, которое моделировалось заданием осевого смещения u^* ; 2) внешнего гидростатического давления. Ввиду ограничений на объем ниже приводятся результаты для задачи 1.

4.1. Результаты исследования НДС. С целью определения области применимости линейной теории были исследованы зависимости смещений u_z, u_r и напряжений σ_{zz} от величины u^* при различных фиксированных геометрических параметрах (радиуса, длины, толщины, выпуклости). Численные расчеты показали, что для рассматриваемых оболочек, находящихся под действием осевого сжатия и жестко заземленных на торцах, при отношении длины к радиусу $L/a_1 < 3$ и при $\lambda = u^*/L = 10^{-4}$, линейная теория начинает давать большую погрешность

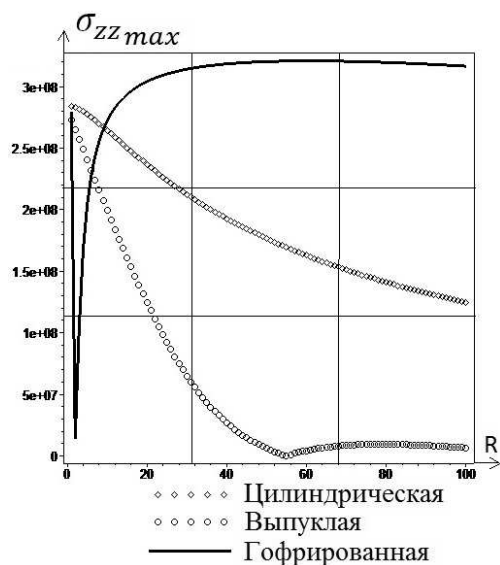


Рисунок 1 – Зависимость максимального значения напряжения от радиуса срединной поверхности в торцах



Рисунок 2 – Зависимость первых критических значений в зависимости от параметра волнообразования

Таблица 1 – Точки сгущения критического безразмерного параметра u^*

Тип оболочки	Точка сгущения	Количество	Асимптотическое значение
Цилиндрическая	0.007	6	0.0003
	0.011	6	
	0.0016	6	
Выпуклая	0.011	5	0.00019
Гофрированная	0.008	4	0.0018
	0.015	5	
	0.0025	6	

решения. Исследования зависимостей максимальных значений напряжений σ_{zz} от величины радиуса срединной поверхности в торцах a_1 приведены на рисунке 1.

4.2. Результаты исследования устойчивости. На рисунке 2 показаны зависимости первых критических значений безразмерного параметра $\lambda = u^*/L$ для различных значений параметра волнообразования k . В ходе исследования были найдены некоторые точки сгущения для всех трех оболочек (см. табл. 1).

5. Заключение. На основе проведенного анализа исследованной области применения линейной теории для трех оболочек. Для оболочек находящихся под действием осевого сжатия и жестко заземленных на торцах, линейная теория даёт большую погрешность при отношении длины оболочки к радиусу $L/a_1 < 3$ и величине осевого смещения $\lambda = u^*/L = 10^{-4}$. В результате исследований устойчивости оболочек были получены значения точек сгущения критического безразмерного параметра осевого смещения одного из торцов. Установлены асимптотические значения точек сгущения для трех оболочек с фиксированными геометрическими параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
- [2] Григолюк Э. И. Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука 1978. 360 с.
- [3] Гетман И. П. Карякин М. И. Устинов Ю. А. Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 917–927.

Makarov S. S., Ustinov Y. A. *Investigations of stability and stress-strain state of rotation shells.* The work is devoted to investigation of stability and stress-strain state of the three types of revolution shells: a cylinder, a convex and a corrugated that are under the influence of the external load. Cases of external hydrostatic pressure and axial compression are considered. A study is conducted in the framework of the nonlinear two-dimensional equations of the theory of shells, is based on the hypotheses Kirhoff-Love [1, 2]. Numerical calculations dependency field characteristics SSS shells from the geometrical parameters to define the areas of applicability of the linear theory were carried out. Also dependence of maximum stress values of the radius of the shell is obtained. Results of research of stability of shells are reported.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ СХЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ В ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ПОРОУПРУГОЙ ДИНАМИКИ

Марков И. П., Литвинчук С. Ю., Петров А. Н., Белов А. А.
НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Рассматривается применение гранично-элементных методик на основе метода квадратур сверток и интегрального преобразования Лапласа. Шаговые по времени гранично-элементные схемы позволяют использовать переменный шаг. Численное обращение преобразования Лапласа ориентировано на применение модификации метода Дурбина, позволяющей неравномерно разбивать частотный интервал. Варьирование шагом по времени или по частоте возможно благодаря применению комбинированных формул с ключом.

На основе представленных гранично-элементных схем численно решены трехмерные краевые задачи пороупругой динамики. Дан их апостериорный анализ.

Введение. Решение краевых задач пороупругой динамики методом граничных элементов опирается на использование интегрального преобразования Лапласа. Построение решения во времени достигается путем применения метода численного обращения Дурбина или метода квадратур сверток. Оба метода опираются на решение соответствующей проблемы методом локальной линейной интерполяции с постоянным шагом. В работе предлагается наряду с повышением локальной интерполяции применить переменный шаг и комбинированные формулы с учетом появления проблемы интегрирования быстро осциллирующих функций.

Математическая и дискретная модели. Система дифференциальных уравнений в изображениях по Лапласу для полной модели Био имеет вид [1]

$$G\tilde{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\tilde{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\tilde{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\tilde{u}_i = -\tilde{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\tilde{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\tilde{p} - (\alpha - \beta)s\tilde{u}_{i,i} = -\tilde{a},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

где s — параметр преобразования Лапласа, G , K — константы упругости, ϕ — пористость, k — проницаемость, α — эффективный коэффициент напряжений, ρ, ρ_a, ρ_f — плотности пористого скелета, присоединенной массы и наполнителя, \tilde{F}_i, \tilde{a} — плотности источников.

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматривается регуляризованное уравнение [2–6]

$$\alpha_\Omega \tilde{v}_k(x, t) + \int_0^\Gamma \int_\Gamma \left(\tilde{T}_{ik}(x, y, t - \tau) \tilde{v}_i(y, \tau) -$$

$$- \tilde{T}_{ik}^0(x, y, t - \tau) \tilde{v}_i(x, \tau) - \tilde{U}_{ik}(x, y, t - \tau) \tilde{t}_i(y, \tau) \Big) d\Gamma d\tau = 0,$$

$$(x \in \partial\Gamma), \quad \tilde{t} = [t_1, t_2, t_3, q]^T, \quad \tilde{v} = (u_1, u_2, u_3, p),$$

где $\tilde{U}_{ik}, \tilde{T}_{ik}$ — матрицы фундаментальных и сингулярных решений; \tilde{T}_{ik}^0 — матрица слагаемых компонент \tilde{T}_{ik} , содержащих особенности.

Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности Γ на граничные элементы: четырехугольные и треугольные восьмиузловые биквадратичные элементы. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы. Обобщенные перемещения аппроксимируются билинейно, обобщенные поверхностные силы — постоянно [3, 4]. Для получения дискретного аналога ГИУ применяется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации обобщенных граничных функций. Дискретные аналоги ГИУ формируются в виде систем линейных алгебраических уравнений.

Для случая применения в рамках гранично-элементной схемы метода квадратур свертки имеет значение способ вычисления весовых множителей квадратурной формулы. Уравнение в свертках $y(t) = f(t) * g(t)$, где «*» — свертка Вольтерра, можем записать в виде квадратурной формулы [7, 8]:

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t) g(k\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\gamma(Re^{i\varphi})/\Delta t) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Традиционный метод использует метод трапеций с постоянным шагом для вычисления интеграла. Формула построения весовых множителей на основе переменного шага имеет вид:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \left(\bar{f}\left(\frac{\gamma(Re^{in\varphi_k})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi_k} + \bar{f}\left(\frac{\gamma(Re^{in\varphi_{k+1}})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi_{k+1}} \right) \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}.$$

Для случаев возникновения проблемы интегрирования осциллирующей функции, используется комбинированная формула, использующая специфику интегрирования таких функций. Модификация на основе линейной аппроксимации подынтегральной функции весовых множителей выглядит следующим образом

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \bar{f}\left(\frac{\gamma(Re^{in\varphi})}{\Delta t}\right) e^{-in\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} e^{in\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}} \left[D_1(w) \bar{f}\left(\frac{\gamma(Re^{in\varphi_k})}{\Delta t}\right) + D_2(w) \bar{f}\left(\frac{\gamma(Re^{in\varphi_{k+1}})}{\Delta t}\right) \right]$$

где $w = -n\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}$, $D_{1,2}(w) = e \begin{cases} \sin w/w \pm (w \cos w - \sin w)i/w^2, & |w| > w_2 \\ e^{\mp wi}, & |w| \leq w_2 \end{cases}$

Рассмотрена модификация на основе локальной квадратичной аппроксимации. Возможности построенных модификаций метода квадратур сверток продемонстрированы на численных примерах.

Применение метода квадратур сверток с переменным шагом при линейной интерполяции подынтегральной функции не позволяет решить проблему устойчивости численного построения искомой функции на выбранном временном интервале без измельчения расчетной сетки. Применение комбинированных формул позволяет получить искомый результат на той же сетке.

Построение модификаций метода квадратур сверток на основе комбинированных формул позволило преодолеть такие ограничения традиционного подхода, как выбор числа шагов N по времени, совпадающим с числом узлов L по углу φ . Использование модификаций позволяет сократить необходимое число точек разбиения для достижения заданной точности.

В работе рассмотрены проблемы численного обращения преобразования Лапласа на основе метода Дурбина. Применены модификации метода Дурбина. Базовая формула метода Дурбина на основе метода трапеций с переменным шагом для всей подынтегральной функции выглядит следующим образом:

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}(\alpha + i\omega_k) + \bar{f}(\alpha + i\omega_{k+1})) \Delta_k / 2\pi,$$

$$f(t) \approx e^{at} \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}(\alpha + i\omega_k) e^{it\omega_k} + \bar{f}(\alpha + i\omega_{k+1}) e^{it\omega_{k+1}}) \Delta_k / 2.$$

Построены модификации метода с учетом решения проблемы численного интегрирования быстро осциллирующей функции. Модификации построены на основе линейной и квадратичной аппроксимации функции $\bar{f}(\alpha + i\omega)$ и приводят к комбинированным формулам (формулам с ключом). Возможности модификаций метода Дурбина продемонстрированы на численных примерах. Дано сравнение предложенных формул с модификацией метода Дурбина других авторов.

Проведенные исследования показали, что использование комбинированных формул позволяет без потери точности в несколько раз понизить количество точек интегрирования.

Гранично-элементные результаты. Рассмотрена задача о действии вертикальной силы $t_3(t) = P_0 f(t)$, $P_0 = -1000$ Н/м², $f(t) = H(t)$ на поверхность пороупругого полупространства, со следующими параметрами материала: $E = 2,544 \cdot 10^8$ Н/м²; $k = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/Нс; $\nu = 0,298$; $R = 1,2 \cdot 10^9$ Н/м²; $\rho = 1884$ кг/м³; $\rho_f = 1000$ кг/м³; $\phi = 0,48$; $\alpha = 0,98$. Поверхность полупространства описывается регулярной ГЭ-сеткой, состоящей из 3088 элементов. Отклик граничных перемещений на расстоянии 20 м от места действия силы представлен на рисунке 1. Полученные гранично-элементные решения как для упругого, так и для пороупругого случаев не подтверждают падения амплитуды за фронтом волны Релея, полученные в [1].

Исследование влияния расстояния (соответственно 6, 12, 20 м) от места действия силы на форму и амплитуду отклика давления приведено на рисунке 2.

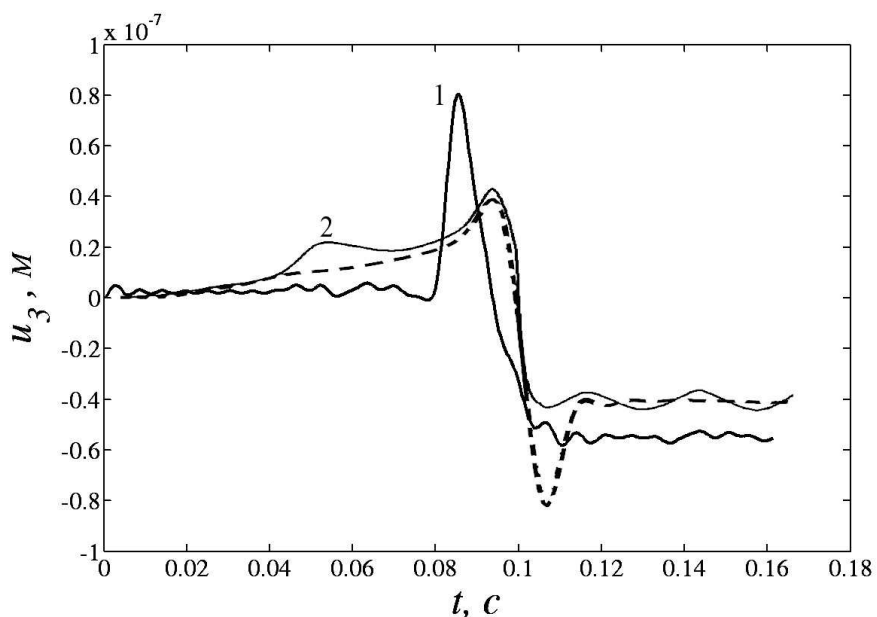


Рисунок 1 – 1 – упругое ГЭ решение, 2 – пороупругое ГЭ решение, пунктир — пороупругое ГЭ решение из [1]

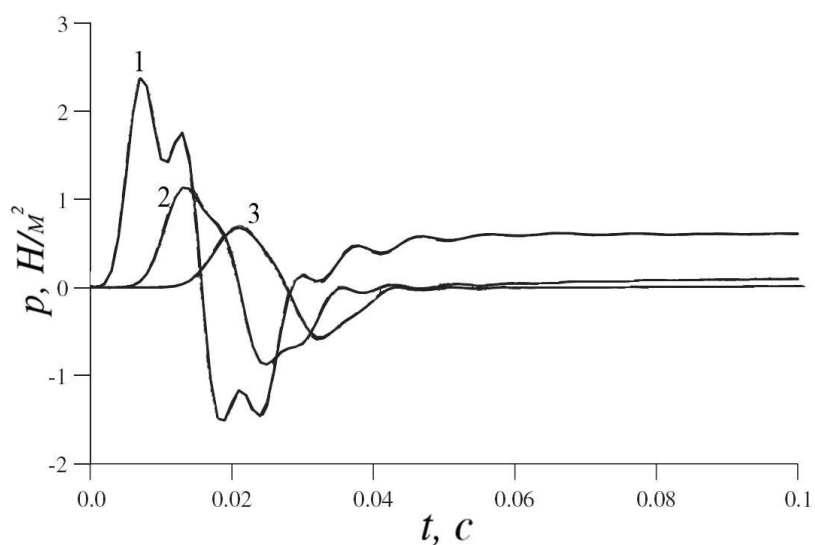


Рисунок 2 – 1 – на расстоянии 6 м, 2 – 12 м, 3 – 20 м

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России на 2009-2013 годы» (№14.В37.21.1137, №14.В37.21.1249), Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2843.2012.8) и при поддержке РФФИ (гранты 12-01-00698-а, 12-08-00984-а, 13-08-97091 р-поволжье-а, 12-08-31572 мол-а, 13-08-00658-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Schanz M.* Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
- [2] *Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2009. № 71. С. 164–171.
- [3] *Аменицкий А. В., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2008. № 70. С. 71–78.
- [4] *Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С., Литвинчук С. Ю.* Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. № 40. С. 1–20.
- [5] *Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Численное решение краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости методом ГИУ // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тр. XXIII Межд. конф. ВЕМ-FEM-2009, 28 сент.–01 окт. 2009. СПб: 2009. С. 182–185.
- [6] *Белов А. А.* Гранично-элементный расчет динамики составных вязкоупругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. 2008. № 70. С. 162–168.
- [7] *Lubich C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I. // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 129–145.
- [8] *Lubich C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. II. // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 413–442.

Markov I. P., Litvinchuk S. Yu., Petrov A. N., Belov A. A. *Variable-step boundary-element schemes in 3-d boundary-value problems of porielastic dynamics.* The use of boundary-element methodologies based on the convolution quadrature method and Laplace integral transform is considered. The time-step boundary-element schemes make it possible to use a variable step. Numerical inversion of Laplace transform is oriented at using a modification of Dourbin's method allowing for an unevenly subdivided frequency interval. Varying the time- or frequency-step is possible due to the use of combined formulas with a key.

Application of the present boundary-element schemes is illustrated by numerically analyzing boundary-value problems of poroelastic dynamics. Their a posteriori analysis is given.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ ПЕРЕСТРОЙКИ КОСТНОЙ ТКАНИ МЕТОДАМИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А.

Ивановский государственный энергетический университет

1. Введение. Живые ткани в процессе своего роста и развития существенным образом реагируют на внешнее силовое поле, в котором они функционируют. Механический фактор оказывает стимулирующее и регулирующее воздействие на специфические клетки тканей, что приводит к запуску и развитию процессов трансформации органа в макроскопическом масштабе [1]. Явление структурной перестройки неразвитой мягкой субстанции в плотную костную ткань происходит в результате дифференциации костных клеток, например, во время восстановления целостности кости после перелома и вживления скелетных имплантатов в твердое вещество костной ткани, что приводит к запуску процесса репаративной регенерации кости в зоне соприкосновения с поверхностью инородного предмета или между костными отломками.

Предполагается, что возмущения, вносимые внешней механической нагрузкой в установившееся движение жидкости в транспортной системе кости могут обеспечивать передачу управляющих сигналов между клетками кости в процессе ее структурной перестройки. Был введен безразмерный «механо-регулирующий индекс» (1), определяющий, ткань какого фенотипа образуется в текущей точке среды в ответ на механическую стимуляцию [2]:

$$M = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{q}{b} \quad (1)$$

где ε — максимальное значение октаэдрической сдвиговой деформации упругого каркаса двухфазной среды, q — максимальное значение скорости потока внутритканевой жидкости в порах, $a = 0.0375$ и $b = 3$ мкм/с — эмпирические константы.

Рассмотренная модель интенсивно применялась и в последующих работах [3]. Предполагалось, что клетки в каждом конечном элементе могут дифференцироваться в клетки основных типов тканей: фибробласты, хондроциты и остеобласты в зависимости от среднего механического состояния элемента в текущий расчетный день.

К основному недостатку данных работ можно отнести то, что моделировалось действие только статической или циклической нагрузки низкой частоты (1 Гц). Экспериментально показано, что резонансные режимы относительно высокой частоты могут оказывать более существенный эффект при стимулировании живых тканей, чем низкочастотная периодическая нагрузка [4].

2. Одномерная модель структурной перестройки ткани. Для понимания механизма структурной перестройки костной ткани рассмотрим простейшую одномерную модель. Будем считать, что изучаемая область репарации представляет собой небольшой участок вдоль оси x длиной $2l$, занимаемый сплошной пороупругой средой с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим одномерные уравнения продольных вынужденных колебаний в частотной области, описывающие движение пороупругой среды [5]:

$$\begin{aligned} -E\hat{u}'' - (\rho - \tilde{\gamma}(\omega)\rho_f)w^2\hat{u} + (\alpha - \tilde{\gamma}(\omega))\hat{p}' &= \hat{f}_{Vx} \\ -\tilde{K}(\omega)\hat{p}'' + i\omega\phi^2R^{-1}\hat{p} + i(\alpha - \tilde{\gamma}(\omega))\omega\hat{u}' &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где \hat{u} — продольное перемещение точек стержня; \hat{p} — давление жидкости в порах; E — модуль Юнга пороупругого материала в дренированном состоянии; α — коэффициент эффективных напряжений Био; $\tilde{\gamma}$ — коэффициент, характеризующий проницаемость среды и взаимодействие фаз; \tilde{K} — приведенная комплексная гидравлическая проницаемость пористой среды.

В случае моделирования структурной перестройки ткани, занимающей небольшую область длиной $2l$ вдоль продольной оси кости, будем рассматривать симметричную постановку задачи. Физический смысл граничных условий состоит в том, что в среднем сечении продольное перемещение и поток жидкости в порах равны нулю, а правое сечение свободно от нагрузок и полностью проницаемо для поровой жидкости. Предполагая отсутствие внутренних источников, представим правую часть и решение в виде разложения в ряд по собственным функциям в соответствии с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{Vx}(x) &= \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{2l}, & f_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \hat{f}_{Vx}(x) \sin \frac{n\pi x}{2l} dx \\ \hat{u}(x) &= \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} u_n \sin \frac{n\pi x}{2l}, & \hat{p}(x) &= \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi x}{2l} \end{aligned} \quad (3)$$

где f_n — коэффициенты разложения нагрузки в ряд Фурье.

Подставляя выражения (3) в уравнения (2) получим:

$$\begin{aligned} \left(E \left(\frac{n\pi}{2l} \right)^2 - (\rho - \tilde{\gamma}(\omega)\rho_f)\omega^2 \right) u_n - (\alpha - \tilde{\gamma}(\omega)) \frac{n\pi}{2l} p_n &= f_n \\ i\omega(\alpha - \tilde{\gamma}(\omega)) \frac{n\pi}{2l} u_n + \left(\tilde{K}(\omega) \left(\frac{n\pi}{2l} \right)^2 + i\omega\phi^2 R^{-1} \right) p_n &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы (4) может быть найдено любым известным алгебраическим методом. В результате преобразований получаем комплексные частотные функции, характеризующие перемещения и давление поровой жидкости пороупругой среды, совершающей колебания под действием продольной гармонической силы.

Для применения механо-регулирующего критерия (1) нужны эквивалентная сдвиговая деформация упругого скелета и скорость потока внутритканевой жидкости в порах:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(x) &= \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{\left(\tilde{K}(\omega)(n\pi/2l)^2 + i\omega\phi^2 R^{-1} \right) (n\pi/2l) f_n}{\Delta(\omega)} \cos \frac{n\pi x}{2l} \\ \hat{q}(x) &= \tilde{K}(\omega) \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{i\omega(\alpha - \tilde{\gamma}(\omega))(n\pi/2l)^2 f_n}{\Delta(\omega)} \sin \frac{n\pi x}{2l} \end{aligned} \quad (5)$$

где знаменатель представляет собой определитель матрицы системы уравнений (4).

Образование клеток и их миграция в процессе сращения перелома еще не достаточно изучены. Этот процесс принимается случайным и ненаправленным, что соответствует диффузии частиц газа или жидкости. В рассматриваемом одномерном случае для расчета концентрации клеток:

$$\frac{d}{dx} \left(J \frac{d\psi}{dx} \right) - \frac{d\psi}{dt} = 0 \quad (6)$$

где $J=J_x$ — коэффициент диффузии.

Пусть в крайних сечениях зоны репарации $x = \pm l$ значение концентрации активных клеток-предшественников, мигрирующих внутрь области, поддерживается постоянной и равной ψ_{max} . Учитывая симметричную постановку задачи, подразумевающую отсутствие потока вещества в центральном сечении, уравнение (6) имеет аналитическое решение в виде суммы ψ_{max} и разложения по методу Фурье:

$$\psi(x, t) = \psi_{max} - \frac{4}{\pi} \psi_{max} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l} \exp \left(\frac{-J(2k-1)^2 \pi^2 t}{4l^2} \right) \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет рассчитать концентрацию активных клеток в зоне репарации на каждом временном шаге. Поскольку на окончательный результат влияют не абсолютные значения концентрации клеток, а относительные, то в рассматриваемой схеме движения активных клеток-предшественников остается только один независимый параметр J . Его значение выбирается таким образом, чтобы за расчетный период, принятый равным 4 месяцам (120 дней), зона репарации была бы полностью заполнена активными клетками, способными к дифференциации [3]. Для области длиной $2l = 10$ мм при $J = 0.67$ мм²/день за клинически достоверный период времени $T = 120$ суток костная мозоль будет полностью заполнена активными клетками. Найденное значение коэффициента диффузии используется в дальнейшем расчете.

3. Результаты численного анализа и обсуждение. Численный анализ был проведен при значениях материальных констант, приведенных в Таблице 1. Плотность двухфазной среды, модули Юнга и сдвига в дренированном состоянии E и G , коэффициенты Био эффективных напряжений α , гидростатическая константа R получены расчетным путем исходя из типичных значений упругих модулей материала твердой и жидкой фаз и пористости материала [3].

Таблица 1 – Эффективные модули биологических тканей (в системе СИ)

Тип ткани	ψ	α	ρ	$E^{(dr)}$	$G^{(dr)}$	R	K
Гранулир.	0.99	1.000	1021	$1.36 \cdot 10^5$	$0.57 \cdot 10^5$	$2.29 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{-14}$
Фиброзная	0.80	0.990	1100	$1.15 \cdot 10^6$	$0.47 \cdot 10^6$	$0.21 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{-14}$
Хрящевая	0.80	0.995	1120	$5.82 \cdot 10^6$	$2.35 \cdot 10^6$	$1.07 \cdot 10^9$	$5 \cdot 10^{-15}$
Незрел. кость	0.65	0.893	1182	$3.73 \cdot 10^9$	$0.97 \cdot 10^9$	$1.42 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{-13}$
Зрелая кость	0.20	0.435	1416	$1.31 \cdot 10^{10}$	$0.45 \cdot 10^{10}$	$0.39 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^{-13}$
Компактное	0.10	0.367	1468	$2.11 \cdot 10^{10}$	$0.63 \cdot 10^{10}$	$0.19 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{-17}$

Проницаемость биологических тканей характеризуется переменными [5]:

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{K}{1 + i\omega K \rho_f \frac{\tau}{\phi}}, \quad \tilde{\gamma}(\omega) = \frac{i\omega \rho_f K}{1 + i\omega K \rho_f \frac{\tau}{\phi}}, \quad \text{где } K = \frac{k}{\eta_f}$$

Значения K взяты из [3, 5], а характеристика искривленности поровых каналов $\tau = 1.66$, что часто используется в расчетах и соответствует порам неспецифической формы. Амплитудные значения деформаций и скорости потока жидкости в порах перемещений и давления жидкости в порах (5) используются для расчета механо-регулирующего индекса (1), являющегося критерием структурной перестройки костной ткани. В проведенном численном анализе использованы экспериментальные параметры, взятые из [3]. Эмпирические константы равны: $a = 0.0375$, $b = 0.003$ мм/с. Пороговые значения механо-регулирующего индекса следующие: 1) $M > 3$ — образование фиброзной ткани; 2)

1) $1 < M \leq 3$ — образование хрящевой ткани; 3) $0.267 < M \leq 1$ — образование незрелой костной ткани с достаточно высокой пористостью, близкой к губчатому веществу кости; 4) $0.01 < M \leq 0.267$ — образование зрелой костной ткани, приближающейся по своим механическим характеристикам к компактному веществу кости; 5) $M \leq 0.01$ — резорбция костной ткани, возникающая при недостаточном механическом стимулировании.

В качестве распределенной нагрузки, действующей на ткань в зоне репарации, рассмотрим сумму медленно-изменяющейся сжимающей силы, постоянной на каждом шаге по времени, и быстрой составляющей, изменяющейся по гармоническому закону с относительно высокой частотой ω . Пусть в течение времени $0 < t \leq t_1$ статическая нагрузка на кость плавно увеличивается до своего максимального значения $F_{max} = 500$ Н и сохраняет достигнутую величину до конца периода репарации $t = 120$ суток.

Будем считать, что амплитуда гармонической нагрузки \hat{f}_{Vx} пропорциональна постоянной составляющей с заданным коэффициентом, принятым в расчете $\beta = 0.1$.

Графики изменения модуля упругости (Рисунок 1а) в характерной точке $x = 2.5$ мм для типичной нагрузки при $t_1 = 60$ дней показывают, что существенное влияние на сходимость результатов к тому или иному значению модуля Юнга и, следовательно, на образование определенного вида ткани влияет частота приложенной гармонической нагрузки. При этом зависимость не является монотонной, что позволяет предположить достаточно сложную зависимость механизма перестройки от частотных свойств биомеханической системы. Из рисунка видно, что на низких частотах 1..10 Гц при удовлетворительном восстановлении в начальный период в последующем наблюдается резорбция ткани и переход в ткань с низким модулем упругости. Только статическая нагрузка, не способная генерировать вынужденные потоки внутритканевой жидкости в системе поровых каналов, как следует из рисунка, приводит к образованию фиброзно-хрящевой ткани. Высокая частота, равная 30 Гц для данной числовой модели, также не способствует удовлетворительному остеогенезу и достаточно быстро ведет к формированию фиброзной ткани. Оптимальной в данном случае является нагрузка частотой 20 Гц, стимулирующая устойчивый процесс трансформации исходного недифференцированного вещества в зрелую костную ткань.

Графики (рисунок 1б) демонстрируют зависимость механизма репарации от координаты

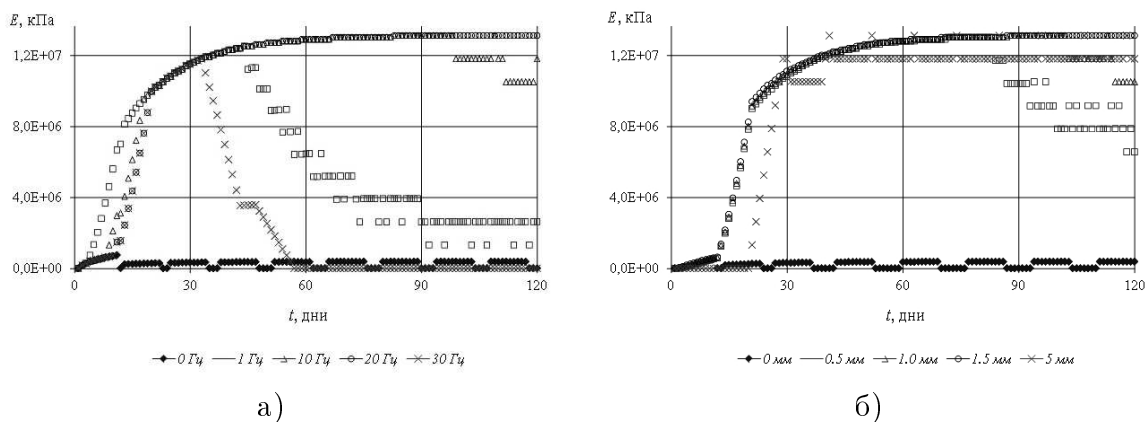


Рисунок 1 – Изменение модуля упругости ткани: а) в точке $x = 2.5$ мм при различных значениях частоты действующей нагрузки; б) в различных точках костной мозоли при частоте 20 Гц

наты при фиксированной частоте 20 Гц, принятой оптимальной для данной числовой модели. Распределение деформаций упругого скелета твердой фазы и потоков жидкости в порах может иметь достаточно сложный характер даже для области простой формы, не говоря уже о трехмерных задачах, что приводит к значительным изменениям механо-регулирующего индекса (1) и попаданию текущей точки (ε, q) в ту или иную область управляющей диаграммы. Так в сечении $x = 0$ мм поток жидкости (5) равен нулю, что обусловлено симметричными граничными условиями, а это, как и в случае только статической нагрузки, приводит к образованию фиброзно-хрящевой ткани. Отрицательный эффект низких скоростей жидкости в порах остается заметным до сечений $x = \pm 1$ мм, что составляет 20 % костной мозоли.

4. Заключение. Рассмотренная одномерная модель структурной перестройки костной ткани и ее компьютерная реализация были использованы для тестирования общего достаточно сложного алгоритма и оценки влияния отдельных физико-механических параметров модели на процесс регенерации костной мозоли. В частности, построенная модель позволила исследовать влияние частоты стимулирующей нагрузки на процесс перестройки ткани, что совершенно отсутствует в известных источниках, а также влияние раннего нагружения на восстановление упругих свойств костной мозоли.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-00054-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Van der Meulen M., Huiskes R.* Why mechanobiology? A survey article // J. Biomech. 2002. Vol. 35. № 4. P. 401–414.
- [2] *Prendergast P. J., Huiskes R., Soballe K.* Biophysical stimuli on cells during tissue differentiation at implant interfaces // J. Biomech. 1997. Vol. 30. № 6. P. 539–548.
- [3] *Isaksson H., Wilson W., van Donkelaar C. C.* Comparison of biophysical stimuli for mechano-regulation of tissue differentiation during fracture healing // J. Biomech. 2006. Vol. 39. No. 8. P. 1507–1516.
- [4] *Goodship A. E., Lawes T. J., Rubin C. T.* Low-magnitude high-frequency mechanical signals accelerate and augment endochondral bone repair: Preliminary evidence of efficacy // J. Orthop. Res. 2009. Vol. 27. № 7. P. 922–930.
- [5] *Маслов Л. Б.* Математическое моделирование колебаний пороупругих систем: монография. Иваново: Изд-во ИГЭУ, 2010. 264 с.

Maslov L. B., Sabaneev N. A. *Research of bone structural transformation by continuum mechanics methods.* The dynamic continual model describing the bone tissue structural transformation process under impact of the external mechanical stimulus of periodic behavior is introduced in the paper. The computational model provides possibility of the investigation of the regeneration processes of the damaged bone elements upon the availability of a dynamic load and the theoretical argumentation of the choice of the optimal periodic impact to the damaged tissues for the fastest and stable healing.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ НЕМОНОТОННО МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

Мишустин И. В., Мовчан А. А.

Институт прикладной механики РАН, Москва

Предложен вариант описания механического поведения сплавов с памятью формы при немонотонном нагружении, моделирующий различные виды деформационного упрочнения, характерные для этих материалов.

При немонотонном изменении напряжений сплавы с памятью формы (СПФ) демонстрируют ряд необычных деформационных эффектов. При прямом фазовом мартенситном превращении под действием напряжений со снижающейся интенсивностью наблюдается рост неупругих деформаций [1, 2]. Следовательно, для явления накопления деформаций прямого превращения деформационное упрочнение не характерно. При изотермическом нагружении, разгрузке и повторном нагружении образца из СПФ, находящегося в полностью мартенситном фазовом состоянии, наблюдается явное деформационное упрочнение [3].

Если после полного прямого фазового превращения под действием некоторого напряжения и разгрузки подвергнуть образец из СПФ, перешедшего в мартенситное фазовое состояние, монотонному изотермическому нагружению, то можно убедиться в том, что материал явно подвергся деформационному упрочнению, тем более существенному, чем большее напряжение действовало при предшествующем прямом превращении (явление перекрестного упрочнения [3]). Необходимо отметить, что известные модели поведения СПФ, как правило, не описывают упомянутых выше явлений, связанных с немонотонным нагружением СПФ.

В работе предложена модель для описания этих явлений. Для моделирования изменения неупругих деформаций за счет фазовых (прямых или обратных) переходов используются определяющие соотношения, не апеллирующие к понятию поверхности нагружения, поскольку явление деформационного упрочнения для развития или уменьшения фазовых деформаций в СПФ не характерно. В частности, возможно использование определяющих соотношений, полученных в модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [4, 5]:

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon_0 \delta_{ij} dq + \left[\frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \Phi_1(\sigma_i) (1 - qf(q)) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst} \right] dq \quad (1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst}}{q} dq \quad (2)$$

Здесь формула (1) соответствует прямому, а формула (2) — обратному превращению, $d\varepsilon_{ij}^{ph}$ — приращение неупругой деформации, связанное с фазовым переходом, q — объемная доля мартенситной фазы, ε_{ij}^{phst} — фазово-структурная деформация, σ_{ij}, σ_i — тензор и интенсивность напряжений, штрихом обозначены компоненты девиатора, ρ_D — постоянная материала, имеющая смысл интенсивности

кристаллографической деформации фазового превращения, ε_0 — линейная деформация объемного эффекта реакции фазового превращения, $\Phi_1(\sigma_i)$ — материальная функция, имеющая смысл функции распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное фазовое состояние), $f(q)$ — материальная функция, определяющая соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов при прямом фазовом превращении.

В то же время, при описании развития структурных деформаций, для которого характерны различные виды деформационного упрочнения, понятие напряжения начала неупругого деформирования (для сокращения называемого далее «пределом текучести») необходимо. Однако, в общем случае понятие единого предела текучести представительного объема СПФ не имеет смысла, поскольку различные элементарные мартенситные объемы, составляющие представительный объем, могли зародиться в процессе прямого превращения при различных напряжениях и поэтому обладают различными напряжениями начала неупругого деформирования. Следовательно, в случае роста интенсивности напряжений деформации мартенситной неупругости испытывает только часть представительного объема. При этом упруго ведут себя те элементарные мартенситные объемы, предел текучести которых выше, чем величина интенсивности напряжений, действующих в данном представительном объеме. В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях для приращения структурной деформации предложена следующая зависимость [4, 5]

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = q \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \Phi'_2(\sigma_i) d\sigma_i \quad (3)$$

В (3) $d\varepsilon_{ij}^{st}$ — приращение неупругой деформации за счет структурного перехода, $\Phi'_2(\sigma_i)$ — материальная функция, имеющая смысл плотности распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме материала (мартенситное фазовое состояние). В рамках модели [4,5] форма (3) справедлива лишь для активного нагружения

$$d\sigma_i > 0 \quad (4)$$

причем

$$\sigma_i = \sigma_i^{\max} \quad (5)$$

где σ_i^{\max} — максимальное значение интенсивности напряжений за всю историю существования мартенсита в данном представительном объеме СПФ. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то $d\varepsilon_{ij}^{st} = 0$. Ясно, что формула (3) при монотонном нагружении СПФ, вообще говоря, не применима, поскольку множитель q , стоящий в правой части (3), свидетельствует о том, что вся мартенситная часть представительного объема СПФ испытывает структурное превращение, а величина σ_i^{\max} как раз и трактуется как единый предел текучести всех мартенситных элементов представительного объема.

Предлагается, сохранив условие активного нагружения (4), отказаться от требования (5). В дополнении к условию (4) будет определяться часть мартенситного объема, задаваемая величиной объемной доли q_{st} , такой что $0 \leq q_{st} \leq q$, в которой происходит структурный переход. Величина q_{st} должна фигурировать вместо множителя q в правой части (3).

Предлагается алгоритм определения величины q_{st} , основанный на следующих предположениях.

1. В каждой точке процесса интенсивность напряжений во всех мартенситных элементах представительного объема одинакова и равна интенсивности макроскопических напряжений, действующих в этом представительном объеме. Приращение структурной деформация представительного объема может быть получено с использованием приращений структурных деформаций мартенситных элементов путем осреднения по Рейссу.

2. При зарождении мартенситного элемента в процессе прямого превращения его предел текучести равен интенсивности напряжения, действовавшего в момент образования этого элемента.

3. Предел текучести мартенситного элемента равен максимальному за всю историю существования данного элемента значению интенсивности напряжений, действовавших в данном элементе.

4. Приращение структурной деформации мартенситного элемента соосно девиатору действующего в нем напряжения и пропорционально приращению интенсивности этих напряжений.

5. При обратном фазовом превращении порядок исчезновения мартенситных элементов является противоположным порядку их возникновения при предшествующем прямом превращении. Элементы, возникшие последними, исчезают в первую очередь.

На основании сформулированных положений предлагается следующие алгоритмы определения объемной доли q_{st} мартенситных элементов представительного объема, в которых в данной точке процесса происходит структурное превращение. Происходящий в данном представительном объеме СПФ термомеханический процесс делится на фрагменты прямого или обратного фазового превращения. На каждом из таких фрагментов величина объемной доли мартенситной фазы или монотонно возрастает, или монотонно убывает. Следовательно, на каждом отдельном фрагменте величина q характеризует не только объемную долю мартенсита в представительном объеме, но и может трактоваться как временеподобный параметр процесса. Каждое значение q определяет точку процесса, в которой объемная доля мартенситной фазы выросла до значения q при прямом превращении или уменьшилась до значения q при обратном превращении, или, что то же, элементарный объем мартенсита dq , зародившийся при прямом превращении или исчезнувший при обратном превращении в точке процесса q .

Далее рассматривается процесс прямого превращения, который характеризуется зависимостью

$$\sigma_i = f_1(q) \quad (6)$$

Согласно этой зависимости в тот момент, когда величина объемной доли мартенситной фазы достигла значения q , интенсивность напряжений в представительном объеме была равна σ_i , или, что то же, мартенситный элемент dq , зародившийся при прямом превращении, когда величина объемной доли мартенситной фазы была q_0 имеет при зарождении предел текучести, равный $f_1(q_0)$. График зависимости (6) будет далее для краткости называться первой кривой.

При продолжении фазового перехода пределы текучести мартенситных эле-

ментов могут меняться. Далее для каждой точки процесса прямого превращения, определяемой значением $q = q_0$, может быть построена функция

$$\sigma^* = f_2(q, q_0), \quad q \leq q_0 \quad (7)$$

обозначающая предел текучести, который имеет мартенситный элемент, зародившийся в точке процесса q в тот момент, когда объемная доля мартенситной фазы достигла значения q_0 . На основании сформулированных выше предположений легко установить следующие свойства графика зависимости (7), который далее для краткости будет называться второй кривой.

1. $f_2(q_0, q_0) = f_1(q_0)$. Отсюда следует, что конечная точка второй кривой всегда лежит на первой кривой.

$$2. f_2(q_1, q_0) = \max_{q_1 \leq q \leq q_0} f_1(q).$$

3. $f_2(q_1, q_0) \geq f_2(q_2, q_0)$ при $q_1 \leq q_2 \leq q_0$. Отсюда следует, что вторая кривая, построенная для произвольного значения q_0 , не может иметь участков строгого возрастания.

4. Пусть на отрезке $q \in [q_1, q_2]$ функция $f_2(q, q_0)$ строго убывает по q . В этом случае функция $f_1(q)$ также монотонно убывает на отрезке $[q_1, q_2]$, причем фрагмент второй кривой, соответствующий $q \in [q_1, q_2]$ идентичен отрезку первой кривой для тех же значений аргумента.

5. Если прямое превращение на некотором фрагменте изменения параметра $q \in [q_1, q_2]$ происходит при монотонном убывании σ_i , то структурного превращения не происходит ни в одном из мартенситных элементов представительного объема, и предел текучести образовавшихся на этом фрагменте мартенситных элементов не меняется, т. е. сохраняет значение, полученное этим элементом при его зарождении. В результате фрагмент второй кривой для $q \in [q_1, q_2]$ совпадает с соответствующим фрагментом первой кривой.

6. Пусть на некотором фрагменте $q \in [q_1, q_2]$ роста значений q прямое превращение происходит при монотонно возрастающей интенсивности напряжений. В этом случае величина интенсивности напряжений, действующих в представительном объеме СПФ, превосходит пределы текучести, полученные мартенситными элементами при их зарождении, по крайней мере, в некоторой левой окрестности точки q . В результате оказывается, что пределы текучести для всех значений q из этой окрестности одинаковы и равны значению σ_i в рассматриваемой точке процесса. Таким образом, на второй кривой появляются горизонтальные участки. В силу того, что вторая функция $f_2(q, q_1)$ для фиксированного значения q_1 не может возрастать по q , горизонтальный участок не может представлять собой несвязное множество, а является горизонтальным отрезком, правый конец которого совпадает с текущей точкой процесса, лежащей на возрастающей ветви первой кривой, а левый конец находится на ближайшей слева ниспадающей ветви второй кривой. Если такая точка отсутствует, то левая точка отрезка лежит на оси σ_i . Длина этого отрезка как раз и представляет собой величину q_{st} . В рассматриваемом процессе происходит структурное превращение, отрезок двигается вертикально вверх, причем его длина не может убывать в процессе движения изображающей точки по восходящей ветви первой кривой. Дифференциал длины

дуги структурного деформирования $dL^{st} = \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^{st}d\varepsilon_{ij}^{st}}/3$ определяется по формуле $dL^{st} = q_{st}\rho_D\Phi'_2(\sigma_i)d\sigma_i$. Таким образом, касательный модуль, соответствующий структурной деформации, обратно пропорционален q_{st} и не может возрастать в рассматриваемом процессе. Конкретные примеры показывают возможность скачкообразного уменьшения касательного модуля.

Аналогичные алгоритмы предложены для случая обратного фазового превращения и для нагружения и разгрузки, происходящих при фиксированном значении параметра фазового состава. Установлено, что при обратном превращении, в отличие от прямого, в случае роста интенсивности напряжений структурное превращение может не происходить.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментального исследования (грант №11-01-00503_а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мовчан А. А., Казарина С. А. Термоупругие превращения в образцах из никелида титана при одноступенчатом и двухступенчатом нагружении // Деформация и разрушение материалов. 2006. №7. С. 19–23.
- [2] Мовчан А. А., Казарина С. А. Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15. №1. С. 105–116.
- [3] Мовчан А. А., Казарина С. А., Тант З. А. Аналог теории пластичности для описания деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформации и разрушение материалов. 2009. №9. С. 2–6.
- [4] Мовчан А. А., Мовчан И. А., Сильченко Л. Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Изв. РАН. МТТ. 2010. №3. С. 118–130.
- [5] Мовчан А. А., Сильченко Л. Г., Сильченко Т. Л. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 2011. №2. С. 44–56.

Mishustin I. V., Movchan A. A. *Modeling of shape memory alloys behavior in the case of non-monotone loading*. Description variant of the mechanical behavior of shape memory alloys in the case of non-monotone loading is proposed taking into account the different types of strain hardening suitable for these materials.

МЕТОДЫ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ С КОМПОЗИТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Наседкин А. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе описываются подходы, связанные с нестандартным и многомасштабным конечно-элементным моделированием пьезоэлектрических устройств, ориентированных в большей степени на ультразвуковые медицинские применения.

Введение. Пьезоэлектрические устройства с композитными пьезоэлементами, и, в частности, пористые пьезоматериалы, в настоящее время становятся все более востребованными для разнообразных ультразвуковых применений. Основная выгода при использовании пьезокомпозитов заключается в возможности существенного улучшения основных параметров пьезоустройств, особенно, при их работе в акустических средах. Так, экспериментальные исследования показывают, что пористая пьезокерамика обладает большой объемной пьезочувствительностью в широкой полосе частот и меньшим импедансом по сравнению с плотной пьезокерамикой. При этом указанные эффекты усиливаются при повышении степени пористости керамики. В то же время, как было обнаружено в ряде исследований (см. ссылки в [1]), основные толщинные характеристики (пьезомодуль d_{33} , коэффициенты электромеханической связи k_{33} , k_t) для ряда пористых пьезокерамик практически не зависят от пористости, а соответствующие продольные величины (d_{31} , k_{31} , k_p) быстро убывают с ростом пористости. Данные соображения и лежат в основе применений пористых пьезокерамических материалов в качестве активных элементов для пьезоэлектрических излучателей и пьезогенераторов.

Для моделирования подобных пьезоэлектрических устройств в [2, 3] и ряде других работ был реализован комплекс средств многомасштабного анализа: на микроуровне — вычисление эффективных модулей мелкодисперсных фаз композитных материалов; на последующих уровнях — расчеты составных квазиоднородных сред с эффективными характеристиками. При этом для определения осредненных свойств пьезокомпозитов на микроуровне по методу эффективных модулей применялись алгоритмы моделирования связанных структур и конечно-элементные (КЭ) технологии решения задач сравнения для представительных объемов. Дополнительные уточнения здесь определялись учетом различных факторов: начальной пористостью, неоднородностью поляризации в окрестности пор и включений, поверхностных эффектов на наномасштабах и др.

1. Основные обозначения. Пусть Ω — ограниченная в \mathbb{R}^3 область, занимаемая пьезоэлектрическим материалом; Γ — граница области; \mathbf{n} — вектор внешней единичной нормали к Γ ; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор перемещений; $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ — электрический потенциал; t — время. По векторному полю \mathbf{u} и скалярному полю φ определяются тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} , соответственно, по формулам

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (1)$$

Будем использовать также следующие обозначения: $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$ — (псевдо-) вектор деформаций; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений второго ранга; $\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ — (псевдо-) вектор напряжений; \mathbf{D} — вектор электрической индукции; \mathbf{c}^E — 6×6 матрица упругих модулей, измеренных при постоянном электрическом поле; \mathbf{e} — 3×6 матрица пьезомодулей; $\boldsymbol{\epsilon}^S$ — 3×3 матрица диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянной деформации; $(\dots)^T$ — операция транспонирования; $\langle \dots \rangle = \int_{\Omega} (\dots) d\Omega$ — осредненная по объему величина.

2. Моделирование пористых пьезокомпозитов. Для расчета эффективных свойств пористых пьезокомпозитов использовался метод эффективных модулей в сочетании с моделированием представительных объемов и методом конечных элементов (МКЭ) [4, 5].

При такой стратегии первым этапом моделирования является выбор представительного объема композита. Рассмотрим пористый пьезокомпозит как бинарный композит, первой фазой которого является связный структурный каркас, а второй фазой — изолированные или связанные друг с другом поры достаточно больших размеров на микроуровне. Первый случай по классификации Р. Э. Ньюема отвечает связности 3-0, а второй — связности 3-3 (закрытые и открытые поры, соответственно). Представительный объем будем выбирать в форме куба, равномерно разбитого на меньшие одинаковые кубики, которые наделяются свойствами пьезокерамического материала или поры. При этом каждый маленький кубик удобно принять конечным элементом, а весь представительный объем — КЭ сеткой.

При небольшом проценте пор достаточно простым, но адекватным наблюдаемой на практике микроструктуре пористого композита, представляется представительный объем в виде кубической решетки, состоящей из одинаковых ячеек — кубиков, часть из которых случайным образом объявляется порами. Отметим, что такая модель для пористого композита при большом числе пор может потерять связность каркаса, а также не поддерживает структуру композита (3-0 или 3-3). Для построения связанных структур в кубической решетке можно использовать специальные алгоритмы типа [4], а также алгоритмы теории перколяции, позволяющие получать протекающие кластеры. При малой доле второй фазы можно строить кластеры из пор, а при большой пористости — кластеры из материала структурного каркаса. Ряд таких методов генерации представительных объемов был программно реализован В.В. Ремизовым и проанализирован в [5] применительно к пористым пьезоматериалам. Один из наиболее подходящих методов моделирования 3-0 и 3-3 бинарных композитов — метод ограниченной диффузией агрегации Виттена–Сандера был использован при расчетах пористых пьезокомпозитов в [1, 5].

Построенная КЭ сетка в виде связанной кубической решетки из пьезокерамических конечных элементов с включениями из пористых конечных элементов передавалась для дальнейших расчетов в программный комплекс ANSYS. На втором этапе моделировался процесс поляризации пористой пьезокерамики с целью определения неоднородностей пьезокерамического каркаса в окрестностях пор. Здесь по МКЭ в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ решалась задача квазиэлектростатики для пористого диэлектрика в области $\Omega = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$, сгенера-

рованной для представительного объема по одному из методов, описанных выше. При этом, каждую из кубических ячеек можно считать кубическим конечным элементом (КЭ) со своими диэлектрическими свойствами, различными для КЭ, заполненных материалом, и для пористых КЭ. В результате имеем следующую краевую задачу для неоднородной диэлектрической среды

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$\varphi = V_j, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad j = 1, 2; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q, \quad (3)$$

где L — линейный размер куба; $\Gamma = \Gamma_{\varphi 1} \cup \Gamma_{\varphi 2} \cup \Gamma_q$; $\Gamma_{\varphi j}$ — электроды $x_3 = 0$ и $x_3 = L$, для которых задается разность потенциалов $V_1 - V_2 = \kappa L E_p$, пропорциональная значению поля поляризации E_p с коэффициентом пропорциональности κ ; $\boldsymbol{\epsilon}$ — матрица диэлектрических проницаемостей неполяризованной керамики с порами.

После решения задачи (2), (3) находились значения векторов поляризации $\mathbf{P}^{ek} = \mathbf{D}^{ek} - \epsilon_0 \mathbf{E}^{ek}$ в центральной точке каждого КЭ с номером k , не являющегося порой. (Здесь через ϵ_0 обозначена диэлектрическая проницаемость вакуума.) С данными КЭ ассоциировались свои элементные системы координат $Ox_1^{ek}x_2^{ek}x_3^{ek}$, для которых оси Ox_3^{ek} выбирались такими, чтобы их направления совпадали с направлениями векторов поляризации \mathbf{P}^{ek} .

На третьем этапе моделирования КЭ электростатики диэлектриков модифицировались в элементы с возможностями пьезоэлектрического анализа. Новым элементам присваивались физико-механические свойства двух типов: поляризованной пьезокерамики для КЭ матрицы и пренебрежимо малые упругие и пьезоэлектрические модули и диэлектрические проницаемости, равные ϵ_0 , для пор. С поляризованными КЭ пьезокерамической матрицы связываются элементные системы координат $Ox_1^{ek}x_2^{ek}x_3^{ek}$, определенные по векторам поляризации \mathbf{P}^{ek} . Далее для определения эффективных модулей для неоднородного представительного объема по МКЭ решается статическая задача электроупругости (1),

$$\mathbf{L}^T(\nabla) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{L}^T(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (7)$$

где \mathbf{S}_0 — шестимерный вектор постоянных деформаций ϵ_{0ij} , а \mathbf{E}_0 — трехмерный постоянный вектор.

Выбирая различные ненулевые компоненты векторов \mathbf{S}_0 и \mathbf{E}_0 , можно определить конкретные эффективные модули пьезокомпозиата. Так для нахождения полного набора эффективных модулей пьезокерамики нужно решить пять раз задачу (1), (4)–(7). В результате будем иметь следующие расчетные формулы:

- I) $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \epsilon_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{1j}^{Eff} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \epsilon_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad e_{31}^{eff} = \langle D_3 \rangle / \epsilon_0;$
- II) $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \epsilon_0 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{j3}^{Eff} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \epsilon_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad e_{33}^{eff} = \langle D_3 \rangle / \epsilon_0;$
- III) $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \epsilon_0 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{44}^{Eff} = \langle \sigma_{23} \rangle / (2\epsilon_0), \quad e_{15}^{eff} = \langle D_2 \rangle / (2\epsilon_0);$
- IV) $\boldsymbol{\epsilon}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad e_{15}^{eff} = -\langle \sigma_{13} \rangle / E_0, \quad \epsilon_{11}^{Eff} = \langle D_1 \rangle / E_0;$

$$V) \quad \epsilon_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad e_{3j}^{eff} = -\langle \sigma_{jj} \rangle / E_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \epsilon_{33}^{Seff} = \langle D_3 \rangle / E_0.$$

Типичные картины зависимостей эффективных пьезомодулей $r(d_{3j}) = d_{3j}^{eff} / d_{3j}$, $r(g_{3j}) = g_{3j}^{eff} / g_{3j}$ ($j = 1, 3$) от пористости демонстрируются на рисунке 1 для пористой пьезокерамики PZT-4 [3]. Данные величины отнесены к соответствующим пьезомодулям d_{3j} и g_{3j} сплошной керамики. Как видно из рисунка 1а, пьезомодуль d_{33}^{eff} остается практически постоянным, в то время как пьезомодуль d_{31}^{eff} убывает с ростом пористости. Такие зависимости для различных типов пьезокерамики были также получены ранее экспериментально в ряде работ (см. ссылки в [1]). Между тем, коэффициенты пьезочувствительности g_{33}^{eff} и g_{31}^{eff} возрастают с ростом пористости, причем особенно сильно для высокопористой пьезокерамики (рисунок 1б).

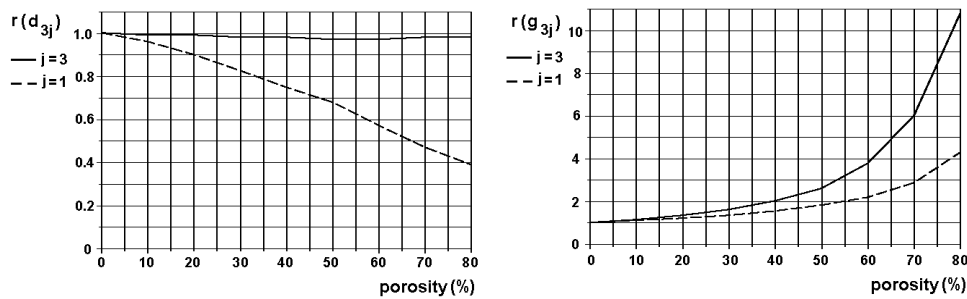


Рисунок 1 – Зависимости эффективных модулей от пористости: (а) $r(d_{3j})$; (б) $r(g_{3j})$

3. Моделирование пьезоэлектрических устройств из пористой пьезокерамики. Постоянство толщинного пьезомодуля d_{33}^{eff} в сочетании с низким импедансом определяет перспективность использования пористой пьезокерамики в качестве активных элементов пьезоизлучателей сильного ультразвука в акустических средах. Так, в [2] и др. работах изучались фокусирующие пьезоизлучатели из пористой пьезокерамики, в том числе с переходными слоями и многоэлектродными покрытиями. Здесь нужно отметить необходимость использования при конечно-элементном анализе элементных систем координат, связанных с неоднородностями поляризации; конечных элементов контакта твердых деформируемых и жидких сред; неотражающих импедансных границ и т. д. Кроме того, при высокой интенсивности ультразвука существенную роль играют нелинейные эффекты и температурные поля. Тогда вместо классических уравнений акустики необходимо использовать нелинейные уравнения, учитывать диссипативные эффекты и связанность акустических и температурных полей. Проведенные исследования показали эффективность использования пористой пьезокерамики для создания пьезоизлучателей ультразвуковых акустических полей высокой интенсивности и малой фокальной области.

Высокая пьезочувствительность высокопористой пьезокерамики определяет ее перспективы для создания сенсоров и пьезогенераторов. Пьезоэлектрические генераторы особенно интересны как устройства «зеленой» энергии, например, при нагружении пьезокерамики от движения пешеходов или транспортных средств. Так, в [3] был исследован 1-3 пьезокомпозит, составленный из эпоксидной матрицы и периодически расположенных в ней пьезоэлектрических стержней, выполненных из пористой пьезокерамики PZT-4, поляризованной по толщине.

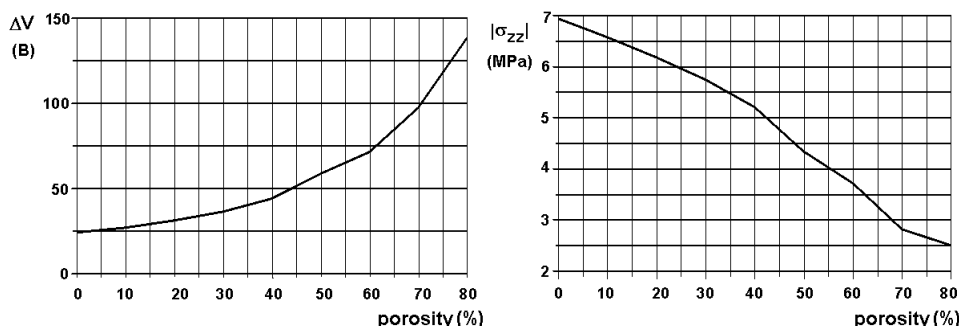


Рисунок 2 – Зависимости от пористости результатов для композитного пьезогенератора:
 (а) электрический потенциал на верхнем электроде;
 (б) максимальные механические напряжения в пьезоэлектрическом стержне

Некоторые из результатов решения статической задачи для 1-3 композита с пьезокерамикой PZT-4 с различной пористостью показаны на рис. 2. Как видно из рисунка 2а, электрический потенциал на верхнем электроде возрастает с пористостью со средней скоростью роста коэффициентов g_{33}^{eff} и g_{31}^{eff} . Наоборот, максимальные механические напряжения $|\sigma_{zz}|$ в пьезоэлектрических стержнях убывают с ростом пористости (Рис. 2б). Таким образом, из полученных конечно-элементных результатов можно заключить, что пьезоэлектрические генераторы из пористой пьезокерамики перспективны в качестве источников возобновляемой энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00829, 13-01-00943).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Наседкин А. В., Шевцова М. С. Сравнительный анализ результатов моделирования пористой пьезокерамики методами эффективных модулей и конечных элементов с экспериментальными данными // Инженерный вестник Дона. 2013. № 2. С. 9.
- [2] Домашенкина Т. В., Наседкин А. В., Рыбьянец А. Н. Конечно-элементный анализ фокусирующего ультразвукового пьезоизлучателя в режиме установившихся колебаний // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 174–179.
- [3] Наседкин А. В. Моделирование пьезогенераторов из пористой пьезокерамики как источников возобновляемой энергии на транспорте // Вестник РГУПС. 2011. № 4. С. 193–201.
- [4] Nasedkin A. V., Shevtsova M. S. Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity / Ferroelectrics and Superconductors: Properties and Applications. Ed. I. A. Parinov. N.-Y.: Nova Science Publishers. 2011. Ch. 7. P. 231–254.
- [5] Nasedkin A. V., Shevtsova M. S. Multiscale computer simulation of piezoelectric devices with elements from porous piezoceramics / Physics and mechanics of new materials and their applications. Eds. I. A. Parinov and S.-H. Chang. Nova Science Publishers, N.-Y., 2013. Ch. 16. P. 185–202.

Nasedkin A. V. *Multiscale modelling method for ultrasonic piezoelectric devices with composite elements.* This paper concerns some approaches related to non-standard and multiscale finite element modelling of piezoelectric devices oriented for the most part to medical ultrasonic applications.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО УГОЛЬНОГО ПЛАСТА С ТРЕЩИНАМИ И ФИЗИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В МАТЕРИАЛЬНЫХ МОДУЛЯХ

Наседкина А. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается связанная пороупругая задача для неоднородного пороупругого угольного пласта с трещинами различного размера и положения и физическими нелинейностями в материальных модулях. Для решения нелинейной нестационарной задачи пороупругости по методу конечных элементов используется аналогия между задачами поро- и термоупругости. Результаты расчетов позволяют проанализировать распределение порового давления и концентрацию напряжений в угольном пласте.

1. Введение. В современной геофизике большое значение имеет процесс оптимизации эксплуатации месторождений и, в частности, их комплексного использования. Примером такого использования месторождений является добыча метана из угольных пластов.

Предварительная дегазация угольных пластов очень важна для подготовки месторождений к эффективной разработке. Кроме того, угольный метан может использоваться как нетрадиционный источник энергии. Одним из способов извлечения метана является метод гидродинамического воздействия на угольный пласт, при котором вода через скважину, пробуренную с земной поверхности, нагнетается в пласт под большим давлением. Жидкость перемещается вглубь пласта, отесняя и сжимая метан в порах. Когда давление достигает критического значения гидроразрыва, в пласте появляются трещины и метан высвобождается из связанного состояния в поровом пространстве. Нарушение структуры угольного пласта приводит к газоотдаче в зоне дегазации.

В связи с этим представляет значительный интерес разработка математических моделей, в том числе процессов фильтрации при учете влияния напряженно-деформированного состояния в массивах горных пород с дефектами и структурными превращениями, вызванными фильтрацией.

В данной работе исследуются математические и конечно-элементные модели начальной стадии процесса гидрорасчленения неоднородного пороупругого угольного пласта с физическими нелинейностями в материальных модулях и с трещинами. Математическая модель формулируется с позиции теории пороупругости в осесимметричной постановке. Угольный пласт рассматривается как двухфазная пористая среда, состоящая из твердой фазы скелета и жидкой фазы фильтрующегося в порах флюида. Проводится связанный нестационарный нелинейный анализ для твердой и жидкой фаз, то есть совместное решение уравнений деформации пористого тела и фильтрации жидкости по закону Дарси в пористой среде.

2. Постановка задачи. Рассмотрим насыщенную пористую среду с упругой матрицей. Приведем систему уравнений насыщенной пороупругой среды при малой пористости с единичным тензором Био

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{I} p) = \rho \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{M} \dot{p} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{\rho_f g} \cdot \nabla p \right) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор перемещений, p — поровое давление, ρ — плотность, \mathbf{c} — тензор упругих деформаций четвертого ранга, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}^T))/2$ — тензор деформаций, \mathbf{I} — единичный тензор второго ранга, $\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K_f} \phi$, N^{-1} — обратный модуль Био, который связывает изменение пористости с изменением давления при постоянной деформации, K_f — объемный модуль сжатия жидкости, ϕ — пористость, \mathbf{K} — диагональный тензор коэффициентов фильтрации второго ранга, ρ_f — плотность жидкости, \mathbf{f} — вектор плотности массовых сил.

Рассмотрим осесимметричную постановку задачи в цилиндрической системе координат (r, φ, z) для изотропного угольного пласта. Рассматриваемый угольный пласт состоит из трех слоев: слоя угля (толщины h_1) и двух слоев сопутствующих пород — глинистого (h_2) и песчанистого (h_3) сланцев, имеющих различные механические и фильтрационные свойства. Предположим, что в одном из слоев пласта имеется кольцевая внутренняя трещина длиной l , расположенная симметрично по толщине слоя. На рис. 1 изображен угольный пласт с трещиной в угольном слое.

Граничные условия для системы (1)–(2) характеризуются тем, что на границе скважины $r = r_0$ и на берегах трещины задается поровое давление как известная линейная возрастающая функция от времени. Предполагается также, что отсутствует утечка рабочей жидкости в кровлю $z = h_1 + h_2 + h_3$ и подошву $z = 0$ пласта, и пласт находится в условиях сжатия массивом горных пород общей толщины h со средней плотностью ρ_h .

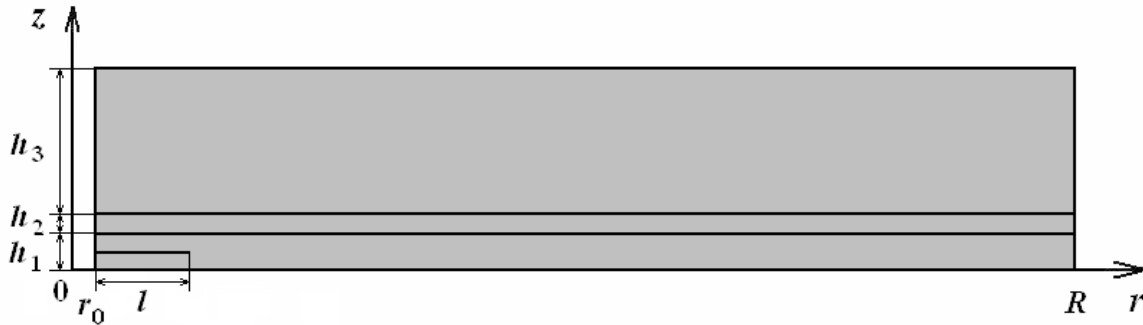


Рисунок 1 – Схема трехслойного угольного пласта с трещиной в угольном слое

Для моделирования явления гидрорасчленения угольного пласта примем гипотезу о нелинейных зависимостях от давления материальных модулей угольного слоя пласта, которые характеризуются резкими изменениями значений модулей при достижении порогового давления гидроразрыва. Примем следующую нелинейную зависимость компонент диагонального тензора фильтрации $K_{ii} = K$ от порового давления p [1]

$$K(p) = \begin{cases} K_0, & p_s < p < p_1, \\ K_1 + (K_2 - K_1) \frac{(p - p_1)}{(p_2 - p_1)}, & p_1 \leq p \leq p_2, \end{cases} \quad (3)$$

где K_0 , p_s — начальные значения коэффициента фильтрации и порового давления, соответственно; K_1 — значение коэффициента фильтрации при $p = p_1$, p_1 — давление гидроразрыва; K_2 — конечное значение коэффициента фильтрации при $p = p_2$, p_2 — максимальное значение давления.

Зависимость (3) делает рассматриваемую задачу существенно нелинейной. В продолжение исследований [2] далее в данной работе примем аналогичную зависимость для модуля Юнга угольного слоя пласта.

3. Численные результаты. Численное решение нелинейной нестационарной задачи пороупругости (1)–(2) можно осуществить с помощью техники метода конечных элементов, реализованной в пакете ANSYS версии 11.0. Заметим, что при соответствующей замене переменных и обозначений задачу пороупругости можно рассматривать как задачу термоупругости, что позволяет использовать стандартные модули решения нелинейных задач термоупругости в пакете ANSYS. Так как порядок входных данных задачи сильно различается, то для сходимости численного решения расчеты проводятся в безразмерных переменных.

В качестве входных данных были взяты параметры трехслойного угольного пласта вблизи одной из скважин Краснодонского месторождения Донбасского бассейна. Пласт залегает на глубине $h=400$ м со средней плотностью вышележащих пород $\rho_h=2000$ кг/м³. Толщина угольного слоя пласта $h_1=1.35$ м, толщина слоя песчанистого сланца $h_2=0.6$ м, толщина слоя глинистого сланца $h_3=4.95$ м. В толщу пласта с земной поверхности пробурена скважина радиусом $r_0=0.05$ м, через которую осуществляется гидродинамическое воздействие на пласт в радиусе расчетной зоны $R=200$ м. Характеристики процесса нагнетания жидкости в скважину следующие: начальное пластовое давление $p_s=4.5 \cdot 10^6$ Па, давление гидроразрыва $p_1=8 \cdot 10^6$ Па, максимальное давление $p_2=15 \cdot 10^6$ Па, время закачивания жидкости в скважину $t_2=720$ с.

Для коэффициента фильтрации угольного слоя пласта была принята зависимость (3), где начальное значение коэффициента фильтрации $K_0=1.04 \cdot 10^{-6}$ м/с, значение коэффициента фильтрации при гидроразрыве $K_1=49.9 \cdot 10^{-6}$ м/с, максимальное значение $K_2=55.96 \cdot 10^{-6}$ м/с. Для модулей Юнга угольного слоя пласта была принята аналогичная зависимость с уменьшением модуля Юнга от начального значения $E_0=5.5 \cdot 10^9$ Па до $E_1=5.0 \cdot 10^9$ Па при достижении давлением значения давления гидроразрыва. Материальные модули сопутствующих слоев сланцев не зависят от давления. Эти модули, плотности и не указанные выше модули угольного пласта приведены в [1].

При проведении расчетов были рассмотрены трещины различного размера и положения. Для моделирования сингулярности напряжений в окрестности вершины трещины при построении конечно-элементной сетки создается слой вырожденных конечных элементов со сдвигом срединных узлов на четверть длины стороны для элементов, окружающих вершину трещины.

На основе анализа распределения давления можно определить влияние трещины на величину зоны дегазации. Рассмотрим графики распределения безразмерного порового давления $\tilde{p} = p/p_2$ вдоль безразмерного радиуса $\tilde{r} = r/R$ для угольного пласта с трещиной в угольном слое в точках угольного слоя с координатами $\tilde{z} = \tilde{h}_1/2$, $\tilde{h}_1 = h_1/R$ (рис. 2). Из рисунка видно, что при наличии трещины

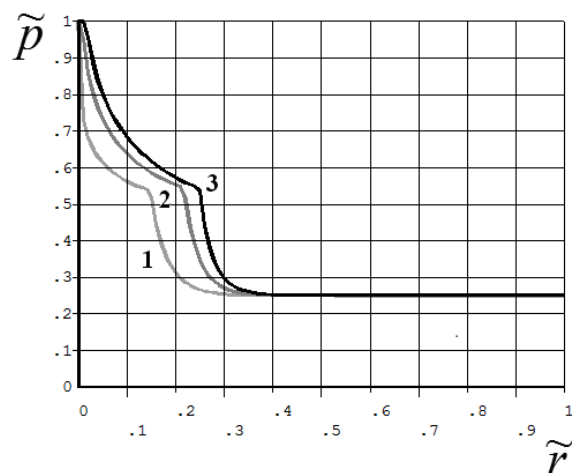


Рисунок 2 – Графики распределения давления по радиусу в угольном слое пласта: 1 — для пласта без трещины, 2 — для пласта с трещиной длиной $l = 1.25h_1$ в угольном слое, 3 — для пласта с трещиной длиной $l = 2.5h_1$ в угольном слое

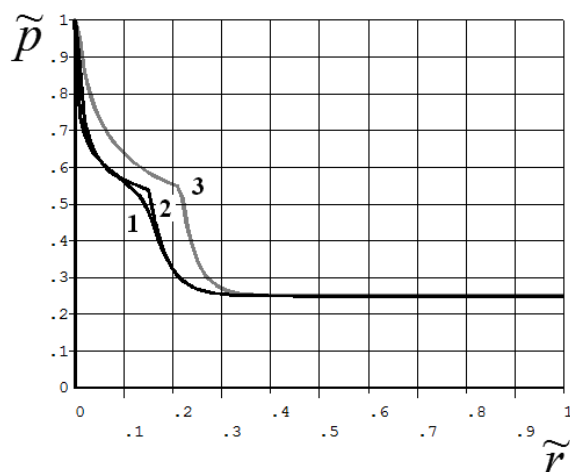


Рисунок 3 – Графики распределения давления по радиусу в угольном пласте с трещиной: 1 — в слое песчанистого сланца с трещиной в слое песчанистого сланца, 2 — в угольном слое с трещиной в слое песчанистого сланца, 3 — в угольном слое с трещиной в угольном слое

по окончании гидродинамического воздействия увеличивается размер зоны дегазации. При этом зона разупрочнения угольного слоя пласта увеличивается незначительно и составляет $0.3R \approx 60$ м для пласта без трещины (кривая 1) и около $0.38R \approx 76$ м для пластов с трещинами в угольном слое (кривые 2 и 3). Зона активного гидрорасчленения оценивается для угольного слоя пласта без трещины в $0.15R \approx 30$ м (кривая 1), а при наличии трещины длиной $l = 1.25h_1$ в угольном слое размер этой зоны возрастает до $0.21R \approx 42$ м (кривая 2), но при увеличении трещины в два раза меняется уже не так сильно: $0.25R \approx 50$ м (кривая 3).

Рассмотрим влияние расположения трещины на распределение порового давления. Пусть трещина той же длины $l = 1.25h_1$ расположена в середине верхнего

слоя песчанистого сланца. Сравним кривые распределения давления для такого пласта с кривыми порового давления для пласта в слое угля (рис. 3). Из рисунка видно, что при расположении трещины в слое песчанистого сланца кривые распределения давления в этом слое (кривая 1) и в слое угля (кривая 2) отличаются незначительно. Различие наблюдается только в том, что в слое песчанистого сланца пики сглажены, что объясняется отсутствием скачка коэффициента фильтрации для слоев сланцев. При этом из сравнения кривых 2 и 3 следует, что расположение трещины в слое песчанистого сланца не изменяет размер зоны разупрочнения угольного слоя пласта, при этом зона активного гидрорасчленения угольного слоя пласта уменьшается до размера $0.16R \approx 32$ м.

Расчеты показали, что принятая нелинейная зависимость для модулей Юнга угольного слоя практически не влияет на результаты, по сравнению с расчетами для постоянных модулей Юнга.

Результаты расчетов также позволяют получить картины распределения порового давления, перемещений, деформаций и напряжений и провести анализ концентрации напряжений в вершине трещины.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №12-01-31411 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Наседкин А. А., Наседкин А. В., Иоване Ж.* Моделирование нестационарного воздействия на многослойный пороупругий пласт с нелинейными геомеханическими свойствами // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2009. № 4. С. 23–32.
- [2] *Наседкин А. А.* Моделирование пороупругого нелинейного многослойного пласта с трещиной при гидродинамическом воздействии // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV межд. конф., г. Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г. Ростов-на-Дону: изд-во ЮФУ, 2010. С. 227–230.

Nasedkina A. A. *Modelling of multilayer coal seam with cracks and physical nonlinearities in material modules.* The paper considers a coupled poroelastic problem for an inhomogeneous poroelastic coal seam with cracks of various sizes and locations and physical nonlinearities in material modules. Nonlinear transient problem of poroelasticity is solved with the help of finite element method using the analogy between the problems of poro- and thermoelasticity. The results of the computations allow analysing the distribution of the pore pressure and stress concentration in the coal seam.

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Недин Р. Д., Нестеров С. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Анализ неоднородных полей внутренних напряжений в телах представляет собой важнейшую задачу механики деформируемого твердого тела. В настоящей работе исследованы обратная задача об идентификации неоднородных ПН в пластине и обратная задача термоупругости для стержня на основе акустического зондирования.

Введение. Предварительные напряжения (ПН) существуют в теле при отсутствии внешних тепловых или физических воздействий (в литературе иногда встречаются другие названия: остаточные напряжения, начальные напряжения). ПН возникают чаще всего в процессе технологической обработки (сварка, закалка, термообработка, прокатка); также такие напряжения могут являться результатом действия нагрузок при упругом или вязкоупругом деформировании и может достигать больших значений. Одна из главных задач технологов — снизить уровень предварительных напряжений, однако выявить реальный уровень предварительных напряжений в конструкции удастся далеко не всегда. Учет предварительных напряжений позволит корректно моделировать сложные системы и адекватно описывать их реальное поведение в режиме эксплуатации при наличии сложного термосилового нагружения, меняющегося во времени. Учет ПНС позволяет корректировать ряд моделей и более адекватно моделировать подземные сооружения, трубопроводы и методы их диагностики на основе акустических методов зондирования.

Во многих областях техники все чаще приходится решать задачи, связанные с нахождением температурных напряжений неоднородных тел. При этом начальным этапом при использовании моделей линейной термоупругости с неоднородными характеристиками является определение точных законов неоднородности, от знания которых зависит эффективность применения неоднородных материалов. Термомеханические характеристики неоднородных тел являются функциями координат и не могут быть определены из простых макроэкспериментов, поэтому задача их идентификации относится к классу коэффициентных обратных задач.

Общая постановка задачи о колебаниях предварительно напряженного тела. Линеризованная краевая задача об установившихся колебаниях предварительно напряженного тела после отделения временного множителя имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \rho \omega^2 \underline{\underline{u}} = 0, \quad (1)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{\sigma}}^0, \nabla \underline{\underline{u}}) + \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (2)$$

$$\underline{\underline{u}}|_{S_u} = 0, \quad \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}}|_{S_u} = \underline{\underline{P}}, \quad (3)$$

где \underline{u} — вектор смещения относительно конфигурации κ_2 , \underline{T} — несимметричный тензор напряжений Пиолы, $\underline{\Gamma}$ — тензор, зависящий в общем случае от компонент тензора предварительных напряжений $\underline{\sigma}^0$ и градиента смещений $\nabla \underline{u}$, $\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$ — тензор малых деформаций, \underline{L} — тензор линейной упругости, задаваемый материальными константами и тензором деформаций. В случае линейно упругого тела, в качестве этого тензора следует рассмотреть тензор напряжений в рамках классического закона Гука $\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\epsilon} = \underline{L}$, где \underline{C} — тензор упругих модулей 4-го ранга.

При этом будем рассматривать модель ПН, предложенную Е. Трефтцем, В.В. Новожиловым, К. Васидзу, А.Н. Гузем и Л. Робертсоном: $\underline{\Gamma}(\underline{\sigma}^0, \nabla \underline{u}) = \underline{\sigma}^0 \cdot \nabla \underline{u}$,

Обратная задача о предварительно напряженной пластине. Рассмотрим задачу об идентификации неоднородного поля ПН $\sigma_{xx}^0(x, y)$, $\sigma_{yy}^0(x, y)$, $\sigma_{xy}^0(x, y)$, содержащегося в тонкой пластине, занимающей область $\{x \in [0, l], y \in [-h/2, h/2]\}$, защемленной одной гранью ($x = 0$). Воспользуемся идеей акустического метода неразрушающего контроля: приложим периодически меняющуюся зондирующую касательную нагрузку к верхней грани пластины, реализуя ее планарные колебания (в работах [1, 2] описывались различные типы зондирующих нагрузок, приложенных к границе пластины, но выяснилось, что этот тип дает самые точные результаты идентификации одноосных ПН).

Параметры материала (коэффициенты Ламе и плотность), размеры пластины и зондирующая нагрузка $\underline{\tau}|_{l_\sigma}$ заданы. Также будем считать, что известна дополнительная информация о поле смещений $\underline{u}|_{l_\sigma}$ под нагрузкой в конечном наборе частот $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$, моделирующая данные зондирования.

Сформулированная выше задача об отыскании поля ПН представляет собой малоисследованную коэффициентную обратную задачу, которая является нелинейной некорректной проблемой. В работе [2] выведено соотношение, позволяющее для вышеописанной пластины реализовать итерационный процесс по определению поправок компонент тензора предварительных напряжений по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{xx}^{0(n)} K_{xx}^{(n-1)} + \sigma_{yy}^{0(n)} K_{yy}^{(n-1)} + \tau_{xy}^{0(n)} K_{xy}^{(n-1)}] d\Omega = F^{(n-1)}, \quad (4)$$

где $\sigma_{xx}^{0(n)}$, $\sigma_{yy}^{0(n)}$, $\sigma_{xy}^{0(n)}$ — поправки к соответствующим компонентам предварительных напряжений на текущей итерации (при этом $\sigma_{ij}^{0(0)}$ — заранее выбранное начальное приближение), $K_{xx}^{(n-1)} = (u_{x,x}^{(n-1)})^2 + (u_{y,x}^{(n-1)})^2$, $K_{yy}^{(n-1)} = (u_{x,y}^{(n-1)})^2 + (u_{y,y}^{(n-1)})^2$, $K_{xy}^{(n-1)} = 2(u_{x,x}^{(n-1)} u_{x,y}^{(n-1)} + u_{y,x}^{(n-1)} u_{y,y}^{(n-1)})$, $F^{(n-1)} = \int_{l_\sigma} \tau(u_x^{(n-1)} - f_x) dl_\sigma$. f_x — компонента заданного поля смещений под зондирующей нагрузкой (дополнительная информация в постановке обратной задачи), (n) и $(n-1)$ означают номера итерации, $l_\sigma = \{x \in [0, l], y = h/2\}$ — верхняя грань пластины под зондирующей нагрузкой.

Разобьем область пластины на N равных прямоугольных подобластей — суперэлементов и введем на каждом из них функцию напряжений Эри $\Phi_i(x, y)$, опреде-

ленную в виде квадратичного полинома $\Phi_i = \frac{a_i}{2}x^2 + b_i xy + \frac{c_i}{2}y^2$ ($i = \overline{1, N}$). Выразим поправки $\sigma_{xx}^{0(n)}$, $\sigma_{yy}^{0(n)}$, $\sigma_{xy}^{0(n)}$ через одну функцию напряжений Эри $\Phi(x, y)$:

$$\sigma_{xx}^{0(n)} = \Phi_{,yy}; \quad \sigma_{yy}^{0(n)} = \Phi_{,xx}; \quad \tau_{xy}^{0(n)} = -\Phi_{,xy}. \quad (5)$$

Тогда компоненты ПН $\sigma_{xx}^{0(n)}$, $\sigma_{yy}^{0(n)}$, $\sigma_{xy}^{0(n)}$ примут вид кусочно-постоянных функций на всей области пластины. С учетом этого представления, зафиксировав несколько частот колебаний $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$, можно свести решение уравнения (4) к плохо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений относительно α_k (для ее решения использовался метод регуляризации Тихонова).

Ниже приведены результаты вычислительного эксперимента по идентификации неоднородных ПН для стальной пластины с параметрами $l = 1\text{ м}$, $b = 0.5\text{ м}$, $h = 0.1\text{ м}$, $E = 1.96 \cdot 10^{11}\text{ Па}$, $\nu = 0.28$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$ (рис. 1). Точные ПН задавались в виде поверхностей третьего порядка (что соответствует функции Эри пятого порядка):

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{0*} = c_2 + c_3x + d_3y + c_4x^2 + d_4xy - (2c_4 + a_4)y^2 - (2c_5 + 3a_5)xy^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)y^3, \\ \sigma_{yy}^{0*} = a_2 + a_3x + b_3y + a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2 + a_5x^3 + b_5x^2y + c_5xy^2 + \frac{1}{3}d_5y^3, \\ \sigma_{xy}^{0*} = -b_2 - b_3x - c_3y - \frac{1}{2}b_4x^2 - 2c_4xy - \frac{1}{2}d_4y^2 - \frac{1}{3}b_5x^3 - c_5x^2y - d_5xy^2 + \\ + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5)y^3, \end{cases} \quad (6)$$

при следующих значениях коэффициентов: $a_2 = 20$, $b_2 = 10$, $c_2 = 10$, $a_3 = 0.001221$, $b_3 = 0.123$, $c_3 = -0.1$, $d_3 = 0.02$, $a_4 = 0$, $b_4 = 0.01$, $c_4 = 0.01$, $d_4 = 0.001$, $a_5 = 0.001$, $b_5 = 0.001$, $c_5 = -0.001$, $d_5 = 0.001$ (получаемые при этом компоненты ПН измеряются в кг/см^2).

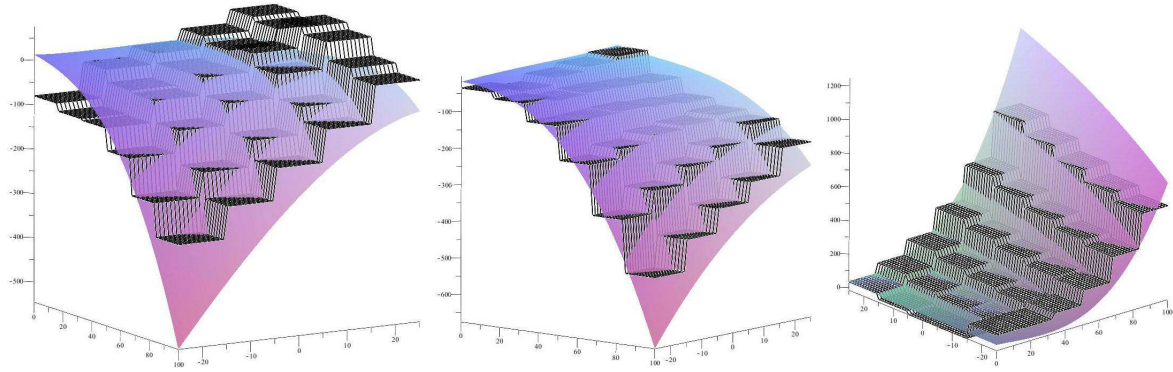


Рисунок 1 – Слева направо: σ_{xx}^0 (кг/см^2), σ_{yy}^0 (кг/см^2), σ_{xy}^0 (кг/см^2). Гладкая поверхность — точный закон, ломаная поверхность — восстановленный закон в классе кусочно-постоянных функций. Количество итераций: 19. Максимальные огрешности реконструкции соответственно: 14%, 9%, 3%

При проведении эксперимента частоты колебаний фиксировались между первой и второй резонансными частотами (всего было зафиксировано 6 частот, равномерно распределенных в выбранном диапазоне); выявлено, что концы диапазона должны быть достаточно близко к резонансам, чтобы получить приемлемую точность реконструкции. При этом рассмотрение частотного диапазона ниже первой резонансной частоты дает реконструкцию худшей точности.

Обратная задача термоупругости для стержня. Часто в процессе различных технологических операций в результате неравномерного остывания в твердых телах возникает неоднородное распределение ПН и температуры. Эффективность использования таких материалов зависит от точного знания начального термоупругого состояния. Поэтому актуальным является разработка методов идентификации ПН и температуры на основе решения коэффициентных обратных задач термоупругости. В работе представлена схема решения одномерной задачи. Рассмотрим продольные колебания жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного предварительно напряженного термоупругого стержня длины l под действием приложенной к торцу $x = l$ теплового потока. Начально-краевая задача, полученная на основе термодинамических соотношений в случае конечных деформаций после линеаризации имеет вид [4, 5]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + (E + \sigma_x^0 + \gamma \theta^0) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x) \theta, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}) = c(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma \theta^0 (1 + \frac{\sigma_x^0}{E} + \frac{\gamma}{E} \theta^0) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (9)$$

$$u(0, t) = \theta(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0 \phi(t), \quad \sigma_x(l, t) = 0. \quad (10)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (11)$$

Здесь $\sigma_x^0(x)$, $\theta^0(x)$ — ПН и температура соответственно, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и стационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial \sigma_x^0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial \theta^0}{\partial x}) = 0.$$

В обратной задаче требуется определить ПН и температуру из (7)–(11) по некоторой дополнительной информации о приращении температуры на торце стержня:

$$\theta(l, t) = f(t), \quad t \in [T_1, T_2].$$

Решение прямой задачи (7)–(11) сведено к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах по Лапласу и обращении полученных решений на основе теории вычетов, аналогично [3].

В основу метода решения обратной задачи положена минимизация функционала невязки на компактном множестве. Из уравнений равновесия и теплопроводности следует, что ПН является постоянной величиной $\sigma_x^0 = C_1$ а начальную температуру можно определить по формуле $\theta^0(x) = C_1 \int \frac{dx}{k(x)} + C_3$. Из априорной информации о значении коэффициента теплопроводности и ограниченности начальной температуры можно построить ограничения на искомые константы C_2 и C_3 в виде системы неравенств, которые формируют область изменения коэффициентов C_2, C_3 — компактное множество. Разбив эту область на сетку, из условия

минимизации функционала $J = \int_0^1 (f(t) - \theta(l, t))dt$ на построенном компактном множестве осуществляется подбор подходящей пары (C_2, C_3) .

Проведенные вычислительные эксперименты показали хорошее восстановление начальной температуры в классе линейных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта: 13-01-00196).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Nedin R., Vatulyan A.* Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // International Journal of Solids and Structures. 2013. № 50. P. 2107–2114.
- [2] *Ватульян А. О., Недин Р. Д.* К идентификации неоднородных предварительных напряжений // Вестник Санкт-Петербургского Государственного университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2011. С. 38–44.
- [3] *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Численная реконструкция термомеханических характеристик неоднородного термоупругого стержня // Труды XVI Межд. конференции. Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 С. 50–54.
- [4] *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. М.* Введение в акустоупругость // Киев: Наукова думка, 1977. 150 с.
- [5] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости // М.: Мир, 1970. 256 с.

Nedin R. D., Nesterov S. A. *On some inverse problems on determination of residual stress state.* The analysis of inhomogeneous fields of inner stresses in bodies presents vital problem of solid mechanics. In the present research the inverse problem on identification inhomogeneous residual stresses in a plate and the inverse problem of thermoelasticity for a beam are investigated on the basis of the acoustical probing method.

УРАВНЕНИЯ ОДНОГО ИЗ ВАРИАНТОВ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ

Нескородев Р. Н.

Донецкий национальный университет

В работе на основе предположений, предложенных в статье [1] получено дифференциальное уравнение шестого порядка теории изгиба ортотропных плит. Решение этого уравнения основано на использовании функций обобщенных комплексных переменных [2, 3]. Представления для перемещений и напряжений позволяют ставить граничные задачи с произвольным заданием внешних усилий по толщине плиты. Проведены численные исследования для плиты, ослабленной эллиптической (круговой) полостью.

1. Основные соотношения уточненной теории изгиба ортотропных плит. Рассмотрим ортотропную плиту толщины $2h$, отнесенную к системе координат $Oxyz$. Оси Ox и Oy расположены в срединной плоскости плиты, а Oz — нормальна к этой плоскости. Представление для перемещений выбираются в виде

$$u_1 = p_1(z)\partial_1\varphi_1(x, y), \quad u_2 = p_1(z)\partial_2\varphi_2(x, y), \quad u_3 = w_0(x, y) + p_2(z)w(x, y). \quad (1)$$

Выражения для напряжений найдем из уравнений закона Гука

$$\sigma_1 = p_1s_1, \quad \sigma_2 = p_1s_2, \quad \sigma_6 = p_1s_6; \quad (2)$$

$$\sigma_3 = p_1s_3, \sigma_4 = A_{44}(\partial_2w_0 + p_2\partial_2w + p_0\partial_2\varphi_2), \sigma_5 = A_{55}(\partial_1w_0 + p_2\partial_1w + p_0\partial_1\varphi_1), \quad (3)$$

$$s_i = A_{i1}\partial_1^2\varphi_1 + A_{i2}\partial_2^2\varphi_2 + A_{i3}w \quad (i = \overline{1, 3}), \quad s_6 = A_{66}\partial_1\partial_2(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$\partial_1 = \partial/\partial x, \quad \partial_2 = \partial/\partial y, \quad A_{ij} - \text{модули упругости.}$$

В представлениях (1)–(3) вводится функция $p_1(z)$, характеризующая распределение усилий по толщине плиты, ее производная $p_0(z)$, интеграл $p_2(z)$.

Выражения для напряжений (3) можно также найти, удовлетворяя уравнениям равновесия

$$\sigma_3 = [p_3(z) - p_2(h)]S_3, \quad \sigma_4 = [p_2(h) - p_2(z)]S_4, \quad \sigma_5 = [p_2(h) - p_2(z)]S_5. \quad (4)$$

$$S_5 = \partial_1s_1 + \partial_2s_6, \quad S_4 = \partial_1s_6 + \partial_2s_2, \quad S_3 = \partial_1S_5 + \partial_2S_4, \quad p_3 = \int p_2(z)dz.$$

Представления для напряжений σ_4 и σ_5 в (4) удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты. Однако, представления (4) не совпадают с соотношениями (3). Корректный результат получим, полагая:

1. поперечное нормальное напряжение σ_3 равно нулю (как в теории Кирхгофа);
2. поперечные усилия, полученные интегрированием соотношений (3) и (4) для напряжений σ_4 и σ_5 , равны [1].

Реализация указанных предположений приводит к дифференциальному уравнению шестого порядка относительно произвольной функции Φ :

$$(D_4 D_2 - \lambda^2 P_4) \Phi = 0. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} D_4 &= \partial_2^4 + 2q_0 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, & P_4 &= \partial_2^4 + 2q_1 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, & D_2 &= \partial_2^2 + q \partial_1^2, \\ \lambda^2 &= A_{55} k_0 / (A_{66} k_2), & q_0 &= (B_{11} - B_{12} q_1) / (2A_{66}), & q &= A_{55} / A_{44}, \\ q_1 &= (B_{12} + 2A_{66}) / B_{22}, & q_2 &= B_{11} / B_{22}, & B_{ik} &= A_{ik} - A_{i3} A_{3k} / A_{33} \quad (i, k = 1, 2, 3), \\ k_0 &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_0 dz, & k_2 &= p_2(h) - k_1, & k_1 &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_2 dz. \end{aligned}$$

Перемещения и напряжения выражаются через функцию $\Phi(x, y)$ так

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 \left[-\frac{1}{A_{66}} (\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2) \partial_2 \right] \Phi, & u_2 &= p_1 \left[\frac{1}{A_{66}} (q_1 \partial_2^2 + q_2 \partial_1^2) \partial_1 \right] \Phi, \\ u_3 &= \left[\frac{k_0}{A_{66}} (\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2) \frac{\partial_2}{\partial_1} \right] \Phi - \frac{k_2 D_4}{A_{55}} \frac{\partial_2}{\partial_1} \Phi + (k_1 - p_2) (q_3 \partial_2^2 + q_4 \partial_1^2) \partial_1 \partial_2 \Phi; \\ \sigma_1 &= p_1 [-2 (q_0 \partial_2^2 + q_2 \partial_1^2) \partial_1 \partial_2] \Phi, & \sigma_2 &= p_1 [2 (q_0 \partial_2^2 + q_0 \partial_1^2) \partial_1 \partial_2] \Phi, \\ & & \sigma_6 &= p_1 [-\partial_2^4 + q_2 \partial_1^4] \Phi, \\ \sigma_5 &= [p_2(h) - p_2(z)] (-D_4 \partial_2) \Phi, & \sigma_4 &= [p_2(h) - p_2(z)] D_4 \partial_1 \Phi, \\ q_3 &= (A_{32} q_1 - A_{31}) / (A_{33} A_{66}), & q_4 &= (A_{32} q_2 - A_{31} q_1) / (A_{33} A_{66}). \end{aligned}$$

Решение задачи приведено к нахождению функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (5) и граничным условиям на боковой поверхности плиты.

2. Граничные условия на боковой поверхности. Рассмотрим плиту, ослабленную криволинейной полостью, боковая поверхность которой есть цилиндр с образующими, нормальными плоским граням. Пусть $P = p_1(z)P_1(x, y)$ — нормальная, а $T = p_1(z)T_1(x, y)$ и $N = p_1(z)N_1(x, y)$ — касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то край считается свободным от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивности $\sigma_1^0 = pz$, $\sigma_2^0 = qz$ и $\sigma_6^0 = tz$. Полагаем, что внешний контур находится вдали от полости и их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на поверхности полости примут вид

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = n_1 (P - pz) - n_2 (T + tz),$$

$$n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = n_1 (T - tz) + n_2 (P - qz), \quad n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = N, \quad (6)$$

$$n_1 = \cos(n, x) = dy/dl, \quad n_2 = \cos(n, y) = -dx/dl, \quad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

В соответствии с представлениями (2) и (4) условия (6) запишутся так

$$n_1 s_1 + n_2 s_6 = f_1, \quad n_1 s_6 + n_2 s_2 = f_2, \quad n_1 s_5 + n_2 s_4 = N_1, \quad (7)$$

$$f_1 = n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t), \quad f_2 = n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q).$$

Отметим, что при усилиях p , q и t функция $p_1(z) = z$.

Интегрирования условий (7) приводит их к виду

$$-2(q_0\partial_2^2 + q_2\partial_1^2)\partial_1\Phi = \int_0^l \left(f_1 - \frac{dx}{dl}(N_i + c_3) \right) dl + c_1, \quad N_i = - \int_0^l N_1 dl, \quad (8)$$

$$2(q_0\partial_1^2 + \partial_2^2)\partial_2\Phi = - \int_0^l \left(f_2 - \frac{dy}{dl}(N_i + c_3) \right) dl + c_2, \quad D_4\Phi = N_i + c_3.$$

Граничные условия (8) используются для определения функции $\Phi(x, y)$.

3. Решение дифференциального уравнения (5). Представления общего решения уравнения (5) найти не удастся. Здесь предлагается для случая тонких и толстых плит провести разделение этого уравнения на уравнение четвертого порядка и уравнение типа Гельмгольца. Для этого воспользуемся методом штрафов [4]. Этот метод в применении к уравнению (5) состоит в замене оператора D_4 на P_4 или наоборот. Это достигается путем добавления к уравнению дополнительного слагаемого, умноженного на малый параметр. Параметр λ^2 имеет порядок h^{-2} и для больших толщин плиты он может быть сколь угодно малым. Добавление к уравнению (5) малой величины $\lambda^2(P_4 - D_4)\Phi$ приводит его к виду

$$D_4(D_2 - \lambda^2)\Phi = 0.$$

Для малых толщин плиты этот параметр может быть сколь угодно большим. Добавление к уравнению (5) малой величины $\lambda^{-2}D_2(P_4 - D_4)\Phi$ дает

$$P_4(D_2 - \lambda^2)\Phi = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим уравнение (9). Общим решением его является функция

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (10)$$

где величины Φ_k удовлетворяют уравнениям

$$P_4\Phi_1 = 0; \quad (11)$$

$$(D_2 - \lambda^2)\Phi_2 = 0. \quad (12)$$

Общим действительным решением уравнения (11) является выражение [2]

$$\Phi_1 = 2Re[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)], \quad (13)$$

где $\varphi_j(z_j)$ — произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$; параметры μ_j являются корнями уравнения

$$P_4(\mu) = (\mu^4 + 2q_1\mu^2 + q_2) = 0.$$

3.1. Приближенное решение уравнения (12) с малым параметром при старшей производной с использованием уравнения границы области. Предлагаемый ниже способ решения уравнения опирается на использование уравнения границы области, в которой определяется это решение. Способы построения таких уравнений для практически произвольных чертежей (объектов), с помощью методов алгебры логики и аппарата R-функций, разработаны в работах В. Л. Рвачева и его учеников [5]. Пусть Ω есть некоторая область, граница $\partial\Omega$ которой описывается уравнением $\omega = 0$. При этом для производных функции ω на границе могут быть обеспечены дополнительные свойства. Полагаем, что для производных первого и второго порядка выполняются условия

$$\omega_2^2 + q\omega_1^2 = 1, \quad \omega_{22} + q\omega_{11} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (14)$$

где $\omega_1 = \partial_1\omega$, $\omega_2 = \partial_2\omega$, $\omega_{11} = \partial_1^2\omega$, $\omega_{22} = \partial_2^2\omega$.

Уравнение (12) запишем в виде

$$[\varepsilon^2 (\partial_2^2 + q\partial_1^2) - 1] \Phi_2 = 0 \quad (15)$$

где $\varepsilon^2 = 1/\lambda^2$ — малый параметр при старших производных.

Метод решения уравнения (15) основан на использовании уравнения границы области и пограничного слоя. Погранслоем — это малый интервал в окрестности границы области, в котором функция Φ_2 сильно изменяется. При значениях параметра $\varepsilon^2 \rightarrow 0$, решение предельного уравнения (15) — $\Phi_2 = 0$, близко к точному решению всюду, за исключением малого интервала возле граничной линии, где точное решение изменяется так, чтобы удовлетворить краевому условию на границе. Этот малый интервал, в котором функция Φ_2 быстро изменяется, называется областью краевого эффекта. Для нахождения решения, пригодного в погранслое, предлагается использование асимптотических методов. Приближенное решение уравнения (15) представим в виде произведения

$$\Phi_2 = r(x, y)\psi(x, y). \quad (16)$$

Функции r и ψ определим в виде разложений в области краевого эффекта

$$r = \exp(\alpha\omega), \quad \psi = \psi_0 + \psi_1\omega + \psi_2\omega^2/2. \quad (17)$$

Здесь α — постоянная величина, ψ_0, ψ_1, ψ_2 — функции переменной $x + \mu y$, подлежащие определению в процессе решения уравнения (15).

Подставим представление (16) с учетом соотношений (17) в уравнение (15) и, принимая во внимание, что на граничной линии выполняются условия (14), находим

$$\Phi_2 = 2Re(\varphi_3 + \omega p_1 \varphi_3' + \omega^2/2 p_2 \varphi_3'') \exp(\alpha\omega). \quad (18)$$

Таким образом, общее решение (10) уравнения (9) представляется в виде суммы функций (13) и (18).

4. Численные исследования. Рассмотрено напряженное состояние плиты, ослабленной цилиндрической полостью эллиптического сечения с образующими, нормальными плоским граням, и полуосями эллипса a и b , направленными вдоль

осей Ox и Oy соответственно. Плита изгибалась усилиями $\sigma_1^0 = pz/h$, действующими на бесконечности. Толщина плиты $h = 0.01b$. В таблице приведены значения напряжений для изотропной $\nu = 1/3$ (И) и ортотропной плиты (О), изготовленной из стеклопластика ВМ-1 [7].

Материал	$a/b = 0.5$		$a/b = 1$		$a/b = 2$	
	σ_θ/p	$\sigma_{z\theta}/p$	σ_θ/p	$\sigma_{z\theta}/p$	σ_θ/p	$\sigma_{z\theta}/p$
И	2.6	0.76	1.8	0.51	1.4	0.38
О	3.55	0.85	2.28	0.53	1.64	0.35

Максимального значения величины $|\sigma_\theta/p|$ достигают на контуре при $z = \pm h$, $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, а минимального при $z = \pm h$, $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Величины $\sigma_{z\theta}/p$ для кругового контура максимального значения достигают при $z = 0$, $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm 3\pi/4$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильев В. В. Классическая теория пластин – история и современный анализ // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. № 3. С. 46–58.
- [2] Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
- [3] Космодамианский А. С., Нескородев Н. М. Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62 № 2. С. 344–346.
- [4] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
- [5] Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
- [6] Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев-Донецк: Вища школа, 1976. 200 с.
- [7] Ашкенази Е. К. Ганов Э. В. / Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. Л: Машиностроение, 1980. 247 с.

Neskorodev R. N. *Equations of one of the variants of refined theory of bending moment theory of orthotropic blocks.* In the paper, based on the assumptions proposed in the paper [1], a sixth-order differential equation of the theory of bending of orthotropic plates. The solution of this equation is based on the use of generalized functions of complex variables [2, 3]. Submissions for the displacement and stress can put boundary problems with arbitrary assignment of external forces on the thickness of the slab. Numerical investigations of the plate weakened by an elliptical (circular) cavity.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСЧЕТОВ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ

Никитин Ю. Г.¹, Диденко А. В.², Сыромятников П. В.²

¹*Кубанский государственный университет, Краснодар*

²*Южный научный центр РАН, Краснодар*

В работе для моделирования пространственных гармонических колебаний анизотропных композитов используются двукратные контурные интегралы Фурье. Рассматриваются приемы и методы сокращения объема вычислений при расчете данных интегралов и подынтегральных выражений с учетом специфики данного рода задач. Оптимизация алгоритмов осуществляется за счет однократного выполнения наиболее трудоемких повторяющихся этапов вычислений и запоминания всех промежуточных величин, не зависящих от конкретной структуры композита. Кроме элементарных приемов разработаны различные алгоритмы ускорения вычислений подынтегральных функций и самих контурных интегралов, специфические для ближней и дальней зоны: специальные интерполяционные сетки и схемы, аппроксимации подынтегральных функций, техника интегрирования вычетов, асимптотики подынтегральных функций, асимптотические методы уточнения интегралов.

Несмотря на то, что за последние годы были достигнуты впечатляющие результаты в программировании свойств композитных материалов, на практике пока большая роль принадлежит интуитивному подходу. Это обусловлено отсутствием завершенных физических и математических теорий сложных гетерофазных систем, которыми являются композиты, различием в способах оценки физических характеристик компонентов и композитов, сложностью математического моделирования композитов. Большое число исходных материалов, разнообразие их физических свойств и возможных конструктивных решений делают задачу адекватного математического моделирования композита и его полной оптимизации нереализуемой на сегодняшний день. Даже для относительно простого композита, которым является ламинат, задача оптимизации его структуры по числу слоев, их материалам, толщинам, последовательности слоев и их взаимной ориентации очень быстро приводит к комбинаторному взрыву. Обычным компромиссом в такой ситуации является сокращение числа исходных вариантов и замена непрерывных множеств параметров задачи на дискретные множества с достаточно малым числом элементов. На практике это означает получение конечных решений, возможно, удовлетворяющим требуемым ограничениям, но далеких от оптимальных [1]. Другой причиной получения неоптимальных решений является упрощенность и грубость применяемых физических теорий и математических моделей. В этом случае даже применение полной оптимизации не может дать действительного оптимального решения. И, пожалуй, наиболее сложной проблемой является относительно большое время, требуемое для расчета каждого варианта задачи оптимизации, особенно при использовании строгих моделей композита.

В любом случае, без точных математических моделей композитов и адекватных инженерных моделей, создаваемых на их основе, разработка новых композитов сильно затрудняется. Параметры модели композита в работах [2–4] (число слоев, материалы слоев, их толщина и взаимная ориентация слоев) представляют собой параметры типичной задачи оптимизации структуры ламината. Применяемые в работах [2–4] методы решения динамических краевых задач линейной теории упругости для многослойного анизотропного тела основаны на использовании классической техники интегральных преобразований Фурье и матриц-функций Грина. В этом случае перемещения и напряжения в слое можно выразить через контурные интегралы Фурье, которые в свою очередь могут быть представлены в виде суперпозиции волн, соответствующих вычетам в вещественных и комплексных полюсах матрицы Грина. Для статических задач разработаны методы непосредственного вычисления контурных интегралов Фурье, методы их асимптотического уточнения. Данный подход позволяет с успехом исследовать статические задачи, пространственные установившиеся и нестационарные колебания, возбуждаемые в пакете анизотропных слоев. Предлагаемые авторами методы не имеют ограничений на вид анизотропии слоев, их ориентации и взаимном расположении. Число слоев может быть достаточно большим, но конечным.

Оптимизация вычислительных алгоритмов осуществлялась за счет однократного выполнения наиболее трудоемких повторяющихся этапов вычислений и запоминания всех промежуточных величин, не зависящих от конкретной структуры ламината, таких, например, как последовательность слоев, их взаимная ориентация и толщина. Фактически операции поворота слоя, изменение его толщины и номера в последовательности слоев можно свести к умножениям на простые матрицы и перестановкам матричных блоков в общей системе линейных уравнений, фигурирующих в основном рабочем алгоритме расчета. Время расчета системы линейных уравнений в десятки раз меньше времени расчета самих матричных блоков, поскольку для этого требуется решать алгебраическую собственную проблему большой размерности для каждого слоя. В этом случае, например, для пакета из N одинаковых слоев самый трудоемкий этап решения собственной проблемы можно ускорить в N раз. Для ламината из N слоев и M материалов соответствующий выигрыш по времени будет N/M раз. Еще одна возможность выигрыша во времени состоит в учете элементов упругой (или любой другой физической) симметрии слоя. Например, наличие плоскости симметрии позволяет в принципе уменьшить число операций вдвое, двух плоскостей — в 4 раза и т. д. Чем выше симметрия, тем существеннее экономия операций. Учет симметрии структуры композита в целом, например, для симметричных композитов, также может значительно сократить объем требуемых расчетов. Замена всех повторяющихся вычислений на операции записи-считывания, несмотря на большие объемы массивов передаваемых данных, может существенно увеличить скорость расчетов, особенно при большом числе слоев, от нескольких раз до нескольких десятков раз, в зависимости от скорости выполнения операций записи и воспроизведения. Объемы запоминаемых массивов данных можно сократить, используя некоторые алгебраические особенности собственных векторов и собственных значений. Запись интегральных представлений Фурье и матриц Грина в полярных координатах позволяет уменьшить

погрешности и сократить требуемые перерасчеты при поворотах слоев. С учетом специфики ортотропных и трансверсально-изотропных материалов, которые часто используются в ламинатах, возможно создание особенно быстрых алгоритмов расчета. Кроме того, однажды рассчитанные величины для одного материала могут быть использованы при конструировании ламинатов с его применением в любой комбинации.

Кроме элементарных приемов, перечисленных выше, были разработаны различные алгоритмы и методы ускорения вычислений подынтегральных функций и самих контурных интегралов, специфические для ближней и дальней зоны: специальные интерполяционные сетки и схемы, аппроксимации подынтегральных функций, техника интегрирования вычетов, асимптотики подынтегральных функций, асимптотические методы уточнения интегралов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ и администрации Краснодарского края 12-08-00880-а, 13-01-96511-р-юг-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jones R. M. Mechanics of Composite Materials. Second edition. Taylor&Francis. 1999.
- [2] Karmazin A., Kirillova E., Seemann W., Syromyatnikov P. A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates // Ultrasonics. 2013. V. 53. P. 283–293.
- [3] Karmazin A., Kirillova E., Seemann W., Syromyatnikov P. Investigation of Lamb elastic waves in anisotropic multilayered composites applying the Green's Matrix // Ultrasonics. 2011. V. 51. P. 17–28.
- [4] Karmazin A., Kirillova E., Seemann W., Syromyatnikov P. Modelling of 3D steady-state oscillations of anisotropic multilayered structures applying the Green's functions // Adv. Theor. Appl. Mech. 2010. V. 3. № 9. P. 425–450.
- [5] Vasiliev V. V., Morozov E. V. Mechanics and Analysis of Composite Materials. Elsevier. 2001. 412 p.

Nikitin Y. G., Didenko A. V., Syromyatnikov P. V. *Optimization of multilayered anisotropic composites.* In modeling the spatial harmonics of anisotropic composites using two-fold Fourier contour integrals. Discusses techniques and methods of reducing the amount of computations in the calculation of these integrals and integrands specific to this type of problem. Optimization algorithms at the expense of the single most time-consuming phases of repetitive computing and storing all intermediate values that do not depend on the particular structure of the composite. In addition to basic techniques developed various algorithms for computing speed integrands themselves and contour integrals that are specific to the near and far field. Have developed a special interpolation grid and schemes approximating the integrands, integration deductions, the asymptotic behavior of the integrands, asymptotic methods.

УТОЧНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАССОПЕРЕНОСА В ВИБРОКИПАЮЩЕМ СЛОЕ

Орлова Н. С.

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

Исследована численная схема уравнений двухжидкостной модели виброкипящего слоя на основе закона фильтрации Дарси. На основе сравнения численных расчетов с экспериментальными данными изменения нижней границы виброкипящего слоя были уточнены интерполяционные коэффициенты численной схемы.

1. Двухжидкостная модель виброкипящего слоя. Была исследована двухжидкостная модель виброкипящего слоя на основе закона фильтрации Дарси, в которой движение слоя рассматривается как движение двух взаимодействующих континуумов, связанных с газом и частицами.

Для описания взаимодействия газа с частицами решаются уравнение неразрывности и уравнение количества движения для твердой фазы (1)–(2) и уравнения для газовой фазы, полученные с учетом закона Дарси (3)–(4) в одномерном приближении [1, 2]:

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s V_s)}{\partial z} = -\alpha_s \frac{\partial P}{\partial z} + \beta(V_g - V_s) - G(\alpha_g) \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \rho_s \alpha_s g; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_g \mu_g} \cdot \frac{\partial(\rho_g \alpha_g k \frac{\partial P}{\partial z})}{\partial z} - \frac{\rho_g}{\alpha_g} \cdot \frac{\partial V_s}{\partial z} - V_s \frac{\partial \rho_g}{\partial z}; \quad (3)$$

$$V_g = V_s - \frac{k}{\mu_g} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}; \quad (4)$$

где ρ_g, V_g, α_g — плотность, скорость, объемная доля газа; а ρ_s, V_s, α_s — плотность, скорость, объемная доля твердых частиц, соответственно; P — давление газовой фазы; β — коэффициент обмена импульсами на поверхности раздела двух фаз; $G(\alpha_g)$ — коэффициент межчастичного взаимодействия; σ — напряжения, возникающие в слое частиц; k — проницаемость слоя частиц; g — ускорение свободного падения в проекции на ось z ; μ_g — динамическая вязкость газа. Давление газа P рассчитывалось с помощью уравнения состояния для идеального газа при условии, что температура газа постоянна и равна 20^0 С. Более подробное описание двухжидкостной модели виброкипящего слоя с использованием закона Дарси представлено в работах [1, 2].

2. Метод решения. Уравнения записывались в конечно-разностном виде. На каждом временном слое применялся метод итераций. Следует отметить, что такие

величины, как $P, \rho_g, \alpha_g (\alpha_g = 1 - \alpha_s), \alpha_s$, рассчитывались в центре вычислительной ячейки, а скорости обеих фаз — на границах.

Внутри слоя в начальный момент времени значение α_s равно значению при «плотной упаковке слоя»; плотность газа равна плотности воздуха при температуре 20^0 С и атмосферном давлении P_a , скорость газа и скорость твердых частиц равны скорости полки. Плотность твердой фазы постоянна и равна плотности используемого материала.

Полка колеблется по закону $z_w = A \sin(\varphi)$ ($\varphi = \omega t$ — фаза колебаний полки, $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота колебаний, f — частота колебаний, A — амплитуда колебаний), что приводит к перемещению нижней границы расчетной области. Таким образом, размер нижней вычислительной ячейки меняется при колебаниях полки. Значение объемной доли частиц в этой ячейке находится с помощью уравнения неразрывности при условии, что поток через нижнюю границу ячейки равен нулю.

На нижней границе скорость газа и скорость частиц равны скорости полки. На верхней границе, расположенной на высоте, которая равна двумстам амплитудам над средним положением полки, плотность газа равна плотности воздуха при температуре 20^0 С и атмосферном давлении, объемная доля частиц равна нулю.

3. Численная схема решения уравнений. Уравнения были приведены к безразмерному виду, затем записаны в конечно-разностном виде. Для описания распределения твердой фазы по высоте виброкипящего слоя наиболее значительную роль в численной схеме играют уравнение неразрывности и уравнение количества движения для твердой фазы. Поэтому далее приведены уравнения только для твердой фазы в дискретном виде:

$$(\alpha_s)_j^{n+1} = (\alpha_s)_j^n - \frac{\delta t^*}{\delta z^*} (\langle \alpha_s V_s^* \rangle_{j+1/2}^{n+1} - \langle \alpha_s V_s^* \rangle_{j-1/2}^{n+1}) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_s V_s^*)_{j+1/2}^{n+1} &= (\alpha_s V_s^*)_{j+1/2}^n - \frac{\delta t^*}{\delta z^*} (\langle \alpha_s V_s^{*2} \rangle_{j+1} - \langle \alpha_s V_s^{*2} \rangle_j)^{n+1} - \\ &- a_1 \frac{\delta t^*}{\delta z^*} (\alpha_s)_{j+1/2}^{n+1} (P_{j+1}^* - P_j^*)^{n+1} - \frac{\delta t^*}{\delta z^*} ((\alpha_s)_{j+1} - (\alpha_s)_j)^{n+1} G_{j+1/2}^{*n+1} + \\ &+ \delta t^* \beta_{j+1/2}^{*n+1} ((V_g^*)_{j+1/2} - (V_s^*)_{j+1/2})^{n+1} + \frac{\delta t^*}{\delta z^*} (\sigma_{j+1}^* - \sigma_j^*)^{n+1} - a_2 (\alpha_s)_{j+1/2}^{n+1} \delta t^* \end{aligned} \quad (6)$$

где $V_g^* = \frac{V_g}{A\omega}$, $V_s^* = \frac{V_s}{A\omega}$, $G^* = \frac{G(\alpha_g)}{\rho_s A^2 \omega^2}$, $P^* = \frac{P}{P_a}$, $\sigma^* = \frac{\sigma}{\rho_s A^2 \omega^2}$, $a_1 = \frac{P_a}{\rho_s A^2 \omega^2}$, $a_2 = \frac{g}{A\omega^2}$, $\delta t^* = \omega \delta t$ — безразмерный шаг по времени, $\delta z^* = \frac{\delta z}{A}$ — безразмерный шаг по координате, $g_0(\alpha_s)$ — радиальное распределение функции контакта, « n » — индекс временного слоя, « j » — координатный индекс (индекс вычислительной ячейки в направлении оси z).

Выражения в треугольных скобках в уравнениях (5) и (6) раскрывались с использованием способа «частичной донорной ячейки» [3]:

$$\langle uQ \rangle_{j+1/2} = u_{j+1/2} \cdot [(0,5 + \xi)Q_j + (0,5 - \xi)Q_{j+1}]; \quad (7)$$

$$\xi = b_0 \cdot u_{j+1/2} \cdot \frac{\delta t^*}{\delta z^*} + a_0 \cdot \text{sign}(u_{j+1/2}); \quad (8)$$

где Q равно a_s , u равно V_s^* или V_s^{*2} .

Коэффициенты a_0 и b_0 меняются в пределах от нуля до 0,5. Если $a_0 = 0$, то говорят о «нерегулярном представлении донорной ячейки», если $a_0 = 0,5$, то о «полном регулярном представлении донорной ячейки». Если $b_0 = 0$, то говорят о «неинтерполированном представлении донорной ячейки», если $b_0 = 0,5$, то о «полностью интерполированном представлении донорной ячейки». Следует отметить, что когда значения $a_0 = b_0 = 0$ формула (7) является линейной интерполяцией в случае определения величины Q на границе двух ячеек. Это приводит к вычислительным затруднениям при моделировании многофазных потоков, в частности при моделировании массопереноса из одной вычислительной ячейки в другую в расчетной области [3].

Важно отметить, что формула (7) ранее использовалась при моделировании движения многофазных потоков. При моделировании динамики виброкипящего слоя используется впервые.

4. Результаты расчетов. Для того, чтобы применить данную формулу в численной схеме решения уравнений двухжидкостной модели на основе закона Дарси, возникла необходимость исследования влияния значений коэффициентов a_0 и b_0 на результаты расчетов с целью выбора значений, наилучшим образом описывающих поведение виброкипящего слоя.

Было проведено исследование влияния значений коэффициентов a_0 и b_0 , присутствующих в формуле (8), на распределение частиц в расчетной области, в частности на изменение нижней границы виброкипящего слоя. На рисунке 1 представлено сравнение расчетных кривых с экспериментальной кривой по изменению нижней границы виброкипящего слоя частиц стекла диаметром 0,13 мм при амплитуде и частоте колебаний полки 1,42 мм и 50 Гц, соответственно. Толщина засыпки слоя равна 50 мм.

Кривая 1 на рисунке 1 соответствует экспериментальным данным [4], кривая 2 — расчетам при $a_0 = b_0 = 0$; кривая 3 — расчетам при $a_0 = b_0 = 0,5$; кривая 4 — изменению положения полки. Следует отметить, что также были проведены расчеты при $a_0 = b_0 = 0,25$. Кривая изменения нижней границы слоя при

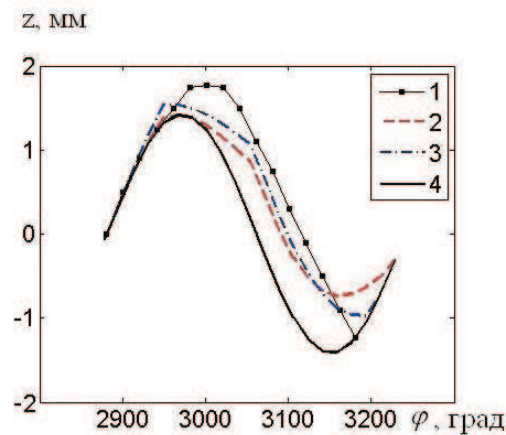


Рисунок 1 – Изменение положения полки и нижней границы виброкипящего слоя

$a_0 = b_0 = 0,25$ незначительно отличалась от соответствующих результатов расчетов при $a_0 = b_0 = 0$, поэтому не приведена на рисунке 1. Из рисунка 1 видно, что кривая 3 лучше соответствует экспериментальным данным, в отличие от кривой 2. Время установления колебаний при $a_0 = b_0 = 0,5$ происходит примерно в два раза быстрее, чем в других случаях, и соответствует пяти периодам колебаний полки. При этом объемная доля частиц более равномерно распределяется в расчетной области, чем в случае результатов расчетов при $a_0 = b_0 = 0$ и $a_0 = b_0 = 0,25$. Следует отметить, что эти результаты были получены при одинаковых значениях коэффициентов a_0 и b_0 . Также были проведены расчеты при разных значениях этих коэффициентов. Получено, что на изменение нижней границы виброкипящего слоя, в основном, влияет значение коэффициента a_0 .

Сравнение результатов расчетов при разных значениях a_0 и b_0 с экспериментальными данными было проведено для слоев с различными значениями толщины засыпки при разных значениях амплитуды и частоты колебаний полки. По результатам сравнения было выявлено, что расчеты, полученные при $a_0 = b_0 = 0,5$, во всех случаях лучше описывают изменение положения нижней границы виброкипящего слоя. При этом влияние коэффициентов на изменение давления газа в нижней части слоя оказалось незначительным. Таким образом, при моделировании виброкипящих слоев, предпочтительнее использовать значения коэффициентов $a_0 = b_0 = 0,5$ в формуле (7).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлова Н. С. Тестирование двух моделей виброоживленного слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2012. № 2. С. 42–45.
- [2] Орлова Н. С. Сравнение расчетов по двухжидкостной модели виброоживленного слоя с экспериментальными данными // Инженерно-физический журнал. 2012. т. 85. № 6. С. 1202–1207.
- [3] Harlow F. H., Amsden A. A. Numerical calculation of multiphase flow // Journal of Computational physics. 1975. V 17. P. 19–52.
- [4] Kroll W. Uber das Verhalten von Schuttguf in lotrecht schwingenden Gefaben // Forschung. 1954. Bd. 20. Heft 1. P. 2–15.

Orlova N. S. *Refinement of the interpolation coefficients in the numerical modeling scheme of mass transfer in vibrofluidized bed .*

The numerical scheme of two-fluids model based on Darcy law was investigated. The comparison between numerical calculations and experimental data of vibrofluidized bed bottom boundary was performed. The values of interpolation coefficients in the numerical modeling scheme of mass transfer were refined.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТОНКОГО НАДРЕЗА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ БАЛОК

Осипов А. В.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

В работе на основе построены формулы для поправок к резонансным частотам для упругой балки с надрезом, на основе их предложена процедура идентификации его параметров. Рассмотрены модели Бернулли и Тимошенко. Проведен ряд вычислительных экспериментов по оценке точности предложенных методов.

Задача идентификации дефектов в упругих телах относится к малоисследованному классу обратных геометрических задач теории упругости [1, 2]. О типе дефекта и его размерах можно судить по информации об изменении первых резонансных частот, а в предположении о малости дефекта по сравнению с характерными геометрическими размерами тела возможно получение простых формул [2–4], облегчающих решение обратной задачи. Когда же геометрия дефекта известна (надрез), в предположении его малости на основе такого подхода возможно по изменению резонансных частот определить поэтапно основные параметры дефекта [4]. При этом возможно получение поправок для первых резонансных частот и собственных форм колебаний в аналитической форме методами теории возмущений [5]; на их основе предложена процедура идентификации параметров надреза. Этот подход имеет определенную перспективу дальнейшего использования в практической дефектометрии. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω упругого тела V , ограниченного кусочно-гладкой поверхностью S . Будем считать, что тело V ослаблено полостью V_0 , характерный размер которой мал по сравнению с длиной волны. В [2] установлена связь между резонансными частотами для задачи колебаниях неповрежденного тела и тела с полостью:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = -V_0 \frac{\Pi(u_0(c_0)) - \omega_0^2 K(u_0(c_0))}{\int_0 K(u_0) dV} \quad (1)$$

где c_0 — некоторая точка внутри полости. В [6] на основе использования этого подхода получены формулы для поправки резонансных частот для балки модели Эйлера–Бернулли с тонким симметричным надрезом, а также предложен метод реконструкции параметров тонкого надреза при использовании полученных формул и приведены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению параметров дефекта. В [7] представлено решение задачи идентификации повреждений в кантилевере, основанное на минимизации специального функционала невязки между решением (собственные частоты и моды колебаний), полученным аналитически на базе уравнения модели Тимошенко и расчетным путем, в частности, с помощью метода конечных элементов. В качестве примера использования этого подхода рассмотрим одну из простейших задач об определении поправок в резонансных частотах (задача о колебаниях балки с надрезом) и их использовании в процедуре идентификации. Рассматриваются установившиеся колебания

с частотой ω упругой балки длины L , ослабленной тонким симметричным двусторонним надрезом длины $2l$ с центром в точке c . Будем считать, что балка на конце $x_0 = 0$ жестко закреплена, а на конце $x_0 = L$ действует сосредоточенная сила. Уравнение колебаний неоднородной балки имеет вид [8]:

$$(EI(x_0)w''(x_0))'' - \rho\omega^2 F(x_0) = 0$$

где E — модуль Юнга, I — момент инерции, ρ — плотность, F — площадь поперечного сечения. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad EI(L)w''(L) = 0, \quad (EI(x_0)w''(x_0))' |_{x_0=L} = P$$

В [6] описана модель трехэлементной балки, которая позволяет найти точные значения резонансных частот балки с дефектом. Для получения соотношения, связывающего параметры надреза и резонансные частоты, рассмотрим безразмерное дифференциальное уравнение для собственной формы неповрежденной балки и уравнение для собственной формы балки с тонким надрезом (введены безразмерные характеристики $x = \frac{x_0}{L}$, $k_0^4 = \frac{\rho\omega^2 FL^4}{EI}$, $c_0 = \frac{c}{L}$, $l_0 = \frac{l}{L}$):

$$w_0^{IV}(x) - k_0^4 w_0(x) = 0 \quad (2)$$

уравнение для собственной формы неповрежденной балки [8], граничные условия имеют вид $w_0(0) = 0$, $w_0'(0) = 0$, $w_0''(1) = 0$, $w_0'''(1) = 0$

$$(g(x)w''(x))'' - k^4 f(x)w(x) = 0 \quad (3)$$

уравнение для собственной формы балки с тонким надрезом, где граничные условия аналогичны описанным выше, а соответствующие безразмерные функции имеют вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x - c_0| \geq l_0, \\ \frac{h}{H}, & |x - c_0| \leq l_0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x - c_0| \geq l_0, \\ \frac{h^3}{H^3}, & |x - c_0| \leq l_0, \end{cases}$$

Домножив (2) на $w(x)$, а (5) — на $w_0(x)$, вычтя их первого выражения второе, проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$. Полагая $w(x) \approx w_0(x)$, а также принимая во внимание условие сопряжения для вторых производных в месте надреза $w'' = \frac{1}{\gamma^3} w_0''$, где $\gamma = \frac{h}{H}$, имеем при малых l_0 следующую приближенную формулу:

$$k^4 - k_0^4 = 2l_0(1 - \gamma) \frac{k_0^4 w_0^2(c_0) - \frac{\gamma^2 + \gamma + 1}{\gamma^3} (w_0''(c_0))^2}{\int_0^1 w_0^2(\xi) d\xi} \quad (4)$$

Используя (4) для определения поправок трех первых резонансных частот, получим систему трех трансцендентных уравнений относительно параметров надреза. Из этих уравнений получено трансцендентное уравнение относительно координаты центра надреза. Найдя координату центра надреза, можно определить ширину и глубину надреза из линейной алгебраической системы.

Таблица 1 – Результаты восстановления параметров надреза по известным значениям резонансных частот балки с дефектом при $\gamma = 0.8$, $2l_0 = 0.01$ при различных значениях c_0

c_0		γ	$\varepsilon_\gamma, \%$	$2l_0$	$\varepsilon_{2l_0}, \%$
Заданное	Найденное				
0.2	0.1995	0.8109	1.36	0.0107	6.53
0.4	0.4007	0.8373	4.66	0.0106	6.16
0.6	0.5991	0.8027	0.34	0.0099	0.31
0.8	0.7983	0.8145	1.80	0.0109	8.93

Аналогичные построения были проведены для модели балки Тимошенко, для которой уравнения колебаний имеют вид:

$$\begin{cases} -(k'G(x_0)F(x_0)(w'(x_0) + \psi(x_0)))' - \rho\omega^2 F(x_0)w(x_0) = 0, \\ -(E(x_0)I(x_0)\psi'(x_0))' + k'G(x_0)F(x_0)(w'(x_0) + \psi(x_0)) - \rho\omega^2 I(x_0)\psi(x_0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия имеют вид:

$$w(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(L) = 0, \quad w'(L) + \psi(L) = 0 \quad (6)$$

На основе общего соотношения Релея, учитывая гипотезы модели Тимошенко в предположении пренебрежения инерцией вращения имеем общую формулу вида:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L (E(x_0)I(x_0)(\psi'(x_0))^2 + k'G(x_0)F(x_0)(w'(x_0) + \psi(x_0))^2)dx_0}{\int_0^L \rho F(x_0)w^2(x_0)dx_0} \quad (7)$$

Упростим это соотношение следующим образом. Сведем задачу (5)–(6) к безразмерному виду, вводя следующие безразмерные характеристики и параметры:

$$x = \frac{x_0}{L}, \quad \kappa = \frac{\rho\omega^2 L^2}{E}, \quad \delta_1 = \frac{F_1 L^2}{I_1}, \quad \delta_2 = k' \frac{G}{E}, \quad c_0 = \frac{c}{L}, \quad l_0 = \frac{l}{L}$$

где F_1, I_1 – площадь поперечного сечения и момент инерции неповрежденной балки соответственно. Система уравнений (5) в безразмерных переменных примет вид:

$$\begin{cases} -\delta_2(f(x)(w'(x) + \psi(x)))' - \kappa^2 f(x)w(x) = 0, \\ -(g(x)\psi'(x))' + \delta_1\delta_2 f(x)(w'(x) + \psi(x)) - \kappa^2 g(x)\psi(x) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Граничные условия (6) примут вид:

$$w(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(1) = 0, \quad w'(1) + \psi(1) = 0 \quad (9)$$

Для анализа задачи, аналогично модели Бернулли, рассмотрим модель трехэлементной балки, на каждом участке которой геометрические характеристики постоянны. Будем искать решение на каждом промежутке: $w_1(x), \psi_1(x), w_2(x), \psi_2(x)$ –

решение задачи на неповрежденных участках балки, $w_*(x), \psi_*(x)$ — решение задачи в месте дефекта. Граничные условия и условия сопряжения имеют вид:

$$\begin{aligned} w_1(0) = 0, \psi_1(0) = 0, \\ w_1(c_0 - l_0) = w_*(c_0 - l_0), \psi_1(c_0 - l_0) = \psi_*(c_0 - l_0), \\ w_1'(c_0 - l_0) + \psi_1(c_0 - l_0) = \gamma(w_*'(c_0 - l_0) + \psi_*(c_0 - l_0)), \psi_1'(c_0 - l_0) = \gamma^3(\psi_*'(c_0 - l_0)), \\ w_*(c_0 + l_0) = w_2(c_0 + l_0), \psi_*(c_0 + l_0) = \psi_2(c_0 + l_0), \\ \gamma(w_*'(c_0 + l_0) + \psi_*(c_0 + l_0)) = w_2'(c_0 + l_0) + \psi_2(c_0 + l_0), \gamma^3(\psi_*'(c_0 + l_0)) = \psi_2'(c_0 + l_0), \\ \psi_2'(1) = 0, w_2'(1) + \psi_2(1) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Рассматривая соответствующие собственные формы колебаний для неповрежденной балки и для балки с тонким симметричным надрезом, выполняя преобразования, аналогичные описанным выше преобразованиям для модели Бернулли, а также учитывая условия сопряжения (9), из которых следует, что $w_0'(x) + \psi_0(x) = \frac{1}{\gamma}(w'(x) + \psi(x))$, $\psi_0'(x) = \frac{1}{\gamma^3}\psi'(x)$, получим приближенную формулу для поправки к резонансным частотам в балке модели Тимошенко:

$$k^2 - k_0^2 = 2l_0(1 - \gamma) \frac{k_0^2 w_0^2(c_0) - A_1(\psi_0'(c_0))^2 - A_2(w_0'(c_0) + \psi_0(c_0))^2}{\int_0^1 w_0^2(\xi) d\xi} \quad (11)$$

где $k^2 = \kappa^2 \delta_1$, $k_0^2 = \kappa_0^2 \delta_1$, $A_1 = \frac{1+\gamma+\gamma^2}{\gamma^3}$, $A_2 = \frac{\delta_1 \delta_2}{\gamma}$, k, k_0 — спектральные параметры, связанные с резонансными частотами балки с симметричным тонким надрезом и неповрежденной балки соответственно. На рисунке 1 приведено сравнение амплитудно-частотных характеристик неповрежденных балок для моделей Бернулли (точки) и Тимошенко (звездочки) при действии сосредоточенной силы на

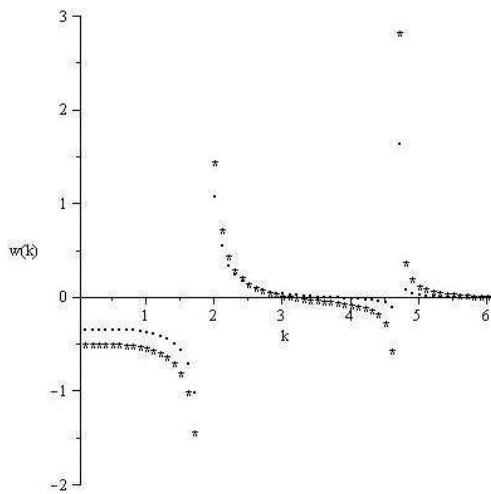


Рисунок 1 — Сравнение АЧХ для моделей Бернулли и Тимошенко

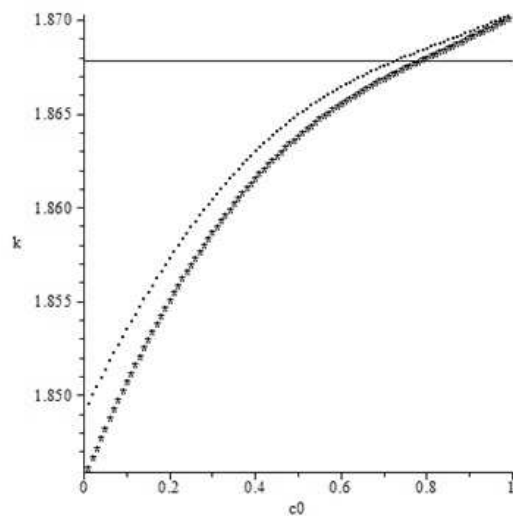


Рисунок 2 — Сравнение точных значений спектрального параметра и значений, рассчитанных по формуле

конце. Отметим, что наибольшее различие имеется на промежутке до первого резонанса. На рисунке 2 представлено сравнение точных значений спектрального параметра для первой резонансной частоты в модели Тимошенко, полученных из модели трехэлементной балки (точки), и значений спектрального параметра, посчитанных по формуле (11) (звездочки), горизонтальной линией показано значение спектрального параметра для неповрежденной балки. Результаты приведены для параметров надреза $\gamma = 0.8$, $2l_0 = 0.01$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О. Соловьев А. Н. Обратные задачи теории трещин в твердых телах // Известия высших учебных заведений, Сев.-Кавк. рег. 2004. Спецвыпуск «Математика и механика сплошной среды». С. 74–80.
- [2] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [3] Ватульян А. О. Солюянов Н. О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 6. С. 1015–1020.
- [4] Ильгамов М. А. Хакимов А. Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.
- [5] Акуленко Л. Д. Костин Г. В. Метод возмущений в задачах динамики неоднородных упругих стержней // ПММ.1992. Т.56, № 3. С. 452–464.
- [6] Ватульян А. О. Осипов А. В. Об определении характеристик тонкого надреза при анализе изгибных колебаний балки // Экологический вестник ЧЭС. 2013. № 2. С. 27–34.
- [7] Шевцов С. Н. Акопьян В. А. Рожков Е. В. Решение задач идентификации повреждений в упругом стержне на основе модели балки Тимошенко // Дефектоскопия. 2011. № 7. С. 65–78.
- [8] Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 736 с.

Osipov A. V. *Identification of the parameters of a thin cut for different models of beams.* In this paper, based on the formulas are constructed for the corrections to the resonance frequencies of an elastic beam with a notch on the basis of their proposed identification procedure of its parameters. The models of Bernoulli and Timoshenko. A series of computational experiments to assess the accuracy of the proposed methods.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ПО ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Перельмутер М. Н.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва

Участок нарушенных связей между материалами моделируется трещиной, расположенной между двумя упругими полупространствами из различных материалов. Между берегами трещины действуют силы сцепления, обусловленные адгезионным взаимодействием материалов или наличием подкрепляющих волокон в композитах. Рассмотрены энергетические характеристики трещины со связями в концевой области: скорости высвобождения и поглощения энергии деформации. Предельное равновесие трещины с концевой областью характеризуется равенством скоростей высвобождения и поглощения энергии деформации с одновременным достижением раскрытия на краю концевой области трещины критического для данного типа связей значения.

1. Введение. Модели трещины с взаимодействием берегов позволяют объединить при анализе развития трещины подходы механики и физики разрушения. Зона взаимодействия берегов трещины (далее — концевая область трещины) при смыкает, как правило, к вершине трещины и рассматривается как часть трещины, в которой к поверхностям трещины приложены силы сцепления, сдерживающие ее раскрытие. Для анализа хрупкого и упругопластического разрушения однородных тел предложены варианты такой модели трещины при допущении, что в состоянии предельного равновесия силы сцепления в концевой области трещины таковы, что напряжения в вершине трещины ограничены и, соответственно, коэффициент интенсивности напряжений равен нулю. Модели такого типа называют когезионными (адгезионными — при соединении различных материалов). Если процессы деформирования и разрушения в концевой области трещины включают в себя несколько физических механизмов, как, например, в композиционных материалах, то в таких случаях используются модели концевой области с учетом сингулярности напряжений в вершине трещины в состоянии предельного равновесия. Такие модели были рассмотрены для трещин в однородных материалах и развиты в последние годы для трещин с концевой областью на границе раздела материалов с различными физико-механическими свойствами в [1–5]. Физическая природа взаимодействия между берегами трещины в концевой области изменяется в зависимости от масштаба трещины и расстояния до ее вершины. На малых расстояниях от вершины существенны силы межатомного и межмолекулярного взаимодействия, тогда как на относительно больших расстояниях преобладают механические связи. Например, подкрепляющие волокна и частицы в композиционных материалах или пучки полимерных цепей, связывающие берега трещины в соединениях полимер-полимер и полимер-металл.

Исследование трещиностойкости и развития трещин в композиционных материалах и адгезионных соединениях на основе той или иной модели концевой области трещины состоит из следующих основных этапов: 1) установление закона

деформирования связей между берегами трещины, 2) определение напряженного состояния в концевой области и вблизи вершины трещины, 3) анализ предельного равновесия трещины при учете возможности продвижения вершины трещины и края концевой области под действием внешних нагрузок и усилий, возникающих в связях. Ниже, для трещины на границе соединения материалов со связями в концевой области, рассмотрен нелокальный критерий квазистатического роста трещин, применяемый на последнем, из указанных выше, этапов.

2. Нелокальный критерий разрушения для трещин границе раздела материалов. Рассмотрим применение нелокального критерия разрушения, предложенного в [1–2], в случае одноосного растяжения двумерной области, содержащей прямолинейную трещину, расположенную перпендикулярно направлению приложения нагрузки на границе раздела полуплоскостей с различными механическими свойствами.

Для прямолинейной трещины длины ℓ , расположенной на отрезке $|x| \leq \ell$, $y = 0$, с концевыми областями размера d уравнения нелокального критерия разрушения запишутся так

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{b \partial \ell} + G_m, \quad u(s_o) = \delta_{cr}, \quad (1)$$

где Π — потенциальная энергия упругого тела, U — энергия деформации связей в концевой области трещины, b — толщина тела, G_m — поверхностная энергия материала матрицы, $u(s_o)$ — раскрытие трещины на краю концевой области, δ_{cr} — предельная длина связи.

Введем следующие обозначения

$$G_{tip}(d, \ell) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \ell}, \quad G_{bond}(d, \ell) = \frac{\partial U}{b \partial \ell} + G_m, \quad (2)$$

где $G_{tip}(d, \ell)$ — скорость высвобождения энергии деформации, $G_{bond}(d, \ell)$ — скорость потребления энергии деформации связями в концевой области трещины.

Выражение для скорости высвобождения энергии деформации для трещины, расположенной на границе различных материалов, остается справедливым и при наличии связей в концевой области трещины, так как влияние связей выражается в приложении нагрузок к берегам трещины в ее концевой области. Таким образом, независимо от формы закона деформирования связей, скорость высвобождения энергии деформации определяется выражением [6]

$$G_{tip}(d, \ell) = \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_B^2}{16 \operatorname{ch}(\pi \beta)}, \quad \beta = \frac{\ell n \alpha}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{\mu_2 k_1 + \mu_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2}, \quad (3)$$

где $k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ или $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1 + \nu_{1,2})$ для плоской деформации или плоского напряженного состояния, соответственно, $\nu_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ — коэффициенты Пуассона и модули сдвига материалов подобластей 1 ($y > 0$) и 2 ($y < 0$), и

$$K_B^2 = K_I^2 + K_{II}^2.$$

Коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} определяются с учетом нагрузок на внешней поверхности тела и нагрузок в концевой области трещины.

Потенциальную энергию деформации связей в концевой области трещины определяем согласно [2]

$$U = b \int_{\ell-d}^{\ell} \Phi(u) dx, \quad \Phi(u) = \int_0^{u(x)} \sigma(u) du,$$

где $\Phi(u)$ — плотность энергии деформации связей в концевой области трещины,

$$u(x) = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \sigma(u) = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}.$$

Здесь $u_{x,y}$ — компоненты раскрытия трещины в концевой области, $\sigma(u)$ — модуль вектора усилий в связях, определяемый законом деформирования связей, $q_{x,y}$ — нормальная и касательная составляющие усилий в связях.

Закон деформирования связей в концевой области трещины можно записать так

$$q_y(x) - iq_x(x) = c(u)(u_y(x) - iu_x(x)),$$

где $c(u)$ — эффективная податливость связей.

В итоге, из выражения для $G_{bond}(d, \ell)$ в (2) получаем

$$G_{bond}(d, \ell) = \frac{\partial U}{b \partial \ell} + G_m = \frac{\partial}{\partial \ell} \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\int_0^{u(x)} \sigma(u) du \right) dx + G_m. \quad (4)$$

В выражении (4) для скорости потребления энергии деформации связями дифференцирование по верхнему и нижнему пределам интегрирования соответствует предположению об изменении размера концевой области трещины при разрыве связей на краю концевой области и одновременном продвижении вершины трещины. В таком случае возможно выполнение условия автономности концевой области трещины. Выполняя дифференцирование по верхнему и нижнему пределам в выражении (4) для потенциальной энергии деформирования связей, получим

$$G_{bond}(d, \ell) = \int_{\ell-d}^{\ell} \left(\frac{\partial u_y(x)}{\partial \ell} q_y(u) + \frac{\partial u_x(x)}{\partial \ell} q_x(u) \right) dx - \int_0^{u(\ell-d)} \sigma(u) du + G_m, \quad (5)$$

где для состояния предельного равновесия трещины $u(\ell-d) = \delta_{cr}$ (согласно второму из условий (1)). Второе слагаемое в (5) представляет собой плотность энергии деформации, выделяющейся при разрыве связей на краю концевой области.

Из совместного решения двух уравнений (1) можно определить размер концевой области d_{cr} и критическое внешнее напряжение σ_{cr} в состоянии предельного равновесия трещины. Скорость потребления энергии деформации $G_{bond}(d_{cr}, \ell)$, полученная из совместного решения уравнений (1), является энергетической характеристикой сопротивления адгезионному разрушению, $G_{cr} = G_{bond}(d_{cr}, \ell)$, причем величина не остается постоянной при изменении длины трещины. После определения критического внешнего напряжения могут быть также определены критический КИН и поток энергии в вершину трещины, обусловленные внешней нагрузкой.

При монотонном нагружении тела, для заданных начальных размеров трещины и ее концевой области, можно выделить режимы равновесия и квазистатического роста трещины.

При выполнении условий

$$\begin{cases} G_{tip}(d, \ell) \geq G_{bond}(d, \ell) \\ u(\ell - d) < \delta_{cr} \end{cases} \quad (6)$$

происходит продвижение вершины трещины с одновременным возрастанием длины концевой области без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать как процесс приспособляемости трещины к заданному уровню внешних нагрузок (докритический рост трещины).

Продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области (квазистатический рост трещины) происходит при одновременном выполнении условий

$$\begin{cases} G_{tip}(d, \ell) \geq G_{bond}(d, \ell) \\ u(\ell - d) \geq \delta_{cr} \end{cases} \quad (7)$$

Разрыв связей без продвижения вершины трещины происходит при выполнении условий

$$\begin{cases} G_{tip}(d, \ell) < G_{bond}(d, \ell) \\ u(\ell - d) \geq \delta_{cr} \end{cases} \quad (8)$$

При этом размер концевой области сокращается, стремясь к предельному значению для данного уровня нагрузки. В рамках рассматриваемой модели положение концевой области и вершины трещины не меняется при одновременном выполнении второго из условий (6) и первого условия (8).

Таким образом, величина внешней нагрузки и параметры связей определяют характер разрушения: продвижение вершины трещины с ростом концевой области; сокращение размера концевой области без продвижения вершины трещины; продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области. Заметим, что при рассмотрении линейно-упругих связей [1,2] выполнение первого из условий (1) зависит только от относительных геометрических характеристик концевой области и трещины. Критическое значение размера концевой области, полученное из этого условия, может быть отнесено к трещине любой длины. Определение фактического размера трещины, соответствующего состоянию предельного равновесия, происходит при учете дополнительного условия для критического раскрытия трещины. Этот факт является очевидным подтверждением недостаточности энергетического условия для полного описания предельного равновесия трещины.

3. Заключение. Рассмотрен нелокальный критерий разрушения, который является двухпараметрическим критерием, позволяющим контролировать продвижение концевой области и вершины трещины. Для формулировки критерия разрушения использованы энергетические характеристики трещины — скорость высвобождения энергии деформации и скорость потребления энергии деформации связями. Исходя из двух условий разрушения могут быть рассмотрены режимы

докритического и квазистатического роста трещины: 1) вершина трещины продвигается и размер концевой области нарастает без разрыва связей; 2) размер концевой области сокращается без продвижения вершины трещины; 3) вершина трещины продвигается с одновременным разрывом связей на краю концевой области. Последний режим соответствует квазистатическому росту трещины с выполнении обоих условий разрушения, из которых определяются размер концевой области трещины в состоянии предельного равновесия и критическая внешняя нагрузка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-08-01243).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Goldstein R. V., Perelmuter M. N. Modeling of bonding at the interface crack // Int. J. Fracture. 1999. № 1-2. P. 53–79.
- [2] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 94–112.
- [3] Перельмутер М. Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области // ПММ. 2007. Т. 71. № 1. С. 152–171.
- [4] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. № 2. С. 22–39.
- [5] Перельмутер М. Н. Трещина на границе раздела материалов с нелинейными связями в концевой области // ПММ. 2011. № 1. С. 152–171.
- [6] Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел // ПММ. 1963. № 5. С. 957–962.

Perelmuter M. N. *Modelling of fracture along different material junction.* The nonlocal fracture criterion (NFC) is used to analyze quasi-static growth of bridged cracks along interface junction of materials. The NFC is based on the following two conditions: 1) the equation of the limit equilibrium of the crack tip (it is the equality of the energy release rate and the rate of the energy dissipation by bonds); 2) the condition of the bond limit elongation at the trailing edge of the bridged zone. The regimes of equilibrium or quasi-static growth of the bridged zone and the crack tip are investigated on the basis of these two conditions: a) the crack tip propagates and the size of the bridged zone increases without rupture of the bonds; b) the size of the bridged zone decreases due to rupture of the bonds without the crack tip propagation; c) the crack tip propagates with simultaneous the bonds rupture at the trailing edge of the bridged zone. The last case corresponds to quasi-static crack growth if both fracture conditions are fulfilled. The equilibrium size of the bridged zone and the level of critical external stress are determined from these two conditions. The estimations of the equilibrium size of the bridged zone, the adhesion fracture energy and the external fracture stress depending on the crack size are found.

О ВАЖНОСТИ УЧЕТА ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СНИЖЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Полоник М. В.¹, Рогачев Е. Е.²

¹Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

²Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

В рамках линейной теории упругопластического тела предпринята попытка моделирования технологического процесса отжига металлоизделий, ведущего к снижению уровня остаточных напряжений. Технология отжига заключается в медленном нагреве, выдержке при температуре и последующем медленном охлаждении. В работе показано, что важнейшее значение для описания процесса снятия остаточных напряжений имеет стадия выдержки, которую предложено рассматривать с учетом ползучести материала.

Напряжения, существующие в телах или конструкциях при отсутствии каких-либо внешних воздействий, например, силовых, а также тепловых и других принято называть остаточными. При изготовлении и упрочнении металлоизделий в материалах происходит накопление остаточных напряжений, причиной этому чаще всего являются присутствующие в них микродефекты и микронеоднородности. Уровень таких напряжений и их распределение в окрестности одиночного дефекта сплошности представлен в [1]. Необходимым условием этого выступала статическая определенность процесса пластического течения [2, 3]. Наложение остаточных напряжений на вновь приложенную внешнюю нагрузку, может привести к таким большим суммарным напряжениям, которые вызывают нежелательные изменения формы (коробление) или даже разрушение. Поэтому существует необходимость в применении различных способов, приводящих к снятию остаточных напряжений. Примером такого способа может служить технологический процесс отжига. Технология отжига заключается в нагреве до определённой температуры, выдержке и последующем, медленном, охлаждении.

В работе на примере полого шара, с остаточными напряжениями, накопленными в процессе одномерного деформирования, моделируется процесс отжига. В рамках линейного упругопластического тела в [4] указана конкретная возможность определения параметров упругопластического процесса по итоговому разгрузочному состоянию полого шара ($r_0, R_0, r_0 < R_0$), подвергавшегося одномерному деформированию. Здесь, без доказательств, приведем лишь основные результаты этой работы. Было указано, что для случая одномерного деформирования в сферической системе координат (r, θ, φ) , в предположении необратимой несжимаемости в теле сформировались две области: $r_1 < r \leq R_0$ — упругая и $r_0 \leq r \leq r_1$ — упругопластическая, с необратимыми пластическими деформациями:

$$e_{rr}^p = -2k\gamma - Ar^{-3}, \quad e_{\theta\theta}^p = -e_{rr}^p/2, \quad \gamma = (\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)^{-1}\mu^{-1},$$

где λ и μ — параметры Ламе, k — предел текучести, A — константа, которая определяется по измеренным на внутренней границе полным деформациям $d_{rr}(r_0)$ и

заданным угловым напряжениям $\sigma_{\theta\theta}(r_0) = -2k$. Результат расчета остаточных напряжений представлен на рис. 1. Параметры материала соответствуют стали марки 30ХГСН2А. Сплошной линией указаны радиальные напряжения (σ_{rr}), пунктирной — угловые ($\sigma_{\theta\theta}$). Напряжения на внешней и внутренней границе $\sigma_{rr}(r_0) = 0$ и $\sigma_{rr}(R_0) = 0$.

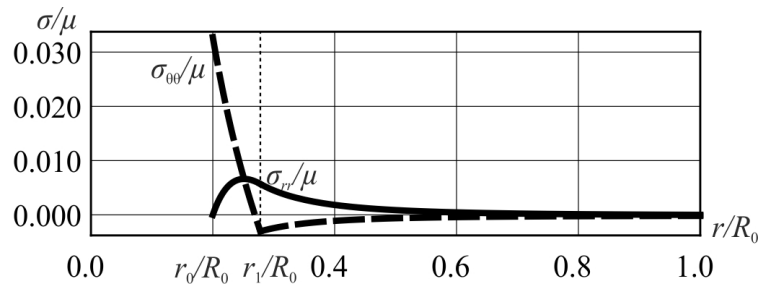


Рисунок 1 – Распределение остаточных напряжений при $T = 20^\circ\text{C}$

Такое состояние среды будем считать исходным для рассмотрения изменения ее напряженного состояния при дальнейших нагрузках. Стадию медленного нагрева рассмотрим в рамках закона Дюамеля–Неймана. Изменение предела текучести материала зададим интерполяционной функцией $k = 1350 \cdot 10^6 - 5(T - 200)(T - 100)(T - 20)(400 + 3T)/1824$, построенной по известным экспериментальным данным при различных температурах (рис. 2). Точками на рис. 2 указаны данные эксперимента.

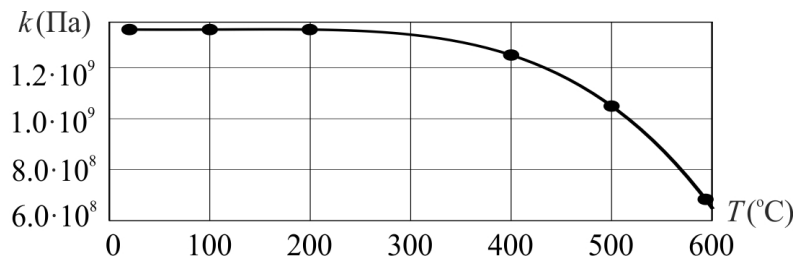


Рисунок 2 – Зависимость предела текучести от температуры для стали 30ХГСН2А

В процессе нагрева до некоторой температуры T_1 (для стали 30ХГСН2А $T_1 = 480^\circ\text{C}$) на упругопластической границе выполнится условие пластичности Треска и пластическое течение начнет развиваться в двух направлениях. Решение показывает, что в сторону внутренней границы пластическое течение развивается быстрее, чем в сторону внешней границы, и при окончательной температуре нагрева T_2 (для стали 30ХГСН2А $T_2 = 570^\circ\text{C}$) в теле сформируется две области: упругая $r_2 < r \leq R_0$ и область пластического течения $r_0 \leq r \leq r_2$. Произошло перераспределение напряжений (рис. 3).

Важно отметить, что если теперь медленно снижать температуру среды до комнатной (рис. 4), на внутренней поверхности $r = r_0$ напряжения станут растягивающими и образуют область повторного пластического течения $r_0 \leq r \leq r_3$. При этом уровень остаточных напряжений возрастет. Таким образом, произошло

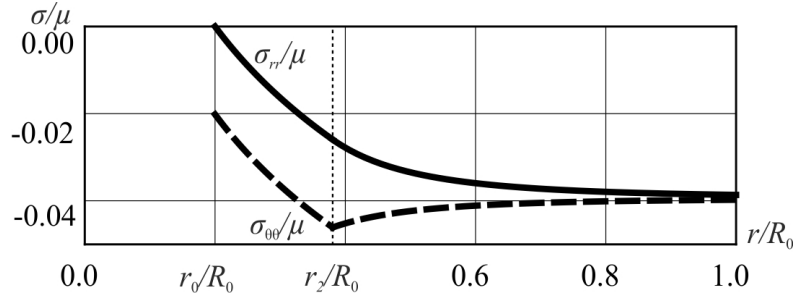


Рисунок 3 – Распределение напряжений при $T = T_2$

наложение остаточных напряжений на вновь приложенную нагрузку, что и вызвало их рост.

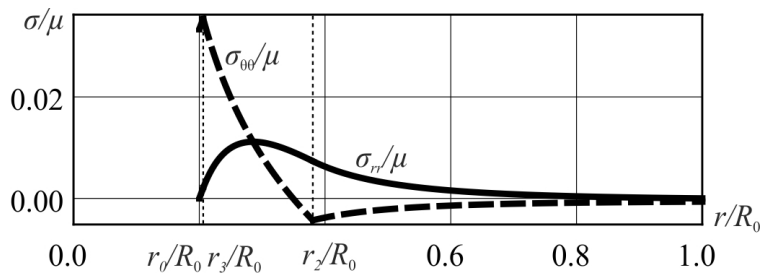


Рисунок 4 – Распределение остаточных напряжений при $T = 20^\circ\text{C}$

В технологическом процессе отжига после стадии нагрева следует процесс выдержки при некоторой, характерной для каждого металла, температуре. Поэтому в моделируемом процессе рассмотрим задачу учитывающую стадию выдержки.

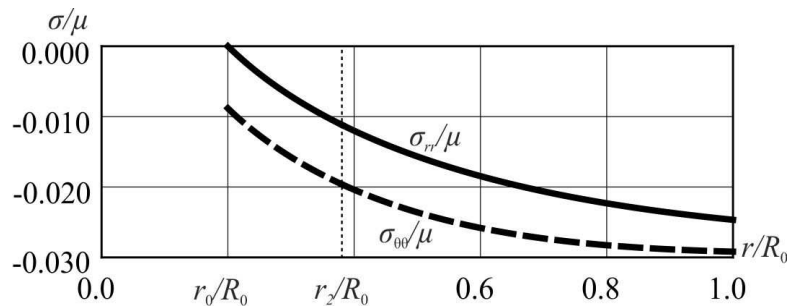


Рисунок 5 – Распределение напряжений при выдержки $t = 1.5$ часа, $T = T_2$

Поскольку для материалов находящихся под длительным влиянием неизменной температуры характерно проявление свойств ползучести, стадию выдержки моделируем с учетом этих свойств. Ползучесть, приводящую к накоплению необратимых деформаций в теле, описываем с помощью степенного закона [5]. Для степени $n = 3$ построено решение. При этом для необратимых деформаций получено соотношение:

$$e_{rr}^v = - (Bt\gamma^{-2} + c)^{-1} - Ar^{-3}, \quad e_{\theta\theta}^v = -e_{rr}^v/2,$$

где B — параметр материала, c — определяется при $e_{rr}^v(t_0) = e_{rr}^p$, A — константа, определяемая напряженно деформированным состоянием среды. На рис. 5 представлен расчет распределения напряжений при выдержки $t = 1.5$ часа, $T = T_2$. Таким образом, уже на стадии выдержки наблюдается релаксация напряжений.

Теперь при снижении температуры до комнатной в теле не возникает ранее указанных отрицательных эффектов, и, более того, на внутренней поверхности $r = r_0$ уровень остаточных напряжений существенно снижается. Таким образом, именно учет ползучести на стадии выдержки позволяет получить результат, имеющий место на практике.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-01-33064-мол_а_вед).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. К возможности установления упругопластического процесса по итоговому разгрузочному состоянию // МТТ. 2000. № 3. С. 130–134.
- [2] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Доклады РАН. 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.
- [3] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 316–326.
- [4] Полоник М. В., Рогачев Е. Е. О снятии остаточных напряжений в упругопластической среде на примере полого шара // XXXVI Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова, 4–10 сентября. 2012 г., Владивосток: сборник материалов. (Электронный ресурс). Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 175–177. Объем 600 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). ISBN 978-5-7442-1517-0.
- [5] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 753 с.

Polonik M. V., Rogachev E. E. *The importance of accounting the creep for modeling reduce residual stresses at temperature influence.* In the the linear theory of elastic-plastic body made an attempt to model the process of annealing metalware, leading to a reduction of residual stresses. Technology of annealing consist of slow heating, holding at temperature followed by slow cooling. It is shown that the stage of holding has essential for the description of stress relief, which was proposed to be considered taking into account the creep of the material.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД МАКСВЕЛЛА И КЕЛЬВИНА–ФОЙХТА

Пухначев В. В.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирский государственный университет*

Статья содержит обзор работ, выполненных в 2007–2013 годах в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН и в Новосибирском государственном университете по моделям несжимаемых вязкоупругих сред

Стимулом для исследований автора в указанной области послужили эксперименты, выполненные авторами работ [10, 11]. В этих работах было обнаружено, что при малых скоростях деформации вода и подобные ей жидкости, наряду с вязкими, проявляют и упругие свойства. При этом фактором сжимаемости среды можно пренебречь. Это обстоятельство приводит к потере свойства гиперболичности, которым обладают многие модели сжимаемых вязкоупругих сред [12, 13].

Литература, посвященная механике вязкоупругих сред, достаточно обширна (см. монографии [14, 15], обзор [16] и имеющиеся в них ссылки). Однако систематическое изучение моделей несжимаемых вязкоупругих сред до сих пор не предпринималось. Начально-краевые задачи для соответствующих систем квазилинейных уравнений составного типа достаточно сложны, поэтому целесообразно исследовать их на примерах двумерных и одномерных решений для двух классических моделей — Максвелла и Кельвина–Фойхта. Эти модели были сформулированы в XIX столетии, но не потеряли своего значения и поныне.

Поведение несжимаемой среды Максвелла описывается в терминах вектора скорости \mathbf{v} , давления p и тензора напряжений $P = -pI + S$, где S — вязкоупругая составляющая тензора P , а I — единичный тензор. Материальными характеристиками вязкоупругой среды являются ее плотность ρ , динамическая вязкость μ и время релаксации τ . Эти величины далее предполагаются постоянными. Кроме того, считается, что на среду не действуют внешние объемные силы. В этих предположениях, уравнения движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} S, \quad \tau \frac{\tilde{d}S}{dt} + S = 2\mu D. \quad (1)$$

Здесь D — тензор скоростей деформаций векторного поля, а символ \tilde{d}/dt обозначает одну из инвариантных, или объективных, производных тензора S [14, 15]. Выбор такой производной неоднозначен — это может быть верхняя или нижняя конвективная производная

$$\frac{\tilde{d}S}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S - \nabla \mathbf{v} \cdot S - S \cdot \nabla \mathbf{v}^T, \quad \frac{\tilde{d}S}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S + S \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \cdot S,$$

вращательная производная Яуманна

$$\frac{\tilde{d}S}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S - W \cdot S + S \cdot W \quad (2)$$

или их комбинация. Здесь W — антисимметричная часть тензора $\nabla \mathbf{v}$.

Несжимаемая вязкоупругая среда Кельвина–Фойхта характеризуется вектором скорости \mathbf{v} , давлением p , тензором напряжений P и тензором деформаций Альманси–Эйлера E [18]. Эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \operatorname{div} P, \quad P = -pI + 2\mu D + 2GE, \quad (3)$$

$$E_t + \mathbf{v} \cdot \nabla E + WE - EW + DE + ED = D.$$

Последнее соотношение в системе (3) выражает кинематическую связь между тензорами E и D [18], а предпоследнее является реологическим уравнением состояния.

Теоремы о разрешимости начально-краевых задач для систем (1) и (3) отсутствуют до сих пор даже в двумерном случае. Автором и его новосибирскими коллегами велась работа по исследованию эффективно одномерных задач на основе методов группового анализа дифференциальных уравнений [19]. Оказалось, что системы (1) и (3) допускают бесконечные группы Ли, содержащие, наряду с переносами и вращениями, обобщенные преобразования Галилея [5]. С их помощью построены решения ряда классических задач, таких как задачи о заполнении сферической полости [1, 3], о движении в зазоре между двумя соосными вращающимися цилиндрами [6, 7], о деформации полосы со свободными границами [2].

Первая из указанных задач является обобщением задачи Порицки–Чу–Забабахина о заполнении полости в вязкой несжимаемой жидкости [20]. Рассмотрим сначала случай среды Максвелла. В этом случае задача о сферически симметричном движении среды при заданном постоянном давлении на бесконечности сводится к интегро-дифференциальному уравнению для радиуса полости и квадратурам [3]. Это уравнение и начальные условия содержат три безразмерных параметра: число Рейнольдса, безразмерное время релаксации и число Вебера. Выяснилось, что при ненулевом поверхностном натяжении полость исчезает за конечное время. Если поверхностное натяжение отсутствует, то существует два режима — с конечным и бесконечным временем схлопывания, как и в случае вязкой жидкости. Однако для среды Максвелла критическое число Рейнольдса, разделяющее эти два режима, зависит от времени релаксации и возрастает вместе с ним. В зависимости от определяющих параметров, реализуется как колебательный, так и монотонный сценарий стягивания полости в точку. В первом случае колебания радиуса полости прекращаются, если он становится достаточно малым. Имеется два асимптотических режима вблизи момента коллапса: инерциальный, когда скорость в этот момент становится бесконечной, и вязкий, когда она стремится к конечному пределу, который зависит от данных задачи.

В задаче о заполнении сферической полости в среде Кельвина–Фойхта ситуация качественно меняется [1]. Здесь также имеется три определяющих параметра: число Рейнольдса, число Вебера и параметр жесткости, равный отношению модуля сдвига к давлению на бесконечности. В зависимости от них, существует три

режима: коллапс полости за конечное время; монотонное уменьшение радиуса полости до значения $R_\infty > 0$ за бесконечное время; приближение к предельному значению радиуса R_∞ в колебательном режиме за бесконечное время. В работе [1] построена карта режимов в пространстве определяющих параметров. Примечательно, что колебательный режим исчезает, если реологическое уравнение состояния (3) заменить его линеаризованной версией: $E_t = D$.

В работе [6] изучен аналог классической задачи Куэтта о движении несжимаемой вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта. Область течения ограничена двумя соосными цилиндрическими поверхностями. Интересен случай, когда внешний цилиндр покоится, а внутренний вращается по инерции. Задача об определении поля скоростей вращательно симметричного течения оказывается линейной. Приближение инерционного движения цилиндра к состоянию покоя характеризуется собственными числами спектральной задачи для квадратичного пучка операторов. Ее спектр состоит из счетного множества вещественных отрицательных и конечного числа комплексных собственных значений. Он имеет две точки сгущения: $\lambda = -\infty$ и $\lambda = -\mu^{-1}G$.

Линеаризация задачи Куэтта для среды Максвелла также имеет место, если в качестве объективной производной в последнем уравнении системы (1) выбирается верхняя или нижняя конвективная производная, однако структура спектра здесь иная [7]. Имеется не более конечного числа вещественных отрицательных собственных чисел и счетное множество комплексных собственных чисел с отрицательными вещественными частями. Спектр имеет две точки сгущения $\lambda = \pm i\infty$.

Предыдущие примеры имели дело с инвариантными решениями систем (1) и (3). В работе [2] рассмотрены частично инвариантные решения [19] системы (1) относительно группы, порожденной переносом и галилеевым переносом вдоль одной из координат. Инвариантные решения здесь отсутствуют, а множество частично инвариантных решений оказывается весьма узким. Предложен способ расширения множества точных решений, позволяющий найти решения с нетривиальной зависимостью тензора напряжений от пространственных координат. Среди полученных таким образом решений содержатся решения, описывающие деформацию вязкоупругой полосы со свободными границами.

В заключение упомянем о газодинамической аналогии в динамике несжимаемых вязкоупругих сред. Как показано в работе [6], уравнения, описывающие распространение цилиндрических звуковых волн в вязком газе, очень близки к уравнениям задачи Куэтта для несжимаемой среды Кельвина–Фойхта. Более того, уравнение для радиальной скорости газа переходит в уравнение для окружной скорости в среде Кельвина–Фойхта, если заменить динамическую вязкость последней на сумму первой и второй вязкости газа, плотность среды — на невозмущенную плотность газа ρ_0 , а модуль сдвига — на величину $\rho_0 c^2$, где c — скорость звука в газе.

Ситуация с несжимаемой средой Максвелла более сложная. Система (1), которая описывает эту модель, имеет как вещественные, так и комплексные характеристики [4]. В работе [9] выделен класс двумерных движений среды Максвелла, для которых происходит разделение исходной системы на гиперболическую подсистему с одной пространственной переменной и квадратуру. Свойства получае-

мых гиперболических подмоделей зависят от выбора инвариантной производной в реологическом соотношении. Если в качестве последней выбрана вращательная производная Яуманна (2), то уравнения подмодели остаются квазилинейными. Они допускают запись в виде законов сохранения, что позволяет исследовать их разрывные решения. Полученные уравнения тождественны уравнениям динамики невязкого газа с невыпуклой зависимостью давления от плотности. Структура разрывных решений изучена в работе [8]. Поперечные ударные волны в среде типа Максвелла наблюдались экспериментально [21]. Если в системе (2) выбраны верхняя или нижняя конвективные производные, то уравнения одномерных гиперболических подмоделей оказываются линейными. При таком выборе имеет место неустойчивость плоского течения Куэтта относительно двумерных возмущений [22]. В работе [9] доказано, что плоское течение Куэтта в модели (1), (2) неустойчиво по отношению к одномерным возмущениям, если число Вейсенберга больше единицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы 12.3 ОЭММПУ РАН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Осипов С. В.* Задача о заполнении сферической полости в среде Кельвина–Фойхта // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 5. С. 93–101.
- [2] *Пухначев В. В.* Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 2. С. 16–23.
- [3] *Осипов С. В., Пухначев В. В.* Задача о заполнении сферической полости в несжимаемой вязкоупругой среде Максвелла // В сб. «Успехи механики сплошной среды». Владивосток: Дальнаука. 2009. С. 583–591.
- [4] *Пухначев В. В.* Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 4. С. 116–126.
- [5] *Мещерякова Е. Ю., Пухначев В. В.* Групповой анализ уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Труды XIV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Азов, 19–24 июня 2010 г.). Изд-во ЮФУ. Ростов-на-Дону, 2010. С. 230–234.
- [6] *Пухначев В. В., Пухначева Т. П.* Задача Куэтта для среды Кельвина–Фойхта // Вестник НГУ. Математика, механика и информатика. 2010. Т. 10. № 3. С. 93–108.
- [7] *Osipov S. V., Pukhnachev V. V., Pukhnacheva T. P.* Mathematical models in dynamics of incompressible viscoelastic media // American Institute of Physics. CP1301. Melville, New York. 2010. P. 262–269.
- [8] *Liapidevskii V. Yu., Pukhnachev V. V., Tani A.* Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium // Wave Motion, Special Issue «Nonlinear Waves in Action». 2011. V. 48. P. 727–737.

- [9] *Ляпидевский В. Ю., Пухначев В. В.* Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Труды МИАН. 2013. Т. 282. С. 84–97.
- [10] *Апакашев Р. А., Павлов В. В.* Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3–7.
- [11] *Коренченко А. Е., Бескачко В. П.* Определение модуля сдвига воды в экспериментах с плавающим диском // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 100–103.
- [12] *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998. 268 с.
- [13] *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский Лицей, 1998. 412 с.
- [14] *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.
- [15] *Joseph D. D.* Fluid dynamics of viscoelastic liquids. N. Y.: Springer Verlag, 1990. 756 p.
- [16] *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Гидродинамика неньютоновских жидкостей. Итоги науки и техники. Серия «Комплексные и специальные разделы механики», Т. 4. М.: Изд. ВИНТИ, 1991. С. 3–98.
- [17] *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 400 с.
- [18] *Городцов В. А., Леонов А. И.* О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязко-упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 1. С. 70–94.
- [19] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [20] *Пухначев В. В.* Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 1. С. 6–76.
- [21] *Catheline S., Gennison J.-L., Tanter M., Fink M.* Observation of shock transverse waves in elastic media // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. No. 16, 164301(4).
- [22] *Городцов В. А., Леонов А. И.* О линейной неустойчивости плоскопараллельного течения Куэтта упруго-вязкой жидкости // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 287–299.

Pukhnachev V. V. *Mathematical models of incompressible models viscoelastic media of Maxwell and Kelvin–Voigt.* Paper contains the review of works fulfilled for the period 2007–2013 in Lavrentyev Institute of Hydrodynamics and Novosibirsk State University on models of incompressible viscoelastic media.

ЛУЧЕВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНО–УПРУГИХ СРЕД ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

В настоящей работе проводится подробный анализ лучевой методики для многомерных задач ударного деформирования нелинейно–упругих сред.

Математическое моделирование движения ударных волн в деформируемых твердых средах осуществляется только на уровне нелинейной модели. Это приводит к резкому сокращению возможности получения точных теоретических решений конкретных краевых задач нестационарной динамики. Одновременно, как следствие, возрастает роль приближенных аналитических методов решения, использующих естественные масштабы малости некоторых характерных величин задачи. В этом направлении, как один из наиболее перспективных, необходимо назвать метод лучевых рядов [1, 2]. В своем варианте для задач ударного деформирования [3] он ранее неоднократно применялся в одномерных волновых процессах [4, 5]. Данное сообщение ставит основной целью развитие и обобщение лучевого метода для многомерных динамических задач. В качестве базового примера рассматривается динамическая задача плоской деформации нелинейно–упругого полупространства, ограниченного цилиндрической поверхностью Φ_0 с ненулевой кривизной.

Считаем до момента $t = 0$ массив изотропной пятиконстантной среды Мурнагана недеформированным. С момента $t = 0$ точки границы Φ_0 смещаются по известному закону в результате динамической кратковременной нагрузки:

$$\begin{aligned} u_i \Big|_{\mathbf{r}_0(y,t)} &= f_i(y,t), \quad \mathbf{r}_0(y,t) = \mathbf{R}_0(y) + f_i \mathbf{e}_i, \\ f_1 &= v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad f_2 = 0, \quad i = 1, 2, \quad u_3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) \mathbf{R}_0 и \mathbf{r}_0 — векторы, задающие положение Φ_0 при $t = 0$ и при $t \geq 0$ соответственно, f_i — известные функции. В результате нагрузки в среде возникает поле перемещений $u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2(x_1, x_2, t)$, $u_3 = 0$. Следствием специального выбора краевых условий (1) становится возникновение двух ударных волн, чисто продольной (Σ_1) и квазипоперечной (Σ_2) [6]. Геометрические, кинематические и динамические условия совместности [7] позволяют определить формулы для нормальных скоростей G_i этих волн в зависимости от деформированного состояния в окрестности волн, т. е. $G_i = G_i(u_{k,j}^+, u_{k,j}^-, \dot{u}_i^+, \dot{u}_i^-)$, индексы « \pm », как обычно, задают величины перед и сразу за волной. При движении каждой ударной волны Σ_i в среде динамически формируется криволинейная координатная сетка s_i, z_i , называемая лучевой. Для плоской задачи лучевые координаты s_i, z_i расположены в

плоскости декартовых координат x_1, x_2 . Координата s_i означает расстояние, пройденное вдоль луча, соответствующего волне Σ_i , координата z_i фиксирует выбор конкретного луча. В момент $t = 0$ выполняется: $z_1 = z_2 = y, s_1 = s_2 = 0$.

Предполагая малость послеударных времен, представим решение для поля перемещений следующими лучевыми рядами:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right]_{t_1} (t - t_1)^k, \quad t \geq t_1, \\ u_i^{(2)} &= u_i^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right]_{t_2} (t - t_2)^k, \quad t \geq t_2, \\ t_i &= \int_0^{s_i} G_i^{-1}(\xi, z_i) d\xi. \end{aligned} \tag{2}$$

Согласно (2), перемещения $u_i^{(1)}$ в окрестности волнового фронта Σ_1 задаются как функции координат s_1, z_1, t . Перемещения $u_i^{(2)}$ для окрестности волнового фронта Σ_2 зависят совместно от координат s_1, z_1, s_2, z_2, t . Время прихода волнового фронта Σ_i в данную точку вдоль выбранного луча задается функциями t_i , которые зависят от перемещений, т. е. также заранее неизвестны. Так как $\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right]_{t_j} \neq 0$, то прямое применение рядов (2) невозможно, поскольку уравнения затухания лучевого метода для ударных волн теряют рекуррентные свойства. В представление (2) включаем дополнительные ряды по дельта-производным [7] для функций скачков, вычисленные в окрестности $t = 0$:

$$\begin{aligned} [\dot{u}_i]_{t_1} &= \kappa_i = \kappa_{i0} + \frac{\delta \kappa_{i0}}{\delta t} t + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \kappa_{i0}}{\delta t^2} t^2 + \dots, \\ [\ddot{u}_i]_{t_1} &= \chi_i = \chi_{i0} + \frac{\delta \chi_{i0}}{\delta t} t + \dots, \\ [\dot{u}_i]_{t_2} &= w_i = w_{i0} + \frac{\delta w_{i0}}{\delta t} t + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 w_{i0}}{\delta t^2} t^2 + \dots, \\ [\ddot{u}_i]_{t_2} &= \psi_i = \psi_{i0} + \frac{\delta \psi_{i0}}{\delta t} t + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

В (3) $\kappa_{i0}, \chi_{i0}, w_{i0}, \psi_{i0}, \frac{\delta \kappa_{i0}}{\delta t}$ и т. д. — набор неизвестных функций координаты z_1 или z_2 . Данные функции не все являются независимыми. Соотношения между ними следуют из уравнений затухания задачи, т. е. уравнений движения, на k -м шаге метода дополнительно продифференцированным по времени $k - 1$ раз и записанным в разрывах для волны Σ_1 или Σ_2 . При этом свертка получаемых уравнений с компонентами единичной нормали или единичных касательных векторов приводит к соотношениям, необходимым для вычисления основных элементов разрыва, определяющих его тип (продольный или квазипоперечный). Дополнительно к уравнениям затухания, для функций, входящих в ряды (3), должны быть выполнены краевые условия (1) с подстановкой в них представлений для $u_i^{(2)}$. Такая

процедура осуществима с учетом дополнительных соотношений, связывающих лучевые координаты s_i , z_i и сетку x_1 , x_2 :

$$x_i(s_j, z_j) = x_{i0}(0, z_j) + \int_0^{s_j} G_j n_i^{(j)} d\xi. \quad (4)$$

Приравнивая правые части (4) для $j = 1, 2$, можно получить уравнения, которые задают преобразование одной лучевой системы в другую. Заметим, что эти уравнения содержат ряд функций координат z_1 и z_2 , который остается неизвестным вплоть до выполнения краевых условий (1).

Приведем в качестве примера уравнения лучевого метода, следующие на продольной ударной волне:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \kappa_n}{\delta t} &= \frac{\gamma_1 \chi_n \frac{\kappa_n}{C_1} + H_1 C_1^2 \left(\frac{\kappa_n}{C_1} + \gamma_2 \left(\frac{\kappa_n}{C_1} \right) \right)^2}{1 - \gamma_3 \frac{\kappa_n}{C_1}} + \dots, \\ \frac{\chi_i x_{i,1}}{C_1} \left(1 + \gamma_3 \frac{\kappa_n}{C_1} \right) &= \kappa_{n,1} \left(-1 - \gamma_4 \frac{\kappa_n}{C_1} \right) + \dots, \\ \kappa_n &= \kappa_i n_i^{(1)}, \quad \chi_n = \chi_i n_i^{(1)}, \quad x_{i,1} = \frac{\partial x_i}{\partial z_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых H_1 — средняя кривизна волнового фронта, $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ — константы материала. На квазипоперечной ударной волне получаем уравнения такого же типа, их значительно большая громоздкость связана с наличием перед Σ_2 предварительных деформаций. На квазипоперечной волне основное уравнение затухания записывается для главной компоненты разрыва $w_m = w_i m_i^{(2)}$, $m_i^{(2)} n_i^{(2)} = 0$, $m_i^{(2)} m_i^{(2)} = 1$. Второе уравнение является дополнительным алгебраическим соотношением для компонент ψ_i . Так как величины скачков задаются дополнительными рядами (3), уравнения затухания необходимы только в момент $t = 0$. Для записи уравнений лучевого метода на Σ_2 в момент $t = 0$, входящие в него предварительные деформации представим формулами вида

$$u_{i,j}^+ \Big|_{t=0, \Sigma_2} = - u_{i,j}^- \Big|_{t=0, \Sigma_1} = [u_{i,j}] \Big|_{t=0, \Sigma_1} = - \frac{\kappa_i n_j^{(1)}}{G} \Big|_{t=0}$$

и т. д.

Эти функции позволяют выразить все предварительные деформации на Σ_2 через скачки производных на Σ_1 .

Подставляя в формулы (4) приближенные представления величин G_j и $n_i^{(j)}$ в окрестности нуля, получим уравнения лучевых координат первой волны в форме

$$\begin{aligned} x_i(t, z_1) &= x_{i0}(z_1) + C_1(1 + F_0) n_{i0}^{(1)} t + C_1 \left\{ (1 + F_0) \frac{\delta n_{i0}^{(1)}}{\delta t} + F n_{i0} \right\} \frac{t^2}{2} + \dots, \\ F_0 &= -\alpha_1 \frac{\kappa_{n0}}{C_1}, \quad F = -\frac{\alpha_1}{C_1} \frac{\delta \kappa_{n0}}{\delta t}, \end{aligned} \quad (6)$$

для второй волны решение строится сходным образом и содержит свой набор неизвестных функций. Переход от уравнений (6) к уравнениям вида $x_i = x_i(s_j, z_j)$ происходит на основе уравнения $t(s_j, z_j) = \int_0^{s_j} G_j^{-1} d\xi$, в котором формулы для G_j записаны приближенно при $\xi \approx C_j t$.

Преобразование от s_1, z_1 к координатам s_2, z_2 для малых времен можно провести, строя асимптотические ряды

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 + \varepsilon h_1(s_2, z_2) + \varepsilon^2 h_2(s_2, z_2) + \dots, \\ z_1 &= z_2 + \varepsilon g_1(s_2, z_2) + \varepsilon^2 g_2(s_2, z_2) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых h_1, h_2, g_1, g_2 — функции, которые определяются подстановкой (7) в формулы (4). На первом шаге при этом получим

$$\begin{aligned} h_1 &= 0, \quad g_1 = \frac{s_2^2}{a_{22}^0(1 - 2H_0 s_2)} \frac{\kappa_{n0,2}}{v_0} \left(-\frac{\alpha_1}{1 + F_0} - \frac{\beta_1 - \frac{C_1}{C_2}}{1 + E_0} \right), \\ a_{22}^0 &= \frac{\partial x_i}{\partial z_2} \frac{\partial x_i}{\partial z_2} \Big|_{t=0}, \quad E_0 = \kappa_{n0} \left(\frac{\beta_1}{G_{10}} - \frac{1}{C_2} \right) \end{aligned}$$

т. е. более существенной будет разница между координатами z_1 и z_2 (расхождение лучей).

Дополнительно к проведенному сравнению лучевых координат, для выполнения условия (1) необходимо решить задачу об определении для заданного луча ($z_2 = \text{const}$) координаты его подвижной точки пересечения Z с подвижной границей Φ_0 . Для нее $y = y(z_2, t)$ и $s_2 = s_2(z_2, t)$. Для времен $t \ll 1$ выполняются приближенные соотношения

$$\begin{aligned} y(z_2, t) &= z_2 - \frac{n_{20}(z_2)v_0}{\sqrt{a_{22}^0}} t + \dots, \\ s_2(z_2, t) &= v_0 n_{10}(z_2) t + \dots, \end{aligned}$$

многоточием обозначены невыписанные слагаемые, квадратичные по t .

Выполнение краевых условий выполняем в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} \Big|_{s_2=s_2(z_2,t)} &= v_0 t + \frac{at^2}{2} \Big|_{y=y(z_2,t)}, \\ u_2^{(2)} \Big|_{s_2=s_2(z_2,t)} &= 0 \Big|_{y=y(z_2,t)}, \end{aligned}$$

причем последнее из условий диктуется исключительно простотой изложения. В общем виде краевое условие для компоненты u_2 в формулах (1) тоже будет нетривиальным. Для упрощения выкладок примем, что $v_0, a = \text{const}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \kappa_{n0} &\approx -v_0 n_{10}, \quad w_{m0} \approx v_0 n_{20}, \\ \chi_{10} &\approx -\frac{v_0}{\sqrt{a_{11}^0}} (C_2 n_{20,1} n_{10} + C_1 n_{10,1} n_{20}) - a n_{10}^2, \\ \chi_{10} &\approx \frac{v_0}{\sqrt{a_{11}^0}} (C_1 n_{10,1} n_{10} - C_2 n_{20,1} n_{20}) - a n_{10} n_{20}, \\ \psi_{10} &\approx -\chi_{10} - a, \quad \psi_{20} \approx -\chi_{20}. \end{aligned}$$

Найденные коэффициенты позволяют без труда вычислить остальные функции лучевых разложений для первого шага метода. Представленные в статье методики легко обобщаются на волновые задачи трехмерного характера. Представленные здесь общие идеи могут быть перенесены на задачи динамического деформирования сред с более сложными физико-механическими свойствами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а, 12-01-90004-Бел_а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Achenbach J. D., Reddy D. R.* Note of wave propagation in linear viscoelastic media // ZAMP. 1967. V. 18. № 1. P. 141–144.
- [2] *Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д.* Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 1. С. 145–155.
- [3] *Буренин А. А., Россихин Ю. А.* Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. С. 129–137.
- [4] *Герасименко Е. А., Завертан А. В., Рагозина В. Е.* Об использовании прифронтных лучевых разложений в динамике деформирования // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 282–288.
- [5] *Буренин А. А., Рагозина В. Е.* К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Известия РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 101–106.
- [6] *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [7] *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

Ragozina V. E., Ivanova Y. E. *The ray representations of multi-dimensional problems solutions of the nonlinear elastic medium dynamics under impact loading.* This paper gives a detailed analysis of the ray method for multi-dimensional shock deformation problems of nonlinear elastic mediums.

ОБ УЧЕТЕ ФАКТОРА НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ДЕФОРМАЦИИ, ПРИВОДЯЩИХ К ПРОДОЛЬНЫМ УДАРНЫМ ВОЛНАМ

Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

На основе метода сращиваемых асимптотических разложений получены решения краевых задач ударного деформирования нелинейно упругого слабонеоднородного полупространства. Показано, что совместное влияние нелинейности модели и различных вариантов свойства неоднородности приводит для продольных ударных волн к новым эволюционным уравнениям в прифронтных областях. Переход в эти области связан с совместными согласованными между собой преобразованиями всех независимых координат задачи.

Свойствам ударных волн в нелинейно упругих средах посвящено большое число исследований [1–3]. Из них хорошо известно, что в общем случае механизм образования и последующего движения поверхностей сильных разрывов зависит от свойств упругой среды, от наличия в ней предварительных деформаций, от интенсивности разрыва, а также от послеударного воздействия на границе [1–3]. Скорости ударных волн и геометрия этих поверхностей за исключением простейших краевых задач тоже входят в число неизвестных величин, поэтому ряд краевых условий ставится на поверхностях с заранее неизвестным положением. Наконец, по своему типу ударные волны в твердом теле перестают быть чисто продольными или поперечными и приобретают смешанный характер [2, 3].

В качестве теоретического метода исследования обобщенных решений для задач динамики с поверхностями разрывов деформаций выбирается метод сращиваемых асимптотических разложений [4]. Анализ основного, внешнего разложения позволяет указать те пространственно-временные области, где нелинейность является доминирующим фактором. Для массивов большой протяженности дополнительным фактором, влияющим на волновой деформационный процесс, может стать неоднородность свойств среды в направлении движения ударной волны. В настоящей статье авторы рассматривают всего один вариант — слабую неоднородность степенного типа. Уже в этом случае показано, что учет факторов нелинейности связи напряжений–деформаций и неоднородности упругих свойств может приводить к различным вариантам эволюционного уравнения. Возникают интересные ситуации, когда переход к эволюционному уравнению возможен только при совместном изменении обеих независимых переменных.

Общая система уравнений, задающая свойства и динамику нелинейно упругой изотропной сжимаемой среды в декартовой пространственной системе координат

Эйлера x_1, x_2, x_3 , имеет вид

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad \rho = \rho_0 \det(\delta_{ij} - u_{i,j}), \quad \alpha_{ij} = 0, \quad 5(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \\ \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \\ W(I_1, I_2, I_3) &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots, \\ I_1 &= \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad I_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Относительно констант упругой среды сделаем дополнительное предположение, считая, что они имеют слабую зависимость от координаты x_1 , то есть

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \tilde{\lambda}_1 s, \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon \tilde{\mu}_1 s, \quad \rho_0 = \tilde{\rho}_0 + \varepsilon \tilde{\rho}_1 s, \quad l = l_0 + \varepsilon \tilde{l}_1 s, \\ m &= m_0 + \varepsilon \tilde{m}_1 s, \quad n = n_0 + \varepsilon \tilde{n}_1 s, \quad s = x_1 C_1^{-1} T^{-1}, \quad C_1 = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0) \tilde{\rho}_0^{-1}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda_0, \tilde{\lambda}_1, \mu_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, l_0, \tilde{l}_1, m_0, \tilde{m}_1, n_0, \tilde{n}_1$ — константы, C_1 — скорость продольных упругих волн в линейном приближении с исключенной неоднородностью среды, T и $C_1 T$ — характерное время и характерное расстояние, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр задачи. Формулы (2) соответствуют слабой степенной неоднородности в направлении оси x_1 .

Рассмотрим нелинейно упругое предварительно недеформированное полупространство $x_1 \geq 0$. Начиная с момента $t = 0$ в полупространстве под действием приложенной известной нагрузки возникает поле перемещений $u_1 = u_1(x_1, t)$, $u_2 = u_3 = 0$. При этом ударная волна становится чисто продольной [2]. На переднем фронте ударной волны должны быть выполнены краевые условия

$$\begin{aligned} u_1 \Big|_{x_1 = \int_0^t G(\xi) d\xi} &= 0, \quad \tau_1 = u_{1,1}^- \Big|_{x_1 = \int_0^t G(\xi) d\xi}, \\ G^2 &= (\lambda + 2\mu) \rho_0^{-1} \{1 + (1 - \alpha(\lambda + 2\mu)^{-1}) \tau_1 + \dots\}, \\ \tau_1 &= [u_{1,1}] = -u_{1,1}^-, \quad \alpha = -\frac{7}{2}(\lambda + 2\mu) + 3(l + m + n), \end{aligned}$$

где G — скорость волны, τ_1 — интенсивность волны.

Следствием общей системы уравнений (1), (2) будет следующее уравнение движения:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu + 2\alpha u_{1,1}) u_{1,11} + ((\lambda + 2\mu)_{,1} + \alpha_{,1} u_{1,1}) u_{1,1} + \dots = \\ = \frac{\rho_0}{(1 - u_{1,1})^2} \{ \ddot{u}_1 (1 - 2u_{1,1}) + 2\dot{u}_{1,1} \dot{u}_1 \} + \dots \end{aligned}$$

В безразмерных переменных $s = \frac{x_1}{C_1 T}$, $m = \frac{t}{T}$, $w(s, m) = \varepsilon^{-1} \frac{u_1(x_1, t)}{C_1 T}$, получим внешнее решение задачи:

$$\begin{aligned} w(s, m) &= f(\xi) + \varepsilon \left\{ f(\xi) f'(\xi) + \frac{\gamma}{2} f''(\xi) (\xi + s) s - \left[\frac{\gamma}{2} (f'(\xi) \xi - \right. \right. \\ &\left. \left. - f(\xi)) + \frac{\alpha_1}{2} f(\xi) + \frac{\alpha_0}{4} (f'(\xi))^2 \right] s \right\} + \dots, \quad \xi = m - s \geq 0, \quad \gamma = \frac{\alpha_1 - \rho_1}{2}, \end{aligned}$$

где $f(\xi)$ — известная функция краевого условия на границе полупространства. Очевидно, что для него неравномерность возникает впервые при $\xi \sim 1$, $s \sim \varepsilon^{-1/2}$ и связана только со свойством неоднородности. Новое внутреннее решение определим в переменных

$$\sigma = \varepsilon^{1/2}s, \quad p = s - m, \quad w(p, \sigma),$$

$$w(\sigma, p) = w_0(\sigma, p) + \varepsilon^{1/2}w_1(\sigma, p) + \varepsilon w_2(\sigma, p) + \dots$$

На каждом шаге внутреннего решения получим такое волновое уравнение:

$$v_{i,\sigma} + \gamma\sigma v_{i,p} = H_i(\sigma, p), \quad H_0 = 0, \quad v_i = w_{i,p}, \quad (3)$$

в котором $H_i(\sigma, p)$ — функция, определяемая предыдущими шагами метода. Для характеристик уравнения (3) и положения ударной волны в нулевом приближении получим общее соотношение

$$\frac{dp_0}{d\sigma} = \gamma\sigma, \quad p_0(\sigma) = \frac{\gamma\sigma^2}{2},$$

поэтому

$$w_0(\sigma, p) = \int_0^z v_0(\xi) d\xi, \quad z = p - \frac{\gamma\sigma^2}{2},$$

функции последующих шагов определяются без труда из уравнения (3). Это уравнение показывает необходимость уточнения на расстояниях $s \sim \varepsilon^{-1/2}$ искривления полухарактеристик за счет неоднородности. Сравнение $w_1(\sigma, p)$ и $w_0(\sigma, p)$ диктует следующее сжатие масштаба и изменение полухарактеристики:

$$z = p - \frac{\gamma}{2}\sigma^2, \quad y = \varepsilon^{1/6}\sigma, \quad w = w(z, y),$$

$$w(z, y) = w_0(z, y) + \varepsilon^{1/3}w_1(z, y) + \varepsilon^{2/3}w_2(z, y) + \dots$$

На нулевом шаге метода в новых переменных получаем уравнение

$$v_{0,y} - \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)}{4}\gamma y^2 v_{0,z} = 0, \quad v_0 = w_{0,z},$$

решением которого будет функция

$$v_0 = F_0(\zeta) = F_0\left(z + \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)\gamma y^3}{12}\right).$$

Очередное сжатие координаты $y = \varepsilon^{2/3}s$ одновременно привело к изменению полухарактеристики, которая теперь задается формулой

$$\zeta = s - m - \frac{\gamma}{2}\varepsilon s^2 + \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)\gamma}{12}\varepsilon^2 s^3 + \dots = const.$$

Два рассмотренных выше сжатия координаты s ($\sigma = \varepsilon^{1/3}s$, $y = \varepsilon^{2/3}s$) приводят к гиперболическим уравнениям для $w_0(p, \sigma)$ или $w_0(p, y)$, причем эти уравнения

указывают на необходимость учета в полухарактеристике p новых слагаемых, обусловленных неоднородностью среды (координаты z и ζ соответственно). Очевидно, что рассматривая последовательно внутренние задачи со сжатием координаты s в $\frac{k}{k+1}$ раз, в пределе при $k \rightarrow \infty$ приводят к внутренней задаче с переменными

$$r = s - m - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varepsilon^k s^{k+1}, \quad n = \varepsilon s, \quad w = w(r, n), \quad (4)$$

где константы A_k можем считать известными и вычисленными последовательно на k -м шаге сжатия координаты s . Предположим, что для ряда, входящего в формулы (4), выполняется следующая связь с функцией $\Psi(n)$:

$$\Psi(n) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (k+1)n^k, \quad \Psi'(n) = - \sum_{k=1}^{\infty} A_k k(k+1)n^{k-1}.$$

Тогда, представляя неизвестную функцию $w(r, n)$ асимптотическим рядом по целым степеням малого параметра, для наименьшей степени ε получим уравнение

$$w_{0,rr} \{ \Psi^2(n)(1 + \alpha_1 n) - (1 + \rho_1 n) \} = 0,$$

из которого для нашей задачи следует, что $\Psi(n) = \sqrt{(1 + \rho_1 n)(1 + \alpha_1 n)^{-1}}$. Рассматривая эту функцию при $n = \varepsilon s$, $s \sim 1$ и раскладывая ее в ряд Тейлора, получим, что найденный вид $\Psi(n)$ согласуется с проведенными раньше сжатиями масштаба s . Подставляя функцию $\Psi(n)$ в уравнение движения, на нулевом шаге метода для перемещений получим эволюционное уравнение

$$v_{0,n} + v_{0,r} v_0 \frac{\Psi^2(n)(\alpha_0 + 2\alpha_2 n)}{2(1 + \alpha_1 n)} + v_0 \left(\frac{\alpha_1}{2(1 + \alpha_1 n)} + \frac{\Psi'(n)}{2\Psi(n)} \right) = 0, \quad v_0 = w_{0,r}. \quad (5)$$

В нем отражены все факторы, влияющие на прифронтовое поле перемещений, в том числе присутствует и искажение исходного импульса за счет неоднородной среды. Его общее решение строится вдоль характеристик

$$V_0(r, n) = F \left(r - \frac{V_0(r, n)}{2} \int_0^n \sqrt[4]{\frac{(1 + \rho_1 \xi)^3}{(1 + \alpha_1 \xi)^9}} (\alpha_0 + 2\alpha_2 \xi) d\xi \right),$$

$$V_0(r, n) = v_0(r, n) \sqrt{\Psi(n)(1 + \alpha_1 n)},$$

причем конкретный вид функции F своего аргумента устанавливается сравнением с внешним решением. Одновременно для функции $r(n) = r_0(n) + \varepsilon r_1(n) + \dots$, связывающей координаты r и n на ударной волне, на нулевом шаге метода выполняется уравнение

$$\frac{dr_0}{dn} = \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_2}{2} n \right) \frac{\Psi^2(n)}{1 + \alpha_1 n} v_0(r_0(n), n),$$

показывающее, что ударная волна и характеристики уравнения (4) имеют тангенсы угла наклона, отношение которых равно $1/2$.

Проведенный анализ не носит универсального характера, так как, например, возможны ситуации, в которых нелинейность задачи проявляется на расстояниях, где ввиду неоднородности уже произошло сильное затухание исходного импульса и поэтому эволюционное уравнение может потерять свое значение как базовое. Подчеркнем еще раз, что многообразие вида неоднородных свойств среды требует отдельного исследования в каждом случае.

Приведенная в статье методика может оказаться полезной и в других динамических нелинейных задачах. В частности, для случаев движения нескольких упругих волн в сплошной среде с большим расстоянием между их фронтами. Эволюционные уравнения при условии перехода на подвижную поверхность разрывов приводят к основным соотношениям лучевого метода, поэтому они могут быть успешно использованы в качестве дополнительной информации при определении коэффициентов лучевых рядов. Прикладной аспект рассмотренных решений авторы видят в их применении при моделировании новых схем численного счета динамических нестационарных задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а, 12-01-90004-Бел_а) ДВО РАН (13-111-В-03-011).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бленд Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
- [2] *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
- [3] *Буренин А. А., Чернышов А. Д.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ, 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 711–717.
- [4] *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 239 с.

Ragozina V. E., Ivanova Y. E. *On account of the medium inhomogeneity factor in one-dimensional problems of deformation, which lead to a longitudinal shock waves.* Boundary value problems solutions of shock deformation of nonlinear weakly inhomogeneous elastic half-space based on the matched asymptotic expansions method are obtained. It is shown that the joint effect of non-linearity of the model and the inhomogeneity leads to new evolution equations in front-line areas for the longitudinal shock waves. The transition to these areas is associated with joint transformations of all independent coordinates of the problem.

МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВОВ И ПОЛИМЕРОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Роговой А. А., Столбова О. С.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Используя формализованный подход к построению определяющих соотношений сложных сред при конечных деформациях, записаны уравнения состояния для сплава и полимера с памятью формы и уравнения теплопроводности, соответствующие этим задачам. Полученные соотношения аттестованы на связанных термо-упруго-неупругих краевых задачах о деформировании образца из сплава и полимера с памятью формы при прямом и обратном превращениях.

1. Введение. В работах [1–6] развита теория построения моделей, описывающих поведение сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях в материалах и удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности.

Используя процедуру наложения малых деформаций на конечные, построена кинематика термо-упруго-неупругого процесса. Термо-упруго-неупругий процесс трактуется как упругий с напряженной отсчетной конфигурацией. В качестве последней принимается промежуточная упругая конфигурация, близкая к текущей и получающаяся из последней малой упругой разгрузкой. Формализацией указанной близости является введение малого положительного параметра у вектора перемещения, определяющего положение точек в текущей конфигурации относительно промежуточной. Это позволяет представить все кинематические величины в виде рядов по этому малому параметру с удержанием только линейных слагаемых и в результате построить для любого закона упругости определяющие уравнения с начальными напряжениями и функциями отклика материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации. Последние определяются разностью полных малых деформаций и неупругих и температурных деформаций, которые описываются дополнительными соотношениями. Предельным переходом при стремлении промежуточной конфигурации к текущей это определяющее уравнение сводится к точному эволюционному с автоматически вытекающей объективной производной.

Построенная общая форма определяющего уравнения согласована со вторым законом термодинамики, из которого также вытекает соотношение для энтропии. Последнее используется в первом законе термодинамики для построения уравнения теплопроводности, соответствующего процессу деформирования.

В рамках этой теории построены модели поведения материалов, испытывающих мартенситно-аустенитный переход при деформировании и изменении температуры, и полимеров, испытывающих переходы «высокоэластичность-стеклование» при конечных термо-упруго-неупругих деформациях. Выполнена численная аттестация этих моделей на связанных термо-упруго-неупругих краевых задач, результаты которой приведены в настоящей работе.

2. Сплавы с памятью формы (СПФ). Основные положения модели, описывающей поведение СПФ, изложены в статье [7]. Степень фазового превращения характеризуется скалярной внутренней переменной q . При $q = 0$ материал находится полностью в аустенитном состоянии (высокотемпературная фаза), при $q = 1$ — полностью в мартенситном. Типичная зависимость объёмной доли мартенситной фазы от приведенной температуры Θ^σ ($\Theta^\sigma = \Theta - k\sigma_i$, где Θ — абсолютная температура, σ_i — интенсивность напряжений, k — материальный параметр) представлена рисунке 1 для прямого (аустенит—мартенсит) и обратного (мартенсит—аустенит) превращениях.

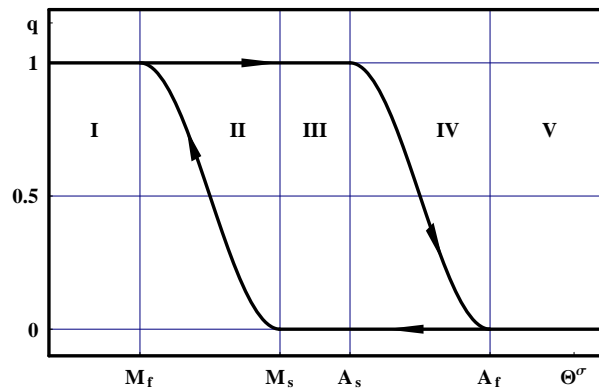


Рисунок 1 – Зависимость объёмной доли мартенситной фазы от температуры при прямом и обратном превращениях

Здесь M_s, M_f, A_s, A_f — температуры начала (start) и завершения (finish) прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений материале. При прямом переходе ($A \rightarrow M$, рисунок 1) материал находится полностью в аустенитном состоянии в объединенной области $III \cup IV \cup V$; область II — переходная, $M_f \leq \Theta^\sigma \leq M_s$: здесь в разных объёмных долях существуют и мартенсит, и аустенит; в области I материал находится полностью в мартенситном состоянии. При обратном переходе ($M \rightarrow A$) материал находится полностью в мартенситном состоянии в объединенной области $I \cup II \cup III$; область IV — переходная, $A_s \leq \Theta^\sigma \leq A_f$; в области V материал находится полностью в аустенитном состоянии.

Осуществлено корректное обобщение на конечные деформации уравнений, предложенных А. А. Мовчаном для малых фазовых деформаций. Корректность состоит в том, что, во-первых, эти соотношения удовлетворяют принципу объективности и, во-вторых, кинематические тензоры, присутствующие в этих соотношениях, согласованы. Для тензора малых температурных деформаций принят закон линейного температурного расширения. Упругое поведение материала описано упрощенным законом Синьорини. Построено соответствующее процессу уравнение теплопроводности. Рассмотрены три задачи плоского деформирования.

Задача 1. Две пластины одинаковой длины, но разной толщины скреплены по длине без натяга при температуре, соответствующей полностью аустенитному состоянию СПФ. Одна пластина изготовлена из бериллиевой бронзы БрБ2, дру-

гая — из СПФ. Один торец образца закреплен. Остальные поверхности свободны от нагрузок. Сперва образец охлаждается до температуры, соответствующей полностью мартенситному состоянию СПФ, а затем снова нагревается до температуры, соответствующей полностью аустенитному состоянию СПФ. Таким образом в СПФ происходит вначале прямое, а затем обратное мартенситные превращения.

Задача 2. Перед тем как скрепить две пластины из задачи 1, пластина из СПФ, находясь при температуре Θ_A , соответствующей полностью аустенитному состоянию этого материала, подвергается одноосному однородному растяжению по длине напряжением 100 МПа, охлаждается до температуры Θ_M , соответствующей полностью мартенситному состоянию СПФ, и нагрузка снимается. После этого пластины скрепляются по длине без натяга при температуре Θ_M . Полученная двухслойная пластина закрепляется по одному из торцов, имея свободными от нагрузок остальные поверхности, нагревается до температуры Θ_A , а затем охлаждается до температуры Θ_M .

Задача 3. Пластина из СПФ закрепляется по одному из торцов и при температуре Θ_A изгибается касательным напряжением 20 МПа, приложенным к другому торцу, охлаждается до температуры Θ_M и нагрузка снимается. Затем полученная изогнутая пластина снова нагревается до температуры Θ_A .

Толщины пластин в задачах 1 и 2 выбираются из условия максимального прогиба двухслойной пластины.

На рисунке 2 слева направо показаны формы пластин в начальном (пунктирная линия) и деформированном (сплошная линия) состояниях в задачах 1, 2 и 3. Для двухслойной пластины нижний слой — СПФ. Перемещение и длина пластины представлены в одном масштабе. В задаче 1 пластина при последующем нагреве снова до температуры Θ_A принимает ту же самую форму, что и в начальном состоянии (пунктирная линия). В задаче 2 наведенные в результате растяжения и охлаждения фазовые деформации, исчезают при последующем нагревании пластины до температуры Θ_A , стягивая двухслойную пластину и изгибая ее вниз. Последующее охлаждение двухслойной пластины до температуры Θ_M практически возвращает ее в начальное положение. В задаче 3 запасенные в результате изгиба и «замороженные» в результате охлаждения фазовые деформации растяжения-сжатия, исчезают при последующем нагревании до температуры Θ_A , распрямляя пластину и возвращая ее в начальное состояние.

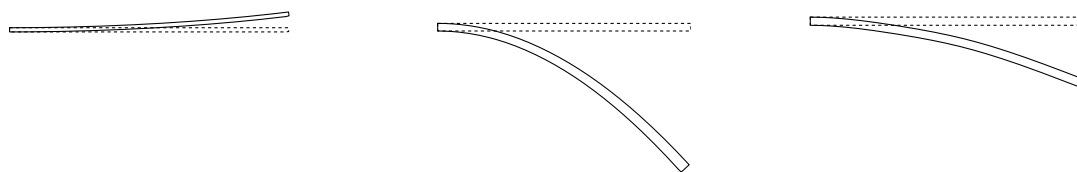


Рисунок 2 – Изгиб пластин в задачах 1, 2 и 3 (слева направо)

3. Полимер с памятью формы. Основные положения модели, описывающей поведение полимера с памятью формы, изложены в статье [8]. Прямой и обратный переход «высокоэластичность—стеклование» трактуется как процесс последова-

тельного наложения (снятия) дополнительной жесткости, обусловленной образованием (исчезновением) новых межмолекулярных связей. Для описания степени стеклования вводится скалярная внутренняя переменная N . При $N = 0$ материал находится полностью в высокоэластичном состоянии (высокотемпературная фаза), при $N = 1$ — полностью в застеклованном. Типичная зависимость степени стеклования от температуры приведена на рисунке 3.

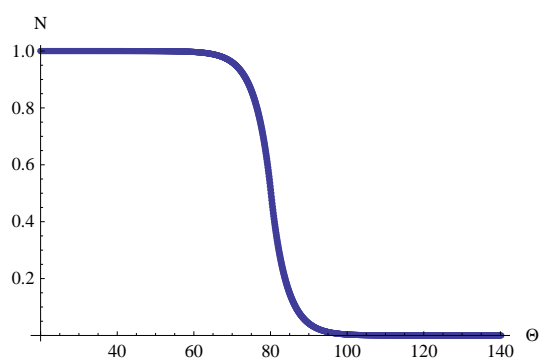


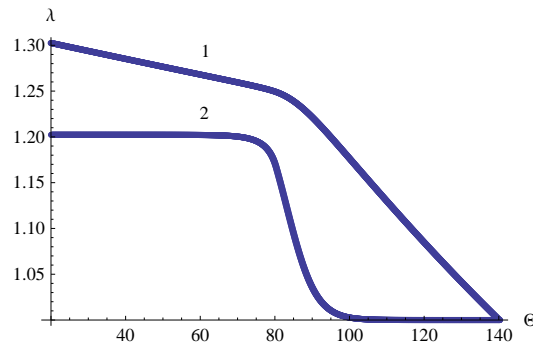
Рисунок 3 – Зависимость степени стеклования от температуры Θ °C

Предложенное выражение для свободной энергии отражает процесс последовательного наложения (снятия) дополнительной жесткости, обусловленной образованием (исчезновением) новых межмолекулярных связей, и записано в «упругом» приближении (без учета релаксационных свойств материала и явления ползучести). Для описания поведения изотропного упругого несжимаемого полимерного материала использован потенциал Муни–Ривлина. Построено соответствующее процессу уравнение теплопроводности.

Рассмотрена задача растяжения стержня. При температуре, соответствующей полностью высокоэластичному состоянию, к стержню прикладывается растягивающее усилие, направленное вдоль его оси. Затем стержень охлаждается до температуры, соответствующей полностью застеклованному состоянию (прямой переход), и нагрузка снимается. После этого производится нагрев ненагруженного образца и материал возвращается в высокоэластичное состояние (обратный переход).

На рисунке 4 показана зависимость кратности удлинения стержня λ от температуры при прямом (кривая 1) и обратном (кривая 2) переходах. При растяжении и охлаждении стержня произошло его удлинение на 30%. После снятия нагрузки произошла частичная упругая разгрузка, удлинение стало равным 20% и в материале остались «замороженные» на этапе стеклования деформации. Нагрев такого ненагруженного образца привел к исчезновению накопленных деформаций.

Работа выполнена в ведущей научной школе (грант Президента РФ НШ-5389.2012.1) в рамках программ фундаментальных исследований ОЭМПУ РАН (код проекта 12-Т-1-1004), программы совместных фундаментальных исследований УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (код проекта 12-С-1-1015), Государственного контракта с Министерством образования и науки РФ (соглашение № 8220) и при

Рисунок 4 – Зависимость кратности удлинения от температуры Θ °С

финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00419).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новокшанов Р. С., Роговой А. А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 77–95.
- [2] Новокшанов Р. С., Роговой А. А. Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 4. С. 122–140.
- [3] Роговой А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 5. С. 138–149.
- [4] Роговой А. А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 4. С. 144–153.
- [5] Роговой А. А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 165–172.
- [6] Rogovoy A. A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2012. V. 24. P. 81–114. DOI 10.1007/s00161-011-0220-y.
- [7] Роговой А. А., Столбова О. С. Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы // ПМТФ. 2013. Т. 54. № 2. С. 148–162.
- [8] Роговой А. А., Столбова О. С. Определяющее уравнение в «упругом» приближении для полимеров с памятью формы при больших деформациях // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. Вып. 4(22). С. 73–176.

Rogovoy A. A., Stolbova O. S. *Behavioral models of alloys and polymers with the shape memory at finite strains.* The state and heat conduction equations for the alloy and polymer with the shape memory are derived using the formalized approach to the construction of finite-deformation constitutive equations for complex media. The obtained relations have been tested for coupled thermic-elastic-inelastic boundary-value problems on deforming sample of alloy and polymer with the shape memory during direct and reverse transformations.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С. О., Фарманян А. Ж.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Введение. Построение математических моделей микрополярных упругих однослойных или многослойных пластин и оболочек в настоящее время имеет актуальное значение в связи с новейшими задачами структурной механики, микро- и наномеханики. Основная проблема построения общей теории микрополярных упругих тонких оболочек заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной задачи к двумерной. В работе [1] формулированы гипотезы, которые представляют результат асимптотического интегрирования трехмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонкой области, построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек.

В данной работе обобщаются указанные гипотезы, формулируются они для двухслойной оболочки в целом и, на этой основе построена математическая модель двухслойных микрополярных упругих тонких оболочек.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двухслойную оболочку, составленную из двух тонких слоев, которые изготовлены из микрополярных ортотропных упругих, но различных материалов. Будем предполагать, что оба слоя прочно склеены или спаяны друг с другом по поверхности соприкосновения, так что при деформировании оболочки оба слоя работают совместно. Уравнения равновесия несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид [2]:

$$\nabla_m \sigma_{(i)}^{mn} = 0, \quad \nabla_m \mu_{(i)}^{mn} + e^{nmk} \sigma_{mk}^{(i)} = 0. \quad (1.1)$$

Физические соотношения для микрополярного ортотропного упругого тела имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^{(i)} &= a_{11}^{(i)} \sigma_{11}^{(i)} + a_{12}^{(i)} \sigma_{22}^{(i)} + a_{13}^{(i)} \sigma_{33}^{(i)}, \quad \gamma_{22}^{(i)} = a_{12}^{(i)} \sigma_{11}^{(i)} + a_{22}^{(i)} \sigma_{22}^{(i)} + a_{23}^{(i)} \sigma_{33}^{(i)}, \\ \gamma_{33}^{(i)} &= a_{13}^{(i)} \sigma_{11}^{(i)} + a_{23}^{(i)} \sigma_{22}^{(i)} + a_{33}^{(i)} \sigma_{33}^{(i)}, \quad \gamma_{12}^{(i)} = a_{77}^{(i)} \sigma_{12}^{(i)} + a_{78}^{(i)} \sigma_{21}^{(i)}, \\ \gamma_{21}^{(i)} &= a_{78}^{(i)} \sigma_{12}^{(i)} + a_{88}^{(i)} \sigma_{21}^{(i)}, \quad \gamma_{13}^{(i)} = a_{56}^{(i)} \sigma_{31}^{(i)} + a_{66}^{(i)} \sigma_{13}^{(i)}, \\ \gamma_{31}^{(i)} &= \tilde{a}_{55}^{(i)} \sigma_{31}^{(i)} + a_{56}^{(i)} \sigma_{13}^{(i)}, \quad \gamma_{23}^{(i)} = a_{44}^{(i)} \sigma_{23}^{(i)} + a_{45}^{(i)} \sigma_{32}^{(i)}, \quad \gamma_{32}^{(i)} = a_{45}^{(i)} \sigma_{23}^{(i)} + a_{55}^{(i)} \sigma_{32}^{(i)}, \\ \chi_{11}^{(i)} &= b_{11}^{(i)} \mu_{11}^{(i)} + b_{12}^{(i)} \mu_{22}^{(i)} + b_{13}^{(i)} \mu_{33}^{(i)}, \quad \chi_{22}^{(i)} = b_{12}^{(i)} \mu_{11}^{(i)} + b_{22}^{(i)} \mu_{22}^{(i)} + b_{23}^{(i)} \mu_{33}^{(i)}, \\ \chi_{33}^{(i)} &= b_{13}^{(i)} \mu_{11}^{(i)} + b_{23}^{(i)} \mu_{22}^{(i)} + b_{33}^{(i)} \mu_{33}^{(i)}, \quad \chi_{12}^{(i)} = b_{77}^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + b_{78}^{(i)} \mu_{21}^{(i)}, \\ \chi_{21}^{(i)} &= b_{78}^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + b_{88}^{(i)} \mu_{21}^{(i)}, \quad \chi_{13}^{(i)} = b_{56}^{(i)} \mu_{31}^{(i)} + b_{66}^{(i)} \mu_{13}^{(i)}, \\ \chi_{31}^{(i)} &= \tilde{b}_{55}^{(i)} \mu_{31}^{(i)} + b_{56}^{(i)} \mu_{13}^{(i)}, \quad \chi_{23}^{(i)} = b_{44}^{(i)} \mu_{23}^{(i)} + b_{45}^{(i)} \mu_{32}^{(i)}, \quad \chi_{32}^{(i)} = b_{45}^{(i)} \mu_{23}^{(i)} + b_{55}^{(i)} \mu_{32}^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{mn}^{(i)} = \nabla_m V_n^{(i)} - e_{kmn} \omega_{(i)}^k, \quad \chi_{mn}^{(i)} = \nabla_m \omega_n^{(i)} \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{(i)}^{nm}, \mu_{(i)}^{nm}$ – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\gamma_{mn}^{(i)}, \chi_{mn}^{(i)}$ – компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручений; $V_{(i)}^n$ – компоненты вектора перемещения, $\omega_{(i)}^n$ – компоненты вектора независимого поворота; $a_{11}^{(i)}, \dots, b_{55}^{(i)}$ – физические константы микрополярного ортотропного материала оболочки; индексы m, n, k принимают значения 1, 2, 3; (i) – номер слоя ($(i) = 1, 2$).

Отнесем оболочку к триортогональной системе координат $\alpha_i, \alpha_3 = z$ ($i = 1, 2$) ($H_i = A_i(1 + \alpha_3/R_i)$, $H_3 = 1$, $i = 1, 2$), принятой в теории оболочек.

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи (т.е. заданы значения соответствующих компонент тензоров силовых и моментных напряжений). Граничные условия на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ в общем случае представляют граничные условия смешанной граничной задачи (т.е. на Σ_1 заданы силовые и моментные напряжения, а на Σ_2 – перемещения и повороты):

2. Основные предположения (гипотезы). Будем рассматривать проблему сведения трехмерной задачи микрополярной теории упругости для двухслойного случая и для ортотропного материала к двумерной задаче теории тонких оболочек. Для решения этой проблемы будем пользоваться гипотезами [1], которые будем формулировать для двухслойного пакета оболочки в целом:

1. В процессе деформации прямолинейные и нормальные к исходной поверхности оболочки волокна поворачиваются как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной поверхности. Математически принятую гипотезу запишем так:

$$\begin{aligned} V_1^{(i)} &= u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad V_2^{(i)} = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ \omega_3^{(i)} &= \omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2), \quad V_3^{(i)} = w(\alpha_1, \alpha_2), \\ \omega_1^{(i)} &= \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_2^{(i)} = \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Это означает, что тангенциальные перемещения (V_1^i, V_2^i) и нормальный поворот ω_3^i распределены по толщине двухслойного пакета по линейному закону, а прогиб ($V_3^{(i)}$) и тангенциальные повороты ($\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}$) не зависят от поперечной координаты α_3 ; $(i) = 1, 2$.

2. Силовым напряжением $\sigma_{33}^{(i)}$, а также, моментными напряжениями $\mu_{31}^{(i)}, \mu_{32}^{(i)}$ в обобщенном законе Гука для микрополярного материала можно пренебречь относительно, соответственно, силовых напряжений $\sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}$ и моментных напряжений $\mu_{13}^{(i)}, \mu_{23}^{(i)}$, $(i) = 1, 2$.

3. Величинами $\alpha_3/R_1, \alpha_3/R_2$ по сравнению с единицей можно пренебречь.

4. При определении деформаций изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений в каждом слое сначала для силовых напряжений $\sigma_{31}^{(i)}, \sigma_{32}^{(i)}$ и моментного напряжения $\mu_{33}^{(i)}$ примем

$$\sigma_{31}^{(i)} = \sigma_{31}^{0(i)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{32}^{(i)} = \sigma_{32}^{0(i)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33}^{(i)} = \mu_{33}^{0(i)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (i) = 1, 2. \quad (2.2)$$

После вычисления указанных величин, значения $\sigma_{31}^{(i)}, \sigma_{32}^{(i)}$ и $\mu_{33}^{(i)}$ в каждом слое окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (2.2) слагаемого, получаемого интегрированием соответствующего уравнения равновесия, для каждого из которого потребуем выполнения условия, чтобы усредненная по толщине слоя величина была равна нулю.

Принятые гипотезы дают возможность получить определенные законы распределения перемещений, поворотов, деформаций изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений по толщине пакета оболочки. При этом удовлетворяются все условия сопряжения между слоями.

Полученные результаты позволяют построить математическая модель микрополярных упругих ортотропных двухслойных тонких оболочек.

3. Континуальная модель микрополярных ортотропных упругих двухслойных тонких оболочек.

С целью приведения трехмерной задачи двухслойной микрополярной упругой тонкой оболочки к двумерной вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений введем статически эквивалентные им интегральные характеристики — усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ij}, L_{ii}$, и гипермоменты $\Lambda_{i3} (i, j = 1, 2, i \neq j)$, которые с учетом предположения 3) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T_{ii} &= \int_{z_0}^{z_1} \sigma_{ii}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{ii}^{(2)} dz, \quad S_{ij} = \int_{z_0}^{z_1} \sigma_{ij}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{ij}^{(2)} dz, \\
 N_{i3} &= \int_{z_0}^{z_1} \sigma_{i3}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{i3}^{(2)} dz, \quad N_{3i} = \int_{z_0}^{z_1} \sigma_{3i}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{3i}^{(2)} dz, \\
 M_{ii} &= \int_{z_0}^{z_1} \sigma_{ii}^{(1)} z dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{ii}^{(2)} z dz, \quad H_{ij} = \int_{z_0}^{z_1} \sigma_{ij}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{ij}^{(2)} dz, \\
 L_{ii} &= \int_{z_0}^{z_1} \mu_{ii}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \mu_{ii}^{(2)} dz, \quad L_{ij} = \int_{z_0}^{z_1} \mu_{ij}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \mu_{ij}^{(2)} dz, \\
 L_{i3} &= \int_{z_0}^{z_1} \mu_{i3}^{(1)} dz + \int_{z_1}^{z_2} \mu_{i3}^{(2)} dz, \quad \Lambda_{i3} = \int_{z_0}^{z_1} \mu_{i3}^{(1)} z dz + \int_{z_1}^{z_2} \mu_{i3}^{(2)} z dz.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Основная система уравнений микрополярных упругих ортотропных тонких двухслойных оболочек будет выражаться так:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right) &= q_3^+ + q_3^-, \\
 \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \frac{L_{i3}}{R_i} + \\
 + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) &= -(m_i^+ + m_i^-),
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) + \frac{N_{i3}}{R_i} = - (q_i^+ + q_i^-), \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) - N_{3i} &= -z_2 q_i^+ - z_0 q_i^+, \\ \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) &= m_3^+ + m_3^-, \\ L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (H_{12} - H_{21}) &= z_2 m_3^+ + z_0 m_3^-. \end{aligned}$$

Соотношения упругости:

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{11} \Gamma_{11} + C_{12} \Gamma_{22} + R_{11} K_{11} + R_{12} K_{22}, \dots S_{12} = C_{78} \Gamma_{12} + C_{78} \Gamma_{21} + R_{77} K_{12} + R_{78} K_{21}, \dots \\ N_{13} &= C_{65} \Gamma_{13} + C_{56} \Gamma_{31}, \dots N_{31} = C_{56} \Gamma_{13} + C_{55} \Gamma_{31}, \dots \\ M_{11} &= D_{11} K_{11} + D_{12} K_{22} + R_{11} \Gamma_{11} + R_{12} \Gamma_{22}, \dots \\ H_{12} &= D_{77} K_{12} + D_{78} K_{21} + R_{77} \Gamma_{12} + R_{78} \Gamma_{21}, \dots L_{11} = d_{11} k_{11} + d_{12} k_{12} + d_{13} k_{13}, \dots \quad (3.3) \\ L_{12} &= d_{77} k_{12} + d_{78} k_{21}, L_{13} = d_{66} k_{13} + \eta_{66} l_{13}, \dots \Lambda_{13} = \lambda_{66} l_{13} + \eta_{66} k_{13}, \dots \end{aligned}$$

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{w(\alpha_1, \alpha_2)}{R_1}, \quad (1 \leftarrow 2) \\ K_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1 \leftarrow 2) \\ \Gamma_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1(\alpha_1, \alpha_2)}{R_1} + \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ \Gamma_{23} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial w(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} - \frac{u_1(\alpha_1, \alpha_2)}{R_2} - \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2), \\ \Gamma_{31} &= \psi_1(\alpha_1, \alpha_2) - \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2), \Gamma_{32} = \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) + \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2), \\ \Gamma_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1(\alpha_1, \alpha_2) - \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.4) \\ K_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_1(\alpha_1, \alpha_2) - \iota(\alpha_1, \alpha_2), \\ \Gamma_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2), \\ K_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) + \iota(\alpha_1, \alpha_2), \\ k_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\Omega_3(\alpha_1, \alpha_2)}{R_1}, \quad (1 \leftarrow 2) \end{aligned}$$

$$k_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\Omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{R_1}, k_{21} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$k_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2), l_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \iota(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1}, \quad (1 \rightarrow 2)$$

$$k_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} - \frac{\Omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{R_2}, k_{33} = \iota(\alpha_1, \alpha_2).$$

здесь

$$C_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \quad C_{12} = - \sum_{i=1}^2 \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} (z_i - z_{i-1}),$$

$$R_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \quad R_{77} = \sum_{i=1}^2 \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \dots$$

$$C_{77} = \sum_{i=1}^2 \frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}), \quad C_{78} = - \sum_{i=1}^2 \frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i - (a_{78}^i)^2} (z_i - z_{i-1}),$$

$$D_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \quad D_{12} = - \sum_{i=1}^2 \frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2} \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \dots$$

$$d_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta_{11}^{(i)}}{(\Delta)^{(i)}} \delta, \quad d_{12} = \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta_{12}^{(i)}}{(\Delta)^{(i)}} \delta, \quad d_{77} = \sum_{i=1}^2 \frac{b_{88}^i}{b_{77}^i b_{88}^i - (b_{78}^i)^2} \delta, \dots, \quad \delta = z_i - z_{i-1}$$

$$\eta_{66} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{b_{66}^i} (z_i^2 - z_{i-1}^2), \quad \lambda_{66} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \frac{1}{b_{66}^i} (z_i^3 - z_{i-1}^3), \dots$$

Граничные условия:

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, S_{12} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \quad (3.6)$$

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, H_{12} = H_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*,$$

$$L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Система уравнений (3.2)–(3.4) и граничные условия (3.6) представляют собой математическую модель двухслойных микрополярных упругих ортотропных тонких оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Том 14. № 1. С. 55–66.
- [2] Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders // ZAMM. 1974. V. 54. № 12. P. 773–779.

Sarkisyan S. O., Farmanyan A. J. *Mathematical model of micropolar orthotropic elastic thin bilayered shells.* In the paper the hypotheses providing the result of asymptotic integration of 3D boundary problem of micropolar theory of elasticity in thin region are formulated. The general applied theory of micropolar elastic thin shells is developed.

ВИБРОАКУСТИКА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНЫХ ПОДКРЕПЛЕНИЙ КРУГОВЫМИ РЕБРАМИ

Сафроненко В. Г.¹, Донченко Е. Н.¹, Шутько В. М.²

¹*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича*

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

²*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Развиты математическая и компьютерная модели виброакустики многослойных композитных, на полимерной основе оболочек вращения, подкреплённых круговыми ребрами жесткости, учитываемых дискретным образом, при воздействии вибрационных нагрузок. Определяются помодовые и суммарные амплитудно-частотные характеристики давлений и перемещений в окружающей оболочку акустической среде.

Вибрации, возникающие в оболочечных конструкциях в процессе эксплуатации и, как следствие, повышенный уровень шумоизлучения относятся к вредным факторам, уровень воздействия которых необходимо минимизировать. Это достигается как применением конструктивных мер, так и с использованием материалов с высокими вибродемпфирующими и вибропоглощающими свойствами к которым, в частности, относятся композиционные материалы на полимерной основе. Таким образом, возникает необходимость в развитии и пополнении математических и вычислительных моделей, учитывающих специфику композиционных материалов, сложность физико-механических свойств их компонентов. Обзор методов решения задач виброакустики в механике тонкостенных конструкций содержится в [1].

В виброакустических задачах часто возникает также необходимость учета неоднородностей, связанных с наличием ребер жесткости, локальных подкреплений, неравномерным распределением масс, слоистостью оболочки. В решении таких задач эффективны численно-аналитические подходы [1].

В дальнейшем внутренние потери в оболочке и ребрах учитываются комплексными жесткостями. Реакция внешней среды моделируется локальным импедансом. Акустическое давление в среде вычисляется по интегралу Гельмгольца. Разработанный подход сохраняет возможности модального анализа, характерного для осесимметричных конструкций.

При анализе шумовых характеристик критерием акустического качества конструкции обычно считаются уровни модуля звукового давления внешнего поля $|p|$ на некотором удалении от конструкции. При этом строятся амплитудно-частотные характеристики в заданном диапазоне частот. Для каждой из частот вынуждающих колебания сил решается задача, состоящая из двух основных этапов: а) построения распределений амплитуд звукового давления и перемещений (градиента звукового давления) на границе контакта конструкции и акустической среды; б) расчета давления во внешней среде [2, 3].

В дальнейшем для исследования процесса распространения стационарных колебаний в композитной на полимерной основе оболочке вращения, имеющей многослойную структуру, используем теорию типа Тимошенко, в соответствии с которой кинематические и деформационные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U &= u + z\varphi_1, \quad V = v + z\varphi_2, \quad W = w, \quad E_{11} = u' + k_1w, \quad E_{22} = v^\bullet + \psi u + k_2w; \\
 E_{12} &= u' + u^\bullet - \psi v, \quad K_{11} = \varepsilon_1\varphi_1', \quad K_{22} = \varepsilon_1(\varphi_2^\bullet + \psi\varphi_1), \quad K_{12} = \varepsilon_1(\varphi_2' - \psi\varphi_2 + \varphi_1^\bullet); \\
 E_{13} &= \varphi_1 - \vartheta_1, \quad E_{23} = \varphi_2 - \vartheta_2; \quad \vartheta_1 = -w' + k_1u; \quad \vartheta_2 = -w' + k_2u, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где: $\varepsilon_1 = h_*/R_*$, $\psi = A_2'/A_2$, $(\dots)' = (\dots)_{,\alpha 1}/A_1$, $(\dots)^\bullet = (\dots)_{,\alpha 2}/A_2$.

Энергетически согласованные с (1) уравнения движения и естественные краевые условия на торцах оболочки следуют из принципа Гамильтона–Остроградского: $\int_{t_0}^{t_1} (\delta K, \delta \Pi + \delta A) dt = 0$, где: δK , $\delta \Pi$ — вариации, соответственно, кинетической и потенциальной энергий, δA — вариация работ и внешних поверхностных сил.

Для соотношений, связывающих амплитуды усилий и моментов с соответствующими амплитудами деформаций принимается широко используемая структура матрицы приведенных жесткостей слоистого композита [4]. В качестве основных функций выбираются компоненты, входящие в естественные краевые условия: $y_1 = S$, $y_2 = M_{11}$, $y_3 = T_{11}$, $y_4 = Q_{11}$, $y_5 = H$, $y_6 = v$, $y_7 = \varphi_1$, $y_8 = u$, $y_9 = w$, $y_{10} = \varphi_2$. После перехода к гармоническим колебаниям и безразмерной форме основная система уравнений приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
 y_1' &= -2\psi y_1 - T_{22}^\bullet - k_2 Q_{22} - \Omega^2(by_6 + \varepsilon_1 c y_{10}) - q_2, \\
 y_2' &= -\psi(y_2 - M_{22}) - y_5^\bullet + y_4/\varepsilon_1 - \Omega^2(cy_8 + \varepsilon_1 d y_7), \\
 y_3' &= -\psi(y_3 - T_{22}) - y_1^\bullet - k_1 y_4 - \Omega^2(by_8 + \varepsilon_1 c y_7) - q_1, \\
 y_4' &= -\psi y_4 - Q_{22}^\bullet + k_1 y_3 + k_2 T_{22} - \Omega^2 b y_9 - q_3, \\
 y_5' &= -2\psi y_5 - M_{22}^\bullet + Q_{22}/\varepsilon_1 - \Omega^2(c v + \varepsilon_1 d y_{10}), \\
 y_6' &= E_{12} - y_8^\bullet + \psi y_6, \quad y_7' = K_{11}/\varepsilon_1, \quad y_8' = E_{11} - k_1 w, \\
 y_9' &= E_{13} - y_7 + k_1 y_8, \quad y_{10}' = K_{12} \varepsilon_1 + \psi y_{10} - y_7^\bullet, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_2 &= -y_9^\bullet + k_2 y_6; \quad a_{33} = B_{33} D_{33} - A_{33}^2, \\
 E_{12} &= (D_{33} y_1 - A_{33} y_5)/a_{33}, \quad K_{12} = (B_{33} y_5 - A_{33} y_1)/(2a_{33}), \\
 E_{22} &= y_5^\bullet + \psi y_8 + k_2 y_9, \quad K_{22} = y_{10}^\bullet + \psi y_7; \quad E_{13} = y_4/G_{13}, \\
 Q_{22} &= G_{23}(y_{10} + y_9^\bullet - k_2 y_6); \quad a_{11} = B_{11} D_{11} - A_{11}^2, \\
 a_1 &= y_3 - B_{12} E_{22} - A_{12} K_{22}, \quad a_2 = y_2 - A_{12} E_{22} - D_{12} K_{22}, \\
 E_{11} &= (D_{11} a_1 - A_{11} a_2)/a_{11}, \quad K_{11} = (B_{11} a_2 - A_{11} a_1)/a_{11}; \\
 T_{22} &= B_{12} E_{11} + B_{22} E_{22} + A_{12} K_{11} + A_{22} K_{22},
 \end{aligned}$$

$$M_{22} = A_{12}E_{11} + A_{22}E_{22} + D_{12}K_{11} + D_{22}K_{22}. \quad (3)$$

Компоненты напряженно-деформированного состояния представляются тригонометрическими рядами Фурье по окружной координате α_2 . После подстановки рядов в (2), (3), умножения на базовые функции, интегрирования по области определения и некоторых преобразований получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений нормального типа, решаемая методом прогонки с ортогонализацией по Годунову. Уравнения состояния полимерного связующего композита соответствуют модели термовязкоупругого тела [6]. Компоненты комплексной податливости при сдвиге I' , I'' в обозначениях [6] имеют вид:

$$I'(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)}{G(r, v, T)} \left[1 - H(r) \frac{\omega^2}{[\varphi(r, v, T)]^2 + \omega^2} \right] dr;$$

$$I''(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)H(r)}{G(r, u, T)} \frac{\varphi(r, v, T)\omega}{[\varphi(r, v, T)]^2 + \omega^2} dr. \quad (4)$$

При необходимости учета звукоизлучения в окружающую линейную акустическую среду можно воспользоваться методами, разработанными для осесимметричных конструкций. В частности, для определения нормальной реакции акустической среды эффективен метод локального импеданса, определяемого из решения модельных задач [5]. Поле акустического давления в окружающей оболочку среде определяется с помощью интеграла Гельмгольца [2, 3].

Рассмотрим круговое кольцо из полимерного композита. Принимая кинематику модели типа Тимошенко с учетом деформаций поперечного сдвига и инерции поворотов, в обозначениях [7] запишем:

$$U_k = u_k(\alpha_2) + z\varphi(\alpha_2), \quad V_k = v_k(\alpha_2) + z\psi_2(\alpha_2) + \alpha_1\psi_1(\alpha_2), \quad W_k = w_k - \beta_1\varphi(\alpha_2),$$

Учитывая, что характерные размеры сечения кольца значительно меньше его радиуса, получим уравнения колебаний кольца:

$$\begin{aligned} Q_{1k}^\circ + \omega^2(b_k u_k + c\varphi) + t_k &= 0, \\ T_k^\circ + kQ_{3k} + \omega^2(b_k v_k + c_3\psi_1 + c_1\psi_2) + s_k &= 0, \\ Q_{3k}^\circ - kT_k + \omega^2(b_k w - c_3\varphi) + q_k &= 0, \\ H_k^\circ + kM_{3k} + \omega^2(d_k\varphi + c_1u - c_3w) + m &= 0, \\ M_{3k}^\circ - kH_k - Q_{1k} + \omega^2(d_3\psi_1 + d_{13}\psi_2 + c_3v_k) + m_3 &= 0, \\ M_{1k}^\circ - Q_{3k} + \omega^2(d_1\psi_2 + d_{13}\psi_1 + c_1v_k) + m_1 &= 0, \\ (\dots)^\circ &= (\dots)_{,\alpha_2}/r_k. \end{aligned}$$

Исходя из этих соотношений составляются условия сопряжения секций оболочки, расположенных между соседними кольцами. При этом во внешние нагрузки на кольцо входят реакции от примыкающих секций оболочки.

Разработанные модели и методы позволяют оценивать сходимость решений, проводить расчет амплитудно-частотных характеристик, выполнять общий и модовый анализ получаемых зависимостей.

Вычислительный эксперимент проведен при определении виброакустических характеристик полимерной композитной цилиндрической оболочки, подкрепленной регулярным набором круговых ребер жесткости. Предполагается, что стенка оболочки состоит из 25 слоев (13 армирующих и 12 из полимерного связующего). Армирующие слои из стали $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, свойства полимера соответствуют [6]. В обозначениях работы [7] основные геометрические характеристики конструкции в безразмерном виде равны $r_0 = 0.8$, $r_1 = r_{\text{ц}} = 1.375$, $H_k = 2.85$, $L_{\text{ц}} = 3.5$, $h_{\text{арм}} = 0.08$, $h_{\text{св}} = 0.015$. Геометрические и механические характеристики ребер жесткости соответствуют [7]. Всего на оболочке установлено 30 круговых ребер. Конструкция погружена в сжимаемую жидкость с безразмерными параметрами $\rho_{\text{ж}} = 0.128$, $c_{\text{ж}} = 0.28$. Колебания вызываются нормальной локальной гармонической нагрузкой типа сосредоточенной силы, и приложенной к обшивке в середине оболочки. Амплитуда нагрузки эквивалентна единичной безразмерной силе $Q = 1$.

На рис. 1 и 2 представлены модальные и суммарные амплитудно-частотные характеристики максимальных уровней давлений и перемещений, рассчитанных для $n = 0 \dots 4$ на расстоянии 50 радиусов оболочки от ее оси. Модальный анализ позволяет оценить роль каждой моды в формировании акустического поля.

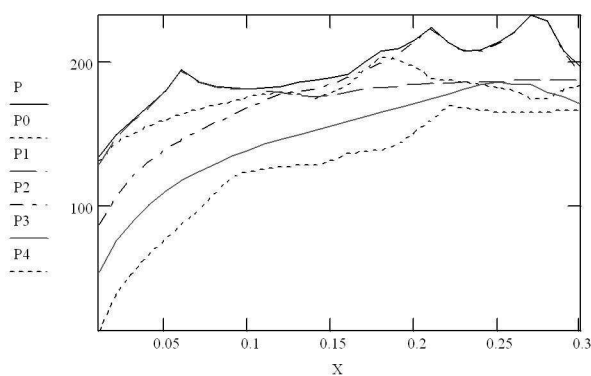


Рисунок 1

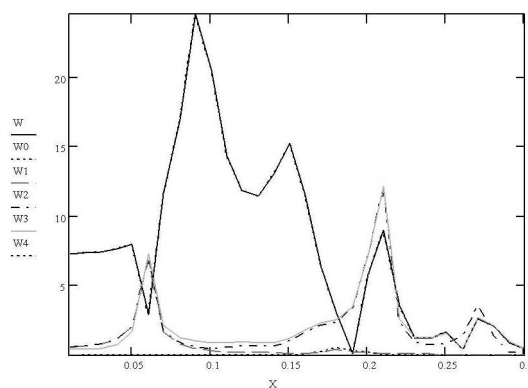


Рисунок 2

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И. И., Юдин А. С., Сафроненко В. Г. Численно-аналитические методы в задачах виброакустики оболочечных конструкций // Конструкции из композиционных материалов. 2000. № 2. С. 7–18.
- [2] Ворович И. И., Ционский А. Я., Юдин А. С. Метод собственных форм решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки вращения, подкрепленной ребрами, в жидкости // Акустический журнал. 1983. Т. 29, № 6. С. 744–748.

- [3] Байбуртян В. А., Дроздов А. Ю., Сафроненко В. Г., Ционский А. Я. Расчет поля давления при вынужденных колебаниях подкрепленных оболочек вращения в жидкости // Акустический журнал. 1984. Т. 30, № 5. С. 702.
- [4] Васильев В. В., Протасов В. Д., Болотин В. В. и др. Композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
- [5] Юдин А. С., Яценко М. Н. Виброакустика оболочки с кольцевыми ребрами переменной жесткости // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. 1995. Вып. 2. С. 97–105.
- [6] Степаненко Ю. П., Исаев К. В., Азаров А. Д. Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. II Междунар. конф. г. Ростов-на-Дону, 19-20 сент. 1996г. Ростов-н/Д: МП «Книга», 1997. Т. 1. С. 118–123.
- [7] Сафроненко В. Г., Юдин А. С. Модальные уравнения вибродинамики композитных структурно-неоднородных оболочек // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IV Международной научной конференции: Ростов-на-Дону, 27–28 окт. 1998г. Ростов-н/Д: Изд. СКНЦ ВШ, 1998. Т. 2. С. 154–157.

Safronenko V. G., Donchenko E. N., Shutko V. M. *Vibroacoustics of composite polymeric shells of rotation reinforced with discrete circular ribs.* Mathematical and computer models of vibroacoustics for multilayered composite polymeric shells of rotation, reinforced with discrete circular ribs under the influence of vibration loadings have been developed. Both mode and summary amplitude-frequency characteristics of the shell, as well as the field of pressure in acoustic medium are determined.

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Свободина К. С.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В данной работе предложен экономичный алгоритм численной реализации геометрически линейного приближения модели, который в дальнейшем планируется развить на общий случай. Разностная схема разработана на основе метода Иванова построения диссипативных схем с контролируемой искусственной диссипацией энергии. Она является схемой типа предиктор–корректор, неявной на шаге предиктор и явной на шаге корректор. На первом шаге применяется метод трехдиагональной прогонки, на втором вычисления ведутся на основе интегральных законов сохранения.

Введение. Рассматриваем упрощенную математическую модель деформирования, при котором упругим изменением формы частиц можно пренебречь, т. к. оно незначительно мало по сравнению с пластическим формоизменением. Уравнение состояния среды для давления p , плотности ρ и удельной внутренней энергии U описывает упругую деформацию объема. Вариационные неравенства, основанные на принципе максимума мощности диссипации энергии формулируют определяющие соотношения пластического деформирования [2]

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_k &= -p_{,k} + \tau_{kj,j}, \quad \dot{\rho} + \rho v_{k,k} = 0, \quad p = p(\rho, U), \\ \rho \dot{U} &= \frac{p \dot{\rho}}{\rho} + \tau_{kj} e_{kj}, \quad e_{kj} = \frac{1}{2} (v_{k,j} + v_{j,k}) + \frac{\dot{\rho}}{3\rho} \delta_{kj}, \\ (\tilde{\tau}_{kj} - \tau_{kj}) &\leq 0, \quad f(\tau_{kj}, \rho, U) \leq 0, \quad f(\tilde{\tau}_{kj}, \rho, U) \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_k — проекции вектора скорости, τ_{kj} и e_{kj} — компоненты девиатора тензора напряжений и тензора пластической деформации, δ_{kj} — символ Кронекера, f — функция текучести материала, характеризующая переход из упругого состояния в пластическое состояние. Через $\tilde{\tau}_{kj}$ обозначены произвольные допустимые вариации напряжений. Нижний индекс после запятой означает частную производную по соответствующей пространственной переменной. Точкой над символом обозначается полная производная по времени.

В отличие от более общей модели Уилкинса [1], учитывающей упругопластическое формоизменение, в которой не существует упругого потенциала деформирования, эта модель полностью удовлетворяет постулатам необратимой термодинамики. Она в случае классических условий пластичности Мизеса и Треска–Сен-Венана корректно описывает классы разрывных решений с ударными волнами — движущимися поверхностями разрыва скоростей и напряжений [2, 3]. Рассматриваемая модель может быть использована для описания ограниченного класса процессов, сопровождающихся большими пластическими деформациями, по сравнению с которыми упругими деформациями можно пренебречь. При постановке

краевых задач к системе (1) должны быть добавлены начальные данные для иско-
мых величин: v_k , ρ , p , и граничные условия в терминах скоростей или напряжений.

В данной работе предложен экономичный алгоритм численной реализации геометрически линейного приближения модели, который в дальнейшем планируется
развить на общий случай. При решении двумерных и трехмерных задач применяется метод расщепления по пространственным переменным. Одномерные системы после вязкоупругой регуляризации решаются методом расщепления по физическим процессам. Сначала на каждом шаге по времени строится решение системы уравнений вязкой сжимаемой жидкости с большим коэффициентом вязкости, описывающей напряженно-деформированное состояние среды до наступления пластичности, затем решение корректируется с помощью специального алгоритма, полученного в результате аппроксимации вариационного неравенства. Разностная схема для уравнений вязкой сжимаемой жидкости разработана на основе метода Иванова [4] построения диссипативных схем с контролируемой искусственной диссипацией энергии. Она является схемой типа предиктор-корректор, неявной на шаге предиктор и явной на шаге корректор. На первом шаге применяется метод трехдиагональной прогонки, на втором вычисления ведутся на основе интегральных законов сохранения. Для такой схемы алгоритм корректировки решения не требует итераций и реализуется путем применения процедуры, аналогичной процедуре корректировки напряжений Уилкинса.

Основная часть. Более детально, для упрощенного варианта геометрически линейной модели соотношения (1) в силу симметрии тензора напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \rho v_{k,t} &= -p_{,k} + \tau_{kj,j}, & p_{,t} &= -\rho c^2 v_{i,i}, \\ (\tilde{\tau}_{kj} - \tau_{kj}) v_{k,j} &\leq 0, & f(\tau_{kj}) &\leq 0, & f(\tilde{\tau}_{kj}) &\leq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где c — скорость упругих волн, f — выпуклая функция текучести, зависящая только от компонент девиатора. Вязкая регуляризация уравнений упругого деформирования приводит к системе (η — коэффициент вязкости):

$$\begin{aligned} \rho v_{k,t} &= -p_{,k} + \tau_{kj,j}, \\ p_{,t} &= -\rho c^2 v_{k,k}, \\ \tau_{kj} &= \eta (v_{k,j} + v_{j,k} - 2/3 v_{i,i} \delta_{kj}). \end{aligned} \quad (3)$$

Метод расщепления по физическим процессам предполагает численное решение этой системы на первом этапе. На втором этапе, на каждом шаге по времени решается вариационное неравенство

$$(\tilde{\tau}_{kj} - \tau_{kj}) (\tau_{kj} - \eta v_{k,j}) \geq 0, \quad f(\tau_{kj}) \leq 0, \quad f(\tilde{\tau}_{kj}) \leq 0. \quad (4)$$

в котором градиенты скорости v_{kj} берутся с первого этапа. Теоретической основой такого подхода служит тот факт, что при $\eta \rightarrow \infty$ неравенство (4) аппроксимирует вариационное неравенство, входящее в систему (2). Решение неравенства (4) определяется как проекция тензора упругих напряжений, вычисленного по формуле (3), на выпуклое множество в девиаторном пространстве, задаваемое

неравенством $f(\tau_{kj}) \leq 0$. Так выглядит процедура корректировки напряжений, реализующая определяющие соотношения необратимого деформирования.

Для решения системы (3) применяется метод расщепления по пространственным переменным, который сводится к численной реализации одномерных систем типа:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tau = \eta \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5)$$

При построении численных решений краевых задач для системы (5) в соответствии с методом Иванова рассматривается расширенная система уравнений:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \tau = \eta \frac{\partial v'}{\partial x}. \quad (6)$$

в которой v' , p' и τ' — вспомогательные функции, не равные, вообще говоря, v , p и τ . Умножая первое уравнение (6) на v , второе — на p , третье — на τ , и суммируя результаты, получим уравнение баланса энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho c^2} \right) + \frac{\tau^2}{\eta} = & \frac{\partial(-p' + \tau')v'}{\partial x} - (v' - v) \frac{\partial(-p + \tau)}{\partial x} + \\ & + (p' - p) \frac{\partial v'}{\partial x} - (\tau' - \tau) \frac{\partial v'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Замыкающую систему уравнений записываем в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} v' - v \\ p' - p \\ \tau' - \tau \end{pmatrix} = D \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -p' + \tau' \\ -v' \\ -v' \end{pmatrix}.$$

Здесь D — неотрицательно определенная 3×3 — матрица с малыми коэффициентами. В силу неотрицательной определенности из уравнения (7) вытекает неравенство, гарантирующее диссипативность расширенной системы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho c^2} \right) + \frac{\tau^2}{\eta} \leq \frac{\partial(-p' + \tau')v'}{\partial x}. \quad (8)$$

При стремлении матрицы D к нулю система (6) преобразуется в исходную систему (5), а из уравнения получается закон сохранения энергии для этой системы.

В действительности, при построении разностной схемы проведенные рассуждения повторяются на дискретном уровне. Исходная система записывается в виде разностных уравнений, где t и h — шаги равномерной сетки по времени и по пространственной переменной соответственно:

$$\begin{aligned} \rho \frac{v^j - v_j}{\Delta t} = & -\frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{h} + \frac{\tau_{j+1/2} - \tau_{j-1/2}}{h}, \\ \frac{p^j - p_j}{\Delta t} = & -\rho c^2 \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}, \quad \tau_j = \eta \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь величины с целыми индексами $j = 1, \dots, n$, аппроксимирующие основные функции, относятся к нижней и верхней граням пространственно-временной

ячейки сетки, а величины с дробными индексами, аппроксимирующие вспомогательные функции, относятся к ее боковым граням. Система (8) по физическим процессам расщепляется на две подсистемы, выписывается дискретный закон сохранения энергии, строится аппроксимирующее уравнение и находятся разрешающие уравнения.

В итоге получается разностная схема, при реализации которой на шаге предиктор применяется метод трехдиагональной прогонки, а шаг корректор выполняется по формулам явного пересчета решения в ячейке, аппроксимирующим интегральные законы сохранения для системы (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00053).

Автор выражает благодарность профессору Садовскому В. М. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
- [2] Садовский В. М. К теории ударных волн в сжимаемых пластических средах // Известия РАН: Механика твердого тела, 2001 № 5. С. 87–95
- [3] Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
- [4] Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во. 2002. 352 с.

Svobodina K. S. *Algorithm of the numerical solution of the thermomechanical model used for description of the dynamics of plastic medium.* In this paper we propose a cost-effective algorithm for the numerical realization of geometrically linear approximation model, which in the future we plan to develop in the general case. The difference scheme developed on the basis of Ivanov's method of building dissipative schemes with controlled artificial energy dissipation. It is the predictor-corrector scheme. It is implicit on the step of the predictor and it is explicit on the corrector step. In the first step the TriDiagonal Matrix Algorithm is used, on the second step calculations are made on the basis of integral conservation laws.

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПАСНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ СООРУЖЕНИЙ

Симбиркин В. Н.¹, Якушев В. Л.², Филимонов А. В.²

¹ООО «Еврософт», Москва

²Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

Предложены критерии поиска опасных направлений поступательного сейсмического воздействия при расчете сооружений методом конечных элементов на основе линейно-спектральной теории. Разработанные алгоритмы на основе критериев позволяют сократить объем вычислений в случае анализа многих направлений. По результатам численных экспериментов удалось получить алгоритм, позволяющий определить опасное направление, при котором достигается напряженно-деформированное состояние конструкции близкое к максимальному.

1. Введение. Сейсмические воздействия могут иметь любое направление в пространстве. При анализе сейсмостойкости зданий и сооружений на основе линейно-спектрального метода расчета, как правило, рассматривают следующие направления сейсмического воздействия:

- направления, соответствующие преимущественной ориентации низших форм собственных колебаний сооружения; это правило обычно приводит к рассмотрению двух ортогональных направлений горизонтального воздействия, а также вертикального сейсмического воздействия, если оно должно быть учтено по указанию норм (см., например, п. 5.4 [1]);

- направления, при которых реализуются максимумы сейсмической реакции сооружения при учете всех значимых собственных форм;

- направления, соответствующие местоположению возможных очагов землетрясений в окрестности площадки строительства.

Направления воздействий первых двух групп оказываются для зданий наиболее опасными. Очевидно, что экстремальные величины различных параметров напряженно-деформированного состояния и экстремальные величины одного параметра для разных конструктивных элементов здания достигаются при различных направлениях воздействия. Поэтому опасных направлений сейсмического воздействия на здание в общем случае может быть несколько, и для обеспечения надежного проектирования конструкций следует рассмотреть их все.

Опасные направления воздействия определяют расчетным путем [2]. При этом желательно использовать простые критерии, позволяющие решить эту задачу без проведения полного цикла трудоемких прочностных расчетов конструкций. В статье предложены способы определения опасных направлений сейсмического воздействия при расчете конструкций по линейно-спектральной теории на основе метода конечных элементов.

2. Параметры сейсмической реакции сооружения. При применении линейно-спектрального метода расчета вектор узловых сейсмических нагрузок по

j -й форме колебаний определяется как [3]:

$$\{S_j\} = I_d[M]\{\eta_j\}\beta_j, \quad (1)$$

где:

I_d — расчетная интенсивность сейсмического воздействия (расчетное ускорение основания с учетом корректирующих коэффициентов);

$[M]$ — матрица масс конструкции;

$\{\eta_j\}$ — вектор коэффициентов формы колебаний, вычисляемый по формуле:

$$\{\eta_j\} = \{\Phi_j\} \frac{\{\Phi_j\}^T [M] \{B\}}{\{\Phi_j\}^T [M] \{\Phi_j\}}, \quad (2)$$

$\{\Phi_j\}$ — вектор j -й собственной формы;

$\{B\}$ — вектор ориентации сейсмического воздействия, связывающий движения основания с движениями системы как абсолютно твердого тела в направлении каждой степени свободы;

β_j — коэффициент динамичности, соответствующий периоду колебаний по форме j .

Заметим, что формулы (1) и (2) являются обобщением формул (2) и (5) [1] на случай применения полной матрицы распределенных масс; при диагональной матрице масс эти формулы и соответствующие формулы [1] становятся идентичными.

Если собственный вектор $\{\Phi_j\}$ является $[M]$ -ортогональным и нормированным, т. е. $\{\Phi_j\}^T [M] \{\Phi_j\} = 1$, получим:

$$\{\eta_j\} = \{\Phi_j\} \{\Phi_j\}^T [M] \{B\} = \{\Phi_j\} H_j, \quad (3)$$

где $H_j = \{\Phi_j\}^T [M] \{B\}$.

Вектор перемещений от статического действия нагрузок (1):

$$\{\delta_j\} = [K]^{-1} \{S_j\} = I_d [K]^{-1} [M] \{\eta_j\} \beta_j, \quad (4)$$

где $[K]$ — матрица жесткости конструкции.

С учетом того, что $[K]^{-1} [M] \{\Phi_j\} = \frac{1}{\omega_j^2} \{\Phi_j\}$, где ω_j^2 — круговая частота колебаний по j -й форме, формула (4) примет вид:

$$\{\delta_j\} = \{\eta_j\} \frac{I_d \beta_j}{\omega_j^2} = \{\Phi_j\} \frac{I_d \beta_j H_j}{\omega_j^2}. \quad (5)$$

Потенциальная энергия упругой деформации по j -й форме равна работе сил инерции $\{S_j\}$ на перемещениях $\{\delta_j\}$:

$$W_j = \frac{1}{2} \{\delta_j\}^T \{S_j\} = \frac{1}{2} \left(\frac{I_d \beta_j}{\omega_j^2} \right)^2 \{\eta_j\}^2 [M] \{\eta_j\} = \frac{1}{2} \left(\frac{I_d \beta_j H_j}{\omega_j^2} \right)^2. \quad (6)$$

Оценку полной динамической реакции сооружения получим в результате суммирования величин (1), (5) и (6) по учитываемым в расчете формам собственных колебаний, которое может быть выполнено различными способами [2].

При расчете сооружений на сейсмические воздействия часто используется величина

$$\mu_j = \frac{\{\eta_j\}^T [M] \{\eta_j\}}{\{B\}^T [M] \{B\}} = \frac{(\{\Phi_j\}^T [M] \{B\})^2}{\{B\}^T [M] \{B\}} = \frac{(H_j)^2}{\{B\}^T [M] \{B\}}, \quad (7)$$

называемая эффективной модальной массой при сейсмическом воздействии в заданном направлении [3–6]. В частности, эту величину используют для оценки вклада формы колебаний в сейсмическую реакцию, а сумму этих величин, поскольку при определении всех форм колебаний системы она будет равна единице, — для оценки достаточного количества собственных форм, учитываемых при сейсмическом анализе [1].

Если при расчете необходимо рассмотреть большое число возможных направлений сейсмического воздействия, то объем вычислений можно сократить, предварительно вычислив эффективные модальные массы при направлении сейсмического воздействия вдоль осей 1,2,3 любой прямоугольной системы координат:

$$\mu_{jp} = \frac{(\{\Phi_j\}^T [M] \{B_p\})^2}{\{B_p\}^T [M] \{B_p\}}, p = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Тогда величину H_j при сейсмическом воздействии в произвольном направлении можно определить как

$$H_j = \{\Phi_j\}^T [M] \sum_{p=1}^3 \{B_p\} r_p = \sum_{p=1}^3 r_{jp} \sqrt{m_p \mu_{jp}}, \quad (9)$$

где r_p — коэффициенты, зависящие от ориентации сейсмического воздействия относительно осей 1,2,3; r_{jp} — коэффициенты с учетом знака соответствующего произведения $\{\Phi_j\}^T [M] \{B_p\}$; m_p — эффективные массы системы в соответствующем направлении, равные знаменателям в формулах (8). В этом случае эффективная модальная масса в произвольном направлении сейсмического воздействия может быть найдена по формуле:

$$\mu_{jp} = \frac{(H_j)^2}{\{B\}^T [M] \{B\}} = \frac{H_j^2}{\sum_{p=1}^3 m_p r_p^2}. \quad (10)$$

3. Критерии для определения опасных направлений сейсмического воздействия. Коэффициенты, определяющие преимущественную ориентацию j -й формы собственных колебаний сооружения, могут быть вычислены по следующим формулам:

$$r_{jl} = \frac{m_l \mu_{jl}}{\sqrt{\sum_{p=1}^3 (m_p \mu_{jp})^2}} = \frac{H_{jl}^2}{\sqrt{\sum_{p=1}^3 H_{jp}^4}}, l = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Выполнение такого расчета для основных форм собственных колебаний сооружения обеспечит определение опасных направлений сейсмического воздействия первой группы.

Для определения опасных направлений сейсмического воздействия второй группы, при которых реализуются максимумы динамической реакции сооружения

с учетом нескольких собственных форм, введем понятия удельных обобщенных величин сейсмической силы \bar{S} , перемещения $\bar{\Delta}$ и работы (потенциальной энергии) \bar{W} . Модальные составляющие этих величин определим по формулам:

$$\bar{S}_j = \beta_j |H_j|, \bar{\Delta}_j = \frac{\beta_j |H_j|}{\omega_j^2}, \bar{W}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j |H_j|}{\omega_j} \right)^2. \quad (12)$$

В качестве возможных опасных направлений сейсмического воздействия будем рассматривать направления, при которых реализуются максимумы величин \bar{S} , $\bar{\Delta}$ и \bar{W} . Определение этих направлений осуществляется в результате решения задач оптимизации, которые при алгебраическом суммировании модальных составляющих формулируются следующим образом:

$$\bar{S} = \sum_{j=1}^N \bar{S}_j \rightarrow \max, \bar{\Delta} = \sum_{j=1}^N \bar{\Delta}_j \rightarrow \max, \bar{W} = \sum_{j=1}^N \bar{W}_j \rightarrow \max \quad (13)$$

где N — количество учитываемых в расчете форм собственных колебаний. Неизвестными в каждой из трех задач (13) являются две независимые из трех величин, определяющие направление сейсмического воздействия относительно осей выбранной системы координат.

Задачи (13) решаются численным методом нелинейной оптимизации. При этом применение формулы (9) для вычисления величины H_j позволяет многократно увеличить скорость работы алгоритма.

Попутно заметим, что отношения $\frac{\bar{S}_j}{S}$, $\frac{\bar{\Delta}_j}{\Delta}$, $\frac{\bar{W}_j}{W}$ можно рассматривать как оценку вклада j -й формы собственных колебаний в соответствующий показатель сейсмической реакции.

4. Численные расчеты. Для апробации полученных критериев были проведены численные расчеты тестовых и реальных моделей строительных сооружений, разработанных в ЦНИИСК им. Кучеренко. Более детально с полученными результатами можно ознакомиться в [7].

5. Выводы.

1. Предложены и сформулированы критерии для определения опасных направлений сейсмического воздействия на пространственные сооружения, при выполнении которых достигаются максимумы обобщенных величин сейсмической нагрузки, перемещений и работы инерционных сил. Предложенные критерии легко реализуются в рамках выполнения линейно-спектрального расчета сооружений на основе метода конечных элементов.

2. В результате численных исследований установлено, что критерий максимальной обобщенной работы сил инерции (энергии упругой деформации) обеспечивает определение того направления сейсмического воздействия, при котором напряженное состояние конструкции в целом близко к максимальному. Этот критерий рекомендуется использовать для определения одного из расчетных направлений сейсмического воздействия при расчете конструкций по первой группе предельных состояний. Другие рассмотренные критерии (13), основанные на условии достижения максимума обобщенной сейсмической нагрузки и обобщенного перемещения конструкции, оказались менее эффективными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *СП 14.1330.2011*. Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция СНиП II-7-81* // Минрегион России, 2010. 84 с.
- [2] *Назаров Ю. П.* Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. М.: Наука, 2010. 468 с.
- [3] *Безделев В. В., Буклемишев А. В., Сутырин Ю. А.* Предложения по корректировке СНиП «Строительство в сейсмических районах» в части формулирования спектрального метода расчета. Ч 1. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2000. № 6. С. 43–47.
- [4] *Бирбраер А. Н.* Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука, 1998. 255 с.
- [5] *Фиалко С. Ю.* Реализация в программном комплексе SCAD блочного метода Ланцоша со сдвигами применительно к сейсмическому воздействию // CADmaster. № 40. 2007. С. 102–105.
- [6] *Симбиркин В. Н., Филимонов А. В.* Определение собственных форм колебаний при расчете сооружений на сейсмические воздействия // Промышленное и гражданское строительство. 2012. № 3. С. 27–30.
- [7] *Симбиркин В. Н., Филимонов А. В.* / Определение опасных направлений сейсмического воздействия для пространственных сооружений // Вестник НИЦ «Строительство». Исследования по теории сооружений: Сб. статей. Вып. 6 (XXXI) / под ред. И.И. Ведякова и Г.С. Варданяна. М.: НИЦ «Строительство». 2012. С. 23–30.

Simbirkin V. N., Yakushev V. L., Filimonov A. V. *The criteria for determining the dangerous direction of the seismic action in structures analysis.* This paper provides methods for some dangerous directions calculation in seismic analysis of structures based on linear spectral theory. The developed algorithms based on these criteria can reduce the amount of computation in the case of the analysis of many directions. According to the results of numerical experiments succeeded to obtain an algorithm to determine the dangerous direction, at which the stress-strain state of the structure close to the maximum.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ПО ДИАГРАММЕ ЧИСТОГО ИЗГИБА

Стружанов В. В.

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Основная проблема при диагностике и контроле заключается в том, что подавляющее число физических величин не может быть измерено непосредственно. Таким образом, возникает задача по определению физических величин по результатам их измерений. В данной работе рассматривается конструктивный элемент в виде балки прямоугольного сечения и приводится алгоритм расчета свойств материала по экспериментальным результатам, полученным при чистом изгибе.

1. Пусть изучаемый объект характеризуется элементом z_T , принадлежащим множеству F . Часто z_T недоступен для прямого изучения, и исследуется некоторое его проявление $Az_T = u_T$ ($u_T \in AF$, где AF — образ множества F при его отображении, осуществляемом оператором A). Очевидно, что уравнение

$$Az = u \tag{1}$$

имеет решение на F только для таких элементов u , которые принадлежат множеству AF . Элемент u обычно получается путем измерений и поэтому известен приближенно.

Пусть u_Δ — приближенное решение. В этих случаях речь может идти лишь о нахождении приближенного к z_T решения уравнения

$$Az = u_\Delta. \tag{2}$$

При этом u_Δ , вообще говоря, не принадлежит множеству AF . Оператор A во многих случаях таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным. Например, оператор A представляет собой интегральный оператор. В этих условиях нельзя в качестве приближенного решения брать точное решение уравнения (1) с приближенной правой частью, то есть нельзя в качестве приближенного решения брать элемент $z = A^{-1}u_\Delta$, так как, во-первых, такого решения может не существовать на множестве F , поскольку u_Δ может не принадлежать множеству AF (не выполняется первое условие корректности по Адамару), во-вторых, такое решение, даже если оно существует, не будет обладать свойством устойчивости, поскольку обратный оператор не является непрерывным (не выполняется третье условие корректности).

Возможность определения приближенных решений некорректно поставленных задач, устойчивых к малым изменениям исходных данных, основывается на использовании дополнительной информации относительно решения. Широко распространенным в вычислительной практике способом приближенного решения уравнения (2) является метод подбора. Он состоит в том, что для элементов z

некоторого заранее заданного подкласса возможных решений $B \subset F$ вычисляется оператор Az , то есть решается прямая задача. В качестве приближенного решения берется такой элемент $z_0 \in B$ на котором невязка $\rho(Az_0, u_\Delta)$ достигает минимума [1, 2], то есть

$$\rho(Az_0, u_\Delta) = \inf_{z \in B} \rho(Az, u_\Delta).$$

Здесь $\rho(Az_0, u_\Delta)$ — расстояние между элементами Az_0 и u_Δ в некоторой метрике.

2. Рассмотрим чистый изгиб балки прямоугольного сечения, имеющего высоту h и ширину b . В этом случае единственной ненулевой компонентой тензора напряжений будет продольное напряжение $\sigma_x = \sigma$, а продольная деформация $\varepsilon_x = \varepsilon$ линейно распределена по высоте балки (рисунок 1). Полагаем, что зависимость напряжений от деформаций $\sigma(\varepsilon)$ одинакова для растяжения и сжатия. Тогда нейтральная линия не меняет своего положения при изгибе и проходит по середине балки, совпадая с осью симметрии Ox (рисунок 1). Отсюда $\varepsilon_1 = \kappa h/2$, $\varepsilon_2 = -\kappa h/2$, где κ — кривизна балки, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — деформации наиболее растянутых и сжатых волокон.

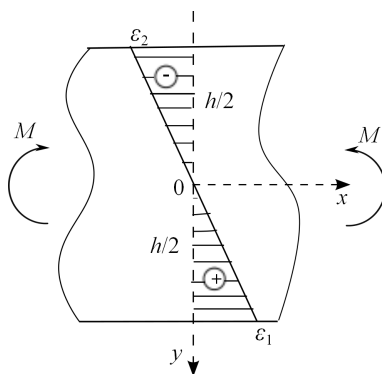


Рисунок 1 – Распределение деформаций

Уравнение чистого изгиба, связывающее изгибающий момент M и кривизну балки, имеет вид [3]

$$2b \int_0^{\kappa h/2} \frac{\varepsilon}{\kappa^2} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = M(\kappa). \quad (3)$$

если известна зависимость $\sigma(\varepsilon)$, то выражение (3) определяет зависимость $M(\kappa)$ (прямая задача). Когда по известной функции $M(\kappa)$ необходимо найти функцию $\sigma(\varepsilon)$ (обратная задача), то уравнение (3) представляет собой интегральное уравнение Вольтерры первого рода.

3. Пусть зависимость $M(\kappa)$ получена в эксперименте. Это может быть набор точек (M_k, κ_k) , либо записанная с помощью какой-либо аппаратуры некоторая непрерывная кривая. В любом случае в дальнейшем будем иметь дело с набором точек (M_k, κ_k) , полученным с точностью, позволяемой экспериментальной аппаратурой.

Возьмем две точки, расположенные рядом (M_i, κ_i) , (M_{i+1}, κ_{i+1}) . Используя

формулу (3), находим

$$\frac{M_{i+1}\kappa_{i+1}^2}{2b} = \int_0^{\kappa_{i+1}h/2} \varepsilon\sigma(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\kappa_i h/2} \varepsilon\sigma(\varepsilon)d\varepsilon + \int_{\kappa_i h/2}^{\kappa_{i+1}h/2} \varepsilon\sigma(\varepsilon)d\varepsilon,$$

$$\frac{M_i\kappa_i^2}{2b} = \int_0^{\kappa_i h/2} \varepsilon\sigma(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Вычитая из первого выражения второе, получаем равенство

$$\frac{1}{2b}(M_{i+1}\kappa_{i+1}^2 - M_i\kappa_i^2) = \int_{\kappa_i h/2}^{\kappa_{i+1}h/2} \varepsilon\sigma(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (4)$$

Полагаем, что зависимость $\sigma(\varepsilon)$ на отрезке $[\kappa_i h/2, \kappa_{i+1}h/2]$ линейна с углом наклона α_i , а именно, $\sigma = \sigma_i + \operatorname{tg}\alpha_i(\varepsilon - \varepsilon_i)$, где $\operatorname{tg}\alpha_i = E_i^p$, $\varepsilon_i = \kappa_i h/2$. Здесь E^p — касательный модуль, который на стадии упругости равен модулю Юнга E . Подставляя данное выражение для σ в правую часть формулы (4) и производя необходимые действия и преобразования, находим

$$E_i^p = 3 \frac{(M_{i+1}\kappa_{i+1}^2 - M_i\kappa_i^2) - \sigma_i(\kappa_{i+1}^2 - \kappa_i^2)}{2(\kappa_{i+1}^3 - 3\kappa_i\kappa_{i+1}^2 + \kappa_i^3)}. \quad (5)$$

Затем получаем

$$\sigma = \sigma_i + E_i^p \left(\frac{\kappa_{i+1}h}{2} - \frac{\kappa_i h}{2} \right), \quad (6)$$

где $\kappa_{i+1}h/2 = \varepsilon_{i+1}$, $\kappa_i h/2 = \varepsilon_i$.

Начиная процесс вычислений с первой точки, где $M_1 = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\sigma_1 = 0$, по формулам (5), (6) последовательно рассчитываем значения σ_i и ε_i , по которым восстанавливаем диаграмму деформирования материала $\sigma(\varepsilon)$.

4. Пусть диаграмма изгиба аппроксимируется функцией

$$M_\Delta = \begin{cases} \frac{4}{3}10^4\kappa, 0 \leq \kappa \leq 0.003; \\ 30 + \frac{2}{3}10^4\kappa - 9 \cdot 10^{-5}\kappa^{-2}, 0.003 \leq \kappa \leq 0.006; \\ 270 - 2 \cdot 10^4\kappa - 297 \cdot 10^{-5}\kappa, 0.006 \leq \kappa \leq 0.009. \end{cases}$$

Причем в этом выражении точность аппроксимации определяет только один знак после запятой. Пересчет приближенной (экспериментальной) функции $M_\Delta(\kappa)$ в диаграмму $\sigma(\varepsilon)$ для набора значений $(M_{\Delta i}, \kappa_i)$ с шагом по κ , равным 0.0001, дает пилообразную ломаную, характерную для решений интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры первого рода [1, 4].

Для определения приближений зависимости $\sigma(\varepsilon)$ применяем метод подбора. Подкласс возможных решений составляют функции $\sigma_k(\varepsilon)$, графики которых расположены между верхними и нижними точками пилообразной ломаной. Решая прямую задачу для всевозможных таких функций, получаем зависимости M_K . Тогда невязка

$$\rho(M_K, M_\Delta) = |M_K(\kappa) - M_\Delta(\kappa)| < \delta,$$

где δ — заданная малая величина, определяет кривую $M_*(\kappa)$ и, следовательно, приближенное решение $\sigma_*(\varepsilon)$ уравнения (3).

Построение приближенного решения можно осуществить, применяя следующий алгоритм подбора. Пусть до точки C приближенная диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ известна, и из этой точки выходит ломаная $CNQK$ (рисунок 2).

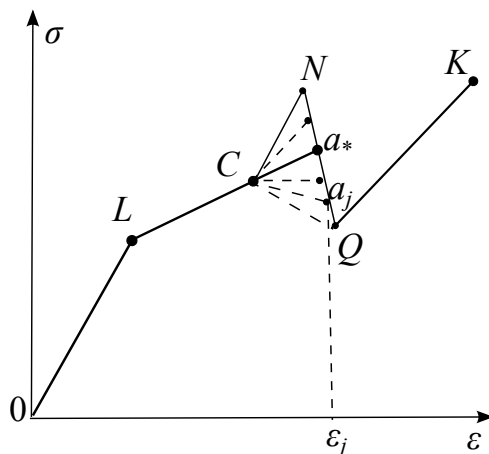


Рисунок 2 – Схема алгоритма подбора

Разбиваем отрезок NQ точками a_j и решаем прямую задачу для диаграмм $OLCa_j$ (j — достаточно большое число). Из полученного множества $M_j(\kappa)$ выделяем элемент M_* , удовлетворяющий при $\kappa = \kappa_j$ неравенству $|M_j(\kappa_j) - M_\Delta(\kappa_j)| < \delta$. Этот элемент определяет точку a_* такую, при которой прямой расчет с использованием диаграммы $OLCa_*$ дает кривую, достаточно близко расположенную к кривой $M_\Delta(\kappa)$. Далее процесс повторяем с изменением, при котором вместо точки C берется уже точка a_* . В результате проведенных вычислений получаем искомую диаграмму $\sigma(\varepsilon)$, изображенную на (рисунок 2).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 228 с.
- [2] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
- [3] Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. 670 с.
- [4] Анарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра 1 рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.

Struzhanov V. V. *The determination inverse problem of material properties using pure bending curve.* The fundamental problem, which was occurring during the diagnostics and check, is that the overwhelming majority of quantity couldn't be directly. Thus the problem about definition of the quantities, using the measurements results. In this work the rectangular beam is considered and the calculation algorithm of material properties is proposed. This algorithm is based on experimental results obtained by pure bending.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ ПРОХОЖДЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПУЧКА ВОЛН ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ СРЕДЫ СО СКОПЛЕНИЯМИ МИКРО-ДЕФЕКТОВ

Сумбатян М. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются детерминированные макроскопические подходы к анализу прочности на основе ультразвукового (УЗ) метода прохождения применительно к упругим средам с системами микро-дефектов. Прочностные свойства изучаются на основе оценки прохождения УЗ волнового пучка через упругий образец, содержащий случайный массив микро-трещин или объемных микро-дефектов. Исследуется концепция «кажущейся скорости прохождения волны», которая активно используется авторами известных экспериментальных работ. Теоретические оценки тестируются на модельных экспериментах, выполненных с системами искусственно изготовленных и случайно расположенных дефектов.

1. Метод ГИУ для трещиноватой среды. Рассмотрим прямоугольный упругий образец из однородного изотропного материала с системой трещин, хаотически распределенных в его объеме (плоская статическая задача). Образец находится под внешней равномерно-распределенной нагрузкой. Подобные испытания применяются, например, к оценке прочности бетона со стандартным образцом 10 см × 10 см. На практике, если приложенная нагрузка возрастает, то в образце возникает все больше и больше трещин. Основной задачей при этом является оценка прочности такой трещиноватой среды. Обычно оценка прочности с постепенно возрастающей приложенной нагрузкой сопоставляется с изменением скорости прохождения УЗ волны через данный образец. В данной работе строятся модели для обоих методов оценки прочности.

Начнем со случая одной элементарной трещины, расположенной вдоль оси y на отрезке $|x| \leq \varepsilon/2$, где ε — длина трещины. Вводя величины $g_x(x)$ и $g_y(x)$ — относительное смещение берегов трещины соответственно вдоль осей x и y , имеем ($c^2 = \mu/(\lambda + 2\mu) = c_s^2/c_p^2 < 1$):

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{y}{2\pi} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \left\{ \frac{1}{(x - \xi)^2 + y^2} - (1 - c^2) \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} \right\} g_x(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \left\{ \frac{2(1 - c^2) y^2}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} - \frac{c^2}{(x - \xi)^2 + y^2} \right\} (x - \xi) g_y(\xi) d\xi, \\ u_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \left\{ \frac{2(1 - c^2) y^2}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} + \frac{c^2}{(x - \xi)^2 + y^2} \right\} (x - \xi) g_x(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{y}{2\pi} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \left\{ \frac{1}{(x - \xi)^2 + y^2} + (1 - c^2) \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} \right\} g_y(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{1}$$

Формулы для компонент тензора напряжений имеют аналогичный вид.

Применение метода «разрывных перемещений», одного из вариантов ГИУ [1], подразумевает, что система N заданных трещин ($k = 1, \dots, N$) может быть рассмотрена как комбинация элементарных трещин малой длины ε , когда для каждого $k = 1, \dots, N$ реальная трещина разбивается на M элементарных трещин. Если для простоты считать все образовавшиеся в среде трещины одной длины, то полное число элементарных трещин $I = NM$. При этом i -я трещина, ($i = 1, \dots, I$) имеет свое «раскрытие», т. е. нормальное и тангенциальное относительное смещение ее берегов: g_i^x, g_i^y в локальной системе координат (x, y) . Тогда вклад величин g_i^x, g_i^y в поле перемещений в любой точке среды дается формулой (1), а полный вклад всех элементарных трещин находится как суперпозиция всех элементарных вкладов.

Рассмотрим произвольную пару разрывных перемещений, заданных параметрами $\{x_i, y_i, \bar{n}_i, \bar{\tau}_i\}$ и $\{x_j, y_j, \bar{n}_j, \bar{\tau}_j\}$ в декартовой системе (x, y) , где первые два параметра — координаты центральной точки, а вектора $\bar{\tau}, \bar{n}$ направлены вдоль элементарной трещины и вдоль ее нормали. Для вычисления вклада j -го элемента в нормальное и тангенциальное напряжения в i -м элементе, свяжем с i -й и j -й трещинами локальную систему координат (x', y') и (x'', y'') соответственно. Очевидно, что если $\bar{r}_i'' = \{x_i'', y_i''\}$ — радиус-вектор точки i в системе координат (x'', y'') , то

$$\begin{aligned} \bar{r}_i'' &= \bar{r}_j - \bar{r}_i, \quad x_i'' = \bar{r}_i'' \cdot \bar{\tau}_j = (\bar{r}_j - \bar{r}_i) \cdot \bar{\tau}_j, \quad y_i'' = \bar{r}_i'' \cdot \bar{n}_j = (\bar{r}_j - \bar{r}_i) \cdot \bar{n}_j, \sim \\ x_i'' &= (x_j - x_i) \tau_{jx} + (y_j - y_i) \tau_{jy}, \quad y_i'' = (x_j - x_i) n_{jx} + (y_j - y_i) n_{jy}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда напряжения в координатной системе (x'', y'') имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{\pi \sigma_{xx}''(x_i, y_i)}{\mu(1-c^2)} &= g_j^\tau \left\langle 2y'' \left\{ \frac{1}{y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2} - \frac{1}{y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - y'' \left\{ \frac{y''^2 - (\varepsilon/2 - x'')^2}{[y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2]^2} - \frac{y''^2 - (\varepsilon/2 + x'')^2}{[y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2]^2} \right\} \right\rangle \\ &\quad + g_j^n \left\langle \left\{ \frac{\varepsilon/2 - x''}{y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2} + \frac{\varepsilon/2 + x''}{y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2y''^2 \left\{ \frac{\varepsilon/2 - x''}{[y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2]^2} + \frac{\varepsilon/2 + x''}{[y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2]^2} \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi \sigma_{xy}''(x_i, y_i)}{\mu(1-c^2)} &= g_j^\tau \left\langle \left\{ \frac{\varepsilon/2 - x''}{y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2} + \frac{\varepsilon/2 + x''}{y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2y''^2 \left\{ \frac{\varepsilon/2 - x''}{[y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2]^2} + \frac{\varepsilon/2 + x''}{[y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2]^2} \right\} \right\rangle \\ &\quad + y g_j^n \left\langle \left\{ \frac{y''^2 - (\varepsilon/2 - x'')^2}{[y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2]^2} - \frac{y''^2 - (\varepsilon/2 + x'')^2}{[y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2]^2} \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi\sigma''_{yy}(x_i, y_i)}{\mu(1-c^2)} &= y'' g_j^\tau \left\{ \frac{y''^2 - (\varepsilon/2 - x'')^2}{[y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2]^2} - \frac{y''^2 - (\varepsilon/2 + x'')^2}{[y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2]^2} \right\} \\
&+ g_j^n \left\langle \left\{ \frac{\varepsilon/2 - x''}{y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2} + \frac{\varepsilon/2 + x''}{y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2} \right\} \right. \\
&\left. + 2y''^2 \left\{ \frac{\varepsilon/2 - x''}{[y''^2 + (\varepsilon/2 - x'')^2]^2} + \frac{\varepsilon/2 + x''}{[y''^2 + (\varepsilon/2 + x'')^2]^2} \right\} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{5}$$

При этом нормальное и касательное напряжения в системе (x'', y'') на i -й элементарной площадке имеют вид

$$\begin{aligned}
T_i^n(x_i, y_i) &= \sigma''_{xx}(x_i, y_i) n_{ix}''^2 + 2\sigma''_{xy}(x_i, y_i) n_{ix}'' n_{iy}'' + \sigma''_{yy}(x_i, y_i) n_{iy}''^2, \\
T_i^\tau(x_i, y_i) &= \sigma''_{xx}(x_i, y_i) n_{ix}'' \tau_{ix}'' + \sigma''_{xy}(x_i, y_i) (n_{ix}'' \tau_{iy}'' + n_{iy}'' \tau_{ix}'') \\
&+ \sigma''_{yy}(x_i, y_i) n_{iy}'' \tau_{iy}'', \quad n_{ix}'' = \bar{n}_i \cdot \bar{\tau}_j, \quad n_{iy}'' = \bar{n}_i \cdot \bar{n}_j, \quad \tau_{ix}'' = \bar{\tau}_i \cdot \bar{\tau}_j, \quad \tau_{iy}'' = \bar{\tau}_i \cdot \bar{n}_j.
\end{aligned} \tag{6}$$

Формулы (4)–(6) дают полное представление для вклада разрывных смещений (g_j^n, g_j^τ) , определенных в j -й точке с координатами (x_j, y_j) с нормалью $\bar{n}_j = \{n_{jx}, n_{jy}\}$ и касательной $\bar{\tau}_j = \{\tau_{jx}, \tau_{jy}\}$, в нормальное и касательное напряжения $T_i^n(x_i, y_i)$, $T_i^\tau(x_i, y_i)$, действующие на площадке в i -й точке с нормалью $\bar{n}_i = \{n_{ix}, n_{iy}\}$ и касательной $\bar{\tau}_i = \{\tau_{ix}, \tau_{iy}\}$. Удовлетворяя граничному условию на лицевых поверхностях трещины, свободных от нормальных и тангенциальных напряжений, приходим к некоторой СЛАУ размером $2I \times 2I$ относительно неизвестных величин $g_i^n, g_i^\tau, i = 1, \dots, I$. Решение системы позволяет найти напряженно-деформированное состояние среды, а также произвести оценку прочности.

2. Метод прохождения УЗ импульса. Альтернативный метод оценки прочности состоит в использовании УЗ импульса, излучаемого датчиком с одной стороны образца и принимаемого другим датчиком на противоположной стороне, так называемый «метод прохождения». Обзор экспериментальных методов при прохождении УЗ импульсов через среды со скоплениями дефектов можно найти в [2]. В данной работе предлагается модель, которая использует трассировку звуковых лучей. При этом основной целью является установление корреляции между скоростью прохождения УЗ импульса, а также затуханием звука — с одной стороны, и прочностью — с другой, при возрастании числа трещин.

Пусть на противоположных гранях образца размещены два преобразователя для работы методом прохождения. В однородной среде без включений все УЗ лучи (пучки), которые в принципе могут достичь приемника, не встречают на своем пути никаких препятствий. С увеличением числа дефектов-препятствий все меньше лучей, выпущенных из излучателя, способны достичь приемника напрямую, без переотражений. Очевидно, подобные лучи имеют более длинный «путь пролета», чем лучи прямого попадания из источника в приемник. Возникает принципиальный вопрос: когда прямой путь между источником и приемником станет невозможным? Очевидно, это соответствует определенной плотности распределения препятствий. Начиная с этого критического значения N^* , дальнейшее увеличение числа дефектов постепенно уменьшает кажущуюся скорость в материале. Этот процесс можно моделировать алгоритмом трассировки лучей, причем как для трещин,

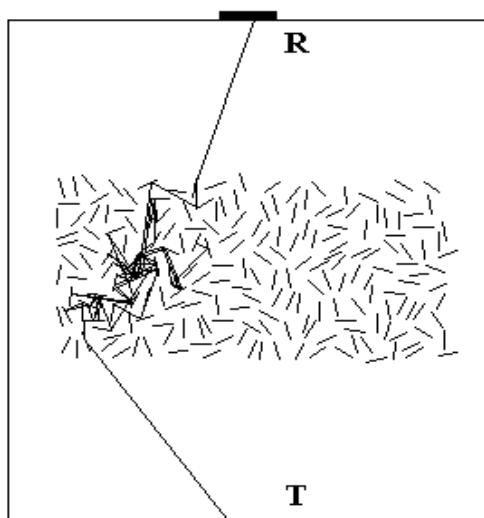


Рисунок 1 – Пролет УЗ луча между излучателем и приемником с отражениями на трещинах

так и для объемных дефектов. Для каждой частной конфигурации дефектов выбираем сетку на основании излучающего преобразователя, равномерно по всем возможным направлениям вовнутрь образца. Далее алгоритм прослеживает полную траекторию каждого луча по пути его всевозможных переотражений. Если какой-либо луч проходит через внешнюю границу выбранной прямоугольной рабочей области, не пересекая подошву приемного преобразователя, то данный луч отбрасывается из набора положительной статистики. Подходящими лучами считаются лишь те, которые после отражений достигают основания приемного датчика, как луч на рисунке 1. Для каждого луча его траектория зависит от отражающих свойств поверхности дефектов. Предполагается, что граница идеальная, т. е. что при отражении энергия не поглощается и что угол отражения равен углу падения.

Что касается изменения скорости, то оно связано с задержкой переднего фронта принимаемого УЗ импульса. Если используется продольная зондирующая волна, то после каждого отражения от дефекта возникает как отраженная продольная, так и отраженная поперечная волна. При этом скорость продольной примерно в 2 раза больше поперечной. Следовательно, в любой момент времени передний фронт приходящего на датчик импульса соответствует продольной волне. С физической точки зрения естественно, что с увеличением числа дефектов остается все меньше лучей свободного пролета (без переотражений). При этих условиях «кажущаяся» скорость УЗ импульса вычисляется в виде

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 t_s / L}, \quad (7)$$

где v_0 — скорость в среде без дефектов, L — расстояние между преобразователями, t_s — задержка переднего фронта импульса. Пример уменьшения скорости прохождения УЗ пучка с ростом числа трещин показан на рисунке 2.

Иная трактовка применяется в оценке затухания УЗ импульса, которое мы опять-таки вычисляем через амплитуду принимаемой датчиком УЗ продольной

волны. При каждом отражении амплитуда отраженного сигнала уменьшается в $R(\theta)$ раз, где значение коэффициента отражения $R : 0 < R < 1$ зависит от угла падения, вычисленного как угол между направлением падающего луча и нормалью \bar{n} к поверхности отражения. Для вычисления этого коэффициента отражения заметим, что локально он определяется из классической задачи об отражении плоской падающей волны от свободной границы упругого полупространства [3].

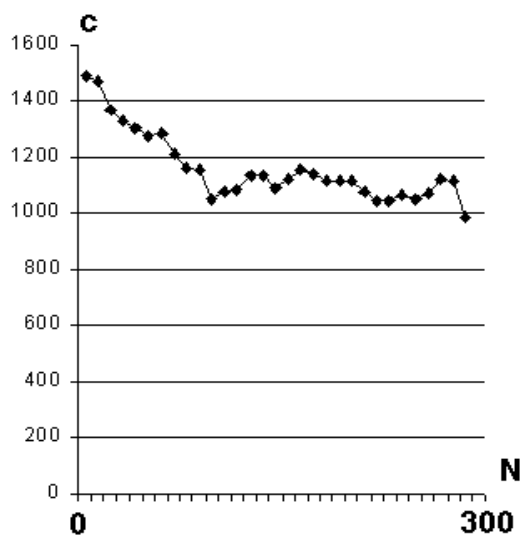


Рисунок 2 – Пример зависимости скорости распространения УЗ пучка от числа трещин

Работа выполнена при поддержке внутреннего гранта ЮФУ, № НИР 213.01-24/2013-76.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
- [2] Tourin A. et al. Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagation in a multiple scattering medium // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 108. P. 191–202.
- [3] Бреховских Л. М. А. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.

Sumbatyan M. A. *Theoretical and experimental methods in the problem of Ultrasonic beam transmission through elastic media with arrays of micro-defects.* We study deterministic macroscopic approaches to strength analysis on the basis of ultrasonic (US) through-transmission method applied to elastic media with arrays of micro-defects. The strength properties are studied from an estimate of the US wave package passage through an elastic sample containing a stochastic array of micro-defects. We evaluate the concept of «seeming wave velocity», which is intensively used by the authors of the known experimental works. The theoretical estimates are tested by model experiments, performed with sets of artificially produced defects stochastically distributed.

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ДВУХ ТОНКИХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИЛИ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Тарлаковский Д. В.^{1,2}, Федотенков Г. В.²

¹Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

²Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)

Рассматриваются нестационарные контактные задачи с подвижными границами для двух упругих цилиндрических или сферических оболочек типа Тимошенко. С помощью принципа суперпозиции получена система разрешающих уравнений. Найдены функции влияния оболочек в виде разложений в ряды Фурье. Построен и реализован численно-аналитический алгоритм решения.

Постановка задачи. Рассматриваются нестационарные контактные задачи с подвижными границами для двух тонких упругих круговых цилиндрических или сферических оболочек. В начальный момент времени одна из оболочек (основание) неподвижна, а другая (ударник) движется с некоторой начальной скоростью V_0 , вектор которой направлен вдоль линии, соединяющей центры тяжести оболочек. Оболочки предполагаются имеющими одинаковую толщину и радиус. В случае двух цилиндрических оболочек первоначально контакт происходит вдоль образующей граничных поверхностей, а сами оболочки предполагаются бесконечно длинными, что приводит к плоской постановке задачи. В случае сферических оболочек область контакта первоначально совпадает с точкой касания полюсов оболочек. В этом случае задача рассматривается в осесимметричной постановке. Предполагается, что контакт происходит в условиях свободного проскальзывания. Область контакта изменяется во время взаимодействия, и положение ее границы определяется в процессе решения задачи (рисунок 1). При решении задачи используется система безразмерных величин. Штрихом обозначены размерные параметры.

$$\begin{aligned} u &= \frac{u'}{R}, \quad w = \frac{w'}{R}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{R}, \quad \gamma = \frac{h}{12R}, \quad \eta^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \\ p &= \frac{p'}{2\sqrt{3}(\lambda + 2\mu)\gamma}, \quad q = \frac{q'}{2\sqrt{3}(\lambda + 2\mu)\gamma}, \quad V_0 = \frac{V_0'}{c_1} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, w — касательные и нормальные перемещения оболочек; t, τ — размерное и безразмерное время; R, h — радиус и толщина оболочек; λ, μ — параметры Ламе материала оболочек; p, q — внешнее касательное и нормальное давление; $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$ — квадраты скоростей волн растяжения-сжатия и сдвига в материале оболочек; ρ — плотность материала оболочек.

Движение оболочек описывается уравнениями в форме С. П. Тимошенко, учитывающими сдвиг и инерцию материальных волокон, нормальных к срединной

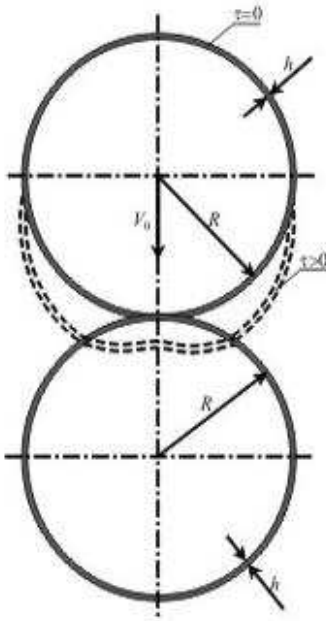


Рисунок 1 (слева) – Иллюстрация к постановке задачи

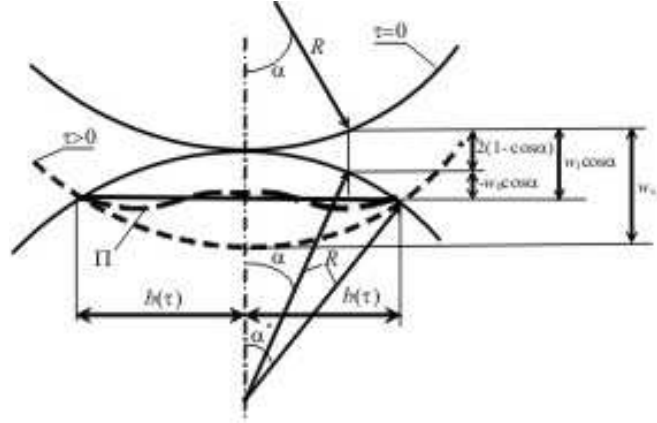


Рисунок 2 (вверху) – Область контакта

поверхности [1]. При этом как в случае плоской задачи для цилиндрических оболочек, так и в случае осесимметричной задачи для сферических оболочек, используется полярная система координат с центром, совпадающим с центром тяжести оболочек и углом α (рисунок 1). Следовательно, все заданные и искомые функции в обеих задачах предполагаются зависящими только от угла α и времени. С учетом геометрических, физических соотношений [1] и безразмерных величин (1) уравнения движения оболочек в перемещениях принимают вид (здесь и далее индекс $\beta = 1$ соответствует случаю круговой цилиндрической, а $\beta = 2$ — сферической оболочки; величины с индексом $m = 0$ относятся к основанию, а с индексом $m = 1$ — к ударнику, точка — производная по безразмерному времени τ)

$$\ddot{\mathbf{w}}_{m,\beta} = \mathbf{L}_\beta \mathbf{w}_{m,\beta} + \mathbf{q}_{m,\beta}, \quad (2)$$

$$\mathbf{w}_{m,\beta} = \{u_{m,\beta}, w_{m,\beta}, \chi_{m,\beta}\}^T, \quad \mathbf{L}_\beta = (L_{ij,\beta})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{q}_{m,\beta} = \{p_{m,\beta}, q_{m,\beta}, 0\}^T.$$

Здесь χ — угол поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций. $L_{ij,\beta}$ — дифференциальные операторы, которые с учетом того, что $\gamma^2 \ll 1$ имеют следующий вид ($k^2 = 5/6$).

Для цилиндрической оболочки:

$$L_{11,1} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \eta^2 k^2, \quad L_{12,1} = (1 + \eta^2 k^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{13,1} = -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 k^2,$$

$$L_{21,1} = -L_{12,1}, \quad L_{22,1} = -\eta^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1, \quad L_{23,1} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

$$L_{31,1} = -\gamma^2 L_{13,1}, \quad L_{32,1} = (1 + \eta^2 k^2 \gamma^{-2}) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{33,1} = -L_{31,1}$$

Для сферической оболочки:

$$\begin{aligned}
 L_{11,2} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \eta^2 k^2, \quad L_{12,2} = [(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2] \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
 L_{13,2} &= -\gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha \right) + \left[\gamma^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 2\eta^2 \right) + \eta^2 k^2 \right], \\
 L_{21,2} &= -[(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2] \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \right), \\
 L_{22,2} &= \eta^2 k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha \right) - 4(1 - \eta^2), \\
 L_{23,2} &= \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha, \quad L_{31,2} = -\gamma^2 L_{13,2}, \\
 L_{32,2} &= [2(1 - \eta^2) - \eta^2 k^2 \gamma^{-2}] \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{33,2} = -L_{31,2}
 \end{aligned}$$

Область контакта Π в линейной постановке задачи [2] заменяется отрезком длины $2b(\tau)$, соединяющим точки пересечения недеформированных срединных поверхностей оболочек (рисунок 2).

$$b(\tau) = \frac{\sqrt{w_{s1}(\tau)[4 - w_{s1}(\tau)]}}{2} \quad (3)$$

Здесь $w_{s1}(\tau)$ — перемещение ударника как абсолютно твердого тела.

Перемещение $w_{s1}(\tau)$ определяется из решения уравнения движения ударника как абсолютно твердого тела:

$$m_\beta \ddot{w}_{s1}(\tau) = Q_\beta(\tau), \quad w_{s1}(0) = 0, \quad \dot{w}_{s1}(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь $m_\beta = m'_\beta / (2\sqrt{3}\gamma\rho R^{1+\beta})$ — безразмерная масса оболочки (m'_β — соответствующая размерная масса). $Q_\beta(\tau)$ — результирующая контактного давления, которая вычисляется по формулам:

$$Q_1(\tau) = 2 \int_0^{\alpha^*(\tau)} q(\alpha, \tau) \cos(\alpha) d\alpha, \quad Q_2(\tau) = \pi \int_0^{\alpha^*(\tau)} q(\alpha, \tau) \sin(2\alpha) d\alpha,$$

Линеаризованные граничные условия с учетом свободного проскальзывания записываются так:

$$\begin{aligned}
 w_{1,\beta} \cos \alpha + w_{0,\beta} \cos \alpha &= 2(1 - \cos \alpha), \quad |\alpha| \in [0, \alpha^*], \quad \alpha^* = \arcsin b(\tau), \\
 q_{0,\beta} &= q_{1,\beta}, \quad |\alpha| \in [0, \alpha^*], \quad q_{0,\beta} = q_{1,\beta} = 0, \quad |\alpha| \notin [0, \alpha^*], \\
 p_{0,\beta} &= p_{1,\beta} = 0, \quad |\alpha| \in [0, \pi]
 \end{aligned} \quad (5)$$

Замыкают постановку задачи начальные условия:

$$\begin{aligned}
 u_{0,\beta}|_{\tau=0} &= w_{0,\beta}|_{\tau=0} = \chi_{0,\beta}|_{\tau=0} = u_{1,\beta}|_{\tau=0} = w_{1,\beta}|_{\tau=0} = \chi_{1,\beta}|_{\tau=0} = 0, \\
 \dot{u}_{0,\beta}|_{\tau=0} &= \dot{w}_{0,\beta}|_{\tau=0} = \dot{\chi}_{0,\beta}|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}_{1,\beta}|_{\tau=0} = -V_0 \sin \alpha, \quad \dot{w}_{1,\beta}|_{\tau=0} = -V_0 \cos \alpha.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Метод и алгоритм решения. Задача редуцируется к нулевым начальным условиям с помощью формул (знак « \sim » в дальнейшем опускается)

$$u_{1,\beta} = \tilde{u}_{1,\beta} - V_0\tau \sin \alpha, \quad w_{1,\beta} = \tilde{w}_{1,\beta} - V_0\tau \cos \alpha$$

при этом первое граничное условие в (3) преобразуется к виду

$$w_{1,\beta} \cos \alpha + w_{0,\beta} \cos \alpha = 2(1 - \cos \alpha) - V_0\tau \cos \alpha, \quad |\alpha| \in [0, \alpha^*]. \quad (7)$$

Основываясь на принципе суперпозиции [1, 2], нормальные перемещения ударника и основания связаны с контактным давлением посредством интегральных операторов:

$$w_{m,\beta} = J_\beta(q)$$

$$J_1(q) = \int_0^\tau \int_0^{\alpha^*(t)} G_{2,1}(\alpha - \vartheta, \tau) q(\vartheta, t) d\vartheta dt, \quad (8)$$

$$J_2(q) = \int_0^\tau \int_0^{\alpha^*(t)} G_{2,2}(\alpha, \vartheta, \tau) q(\vartheta, t) d\vartheta dt.$$

Здесь $G_{2,\beta}$ — функции влияния оболочек, которые представляют собой нормальные перемещения как решения следующих задач

$$\ddot{\mathbf{G}}_\beta = \mathbf{L}_\beta \mathbf{G}_\beta + \mathbf{q}_\beta, \quad \mathbf{G}_\beta = \{G_{1,\beta}, G_{2,\beta}, G_{3,\beta}\}^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{q}_1 = \{0, \delta(\alpha) \delta(\tau), 0\}^T, \quad \mathbf{q}_2 = \{0, \delta(\alpha - \vartheta) \delta(\tau), 0\}^T.$$

Тогда из (7) и (8) вытекает двумерное интегральное уравнение

$$2J_\beta(q) = 2(1 - \cos \alpha) - V_0\tau \cos \alpha. \quad (10)$$

которое дополняется до замкнутой системы уравнением (3) и задачей (4), которая эквивалентна интегральному уравнению

$$w_{s1}(\tau) = V_0\tau + \frac{1}{m_\beta} \int_0^\tau Q_\beta(t) (\tau - t) dt. \quad (11)$$

Функции влияния как решения задач (9) определяются с помощью метода разделения переменных. Представим функции $G_{1,\beta}$, $G_{2,\beta}$, $G_{3,\beta}$ и контактное давление в виде рядов Фурье по тригонометрической системе функций (цилиндрические оболочки) или по полиномам Лежандра и Гегенбауэра (сферические оболочки)

$$\begin{pmatrix} G_{1,\beta} \\ G_{3,\beta} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{n1,\beta}(\tau) \\ G_{n3,\beta}(\tau) \end{pmatrix} \varphi_{n,\beta}(\alpha), \quad \begin{pmatrix} G_{2,\beta} \\ q_\beta \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{n2,\beta}(\tau) \\ q_{n,\beta}(\tau) \end{pmatrix} \psi_{n,\beta}(\alpha) \quad (12)$$

$$q_{n,1}(\tau) = 1/\pi \delta(\tau), \quad q_{n,2}(\tau) = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta) \delta(\tau).$$

где $\varphi_{n,1} = \sin n\alpha$, $\psi_{n,1} = \cos n\alpha$, $\psi_{n,2} = P_n(\cos \alpha)$ и $\varphi_{n,2} = C_{n-1}^{3/2}(\cos \alpha)$ — полиномы Лежандра и Гегенбауэра.

Подстановка разложений (11) в (9) приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов (12) зависящих от времени, решения которых строятся с помощью прямого и обратного интегрального преобразования Лапласа.

Для решения системы (3), (10), (11) разработан и реализован алгоритм, основанный на методе механических квадратур. На пространственно-временную область $D = \{(\vartheta, t) : \vartheta \in [0, \alpha^*(t)], t \in [0, \tau]\}$ наносится сетка с постоянным шагом по угловой координате ϑ и времени t . Искомым функциям $q(\vartheta, t)$, $\alpha^*(t)$ и $w_{s1}(t)$ ставятся в соответствие их сеточные аналоги со значениями в узлах сетки. На каждом временном шаге с использованием квадратурных формул для интегралов, входящих в (10) задача сводится к решению алгебраической системы уравнений относительно узловых значений контактного давления. Затем с помощью квадратурных формул для интегралов в (11) определяется глубина проникания w_{s1} на следующем временном шаге и угловой размер области контакта α^* из уравнения (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 13-08-01051 и гранта ФЦП (соглашение № 14.В37.21.0381 от 02.08.2012).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 467 с.
- [2] Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Физматлит, 2004. 467 с.

Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. *Dynamic contact problems with moving boundaries for two thin elastic cylindrical or spherical shells.* Non-stationary contact problems with moving boundaries for two elastic cylindrical or spherical Timoshenko type shells are considered. By means of the principle of superposition the system of the allowing equations is received. Functions of influence of shells in the form of decomposition in Fourier's series are found. The numerical and analytical algorithm of the decision is constructed and realized.

ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Углич П. С.

Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А, Владикавказ

Рассмотрена задача о плоских вынужденных колебаниях упругого слоя, механические параметры которого являются функциями поперечной координаты. Выведено уравнение для решения обратной задачи об определении механических параметров слоя по характеру волнового поля на его поверхности. Приведены численные результаты его решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругий слой, занимающий область $\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq h\}$, находящийся в состоянии установившихся колебаний. Плоские колебания описываются уравнением:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \rho\omega^2 u_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где ω — частота колебаний, ρ — плотность слоя, u_i — перемещения, а σ_{ij} — напряжения, которые удовлетворяют закону Гука в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1}, \\ \sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \\ \sigma_{22} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2}. \end{cases} \quad (2)$$

Будем считать, что плотность и механические параметры слоя являются функциями поперечной координаты: $\rho = \rho(x_2)$, $\lambda = \lambda(x_2)$, $\mu = \mu(x_2)$.

Нижняя поверхность слоя жёстко закреплена, а верхняя свободна от напряжений:

$$u_1(x_1, 0) = u_2(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = p(x_1). \quad (3)$$

Переходим к безразмерным переменным по формулам

$$x_i = h\bar{x}_i, \quad u_i = h\bar{u}_i, \quad \sigma_{ij} = \mu(0)\bar{\sigma}_{ij}, \quad \mu = \mu(0)\bar{\mu}, \quad \lambda = \mu(0)\bar{\lambda}, \quad \rho = \rho(0)\bar{\rho}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho(0)\omega^2 h^2}{\mu(0)}.$$

Надчёркнутые переменные — безразмерные (знак надчёркивания в дальнейшем опускаем).

2. Решение прямой и обратной задач. Применяя интегральное преобразование Фурье в виде

$$\tilde{u}_j(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_j(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

к (1)–(3) и исключая $\tilde{\sigma}_{11}$, получаем систему в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \tilde{u}'_1 = i\alpha\tilde{u}_2 + \frac{\tilde{\sigma}_{12}}{\mu}, \\ \tilde{u}'_2 = \frac{i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + \tilde{\sigma}_{22}}{\lambda + 2\mu}, \\ \tilde{\sigma}'_{12} = \left[4\alpha^2\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} - \kappa_2^2 \right] \tilde{u}_1 + \frac{i\alpha\lambda\tilde{\sigma}_{22}}{\lambda + 2\mu}, \\ \tilde{\sigma}'_{22} = -\rho\omega^2\tilde{u}_2 + i\alpha\tilde{\sigma}_{12}. \end{cases} \quad (4)$$

Прямая задача может быть решена путём решения краевой задачи для системы (4) с крайевыми условиями (3) с последующим численным обращением преобразования Фурье аналогично [1].

Перейдём к решению обратной коэффициентной задачи. Введём обозначения: $U_1 = \tilde{u}_1$, $U_2 = \tilde{u}_2$, $U_3 = \tilde{\sigma}_{12}$, $U_4 = \tilde{\sigma}_{22}$. Разложим искомую функцию и функции, описывающие изменение механических параметров в ряд по ε .

$$\lambda(x_2) = \lambda_0(x_2) + \varepsilon\lambda_1(x_2) + \dots, \quad \mu(x_2) = \mu_0(x_2) + \varepsilon\mu_1(x_2) + \dots, \quad (5)$$

$$\rho(x_2) = \rho_0(x_2) + \varepsilon\rho_1(x_2) + \dots, \quad U_i(\alpha, x_2) = U_i^0(\alpha, x_2) + \varepsilon U_i^1(\alpha, x_2) + \dots$$

Собирая слагаемые при различных степенях ε , получаем две краевые задачи вида:

$$\begin{cases} [U_1^0]' = i\alpha U_2^0 + \frac{U_3^0}{\mu_0}, \\ [U_2^0]' = \frac{i\alpha\lambda_0 U_1^0 + U_4^0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \\ [U_3^0]' = \left[4\alpha^2\frac{\mu_0(\lambda_0 + \mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} - \rho_0\omega^2 \right] U_1^0 + \frac{i\alpha\lambda_0 U_4^0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \\ [U_4^0]' = -\rho_0\omega^2 U_2^0 + i\alpha U_3^0, \\ U_1^0(\alpha, 0) = U_2^0(\alpha, 0) = U_3^0(\alpha, 1) = 0, \quad U_4^0(\alpha, 1) = \tilde{p}(\alpha). \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} [U_1^1]' = i\alpha U_2^1 + \frac{U_3^1}{\mu_0} + F_1(x_2), \\ [U_2^1]' = \frac{i\alpha\lambda_0 U_1^1 + U_4^1}{\lambda_0 + 2\mu_0} + F_2(x_2), \\ [U_3^1]' = \left[4\alpha^2\frac{\mu_0(\lambda_0 + \mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} - \rho_0\omega^2 \right] U_1^1 + \frac{i\alpha\lambda_0 U_4^1}{\lambda_0 + 2\mu_0} + F_3(x_2), \\ [U_4^1]' = -\rho_0\omega^2 U_2^1 + i\alpha U_3^1 + F_4(x_2), \\ U_1^1(\alpha, 0) = U_2^1(\alpha, 0) = U_3^1(\alpha, 1) = U_4^1(\alpha, 1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

где введены обозначения:

$$F_1(x_2) = -\frac{\mu_1}{\mu_0^2} U_3^0, \quad F_2(x_2) = \frac{i\alpha}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left[2\frac{\mu_0(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_0 + 2\mu_0} - 2\mu_1 \right] U_1^0 - \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{(\lambda_0 + 2\mu_0)^2} U_4^0,$$

$$F_3(x_2) = \left\{ \frac{4\alpha^2}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left[\lambda_0\mu_1 + \frac{\mu_0^2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \right] - \rho_1\omega^2 \right\} U_1^0 + \frac{i\alpha}{\lambda_0 + 2\mu_0} \left[2\frac{\mu_0(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_0 + 2\mu_0} - 2\mu_1 \right] U_4^0,$$

$$F_4(x_2) = -\rho_1 \omega^2 U_2^0.$$

Решим задачу при ε^0 . Введём вспомогательные функции $V_1^j(x_2)$, удовлетворяющие уравнению задачи (6) с начальными условиями $V_i^j(0) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Решение краевой задачи (6) строится в виде:

$$U_i^0 = -\tilde{p}(\alpha) \frac{V_3^4(1)V_i^3(x_2) - V_3^3(1)V_i^4(x_2)}{\Delta(1)}, \quad \Delta(1) = V_3^3(1)V_4^4(1) - V_3^4(1)V_4^3(1). \quad (8)$$

Для того, чтобы построить решение задачи (7), воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Построим решение в виде:

$$U_i^1 = \sum_{k=1}^4 C_k(x_2) V_i^k(x_2). \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнения краевой задачи (6), получаем:

$$\sum_{j=1}^4 C'_j(x_2) V_i^j(x_2) = F_i(x_2), \quad i = 1 \dots 4 \quad (10)$$

Определитель матрицы системы (10) тождественно равен единице. Решая систему относительно C'_i , находим:

$$C'_i = \sum_{j=1}^4 F_j(x_2) A_{ji}(x_2),$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения матрицы системы (10). Решение краевой задачи (7), удовлетворяющее граничным условиям при $x_2 = 0$, строится в виде:

$$U_i^1 = \sum_{j=1}^4 \int_0^{x_2} F_j(\xi) \Delta_{ij}(x_2, \xi) d\xi + C V_i^3(x_2) + D V_i^4(x_2), \quad (11)$$

$$\Delta_{ij}(x_2, \xi) = \sum_{k=1}^4 V_i^k(x_2) A_{jk}(\xi).$$

Удовлетворяя (11) граничным условиям при $x_2 = 1$, находим C и D . Подставим их в (11). Найдём U_1^1 и U_2^1 при $x_2 = 1$. После некоторых преобразований получим:

$$U_1^1 = \int_0^1 [F_1(\xi) G_{31}(\alpha, \xi) - F_2(\xi) G_{41}(\alpha, \xi) - F_3(\xi) G_{11}(\alpha, \xi) + F_4(\xi) G_{21}(\alpha, \xi)] d\xi, \quad (12)$$

$$U_2^1 = - \int_0^1 [F_1(\xi) G_{32}(\alpha, \xi) - F_2(\xi) G_{41}(\alpha, \xi) - F_3(\xi) G_{12}(\alpha, \xi) + F_4(\xi) G_{22}(\alpha, \xi)] d\xi, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$G_{i1} = \tilde{p}(\alpha) \frac{V_4^4(1)V_i^3(x_2) - V_3^4(1)V_i^4(x_2)}{\Delta(1)}, \quad G_{i2} = -\tilde{p}(\alpha) \frac{V_3^4(1)V_i^3(x_2) - V_3^3(1)V_i^4(x_2)}{\Delta(1)}.$$

Предположим, что упругие модули λ и μ — известны и постоянны, а плотность ρ — переменная. В этом случае

$$F_3(x_2) = -\rho_1 \omega^2 U_1^0 = \rho_1 \omega^2 G_{12}(\alpha, x_2), \quad F_4(x_2) = -\rho_1 \omega^2 U_2^0 = \rho_1 \omega^2 U_2^0 G_{12}(\alpha, x_2),$$

и представление (13) после обращения преобразования Фурье принимают вид:

$$u_1^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \rho_1(\xi) d\xi \int_{\sigma} \tilde{p}(\xi) [G_{12}(\alpha, \xi)G_{11}(\alpha, \xi) - G_{22}(\alpha, \xi)G_{21}(\alpha, \xi)] e^{-i\alpha x_1} d\alpha \quad (14)$$

$$u_2^1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \rho_1(\xi) d\xi \int_{\sigma} \tilde{p}(\xi) [G_{12}^2(\alpha, \xi) - G_{22}^2(\alpha, \xi)] e^{-i\alpha x_1} d\alpha \quad (15)$$

Соотношения (14) и (15) использованы при построении итерационного процесса для отыскания $\rho(x_2)$.

В начале итерационного процесса выбираем некоторое постоянное начальное приближение ρ_0 . Решая систему (4) и обращая преобразование Фурье, находим u_1^1, u_2^1 . Затем, считая u_1^1 и u_2^1 равным разности между наблюдаемым полем перемещений и полем перемещений u_1^0 и u_2^0 , решаем уравнение (14) (или (15)) и находим ρ_1 .

Добавляя найденную поправку ρ_1 к функции ρ_0 , повторяем процедуру до тех пор, пока очередная поправка ρ_1 не станет пренебрежимо мала или количество итераций не превысит некоторое наперед заданное количество. Также критерием выхода из цикла может служить условие малости нормы разности между наблюдаемым полем смещений и полем смещений, найденным на очередной итерации. Аналогично можно построить итерационные процессы для отыскания упругих констант.

3. Численные результаты. Далее приведены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению неизвестной плотности. В качестве исходных данных служила вещественная часть вертикального перемещения U_2 на отрезке верхней поверхности $[c, d]$ и итерационный процесс построен на основе уравнения (15). При вычислении ядер и правых частей законы распределения механических характеристик аппроксимировались ломаной. Интегралы в уравнении (15) заменялись конечной суммой по формуле Симпсона. Для решения итерационных уравнений использован метод регуляризации Тихонова [2], система линейных алгебраических уравнений, полученная при дискретизации регуляризованного уравнения, решалась при помощи метода Воеводина с автоматическим подбором параметра регуляризации по невязке [3].

На рисунках 1–2 приведены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению плотности. В качестве исходной информации для восстановления плотности служила информация о вещественной части вертикального перемещения на

отрезке $[0, 1]$, нагрузка сосредоточена в начале координат: $p(x_1) = \delta(x_1)$, значения параметров следующие: коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, волновое число $\kappa_2 = 1$. Итерационный процесс прекращался, когда евклидова норма разности между наблюдаемым полем перемещений, и полем, соответствующим ρ_0 , не становилась меньше 10^{-4} . По оси абсцисс всюду изображена координата x_2 , по оси ординат — величина $\rho^{-1}(0) [\rho(x_2) - \rho(0)]$.

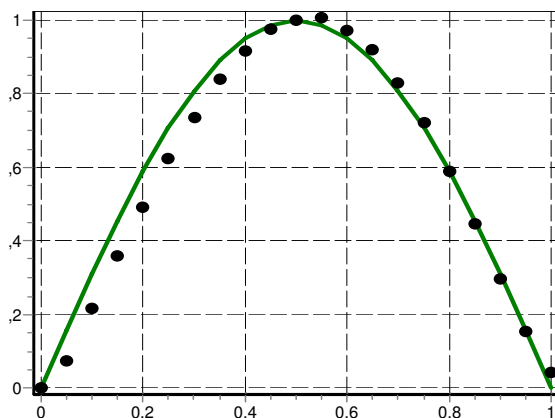


Рисунок 1 — Результаты восстановления плотности в случае $\rho(x_2) = \rho(0) (1 + \sin \pi x_2)$. Для восстановления потребовалось 23 итерации

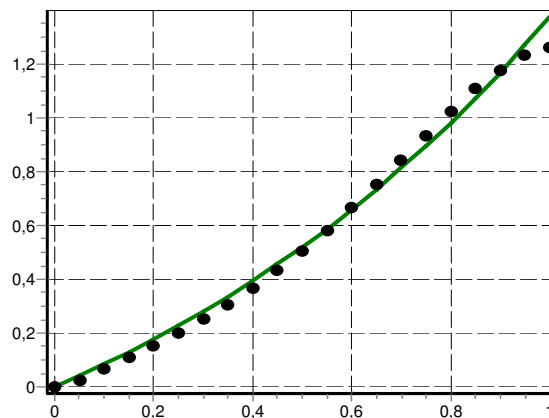


Рисунок 2 — Результаты восстановления плотности в случае $\rho(x_2) = 0,8\rho(0)e^{x_2}$. Для восстановления потребовалось 29 итераций

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №12-01-3150), а также Южного федерального университета.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Абрамович М. В., Углич П. С.* Обратные коэффициентные задачи для поперечно-неоднородного упругого слоя // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XVI международной конференции. г. Ростов-на-Дону, 16–19 октября 2012 г., Т. 2., С. 6–10.
- [2] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986., 284 с.
- [3] *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов А. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с

Uglich P. S. *An inverse coefficient problem for the elastic layer.* The problem of the forced plane vibration of the elastic layer is considered. Mechanical parameters of the layer are function of the transversal coordinate. Integral equations for the inverse coefficient problem of the mechanical parameters reconstruction using displacement field data are derived. Results of their numeric solution are demonstrated.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗНЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Федотов В. П.

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Предложена термодинамическая модель диаграммы нагружения, как открытой системы, имеющей критические точки фазового перехода второго рода с образованием диссипативных структур (по И. Пригожину) и потери устойчивости на стадии превалирования вращательных мод необратимых деформаций и образования внутренних микронесплошностей. Ресурс деформирования образца (материальной точки) определяется упругим потенциалом на первой стадии деформации, диссипативной функцией образования необратимых дислокационных структур и структур определяемых накоплением поврежденности на второй стадии. Предложен метод решения связанных задач, независимый от величины представительного объема сплошной среды.

Физическое моделирование. Для мониторинга сложных систем в реальных условиях необходимо знание текущих физико-механических характеристик. Например, для анализа прочности необходимы феноменологические уравнения связи напряжений деформаций, температуры, концентрации легирующих элементов и т. п. Но получение их экспериментальными методами в действующей конструкции трудоемко, а зачастую, невозможно. Дальнейшее изложение основано на предположении о невозможности получения физико-механических характеристик и введения понятий устойчивости, разрушения, ресурса и т. п. в рамках замкнутой системы, поскольку они напрямую связаны с характером обмена с внешней средой. Феноменологические соотношения взаимности связанных задач могут быть сформулированы в рамках открытых неравновесных систем на основе подхода Онзагера для связанных физико-механических задач, согласно которому устанавливается связь между обобщенными потоками J_l и обобщенными силами X_l

$$J_k = L_{km}X_m.$$

Как гипотезу, имеющую подтверждение на практике, примем, что коэффициенты взаимности L_{km} , линейные по Онзагеру, могут зависеть от обобщенных сил $L_{km} = L_{km}(X_m)$. Произведение обобщенных сил X_l и обобщенных потоков J_l представляет собой скорость роста энтропии \dot{S} в изолированной системе [2]. Если система открытая, то уравнение сохранения энергии имеет вид

$$\frac{d\Lambda}{dt} = T\dot{S} = TX_eJ_e + TX_iJ_i = 0, \quad (1)$$

параметр T имеет смысл температуры, индексы e и i означают соответственно внешние и внутренние силы и потоки. Здесь Λ называется функцией Ляпунова или энергетической функцией. В изолированной системе положительно определенная функция Λ имеет согласно (1) знакоотрицательную производную, а движение системы, соответствующей Λ , устойчиво. Тогда как фазовый переход от упругости

к пластичности и, в дальнейшем, разрушение связано с потерей устойчивости. Поэтому для их описания необходимо рассматривать открытую систему.

Рассмотрим физическое моделирование на примере процесса деформирования. Будем рассматривать деформированный образец как открытую систему. В качестве внутренней обобщенной силы X_i будет выступать деформация образца ε/T , в качестве внутреннего обобщенного потока J_i — внутреннее напряжение σ . В качестве обобщенного внешнего потока J_e возьмем внешнее напряжение σ_p . Отметим, что отождествление внешнего σ_p и внутреннего σ напряжений нет. Следуя Коши, будем считать, что в упругой области коэффициент Онзагера зависит от обобщенной силы следующим образом

$$L(\varepsilon) = E(1 - k\varepsilon + m\varepsilon^2). \quad (2)$$

В этом случае условие сохранения энергии (1) приводит к кубической модели $\sigma \sim \varepsilon$, которая включает внешнее напряжение σ_p и исследования этой системы можно осуществить методами синергетики [3]. Схематично, отклик системы на внешнее воздействие представлен на рисунке 1, при различных значениях параметров модели k и m в (2).

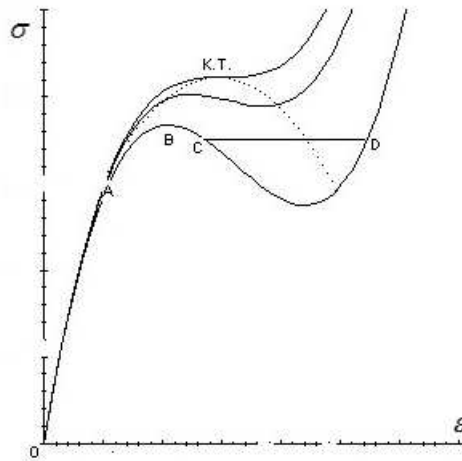


Рисунок 1 — Упругий отклик системы на внешнее воздействие

Здесь к. т. — критическая точка. Если внешнее напряжение выше напряжения в этой точке — хрупкое разрушение. АВ — метастабильное состояние, где возможен фазовый переход второго рода с образованием диссипативных структур [1], ВС — неустойчивый участок, на котором возможен перескок на другую устойчивую ветвь, CD — «площадка текучести», ABC — «зуб текучести».

Для построения модели диссипативного процесса будем постулировать аддитивность процесса дислокационного упрочнения и разупрочнения от образования пространственных дефектов несплошностей [4], т. е. диаграмму представим в виде

$$\sigma = \sigma_\tau + \frac{(\sigma_1 - \sigma_\tau)\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_\tau}}{\sqrt{\varepsilon_b - \varepsilon_\tau}} - \frac{(\sigma_2 - \sigma_\tau)(\varepsilon - \varepsilon_\tau)^2}{(\varepsilon_b - \varepsilon_\tau)^2}. \quad (3)$$

Здесь σ_T — предел текучести, σ_b — временное сопротивление, ε_T и ε_b — соответствующие им деформации, σ_1 σ_2 — значения напряжений, соответствующих деформации при отсутствии в первом случае — разупрочнения, во втором случае — упрочнения. Второе слагаемое правой части отражает известный из физики металлов механизм дислокационного упрочнения, для которого справедлива параболическая связь напряжений и плотности дислокаций, которая, в свою очередь, линейно связана со сдвиговыми деформациями $\rho \sim \varepsilon$, третье слагаемое является решением линейного кинетического уравнения накопления поврежденности.

Для определения σ_1 , σ_2 используются обычно два очевидных условия

$$\sigma(\varepsilon_B) = \sigma_B, \quad \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_B} = 0,$$

из которых следует $\sigma_1 = \frac{1}{3}(4\sigma_B - \sigma_T)$, $\sigma_2 = \frac{1}{3}(\sigma_B - 2\sigma_T)$. Таким образом, диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ определяется двумя физически ясными величинами.

Рассмотрим моделирование диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ стали X70 при следующих исходных данных: внешнее напряжение $\sigma_p = 590$ МПа предел текучести $\sigma_T = 430$ МПа, временное сопротивление $\sigma_b = 636.75$ МПа, деформация временного сопротивления $\varepsilon_B = 11.455$ %. На рисунке 2 показано сравнение модели и эксперимента.

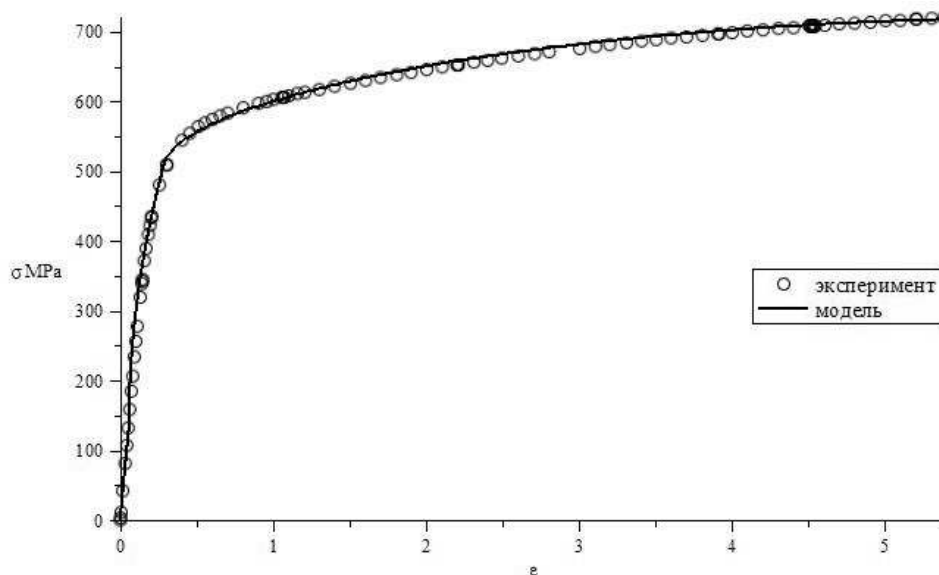


Рисунок 2 – Диаграмма стали X70

Деформационный ресурс и разрушение. Согласно предлагаемой модели поведение образца (материальной точки) определяется внешним воздействием и внутренним откликом материала на каждой стадии. Под разрушением материала в точке будем понимать критическую ситуацию, когда энергия внешнего воздействия сравнивается с внутренним потенциальным и диссипативным энергетическим откликом материала. Текущий ресурс в каждый момент деформации будет определяться разностью энергий внешнего воздействия и внутренней реакции материала.

Энергия внешнего воздействия W_p контролируется. На первой стадии упругий потенциал определен формулой (2), тогда

$$\Psi_e = \int_0^\varepsilon E(1 - k\gamma + m\gamma^2) \gamma d\gamma = \frac{E\varepsilon^2}{2} - \frac{Ek\varepsilon^3}{3} + \frac{Em\varepsilon^4}{4}.$$

На второй стадии действуют два диссипативных механизма, которые определяются формулой (3), тогда энергетический отклик вычисляется по формуле

$$\Psi_{dis} = \int_{\varepsilon_{dis}}^\varepsilon \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^{1/2}} (\gamma - \varepsilon_T)^{1/2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_T}{(\varepsilon_B - \varepsilon_T)^2} (\gamma - \varepsilon_T)^2 \right] d\gamma.$$

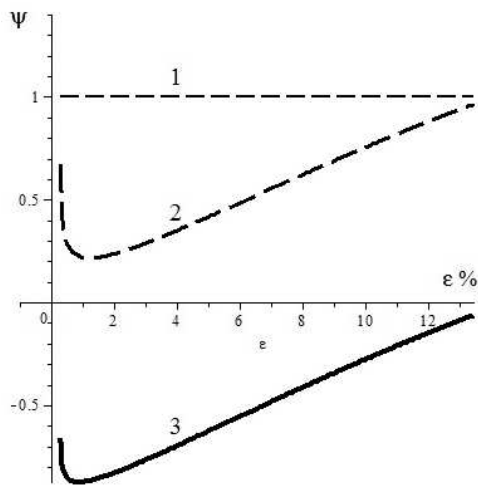


Рисунок 3 — остаточный ресурс: 1 — приведенная внешняя энергия, 2 — внутренний отклик, 3 — остаточный ресурс

метод граничных элементов [4]. Построение общего алгоритма для таких задач не представляется возможным, поэтому здесь рассматриваются алгоритмы решения базовых задач математической физики, конкретизация алгоритма для каждой реальной задачи требует отдельного рассмотрения.

Эллиптические задачи.

Решение линейной упругой задачи определяется интегральным соотношением

$$u_i(\xi) = \int_{S_f} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)] dS(x) + \int_{S_u} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j^*(x)] dS(x),$$

где $u_{ij}^*(\xi, x)$, $f_{ij}^*(\xi, x)$ — тензоры влияния, $u_j(x)$, f_j — поверхностные перемещения и напряжения, звездочкой обозначены известные величины. Разбивая границу области на элементы и устремляя внутреннюю точку ξ на границу, получим систему $2p$ разрешающих уравнений. Модификация заключается в аналитическом интегрировании тензоров влияния по базовому элементу OC (рисунок 4) с последующим аффинным преобразованием, например,

Текущий остаточный ресурс системы определяется разностью

$$\Psi_{res} = W_p - \Psi_e - \Psi_{dis}.$$

Уравнение $\Psi_{res} = 0$ позволяет определить значение деформации ε_{fr} , при котором произойдет разрушение. Отметим, разрушение может произойти на любой из рассматриваемых стадий, тогда соответствующие слагаемые отсутствуют. На рисунке 3 представлен ресурс деформирования, соответствующий свойствам материала по предлагаемой модели.

Математическое моделирование.

Для решения связанных физико-механических задач предлагается модифицированный

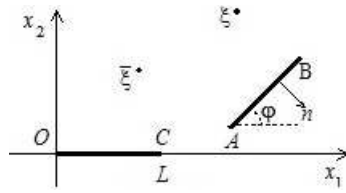


Рисунок 4 – Базовый элемент

Например, $\int_{OC} u_{ij}^*(\bar{\xi}, x) dS(x) = -\frac{1}{2} A_1 \bar{\xi}_2 (\ln(\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2) - \ln((\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2))$, $A_1 = -[8\pi\mu(1-\nu)]^{-1}$, где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Остальные значения интегралов приведены в [4]. Предлагаемый подход позволяет построить эффективную итерационную процедуру для учета нелинейности процесса, характерного для связанных задач. Формулировка задачи в обобщенном смысле, т. е. через граничные интегральные уравнения позволяет учитывать нелинейность только через изменение свободного вектора разрешающей системы, не меняя ее матрицы, что существенно экономит время счета. Действительно, так как в итерационном процессе интегралы по поверхности уже вычислены, изменяются только интегралы по области от известных функций.

Для параболических и гиперболических задач осуществляется такой же подход. Отличие заключается только в функциях влияния. Аналитические формулы интегралов от них для всех типов задач приведены в [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00516).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: ИЛ, 1960. 127 с.
- [2] Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. С. 301.
- [3] Томпсон Дж. М. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М., Мир. 1985. 256 с.
- [4] Федотов В. П., Сневак Л. Ф. Решение связанных диффузионно-деформационных задач на основе алгоритмов параллельного действия. Екатеринбург: УрО РАН. 2007. 172 с.

Fedotov V. P. *Mathematical modeling of coupled physical and mechanical process.* The thermodynamic model of the diagram of loading, as an open system with a critical point of phase transition with the formation of dissipative structures presented. The loss of stability under the action of rotating modes of irreversible deformation and the formation of internal micro defects considered resource deformation of the sample (material point) is determined by the elastic potential in the first stage of deformation, by the formation of irreversible dissipative function of dislocation structures and by the accumulation of damage in the second stage and by the accumulation of damage in the third stage of deformation.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШТАМПА И ТРЕХКОМПОНЕНТНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ

Чебаков М. И., Абрамович М. В., Колосова Е. М.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости о взаимодействии с учетом сил трения в области контакта абсолютно жесткого цилиндра (штампа) с внутренней поверхностью цилиндрического основания, состоящего из двух круговых цилиндрических слоев жестко соединенных между собой и с упругим пространством, при этом слои и пространство имеют различные упругие постоянные. На штамп действуют вертикальная сила и крутящий момент, направленный против часовой стрелки, при этом система штамп-основание находится в состоянии предельного равновесия. Для поставленной задачи с помощью программ аналитических вычислений впервые получено точное интегральное уравнение (ИУ) первого рода с ядром, представленным в явном аналитическом виде. Изучены основные свойства ядер ИУ, в том числе показано, что числитель и знаменатель символов ядра могут быть представлены в виде многочлена по произведениям степеней модулей сдвига слоев и полупространства. Изложена схема решения ИУ прямым методом коллокаций, которая позволяет получать решение задачи практически при любых значениях исходных параметров. Рассчитаны распределения контактных напряжений, размеры области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующих на него силы и момента в зависимости от геометрических и механических параметров слоев и пространства. Проведено сравнение результатов расчетов в частных случаях с ранее известными. Обзор публикаций, посвященных контактным задачам для многослойных оснований можно найти, например, в [1, 2]. Контактные задачи для однослойных и двухслойных цилиндрических оснований рассматривались ранее ([3, 4] и др.).

1. Постановка задачи. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) рассмотрим два цилиндрических слоя $R_1 \leq r \leq R_2$ и $R_2 \leq r \leq R_3$, которые жестко соединены между собой по границе $r = R_2$, а поверхность $r = R_3$ жестко соединена с упругим пространством $r \geq R_3$. Пусть в поверхность $r = R_1$ силой P вдавливается штамп в форме цилиндра радиуса $R_0 = R_1 - \Delta$ с точкой первоначального касания $\varphi = 0$, $r = R_1$, одновременно к штампу приложен момент M , уравновешенный силами трения в области контакта. Сила P направлена вдоль луча $\varphi = 0$, момент M направлен против часовой стрелки, а величина Δ мала. В результате приходим к решению интегрального уравнения (ИУ)

$$\int_{-\theta_1}^{\theta_2} q(t)k(t - \varphi)dt = \pi f(\varphi)(-\theta_1 \leq \varphi \leq \theta_2), k(y) = k_1(y) - \nu k_2(y) \quad (1)$$

$$k_1(y) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} L_1(k) \cos ky, k_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} L_2(k) \sin ky \quad (2)$$

Здесь $q(\varphi) = -\sigma_r^{(1)}(\varphi, R_1)$ — контактные напряжения, $-\theta_1 \leq \varphi \leq \theta_2$ — область контакта, G_i — модули сдвига, ν_i — коэффициенты Пуассона для слоев и пространства соответственно при $i = 1, 2, 3$,

$$A = \frac{A_1}{A_2} = L(0), \quad f(\varphi) = \frac{G_1}{R_1(1 - \nu_1)} [\delta \cos \varphi - \Delta(1 - \cos \varphi)], \quad \vartheta = \frac{1 - 2\nu_1}{2(1 - \nu_1)} \mu,$$

μ — коэффициент трения, δ — перемещение штампа в вертикальном направлении.

В (1)–(2) трансформанты L_1 и L_2 ядра ИУ получены с использованием программы аналитических вычислений Maple, имеют довольно громоздкую структуру, но позволяют изучить их основные свойства

Функции L_i представимы в виде $L_i(u) = L_{i1}(u)/L_{i2}(u)$, при этом $L_{12} = L_{22}$ и при $u \geq 2$ функции $L_{ji}(u)$ являются многочленами относительно приведенных модулей сдвига слоев и пространства $G_{j1} = G_j/G_1$

$$L_{ji}(u) = G_{31}^2 \eta_{02}^{ji}(u) + G_{21} G_{31} \eta_{11}^{ji}(u) + G_{21} G_{31}^2 \eta_{12}^{ji}(u) + G_{21}^2 \eta_{20}^{ji}(u) + G_{21}^2 G_{31} \eta_{21}^{ji}(u) + \\ + G_{21}^2 G_{31}^2 \eta_{22}^{ji}(u) + G_{21}^3 \eta_{30}^{ji}(u) + G_{21}^3 G_{31} \eta_{31}(u)^{ji} + G_{21}^4 \eta_{40}^{ji}(u) \quad (3)$$

Отметим, что здесь для $L_i(u)$ в общем случае не выполняются предельные переходы при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow 1$ соответственно к значениям $L_i(0)$ и $L_i(1)$ в отличие от случая $G_3 = \infty$ (два слоя на жестком основании), поэтому при $u = 1$ и $u = 0$ приведем их значения отдельно

$$L_{ji}(1) = G_{31}^2 \beta_{02}^{ji} + G_{21} G_{31} \beta_{11}^{ji} + G_{21} G_{31}^2 \beta_{12}^{ji} + G_{21}^2 \beta_{20}^{ji} + G_{21}^2 G_{31} \beta_{21}^{ji} + G_{21}^2 G_{31}^2 \beta_{22}^{ji} + \\ + G_{21}^3 \beta_{30}^{ji} + G_{21}^3 G_{31} \beta_{31}^{ji} + G_{21}^4 \beta_{40}^{ji} \quad (4)$$

$$A_i = L_{1i}(0) = G_{31} \kappa_{01}^i + G_{21} \kappa_{10}^i + G_{21} G_{31} \kappa_{11}^i + G_{21}^2 \kappa_{20}^i \quad (5)$$

Здесь найденные функции $\eta_{nm}^{ji}(u)$ и постоянные β_{nm}^{ji} , κ_{nm}^i содержат степенные и логарифмические функции, зависят только от коэффициентов Пуассона материала слоев и относительных радиусов $r_2 = R_2/R_1$, $r_3 = R_3/R_1$.

Полученные соотношения (3)–(4) позволяют исследовать свойства функций $L_i(u)$, в том числе и поведение на бесконечности

$$L_i(u) = (-1)^{i+1}/u + O(1/u^2) \quad (u \rightarrow \infty). \quad (6)$$

2. Решение интегрального уравнения. Учитывая соотношение (6), представим функции $L_i(u)$ в виде

$$L_i(u) = (-1)^{i+1} 1/u + K_i(u), \quad (7)$$

тогда ядро интегрального уравнения (7) примет вид

$$k(t) = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} K_1 \cos nt - \vartheta \sum_{k=1}^{\infty} L_2 \sin nt \quad (8)$$

Решение интегрального уравнения (1) с ядром (8) получим прямым методом коллокации, воспользовавшись результатами работ [5, 6], где предложен его алгоритм и приведено соответствующее обоснование [5]. В соответствии с этим для нахождения значений контактных напряжений $q(\psi)$ в узлах коллокации $\psi = \psi_j$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon \sum_{j=1}^N (a_{ij} + c_{ij}) \cdot q_j = b_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \varepsilon = (\theta_1 + \theta_2)/N, \quad (9)$$

$$a_{ij} = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{\varepsilon(i-j)}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} K_1(n) \cos n\varepsilon(i-j) \quad (i \neq j), \quad a_{ii} = -\varepsilon \left(\ln \frac{\varepsilon}{2} - 1 \right),$$

$$c_{ij} = \vartheta \frac{\pi - \varepsilon|i-j|}{2} - \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} K_2(n) \sin n\varepsilon(i-j) \quad (i \neq j), \quad c_{ii} = 0, \quad b_i = \pi f(\varphi_i) \quad (10)$$

Границы области контакта находятся из условия равенства нулю контактных напряжений на краях области контакта. Для этого была построена соответствующая итерационная процедура.

3. Числовые расчеты. На основе полученных в п. 3 соотношений были проведены расчеты приведенных контактных напряжений $q^*(\varphi) = q(\varphi)/G_1$, величины области контакта $-\theta_1 \leq \varphi \leq \theta_2$, величин приложенных к штампу приведенных силы P/G_1 и момента M/G_1 при заданных вертикальном перемещении штампа δ , коэффициенте трения μ и некоторых значениях геометрических ($R_1, r_2 = R_2/R_1, r_3 = R_3/R_1, \Delta$) и механических (G_{i1}, ν_i) параметров задачи.

В таблице 1 при некоторых значениях коэффициентов Пуассона $\delta = 0.0001$, $\Delta = 0.00001$, $\mu = 0.5$, $R_1 = 0.1$, $r_2 = 1.2$, $r_3 = 1.4$, $G_{21} = 2$ и $G_{31} = 1$ приведены значения контактных напряжений $q_i = q^*(\alpha_i) \cdot 10^3$, где $\alpha_i = -\theta_1 + \varepsilon_0/2 + (i-1)\varepsilon_0 + O(\varepsilon)$ ($\varepsilon_0 = (\theta_1 + \theta_2)/5$, $i = 1, 2, \dots, 5$), размеров области контакта θ_i и приложенной силы $P^* = P \cdot 10^3/G_1$ и момента $M^* = M \cdot 10^5/G_1$, вычисленные при $N = 1001$. Заметим, что q_3 показывает значение напряжений в средней точке области контакта при $\alpha_3 = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

В таблице 2 при некоторых значениях коэффициента трения $\delta = 0.0001$, $\Delta = 0.00001$, $R_1 = 0.1$, $r_2 = 1.2$, $r_3 = 1.4$, $G_{21} = 0.5$ и $G_{31} = 1$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$

Таблица 1

ν_1	ν_2	ν_3	θ_1	θ_2	P^*	M^*	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0.1	0.3	0.3	100.1	64.8	0.630	4.16	1.68	3.16	3.88	3.72	2.39
0.3	0.3	0.3	95.5	63.8	0.667	4.34	1.93	3.39	4.09	3.97	2.67
0.45	0.3	0.3	91.3	61.5	0.710	4.54	2.25	3.67	4.34	4.28	3.00
0.3	0.1	0.3	95.5	64.8	0.660	4.29	1.89	3.33	4.02	3.90	2.63
0.3	0.45	0.3	95.5	63.2	0.676	4.39	1.97	3.46	4.16	4.03	2.68
0.3	0.3	0.1	96.5	66.7	0.645	4.24	1.87	3.21	3.85	3.77	2.64
0.3	0.3	0.1	96.5	66.7	0.645	4.24	1.87	3.21	3.85	3.77	2.64

Таблица 2

μ	θ_1	θ_2	P^*	M^*	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0.1	79.4	75.1	0.469	0.589	1.48	2.54	2.91	2.62	1.58
0.3	83.4	72.1	0.467	1.76	1.39	2.46	2.89	2.67	1.67
0.5	87.6	68.8	0.464	2.93	1.30	2.37	2.86	2.71	1.75
0.5	87.6	68.8	0.464	2.93	1.30	2.37	2.86	2.71	1.75
1	99.2	60.8	0.445	5.79	1.09	2.12	2.72	2.75	1.94

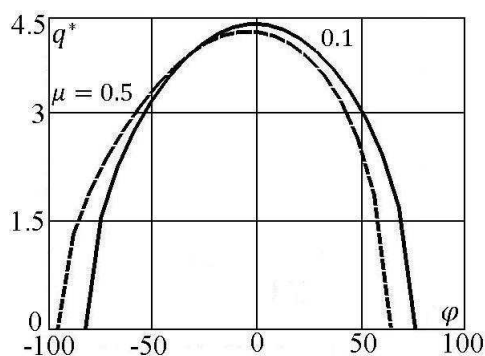


Рисунок 1 – $G_{21} = 2, G_{31} = 1, \nu_i = 0.3, r_2 = 1.2, r_3 = 1.4$

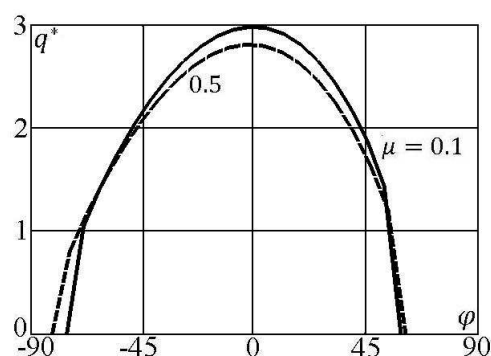


Рисунок 2 – $G_{21} = 0.5, G_{31} = 1, \nu_i = 0.3, r_2 = 1.2, r_3 = 1.4$

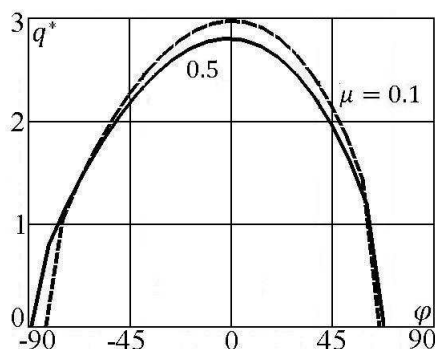


Рисунок 3 – $G_{21} = 2, G_{31} = 1, \mu = 0.5, r_2 = 1.2, r_3 = 1.4$

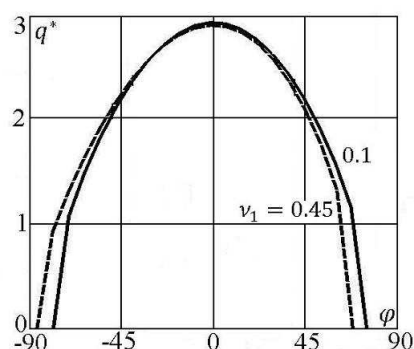


Рисунок 4 – $G_{21} = 0.5, G_{31} = 1, \mu = 0.5, r_2 = 1.2, r_3 = 1.4$

приведены значения контактных напряжений q_n , размеров области контакта θ_i , приложенной силы P^* и момента M^* .

На рисунках 1–4 для наглядности при $\delta = 0.0001, \Delta = 0.00001, R_1 = 0.1, r_2 = 1.2, r_3 = 1.4, G_{21} = 2$ и $G_{31} = 1$ (рисунки 1, 3) и $G_{21} = 0.5, G_{31} = 1$ (рисунки 2, 4) приведены графики приведенных контактных напряжений $q^*(\varphi)$ в зависимости коэффициента Пуассона первого слоя (рисунки 1, 2) и коэффициента трения (рисунки 3, 4).

Приведенные в таблицах и рисунках и другие расчеты наглядно иллюстрируют зависимость контактных напряжений и расположения области контакта в зависимости от коэффициента Пуассона первого слоя, коэффициента трения и относительного модуля сдвига второго слоя. Во всех случаях при наличии трения область

контакта становится несимметричной относительно точки первоначального касания и перемещается в направлении обратном направлению действия момента.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-08-00909).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Никитшин В. С. Статические контактные задачи для многослойных упругих тел // Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова // М.: Физматлит, 2001. С. 214–233.
- [2] Айзикович С. М. Статические контактные задачи для неоднородного по глубине основания // Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова // М.: Физматлит, 2001. С. 199–213.
- [3] Александров В. М., Чебаков М. И. К теории расчета цилиндрического подшипника // МТТ, 2004. №1 С. 22–30.
- [4] Чебаков М. И. К теории расчета двухслойного цилиндрического подшипника // Изв. РАН. МТТ, 2009. №3 С. 163–170.
- [5] Воронин В. В., Цецехо В. А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Ж.: Вычислительной математики и математической физики, 1981. Т. 21. №1 С. 40–53.
- [6] Колосова Е. М., Чебаков М. И. Контактные задачи для трехслойной полосы при наличии сил трения // Прикладная математика и механика, 2012. Т. 76. № 5 С. 795–802.

Chebakov M. I., Abramovich M. V., Kolosova E. M. *Plane contact problem for a three-layer cylindrical base with friction.* It was considered the plane contact problem of the theory elasticity of the interaction a rigid cylinder of the cylindrical base, which consist of two circular layers tightly connected with each other and with the elastic space. The friction forces in the contact zone are considered. Layers calculations were first obtained by the exact integral equations (IE) of the first kind with the kernel, represented by an explicit analytic form. Studied the basic properties of the core IE, including shows that the numerator and denominator of the core characters can be represented as an expansion in powers of the works of the shear moduli of layers and half-space. The methods of solving IE direct collocation method, which allows to obtain the solutions in almost all values if initial parameters. It was calculated the distribution of contact stresses, the size of contact area, the relationship moving stamp and force acting on it, depending on the geometrical and mechanical properties of the layers and space. A comparison of the calculation results has been made cases to previously known.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕФЕКТОВ В СТЕРЖНЯХ, ИМЕЮЩИХ РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Черпаков А. В.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассмотрена задача идентификации дефектов в стержнях, имеющих различные варианты закрепления, на основе метода многопараметрической идентификации при анализе частот и параметров форм собственных колебаний конструкции. Рассматриваются стержневые конструкции с одним и двумя дефектами. Расчет собственных колебаний стержня моделируются в конечно-элементном комплексе Ansys.

Целью исследования являлась идентификация местоположения дефекта в стержне, сопоставление параметров моделей стержня, имеющих различные варианты закрепления.

Объектом моделирования являлся стержень (длина $L = 250$ мм, высота поперечного сечения $h = 8$ мм, ширина $a = 4$ мм) с дефектами (дефект в виде поперечного надреза шириной 1 мм и абсолютной глубиной h_d), расположенным, в точке стержня, отстоящей от защемления на расстоянии \bar{L}_d , где $\bar{L}_d = L_d/L$, L_d — местоположение повреждения. Исследуются стержневые конструкции с одним и двумя дефектами. Рассматриваются стержни, имеющие два варианта закреплений — а) фиксировался один конец стержня и б) фиксировались перемещения у двух концов. Далее введем безразмерную координату $\bar{x} = x/L$. Относительная глубина повреждения $\bar{t} = h_d/h$. Рассматриваются поперечные колебания стержня. Мо-

Таблица 1 – Варианты моделирования стержней с различным расположением дефектов

№ п/п	Вариант закрепления	Кол-во дефектов в стержне	Местоположение первого дефекта, L_d	Величина первого дефекта, \bar{t}	Местоположение второго дефекта, L_d	Величина второго дефекта, \bar{t}
1	а)	1	0,25	0,7	–	–
2	а)	2	0,25	0,3	0,7	0,7
3	б)	2	0,25	0,3	0,7	0,7
4	б)	2	0,25	0,7	0,7	0,7

делирование колебаний производится в конечно-элементном комплексе Ansys. На рисунке 1 представлены исследуемые конечно-элементные модели. Было выбрано разбиение модели на узлы по длине, кратное $1/40$ длины стержня. По высоте и ширине стержня производилась разбивка на узлы кратно $1/3$ соответствующей грани. Дефект в виде надреза, отражающего натурную модель, моделировался

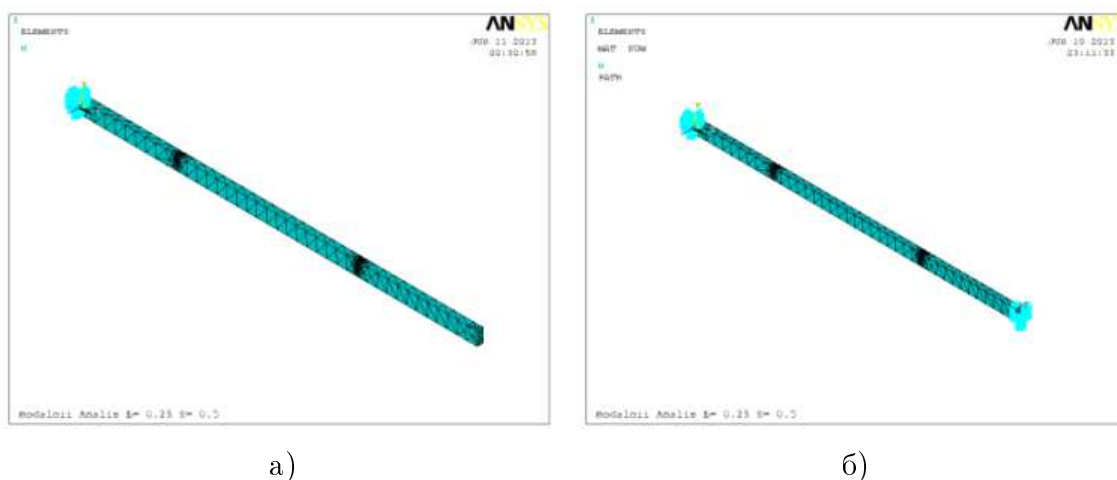


Рисунок 1 – Конечно-элементные модели стержня: а) консольно-закрепленный стержень имеющий один или два дефекта; б) стержень, жестко закрепленный на концах, имеющий один или два дефекта

шириной 1 мм перпендикулярно сечению. Конечно-элементная сетка имела двукратное сгущение в окрестности дефекта. При этом, общее количество конечных элементов превышало 5000.

Была решена задача о собственных колебаниях кантилевера. Получены формы колебаний кантилевера при различных величинах дефекта. На рисунке 2 представлены нормированные собственные формы колебаний стержня при различных величинах дефекта.

Рассматривается первая форма колебаний. Анализ графиков форм колебаний показывает, что в месте дефекта имеется характерно выраженный «излом», в разной степени зависящий от размера дефекта. Излом на кривой формы колебаний может слабо проявлен, что видно на графиках. В качестве показательной характеристики наличия дефекта в консольном стержне используются угол α в точке, образованный касательными к кривой формы колебаний, и кривизна кривой формы колебаний.

При наличии дискретной информации о форме колебаний величина угла в точке i для соответствующей моды колебаний может быть вычислена следующим образом:

$$\alpha_i = \arccos \left(\frac{(\overline{AB})(\overline{BC})}{\|\overline{AB}\| \|\overline{BC}\|} \right), \quad (1)$$

где \overline{AB} и \overline{BC} – векторное представление двух отрезков, соответственно, между точками нормированной формы колебаний с номерами $[i - 1, i]$ и $[i, i + 1]$.

При использовании дискретных измерений с учетом малых колебаний кривизна в i -й точке стержня может быть вычислена по следующей формуле:

$$U_i'' = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{\Delta x^2}, \quad (2)$$

где Δx – расстояние между точками проведения измерений, U_i – смещение собственной формы колебаний в i -й точке стержня.

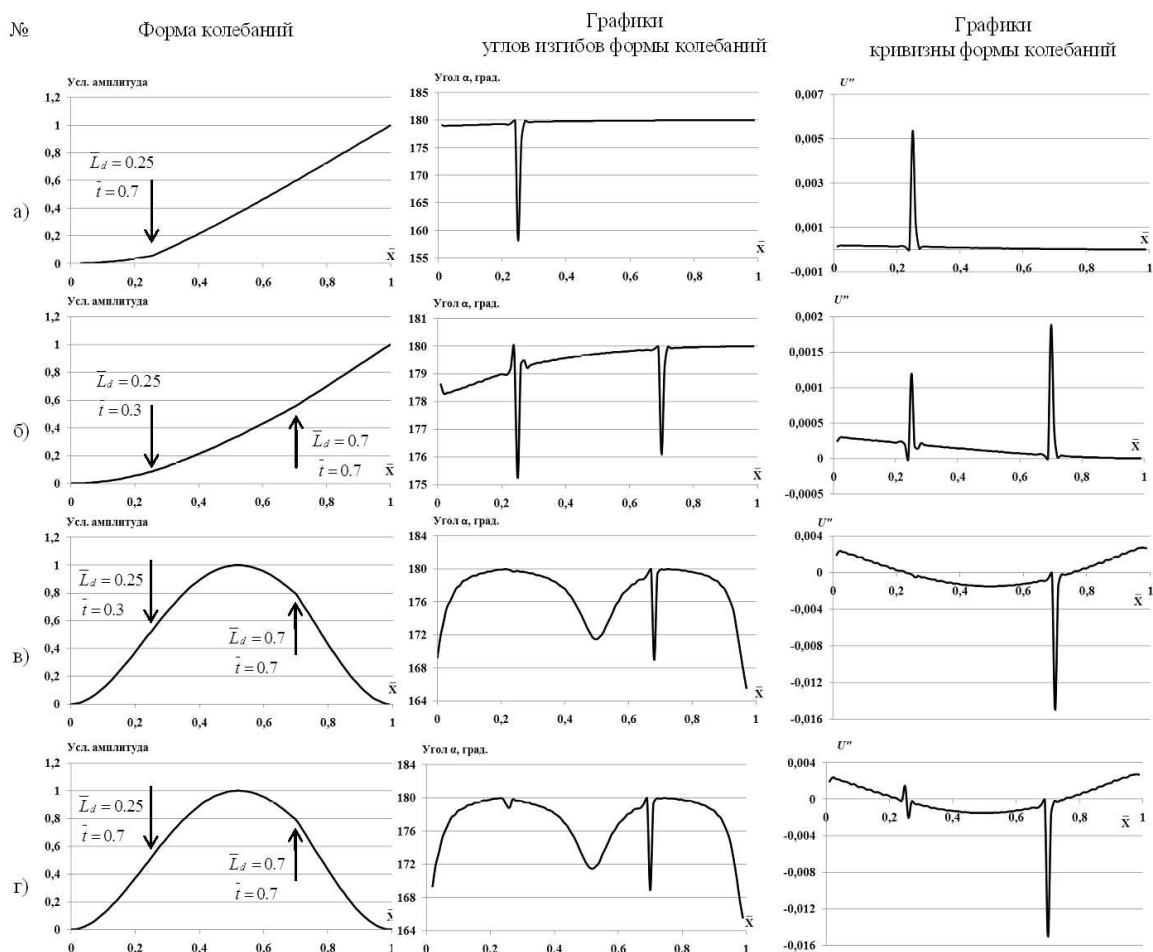


Рисунок 2 – Нормированные значения поперечных смещений \bar{U} стержня с дефектами различной величины \bar{t} при различных вариантах его закрепления для первой моды поперечной формы колебаний, графики углов изгибов и кривизна первой формы колебаний

Величина дискретного отрезка Δx при расчете параметров формы колебаний принималась равной $1/100$ от длины стержня. Результаты расчетов представлены на рисунке 2.

Анализ графиков форм колебаний (ФК), графиков углов в точках, образованными касательными и кривизны показывает, что использование критерия идентификации местоположения дефектов возможно при анализе данных параметров. Для консольного стержня два параметра хорошо определяют местоположение дефекта. В следствии того, что параметр угла в точках, образованными касательными более чувствителен к изгибам формы колебаний, то для стержня, имеющего закрепление с двух концов он слабо идентифицирует местоположения дефектов. Для данного варианта закрепления и анализа формы колебаний он достаточно хорошо идентифицирует дефект при его величине $\bar{t} > 0.5$. Для варианта модели стержня №3 дефект с местоположением $L_d = 0,25$ плохо идентифицируется вследствие того, что он расположен в месте перегиба кривой формы колебаний.

Кривизна формы колебаний для случая модели стержня №4 хорошо идентифицирует местоположения дефекта.

Исследования показывают, что применение изложенной методики многопараметрической идентификации дефектов в стержневой конструкции позволяет рассчитать параметры дефекта в стержнях, имеющих различные граничные условия, в т. ч. глубину и местоположение дефекта. Снижение погрешности в определяемых параметрах идентификации стержня достигается благодаря использованию в алгоритме более широкого набора исходных данных, а так же в силу применения в алгоритме многопараметрического диагностического признака идентификации. Рассмотренный метод может быть положен в основу разработки методики технической диагностики технического состояния строительных конструкций.

Cherpakov A. V. *Identification of defects in rods with different ways of fixing.* The problem of crack identification in rods with different ways of fixing, based on the method of multiparameter identification with the analysis of frequencies and parameters of natural modes of the structure is studied. The core design with one and two defects is discussed. Calculation of natural oscillations of the rod are modeled in finite-element complex Ansys.

О ВОЗМОЖНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ

Швед О. Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск

Активный упругопластический процесс представляется попеременным чередованием пластического и упругого процессов. Модель нелинейной упругости обобщается на упругопластическую. Сохраняется потенциальная природа упругой деформации. Постулируются дифференциальные определяющие уравнения. Определяются девиаторные сечения поверхности текучести. Формулируется критерий разрушения. Вводятся два параметра упрочнения и выбираются базовые эксперименты.

1. Неадекватность теоретического описания процессов (наличие застойных зон в опытах Треска по экструзии свинца) вызвана малой подвижностью модельных материалов, удовлетворяющих условию текучести [1, 2]. Для устранения этого недостатка траекторию процесса в пространстве напряжений можно заменить близкой ей ломаной с участками пластического течения и упругости [3]. Попытаемся обобщить модель нелинейной упругости, сохраняя потенциальную природу упругой деформации (существование потенциалов напряжений и их скоростей), и сформулировать уравнения для участков течения, где материал предполагается несжимаемым.

Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ неподвижный ортонормированный триэдр. Введем потенциал напряжений в форме Мурнагана [4, 5] $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, где $\varepsilon_2 = \delta_1(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2 + \dots$, $\varepsilon_3 = \delta_{22}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^3 + \dots$ анизотропные структуры второй и третьей степени по компонентам тензора упругой деформации Коши–Грина. Начальные значения 77 параметров анизотропии $\delta_j = 0$, и тогда ε совпадает с изотропным потенциалом ε_0 . Переходим к мере $\mathbf{G} = 2\mathbf{C} + \mathbf{E}$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 4^{-1}(\delta_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 2) + \dots) + 8^{-1}(\delta_{22}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^3 + 1) + \dots) + c, \quad (1)$$

где c — минимальная постоянная, такая что выполняется $\varepsilon \geq 0$. Из (1) находим определяющее уравнение для тензора напряжений Коши:

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j, \quad (2)$$

где \mathbf{F}_e — неособенный тензор, заменяющий в упругопластичности деформационный градиент $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T$, $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$, L_3 — третий главный инвариант \mathbf{V} , \mathbf{T}_0 — квадратичный трехчлен относительно меры $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$ с коэффициентами, зависящими от ее главных инвариантов и постоянных Ляме, \mathbf{T}_j — несложно вычисляемые тензоры. Уравнения (1), (2) дают определяющие уравнения в конечном виде.

Условие текучести накладывает ограничение на девиаторную составляющую перемещения точки процесса в пространстве напряжений. Поэтому используем

проекцию объективной производной девиатора тензора напряжений Коши, вычисленную по соотношениям упругости, на искомое девиаторное сечение поверхности текучести для его определения. При построении девиаторного сечения удобно применить «векторное» представление девиаторов симметричных тензоров второго ранга в пятимерном векторном пространстве. Для этого задается ортонормированный тензорный базис пространства девиаторов $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$. Скалярное произведение таких векторов здесь понимается как двойное скалярное произведение тензоров. Два любых таких девиатора \mathbf{N} и \mathbf{M} представляются в векторном виде $\mathbf{N} = \sum_{i=1,5} w_i \mathbf{W}_i$, $\mathbf{M} = \sum_{i=1,5} v_i \mathbf{W}_i$. Формулы связи с покомпонентным представлением в базисе $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ для \mathbf{N} имеют вид $n_1 = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 = (\sqrt{6})^{-1}w_1 - (\sqrt{2})^{-1}w_2$, $n_2 = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 = (\sqrt{6})^{-1}w_1 + (\sqrt{2})^{-1}w_2$, $n_3 = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = (\sqrt{2})^{-1}w_3$, $n_4 = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 = (\sqrt{2})^{-1}w_4$, $n_5 = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 = (\sqrt{2})^{-1}w_5$. Заменяя n_i, w_i на m_i, v_i получаем формулы для \mathbf{M} .

Обозначим: $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \Omega \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \Omega$ ($\Omega = \dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O}$ тензор упругого спина [6]) — О-производная \mathbf{T} , \mathbf{D} — тензор скорости деформаций, $\nabla \mathbf{v}^T$ — градиент скорости, девиатор-оператор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ — О-производная $\text{dev} \mathbf{T}$, вычисленная при условии несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ по соотношению $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$, которое задает \mathbf{F}_e в упругом состоянии. Девиатор \mathbf{Q} линеен по компонентам \mathbf{D} и имеет потенциал по построению. Скорость напряжений определяется через О-производную, как в основном случае не зависящую от \mathbf{D} часть проекции оператора \mathbf{Q} на девиаторное сечение поверхности текучести, определяемую искомым вектором внешней нормали \mathbf{N} ($\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{N} = 1$). Поскольку существует потенциал скоростей напряжений, то девиатор $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}$ имеет потенциал. Это равносильно тому, что вектор \mathbf{N} является собственным оператором \mathbf{Q} . Докажем последнее утверждение.

Заменяя формально величины \mathbf{Q}, \mathbf{D} на \mathbf{M}, \mathbf{N} , получаем $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$ и $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{D}$. В покомпонентном представлении тензора \mathbf{M} находим $m_j = \sum_{i=1}^5 a_{ji} n_i$ ($j = \overline{1, 5}$), где a_{ji} — вычисляемые скаляры. Условия существования потенциала тензора \mathbf{Q} имеют вид $a_{22} = a_{11} + 2(a_{21} - a_{12})$, $a_{43} = a_{34}$, $a_{53} = a_{35}$, $a_{54} = a_{45}$, $a_{1i} = 2(a_{i2} - a_{2i})$, $a_{2i} = 2(a_{i1} - a_{1i})$ ($i = \overline{3, 5}$). Удалив с диагонали матрицы (a_{ji}) не влияющую на выбор собственных векторов величину a_{11} (однако при нахождении точных собственных значений оператора ее необходимо будет учитывать) введем независимые параметры p_j : $p_1 = 2^{-1}(a_{12} + a_{21})$, $p_2 = -2^{-1}(a_{12} - a_{21})$, $p_3 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{13} + a_{23})$, $p_4 = -2^{-1}(a_{13} - a_{23})$, $p_5 = a_{33} - a_{11}$, $p_6 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{14} + a_{24})$, $p_7 = -2^{-1}(a_{14} - a_{24})$, $p_8 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{15} + a_{25})$, $p_9 = -2^{-1}(a_{15} - a_{25})$, $p_{10} = a_{44} - a_{11}$, $p_{11} = a_{55} - a_{11}$, $p_{12} = 3^{-1}a_{34}$, $p_{13} = 3^{-1}a_{35}$, $p_{14} = 3^{-1}a_{45}$. Переходя к векторному представлению девиаторов, получаем

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 & \sqrt{3}p_2 & p_3 & p_6 & p_8 \\ \sqrt{3}p_2 & -p_1 + 2p_2 & p_4 & p_7 & p_9 \\ p_3 & p_4 & p_5 & p_{12} & p_{13} \\ p_6 & p_7 & p_{12} & p_{10} & p_{14} \\ p_8 & p_9 & p_{13} & p_{14} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Соотношением (3) задается в общем виде симметричный линейный оператор $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$ в пятимерном векторном пространстве.

Вернемся теперь к указанному утверждению. Если \mathbf{N} является собственным

вектором $\mathbf{M}(\mathbf{N})$ и ω его собственное значение, то тогда получаем $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot \cdot \mathbf{N}\mathbf{N} = \mathbf{M}(\mathbf{N}) \cdot \cdot \mathbf{D}\mathbf{N} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}}(2^{-1}\omega(\mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{D})^2)$. Обратно, если $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}$ имеет потенциал, то получаем $n_i m_j = n_j m_i$ для $i, j = \overline{1, 5}$, $i \neq j$ и значит по формулам связи $v_i w_j = v_j w_i$. Все миноры второго порядка в образованной векторами \mathbf{N} , \mathbf{M} матрице равны нулю. Следовательно, векторы зависимы, то есть существует скаляр ω , что выполняется $\mathbf{M}(\mathbf{N}) = \omega \mathbf{N}$. Таким образом, вектор нормали к девиаторному сечению поверхности текучести является одним из собственных векторов оператора (3) и наоборот. Однако, как нетрудно убедиться для изотропного материала, не все собственные векторы имеют физический смысл, и возникает непростой вопрос о выборе вектора нормали в условиях анизотропии.

В пятимерном пространстве девиаторов вектор нормали \mathbf{N} к текущему девиаторному сечению поверхности текучести (содержащему точку процесса в пространстве напряжений) выбирается из двух взаимно ортогональных собственных векторов оператора (3), остальные векторы физического смысла не имеет. Существуют два семейства регулярных вогнутых поверхностей, и искомая поверхность образуется соединением в сингулярных точках двух представителей этих семейств. Если точка процесса находится на гладком участке, то для построения текущего сечения достаточно двух точек на этих поверхностях: ее самой и точки, определяемой по величине эффекта Баушингера. В противном случае достаточно одной точки процесса. Поверхность текучести в пространстве напряжений формируется своими девиаторными сечениями.

Если на поверхности текущего сечения появляется критическая точка, в которой собственное значение оператора (3), которое должно определять собственный вектор, являющийся вектором нормали в данной точке поверхности, становится кратным, то однозначный выбор вектора нормали из бесконечного числа собственных векторов становится невозможным. Девиаторное сечение вырождается, то есть становится непригодным для использования. Так как исчезает необходимый для описания деформации объект, то возникает макротрещина, поскольку альтернативой деформации является разрушение.

2. Будем обозначать величины, относящиеся к образующим девиаторное сечение двум поверхностям, отвечающим, условно говоря, за растяжение и сжатие с индексами 1 и 2 соответственно. При течении возможны три различных случая: точка процесса находится в регулярной точке текущего девиаторного сечения, удельная мощность деформации положительная ($\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{D} > 0$) либо нет, и точка процесса находится в сингулярной точке. Пусть \mathbf{N} — нормированный вектор внешней нормали, и $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i$, $i \in \{1, 2\}$. В первых двух случаях критерий текучести будет $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N} > 0$, в третьем случае должно выполняться одновременно $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_1 > 0$, $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_2 > 0$, и если нарушается одно из неравенств, то имеет место либо первый, либо второй случай.

Постулируем дифференциальные определяющие уравнения для напряжений, потенциала напряжений и параметров анизотропии:

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K\mathbf{P}, (L_3^{-1}\varepsilon) \cdot = p\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{D}, \dot{\delta}_j = k_j \beta \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{T}_j (\sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \cdot \mathbf{T}_j})^{-1} (k_j = \pm 1, \mathbf{T}_j \neq 0), \quad (4)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{Q} - \sum_i \mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i$ и в первых двух случаях $i = 1$ либо $i = 2$, а в третьем $i = 1, 2$. В первом случае имеем в (4) положительный не зависящий от \mathbf{D}

скаляр $K = K_i$, $p = (1 - \alpha_i)$, α_i — относительная часть величины рассеиваемой работы деформации на малом временном шаге. Во втором случае выполняется $K = K_i + K_0$, $p = 1$. Зависящий от \mathbf{D} скаляр K_0 определяется так. Надо положить в (4) $K = K_0$, $p = 1$, $\beta = 0$ и затем из системы уравнений (1), (2), (4) для неизвестных $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$, K_0 , найти K_0 . В данном случае материал становится недиссипативным и теряется свойство потенциальности в скоростях напряжений. Тем не менее, выражение в правой части первого равенства (4) остается однородной величиной первой степени по компонентам тензора \mathbf{D} . В третьем случае полагаем $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i$ (здесь выбирается $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$, если $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_1 \geq \mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_2$ и $\mathbf{N} = \mathbf{N}_2$, если $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_1 < \mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_2$), $K = K_1 K_2$, $p = (1 - \alpha_i)$. Скаляр β характеризует скорость роста параметров анизотропии. Коэффициенты k_j в (4) выбираются следующим способом. В первом, втором случаях по всем наборам k_j в из системы уравнений (1), (2), (4) находим набор, обеспечивающий минимальное значение величине $|\beta|$. В третьем случае выполняется условная минимизация $|\beta|$, при условии удовлетворения эффекту Баушингера. Если выполняется $\mathbf{T}_j = 0$, то надо привлекать дополнительные соотношения для параметров анизотропии. Имеет место непрерывность при смене определяющих уравнений. Непрерывность теряется только в третьем случае при условии $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_1 = \mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_2$.

Проблемное в общем случае понятие пластической деформации [7] в рассматриваемой модели материала не определяется, и для описания упругопластического процесса вводятся два независимых параметра упрочнения типа Р. Шмидта χ_1, χ_2 с нулевыми начальными значениями для изотропного материала. Пусть вектор нормали $\mathbf{N} = \mathbf{N}_i$ $j \neq i$ ($\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{N}_i \geq 0$, $\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{N}_j \geq 0$). Постулируем эволюционные уравнения: $\dot{\chi}_i = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{D}$ ($\mathbf{N}_j \cdot \cdot \mathbf{D} \geq 0$), $\dot{\chi}_i = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \cdot \cdot \mathbf{D}$ ($\mathbf{N}_j \cdot \cdot \mathbf{D} < 0$), $\dot{\chi}_j = 0$ в первых двух случаях при течении и $\dot{\chi}_i = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \cdot \cdot \mathbf{D}$ ($i = 1, 2$) в третьем случае. Выполняются следующие соотношения $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_i = \mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot \cdot \mathbf{N}_i = \mathbf{M}(\mathbf{N}_i) \cdot \cdot \mathbf{D} = \omega_i \mathbf{N}_i \cdot \cdot \mathbf{D}$, $\omega_i > 0$, откуда следует равносильность равенств $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_i = 0$ и $\mathbf{N}_i \cdot \cdot \mathbf{D} = 0$, а также неравенств $\mathbf{Q} \cdot \cdot \mathbf{N}_i > 0$ и $\mathbf{N}_i \cdot \cdot \mathbf{D} > 0$. Следовательно, критерий текучести согласуется с введенными способами задания параметров упрочнения и при их смене имеет место непрерывность.

Базовыми экспериментами являются одноосные и двухосные растяжение, сжатие. При одноосных нагружениях проводимых до разрушения определяются величины $\alpha_i = \alpha_i(\chi_i)$ и величины необходимые в дополнительных соотношениях для параметров анизотропии, в двухосных определяются $K_i = K_i(\chi_i)$. Конечно, надо привлекать еще дополнительные экспериментальные данные, прежде всего о величине эффекта Баушингера. Необходимы будут данные об увеличении пластичности при растяжении, сжатии под высоким гидростатическим давлением сжатия. Потребуется информация о увеличении и уменьшении напряжения текучести при повторном нагружении в ортогональном направлении после одноосных растяжения и сжатия. Возможно, потребуются и другие данные.

В заключение сделаем несколько замечаний. Мера упругих искажений \mathbf{V} определяется не из геометрических построений [2], и не в рамках кинематики, а из системы определяющих уравнений (1), (2), (4) вместе со скаляром β при течении. Использование О-производной однозначно решает проблему выбора объективной производной, поскольку получается, что поверхность девиаторного сечения зави-

сит от тензора упругого поворота \mathbf{O} . \mathbf{O} -производная устраняет эту неопределенность. Поясним, почему появление критической точки, вызванное ростом упругой анизотропии, отождествляется с моментом макроразрушения. Поверхность девиаторного сечения находится из обоснованных теоретических предположений, и является допустимой согласно вычислительным экспериментам. Причем она получается кусочно вогнутой и вполне возможно позволит описать проблемные экспериментальные факты, в том числе явление предельного наклепа [8]. Вырождение девиаторного сечения означает, что критерий текучести и уравнения (4) теряют смысл в критической точке. Для изотропного материала такая возможность исключается.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [2] Жилин П. А. Основные уравнения неупругих сред // Актуальные проблемы механики. Труды XXVIII летней школы. 2001. С. 14–58.
- [3] Ключников В. Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: МГУ, 1994. 189 с.
- [4] Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. NY.: John Wiley, 1951. 140 p.
- [5] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [6] Швед О. Л. Определение тензора упругого спина в нелинейной теории пластичности // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2009. № 1. С. 52–58.
- [7] Naghdi P. J. A critical review of the state of finite plasticity // ZAMP. 1990. Vol. 41. № 3. P. 315–394.
- [8] Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 232 с.

Shved O. L. *Possible constitutive relations of non-linear elastoplasticity.* Elastic-plastic is an active process of alternately interlaced elastic and plastic processes. Nonlinear model of elasticity is generalized to elastic-plastic. Persists the potential nature of elastic deformation. Postulated differential equations defining. Section deviatory defines the surface fluidity. Fracture criterion is formulated. Two parameters of simplification are in put u base elements are selected.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ОРТОТРОПНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Швед О. Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск

Конкретизированы и дополнены для ортотропного материала предложенные ранее определяющие соотношения нелинейной упругопластичности. Найден эффективный способ проверки критерия разрушения. Получены решения модельных задач, в которых реализуются три возможных случая при формулировке дифференциальных определяющих соотношений.

1. Определяющие соотношения нелинейной упругости для материала Мурнагана [1, 2] в [3] обобщались на определяющие соотношения нелинейной упругопластичности. Рассмотрим ортотропный материал. Пусть неподвижный триэдр $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ задает главные оси анизотропии. В данных нагружениях повороты отсутствуют и объективная О-производная совпадает с материальной производной. Используем все обозначения и соотношения из [3].

Ненулевыми теперь могут быть только параметры анизотропии δ_j , где $j \in \{1 - 3, 7 - 11, 15, 22 - 34, 41, 51 - 53, 57 - 59\}$, и удельная потенциальная энергия упругой деформации (потенциал напряжений) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 4^{-1} \left(\sum_{j=1,2,3,8,9,10} \delta_j ((\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_k - 1)(\mathbf{c}_l \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_l - 1) - 1) + \delta_7 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \right. \\ & \left. + \delta_{15} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \right) + 8^{-1} \left(\sum_{j=1}^9 \delta_{21+j} ((\mathbf{c}_m \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_m - 1)^2 (\mathbf{c}_n \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_n - 1) + 1) + \delta_{31} \left(\prod_{i=1}^3 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 1 \right) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum_{i=1}^3 \delta_{31+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \delta_{41} ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \sum_{i=1}^3 \delta_{50+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum_{i=1}^3 \delta_{56+i} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) \right) + \varepsilon_0 + c \end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, 3, 1, 2, 3; l = 1, 2, 3, 2, 3, 1; m = 1, 2, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 3; n = 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2),$$

где \mathbf{G} — мера упругой деформации Коши–Грина, c — минимальная постоянная, обеспечивающая условие $\varepsilon \geq 0$, ε_0 — изотропный потенциал. Параметры анизотропии δ_j , где $j \in \{1 - 3, 8 - 10, 22 - 31\}$, определяются по соотношению (4) из [3]. Параметры δ_j ($j = 7, 11, 15$) требуют определения, а остальные полагаем равными нулю.

При одноосных нагружениях по осям 1,2,3 в условиях трансверсальной изотропии справедливы равенства $\delta_{15} = 2\delta_2 - \delta_9$, $\delta_{11} = 2\delta_1 - \delta_{10}$, $\delta_7 = 2\delta_3 - \delta_8$. При этом для тех же нагружений неопределяемые параметры анизотропии $\delta_7 = \delta_{11}$, $\delta_7 = \delta_{15}$,

$\delta_{11} = \delta_{15}$, полагаем равными $\delta_7 = \delta_{11} = \gamma\delta_{15}$, $\delta_7 = \delta_{15} = \gamma\delta_{11}$, $\delta_{11} = \delta_{15} = \gamma\delta_7$ соответственно. Постоянные коэффициенты $\gamma = \gamma_i$ находим, используя данные о моменте разрушения при растяжении $i = 1$ и сжатии $i = 2$. Введем дополнительные дифференциальные определяющие уравнения:

$$\dot{\delta}_7 = (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{T}})^{-1}(|\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8) + \gamma(|\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}) + |\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9))),$$

$$\dot{\delta}_{11} = (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{T}})^{-1}(|\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}) + \gamma(|\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9) + |\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8))),$$

$$\dot{\delta}_{15} = (\sqrt{\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{T}})^{-1}(|\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_9) + \gamma(|\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_8) + |\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \cdot \mathbf{T}|(2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{10}))),$$

где $\gamma = \gamma_1$ или $\gamma = \gamma_2$. В случае одноосных нагружений по осям $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ из дополнительных уравнений следуют отмеченные выше соотношения. Это одно из допустимых обобщений, и возможно не лучшее.

Таким образом, необходимая конкретизация потенциала напряжений выполнена и дальше могут быть уточнены и вычислены все соотношения из [3]. Используя, в частности формулу $\frac{\partial \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_j}{\partial \mathbf{G}} = 2^{-1}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j + \mathbf{c}_j\mathbf{c}_i)$ ($i, j = 1, 2, 3$), получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши $\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j$, где $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$, \mathbf{F}_e — неособенный тензор, заменяющий деформационный градиент. Оператор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ (\mathbf{D} — тензор скорости деформаций) определяется как О-производная $\text{dev} \mathbf{T}$, вычисленная при условии несжимаемости по соотношению $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$ ($\nabla \mathbf{v}^T$ — градиент скорости). Заменяв формально величины \mathbf{Q}, \mathbf{D} на \mathbf{M}, \mathbf{N} , получаем $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$.

Основной причиной разрушения согласно математической модели является рост упругой анизотропии. Максимальное проявление анизотропии следует ожидать в ее главных осях. Проверка критерия разрушения упрощается. Матрица симметричного линейного оператора $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$ в пятимерном векторном пространстве (см. (3) из [3]), которая вычисляется в точках расположенной в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ кривой пластичности, имеет только два недиагональных элемента отличных от нуля ($p_2 \neq 0$). Главные оси анизотропии определяют векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Поэтому, наличие подлежащих контролю кратных собственных значений оператора означает существование нулей функции $f(\varphi) = \prod_{k=7,11,15}(p_2^2 + p_k^2 - p_1^2 - 4p_2p_k)(p_1^2 + 3p_2^2)^{-1}$. Угол φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) отвечает положению точки на кривой пластичности с учетом ее замкнутости, обход проводим из точки процесса по часовой стрелке. Если найденное собственное значение соответствует собственному вектору оператора, по которому должен определяться вектор нормали к девиаторному сечению поверхности текучести, то по критерию материал разрушается. Соответствие устанавливается сравнением функций на регулярных участках кривых для изотропного материала (где разрушения не происходит) и ортотропного материала. Оно имеет место при перемещении нуля функции на соседний участок.

Кривая пластичности строится следующим образом. Если точка процесса находится на гладком участке, то требуется еще одна лежащая на этой кривой точка, которая определяется по величине эффекта Баушингера. Обходом из этих точек по девиаторным сечениям поверхности текучести в подпространствах $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_5\}$ (вокруг $\text{dev} \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$), $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}$ (вокруг $\text{dev} \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$) до пересечения с плоскостью $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ получаем еще четыре точки. По этим шести точкам в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ находятся сингулярные точки, по которым строится кривая

пластичности. Если точка процесса находится в сингулярной точке, то достаточно ее одной. Обход по девиаторным сечениям осуществляется в подпространствах $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_5\}$, $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}$, $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_4\}$ (вокруг $\text{dev } \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$). Из полученных трех сингулярных точек в плоскости $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ находятся еще две сингулярные точки, и затем по всем известным шести точкам также строится кривая пластичности. При одноосных нагружениях построение еще упрощается.

2. В качестве материала для упрощения использовался малопластичный вольфрам, который предполагался идеально пластическим. Напряжение текучести при растяжении и сжатии будет $\sigma = 450$ МПа. Данные о постоянных Ляме взяты из [2]: $\lambda = 1,63$, $\mu = 1,37$, $\nu_1 = -4,29$, $\nu_2 = -2,58$, $\nu_3 = -3,67(10^5 \text{ МПа})$.

При численном моделировании использовался вариационный принцип [4]. На рисунках 1–3 представлены результаты расчетов. Изображены начальные и конечные кривые пластичности. Кривые для изотропного материала ближе к границе правильного шестиугольника, выражающей условие пластичности А. Ю. Ишлинского. Стрелками обозначены проекции базисных диад $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i$, проекция $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$ направлена вверх, а $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$ вниз. Отрезками указаны положения точки процесса. Приведены графики функций $f(\varphi)$ для этих кривых. На оси абсцисс отмечены малые и большие вертикальные штрихи, соответствующие приращениям угла $\pi/6$ и сингулярным точкам кривых.

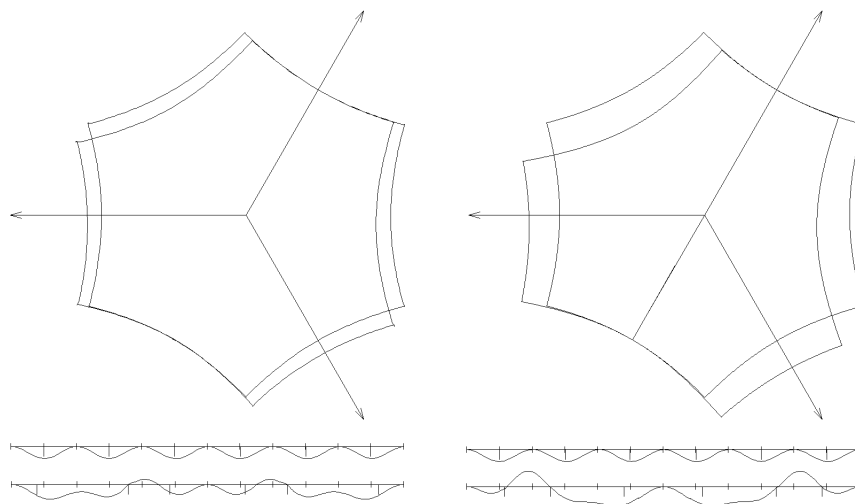


Рисунок 1 – Одноосные растяжение (слева) и сжатие (справа)

Выполнено моделирование базовых экспериментов одноосных растяжения и сжатия по второй оси, проведенных до момента разрушения, определены величины частей рассеиваемой работы деформации $\alpha_1 = 0,999987$, $\alpha_2 = 0,99999595$ (то есть практически всей работы) и максимальные значения параметров упрочнения χ_1^0 , χ_2^0 . Наблюдается симметрия в силу условия трансверсальной изотропии. Величина эффекта Баушингера взята равной единице.

В двухосных растяжении и сжатии ортогонально второй и третьей оси были приложены плоские гладкие штампы соответственно подвижные и неподвижные. Ортогональная первой оси граничная поверхность была свободной от нагрузок.

Тем не менее, на ней возникали малые расчетные напряжения. Среднее напряжение составляло 224,8 МПа и -226,8 МПа. Определены малые величины частей проекции оператора $K_1 = 0,00001$, $K_2 = 0,00003$. Параметры χ_i возрастают до значений $\chi_1 = \chi_1^0$, $\chi_2 = \chi_2^0$. В конце сжатия наблюдается близость момента разрушения.

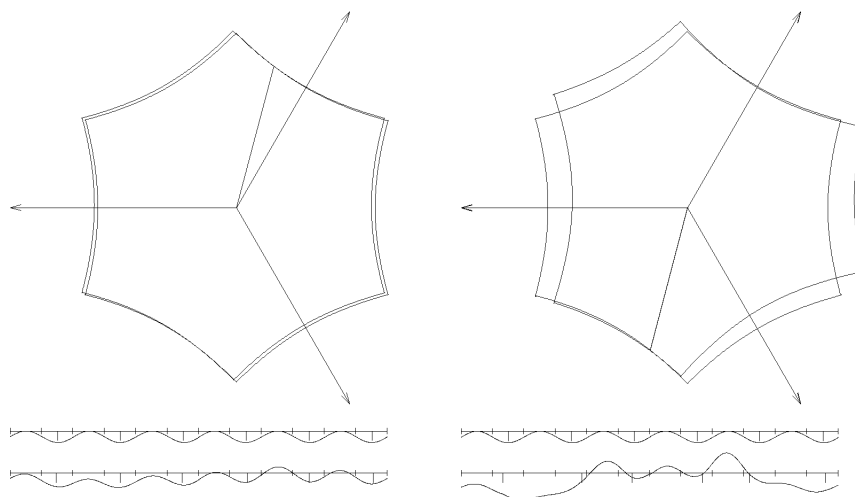


Рисунок 2 – Двухосные растяжение (слева) и сжатие (справа)

Моделирование чистого сдвига до момента разрушения осуществлялось растяжением и сжатием по второй и третьей осям, среднее напряжение было равно нулю. Показано проявление эффекта Баушингера, поскольку согласно опытным данным в сингулярной точке оно максимальное.

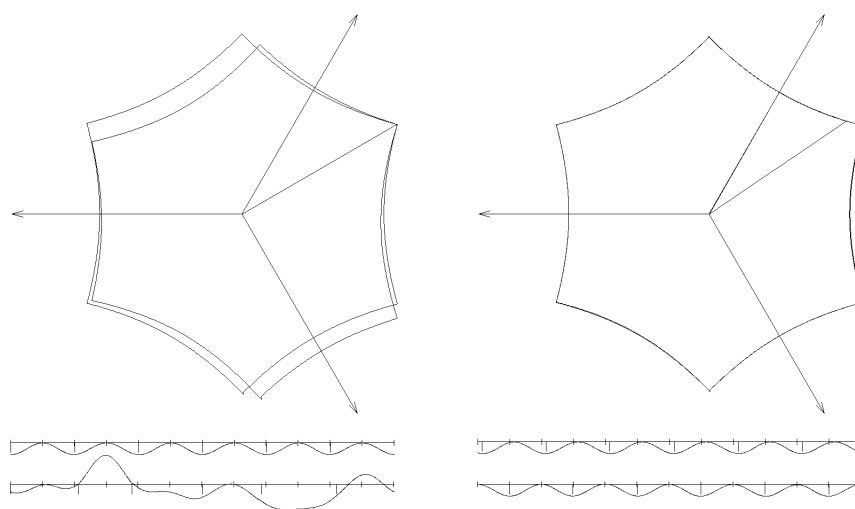


Рисунок 3 – Чистый сдвиг (слева) и растяжение, сжатие (справа)

Рассчитывалось нагружение типа растяжение и сжатие по трем осям, когда удельная мощность деформации становится неположительной. На начальной кривой пластичности, соответствующей одноосному растяжению, выбрана точка, в

которой находится точка процесса. В эксперименте это соответствует растяжению по первой, второй оси и сжатию по третьей оси с искажениями 1,0001, 1,00136 и 0,99913. При течении происходило быстрое перемещение точки процесса по кривой пластичности влево в точку соответствующую ее положению в одноосном растяжении, при малом приросте анизотропии. Поэтому практически совпадают кривые пластичности и графики функций с учетом расположения точки процесса. Часть проекции оператора $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ в дифференциальном определяющем уравнении для напряжений определяется как $K = K_0 + K_1$ [3]. Имеет место $0 \leq K_0(\mathbf{D}) < 1$, когда направление «вектора» \mathbf{D} меняется от переходного $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = 0$ ($K_0 = 0$) до разгрузочного $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0$.

Предлагаемая модель материала по результатам расчетов представляется допустимой. Разрушение наблюдается в одноосных нагружениях, и в чистом сдвиге при значениях параметров упрочнения $(\chi_1^0)^{-1}\chi_1 + (\chi_2^0)^{-1}\chi_2 < 0$. При численном моделировании описываются экспериментальные факты увеличения и уменьшения напряжений текучести при повторном растяжении и сжатии в направлении ортогональном первоначальному (рисунок 1). Описывается также явление увеличения пластичности материала при растяжении под дополнительным высоким гидростатическим давлением сжатия. Причем этот факт имеет место только при учете анизотропных структур третьей степени. Рост упругой анизотропии замедляется и нули функции на соответствующем участке кривой пластичности отдаляются от его границ при течении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Murnaghan F. D.* Finite deformation of an elastic solid. NY.: John Wiley, 1951. 140 p.
- [2] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [3] *Швед О. Л.* О возможных определяющих соотношениях нелинейной упругопластичности // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г. Т. II. С. 219–223.
- [4] *Швед О. Л.* О вариационном принципе в нелинейной теории упругопластичности // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 66–72.

Shved O. L. *Defining relations of orthotropic elastic-plastic material.* Previously proposed constitutive equations of non-linear elastoplasticity for orthotropic material were specified and supplemented. An efficient way to test destruction criterion was found. Model problems solutions were implemented three possible cases in the formulation of differential constitutive relations.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ МИКРОПОЛЯРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Шейдаков Д. Н.¹, Шейдаков Н. Е.²

¹Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

²Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)

В рамках общей теории устойчивости трехмерных тел проведен анализ выпучивания кругового микрополярного стержня при осевом сжатии и внешнем давлении. При этом предполагалось, что его упругие свойства изменяются вдоль радиуса. Для модели физически-линейного материала получена система линеаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение неоднородного стержня в возмущенном состоянии. В случае кругового стержня из пенополиуретана найдены критические кривые и соответствующие им моды выпучивания, а также построены области устойчивости для различных законов, описывающих изменение упругих параметров стержня вдоль радиуса. Используя полученные результаты, проанализирован размерный эффект и изучено влияние свойств материала на бифуркацию равновесия.

1. Начальное деформированное состояние. Система уравнений статики нелинейной моментной теории упругости при отсутствии массовых сил и моментов состоит из уравнений равновесия для напряжений

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0 \quad (1)$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{H} \quad (2)$$

и геометрических соотношений

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} \times \mathbf{E} = -(\operatorname{grad} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{D} и \mathbf{G} — тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, \mathbf{C} — градиент деформации, \mathbf{Y} — мера деформации, \mathbf{L} — тензор изгибной деформации, $W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})$ — удельная потенциальная энергия деформации, \mathbf{R} — радиус-вектор, \mathbf{H} — тензор микроповорота, grad и div — градиент и дивергенция в лагранжевых координатах, \mathbf{E} — единичный тензор. Символ \times означает векторный инвариант тензора второго ранга.

Рассмотрим неоднородный круговой стержень длины l и радиуса r_0 . В случае осевого сжатия микрополярного стержня при внешнем гидростатическом давлении, радиус-вектор \mathbf{R} и собственно ортогональный тензор микроповорота \mathbf{H} , которые определяют положение и поворот частицы среды, имеют вид:

$$\begin{aligned} R &= f(r), & \Phi &= \varphi, & Z &= \alpha z \\ 0 &\leq r \leq r_0, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, & 0 &\leq z \leq l \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = f(r) \mathbf{e}_R + \alpha z \mathbf{e}_Z, \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z \quad (4)$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Φ, Z — эйлеровы цилиндрические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ — ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат, соответственно, α — коэффициент сжатия по оси стержня, $f(r)$ — некоторая функция, характеризующая радиальную деформацию.

Будем полагать, что упругие свойства стержня изменяются вдоль радиуса и описываются моделью физически линейного микрополярного материала, удельная потенциальная энергия деформации которого в случае микрополярного тела является квадратичной формой тензоров $\mathbf{Y} - \mathbf{E}$ и \mathbf{L} :

$$W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) = \frac{1}{2} \lambda(r) \text{tr}^2(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) + \frac{1}{2} [\mu(r) + \kappa(r)] \text{tr} [(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{E})^T] + \frac{1}{2} \mu(r) \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E})^2 + \frac{1}{2} \gamma_1(r) \text{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{1}{2} \gamma_2(r) \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} \gamma_3(r) \text{tr} \mathbf{L}^2 \quad (5)$$

Здесь $\lambda(r), \mu(r)$ — функции, описывающие изменение классических параметров Ляме, $\kappa(r), \gamma_1(r), \gamma_2(r), \gamma_3(r)$ — микрополярные упругие параметры, зависящие от радиальной координаты.

Из выражений (2)–(5) следует, что тензор моментных напряжений типа Пиолы \mathbf{G} равен нулю при рассмотренной деформации, а тензор напряжений типа Пиолы \mathbf{D} задается соотношениями

$$\mathbf{D} = [\lambda s + \chi(f' - 1)] \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \left[\lambda s + \chi \left(\frac{f}{r} - 1 \right) \right] \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + [\lambda s + \chi(\alpha - 1)] \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z; \quad s = f' + \frac{f}{r} + \alpha - 3, \quad \chi = 2\mu + \kappa \quad (6)$$

С учетом представлений (3), (4) и (6), уравнения равновесия (1) сводятся к одному дифференциальному уравнению

$$f'' + \left(\frac{\lambda' + \chi'}{\lambda + \chi} + \frac{1}{r} \right) f' + \left(\frac{\lambda'}{\lambda + \chi} - \frac{1}{r} \right) \frac{f}{r} + \frac{(\alpha - 3)\lambda' - \chi'}{\lambda + \chi} = 0 \quad (7)$$

Граничные условия на боковой поверхности ($r = r_0$) и на оси ($r = 0$) стержня имеют вид:

$$[\lambda(r_0) + \chi(r_0)] f'(r_0) + [\lambda(r_0) + \alpha p] \frac{f(r_0)}{r_0} + (\alpha - 3)\lambda(r_0) - \chi(r_0) = 0, \quad f(0) = 0 \quad (8)$$

где p — внешнее гидростатическое давление (расчитанное на единицу площади деформированной конфигурации).

Решая краевую задачу (7), (8), находим неизвестную функцию $f(r)$. В большинстве случаев это делается численно. Аналитическое решение может быть найдено только для некоторых простых случаев неоднородности материала.

2. Уравнения нейтрального равновесия. Рассмотрим малое возмущение описанного выше начального деформированного состояния. Возмущенное состояние микрополярного стержня существует при тех же внешних нагрузках и определяется следующими соотношениями:

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} + \eta \mathbf{v}, \quad \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H} - \eta \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} \quad (9)$$

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\Phi \mathbf{e}_\Phi + v_Z \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_R \mathbf{e}_R + \omega_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \omega_Z \mathbf{e}_Z$$

где η — малый параметр, \mathbf{v} — вектор добавочных перемещений, $\boldsymbol{\omega}$ — линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот частиц микрополярной среды, отсчитываемый от начального деформированного состояния.

Линеаризованные уравнения равновесия микрополярной среды имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^\bullet = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G}^\bullet + [\operatorname{grad} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}^\bullet]_\times = 0 \quad (10)$$

Представления линеаризованных тензоров напряжений \mathbf{D}^\bullet и моментных напряжений \mathbf{G}^\bullet для физически линейного материала (5) получены путем линеаризации определяющих соотношений (2) с учетом выражений (9):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\bullet &= [\lambda (\operatorname{tr} \mathbf{Y}^\bullet) \mathbf{E} + (\mu + \kappa) \mathbf{Y}^\bullet + \mu \mathbf{Y}^{\bullet T}] \cdot \mathbf{H} - \\ &- [\lambda \operatorname{tr} (\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + \mu (\mathbf{Y}^T - \mathbf{E}) + (\mu + \kappa) (\mathbf{Y} - \mathbf{E})] \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{G}^\bullet = [\gamma_1 (\operatorname{tr} \mathbf{L}^\bullet) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L}^\bullet + \gamma_3 \mathbf{L}^{\bullet T}] \cdot \mathbf{H} - [\gamma_1 (\operatorname{tr} \mathbf{L}) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L} + \gamma_3 \mathbf{L}^T] \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} \quad (12)$$

Здесь \mathbf{Y}^\bullet — линеаризованная мера деформации, а \mathbf{L}^\bullet — линеаризованный тензор изгибной деформации:

$$\mathbf{Y}^\bullet = (\operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L}^\bullet = \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}^T \quad (13)$$

Линеаризованные граничные условия на боковой поверхности стержня ($r = r_0$) записываются следующим образом:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^\bullet|_{r=r_0} = -p J \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}^{-T} \cdot [(\operatorname{Div} \mathbf{v}) \mathbf{E} - \operatorname{Grad} \mathbf{v}^T], \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}^\bullet|_{r=r_0} = 0 \quad (14)$$

где $J = \det \mathbf{C}$; Div и Grad — дивергенция и градиент в эйлеровых координатах.

Будем полагать, что на торцах стержня ($z = 0, l$) отсутствует трение и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линеаризованным краевым условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_R|_{z=0,l} &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_\Phi|_{z=0,l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}|_{z=0,l} = 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{e}_Z|_{z=0,l} &= \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\omega}|_{z=0,l} = \mathbf{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{\omega}|_{z=0,l} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения (10), описывающие возмущенное состояние равновесия неоднородного микрополярного стержня, представляют собой систему 6 уравнений в частных производных относительно функций $v_R, v_\Phi, v_Z, \omega_R, \omega_\Phi, \omega_Z$. Подстановка

$$\begin{aligned} v_R &= V_R(r) \cos n\varphi \cos \beta z, & v_\Phi &= V_\Phi(r) \sin n\varphi \cos \beta z, & v_Z &= V_Z(r) \cos n\varphi \sin \beta z \\ \omega_R &= \Omega_R(r) \sin n\varphi \sin \beta z, & \omega_\Phi &= \Omega_\Phi(r) \cos n\varphi \sin \beta z, & \omega_Z &= \Omega_Z(r) \sin n\varphi \cos \beta z \\ \beta &= \pi m/l, & m, n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

приводит к отделению переменных φ, z в этих уравнениях и позволяет удовлетворить линеаризованным краевым условиям (15). Тем самым исследование устойчивости сводится к решению линейной однородной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее разрешимости необходимо

дополнительно сформулировать шесть условий в нуле, которые можно получить, потребовав ограниченности неизвестных функций и их производных при $r = 0$:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & V_R(0) = V_\Phi(0) = V'_Z(0) = 0, \quad \Omega_R(0) = \Omega_\Phi(0) = \Omega'_Z(0) = 0 \\ n = 1 : \quad & V'_R(0) = V'_\Phi(0) = V_Z(0) = 0, \quad \Omega'_R(0) = \Omega'_\Phi(0) = \Omega_Z(0) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

3. Численные результаты. В качестве примера был проведен анализ устойчивости неоднородного стержня из пенополиуретана. Полагалось, что характер изменения упругих параметров λ, μ, κ вдоль радиуса одинаков, а микрополярные упругие параметры $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ постоянны

$$\begin{aligned} \lambda(r) &= \lambda_0 \xi(r), & \mu(r) &= \mu_0 \xi(r), & \kappa(r) &= \kappa_0 \xi(r) \\ \lambda_0 &= 797.3 \text{ МПа}, & \mu_0 &= 99.67 \text{ МПа}, & \kappa_0 &= 8.67 \text{ МПа} \\ \gamma_1 &= -26.65 \text{ Па} \cdot \text{м}^2, & \gamma_2 &= 45.3 \text{ Па} \cdot \text{м}^2, & \gamma_3 &= 34.65 \text{ Па} \cdot \text{м}^2 \end{aligned}$$

Было рассмотрено несколько законов, описывающих изменение свойств материала:

$$\begin{aligned} \text{EXP1 : } \xi(r) &= \frac{9999 + 90001^{r/r_0}}{10000}, & \text{SIN1 : } \xi(r) &= 9 \sin\left(\frac{\pi r}{2r_0} - \frac{\pi}{2}\right) + 10 \\ \text{EXP2 : } \xi(r) &= \frac{9 + 91^{r/r_0}}{10}, & \text{SIN2 : } \xi(r) &= \frac{9}{2} \sin\left(\frac{\pi r}{r_0} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Для всех указанных законов круговой стержень является более жестким у края и менее жестким в середине: значения упругих параметров λ, μ, κ при $r = r_0$ в десять раз превышают их значения на оси $r = 0$ (см. рисунок 1).

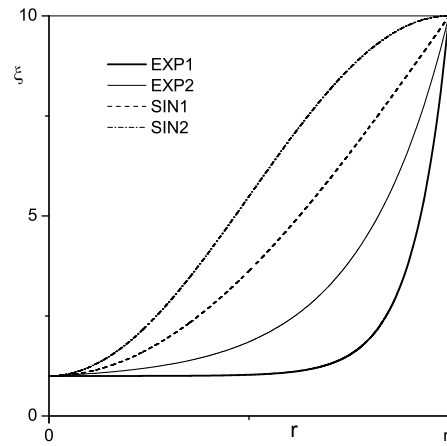


Рисунок 1 – Различные законы $\xi(r)$, описывающие изменение упругих параметров стержня вдоль радиуса

Путем численного решения линеаризованной краевой задачи (10), (14), (16) найдены критические поверхности, соответствующие различным модам выпучивания неоднородного микрополярного стержня. На основании анализа этих поверхностей построены области устойчивости (границы областей устойчивости) в

плоскости параметров нагружения. Для удобства использованы следующие безразмерные параметры: $\delta = 1 - \alpha$, $p^* = p/\mu_0$, $r_0^* = r_0/l_b$, где $l_b = \sqrt{\gamma_2/2(2\mu_0 + \kappa_0)}$ — характерная длина при изгибе. Отношение длины стержня к его диаметру для всех представленных результатов равно 20 ($l = 40r_0$).

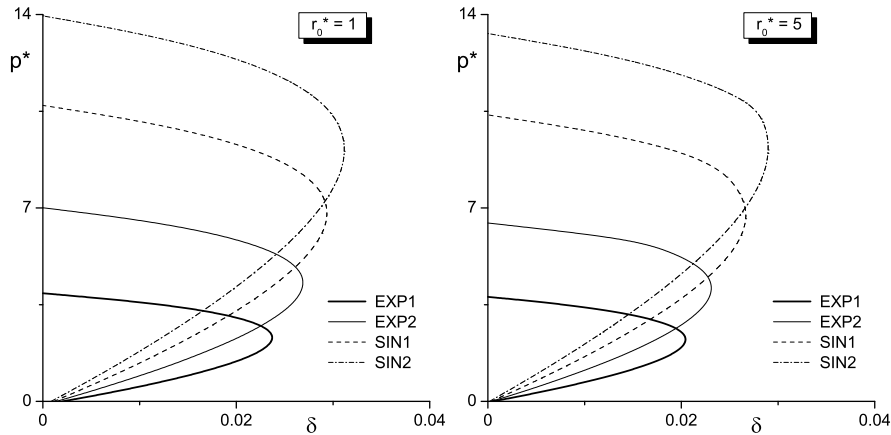


Рисунок 2 – Границы областей устойчивости при разных размерах стержня

На рисунке 2 представлены области устойчивости для различных неоднородных стержней двух размеров: $r_0^* = 1$ и $r_0^* = 5$. Из графиков следует, что относительно небольшое внешнее давление обладает стабилизирующим эффектом на деформацию осевого сжатия. Именно, всегда можно найти некоторое оптимальное значение давления при котором сжатый стержень наиболее устойчив (критическое значение удельного осевого сжатия максимально). Это оптимальное давление зависит от свойств материала и размеров стержня. В тоже время, влияние высокого внешнего давления негативно — оно дестабилизирует деформацию кругового стержня.

Путем сравнения результатов анализа устойчивости для степенных (EXP1, EXP2) и тригонометрических (SIN1, SIN2) законов изменения упругих параметров вдоль радиуса установлено, что микрополярный стержень со степенным характером неоднородности более устойчив при малом внешнем давлении, но менее устойчив при большом. Данный факт наиболее очевиден для стержней малых размеров ($r_0^* < 5$). Для больших стержней влияние характера неоднородности материала на устойчивость оказывается весьма незначительным в случае простого сжатия ($p^* = 0$), но остается существенным при внешнем давлении (см. Рисунок 2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 11-08-01152-а и 12-01-00038-а).

Sheydakov D. N., Sheydakov N. E. *On stability of functionally heterogeneous rods of micropolar materials.* In the present paper, the stability of a nonlinearly elastic circular rods of micropolar material is analyzed. It is assumed that the elastic properties of the rods vary along the radius. Using the linearization method, the neutral equilibrium equations have been derived, which describe the perturbed state of the rod. By solving these equations numerically for some specific materials, the critical curves and corresponding buckling modes have been found, and the stability regions have been constructed in the plane of loading parameters.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИБРОАКУСТИКИ ОБОЛОЧЕК

Юдин А. С.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассматриваются малые колебания оболочек вращения в идеальной сжимаемой неограниченной линейной акустической среде (жидкости) под действием гармонических нагрузок.

Основные уравнения колебаний оболочек в алгоритмизованной форме можно найти в [1, 2] и других источниках. Допускается переменность механических характеристик оболочек вдоль образующей, а также наличие дискретных кольцевых рёбер и дополнительных масс. При наличии неоднородностей типа рёбер, изломов меридиана и др. к основным уравнениям присоединяются условия сопряжения. Оболочки могут быть многосвязными. Символически уравнения гармонических колебаний подкреплённой оболочки запишем относительно амплитуд перемещений в компактной операторной форме:

$$C(\mathbf{U}) + \Omega^2 A(\mathbf{U}) + \mathbf{q} - \mathbf{p} = 0, \quad (1)$$

где C , A – упругий и инерционный операторы оболочки, подкреплённой рёбрами; $\mathbf{U} = \{u, v, w\}$ – амплитуда вектора перемещений; $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ – амплитуда нагрузки; $\mathbf{p} = \{0, 0, p\}$ – амплитуда динамического давления жидкости. Считаем, что операторное уравнение (1) включает в себя условия сопряжения на дискретных рёбрах и граничные условия через область определения операторов C и A .

Уравнения линейной акустики следуют из основных уравнений гидродинамики, включающих уравнения неразрывности, движения и адиабатического состояния, которые приводятся к волновому уравнению $\Delta\Phi = c_c^2\Phi_{,tt}$. Здесь: $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа, ∇ – оператор Гамильтона; Φ – потенциал скоростей точек среды: $\vec{v}_c = -grad\Phi = -\nabla\Phi$, c_c – скорость звука в среде. Волновому уравнению удовлетворяет также акустическое давление p и относительное изменение плотности жидкости. Давление p и потенциал Φ связаны соотношением $p = \rho_c\partial\Phi/\partial t$, где ρ_c – плотность покоящейся среды. Эта связь выполняется внутри и на границе области. Если граница области представляет собой непроницаемую оболочку, то на поверхности контакта $\partial w/\partial t = \partial\Phi/\partial n_o$, где $\partial w/\partial t$ – скорость смещения оболочки, w – смещение по нормали \mathbf{n}_o (внешней к оболочке); $\partial\Phi/\partial n_o = \mathbf{n}_o \cdot \nabla\Phi$ – производная по нормали \mathbf{n}_o .

В стационарном (гармоническом) варианте зависимости от времени типа $\Phi = \Phi_a \cdot \exp(-s_0 i\omega t)$, $s_0 = -1, +1$ волновое уравнение переходит в уравнение Гельмгольца относительно амплитуд: $\Delta\Phi_a + k^2\Phi_a = 0$, $k^2 = \omega/c_c$. В дальнейшем для упрощения записи нижний индекс «а», обозначающей амплитуду, убираем, сохраняя для амплитуд обозначения исходных функций. В этом случае (для амплитуд) имеют место соотношения: $p = -s_0 i\omega\rho_c\Phi$, $\partial\Phi/\partial n_o|_S = -s_0 i\omega w$.

При постановке задачи, внешней по отношению к замкнутой поверхности, для выделения единственного решения (волн, уходящих в бесконечность) привлекаются условия излучения Зоммерфельда $\lim_{R \rightarrow \infty} (\Phi_{,R} - s_0 i k \Phi) = 0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi = 0$, где R — радиус сферической системы отчета с началом координат в конечной области, ограниченной поверхностью (оболочкой) O_o . Эти условия эквивалентны требованию превращения излученных от поверхности волн в сферически расходящиеся затухающие волны при неограниченном удалении вдоль любого луча, начинающегося в ограниченной области.

Частные решения задач для уравнений Гельмгольца о распространении колебаний в жидкости от оболочек (тел) с заданным распределением скоростей на поверхности контакта достаточно просто получаются в сферических и цилиндрических системах координат для сферы и бесконечного кругового цилиндра. Более общие решения строятся в рядах по эффективно вычисляемым специальным функциям (Лежандра, Бесселя, Неймана, Ханкеля). Некоторые приближенные решения получены в сфероидальных координатах для вытянутых эллипсоидов или слабо сплюснутых сфероидов.

Пусть поверхность O_o разделяет пространство на внутреннюю ограниченную область O_+ и внешнюю O_- . Уравнению Гельмгольца и условиям излучения удовлетворяет фундаментальное решение

$$\lambda(x, \xi) = \exp(s_0 i k \bar{R}) / (4\pi \bar{R}), \quad \bar{R} = |x - \xi| = \sum_{j=1}^3 (x_j - \xi_j)^2, \quad (2)$$

где \bar{R} — расстояние между двумя точками пространства. С использованием решения (2) на основе формулы Грина выводится интегральная формула для давления [3]:

$$\iint_R \left[p(\xi) \frac{\partial \lambda(x, \xi)}{\partial n_o} - \frac{\partial p(\xi)}{\partial n_o} \lambda(x, \xi) \right] dS = \begin{cases} 0, & x \in O_+, \\ 1/2 p(x), & x \in O_o, \\ p(x), & x \in O_-. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\xi \in O_o$. Для точки x во внешней области интеграл (3) обычно именуется интегралом Гельмгольца. Его можно применять для вычисления звукового поля по известному распределению давления и градиента давления (смещений, скоростей) на поверхности O_o . При $x \in O_o$ соотношение (3) становится интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно давления p . Таким образом, в строгой постановке задача расчёта колебаний оболочки и поля в среде является интегро-дифференциальной (ИД).

Для решения основной акустической задачи по определению давления и градиента давления на поверхности оболочки разработано три основных численно-аналитических метода: метод собственных форм (МСФ), метод моделирования локального импеданса (ММЛИ) и итерационный.

МСФ использует ИД-постановку и в случае оболочек вращения содержит три этапа. Первый этап — расчёт базовых функций, которыми являются собственные формы колебаний оболочки в вакууме. Второй этап — получение распределений давления и смещений (форм вынужденных колебаний) на поверхности контакта оболочки и среды. Третий этап — расчёт акустического поля в среде.

Базисные функции МСФ определяются в процессе решения задач на собственные колебания для уравнений теории оболочек, в которых окружная координата отделена применением тригонометрических рядов Фурье. Далее коэффициенты Фурье смещений оболочки и давления в жидкости на поверхности контакта представляются в виде рядов по продольным собственным модам колебаний оболочки в вакууме. Использование системы ортогональных базисных функций позволяет выразить коэффициенты разложения давления через коэффициенты разложения перемещений. На основе привлечения интегрального уравнения Гельмгольца на поверхности контакта и применения процедуры Бубнова–Галеркина для каждой окружной моды с номером n формируется система линейных алгебраических уравнений M -го порядка, где M — число удержанных продольных мод. Решение системы даёт распределение давления и градиента давления на гранично-контактной поверхности. Подробное изложение метода дано в [4], где приведены также примеры расчёта диаграмм поля.

Обладая корректностью в решении связанной задачи для системы «оболочка–жидкость», МСФ труден для использования и не обладает гибкостью к изменениям параметров конструкции, поскольку в многовариантных расчётах, связанных с изменением свойств конструкции, собственные функции необходимо пересчитывать. Также ограничена практическая применимость метода по диапазону частот, т. к. естественным препятствием является плотный спектр собственных частот преимущественно изгибных нормальных форм нулевой окружной моды выше частоты первого радиального резонанса.

В этом плане более эффективен метод моделирования локального импеданса (ММЛИ), когда априорно задается вид связи динамического давления и скорости (или амплитуд перемещений) на поверхности оболочки. Привлекательность этого метода состоит в том, что при незначительном усложнении процедуры вычисления правых частей системы уравнений колебаний «сухих» оболочек принципиально не меняется алгоритм расчета, учитывающий внутренние потери.

Из решения уравнений акустики в цилиндрической системе координат методом разделения переменных можно для n -ой окружной моды получить импеданс, связывающий амплитуды динамического давления и скоростей частиц идеальной неограниченной среды на поверхности бесконечно-длинной цилиндрической оболочки радиуса $R_{\text{Ц}}$ [5]:

$$p_{n(s)} = Z_{cn} c_{n(s)}, \quad Z_{cn} = \frac{s_o i \rho_c c_c \gamma_o H_n^{(s_o)}(\gamma)}{\gamma H_n^{(s_o)' }(\gamma)}, \quad (4)$$

где ρ_c, c_c — плотность и скорость распространения звука в среде, $s_o = \pm 1$, $\gamma_o = k R_{\text{Ц}}$, $\gamma = k_r R_{\text{Ц}}$, $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, $k = \omega / c_c$, $k_z = m\pi / L$, k, k_t, k_z — волновые числа. Для плоской задачи, когда решение не зависит от z , $k_z = 0$, $k_r = k$, $\gamma = \gamma_o$; $H_n^{(s_o)}$, $H_n^{(s_o)'}$ — функции Ханкеля и их производные по аргументу. Значению $s_o = 1$ соответствуют функции Ханкеля первого рода, значению $s_o = -1$ — функции Ханкеля второго рода:

$$H_n^{(s_o)}(\gamma) = J_n(\gamma) + s_o i Y_n(\gamma), \quad H_n^{(s_o)' }(\gamma) = n H_n^{(s_o)}(\gamma) / \gamma - H_{n+1}^{(s_o)}(\gamma),$$

где J_n, Y_n — функции Бесселя первого и второго рода.

Перейдем в (4) от скоростей $c_{n(s)}$ смещениям $w_{n(s)}$, учитывая, что $c_{n(s)} = -s_o i \omega w_{n(s)}$:

$$p_{n(s)} = Z_{wn} w_{n(s)}, \quad Z_{wn} = \frac{\omega \rho_c c_c \gamma_o H_n^{(s_o)}(\gamma)}{\gamma H_n^{(s_o)' }(\gamma)}, \quad (5)$$

где Z_{wn} имеет смысл коэффициента динамической жёсткости среды.

Для численной реализации уравнения и формулы переводятся в безразмерный вид по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{n(s)} &= p_{n(s)} \nu_* / (E_* \varepsilon_1^2), \quad \tilde{\rho}_c = \rho_c / \rho_*, \quad \tilde{w}_{n(s)} = w_{n(s)} / h_*, \\ \tilde{c}_c &= c_c / c_*, \quad \Omega = \omega R_* / c_*, \quad \Omega_1 = \Omega / (\tilde{k}_2 \tilde{c}_c) = \gamma_o, \\ \tilde{R}_\Pi &= R / R_*, \quad \tilde{L} = L / R_*, \quad \tilde{k}_2 = 1 / \tilde{R}, \\ \varepsilon_1 &= h_* / R_*, \quad \tilde{\nu}_* = 1 - \nu_*^2, \quad c_* = \sqrt{E_* / (\rho_* \bar{\nu}_*)}, \\ \gamma &= \Omega_1 \kappa, \quad \kappa = \sqrt{1 - \kappa_1^2}, \quad \kappa_1 = m \pi c_c / (\omega L) = m \pi \tilde{c}_c / (\Omega \tilde{L}), \\ c_* &= [E_* / (\rho_* \bar{\nu}_*)]^{1/2}, \quad \bar{\nu}_* = 1 - \nu_*^2, \quad \varepsilon_1 = h_* / R_*, \quad \Omega = \omega R_* / c_*. \end{aligned}$$

Безразмерный аналог формулы (5) имеет вид:

$$\tilde{p}_{n(s)} = \tilde{Z}_{wn} \tilde{w}_{n(s)}, \quad \tilde{Z}_{wn} = \frac{\Omega \tilde{\rho}_c \tilde{c}_c H_n^{(s_o)}(\Omega_1 \kappa)}{\varepsilon_1 \kappa H_n^{(s_o)' }(\Omega_1 \kappa)}.$$

Для $\kappa_1 > 1$ аргумент функций Ханкеля становится чисто мнимым, и их можно представить через функции Макдональда, или модифицированные функции Бесселя первого ($s_0 = 1$) и второго ($s_0 = -1$) рода. В этом случае \tilde{Z}_{wn} представляется в виде:

$$\tilde{Z}_{wn} = \frac{\Omega \tilde{\rho}_c \tilde{c}_c K_n^{(s_o)}(\Omega_1 |\kappa|)}{\varepsilon_1 |\kappa| K_n^{(s_o)' }(\Omega_1 |\kappa|)} \equiv \tilde{Z}_n^-,$$

где $K_n^{(s_o)}$ — функции Макдональда, действительные и положительные при действительном и положительном аргументе, $K_n^{(s_o)' } = n K_n^{(s_o)}(x) / x - K_{n+1}^{(s_o)}(x)$.

При $n \neq 0$ и малом аргументе $x = \Omega_1 |\kappa| \rightarrow 0$

$$K_n^{(s_o)}(x) \rightarrow \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^n, \quad K_n^{(s_o)' }(x) \rightarrow \frac{n!}{4} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1}, \quad \tilde{Z}_n^- \rightarrow -\frac{\tilde{\rho}_c \Omega^2}{\varepsilon_1 n \tilde{k}_2}.$$

При $n = 0$ и $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} K_0^{(s_o)}(x) &\rightarrow 0.11593 - \ln x, \quad K_0^{(s_o)' }(x) \rightarrow -K_1^{(s_o)}(x) \rightarrow 1/x, \\ \tilde{Z}_0^- &\rightarrow -\frac{\tilde{\rho}_c \Omega^2}{\varepsilon_1 \tilde{k}_2} (\ln x - 0.11593). \end{aligned}$$

Представленные формулы выведены для цилиндра. При их использовании на оболочках вращения возникают альтернативные варианты. В одном из них можно заменить R_Π на r — полярный радиус оболочки в заданной точке на образующей, и

тогда $k = 1/R$. В другом варианте можно трактовать k как кривизну нормального сечения в окружном направлении, и тогда $k = k_2 = \sin \beta / r$, где β — угол наклона нормали образующей к оси вращения.

Если торцы оболочки вращения закрыты жёсткими пластинами радиуса $r_{\text{п}}$, то при продольных колебаниях на нулевой моде ($n = 0$) реакцию среды на торцах можно смоделировать через импеданс жёсткого поршня без экрана [6].

Вычисление динамической жёсткости среды оформляется в виде комплексной процедуры с логическими разветвлениями. По разветвлениям реализуются разные формулы в зависимости от того, где вычисляется давление — на оболочке или пластине. Учитывается номер моды и поведение аргумента $x = \Omega_1 |k|$.

Дальнейшим развитием ИД-постановки и ММЛИ являются итерационные методы, где заданный импеданс можно использовать как начальное приближение итерационных процессов (ИП) при решении уравнений основной задачи. Для односвязных оболочек реализовано несколько вариантов ИП, имеющих разные области сходимости [7].

Вместе с тем развитие ИП на более сложные модели конструкций достаточно проблематично. В этих случаях целесообразно использование метода моделирования локального импеданса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мяченков В. И., Григорьев И. В.* Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: справочное пособие. М.: Машиностроение, 1981. 216 с.
- [2] *Юдин А. С.* Устойчивость и колебания конструктивно-анизотропных и артифицированных оболочек вращения. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ. 2011. 362 с.
- [3] *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
- [4] *Ворович И. И., Ционский А. Я., Юдин А. С.* Метод собственных форм решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки вращения, подкрепленной ребрами, в жидкости // Акуст. журн. 1983. Т. 29, № 6. Р. 744–748.
- [5] *Скучик Е.* Основы акустики. В 2-х т. М.: Мир, 1976. Т. 2. 542 с.
- [6] *Румынская И. А.* Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1979. 216 с.
- [7] *Попов О. Н., Ционский А. Я., Юдин А. С.* Итерационный метод решения задачи о вынужденных колебаниях подкрепленных оболочек вращения в жидкости // Акуст. журн. 1987. Т. 33, № 3. С. 539–542.

Yudin A. S. *Numerically-analytical models of shell vibroacoustics.* Small oscillations of shells of revolution in an ideal compressible unlimited linear acoustic medium (liquid) under the action of harmonic loads are considered.

ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ СОЗДАНИЯ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И УСИЛИЙ РАСПОРА

Юдин С. А.¹, Сигаева Т. В.², Юдин А. С.¹

¹НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Анализируются варианты геометрии замкнутых оболочек вращения, применяемых при восстановлении функциональности зданий и сооружений.

В результате сейсмических явлений, ошибок при проектировании и строительстве, просадки грунта и других причин здания и сооружения могут получать деформации и крены. Существуют технологии, с помощью которых выполняется подъем и выравнивание многоэтажных зданий. Для этого эффективны т. н. плоские домкраты (ПД) [1, 2]. Распространён вариант ПД в виде замкнутой герметичной стальной оболочки вращения, образованной двумя круглыми, близко расположенными пластинами, которые по контуру соединены оболочкой типа тора. Конструкция симметрична относительно эквидистантной пластинам плоскости, которую считаем ориентированной горизонтально. Во внутренний объём такой оболочки через штуцер подается высокое давление, пластины расходятся и через вкладыши создают мощное усилие распора. В существующих конструкциях ПД меридиан тора образуется дугами окружностей со сменой знака гауссовой кривизны. Такая форма технологична, но по напряжённому состоянию не является лучшей. Выполнялся поиск других вариантов, в которых можно уменьшить число составляющих участков, сгладить функцию кривизны меридиана, снизить напряженность торовой части оболочки.

Рассматривались варианты, в которых меридиан в целом конфигурировался из отрезков прямых, дуг окружностей, частей т. н. замечательных кривых [4]. Применялись также степенные, дробно-рациональные, экспоненциальные и логарифмические функции. Уравнения кривых записывались с коэффициентами, управляющими формой и масштабами по координатам в рамках основных размеров оболочки.

Оболочки рассматривались в пределах упругости на моделях геометрически нелинейной теории квадратичного приближения [3], определяемой кинематикой:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(\alpha_1, z) &= E_{11}(\alpha_1) + z \cdot K_{11}(\alpha_1), \quad \varepsilon_{22}(\alpha_1, z) = E_{22}(\alpha_1) + z \cdot K_{22}(\alpha_1), \\ E_{11} &= u' + k_1 w + \vartheta_1^2/2, \quad E_{22} = \psi u + k_2 w, \quad \vartheta_1 = -w' + k_1 u, \quad K_{11} = -\vartheta_1', \\ K_{22} &= \psi \vartheta_1, \quad \psi = A_2'/A_2, \quad (\dots)' = d(\dots)/(A_1 d\alpha_1).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь: A_1, A_2 — коэффициенты Лямэ; k_1, k_2 — главные кривизны.

Соответствующие уравнения равновесия в усилиях и моментах, согласованные с (1) на основе принципа Лагранжа, и соотношения упругости для изотропных оболочек имеют вид:

$$T'_{11} + \psi(T_{11} - T_{22}) + k_1 Q_{11} + q_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
Q'_{11} + \psi Q_{11} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + q_3 &= 0, \\
M'_{11} + \psi(M_{11} - M_{22}) - Q_{11} - T_{11} \vartheta_1 &= 0, \\
T_{11} = B(E_{11} + \nu E_{22}), \quad T_{22} = B(E_{22} + \nu E_{11}), \\
M_{11} = D(K_{11} + \nu K_{22}), \quad M_{22} = D(K_{22} + \nu K_{11}), \\
B = Eh/(1 - \nu^2), \quad D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)],
\end{aligned}$$

где B и D — эффективные жесткости оболочки на растяжение-сжатие и изгиб, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Напряжения и интенсивность напряжений определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = E_\nu(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = E_\nu(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad E_\nu = E/(1 - \nu^2), \\
\sigma_n = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22})^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

В силу симметрии относительно горизонтальной плоскости, рассматривались половинки конструкции. В центре (на штифте, центрующем вкладыш) ставились краевые условия скользящей заделки с разрешённым вертикальным перемещением, на краю — жёсткая заделка.

Относительно основных функций $y_1 = T_{11}$, $y_2 = Q_{11}$, $y_3 = M_{11}$, $y_4 = u$, $y_5 = w$, $y_6 = \vartheta_1$, формируется система каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}' = f(\alpha_1, \mathbf{y}) + \mathbf{p}_1(\alpha_1) = 0, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_6), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_6), \\
\mathbf{p} = (-q_1, -q_3, 0, 0, 0, 0),
\end{aligned} \tag{3}$$

где:

$$\begin{aligned}
f_1 = \psi(T_{22} - y_1) - k_1 y_2, \quad f_2 = -\psi y_2 + k_1 y_1 + k_2 T_{22}, \\
f_3 = \psi(M_{22} - y_3) + y_2 + y_1 y_6, \quad f_4 = E_{11} - y_1 - k_1 y_5 - 0.5 y_6^2, \\
f_5 = k_1 y_4 - y_6, \quad f_6 = K_{11}, \\
E_{22} = \phi u + k_2 w, \quad K_{22} = \psi y_6, \quad K_{11} = y_3/D - \nu K_{22}, \quad E_{11} = y_1/B - \nu E_{22}, \\
T_{22} = B(E_{22} + \nu E_{11}), \quad M_{22} = D(K_{22} + \nu K_{11}).
\end{aligned} \tag{4}$$

При реализации алгоритма система уравнений (3), (4) приводилась к безразмерному виду [3] с правыми частями (5), полностью записанных относительно независимых функций:

$$\begin{aligned}
F_1 = \psi[(\nu - 1)y_1 + B(1 - \nu^2)(\psi y_4 + k_2 y_5)] - k_1 y_2 - q_1, \\
F_2 = -\psi y_2 + (k_1 + \nu k_2)y_1 + k_2 B(1 - \nu^2)(\psi y_4 + k_2 y_5) - q_3, \\
F_3 = \psi[(\nu - 1)y_3 + D(1 - \nu^2)\varepsilon_* \psi y_6] + y_2/\varepsilon_* + y_1 y_6, \\
F_4 = y_1/B - \nu \psi y_4 - (k_1 + \nu k_2)y_5 - 0.5 \varepsilon_* y_6^2, \\
F_5 = k_1 y_4 - y_6, \quad F_6 = y_3/(\varepsilon_* D) - \nu \psi y_6.
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\varepsilon_* = h_*/R_*$ — параметр тонкостенности, h_* и R_* — малый и большой линейные нормирующие масштабы.

Обозначим координаты характерных точек меридиана рассматриваемых оболочек на радиальной оси: r_0 — радиус цилиндрического штифта, r_1 — радиус пластины, r_2 — точка сопряжения дуг окружностей, r_m — точка максимума ординаты тора, r_3 — внешний радиус срединной поверхности оболочки. Участки меридиана исходной оболочки являются: отрезок прямой при $r \in [r_0, r_1]$, вогнутая дуга радиуса R_1 при $r \in [r_1, r_2]$, выпуклая дуга радиуса R_2 при $r \in [r_2, r_3]$. Свойством такой формы является скачок кривизны со сменой знака. Это приводит к концентрации напряжений в окрестности стыка дуг при нагружении внутренним давлением.

Другие варианты составлялись из элементов следующих кривых: 1) отрезок прямой при $r \in [r_0, r_1]$, овал Кассини при $r \in [r_1, r_3]$; 2) экспонента в сегменте $r \in [r_0, r_m]$, выпуклая дуга окружности радиуса R_2 при $r \in [r_m, r_3]$; 3) локон Аньези при $r \in [r_0, r_m]$, выпуклая дуга окружности радиуса R_2 при $r \in [r_m, r_3]$; 4) локон Аньези в сегменте $r \in [r_0, r_m]$, улитка Паскаля при $r \in [r_m, r_3]$. Рассматривались также возможности задания меридиана единой кривой во всей области определения $r \in [r_0, r_3]$ с помощью степенной, дробно-рациональной, экспоненциальной и логарифмической функций (варианты 5).

С помощью коэффициентов, управляющих формой и масштабами, размеры элементов кривых подбирались по диаметру $D = 2(r_3 + 1.5) = 520$ мм и высоте торовой части $H_T = 39$ мм. Другие параметры исходной оболочки имеют значения: радиус в окрестности центра $r_0 = 8$, координата первой дуги $r_1 = 204.3$, координата точки сопряжения со второй дугой $r_m = 239$, координата края $r_3 = 258.5$, толщина оболочки $h_1 = 3$, размеры в мм. Во входной информации алгоритма параметры обезразмеривались.

Основное внимание уделялось торовой части, так как она является наиболее нагруженной в рабочем цикле и испытывает сложное напряжённое состояние.

В случае 1 исходим из уравнения $(k_x x^2 + k_y y^2)^2 - 2c_k^2(g_x x^2 + g_y y^2) - A_C = 0$, где $A_C = a_k^4 - c_k^4$. Левая часть — чётная функция по переменным x и y , т. е. имеет симметрию относительно осей координат. В центре (при $x = 0$) касательная к этой кривой горизонтальна, что обеспечивает плавное сопряжение тора с пластиной.

Для вычисления коэффициентов Лямэ и главных кривизн необходимо построение кривой в явном виде, разрешённом относительно вертикальной ординаты. Полагая $Y = y^2$ и вводя обозначения $A_{Kas}(x) = (c_1^2 g_y + k_x k_y x^2)/k_y^2$, $C_{Kas}(x) = (A_C + 2c_k^2 g_x x^2 - k_x^2 x^4)/k_y^2$, получим уравнение: $Y^2 + 2A_{Kas}(x)Y - C_{Kas}(x) = 0$. Нужное решение имеет вид:

$$Y_{K_1}(x) = -A_{Kas}(x) + \sqrt{[A_{Kas}(x)]^2 + C_{Kas}(x)}.$$

После перехода к цилиндрическим координатам (r, Z) , выполнения масштабирования и сдвига кривой по оси r , получим искомый вид функции:

$$Z_{0K}(r) = K_{Mz} \cdot \sqrt{Y_{K_1} \left(\frac{r - r_1}{K_{Mr}} \right)}. \quad (6)$$

Параметры в (6) подбирались из условий соответствия основным размерам оболочки. Вид кривой (6) показан на рис. 1 сплошной линией, пунктир соответствует исходной оболочке (вариант 0). Аналогично строятся другие кривые.

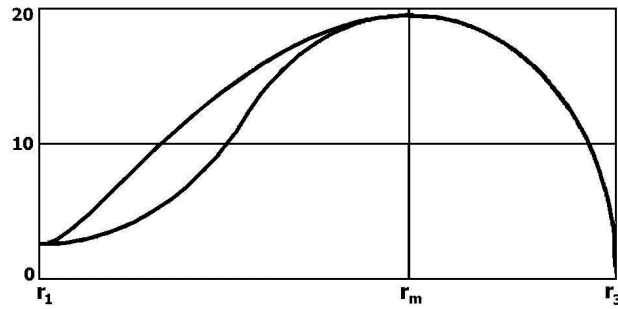


Рисунок 1

В вариантах типа 5) были подобраны кривые, две из которых представлены формулами:

$$f_1(r) = A_{1z} \cdot \left[\lambda_{10} - \lambda_{11} \left(\frac{r - r_{1c}}{A_{1r}} \right)^2 \right] \cdot \exp[-\lambda_{1e}(r_{1c} - r)] \cdot \log \left(\frac{r_{1c} - r}{A_{1r}} \right) + B_{1z}, \quad (7)$$

$$f_2(r) = \frac{-A_{2z}}{r - r_{2c}} \cdot \left(\frac{r_{2c} - r}{A_{2r}} - \lambda_{20} \right)^{n_c} \cdot \exp[-\lambda_{21}(r_{2c} - r)^{n_c}] \cdot \log \left(\frac{r_{2c} - r}{A_{2r}} - \lambda_{20} \right) + B_{2z}. \quad (8)$$

Близкий к (7) и (8) вид имеют кривые, которые получаются удалением из формул (7), (8) логарифмических функций и некоторой перенастройкой параметров.

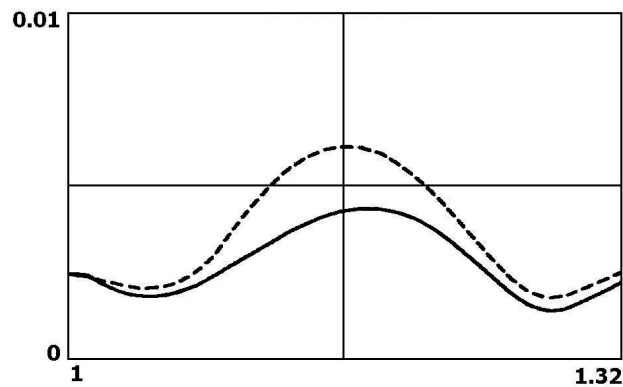


Рисунок 2

Краевая задача решалась алгоритмом метода пристрелки. Задавались два варианта нагружения внутренним давлением ($q_1 = 0, q \neq 0$). Вариант А — давление интенсивности 0.1 МПа (безразмерное $q_3 = 0.002$) действует на всю поверхность оболочки; Б — давление интенсивности 0.6 МПа (безразмерное $q_3 = 0.012$) действует только на торовую часть при $r_1 < r < r_3$. Варианты моделируют начальный этап выборки зазора между грузом и оболочкой и, в какой-то мере, стадию плотного контакта оболочки с вкладышем при наличии сопротивления от сооружения,

компенсирующего внутреннее давление в зоне платформы. Поэтому в варианте нагружения Б центральная часть оболочки с жестким вкладышем работает практически без изгиба.

В качестве примера на рис. 2 представлена интенсивность напряжений для торовой части оболочки варианта 1 с овалам Кассини (сплошные кривые) в сравнении с исходной оболочкой (пунктир) при нагружении типа 2 для срединной поверхности.

Для оболочек типа 1 расположение опасных точек примерно такое же, что и у прототипа, но заметно меньшие уровни напряжений. Аналогичными свойствами обладает вариант 2. Предварительный упругий расчёт уже показывает опасные зоны, где могут развиваться разрушающие напряжения при интенсивных нагрузках.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зотов М. В., Кутасов И. А. Выравнивание зданий и сооружений при помощи домкратных систем // Соврем. пробл. мех. сплошн. среды. Тр. XIII м/нар. конф. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. Т. 1. С. 101–105.
- [2] Юдин А. С., Юдин С. А., Кутасов И. А. Оболочка вращения типа «тор-пластина» при больших перемещениях // Соврем. пробл. мех. сплошн. среды. Тр. XIII м/нар. конф. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. Т. 2. С. 201–205.
- [3] Юдин А. С. Эффективные модели для составных оболочек вращения // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2000, № 3. С. 184–188.
- [4] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980. 976 с.

Yudin A. S., Sigaeva T. V., Yudin S. A. *Forms of shells for the large displacements and forces creation.* Options for the geometry of the closed rotation shells used in the recovery of the buildings functionality are analyze.

К АНАЛИЗУ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ТРЕХМЕРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Якупов Н. М., Киямов Х. Г.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Развит подход к моделированию массивных и тонкостенных элементов конструкций сложной геометрии, заданных в сферических координатах трехмерными конечными элементами. Трехмерный объект задается параметрами единичного куба, который разбивается на конечные элементы. Решение в элементе представляется в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна трех переменных. Рассмотрен пример расчета тонкостенной сферической оболочки с локальным углублением.

Введение. Для обеспечения безопасной работы конструкций и сооружений необходимо совершенствовать каждый из этапов их создания: выбор материала, проекта, технологии и т. д. Особую роль в этой цепочке играет возможности оценки прочности и надежности элементов конструкций и объектов исследования в целом. Развитие современных методов расчета и рост возможностей вычислительной техники позволяет уточнять расчетные схемы — переходить от одномерных расчетных схем к двумерным схемам, а от двумерных расчетных схем к трехмерным схемам. Все это позволяет более точно оценивать напряженно-деформированное состояние конструкций и сооружений [1]. В работах [2–5] изложен эффективный метод расчета тонкостенных оболочечных конструкций, имеющих сложную геометрию — сплайновый вариант метода конечных элементов. Метод, благодаря синтезу идеи параметризации и метода конечных элементов (МКЭ) с бикубической аппроксимацией искомых переменных в пределах каждого элемента, позволяет получать пространственные искривленные согласованные двумерные конечные элементы. Однако метод [2–5] не позволяет с достаточной степенью точности определять напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций в области стыка оболочек, в зонах приложения сосредоточенных нагрузок и точечного крепления тонкостенных конструкций, а также дефектных областях типа трещин и локальных углублений. В связи с этим разработка методов определения напряженно-деформированного состояния на базе объемных (трехмерных) элементов является актуальной задачей. Естественно, трехмерные элементы необходимы и для анализа НДС трехмерных элементов конструкций со сложной геометрией, а также для анализа НДС области пересечения оболочек, зон приложения сосредоточенных нагрузок и точечного крепления, локальных дефектных областей и т. д., в которых оболочечные элементы не эффективны, или применимы.

В работах [6–13] изложен сплайновый вариант метода конечных элементов (СВ МКЭ-3) для расчета в трехмерной постановке элементов конструкций сложной геометрии, заданных в декартовой системе координат. В статье [14] описано развитие СВ МКЭ-3 для расчета в трехмерной постановке элементов конструкций

сложной геометрии, заданных в цилиндрической системе координат. В данной работе рассматриваются расчет тонкостенной сферической оболочки трехмерными элементами СВ МКЭ-3, заданной в сферической системе координат.

Трехмерные элементы в сферической системе координат. Рассматриваемый трехмерный объект сложной геометрии, занимаемый объем V , задается криволинейными координатами t^1, t^2, t^3 единичного куба V_Φ (рисунок 1) таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области V_Φ соответствовала криволинейная пространственная сетка V (рисунок 2):

$$\bar{r}(t^1, t^2, t^3) = \rho(t^1, t^2, t^3) \cdot \bar{e}_m(t^1, t^2, t^3), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_m(t^1, t^2, t^3) &= \bar{e}_1 \cdot \cos \theta(t^1, t^2, t^3) + \bar{k} \cdot \sin \theta(t^1, t^2, t^3), \\ \bar{e}_1(t^1, t^2, t^3) &= \cos \psi(t^1, t^2, t^3) \cdot \bar{i} + \sin \psi(t^1, t^2, t^3) \cdot \bar{j}. \end{aligned} \tag{2}$$

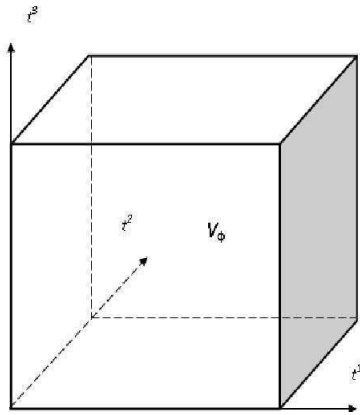


Рисунок 1

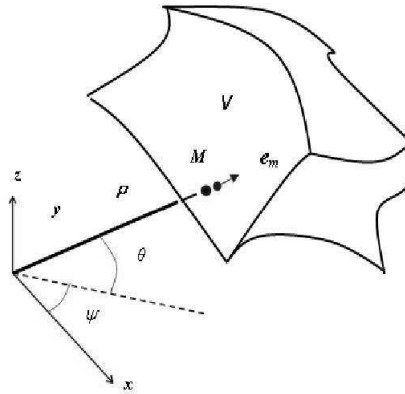


Рисунок 2

Дифференцированием (1) по t^1, t^2, t^3 определяются координатные векторы

$$\bar{r}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^1}, \quad \bar{r}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^2}, \quad \bar{r}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^3}. \tag{3}$$

Далее, компоненты метрического тензора g_{ij} , дискриминант первого метрического тензора g и символы Кристоффеля Γ_{jk}^i определяются по формулам:

$$g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j, \quad g = g_{33}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) - g_{32}(g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}) + g_{31}(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}), \tag{4}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{it} \left(\frac{\partial g_{jt}}{\partial t^k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial t^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t^t} \right).$$

Кинематические соотношения представляются в виде [15]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t^i} + \frac{\partial u_i}{\partial t^j} \right) - \Gamma_{ij}^k u_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

где ε_{ik} — ковариантные компоненты тензора деформации, u_i — ковариантные компоненты вектора переменных. В качестве физических соотношений используются, в частности, соотношения для однородного изотропного тела [15].

$$\sigma^{ij} = f(\varepsilon^{ij}),$$

где σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензора напряжений и деформации. Рассматриваемая область единичного куба V_ϕ разбивается на конечные элементы и решение u , v и w в каждом из них представляется в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна трех переменных [6–14]:

$$\begin{aligned} u &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_u, \quad v = [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_v, \\ w &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_w; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} s^1 &= (t^1 - t_i^1)/h_i^1, \quad s^2 = (t^2 - t_j^2)/h_j^2, \quad s^3 = (t^3 - t_k^3)/h_k^3, \\ h_i^1 &= t^1 - t_i^1, \quad h_j^2 = t^2 - t_j^2, \quad h_k^3 = t^3 - t_k^3, \end{aligned}$$

где ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 — векторы координатных функций по трем соответствующим координатным линиям, F_U , F_V , F_W — трехмерные матрицы компонент искомого неизвестных u , v , w и его производных соответственно. Разрешающие соотношения получаются из вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 W \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho f^i \delta u_i \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 + \int \int_s \rho^i \delta u_i dS, \quad (6)$$

где W — удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела; f^i , p^i — контравариантные компоненты вектора массовых и поверхностных сил; ρ — массовая плотность; g — определитель матрицы метрического тензора; S — поверхность боковых граней тела.

Из (6) получается система 24Φ алгебраических уравнений вида

$$[A]\{U\} = \{R\},$$

где $[A]$ — симметричная матрица жесткости системы ленточной структуры, $\{U\}$ — вектор неизвестных, $\{R\}$ — вектор нагрузки, Φ — суммарное число узлов в рассматриваемом трехмерном объекте.

Пример расчета. Рассмотрена сферическая оболочка с внутренним диаметром $D_{bn} = 200$ см, толщиной $h = 1.5$ см. В области полюсов имеются отверстия $d = 12.56$ см. Модуль упругости $E = 210000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Оболочка разбита на 2 элемента по толщине и по 8 элементов по φ и θ (всего 216 узлов). В расчетной модели углубление образовано путем задания модуля упругости двух элементов в экваториальной области на внешнем слое на 2 порядка ниже модуля упругости оболочки. Геометрические параметры углубления: $62.8 \text{ см} \times 78.5 \text{ см}$. Рассмотрены следующие варианты разбиения толщины оболочки: $t^1 = 0; 0.5; 1.5$ (глубина дефекта 1 см); $t^1 = 0; 0.75; 1.5$ (глубина дефекта 0.75 см); $t^1 = 0; 1.0; 1.5$ (глубина дефекта 0.5 см).



Рисунок 3

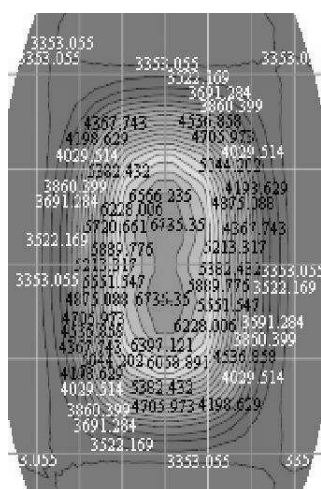


Рисунок 4



Рисунок 5

На рисунках 3, 4, 5 представлены распределения интенсивности напряжений σ_{int} непосредственно под дефектными слоями для рассмотренных вариантов соответственно.

Из рисунков видно, что максимальные напряжения достигают $\sigma_{int} = 914.2$ МПа, $\sigma_{int} = 673.5$ МПа и $\sigma_{int} = 512.1$ МПа, соответственно для рассмотренных случаев. Т.е. с увеличением углубления интенсивность напряжений растет быстрее, чем размер углубления.

Выводы. Развита подход к моделированию массивных и тонкостенных элементов конструкций сложной геометрии, заданных в сферических координатах трехмерными конечными элементами. Рассмотрены примеры расчетов сферической оболочки с локальными углублениями различной величины.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Якупов Н. М. Строительные конструкции: этапы и перспективы развития. Учебное пособие. Казань: КГАСУ, ИММ КазНЦ РАН, 2006. 154 с.
- [2] Якупов Н. М. Об одном методе расчета оболочек сложной геометрии // Исследования по теории оболочек. Тр. семинара. Казань: КФТИ КФАН СССР, 1984. В. 17. Часть II. С. 4–17.
- [3] Корнишин М. С., Якупов Н. М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикладная механика. 1987. Т. 23. № 3. С. 38–44.
- [4] Якупов Н. М., Серазутдинов М. Н. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии. Казань: ИММ РАН, 1993. 207 с.

- [5] Якупов Н. М. Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. Казань: ИММ КНЦ РАН, 1994. 124 с.
- [6] Якупов Н. М., Киямов Х. Г., Якупов С. Н., Киямов И. Х. Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 1. С. 145–154.
- [7] Якупов Н. М., Киямов Х. Г., Киямов И. Х. К исследованию напряженно-деформированного состояния трехмерных элементов конструкций сложной геометрии // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Казань: Фолиант, 2011. Т. 2. С. 147–152.
- [8] Якупов Н. М., Киямов Х. Г. К расчету двумерных и трехмерных элементов конструкций сложной геометрии // Труды Междунар. научно-практической конференции «Инженерные системы – 2009». М.: РУДН, 2009. Т. 2. С. 355–361.
- [9] Киямов Х. Г., Якупов Н. М., Ахмадиев Ф. Г., Киямов И. Х. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета области сопряжения оболочек сложной геометрии // Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-23. Сб. тр. XXIII Межд. науч. конф. Изд-во Саратовского гос. технического ун-та, 2010. Т. 5. С. 27–29.
- [10] Якупов Н. М., Киямов Х. Г. Моделирование тонкостенных элементов конструкции с трещиной трехмерными элементами // Труды XIV Международной конференции. Изд-во ЮФУ, 2010. Т. 1, С. 349–351.
- [11] Якупов Н. М., Киямов Х. Г. Моделирование элементов конструкции с трещиной в трехмерной постановке // Труды Международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2010». М.: РУДН, 2010. С. 163–165.
- [12] Якупов Н. М., Киямов Х. Г. Исследования балок в трехмерной постановке // Труды Международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2011». М.: РУДН, 2011. С. 78–82.
- [13] Якупов Н. М., Киямов Х. Г., Галявиев Ш. Ш., Хисамо Р. З. Методы и подходы исследования напряженно-деформированного состояния конструкций сложной геометрии // Строительство. Известия ВУЗов. № 8 (524), 2002. С. 14–18.
- [14] Кантюков Р. А., Якупов Н. М., Тамеев И. М., Якупов С. Н., Киямов Х. Г., Кантюков Р. Р. Моделирование напряженно – деформированного состояния цилиндрического тела с локальным углублением трехмерными конечными элементами // Наука и техника в газовой промышленности. 2012. № 2. С. 15–24.
- [15] Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.

Yakupov N. M., Kiyamov H. G. *To the analysis of spherical covers three-dimensional elements.* The approach of modelling of massive and thin-walled elements of designs of the difficult geometry set in spherical co-ordinates by three-dimensional final elements is developed. The three-dimensional object is set by parametres of an individual cube which breaks into final elements. The decision in an element is represented in a kind interpolation ermit a cubic spline of three variables. The example of calculation of a thin-walled spherical cover with local deepening is considered.

ИССЛЕДОВАНИЕ АДГЕЗИИ ПЛЕНКИ К ПОДЛОЖКЕ

Якупов С. Н.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Инструментарии для оценки механических характеристик адгезии покрытий к подложке разработаны недостаточно. Отмечаются известные подходы. Описывается способ исследования адгезии пленки к подложке, учитывающий наряду с диаметром образующегося купола, высоту подъема купола. Способ позволяет повысить точность и снизить разброс результатов. Рассмотрен пример.

Введение. В настоящее время создаются различные покрытия и связующие компоненты, характеризующиеся определенными физико-механическими свойствами. Развиваются технологии формирования изоляционного покрытия в системе «подложка—покрытие», которые также влияют на адгезионные свойства и механические характеристики покрытия. Вопросы определения на двумерной основе механических характеристик плоских и сферических мембран и покрытий, включая композиций сложной структуры, рассмотрены, в частности, в работах [1–4, 10, 18], получены патенты РФ №2387973, №2310184. В настоящее время для решения многих технических, экологических и экономических проблем широко используются различные покрытия, наносимые на поверхность элементов конструкций, позволяющие управлять свойствами поверхностного слоя. Создаются многослойные покрытия с различными эксплуатационными и функциональными свойствами. При этом элемент конструкции (подложка) может быть изготовлена из различных материалов. Создание покрытий с заданными свойствами — это одно из перспективных направлений. Обычно, исходя из поставленных задач, покрытия имеют сложную структуру. Сложность структуры покрытия возникает также вследствие появления дефектов в процессе эксплуатации. Покрытие взаимодействует с внешней средой, воспринимает воздействие физических полей, подвергается совместно с подложкой механическим деформациям. При этом существенно могут измениться механические характеристики изоляционного покрытия, а также адгезионные характеристики покрытия, что приводит в негодность покрытие. При выборе покрытия и технологии его нанесения возникают вопросы, связанные с определением: адгезии покрытия к подложке; необходимой толщины и характеристик покрытия; срока службы покрытия и адгезионного состава в зависимости: от окружающей среды; от деформации поверхности; от воздействующих физических полей и т. д. Инструментарии для оценки механических характеристик покрытий разработаны недостаточно. Способ определения прочностных свойств покрытий, включая нанопокрытия, не расчленив систему «подложка-покрытие» рассмотрен в работах [5–7, 10, 19]. Стандартный подход одноосного растяжения [11, 21] малоэффективен или вовсе неприменим для пленок со сложной структурой и с дефектами, отверстиями и включениями [8, 12]. Для покрытий со сложной структурой при наличии нано и микро дефектов (трещин, отверстий, пор и т. д.) не всегда применимы и физические методы, в частности метод «индентора» [20] или модификация этого метода [9].

В связи с этим возникает необходимость создания инструмента для исследования адгезии. Среди известных подходов можно отметить: способ определения прочности сцепления покрытия с основным материалом [15], способ определения адгезии пленки к подложке [16], способ определения адгезии пленки к подложке [17], способ определения адгезии пленки к подложке [13]. В работе [14] описан двумерный подход определения адгезии пленки к подложке, позволяющий повысить точность определения адгезионных свойств материалов и снизить разброс получаемых результатов. Новым в способе является то, что формируют отверстие в подложке путем местного удаления материала подложки до покрытия. Замеряют изменение диаметра основания купола в процессе отслаивания покрытия. Предполагается, что напряжение по радиусу, начиная от кромки, распределено по параболе четвертого порядка. Произведя обработку экспериментальных данных по полученным соотношениям, делают заключение о прочности сцепления (адгезии). Разработка награждена Бронзовой медалью Международного Салона изобретений и инновационных технологий «АРХИМЕД-2012». Однако в работе [14] не учитывается один из важных экспериментальных параметров, а именно высота подъема купола. Учет высоты подъема купола, очевидно, позволяет повысить точность определения адгезионных свойств материалов и снизить разброс получаемых результатов.

Подход определения адгезии пленки к подложке. Устройство для испытания состоит из источника 1 давления рабочей среды с магистралью 5 для подачи рабочей среды и вентиля 2. Магистраль 5 подведена к полости «А» внутри корпуса 12, который имеет фланец 11 для размещения образца. Образец, установленный на 11, прижимают кольцом 10. Между подложкой 3 и фланцем 11 установлена кольцевая по контуру герметизирующая прокладка 13. Полость «А», закрытая образцом, формирует герметичную нагрузочную камеру. На магистрали 5 также расположен манометр 4, стравливающий патрубок 14 с вентиля 6 (рисунок 1).

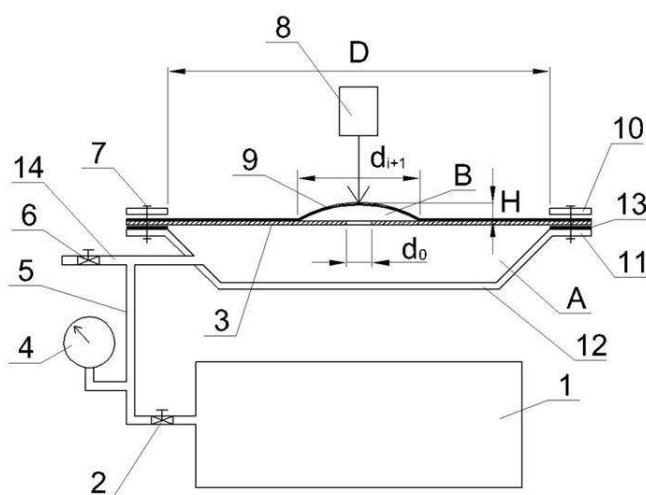


Рисунок 1 – Схема установки

Алгоритм исследования: подготовка образца «подложка + пленка»; установка образца на фланец 11 и зажим кольцом 10 устройства; подача рабочей среды

от источника 1 рабочей среды по магистрали 5 в полость «А», постепенно увеличивая давление; мониторинг за формой купола (за полостью «В»), образующегося при отрыве пленки 9 от подложки 3 при нарастании давления; замер измерительным комплексом 8 высоты подъема купола «Н» в увязке с диаметром d_{i+1} основания купола по контуру отслаивания (рисунок 1); определение усилия отрыва T_{otr} , используя соотношения (1), полученные из нелинейной теории оболочек:

$$T_{otr} = \frac{4}{3}A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}\right)^{k-1}h_0(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right)\cos\beta. \quad (1)$$

где ε_1 , ε_2 — радиальные и кольцевые деформации, h_0 — первоначальная толщина пленки, A и k — некоторые постоянные, характерные для каждого материала покрытия [1].

Угол β в (1) определяется из геометрических параметров образуемого купола (рисунок 2):

$$\cos\beta = \frac{a}{R}, R = (a^2 + H^2) \div 2H, a = D \div 2$$

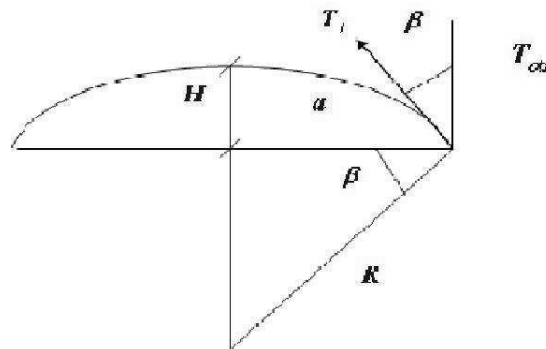


Рисунок 2

Далее определяются напряжения отрыва η_{otr} по формуле:

$$\eta_{otr} = T_{otr}/h_0(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Подход позволяет повысить точность определения адгезионных свойств материалов и снизить разброс получаемых результатов.

Пример. Были подготовлены образцы: на металлическую подложку 3 круглой формы в плане диаметром рабочей части $D = 138$ мм, толщиной $t = 1,95$ мм, с центральным отверстием $d_0 = 6$ мм была приклеена полимерная пленка 9 толщиной $h = 0,026$ мм. В таблице 1 приведены некоторые полученные результаты.

Работа выполнена в рамках проекта: Механика пленочных систем «пленка-покрытие» по Программе Президиума РАН №25П.

Таблица 1

P , МПа	0,100	0,120	0,125	0,130	0,135
H , мм	0,51	0,61	0,64	0,66	0,70
D , мм	7,85	8,12	8,24	8,31	8,52
η_{otr} , МПа	4,672	5,404	5,594	5,694	5,870

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Якупов Н. М., Галимов Н. К., Леонтьев А. А. Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 2. С. 238–243.
- [2] Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н. Методика испытания пленок и мембран в условиях равномерного распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 11. С. 54–56.
- [3] Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Якупов С. Н. Методология исследования механических характеристик тонких пленок и нанопленок // Вестник машиностроения. 2009. № 6. С. 44–47.
- [4] Галимов Н. К., Якупов Н. М., Якупов С. Н. Экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик сферических пленок и мембран со сложной структурой // МТТ. 2011. № 3. С. 58–66.
- [5] Якупов С. Н. Механические характеристики тонких покрытий из оксида титана в системе покрытие - полимерная пленка // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 3. С. 436–444.
- [6] Якупов С. Н. К Определению механических характеристик нанопокровтий // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, Азов. Ростов н/Д. Изд-во ЮФУ. 2010. Т. 2. С. 331–333.
- [7] Якупов С. Н. Определение механических характеристик плоских и сферических пленок и мембран сложной структуры // Тр. Международной научно-практической конференции «Инженерные системы». М.: РУДН. 2011. С. 71–78.
- [8] Якупов Н. М., Якупов С. Н. Пленки неоднородной структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 1. С. 60–70.
- [9] Шугуров А. Р., Панин А. В., Оскомов К. В. Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом наноиндентирования // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, В. 6. С. 1007–1012.
- [10] Якупов С. Н. Определение механических характеристик мембран машиностроительных конструкций. Автореферат диссерт. на соиск. ученой степени канд. техн. наук. 2011. 19 с.

- [11] ГОСТ 14236-81. Пленки полимерные. Метод испытания на растяжение.
- [12] *Якупов Н. М., Якупов С. Н.* Методы расчета пленочных элементов конструкций. Учебное пособие. Казань: КГАСУ, 2007. 117 с.
- [13] Механика разрушения. Разрушение материалов. Редактор Д. Тэплин. Перевод с англ. под ред. Р.В. Гольдштейна. М.: Изд-во «Мир», 1979.
- [14] *Гольдштейн Р. В., Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Якупов С. Н., Якупова Р. Н.* Способ определения адгезии пленки к подложке. Патент РФ на изобретение № 2421707.
- [15] А.с. СССР № 183459 по М. Кл. - G 01 L, опубл.17.06.1966 г., Бюл. № 13.
- [16] Патент РФ № 689411 по М. Кл. - G01N19/04, опубл. 10.05.1995 г.
- [17] Патент РФ № 2207544 по М. Кл. - G01N19/04, опубл. 27.06.2003 г.
- [18] *Yakupov N. M., Yakupov S. N.* Definition of mechanical characteristics of films with the pores, nanoinclusions and nanocoatings // Abstracts. The second Nanotechnology International Forum. 2009. P.344–346.
- [19] *Yakupov S. N.* Way of definition of mechanical characteristics of thin coverings in system «the covering - the substrate //Abstracts. The second International Competition of Scientific Papers in Nanotechnology for Young Researchers. 2009. P. 439–440.
- [20] *Oliver W., Pharr G. J.* Mater. Res. Soc. Symp. Proc. 1997. 473 p.
- [21] ASTM D 412-41.

Yakupov S. N. *Research of adhesion of a film to a substrate.* Toolkits to a substrate are developed for an estimation of mechanical characteristics of adhesion of coverings insufficiently. Known approaches are marked. The way of research of adhesion of a film to a substrate, considering along with diameter of a formed dome, height of lifting of a dome is described. The way allows to raise accuracy and to lower disorder of results. The example is considered.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Якупов С. Н., Гиниятуллин Р. Р.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Точность экспериментально-теоретического метода зависит от точности измерений данных и точности теоретических соотношений. Используемые соотношения нелинейной теории оболочек обеспечивают точность теоретического этапа. На экспериментальном этапе производится фильтрация экспериментальных данных с использованием аппарата статистической обработки. Алгоритм обработки результатов рассмотрен на двух примерах.

Введение. В лаборатории нелинейной механики оболочек ИММ КазНЦ РАН разработан в двумерной постановке экспериментально-теоретический метод исследования механических характеристик тонкостенных элементов [1–9]. Точность экспериментально-теоретического метода, зависящая от точности измерений экспериментальных данных и точности используемых теоретических соотношений, должна быть согласована с поставленными целями: необходимостью качественной оценки влияния того или иного фактора на изменение тех или иных характеристик исследуемого объекта при одинаковых условиях, либо необходимостью количественной оценки, когда значения точности результатов возрастает [10–12].

Говоря о точности теоретического этапа метода можно отметить следующее: на теоретическом этапе [1–9] получены расчетные выражения для упругих, нелинейно упругих и пластических плоских и сферических мембран в случае больших перемещений и деформаций. При этом геометрические соотношения берутся в виде, предложенным В.И. Феодосьев, Х.М. Муштари и К.З. Галимовым [13–15], а физические соотношения для резиноподобных (нелинейно упругих) материалов берутся в виде, предложенным Каппусом [16], для пластических материалов — в виде, предложенным А.А. Ильюшиным [17]. Все это обеспечивает точность получаемых результатов теоретического этапа.

На экспериментальном этапе встает проблема оценки погрешности измеряемых величин, поскольку не существуют идеально точных приборов и методов измерений.

Обычно результаты измерений представляют в виде суммы непосредственно измеренной величины, например в нашем случае, прогиб пленки или мембраны H при данной нагрузке p , и плюс-минус приближенное значение погрешности измерения ΔH :

$$H \pm \Delta H.$$

При этом истинное значение с достаточно высокой вероятностью находится в этом доверительном интервале. Замеры прогибов производились с использованием цифровых индикаторов ИЦ-50 (точностью 0.001 мм) и манометров ДМ-5001 (погрешностью $\pm 1\%$). После статистической обработки производилась фильтрация

экспериментальных данных, обеспечивающая доверительный интервал с надежностью 95%.

Алгоритм статистической обработки. Алгоритм обработки результатов эксперимента [10, 11, 18] рассмотрен на примере исследования полимерных пленок с распределенными отверстиями и мембран, находившихся в агрессивной среде под воздействием магнитного поля. В таблицах 1 и 2 (с сокращениями) представлены экспериментальные данные P и H для пленок с отверстиями и образцов под воздействием магнитного поля, соответственно.

Таблица 1

P , МПа	H_1 , мм	H_3 , мм	H_5 , мм	H_7 , мм	H_9 , мм	H_{11} , мм	H_{12} , мм
0.004	5.52	5.38	5.50	5.47	5.72	5.60	5.48
0.008	6.81	6.74	6.80	6.73	6.97	6.88	6.76
0.012	7.93	7.82	7.88	7.80	7.96	7.89	7.77
0.016	8.92	8.76	8.96	8.80	8.97	8.91	8.79
0.020	9.89	9.76	9.93	9.80	9.96	9.89	9.76
0.024	10.80	10.70	10.84	10.73	10.87	10.96	10.62

Таблица 2

P , МПа	H_1 , мм	H_2 , мм	H_3 , мм	H_4 , мм
0.004	0.36	0.49	0.70	0.51
0.008	0.59	0.74	0.67	0.77
0.012	0.80	0.97	0.89	0.99
0.016	0.97	1.16	1.07	1.19
0.020	1.15	1.34	1.25	1.37
0.024	1.31	1.52	1.43	1.56

1) Определяется среднее значение прогиба образца H_{cp} для каждой ступени нагружения:

$$H_{cp} = \sum_{i=1}^n \frac{H_i}{n},$$

где H_i — прогибы для i -ой мембраны, n — число испытываемых образцов.

2) Вычисляется дисперсия (среднеквадратичное отклонение) S по формуле:

$$S = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (H_i - H_{cp})^2}{n}}.$$

3) Проводится первый этап фильтраций данных эксперимента по критическим значениям ΔH_{kp} :

$$\Delta H_{kp} = \tau_{kp} \cdot S,$$

где τ — критерий, выбираемый из таблиц по статистической обработке [18] для различных уровней значимости от $\alpha = 1 - P$ и объемов выборки n , так для вероятности $P = 0.95$ или $\alpha = 0.05$ и выборки $n = 12$ величина $\tau = 2.39$. При необходимости проводится второй этап фильтрации для обнаружения промахов эксперимента и отсева «выскакивающих» экспериментальных данных.

4) Определяется среднеквадратическое отклонение результатов измерений от среднего:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

5) Вычисляется половина доверительного интервала ΔH :

$$\Delta H = t_{\alpha} \cdot S_{\bar{x}},$$

где t_{α} — распределение отклонений в рассматриваемой выборке (квантилей Стьюдента), употребляется при небольшом объеме выборок, таблица значений которых приводится в литературе по математической статистике, например [19].

Результаты обработки по описанному алгоритму представлены (с сокращениями) в таблицах 3 и 4 для образцов из полимерной пленки и для металлических образцов, находившихся под воздействием магнитного поля, соответственно.

Таблица 3

$H_{\text{ср}}$	S	$S_{\bar{x}}$	ΔH	$H_{\text{ср}} - \Delta H$	$H_{\text{ср}} + \Delta H$	$\Delta H_{kp} = 2.39 \cdot S$
5.5325	0.11310	0.03266	0.07189	5.4606	5.6044	0.2704
6.8233	0.08139	0.02350	0.05170	6.7720	6.8750	0.1975
7.8750	0.07267	0.02098	0.04618	7.8288	7.9212	0.1737
8.8700	0.07324	0.02110	0.04653	8.8233	8.9165	0.1750
9.8500	0.06592	0.01903	0.04188	9.8080	9.8920	0.1575
10.7825	0.09087	0.02623	0.05773	10.7248	10.8402	0.2172

Таблица 4

$H_{\text{ср}}$	S	$S_{\bar{x}}$	ΔH	$H_{\text{ср}} - \Delta H$	$H_{\text{ср}} + \Delta H$	$\Delta H_{kp} = 2.39 \cdot S$
0.458	0.06702	0.03351	0.09315	0.36485	0.55115	0.16017
0.692	0.08016	0.04008	0.11142	0.58058	0.80342	0.19158
0.912	0.08655	0.04328	0.12030	0.79170	1.03230	0.20685
1.098	0.09912	0.04956	0.13778	0.96022	1.23578	0.23690
1.278	0.09914	0.04957	0.13780	1.14020	1.41580	0.23694
1.455	0.11090	0.05545	0.15415	1.30085	1.60915	0.26505

В таблицах 5 и 6 показаны отклонения прогибов для образцов из полимерной пленки и металлических образцов, соответственно.

Из этих же таблиц видно, что все данные укладываются в приведенные критические интервалы и эти данные можно использовать для дальнейших расчетов.

Таблица 5

ΔH_1	ΔH_3	ΔH_5	ΔH_7	ΔH_9	ΔH_{11}	ΔH_{12}
0.0125	0.1525	0.0325	0.0625	0.1875	0.0675	0.0525
0.0133	0.0833	0.0233	0.0933	0.1467	0.0566	0.0633
0.0550	0.0550	0.0050	0.0750	0.0850	0.0150	0.1050
0.0500	0.1100	0.0900	0.0700	0.1000	0.0400	0.0800
0.0400	0.0900	0.0800	0.0500	0.1100	0.0400	0.0900
0.0175	0.0825	0.0575	0.0525	0.0875	0.1775	0.1625

Таблица 6

ΔH_1	ΔH_2	ΔH_3	ΔH_4
0.098	0.032	0.012	0.052
0.102	0.048	0.022	0.078
0.112	0.058	0.022	0.078
0.128	0.062	0.028	0.092
0.128	0.062	0.028	0.092
0.145	0.065	0.025	0.105

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Якупов Н. М., Галимов Н. К., Леонтьев А. А. Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 2. С. 238–243.
- [2] Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н. Методика испытания пленок и мембран в условиях равномерного распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 11. С. 54–56.
- [3] Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Якупов С. Н. Методология исследования механических характеристик тонких пленок и нанопленок // Вестник машиностроения. 2009. № 6. С. 44–47.
- [4] Галимов Н. К., Якупов Н. М., Якупов С. Н. Экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик сферических пленок и мембран со сложной структурой // МТТ. 2011. № 3. С. 58–66.
- [5] Галимов Н. К., Якупов С. Н. К определению модуля упругости сферических оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 4. С. 13–18.
- [6] Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Галимов Н. К., Гальяев Ш. Ш. Способ определения прочностных свойств пленочных материалов. Патент № 2184361.
- [7] Якупов Н. М., Нуруллин Р. Г., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н. Способ определения прочностных свойств тонкослойных материалов. Патент № 2310184.

- [8] Якупов Н. М., Куприянов В. Н., Нуруллин Р. Г., Якупов С. Н. Способ определения прочностных свойств тончайших пленок и нано пленок и устройство для его осуществления. Патент № 2387973.
- [9] Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Гиниятуллин Р. Р., Якупов С. Н. Методика анализа работы конструкций, подверженных коррозионному изнашиванию // Вестник машиностроения. 2012. № 10. С. 36–40.
- [10] Савельев А. И., Фетисов И. Н. Обработка результатов измерений при проведении физического эксперимента. М.: Изд-во МГТУ, 1990. 32 с.
- [11] Якупов С. Н. Определение механических характеристик плоских и сферических пленок и мембран сложной структуры // Тр. Международной научно-практической конференции «Инженерные системы». М.: РУДН. 2011. С. 71–78.
- [12] Гиниятуллин Р. Р. Оценка точности экспериментальных результатов исследований тонкостенных элементов с коррозионными дефектами // Тр. Международной научно-практической конференции «Инженерные системы». М.: РУДН. 2013. С. 50–54.
- [13] Федосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М.: Госиздательство оборонной промышленности, 1949. 343 с.
- [14] Муштару Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Такнигоиздат, 1957. 431 с.
- [15] Галимов К. З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях // ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 6. С. 723–742.
- [16] Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. Конструирование и расчет сооружений из тросов, сеток и мембран. М.: Издательство литературы по строительству, 1967. 320 с.
- [17] Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [18] Гурский Д., Турбина Е. МАТНСАД для студентов и школьников. С.-Пб.: ПИТЕР, 2005. 395 с.
- [19] Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М.: Изд-во «Высшая школа», 1966.

Yakupov S. N., Giniyatullin R. R. *Accuracy estimation of an experimentally-theoretical method.* Accuracy of an experimentally-theoretical method depends on accuracy of measurements of data and accuracy of theoretical ratio. Used ratio of the nonlinear theory of covers provide accuracy of a theoretical stage. At an experimental stage the filtration of experimental data is made, using the device of statistical processing. The algorithm of processing of results is considered on two examples.

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL INVESTIGATIONS OF THE FRICTION BEHAVIOR AND EVALUATION OF WEAR PARAMETERS FOR “ALUMINUM ALLOY — CAST IRON” CONTACT INTERFACE

**Lazarev V. E.¹, Gavrilov K. V.¹, Doikin A. A.¹,
Sequard-Base J.², Vorlaufer G.²**

¹*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk*

²*Austrian Center of Competence for Tribology, Wr. Neustadt*

The tribological behavior of the contact interaction for “aluminum alloy — cast iron” interface from internal combustion engine’s “piston’s skirt — cylinder liner” tribosystem is considered at different modes of the loading. The parameters of the friction are evaluated by means of reciprocating tribometer and, in combination with numerical method, the parameters of wear are calculated and analyzed. The linear integrated intensity of wear was used to evaluate the service life of the “piston — cylinder liner” tribosystem of diesel engine. The achieved results have practical application for simulation of the friction and wear processes for selected engine’s tribosystem.

1. Introduction.

Solving the problem of energy efficiency and reliability of the internal combustion engine is linked with the improvement of their design of tribosystems. The service life of engines is largely determined by the reliability of hydrodynamic tribosystems: the “piston — cylinder”, main and connecting rod bearings of the crankshaft and the turbocharger rotor bearings.

The dynamics of the piston on the lubrication layer in the cylinder of an internal combustion engine with considering of thermal elastic deformations of piston was solved in [1]. Currently, methods of calculating of the dynamics of the “piston — cylinder liner” take into account the most important geometry and modes of loading, and this allow the development of new types of piston profiles with minimal tribological losses [2, 3].

The aim of our work is to simulate the tribosystem “piston — cylinder” of the diesel engine, evaluating its service life by taking into account the experimental determination of the intensity of wear.

2. Simulation of “piston — cylinder” tribosystem.

The main hydromechanical characteristics (HMC) of the “piston — cylinder” tribosystem are: $h_{\min}(\tau)$ — instantaneous values of the minimum oil film thickness; $p_{\max}(\tau)$ — instantaneous values of the maximal hydrodynamic pressure; h_{\min}^* — average value of $h_{\min}(\tau)$; p_{\max}^* — average value of $p_{\max}(\tau)$; $N(\tau)$ and N^* — instantaneous and average power loss of friction; Q^* — the average flow rate of oil in the direction of the combustion chamber; T_{eff}^* — the average effective temperature of the lubricating layer.

Since the contact interaction of the elements is experimentally confirmed by the formation of “rubbing” on the piston skirt of diesel engine after certain hours (fig. 1), the calculated characteristics of tribosystem complemented the areas, where minimal thickness of a lubricant film less than the permissible value $h_{\lim} = \alpha h_{\lim}, \%$.

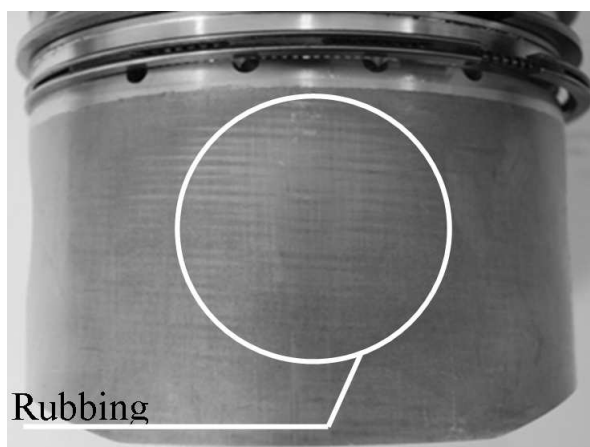


Рисунок 1 – The result of contact interaction of the piston skirt and cylinder liner of diesel engine

The reactions of the lubricating layer were determined based on the results of the numerical integration of the modified Elrod equation for pressure in the lubricating layer and the degree of filling of clearance [4]. For calculating the trajectory of the piston on the lubricating layer in the cylinder, the system of coordinates is fixed to a stationary cylinder. At the start, the origin of this moving coordinate system is at the center of mass of the moving piston. According to [2], it is assumed that movement of the piston in the cylinder is only in the plane perpendicular to the axis of the piston pin. The method [5], based on the backward differentiation formulas (BDF method), was used to solve the equations of motion of the piston on the lubrication layer.

As an example, the calculation of the HMC of the tribosystem is performed for the diesel ChN 13/15 engine. For input data the indicator diagram of nominal power mode ($\omega_0 = 220 \text{ c}^{-1}$) and the viscosity-temperature dependence of engine oils of SAE 5W-30 were used. Results of the calculations for the HMC of tribosystem corresponding to the nominal power mode are shown in tab. 1. It can be seen that $\inf h_{\min}$ is less than the permissible value h_{\lim} and the contacting zone length is approximately 12.5% per cycle.

The results of the evaluation of the HMC of the tribosystem indicate the need for an estimation of the intensity of wear and the service life. To achieve this goal experimental studies of the materials of the tribosystem “piston – cylinder liner” were made.

Таблица 1 – HMC of tribosystem “piston – cylinder” of diesel ChN 13/15 engine

N^* , W	Q^* , l/s	h_{\min}^* , μm	p_{\max}^* , MPa	$\inf h_{\min}$, μm	$\sup p_{\max}$, MPa	$\alpha_{h_{\lim}}$, %
252	0.067	55.7	2.7	8.6	16.0	12.5

3. Experimental study.

An experimental study of the friction coefficient and the wear rate of the materials was carried out on a reciprocating UMT-3MT tribometer. This device allows us to implement a pin-on-plate contact. During the experiment the measurement system device allows to record the normal force, the sliding distance and the friction coefficient.

The pin-sample was made from the piston skirt (aluminum alloy) and plate was made from the cylinder liner (iron alloy) material. The lubrication used in the test was motor oil SAE 5W-30. The main external characteristics that affect the wear rate of tribosystem are the contact pressure p_{cont} and the linear velocity (V). The values of p_{cont} and V used in the tribometer correlated with the pre-calculated values of the normal force F and the velocity of the piston in engine cylinder. It is possible to select the normal load, the frequency and the amplitude of the reciprocating movement of the plate. To approximate the engine conditions the experiments were carried out at a constant temperature of 110°C in a heat chamber of the tribometer. In the course of the experiment the coefficient of friction, friction, acoustic emission, temperature and electrical resistance in tribosystem were recorded continuously.

The linear integrated intensity of wear of the piston material sample was calculated using the formula:

$$I_h = \Delta m / (\rho_{Al} \cdot A_a \cdot L), \quad (1)$$

where Δm – the change in mass of the pin as a result of wear; ρ_{Al} – the density of aluminum alloy; A_a – the nominal contact area; L – sliding distance.

Points in fig. 2 show the experimental values of the wear rate obtained in accordance with the expression (1), which is built on the basis of approximating the local dependence of the wear rate I_h on the contact pressure for the “piston – cylinder” tribosystem:

$$I_h = 2.7 \cdot 10^{-12} \cdot p_{cont}^{1.5}. \quad (2)$$

This dependence was used in the following to evaluate the wear rate and service life of the “piston – cylinder liner” tribosystem of diesel ChN 13/15 engine.

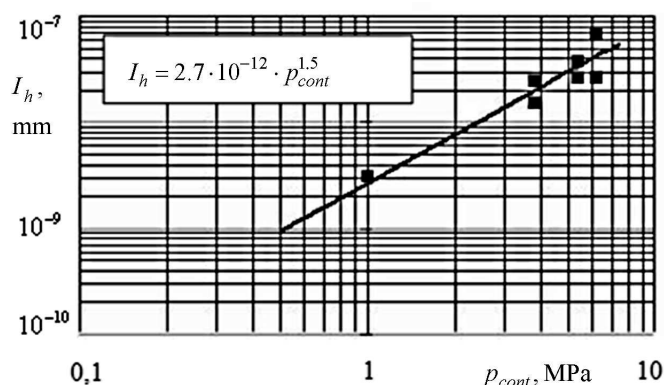


Рисунок 2 – Dependence of the wear rate on the contact pressure

4. Service life definition.

The “piston – cylinder liner” tribosystem is mostly in the hydrodynamic lubrication regime, and, at high loading levels, in the boundary lubrication regime. The latter is important for the determination of the service life of the tribosystem as a whole. Accounting for the duration of each loading condition in the diesel engine in the estimation of the parameters of wear, will allow us to estimate the service life. In

according to theory of elasticity and plasticity [6] the contact interface was classified as a plastic.

The time t_{wear} , needed for a layer with a thickness of h_{wear} to be worn off was estimated on the bases of the experimentally obtained wear rate:

$$t_{wear} = h_{wear} / (I_h \cdot V).$$

Results of the main parameters of loading and wear of the piston skirt for different modes of loading are given in tab. 2.

Таблица 2 – Parameters of loading and wear of the piston skirt

Modes of load, %	0	10	50	100
Time under load, %	10	28	28	34
Nominal pressure, MPa	0.6	0.6	0.7	0.9
Time of contact interaction, %	0.5	1.3	4.1	12.5
Wear rate, m/m	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-12}$	$2.2 \cdot 10^{-12}$
The wear limit, μm	13.0			
Time before the wear limit, hr	277.5	277.5	225.5	164.0
Service life, hr	55500	21346	5500	1312
Average service life, μm	13067			

The estimation of the wear time in hydrodynamic lubrication, based on the duration of contact interaction between surfaces of tribosystem is characterized by the parameter $\alpha_{h_{lim}}$. According to the results of these calculations (see table 1), the proportion of diesel cycle time during which the minimum film thickness $h_{min}(\tau)$ is below the permissible value h_{lim} , accounts for 12.5% for the nominal power mode. When estimating the average service life of the engine loading conditions in the real environment have to be taken into account. According to studies [7] a diesel tractor runs approximately 10% at idle, 28% each with small and medium modes of load and 34% at nominal power.

An increase in load at a constant engine speed results in an increase of nominal force of 1.4 times and increases the proportion of time of contact interaction interface elements in the tribosystem. As a result, the wear rate is increased by 1.7 times and the engine service life is reduced. Accounting for the distribution of the load of the diesel engine in the tractor unit, the average service life of tribosystem calculated to be 13067 hours.

5. Conclusions.

1. The HMC of the “piston – cylinder” tribosystem were calculated for diesel CHN 13/15, which allowed us to estimate the duration of the surfaces contact interaction.

2. Experimental investigations for the materials of the studied tribosystem were performed. The dependence of the wear on the contact pressure was found as a result. It allowed us to estimate the service life of the “piston – cylinder” tribosystem of the diesel engine, depending on its operating modes.

The present work was financially supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (project-2012044 GZ05).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Li D. F.* An Automotive Piston Lubrication Model // ASLE Transaction. 1982. № 26. P. 151–160.
- [2] *Rojdestvensky Y. V., Gavrilov K. V., Doikin A. A.* Solving of optimization task for tribological piston and rotor machines by using the mass conservation algorithm // Friction and lubrication in machines and mechanisms. 2011. № 8. P. 38–43 (in Russian).
- [3] *Putintsev S. V., Anikin S. A., Ivanov O. V.* PISTON-DHT program for calculate the parameters of the dynamics, hydrodynamics and tribology of combustion engine piston // The Engine - 2007 International Conference Materials, dedicated to the 100th anniversary of the Bauman engine designing school. M.: Bauman, 2007. P. 235–241 (in Russian).
- [4] *Prokopiev V. N., Boyarshinova A. K., Gavrilov K. V.* Hydromechanical characteristics heavy-loaded bearings including non-round pins and bushings // Problems of mechanical engineering and reliability of the machines. 2009. № 5. P. 98–104 (in Russian).
- [5] *Prokopiev V. N., Rojdestvensky Y. V., Shirobokov N. V.* Improving the efficiency of algorithms for calculating the output parameters of heavy-loaded sliding bearing of transport vehicles engines // Bulletin of the Ural inter-regional branch of automobile transport. 1999. № 2. P. 28–32 (in Russian).
- [6] *Kragelsky I. V., Alisin V. V.* Friction, wear and lubrication: reference guide. In 2 books. M.: Mechanical Engineering, 1978. Vol. 1. 400 p (in Russian).
- [7] *Kavyarov I. S., Knyazkin V. V., Magarill B. L.* Productivity increasing reserves of industrial tractor units // Tractors and agricultural machinery. 1973. № 7. P. 6–8 (in Russian).

Лазарев В. Е., Гаврилов К. В., Дойкин А. А., Секвард-Бэйш Й., Воляфар Г.
Расчетно-экспериментальное исследование процессов трения и изнашивания в трибосопряжении «алюминиевый сплав — легированный чугун». Рассмотрены различные режимы нагружения трибосопряжения «алюминиевый сплав — легированный чугун», являющегося аналогом трибосистемы «поршень — цилиндр» двигателя внутреннего сгорания. Экспериментальная оценка параметров трения и изнашивания проводилась на трибометре, позволяющем моделировать возвратно-поступательное движение образцов. На основании экспериментально полученной зависимости линейной интегральной интенсивности изнашивания от параметров нагружения выполнена оценка ресурса трибосистемы «поршень — цилиндр» дизельного двигателя. Достигнутые результаты имеют практическое значение при оценке параметров трения и изнашивания рассматриваемой трибосистемы двигателей внутреннего сгорания.