

Российская академия наук
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов
управления Российской академии наук
Научный совет РАН по механике конструкций из композиционных
материалов
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
прикладной механики Российской академии наук
Федеральное государственное бюджетное учреждение Московский
авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

СБОРНИК ТРУДОВ
IV-го Всероссийского симпозиума

(4 – 6 декабря 2012 года, г. Москва)

Том 1.

МОСКВА

«Механика композиционных материалов и конструкций».
Сборник трудов IV-го Всероссийского симпозиума в 2-х томах. Том 1.
Москва, 4 – 6 декабря 2012 г. – М.: ИПРИМ РАН, 2012. – 246 с.

В том 1 Сборника трудов симпозиума включены работы участников симпозиума, доложенные на секциях: “Прочность гетерогенных материалов, композитов, адаптивных материалов и конструкций” и “Аэро- и гидромеханика, реология сред с нанонаполнителями”.

Составители сборника:

Карнет Ю.Н., Яновская Ю.Ю., Левин Ю.К., Яновский Ю.Г.

© ФГБУН Институт прикладной механики
Российской академии наук, 2012

**Прочность гетерогенных
материалов, композитов,
адаптивных материалов
и конструкций**

ПРОЧНОСТЬ И ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ ДИСПЕРСНО-АРМИРОВАННЫХ ТЕРМОПЛАСТОВ В УСЛОВИЯХ ХОЛОДНОГО КЛИМАТА

Бабенко Ф.И., Сухов А.А., Федоров Ю.Ю., Саввинова М.Е.

ФГБУН Институт проблем нефти и газа Сибирского отделения Российской академии наук, г. Якутск, Россия

РЕЗЮМЕ

Анализируются результаты исследований кратковременной прочности и трещиностойкости образцов стеклонаполненного полиамида при старении в условиях холодного климата. Выбраны и обоснованы параметры оценки трещиностойкости материала: предел трещиностойкости и вязкость разрушения (критический коэффициент интенсивности напряжений) при температурах испытаний 293К и 213К, соответственно. Сформулирован механизм старения, заключающийся в деградации адгезионной составляющей прочности связи на границе раздела компонентов, образовании участков отслоения и появления фрикционной составляющей, вклад которой зависит от температуры испытаний образцов и объясняет сравнительно малую изменчивость низкотемпературных показателей прочности образцов, экспонированных в условиях неотапливаемого склада. Выявленные характерные особенности являются, по мнению авторов, общими для дисперсно-армированных композитов на основе термопластов.

Ключевые слова: прочность; трещиностойкость; температура испытаний; дисперсно-армированный термопласт; волокно; старение

Усиление термопластов волокнистыми наполнителями является основным направлением получения конструкционных (инженерных) композитов на основе термопластов. Несмотря на наличие определенного объема информации по влиянию факторов окружающей среды на свойства дисперсно-армированных термопластов, включая ПА6-211-ДС, в различных климатических зонах [1], информация для зоны холодного климата весьма ограничена, а данные по изменению (сохраняемости) низкотемпературных показателей свойств практически отсутствуют [2].

Исследовали изменения показателей прочности и трещиностойкости, включая низкотемпературные, стеклонаполненного полиамида марки ПА6-211-ДС, ГОСТ 17648-83 после старения в условиях холодного климата, продолжительностью 48 месяцев.

1. МЕТОДЫ ИСПЫТАНИЙ

Экспозиция образцов производилась на климатической станции «Якутск» в условиях открытой площадки и неотапливаемого склада, согласно ГОСТ 9.708-83.

Испытания на кратковременную прочность и трещиностойкость проводились, соответственно, на образцах лопатках (тип 2 ГОСТ11262-80, 150x10x4мм) и на образцах брусках (80x10x4 мм) с надрезом, изготовленных методом литья под давлением, при температурах 293К, 213К и скорости 5 мм/мин. Надрезы наносились ножовочным полотном по узкой боковой грани образца-бруска и заострялись лезвием безопасной бритвы, согласно методике [3].

2. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ

В работе [4] показано, что наиболее эффективным критерием оценки трещиностойкости квазиоднородных композитов, к которым относятся дискретно-армированные стеклопластики, являются критические коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), определяемые в рамках линейной механики разрушения (ЛМР). Такой подход считается обоснованным, если с определенной точностью выполняется условие независимости критического КИН от длины трещины. В указанной связи были произведены две расчетно-экспериментальные оценки.

2.1. Оценка применимости положений ЛМР, которая обеспечивается выполнением условий локализованной текучести [5]

$$B, b-l, l > L = 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_T} \right)^2 \quad (1)$$

где: B, b – толщина и ширина бруска, l – длина надреза; σ_T – предел текучести (вынужденной высокоэластичности); K_{IC} – критический коэффициент интенсивности напряжений (КИН) для трещины отрыва в условиях плоского деформированного состояния (ПДС).

В случае одноосного растяжения образца с односторонним надрезом

$$K_{IC} = \sigma \sqrt{\pi l} \xi(l/b) \quad (2)$$

где σ – разрушающее напряжение образца с надрезом; l – длина надреза; b – ширина образца; $\xi(l/b)$ – табулированная функция [5].

При этом размеры зоны «пластичности» – необратимой деформации в вершине трещины-надреза можно оценить соотношениями

$$r_p(\text{ПНС}) \approx \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_T} \right)^2 \quad r_p(\text{ПДС}) \approx \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_T} \right)^2 \quad (3)$$

где r_p (ПНС) и r_p (ПДС) так называемые «радиусы пластических зон» для плоского напряженного состояния и плоской деформации, соответственно.

Расчетно-экспериментальные значения показателей прочности, трещиностойкости и характерных оценочных параметров ЛМР для исследованных материалов приведены в таблице 1. Так как деформационно-прочностные диаграммы образцов в испытаниях на кратковременную прочность имеют практически линейный характер без явно выраженного предела текучести σ_T в расчетах полагали, $\sigma_T = \sigma_p$, где σ_p – разрушающее напряжение (прочность) образца.

Таблица 1.

Расчетно-экспериментальные значения показателей прочности, трещиностойкости ($l/b=1/3$) и характерных оценочных параметров применимости ЛМР для исходных и экспонированных (неотапливаемый склад, 48 месяцев) образцов ПА6-211-ДС при $T=293\text{K}$ и 213K .

Показатель	σ_p , МПа		K_{IC} , МПа·м ^{1/2}		K_{IC}^2/σ_p^2 , 10 ⁻³ м		L , 10 ⁻³ м		r_p (ПНС), 10 ⁻³ м		r_p (ПДС), 10 ⁻³ м	
	293	213	293	213	293	213	293	213	293	213	293	213
исходный	175	250	7,0	7,1	1,60	0,81	4,00	2,02	0,26	0,13	0,09	0,04
экспонированный	112	250	5,8	5,9	2,68	0,56	6,70	1,39	0,43	0,09	0,14	0,03

Анализ данных, представленных в табл.1, подтверждает корректность применимости ЛМР для всех испытанных образцов при $T=213\text{K}$ и её неприменимость при $T=293\text{K}$. Действительно, при $T=293\text{K}$ и $V=4\text{мм}$, имеем $L=4\text{мм}=V$ для исходных и $L=6,7\text{мм} > V$ для экспонированных образцов, что противоречит неравенству (1).

2.2. Проверка независимости критических КИН от длины надреза при температуре $T=213\text{K}$ осуществлена по результатам испытаний на трещиностойкость исходных образцов (принимая во внимание, что K_{IC} исходных образцов больше K_{IC} экспонированных) с различной глубиной надреза и построением графика в координатах: $\sigma^2 y^2 \sim 1/l$, где $y = \sqrt{\pi} \cdot \xi(l/b)$. График представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, см. рис.1, что и подтверждает концепцию $K_{IC} = \text{const}$.

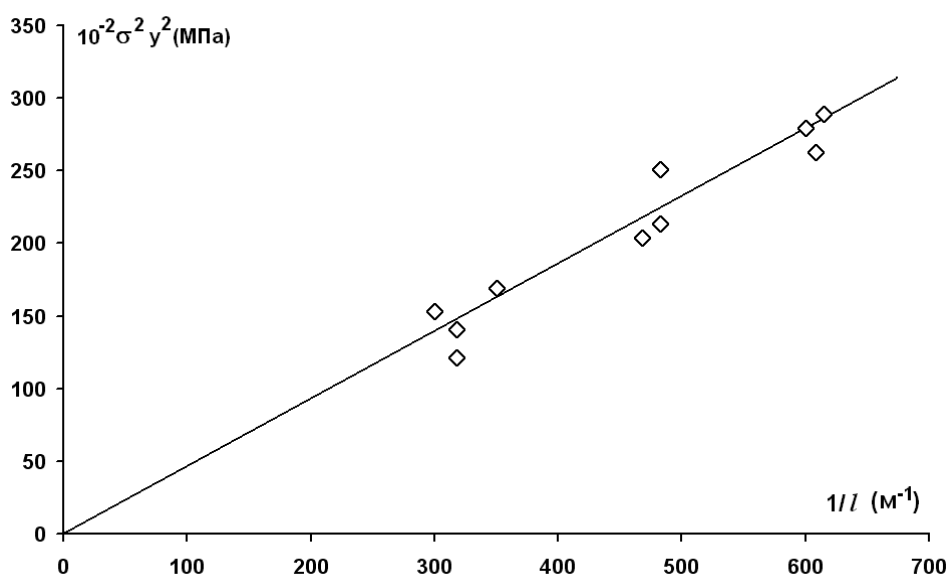


Рис.1. Проверка применимости концепции K_{IC} для исходных образцов ПА6-211-ДС при температуре 213К.

Таким образом, трещиностойкость материала, в зависимости от температуры испытаний, будем оценивать показателями:

- при $T=213\text{K}$ – вязкостью разрушения K_{IC} — постоянной материала в условиях испытаний, значения которой не зависят от длины надреза – трещины;
- при $T=293\text{K}$ – пределом трещиностойкости $K^*_{IC} = K_{IC}(l/b=1/3)$ - условным критическим КИН при длине надреза-трещины $l/b=1/3$ [5].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Экспериментальные результаты, представленные на рис.2-4 и в таблице 1, выявляют следующие характерные особенности эффектов старения материала:

1. Изменение показателей свойств материала в условиях экспонирования на открытой площадке более существенны, чем в условиях неоттапливаемого склада, см.рис.2.
2. Низкотемпературная прочность материала σ_p (при $T=213\text{K}$) менее чувствительна к воздействию факторов климата, чем прочность при комнатной температуре σ_p (при $T=293\text{K}$). Более того, в случае экспозиции образцов в условиях

неотапливаемого склада, низкотемпературная прочность материала не изменяется, см. рис.3.

3. Показатели трещиностойкости материала: K_{IC} (при $T=213K$) и K^*_{IC} (при $T=293K$) мало чувствительный к условиям экспонирования образцов и изменяются практически одинаково ($\Delta K_{IC} \sim \Delta K^*_{IC} \sim 20\%$) по окончании срока экспозиции (см.рис.4).

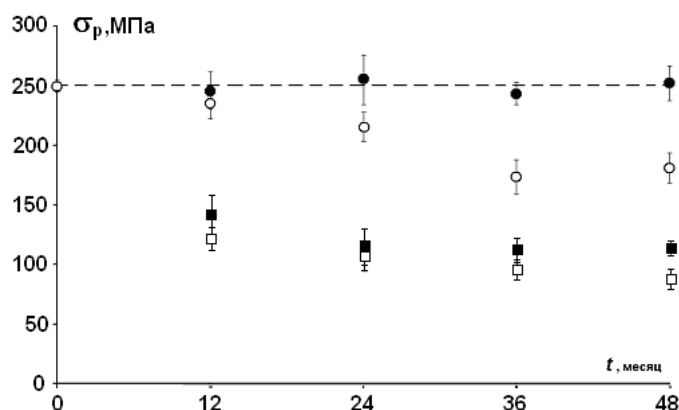


Рис.2. Зависимость кратковременной прочности ПА6-211-ДС от времени экспозиции. Температура испытаний 293К (□, ■) и 213К (○, ●). ●, ■ - неотапливаемый склад; ○, □ - открытая площадка.

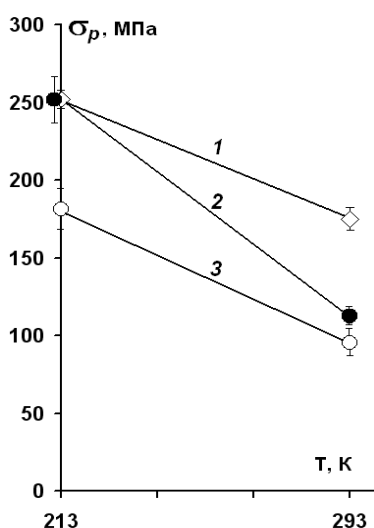


Рис.3. Температурная зависимость прочности исходных и экспонированных образцов ПА6-211-ДС:

- 1 – исходные значения (◇);
2 – неотапливаемый склад (●), 48 мес.
3 – открытая площадка (○), 48 мес.

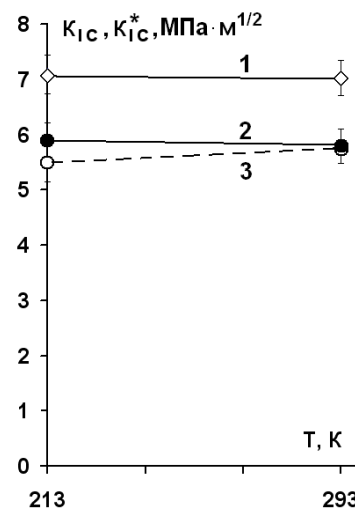


Рис.4. Температурная зависимость трещиностойкости исходных и экспонированных образцов ПА6-211-ДС:

- 1 – исходные значения (◇);
2 – неотапливаемый склад (●), 48 мес.; 3 – открытая площадка (○), 48 мес.

Разница в изменении показателей свойств в случаях открытой и закрытой экспозиции (особенность 1) объясняется наличием и отсутствием поверхностного состаренного слоя в экспонированных образцах, проанализирована в [2] и может быть практически нивелирована механическим удалением слоя с поверхности образца, состаренного в условиях открытой экспозиции.

Интерпретация отмеченных особенностей (2 и 3) в изменении показателей свойств, с учетом сформулированной выше цели работы, требует обращения к особенностям структуры дисперсно-армированных композитных материалов (КМ) и модельным описаниям их механического поведения.

Достижение эффективного усиления термопластов при армировании дискретным волокном определяется двумя факторами: прочностью связи на границе раздела полимер-наполнитель и длинами волокон, а точнее характеристическим отношением длин волокон к их диаметру [6]. При соблюдении технологических параметров переработки, в готовом изделии волокно имеет длину, превышающую «критическую» величину ($l_{кр}$), благодаря чему оно является не просто наполнителем, но и выполняет роль армирующего элемента, что и обеспечивает изделиям высокий уровень прочностных свойств [7]. Напомним, что под «критической» понимается минимальная длина волокна, обеспечивающая передачу нагружающего усилия от матрицы на волокно вплоть до значений, равных прочности волокна [6].

Прочность связи на границе раздела волокно-матрица является функцией адгезионного взаимодействия компонентов КМ, поврежденности границы (наличие пор и других технологических дефектов) и поля остаточных технологических напряжений. В наиболее распространенных моделях механического поведения дисперсно-армированных КМ она характеризуется эффективной сдвиговой прочностью границы раздела (τ_A). При механическом нагружении образца КМ в момент, когда касательные напряжения на границе раздела волокно-матрица (τ) превысят значение сдвиговой прочности связи (τ_A), начнется отслоение волокна от матрицы. Отслоившийся участок волокна при движении соприкасается с матрицей, что приводит к возникновению сил трения между ними. По мере развития процесса отслоения увеличение отслоившегося (фрикционного, $l_{\phi}/2$) участка приводит к увеличению трущихся поверхностей, поэтому суммарная сила трения возрастает пропорционально величине отслоившегося участка.

В общем случае (см. рис.5) критическая длина передачи нагрузки на волокно ($l_{кр}/2$) будет состоять из двух участков: отслоения ($l_{\phi}/2$) и адгезионного ($l_A/2$):

$$\frac{l_{кр}}{2} = \frac{l_{\phi}}{2} + \frac{l_A}{2} \quad (4)$$

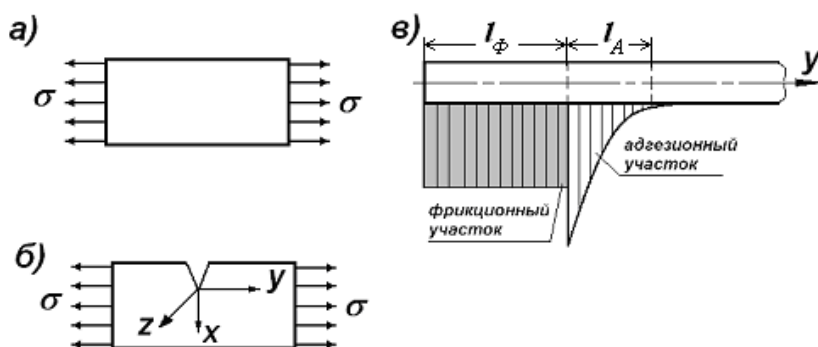


Рис.5. Схемы: нагружения образцов в испытаниях на прочность (а), трещиностойкость (б) и передачи механического напряжения от матрицы на волокно, содержащее отслоившийся участок, при растяжении образца материала, армированного коротким волокном в испытании на прочность (в).

Принципиальное значение имеет то обстоятельство, что отслоившийся участок волокна ($l_{\phi}/2$) оказывается нагруженным и, согласно (4), потенциально способен

обеспечить «догружение» волокна вплоть до его предела прочности, т.е. до разрушения. Физическая природа сил трения в этом случае может быть различной, включая взаимодействие шероховатых поверхностей волокна и матрицы в процессе скольжения. Оно возникает в результате действия радиальных напряжений обжатия волокна со стороны матрицы, которые, в свою очередь, могут быть вызваны как разницей коэффициентов Пуассона компонентов, так и остаточными технологическими напряжениями усадки и, наконец, термическими напряжениями, возникающими в условиях испытания при конкретной температуре опыта. В частности, согласно имеющимся оценкам [8], вследствие значительной разницы в коэффициентах термического расширения волокон и матрицы, следует ожидать существенного увеличения вклада фрикционной составляющей в механизм передачи напряжений через границу раздела волокно-матрица при понижении температуры контрольных испытаний на кратковременную прочность при растяжении от 273К до 213К.

Возвратимся к интерпретации особенностей (2) и (3). Будем полагать, на основании собственных результатов (электронно-микроскопические исследования поверхностей разрушения образцов) [2] и литературных данных [9,10], что первопричиной потери прочности материала при старении является нарушение связи волокно-матрица, т.е. в процессе климатического воздействия происходит деградация адгезионной составляющей прочности связи на границе раздела. При этом в испытании на прочность при растяжении на концах армирующих волокон появляются участки отслоения, а в механизме передачи усилий на волокно возникает фрикционная составляющая (рис.5а,в), которая компенсирует уменьшение адгезионной составляющей прочности связи волокно-матрица и обеспечивает практическую неизменность показателей прочности экспонированного образца при температуре испытаний $T=213K$.

В испытаниях на вязкость разрушения вкладом фрикционной составляющей можно пренебречь, т.к. в условиях испытаний (выполнены условия обеспечивающие применимость ЛМР) в вершине надреза-трещины экспонированного образца (рис.5б.) возникает состояние плоской деформации - объемное напряженное состояние (всестороннее растяжение), с компонентами

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (5)$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Таким образом, изменения показателей трещиностойкости КМ могут явиться информативными контрольными параметрами сравнительной оценки изменения адгезионной составляющей прочности связи волокно-матрица в дисперсно-армированном материале.

4. ВЫВОДЫ

На основании результатов исследований изменчивости показателей кратковременной прочности и трещиностойкости стеклопластика ПА6-211ДС выявлен и интерпретирован механизм старения материала, заключающийся в деградации адгезионной составляющей прочности связи на границе раздела компонентов, образовании участков отслоения и появления фрикционной составляющей, вклад которой зависит от температуры испытаний образцов и

объясняет сравнительно малую изменяемость низкотемпературных показателей прочности образцов, экспонированных в условиях неотапливаемого склада.

Сформулированные выше характерные особенности проявления эффектов старения в изменении показателей свойств зависят от условий экспозиции и температуры контрольных испытаний на кратковременную прочность и трещиностойкость и являются, по мнению авторов, общими для всего класса дисперсно-армированных КМ на основе термопластов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суровцев В.И., Саморядов А.В., Безуглая Т.Н. и др.* Изменение структуры и свойств стеклонаполненного полиамида 6 при длительном хранении в различных климатических хонах // Пластические массы. – 1989. – №8. – С.23-26.
2. *Бельчусова Н.А., Бабенко Ф.И.* Старение стеклонаполненного полиамида в условиях холодного климата // Пластические массы. – 1999. – №8. – С.13-17.
3. *Williams J.* A Linear Elastic Fracture Mechanics Standard for Determining K_{IC} , G_C for Plastics / 7th European conference on Fracture. Proceedings. – London: EMAS, 1988. – P.405-408.
4. *Делявский М.В., Бережницкий Л.Т., Онышко Л.И.* Определение кратковременной макропрочности и трещиностойкости ортотропных композитных материалов при сложном напряженном состоянии // Механика композитных материалов. – 1992. – №1. – С.55-66.
5. *Черепанов Б.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
6. *Кулачинская О.Б., Айзинсон И.Л.* Композиционные материалы на основе термопластов с волокнистыми наполнителями // Пластические массы. – 2001. – №6. – С.9-11.
7. *Зеленский Э.С., Куперман А.М., Горбаткина Ю.А. и др.* Армированные пластики – современные конструкционные материалы // Рос.хим.ж. – 2001. – Т.XLV. – №2. – С.56-74.
8. Термоустойчивость пластиков конструкционного назначения. / Под ред. Е.Б. Тростянской. – М.: Химия, 1980. – 240 с.
9. *Овчинский А.С.* Процессы разрушения композиционных материалов: имитация микро-и макромеханизмов на ЭВМ. – М.: Наука, 1988. – 278 с.
10. *Саморядов А.В.* Стеклонаполненный полиамид марки Армамид ПА СВ 30-3М: переработка, свойства и применение // Пластические массы. – 2001. – №6. – С.16-20.

УДК 678.067:621.643

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ АРМИРОВАННЫХ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ ДЛЯ ГАЗОПРОВОДОВ В УСЛОВИЯХ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

Бабенко Ф.И., Федоров Ю.Ю., Саввина А.В.

*ФГБУН Институт проблем нефти и газа Сибирского отделения Российской
академии наук, г. Якутск, Россия*

РЕЗЮМЕ

В квазистатических испытаниях на кратковременную прочность при растяжении армированных синтетическими нитями полиэтиленовых труб (АПТ) в конструкции которых предусмотрен адгезионный слой, связывающий армирующую и полиэтиленовые оболочки трубы, экспериментально установлена зависимость температуры вязко-хрупкого перехода в механизме разрушения модельных образцов от скорости испытаний, которая при скорости 100 мм/мин достигает значения 0°C. Интерпретирован механизм разрушения модельного образца АПТ, заключающийся в растрескивании технологического слоя, адгезионно связанного со слоями ПЭ80 (внутренняя и внешняя оболочки АПТ), способность которых к торможению трещины и определяет переход от вязкого разрушения к хрупкому при понижении температуры испытаний.

Ключевые слова: армированная полиэтиленовая труба; температура; адгезионный слой; прочность; трещина; вязкость; хрупкость

Действующие на настоящее время нормативно-технические документы предусматривают ряд температурных ограничений на применение полиэтиленовых труб при строительстве подземных газопроводов, в частности, определяющим служит требование о недопустимости охлаждения стенки трубы газопровода в условиях температуры эксплуатации ниже минус 15°C (СП 42-103-2003).

АПТ производства ЗАО «Сибгазгаппарат» (ТУ 2248-003-35323946-2003) состоит из трех слоев: внутреннего и внешнего из полиэтилена марки ПЭ80 и промежуточного – армирующего, состоящего из двух слоев арамидных нитей, перекрестно-намотанных в направлении осей максимальных напряжений и покрытых адгезионным слоем (см. рис.1).

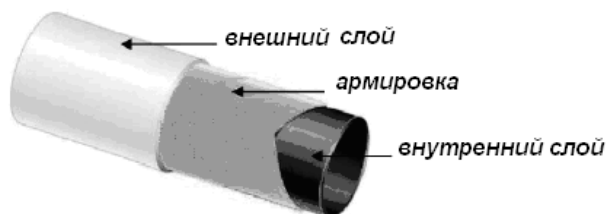


Рис.1. Конструктивная схема армированной полиэтиленовой трубы.

Модельные образцы изготовлены из АПТ диаметрами 140мм (ЗАО «Сибгазгаппарат») и номинальной толщиной стенки 17,5. Образцы лопатки - в соответствии с ГОСТ 11262-80, тип 2. Продольная ось образца совпадает с осью трубы. Испытательная машина – универсальная разрывная машина UTS-20К с температурной камерой. Температура испытаний: +20°C, +5°C, 0°C, -5°C, -10°C, -

15°C, -30°C и -60°C, при скоростях движения захватов испытательной машины 25-1000 мм/мин.

В настоящей работе исследовали температурную зависимость кратковременной прочности от скорости испытаний на растяжение модельных образцов АПТ. Отметим основные особенности проявления механизма разрушения модельных образцов, выявленные при скорости испытаний 25 мм/мин, см.рис.2.

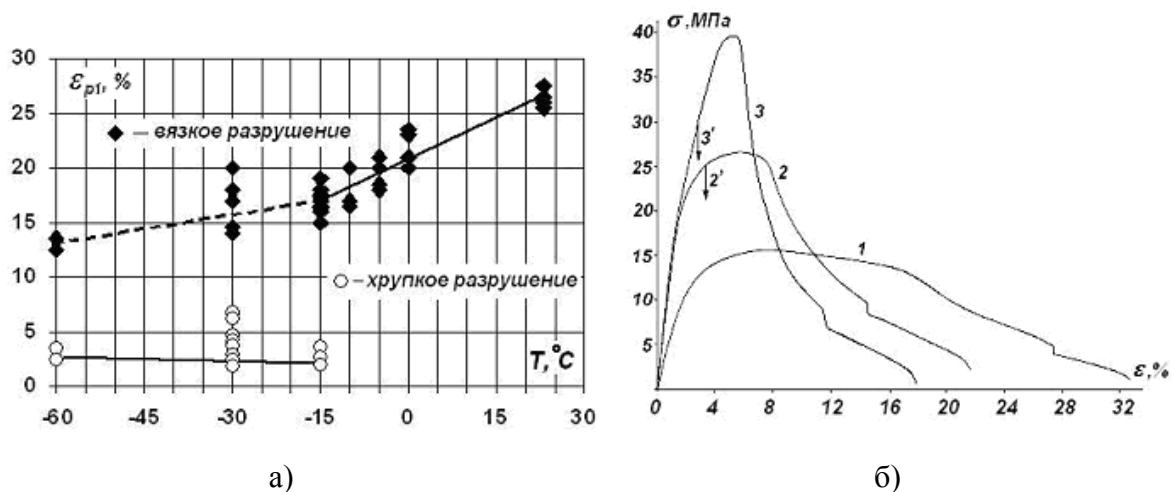


Рис.2. Температурная зависимость относительного удлинения при разрыве внешнего слоя модельного образца АПТ (а): \blacklozenge - вязкий разрыв; \circ - хрупкий разрыв и характерные диаграммы деформирования образцов АПТ (б) при растяжении: 1 - +20°C; 2 и 2' - -15 °C; 3 и 3'- при температуре -60°C.

При температурах испытаний $T \geq -10^\circ\text{C}$ все образцы разрушились вязко (см.рис.2). Вязкие разрушения модельных образцов характеризуются развитием необратимой деформации (переход в шейку и дальнейшее удлинение) раздельно в двух слоях: в поверхностном и внутреннем. На диаграммах растяжения ($\sigma - \epsilon$) момент разрыва первой шейки (разрушения внешнего слоя модельного образца АПТ) отмечается явно выраженной «ступенькой» и соответствует ϵ_{p1} (см.рис.2).

При $T \leq -15^\circ\text{C}$ наряду с вязкими, имеют место и хрупкие разрушения (см.рис.2). Здесь и ниже термин «хрупкое разрушение образца» используется как в случае хрупкого разрыва всего образца, так и в случае хрупкого разрыва только внешнего (поверхностного для трубы) слоя образца АПТ. Иными словами, под «хрупким» разрушением следует понимать процесс хрупкого разрушения, как минимум, наружного слоя образца.

Сравнительные результаты испытаний (при скоростях 25, 100 и 1000 мм/мин) приведены на рис.3 и 4.

На основании визуального и оптико-микроскопического анализа поверхности разрушенных образцов констатируем, что механизм разрушения модельного образца АПТ в испытаниях на растяжение, заключается в растрескивании технологического слоя (либо границы раздела), адгезионно связанного со слоями ПЭ80 (внутренняя и внешняя оболочки АПТ), способность которых к торможению трещины и определяет переход от вязкого разрушения к хрупкому (вязко-хрупкий переход - ВХП) при понижении температуры испытаний (см. рис.5).

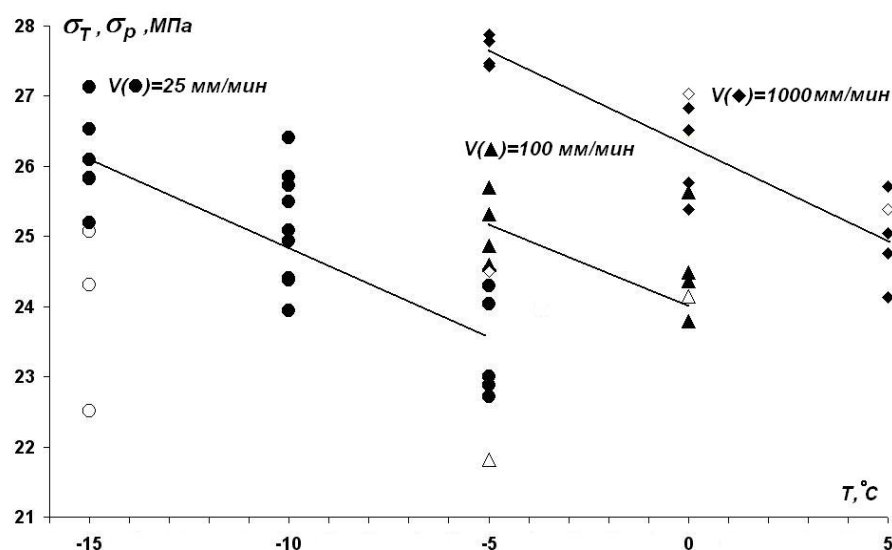


Рис.3. Температурные зависимости прочности при разрыве внешнего слоя АПТ при скорости испытаний: 25, 100 и 1000 мм/мин. ●, ▲, ◆ – вязкие, ○, △, ◇ – хрупкие разрушения.

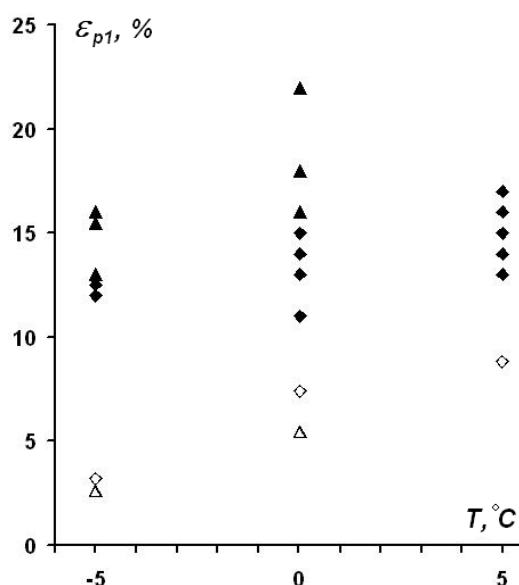
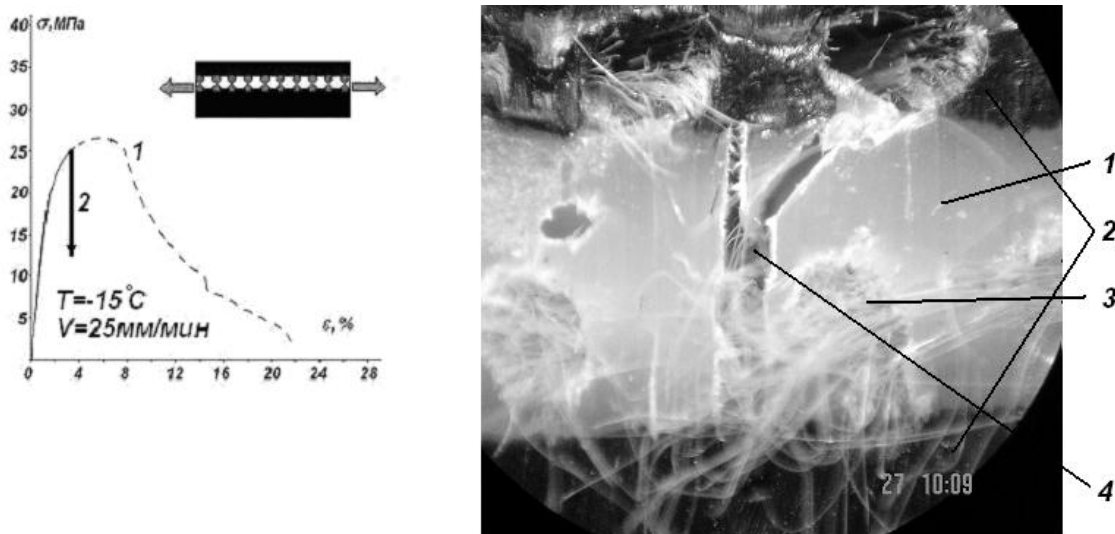


Рис.4. Температурные зависимости относительной деформации при разрыве внешнего слоя АПТ при скорости испытаний: 100 и 1000 мм/мин. ▲, ◆ – вязкие; △, ◇ – хрупкие разрушения.

Переход от вязкого разрушения модельного образца АПТ к хрупкому должен определяться ВХП в механизме разрушения защитных полимерных (ПЭ80) слоев АПТ. Иными словами, возможность движения разрушающей модельный образец АПТ трещины в полимерном слое (ПЭ80) должна определяться напряженно-деформированным состоянием в её вершине, которая зависит от температуры и скорости (через зависимость предела текучести) испытаний.

Действительно, как показывают данные оптической фрактографии рельефа поверхностей излома модельных образцов АПТ (рис.6), возможность движения разрушающей трещины в защитных слоях (ПЭ80) – хрупкое разрушение образца, определяется переходом из состояния плоского напряжения (ПНС) в состояние

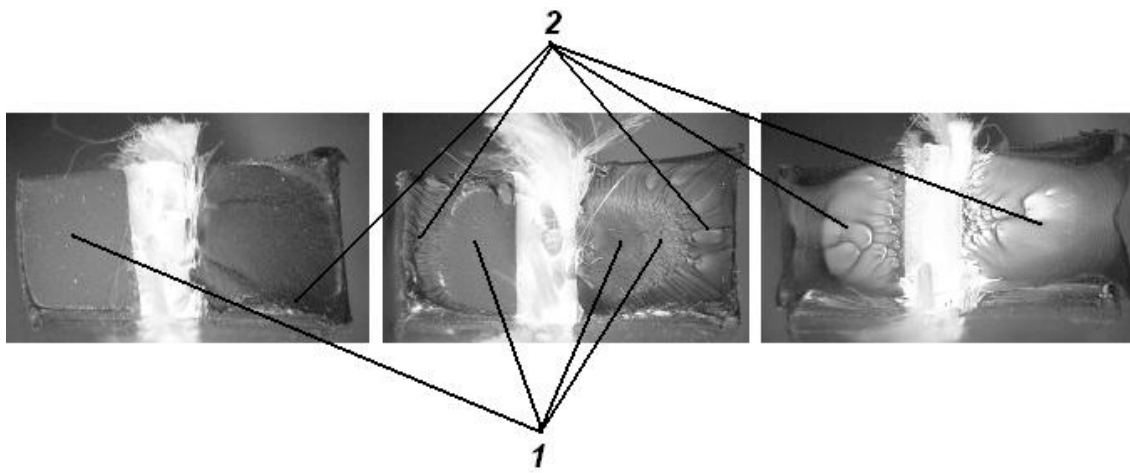
плоской деформации (ПДС) в вершине трещины при понижении температуры и повышении скорости испытаний на растяжение.



а)

б)

Рис.5. Деформационно-прочностные диаграммы, условная схема модельного образца АПТ (а) и фото трещины в адгезионном слое образца (б), где: а) 1, 2 – вязкий и хрупкий характер разрушения; б) 1 – адгезионный слой; 2 – полиэтиленовые оболочки АПТ; 3 – армирующая нить; 4 – трещина.



а)

б)

в)

Рис.6. Фото поверхностей разрушения при одноосном растяжении ($V=1000$ мин/мин) образцов АПТ иллюстрирующее элементы рельефа поверхности, разрушившееся в ПДС – 1 и в ПНС – 2, состояниях, при температурах испытаний: а) -5 °C; б) 0 °C; в) $+5$ °C.

Отметим, что проникновение разрушающей трещины (сформированной в технологическом слое) в защитные слои АПТ (перфорация границы раздела адгезив – защитный слой), очевидно, становится возможным при выполнении соответствующих критериев МР, а именно, $K_I=K_{IC}$, где K_I – коэффициент интенсивности напряжений в вершине разрушающей трещины, выходящей из адгезионного слоя, K_{IC} – критический коэффициент интенсивности напряжений материала защитного слоя для условий ПДС.

Природа трещинообразования, развивающегося в технологическом слое АПТ (либо на границе раздела, см.рис.5,б.), требует специального исследования, без которого в настоящий момент невозможно убедительно интерпретировать случайный характер проявления вязко-хрупкого перехода в механизме разрушения модельного образца АПТ. При этом отметим, что спектр растрескивания среднего (адгезионного) слоя, определяющий хрупкое разрушение в температурном диапазоне испытаний, характеризуется параметрами: по $2,0 \div 6,7\%$; по $\sigma = 16,4 \div 31,7 \text{ МПа}$.

Таким образом, в квазистатических испытаниях на кратковременную прочность при растяжении армированных синтетическими нитями полиэтиленовых труб, в конструкции которых предусмотрен адгезионный слой, связывающий армирующую и полиэтиленовые оболочки трубы, экспериментально установлена зависимость температуры вязко-хрупкого перехода (ВХП) в механизме разрушения модельных образцов от скорости испытаний, которая при скорости 100 мм/мин достигает значения 0°C . При этом механизм разрушения модельного образца АПТ в испытаниях на растяжение, заключается в растрескивании технологического слоя, адгезионно связанного со слоями ПЭ80 (внутренняя и внешняя защитные оболочки АПТ), способность которых к торможению трещины и определяет переход от вязкого разрушения к хрупкому при понижении температуры испытаний. Возможность движения разрушающей трещины в защитных слоях АПТ – хрупкое разрушение образца, определяется переходом из состояния плоского напряжения (ПНС) в состояние плоской деформации (ПДС) в вершине трещины при понижении температуры и повышении скорости испытаний на растяжение.

Представляется, что полученный результат подчеркивает необходимость дальнейшего уточнения и согласования существующих регламентных требований по применению труб и эксплуатации полиэтиленовых трубопроводов в регионах холодного климата.

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ ПРЕГРАД И СТОХАСТИЧНОСТИ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПРОНИКАНИИ ИНДЕНТОРОВ

Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С.

Институт механики Национальной Академии наук Армении, г. Ереван, Армения

РЕЗЮМЕ

В представленном докладе рассматриваются теоретические и экспериментальные результаты, полученные авторами в ходе многолетних исследований задач проникания твердых тонких тел в деформируемые среды при наличии существенной анизотропии в области пластичности, имеющей место вблизи тела позади фронта разрушения, и области упругости среды впереди этого фронта. Показано, теоретически и проверено экспериментально, что в случае, когда предел текучести трансверсально-изотропной пластической среды по радиусу вдвое больше предела текучести по оси проникания, имеет место эффект значительного увеличения напряжения, действующего со стороны среды на тело и уменьшения глубины проникания.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача проникания твердого индентора в трансверсально изотропную преграду. В основе упрощающих предположений лежат кинематические гипотезы, принятые в [1,2], а также известные гипотезы механики сплошной среды для слоистых композитов, моделирующие трансверсально изотропную среду.

Вопросы деформирования слоистых композитов рассматривались во многих работах как общего характера, так и ориентированных на различные приложения: от механики слоистых преград до геомеханики и геофизики [3,5,6]. Для преград, состоящих из большого числа слоев целесообразно использовать приближение сплошной среды. Такое приближение применимо в тех преградах, где толщина слоев значительно меньше характерных величин, в частности глубин проникания индентора в преграду, на которых заметно меняются действующие на слои нагрузки.

При этом, если между слоями имеется и сохраняется при деформировании сильная связь, не возникает качественных отличий от деформирования слоистого массива, рассматриваемого в приближении сплошной среды, от обычного, в той или иной мере неоднородного и анизотропного упругого тела, обладающего соответствующими эффективными деформационными характеристиками [2].

Качественные отличия от обычного упругого тела возникают в случаях, когда сдвиговое сопротивление межслойных границ в массиве достаточно мало или становится малым в ходе деформирования массива, так что слои могут в значительной мере проскальзывать (один относительно другого).

При отсутствующем или слабом сопротивлении межслойных границ на отрыв к проскальзыванию может добавляться отставание слоев (отслоение). В местах, где градиенты нагрузок на слои значительны, при проскальзывании слоев может стать существенным их изгибное деформирование. Если, вместе с тем, эти градиенты не слишком велики, эффекты изгибного деформирования можно учесть в приближении сплошной среды, считая слои тонкими пластинами.

Одной из особенностей композиционных материалов является то, что путем соответствующего подбора концентраций, пространственного распределения и свойств компонентов удастся получить материалы с весьма сильно отличающимися механическими и реологическими характеристиками.

В этой связи возникает необходимость разработки методов теоретического расчета свойств композита по известным свойствам, концентрации и пространственному распределению компонентов.

В настоящей работе предлагается способ улучшения сопротивляемости преграды прониканию индентора за счет анизотропии трансверсально-изотропной среды. Даются упрощенная теоретическая модель расчета и технология изготовления слоистой преграды, имеющие соответствующие необходимые механические характеристики. Как показано в [1,2] экспериментально и теоретически не менее существенный эффект уменьшения глубины проникания индентора дает применение импульсного разряда.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Вначале рассматривается задача проникания в ортотропную среду, т.е. предполагается, что среда имеет три плоскости симметрии, как в упругой, так и в пластической областях [2].

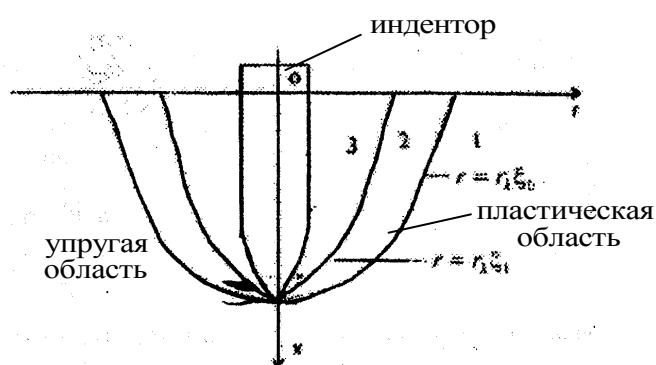


Рис.1.

Выбрав ось Ox по направлению одной из осей симметрии, совпадающей с направлением проникания, Or в качестве радиальной оси, можно для связи тензора скоростей деформации и тензора напряжений, в предположении гипотезы плоских сечений [1,2], которая имеет место для тонких инденторов вблизи в цилиндрической системе координат, записать [4]

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \bar{a} [H(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + G(\sigma_{rr} - \sigma_{xx})] \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \bar{a} [H(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})] \\ \dot{\epsilon}_{xx} &= \bar{a} [G(\sigma_{xx} - \sigma_{rr}) + F(\sigma_{xx} - \sigma_{\theta\theta})] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Условие текучести Мизеса запишется в виде

$$H(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + G(\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 + F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})^2 = 1 \quad (1.2)$$

где F, G, H даются формулами

$$2F = \frac{1}{\tau_{s0}^2} + \frac{1}{\tau_{sx}^2} - \frac{1}{\tau_{sr}^2}, \quad 2G = \frac{1}{\tau_{sx}^2} + \frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{\tau_{s0}^2},$$

$$2H = \frac{1}{\tau_{sr}^2} + \frac{1}{\tau_{s0}^2} - \frac{1}{\tau_{sx}^2}$$
(1.3)

где $\tau_{sx}, \tau_{sr}, \tau_{s0}$ – пределы текучести в соответствующих направлениях в цилиндрической системе координат, \bar{a} в формулах подлежит определению.

В упругой области, т.е. для $r > r_k \xi_0$, связь между компонентами напряжений и деформаций можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{r\theta} &= a_{44}\varepsilon_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} &= a_{12}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{xr} &= a_{55}\varepsilon_{xr} \\ \sigma_{xx} &= a_{13}\varepsilon_{rr} + a_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{\theta x} &= a_{66}\varepsilon_{\theta x} \end{aligned}$$
(1.4)

где a_{ij} – упругие постоянные.

Уравнение равновесия, с учетом тонкости проникающего индентора, можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$
(1.5)

где принята малость динамических членов.

С учетом непрерывности перемещений и скоростей на фронте раздела упругой и пластической областей, а также на бесконечности, из соотношений (1.1)÷(1.5) и $\dot{\varepsilon}_{xx} \approx 0$ можно получить выражение для радиального напряжения на проникающем инденторе [1,2]

$$\sigma_{rr} = -\sqrt{\frac{3(F+G)}{\alpha}} \ln \xi_0 + (a_{11}n_1 + a_{12})B_0^{-1/2}$$
(1.6)

где

$$B_0 = \frac{12\mu^2}{\tau_s^2}, \quad n_1 = -1, \quad \xi_0^2 = \frac{\mu\sqrt{3}}{\tau_s} \frac{1}{1 + (\varepsilon_s + c_v \Delta t)\rho_1 \frac{3\mu}{\tau_s^2}}$$

$$\frac{1}{\xi_0^2} = (1 - n_1)B_0^{-1/2} - \frac{(\varepsilon_s + c_v \Delta t)\rho_1 B_0^{1/2}}{a_{11}n_1 + a_{12}}$$

c_v – удельная теплоемкость, Δt повышение температуры, ρ_1 – плотность среды.

На практике легче изготовить анизотропные среды, моделируемые трансверсально изотропной средой, слоистые бронематериалы, следовательно изучение задачи проникания в трансверсально изотропную среду представляет практический интерес.

Для трансверсально изотропной среды с плоскостью изотропии r, θ в предыдущих формулах имеет место $F = G$, $a_{11} = a_{22} = \lambda + 2\mu$, $a_{12} = \lambda$, $n_1 = -1$, $a_{13} = a_{23}$, $a_{44} = \mu$, $a_{55} = a_{66}$, где λ, μ – коэффициент Ламе. С учетом того, что для трансверсально изотропной среды $\tau_{sr} = \tau_{s0}$, для радиального напряжения, действующего на проникающий индентор, получится выражение

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{\tau_{sx}\tau_{sr}}{\sqrt{4\tau_{sx}^2 - \tau_{sr}^2}} \ln \left[\mu^2 \left(\frac{4}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{\tau_{sx}^2} \right) \right] - \frac{\tau_{sr}\tau_{sx}}{\sqrt{4\tau_{sx}^2 - \tau_{sr}^2}}$$
(1.7)

Из формулы (1.7) видно, что для сильно выраженной анизотропии, т.е. при $\tau_{sr}/\tau_{sx} \rightarrow 2$, $\sigma_{rr} \rightarrow \infty$. Этот теоретический результат подсказывает, что при соответствующем выборе параметров анизотропии, а именно при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ можно существенно увеличить напряжение на инденторе, тем самым увеличить силу сопротивления прониканию индентора.

Разумеется, обращение σ_{rr} в бесконечность при $\tau_{sr} = 2\tau_{sx}$ есть асимптотический результат, являющийся также следствием принятой гипотезы плоских сечений, однако он правильно указывает на существенное увеличение сопротивления прониканию, учитываемое при конструировании указанного слоистого композита, что качественно, на основании уточненной теории, показано в [1,2].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для моделирования трансверсально изотропной среды были изготовлены пакеты из разных материалов с разными толщинами. Образцы изготавливались чередованием ~ 50 тонких слоев из разных металлов. В качестве металлов брались алюминий–свинец, дюраль–свинец, дюраль–алюминий с разными комбинациями толщин пластин. При этом слоистый материал с кусочно–постоянными свойствами моделировался трансверсально изотропной средой с приведенными характеристиками.

Среднее значение τ_{sr} определялось как экспериментально на растяжение, так и по Фойхту

$$\tau_{sr} = \frac{\tau_{s_1} h_1 + \tau_{s_2} h_2}{h_1 + h_2} \quad (2.1)$$

где h_1, h_2 –толщины слоев, τ_{s_1}, τ_{s_2} –пределы текучести по r составляющих металлов.

Предел текучести по направлению оси x , перпендикулярному плоскости пластинок, совпадающей с направлением проникания, определялся экспериментально – измерением предела текучести на сжатие.

Образцы изготавливались таким образом, чтобы отношение τ_{sr}/τ_{sx} изменялось в широком диапазоне.

Кинематические параметры индентора были те же, что и для экспериментов с изотропными образцами.

У образцов, для которых τ_{sr} находился в пределах $1.6\tau_{sx} \div 3.5\tau_{sx}$, имело место весьма значительное уменьшение глубины проникания в композит по сравнению с глубинами проникания в изотропные образцы с пределами текучести τ_{s_1} , или τ_{s_2} . В частности, для образцов, составленных из чередующихся пластинок алюминия и свинца толщиной 1.6×10^{-3} м и 2×10^{-3} м, глубина проникания в композит составляла 68×10^{-3} м, в алюминий 0.1 м, в свинец более 0.12 м, При этом $\tau_{sr}/\tau_{sx} = 2.3$. В таблице 1 приведены результаты экспериментов по прониканию твердых инденторов массой ~ 0.01 кг и начальной скоростью ~ 800 м/с в вышеуказанные среды. В первом столбце указаны сочетания металлов, после названия металла указана толщина слоя в миллиметрах. Во втором и третьем столбцах указаны пределы текучести металлов, в четвертом приведены значения τ_{sr} композитов, подсчитанные согласно модели Фойхта. Шестой столбец показывает отношение τ_{sr}/τ_{sx} , являющееся основным параметром исследуемого эффекта. В седьмом и восьмом столбцах приводятся

глубины проникания тех же инденторов в изотропный образец с приведенными пределами текучести и в композит. Как видно из таблицы 1, в диапазоне $1.6 < \tau_{sr}/\tau_{sx} < 3.5$ имеет место существенное уменьшение глубины проникания.

Таблица 1.

материал	τ_{s1} $\times 10^3$ Па	τ_{s2} $\times 10^3$ Па	τ_{sr} $\times 10^3$ Па	τ_{sx} $\times 10^3$ Па	τ_{sr}/τ_s	$f_{max}^{из}$ $\times 10^3$ м	$f_{max}^{из}$ $\times 10^3$ м
Pb1.6+A12	250	840	578	250	2.3	18	6.3
Pb1.6+A14	250	1200	883	250	3.5	10	6.4
Pb11.6+A12	1600	840	1178	1200	1	7.2	7.8
Pb2+A16	250	840	693	250	2.8	13	6.7
Pb6+A12	250	840	397	250	1.6	20	5.8
Pb0.8+A14	250	1200	100	975	1	4.5	6.2
Pb1.6+A16	250	840	666	250	2.6	12	5.8
Pb6+A110	250	3000	1968	250	8	4.5	4.3
Pb2+A110	250	3000	2500	300	8.3	4.0	3.8
Pb2+A10.8	250	1600	925	705	1.2	8	6.9

Изучение опытных данных показывает, что глубины проникания твердых инденторов в композит с $\tau_{sr}/\tau_{sx} = 2.8$ приблизительно равны 6.7×10^{-2} м, в алюминий с пределом текучести 0.84 Па–0.1м, а свинцовый образец толщиной ~ 0.12 м пробит насквозь. Следует отметить, что в Таблице 1 выбрано τ_s для изотропной среды того же порядка, что и τ_{sr} для композита.

Разброс параметров во время экспериментов был незначителен $\sim 5 \div 10$ %. Эксперименты проводились несколько раз. Каждый раз было замечено значительное уменьшение глубины проникания при оптимальном выборе толщин и комбинаций составляющих пластин. Как видно из рис.2 и 3 в начальный момент, когда скорость проникания достаточно велика (~ 800 м/с), существенное искривление слоев в направлении проникания отсутствует, а с уменьшением скорости проникающего индентора, то есть в конце кратера имеет место сильное искривление слоев. Аналогичная картина была наблюдаена в [2]. Таким образом, можно сделать вывод, что гипотеза плоских сечений применима для больших скоростей, то есть в начальный момент проникания, а при малых скоростях необходимо применять гипотезу нормальных сечений [2].



Рис.2.

Рис.3.

Так как область неискривленных пластин достаточно мала, то можно с самого начала применить гипотезу нормальных сечений.

На основании экспериментальных данных можно сделать и другой немаловажный вывод. Оказывается, что при проникании в слоистые среды в случае $\tau_s/\tau_{sx} \sim 2$ происходит и сильное затупление индентора. Для сравнения с

экспериментами при проникании в изотропные среды на рис.4 и 5 приведены снимки инденторов после снятия из кратера. На рис.4 в приведен снимок индентора из алюминиевого образца, а на рис.5 приведен снимок индентора из слоистого образца.



Рис.4.



Рис.5.

Как видно из рис.4 и 5 затупление индентора в случае анизотропной среды значительно больше по сравнению с индентором из изотропных сред.

В случаях, когда $1.6 < \tau_{sr} / \tau_{sx} < 3.5$, происходила потеря устойчивости индентора. Естественно, что затупленные и искривленные инденторы имеют большое лобовое сопротивление.

Как видно из таблицы 1, в случае $\tau_{sr} / \tau_{sx} \sim 1$ (когда среда по своим свойствам приближается к изотропной) и $\tau_{sr} / \tau_{sx} \approx 8$ эффект уменьшения глубины проникания почти не проявляется. Таким образом, можно сделать вывод, что уменьшение глубины проникания в слоистые композиты происходит в основном не за счет слоистости, а за счет оптимального выбора параметров пакета. При таком выборе слоев можно сказать, что происходит сравнительно равномерное распределение давления в кратере. То есть происходит поглощение энергии проникающего индентора со стороны большой области пластичности. Измерения области пластичности для изотропных материалов и наблюдения искривлений пластин для слоистых образцов со свойством $\tau_{sr} / \tau_{sx} \sim 2$ показывают, что область пластичности для изотропных сред значительно меньше, чем для слоистых композитов. При этом радиус пластической области для слоистой среды более чем в два раза больше, чем радиус области пластичности для изотропной среды.

То, что композитные среды обладают энергопоглощающими свойствами, давно известно [2]. Выбор параметров слоев является только оптимизацией пакета слоев для задачи проникания. Известно также, что композитные материалы работают хорошо для одних видов нагрузок и плохо работают при других нагрузках. Вполне возможно, что указанный подбор параметров позволяет композиту хорошо сопротивляться только в случае проникания твердых инденторов в направлении перпендикулярно плоскости изотропии (что более практично).

Во время экспериментов наблюдалось (хотя и редко) расслоение пакета. Это можно объяснить тем, что из-за слоистости среды имеет место поглощение энергии также за счет появления упругих поверхностных волн, распространяющихся по слоям и приводящих к расслоению.

Было бы желательно произвести измерения температуры в пластической области, как для изотропной, так и для слоистой среды. Такие измерения дали бы возможность более точно и уверенно сказать о большом поглощении энергии со стороны слоистого композита. Однако уровень техники, при которых производились эксперименты, не дал возможность такого исследования. Следовательно, вывод о большом поглощении энергии со стороны композита можно сделать, исходя из

конечных результатов (уменьшение глубины проникания и большая область пластичности).

Слоистые композиты, применяемые в экспериментах, изготавливались по следующей технологии. В качестве материалов для металлокомпозита были использованы пластинки (алюминий, дюраль, свинец и т.д.) толщиной 0.8×10^{-3} м до 10^{-2} м и размерами 0.1×0.1 м². Металлокомпозиты были изготовлены из тонких слоев двух различных металлов, которые чередовались, образуя слой приблизительно 30÷50 пластин. Для образцов попарно брались алюминий- свинец, дюраль-свинец, дюраль-алюминий и т.д. с разными комбинациями толщин пластин. Пластины склеивались специальным клеем ГИПК–113. Клей ГИПК–113 представляет собой композицию на основе эпоксидиановой смолы и целевых добавок: двухкомпонентный холодного отверждения. После смешения компонентов клей наносился на металлические поверхности. Предварительно зашкуренные и обезжиренные пластинки соединялись между собой под давлением. Полученные соединения готовы к применению после выдержки при температуре 293К в течении 24 часов и последующего прогрева при 353К в течении 1 часа. Алюминиевые и свинцовые образцы имели цилиндрическую форму диаметром 8×10^{-2} м и высотой 10^{-1} м.

Все образцы (в количестве по 30–40шт.) были изготовлены из одной партии материала и геометрически одинаковым образом.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ РАЗРУШЕНИЯ СРЕДЫ В ЗАДАЧЕ ПРОНИКАНИЯ ТОНКИХ ТЕЛ В ПЕРВОНАЧАЛЬНО УПРУГУЮ СРЕДУ

Вопросы проникания твердых инденторов в различные деформируемые среды представляют большой теоретический и практический интерес. С ними связаны проблемы защиты элементов летательных аппаратов и наземных конструкций от соударения с высокоскоростными ударниками с выяснением вероятности их пробития, разрушения и нарушения нормального функционирования [7]; многие практические задачи защиты брони [2], в том числе и для ракет с твердым наполнителем и самолетов; важные задачи биологии и медицины.

Можно исследовать проникание тонких заостренных тел в первоначально упругое полупространство с учетом наличия фронта разрушения среды около тела [2]. В настоящем разделе работы приводится учет разрушения среды при наличии пористости, а именно, твердого нелинейно-пластического каркаса и большого количества микропор с жидкостью в них.

В [8] мы рассмотрели задачу разрушения на основе двухкомпонентной нелинейной среды Био. Здесь, следуя методу плоских сечений [2], вблизи тела мы и для пористой среды оставляем в уравнениях только производные по радиальной координате r , отбрасывая малые производные по осевой координате x и времени t . Тогда, как и в [9], [10], можно ввести средние плотности для каркаса $\rho_1(1-f)$ и жидкости в порах $\rho_2 f$, где f есть пористость, записать для них отдельные уравнения неразрывности и получить из них уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} r \{ (1-f) v_r + f \dot{v} \} = 0 \quad (3.1)$$

где v_r , \dot{v} – радиальные компоненты частицы для каркаса и жидкости,

$$v_r = \frac{du_r}{dt} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \dot{v} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.2)$$

u_r, v – радиальные перемещения каркаса и жидкости.

Решение (3.1), удовлетворяющее граничному условию на теле $r = r_k(x, t)$, $V = \frac{\partial r_k}{\partial t}$, $V = (1-f)v_r + f\dot{v}$ будет, как и для однокомпонентной пластической среды [2]

$$V = \frac{r_k}{r} \frac{\partial r_k}{\partial t} \quad (3.3)$$

Полагая $V = \frac{dU_r}{dt}$, где V и U_r есть средняя скорость и перемещения частицы среды, из (3.3), как и в [2], можно для перемещения U_r получить

$$U_r(r, x, t) = r - F(r^2 - r_k^2),$$

где F произвольная функция, и в частности [2] можно записать

$$U_r(r, x, t) = r - \sqrt{r^2 - r_k^2} \quad (3.4)$$

Можно, как и в [13], записать уравнение Нидельмана для кинетики процесса зарождения и роста пор [12]

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_{gr}}{dt} + \frac{df_{nucl}}{dt} \quad (3.5)$$

где f_{gr} характеризует дальнейшей рост пористости

$$\frac{df_{gr}}{dt} = (1-f)\dot{\epsilon}_{kk} \quad (3.6)$$

Из (3.1) для важного частного случая отсутствия жидкости в порах $\dot{v}=0$ получится

$$v_r = \frac{1}{1-f} \frac{r_k}{r} \frac{\partial r_k}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = \frac{v_r}{1-f} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (3.7)$$

Поскольку для рассмотренной асимптотики вблизи тела в квазиодномерной задаче по r , $\dot{\epsilon}_x = 0$, $\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}$, для интенсивности скоростей деформаций $\dot{\epsilon}$ получится

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{3} \frac{v_r}{r} \sqrt{2 + \left(\frac{r}{1-f} \frac{\partial f}{\partial r} - 1 \right)^2} - \frac{r}{1-f} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (3.8)$$

где учтено (3.7).

Для простоты можно рассмотреть экстремальный случай вблизи макроскопического разрушения, т.е. малых $1-f$ и больших изменений по r от f , $\frac{r}{1-f} \frac{\partial f}{\partial r} \gg 1$, тогда

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{r} v_r \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{kk} = v_r \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon} \quad (3.9)$$

Тогда можно в уравнении нуклеации пор [12], записать

$$\frac{df_{nucl}}{dt} = p\dot{\bar{\varepsilon}} f_N, \quad p(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{s_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2} \quad (3.10)$$

где $\dot{\bar{\varepsilon}}$ можно выразить через f , v_r по (3.8), которое в области больших изменений f по r дает (3.9).

В (3.10) $\bar{\varepsilon}$ есть интенсивность пластических деформаций для рассматриваемой задачи, ε_N есть ее среднее значение, s_N есть дисперсия, $p(\bar{\varepsilon})$ в (3.10) есть нормальное гауссово распределение для плотности вероятности $P(\bar{\varepsilon}) = \int_{-\infty}^{\bar{\varepsilon}} p(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}$.

При этом (3.5), (3.6), (3.10) можно записать с учетом (3.9) в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{3}{2}(1-f)\dot{\bar{\varepsilon}} + p(\bar{\varepsilon})\dot{\bar{\varepsilon}} f_N, \quad (3.11)$$

$$\frac{df}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{3}{2}(1-f) + p(\bar{\varepsilon}) f_N \quad (3.12)$$

интегрирование которого дает

$$f = 1 + (f_N - 1) e^{\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}} + e^{-\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}} f_N \int_0^{\bar{\varepsilon}} p(\bar{\varepsilon}) e^{-\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon} \quad (3.13)$$

$f_N = const$ – есть начальное значение f , когда $\bar{\varepsilon} = 0$.

Второе слагаемое в правой части (3.11) $p(\bar{\varepsilon})$, соответствующее процессу создания пор [12], $p(\bar{\varepsilon}) = \frac{dP}{d\bar{\varepsilon}}$ [19] показывает, что f есть аналог вероятности процесса создания пор P .

В общем случае можно, следуя [17] и [16], рассматривать $\bar{\varepsilon}$ как случайную величину, меняющуюся в окрестности средней кривой, называемой в [17] коридором. При этом, по аналогии с информационными сетями [14], [3] можно рассматривать $\bar{\varepsilon}$, t как случайный процесс, для которого в общем случае сравнение с [14] дает

$$\varepsilon_N = \varepsilon_N(t), \quad s_N = s_N(t), \quad \bar{\varepsilon} = x, \quad \varepsilon_N(t) = A(t) = \int_0^t a(t) dt, \quad (3.14)$$

$$s_N^2(t) = B(t) = \int_0^t b(t) dt, \quad X = A(t) - x$$

В (3.14) $A(t)$ есть математическое ожидание для $x = \bar{\varepsilon}$, $B(t) = s_N^2(t)$ есть дисперсия процесса $\bar{\varepsilon}$, t вокруг этой средней кривой, и тогда $p(t, \bar{\varepsilon})$ можно рассматривать как плотность вероятности известного процесса Башелье [16] стр.167, [14] стр.74 (1.5), стр.76 (1.15), обобщающее (3.10).

При этом для удобства записи меняется знак эйконала X по сравнению с [14]. В линейной задаче имеет место диффузионное уравнение для плотности вероятности $p(t, x) = v$ [16]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial av}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 bv}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

где для упрощения нами в линейном случае предположено $a = a(t)$, $b = b(t)$. То же уравнение имеет место для самой вероятности $P(t, x)$. При этом линейное решение $p(t, \bar{\varepsilon}) = v(t, x)$ дается (3.10) с указанными заменами (3.14) и удовлетворяет (3.15). Таким образом можно в задаче нуклеации пор вести рассмотрение в рамках теории случайных процессов [16], [17], [14], рассматривая $\bar{\varepsilon}$ как случайную величину в узкой окрестности средней кривой, в качестве которой берется математическое ожидание $\varepsilon_N(t)$ и тогда (3.10) дает решение в линейной задаче для плотности вероятности $p(t, \bar{\varepsilon})$, причем $s_N^2(t)$ есть дисперсия процесса вокруг средней кривой, вдоль которой меняется параметр t .

Следует отметить, что согласно [14] в нелинейном подходе в (3.15) заменяется линейная скорость волны $a(t)$ для плотности вероятности $v(t, x)$ на нелинейную скорость волны $a(t) + \frac{\gamma(t)}{2} v$, $\gamma(t)$ есть произвольно задаваемый нелинейный

коэффициент, но при выполнении условия $\frac{\gamma(t)}{b(t)} = \frac{1}{c_1}$, где c_1 есть безразмерная постоянная, тогда (3.15) дает нелинейное диффузионное уравнение для плотности вероятности [14]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -a(t) \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma(t) p \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{b(t)}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (3.16)$$

В задаче блуждания, к которой относится и рассматриваемая задача, следует решать (3.16), обобщающее уравнение Фоккера–Планка (3.15), с характерным [16], [14] начальным условием $p(0, x) = \delta(x)$ и обобщать на нелинейной случай [14] указанное решение Башелье. Для самой вероятности $P(t, x)$ в переменных t, x начальное условие будет $p(0, x) = H(\pm X)$, причем $X \gg 0$, $p(t, x) = \pm \frac{\partial P}{\partial x}$.

В [14] взята переменная $X = x - A(t)$. В настоящей статье $X = A(t) - x$, что соответствует в данной постановке в рассматриваемой области сильных изменений процесса $X > 0$, т.е. общепринятым [19] стр.61 обозначениям связи $p(t, x) = \frac{\partial P(t, x)}{\partial x}$. Для получения нелинейного диффузионного уравнения самой вероятности $P(t, x)$ можно заменять линейную скорость волны $a(t)$ на нелинейную $a(t) + \gamma_1(t) P$. Тогда удобно записать уравнение для $P(t, x)$, используя (3.15), в переменных X, t

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_x = \gamma_1(t) P \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{b(t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \quad (3.17)$$

Уравнения (3.16) и (3.17) для p и P в переменных t, X одинаковы по форме записи. При этом [14] для получения аналитического решения соответствующего (3.17) уравнения Бюргерса, следует полагать

$$\frac{\gamma(t)}{b(t)} = \frac{1}{c_1}, \quad \frac{\gamma_1(t)}{b(t)} = \frac{1}{c_1'}$$

где $c_1 = const$ причем c_1 безразмерная, $c_1' = const$, тогда методом Лайтхилла получится [14]

$$p(t, X) = \frac{e^{-\frac{X^2}{2B(t)}}}{\sqrt{2\pi B(t)} + \int_0^\infty \left(e^{\frac{1}{c_1} - 1} \right) e^{-\frac{(X-Y)^2}{2B(t)}} dY},$$

$$P(t, X) = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{(X-Y)^2}{2B(t)}} dY}{\sqrt{2\pi B(t)} + \int_0^\infty \left(e^{\frac{Y}{c_1} - 1} \right) e^{-\frac{(X-Y)^2}{2B(t)}} dY} \quad (3.18)$$

где $X = A(t) - x$, $X > 0$ в рассматриваемой области. Полагая в (3.18) $X = \varepsilon_N - \bar{\varepsilon}$, $B(t) = c_N^2(t)$ согласно формулам (3.14), можно после замены $X - Y = x' \sqrt{B(t)}$ получить

$$p(t, \bar{\varepsilon}) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_N(t)}{s_N(t)} \right)^2}}{\sqrt{2\pi} s_N(t) + s_N(t) \int_{-\infty}^{\frac{\varepsilon_N(t) - \bar{\varepsilon}}{s_N(t)}} \left(e^{\frac{1}{c_1} - 1} \right) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'} dx',$$

$$P(t, \bar{\varepsilon}) = \frac{\int_{-\infty}^{\frac{\varepsilon_N(t) - \bar{\varepsilon}}{s_N(t)}} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}{\sqrt{2\pi} + \int_{-\infty}^{\frac{\varepsilon_N(t) - \bar{\varepsilon}}{s_N(t)}} \left(e^{\frac{x' s_N(t)}{c_1} - \frac{\varepsilon_N(t) - \bar{\varepsilon}}{c_1}} - 1 \right) dx'} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \quad (3.19)$$

Подставляя p в (3.13) вместо $p(\bar{\varepsilon})$ можно по известным $\varepsilon_N(t)$, $s_N(t)$ определить пористость $f(t, \bar{\varepsilon})$, и, зная критическое значение f найти соответствующую функцию $\bar{\varepsilon}(t)$. Можно, как и в случае отсутствия пор [2] с.36, с.37, также определить из указанного кинематического подхода значение напряжения позади фронта пластического разрушения, впереди которого среда упругая и $f = 0$, в виде

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s (1 - q_1 f) \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - \tau_s, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\tau_s}} \quad (3.20)$$

μ - модуль сдвига, τ_s - предел текучести, где учтена только постоянная $q_1 = \frac{1}{f_{кр}}$ в

обобщенном условии Мизеса с учетом пористости [13] с.118.

Можно также определять фазовые переходы от медленных хаотичных движений и роста микропор к сильным макроскопическим разломам, пользуясь универсальным графиком [18], методом кинематических нелинейных волн [8] и решением для полупроводников [19]. В [15] применяется более простой

альтернативный метод кривой Гюгонио, ударной адиабаты при наличии фазовых переходов к астрофизической задаче Большого Взрыва.

4. СИНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Можно распространить феноменологическое рассмотрение раздела 3 данной работы для точечных стохастических процессов образования и роста микропор на пространственно распределенные вдоль линии x процессы. Для их исследования применяется (на основе системного анализа) универсальный подход в виде кинематического метода нелинейных волн, синтезирующий методы работ [20], [19] в применении к различным физическим проблемам.

В работе [2] проводится аналогия математической постановки задачи для неустойчивости Ганна в полупроводниках [1], [3] и кинематической нелинейной волновой теории в движении транспорта [4] на насыщенных линиях. В [4] записывается уравнение сохранения плотности машин на линии $\rho(x, t)$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, где $q = \rho v$ есть плотность потока, v скорость. Считается известной единая кривая $q = q(\rho)$, определяемая экспериментом. Она приведена в [4] и в данной работе на рис.6

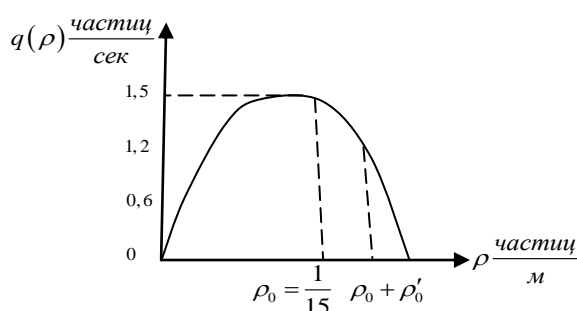


Рис.6.

В [19], [14], [8] рассмотрено движение электронов в полупроводнике, скорость которых $v = v(E)$ - экспериментально определяемая функция напряженности поля E , качественно можно отобразить рис.6, где следует заменить функции ρ на E , q на v . Выведенное в [19] уравнение для E , кроме указанных в уравнении [20] газодинамических нелинейных членов, содержит также вторую производную от искомой функции, дающую диффузию, и что особенно важно при получении фазовых переходов, члены с релаксацией, т.е. алгебраические слагаемые до третьего порядка по E' , $E' = E - E_0$, E_0 - начальная напряженность поля. В соответствии с принципами системного анализа, в котором главное значение имеет сам процесс перехода, а уравнения для совершенно различных параметров для разных систем будут одинаковыми, и учитывая идентичность кривых процессов, нами обобщено вышенаписанное уравнение для ρ добавлением аналогичных членов с диффузией и релаксацией относительно возмущенной плотности ρ' , причем $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho'(x, t)$, $\rho_0 = const$, начальная точка на кривой рис.6. Тогда получится

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\lambda q(\rho) - q'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + J(t) \quad (4.1)$$

λ - некоторая постоянная.

При допущении о постоянстве $J(t) = -\lambda q(\rho_0)$ уравнение для возмущений ρ' имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = & -\lambda q'(\rho_0) \rho' - \lambda \frac{q''(\rho_0)}{2} \rho'^2 - \lambda \frac{q'''(\rho_0)}{6} \rho'^3 - \left\{ q'(\rho_0) + q''(\rho_0) \rho' + \frac{1}{2} q'''(\rho_0) \rho'^2 \right\} \cdot \\ & \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}, \quad q'(\rho_0) = v(\rho_0) + \rho_0 v'(\rho_0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

λ - некоторая постоянная.

Удобно обозначить $v_0 = q'(\rho_0)$, $\alpha = -q'(\rho_0)\lambda$, $\beta = -\lambda q''(\rho_0)$, $\bar{\delta} = -\lambda q'''(\rho_0)$, $\gamma = q''(\rho_0)$, и согласно [14] в множителе при $\frac{\partial \rho'}{\partial x}$ отбросить члены с ρ'^2 , ρ'^3 , и записать (4.2) в координатах $X = x - v_0 t$, где v_0 - скорость волны в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} \Big|_X + \gamma \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \alpha \rho' + \frac{\beta \rho'^2}{2} + \frac{\bar{\delta}}{6} \rho'^3 + D \frac{\partial^2 \rho'}{\partial X^2} \quad (4.3)$$

Несколько уточняя [14] с.62 уравнение (4.3) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = & -\frac{\delta \rho}{\delta \rho'}, \varphi = \psi + V + D_2, \psi = \int \left(-\frac{\alpha}{2} \rho'^2 - \frac{\beta}{6} \rho'^3 - \frac{\bar{\delta}}{24} \rho'^4 \right) dX, \\ V = & \frac{D}{2} \int \left(\frac{\partial \rho'}{\partial X'} \right)^2 dX', \quad D_2 = -\frac{\gamma}{2} \int dX' \int \rho'^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial X''} \right)^2 dX'' \end{aligned} \quad (4.4)$$

где введена функциональная производная [17]

$$\frac{\delta F(\rho', X, t)}{\delta \rho'} = \lim_{\int dX \delta \rho' \rightarrow 0} \frac{F(\rho' + \delta \rho', X, t) - F(\rho', X, t)}{\int dX \delta \rho'} \quad (4.5)$$

Из (4.5) и (4.4), после интегрирования по частям, получится

$$\frac{\delta \psi}{\delta \rho'} = -\frac{\alpha}{2} \rho'^2 - \frac{\beta}{6} \rho'^3 - \frac{\bar{\delta}}{24} \rho'^4, \quad \frac{\delta V}{\delta \rho'} = -D \frac{\partial^2 \rho'}{\partial X^2}, \quad (4.6)$$

Тогда из (4.6) и (4.4) получится уравнение (4.3). Решение $\varphi(X)$, $\rho'(X)$, $P(X)$ в стационарном устойчивом состоянии дается из (4.3), где $\frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$, (4.4) и найдено в

[14], $P(X) = P(0) e^{-\frac{2}{b} \varphi(X)}$ есть вероятность фазового перехода [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Проникание тонкого тела в различные среды / Механика, IV конгресс. – Варна, 1981.
2. Ванцян А.А. Влияние электромагнитных полей и анизотропных свойств среды на динамические процессы в сплошных средах. – Ереван: Изд-во „Гитутюн” НАН РА, 2004. – 223 с.
3. Ванцян А.А., Овсепян Д.Х. Динамическое взаимодействие деформируемого индентора и преграды при наличии разрядного тока. – Ереван, 2010. – 298 с.

4. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.
5. Vantsyan A.A., Moravej M. Electro dynamic method of increasing defense properties of the armoure. – Iran, Isfahan: B.P. Press., 2011. – 228 p.
6. Vantsyan A.A. Influence of discharge current on the perforation of plates. – М.: Nauka, 2012. – 287 p.
7. Герасимов А.В., Коняев А.А., Пашков С.В. Удар высокоскоростных элементов по оболочке с наполнителем / XVII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. Материалы. – Алушта, 2001. – С.740-741.
8. Bagdoyev A.G., Safaryan Yu.S. The application of nonlinear wave dynamics methods to examination of stochastic processes of Benar in horizontal layers of fluid, of semiconductors, of traffic flow and micro–macro transition in fracture mechanics / In collection. Problems of Mechanics of deformable body. Devoted to 90 anniversary of academician of NAS Armenia S.A. Ambartsumyan, Yerevan, 2012. – P.101-120.
9. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сплошных сред // ПММ. – 1956. – Т. XX. – №2. – С.184-195.
10. Нигматулин Р.И. Проблемы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
11. Браиловский Н.О., Грановский В.И. Моделирование транспортных систем. – М.: 1978. – 124 с.
12. Chu C., Needleman A. Void nucleation effects in biaxial stretched sheets // J. Eng. Mater. Techn. – 1980. – Vol.102. – P.249-256.
13. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование деформирования повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. – М.: Московский физико–технический институт (государственный университет), 2008. – 214 с.
14. Bagdoyev A.G., Manukyan G.A., Safaryan Yu.S. Study of point and spatial processes by methods of wave dynamics // LAP. – 2012. – P.91.
15. Григорян С.С. О природе наблюдаемых во Вселенной «Черных дыр» и динамике Вселенной // Изв. Национальной Академии Наук Армении. Механика. – 2007. – Т.60. – №4. – С.3-19.
16. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процесс. – М.: Наука, 1976. – 494 с.
17. Полак Л.С., Михайлов А.С. Самоорганизация в неравновесных физико–химических системах. – М.: Наука, 1983. – 116 с.
18. Ботвина Л.Р. Кинетика разрушения конструкционных материалов. – М.: Наука, 1989. – 230 с.
19. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 405 с.
20. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves on long crowded roads // Proc. Roy. Soc. A. – 1955. – Vol.229. – N1178. – P.281-316.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ С УЧЕТОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

Биткина О.В.

*Филиал ФГБОУ ВПО Самарский государственный технический университет,
г. Сызрань, Россия*

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено и проанализировано влияние углов разориентации слоев, предварительного натяжения волокон, толщины панели и процентного содержания компонентов слоя композита на формоизменения слоистых композитных панелей. В работе приведены результаты сравнения значений параметров, полученных теоретическим и экспериментальным путем.

Ключевые слова: композиционные материалы; остаточные; напряжения многослойные панели; размеростабильные конструкции; анизотропия; армирование

Современное развитие авиационной и космической техники характеризуется возрастающим применением, в размеростабильных конструкциях различного назначения, тонкостенных слоистых элементов из композиционных материалов, например, в качестве элементов конструкции крупногабаритных зеркальных антенн, элементов несущих конструкций оптических телескопов и др. Наиболее часто, в роли тонкостенных слоистых элементов, выступают многослойные панели, изготовленные из высокопрочных и высокомодульных композиционных материалов (КМ). К основным требованиям, предъявляемым к размеростабильным конструкциям, работающим в условиях открытого космоса, относятся: минимальная масса, высокая надежность, повышенная прочность и жесткость. С развитием техники стало понятно, что наивысшие эксплуатационные характеристики можно получить путем разработки и использования в размеростабильных конструкциях композиционных материалов.

В практике изготовления слоистых тонкостенных элементов конструкций довольно широко встречаются случаи, когда изготовленные конструкции изменяют свою первоначальную геометрию и в результате оказываются непригодными для использования по требованиям обеспечения точности. Исходя из этого, основная проблема, связанная с технологией производства космических и авиационных конструкций и их основных элементов из композиционных материалов, заключается в получении эталона рабочей поверхности конструкции, исключающей коробление под действием технологических остаточных напряжений, различных типов нагрузок, а также внешних и внутренних силовых факторов [1]. Кроме того, следует учесть, что многослойный несущий пакет элементов тонкостенных размеростабильных конструкций обладает анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры пакета по толщине, вызванной погрешностями, допущенными в ходе технологического процесса (углы разориентации в монослое, изменение объемного содержания волокна и матрицы в монослоях и т.д.). Одним из актуальных вопросов

проектирования элементов авиационно-космических конструкций является не только обоснование и внедрение в практику расчетов новых расчетных схем, эффективных с точки зрения построения решения, но и проведение экспериментальных исследований, позволяющих оценивать точность полученных результатов с учетом отражения специфики работы тонкостенных пространственных систем.

Для анализа НДС тонкостенных слоистых элементов, рассмотрим панель, которая изготовлена при температуре отверждения T и охлаждена до комнатной температуры. В целях повышения несущей способности конструкции, армирующие волокна предварительно натянуты, после отверждения натяжение снято. Панель обладает анизотропией вследствие несимметрии свойств пакета по толщине [2,3,5].

С использованием гипотезы Кирхгофа, соотношений Коши, формул геометрических преобразований, а также закона Гука с учетом влияния температуры и формул преобразования напряжений при повороте осей [2] получим выражения для компонент состояния k -го слоя

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(K)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(K)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ + K_x^\circ z^{(K)} - \alpha_1 \Delta T - \varepsilon_{H1} \\ \varepsilon_y^\circ + K_y^\circ z^{(K)} - \alpha_2 \Delta T - \varepsilon_{H2} \\ \gamma_{xy}^\circ + K_{xy}^\circ z^{(K)} - \alpha_6 \Delta T - \varepsilon_{H6} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^\circ + K_x^\circ \cdot z = \frac{\partial U_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot z; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^\circ + K_y^\circ \cdot z = \frac{\partial V_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot z; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^\circ + K_{xy}^\circ \cdot z = \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot z, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon_x^\circ, \varepsilon_y^\circ, \gamma_{xy}^\circ$ - деформации в плоскости приведения, $K_x^\circ, K_y^\circ, K_{xy}^\circ$ - кривизны панели.

Жесткости слоя \bar{Q}_{IJ} ($I, J=1,2,6$), коэффициенты температурного расширения α_J ($J=1,2,6$) и деформации натяжения слоя ε_{HJ} ($J=1,2,6$) в (1), приведенные к осям панели, определяются через жесткостные и температурные характеристики слоя, заданные в системе координат с ним связанной, с учетом поворота осей относительно декартовой системы координат пластинки (x,y) . Соответствующие преобразования для \bar{Q}_{IJ} и α_J представлены в работах [2,4]. Жесткости слоя, приведенные к осям панели, а также преобразования для коэффициентов температурного расширения и деформации натяжения определяются соотношениями.

Модули упругости в направлении слоя $E_1^{(K)}$ и перпендикулярно к нему $E_2^{(K)}$, соответственно, модуль сдвига $G_{12}^{(K)}$, коэффициенты Пуассона $\nu_{12}^{(K)}, \nu_{21}^{(K)}$ и коэффициенты температурного расширения $\alpha_1^{(K)}$ и $\alpha_2^{(K)}$ зависят от температурных свойств волокон и матрицы, а так же от степени армирования слоя.

При записи физических соотношений в виде (1) не учитывается, что в препреге (слое) предварительно натягиваются лишь волокна, в то время как после снятия натяжения слой деформируется полностью.

Погонные нормальные и сдвигающие силы, изгибающие и крутящие моменты для всего пакета, действующие, например, по площадке, перпендикулярной оси x , определяются интегрированием соответствующих компонент напряженного состояния по толщине, что, с учетом гипотезы Кирхгофа дает

$$N_x = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x^{(K)} dz; \quad N_{xy} = \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy}^{(K)} dz; \quad (3)$$

$$M_x = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x^{(K)} z dz; \quad H_{xy} = \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy}^{(K)} z dz.$$

Отсюда и из (1) вытекают соотношения, связывающие внутренние силовые факторы с деформацией слоистого элемента

$$\begin{Bmatrix} N_I \\ N_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{IJ} & B_{IJ} \\ B_{IJ} & D_{IJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_J^0 \\ K_J^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_I^T \\ M_I^T \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_I^H \\ M_I^H \end{Bmatrix}, \quad I, J=1,2,6, \quad (4)$$

(x, y, xy)

где $N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, M_x^T, M_y^T, H_{xy}^T$ - «температурные» усилия и моменты.

$$N_I^T = \Delta T \sum_{k=1}^N Q_{IJ}^K \alpha_J^K F^K; \quad (5)$$

$$M_I^T = \Delta T \sum_{k=1}^N Q_{IJ}^K \alpha_J^K S^K \frac{I, J=1,2,6}{x, y, xy},$$

а $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, M_x^H, M_y^H, H_{xy}^H$ - усилия и моменты от натяжения.

$$N_I^H = \sum_{k=1}^N Q_{IJ}^K \varepsilon_{IJ}^K F^K; \quad (6)$$

$$M_I^H = \sum_{k=1}^N Q_{IJ}^K \varepsilon_{IJ}^K S^K \frac{I, J=1,2,6}{x, y, xy}.$$

В свою очередь, $F^{(K)}, S^{(K)}, J^{(K)}$ - погонные площадь, статический момент и момент инерции « k »-го слоя соответственно.

Обобщенные жесткостные характеристики многослойной панели A_{IJ}, B_{IJ}, D_{IJ} ($I, J=1,2,6$) даны в работе [4].

Так как усилия и моменты согласно формулам (4) зависят как от деформации в плоскости панели, так и от кривизны поверхности приведения, в рассматриваемом случае из-за несимметрии свойств структуры пакета по толщине задача не разделяется на плоскую и изгиб пластинки.

Если известен столбец внутренних силовых факторов, в том числе температурных и связанных с натяжением, на основании равенства (4) путем обращения матриц могут быть найдены компоненты деформированного состояния

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_J^0 \\ K_J^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{IJ} & B_{IJ} \\ B_{IJ} & D_{IJ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_I^T + N_I^H \\ M_I^T + M_I^H \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

следовательно, напряжения по формуле (1)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(K)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(K)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + K_x^0 z - \bar{\alpha}_1^{(K)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H_1}^{(K)} \\ \varepsilon_y^0 + K_y^0 z - \bar{\alpha}_2^{(K)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H_2}^{(K)} \\ \gamma_{xy}^0 + K_{xy}^0 z - \bar{\alpha}_6^{(K)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H_6}^{(K)} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

В системе координат, связанной с направлением армирования «*k*»-го слоя, напряженное состояние определяется посредством преобразования при повороте осей

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}^K = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}^K \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Согласно критерию прочности Гольденבלата-Копнова для однонаправленного слоя КМ, растрескивание или разрушение пакета не произойдет, пока в каждом слое выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{1p}^{(K)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}^{(K)}} \right)^2 \sigma_1^{(K)2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{2p}^{(K)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}^{(K)}} \right)^2 \sigma_2^{(K)2} + \left(\frac{\bar{\tau}_{12}^{(K)}}{\bar{\tau}_{12}^{(K)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{1p}^{(K)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}^{(K)}} \right)^2 \sigma_1^{(K)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{2p}^{(K)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}^{(K)}} \right)^2 \sigma_2^{(K)} = \sigma_{экс} \leq 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{\sigma}_{1p}^{(K)}$, $\bar{\sigma}_{1c}^{(K)}$, $\bar{\sigma}_{2p}^{(K)}$, $\bar{\sigma}_{2c}^{(K)}$, $\bar{\tau}_{12}^{(K)}$ - допускаемые напряжения с индексом *p* - на растяжение, с индексом *c* - на сжатие, соответственно.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{1p}^{(K)} &= \bar{\sigma}_B^{(K)} V_B + \bar{\sigma}_M^{(K)} V_M^{(K)}; \\ \bar{\sigma}_{1c}^{(K)} &= 2V_B^{(K)} [V_B^{(K)} E_M^{(K)} / V_M^{(K)}]^{\frac{1}{2}}; \\ \bar{\sigma}_{2p}^{(K)} &= 0.5 \bar{\sigma}_M^{(K)}; \\ \bar{\sigma}_{2c}^{(K)} &= 0.5 \bar{\sigma}_M^{(K)}; \\ \bar{\tau}_{12}^{(K)} &= 0.5 \bar{\tau}_M^{(K)}. \end{aligned} \quad (11)$$

здесь индексами *B* и *M* обозначены термоупругие характеристики волокна и матрицы соответственно.

Формоизменение или коробление изготавливаемых конструкций определяется рядом факторов, которые следует учитывать как при проектировании, так при изготовлении.

Используя полученные выше соотношения и интегрируя выражения, определяющие компоненты кривизны панели, получим, с точностью до произвольных постоянных, формулы для прогиба *W*, а также для продольного *U₀* и тангенциального *V₀* смещений:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} (K_x^0 \cdot x^2 + K_{xy}^0 \cdot x \cdot y + K_y^0 \cdot y^2); \\ U_0 &= \varepsilon_x^0 \cdot x + \frac{\gamma_{xy}^0}{2} \cdot y; \end{aligned} \quad (12)$$

$$V_0 = \varepsilon_y^0 \cdot y + \frac{\gamma_{xy}^0}{2} \cdot x.$$

На основе вышеприведенной математической модели было теоретически проанализировано влияние предварительного натяжения волокон $0 \leq |K_{не}| \leq 1$ и объемного содержания компонент слоя (V_v, V_m) на распределение остаточных эквивалентных напряжений ($\sigma_{экв}$) в слоях. Получено влияние технологических погрешностей: разориентации слоев укладки, изменения объемного содержания компонентов КМ в слое, последовательности укладки слоев КМ, влияние технологического натяжения ($K_{не}$) на формоизменение слоистых композитных панелей.

Для проверки расчетных значений величины коробления многослойных панелей были проведены экспериментальные исследования прогиба в зависимости от углов разориентации, толщины панели, натяжения волокон и объемного содержания компонент слоя.

Экспериментальные исследования включали в себя изготовление образцов плоских панелей квадратной формы размером 300x300 мм. В соответствии с технологическими рекомендациями ВИАМ на изготовление углепластика КМУ- 4Л панели были изготовлены из однонаправленной углеродной ленты марки ЛУ – П/0,1 А (ГОСТ 28006-88) и эпоксидноволачноформальдегидного связующего ЭНФБ (ТУ 1-596-36-98). Содержанием смолы: (38÷42)%.

Пропитанная и подсушенная лента раскраивалась на заготовки требуемых размеров и укладывалась по шаблонам в соответствии с заданным числом слоев и углами укладки. Собранный пакет загружался в холодный пресс, после чего плиты пресса смыкались, включался обогрев плит и прикладывалось давление. Последующий режим формования включал в себя нагрев при давлении 6 атмосфер до 175°C, выдержку при этой температуре и естественное охлаждение пакета. Количество полученных образцов и направление укладок представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Значения максимальных прогибов, полученных теоретическим и экспериментальным путем.

№	Схема армирования	Максимальный прогиб, мм теория	Максимальный прогиб, мм эксперимент
1	0°/45°/135°/90°/90°/135°/45°/0°	0	0
2	0°/50°/135°/90°/90°/135°/45°/0°	0,9	0,8
3	0°/52°/135°/90°/90°/135°/45°/0°	3,8	3,2

Анализ формоизменения образцов проводился на контрольно-измерительной машине FARO 08/02 серии Gold. Погрешность измерения составляет ±0,051мм.

Исследование формоизменения и уровня образующихся остаточных технологических напряжений, было проведено для композиционных панелей с продольно-поперечной укладкой слоев (0°/90°), с косой укладкой слоев (±45°), и с продольно-поперечной и косой укладкой слоев (0°/±45°/90°).

Теоретически было получено и экспериментально подтверждено три вида формоизменения: седлообразная, закрутка («пропеллер») и сочетание седлообразной с закруткой, что подтверждает теоретическое положение о связанности задачи, т.е. ее неразделимости на плоскую и изгиб. Допустимая форма перемещения из

плоскости с неизвестными и подлежащими определению константами K_x^0 , K_y^0 , K_{xy}^0 описывает возможные конфигурации панелей из слоистых композитов. Такая функциональная зависимость (12) для прогиба W определяет, в зависимости от параметров K_x^0 , K_y^0 , K_{xy}^0 , различные конфигурации искривлённой поверхности панели. Так, если $K_x^0 = -K_y^0$, $K_{xy}^0 = 0$, то образуется седлообразная поверхность; если $K_{xy}^0 = 0$, $K_x^0 \neq 0$, $K_y^0 \neq 0$, $|K_x^0| \gg |K_y^0|$ или $K_{xy}^0 = 0$, $K_x^0 \neq 0$, $K_y^0 \neq 0$, $|K_y^0| \gg |K_x^0|$, то форма искажённой поверхности, практически приближается к цилиндрической; если $K_x^0 = K_y^0 = 0$, $K_{xy}^0 \neq 0$, то поверхность закручивается. Проведенный параметрический анализ напряженно – деформированного состояния восьмислойных углепластиковых панелей с продольно-поперечными, косыми и продольно-поперечными и косыми углами армирования показал, что для исследуемых композитных панелей характерен ярко выраженный изгиб слоя вместе с растяжением-сжатием в плоскости приведения ХОУ. Основной причиной коробления при изготовлении слоистых элементов конструкции следует считать несимметричность (по свойствам и/или расположению слоев) структуры слоистых элементов.

Было исследовано влияние толщины H несимметричной по структуре пакета КМ панели с продольно-поперечной укладкой на максимальные прогибы композитной панели W_{max} . Эксперимент показал, что с увеличением толщины пластины прогиб уменьшается. Сопоставление полученных расчетных результатов с экспериментальными данными, подтверждает правильность используемой математической модели и метода расчета, так как при качественном совпадении изгибных форм количественные расхождения не превышают 10-15%.

Увеличение толщины панели позволяет уменьшать влияние асимметрии на величину коробления, но в то же время, приводит к увеличению массы конструктивного элемента, что не всегда допустимо для размеростабильных конструкций. В связи с этим, исследуя причины появления асимметрии в структуре пакета материала, очевидно, что ее возникновение связано с нарушением технологии производства в процессе выкладки препрега, что выражается в виде появления углов разориентации. В связи с этим, была проведена экспериментальная оценка углов разориентации слоя, изменяющихся от 0° до 7° , на прогиб панели W . Проведенный анализ показал, что величина прогиба панели W увеличивается с ростом угла разориентации. Кроме того, отклонение угла разориентации более чем на 3° приводит к существенному повышению величины прогиба W , а, следовательно, к формоизменению поверхности, что необходимо учитывать при проектировании размеростабильных конструкций. Исходя из этого, возникает необходимость более жестко назначать допуски на углы разориентации, во избежание коробления конструктивного элемента.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования слоистых элементов конструкции из КМ показали, что в процессе их изготовления в слоях конструкции образуются значительные по величине эквивалентные остаточные напряжения (10). Симметричные по толщине стенки конструкции не испытывают коробления при их изготовлении, однако, в них формируются остаточные напряжения, так что каждый слой после изготовления конструкции находится в плоском напряженном состоянии. Таким образом, остаточные напряжения и деформации, формирующиеся в процессе изготовления конструкции из КМ, могут приводить либо к изменению заданной формы (геометрии) изготавливаемой

конструкции, либо к ускорению ее разрушения при воздействии на нее внешнего нагружения. И то, и другое оказывает отрицательное воздействие на характеристики качества изготавливаемых конструкций из КМ.

В ходе исследований, была установлена степень влияния угла разориентации θ и толщины панели H на величину эквивалентных остаточных напряжений $\sigma_{\text{экв}}$. Дополнительно было проанализировано влияние натяжения слоев на образующиеся в них эквивалентные остаточные напряжения $\sigma_{\text{экв}}$ при различном объемном содержании волокон V_v (рис.2, рис.3).

Исследования показали, что углы разориентации θ (рис.1) могут оказывать влияние на эквивалентные напряжения $\sigma_{\text{экв}}$. Это особо заметно в случае при $K_{\text{нв}}=0,4$, что справедливо для всех схем армирования с любым объемным содержанием волокна V_v .

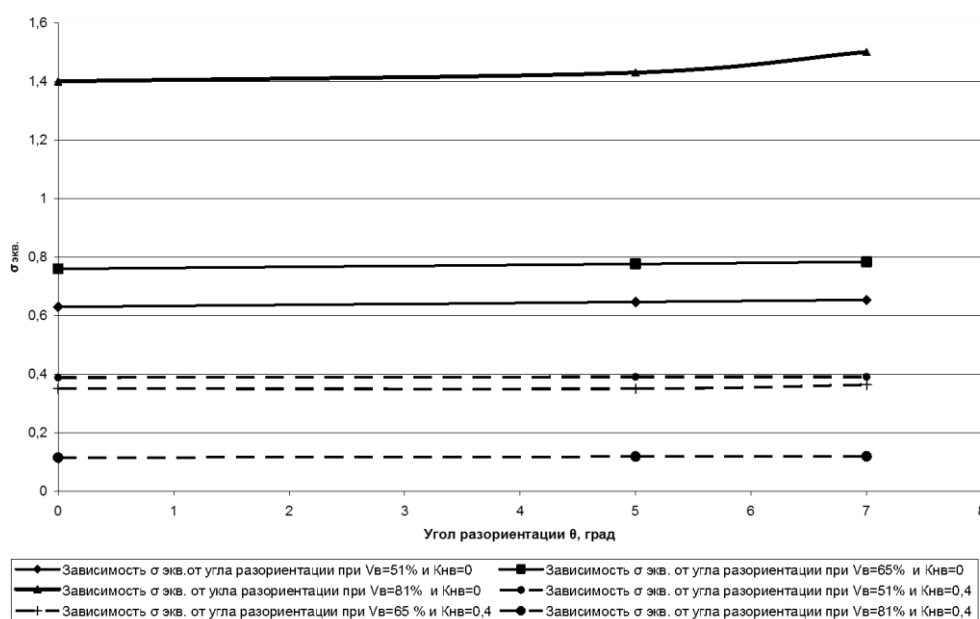


Рис.1. Влияние угла разориентации θ на эквивалентные остаточные напряжения $\sigma_{\text{экв}}$ при $K_{\text{нв}}=0,4$ и при $K_{\text{нв}}=0$ для укладок ($0^\circ/45^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ$; $0^\circ/50^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ$; $0^\circ/52^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ$).

По полученным данным, можно сказать, что при $K_{\text{нв}}=0$ с увеличением объемного содержания волокон V_v величина эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{экв}}$ возрастает для всех схем армирования. Причем, при $V_v=81\%$ - $\sigma_{\text{экв}}$ превышают единицу, на основании чего мы можем сделать вывод, что при данном объемном содержании происходит разрушение композиционного материала. Однако, варьируя уровни предварительного натяжения, мы можем качественно и количественно исправить критическую ситуацию разрушения композита. В свою очередь, при $K_{\text{нв}}=0,4$, проведенный анализ показал, что увеличение V_v существенно снижает $\sigma_{\text{экв}}$ для всех рассмотренных укладок КМ. Таким образом, проведя качественный и количественный прочностной анализ, рассматриваемых композитных панелей, мы пришли к выводу, что наиболее благоприятный вариант – это случай при объемном содержании волокон $V_v=62\%$, когда угол разориентации слоя не превышает 3° . Рассмотрев влияние толщины панели H на $\sigma_{\text{экв}}$, можно сделать вывод, что

увеличение толщины панели в общем способствует незначительному снижению эквивалентных напряжений. Самый неблагоприятный вариант при этом, в случае объемного содержания волокна $V_f=81\%$, так как в этом случае $\sigma_{э\text{кв}} > 1$, что по критерию Гольденблата-Копнова (10) означает разрушение композита. Использование натяжения волокон при уровне коэффициента $K_{нв}=0,4$ значительно уменьшает значение $\sigma_{э\text{кв}}$. Исходя из этого, очевидно, что увеличение толщины панели H в целях снижения уровня $\sigma_{э\text{кв}}$ менее эффективно, чем использование предварительного натяжения волокон. Основываясь на вышеприведенном анализе, целесообразно рекомендовать использование натяжения волокон при производстве конструкций из композиционных материалов. Зависимость кривых, представленных на рис.2 подтверждают данное предположение.

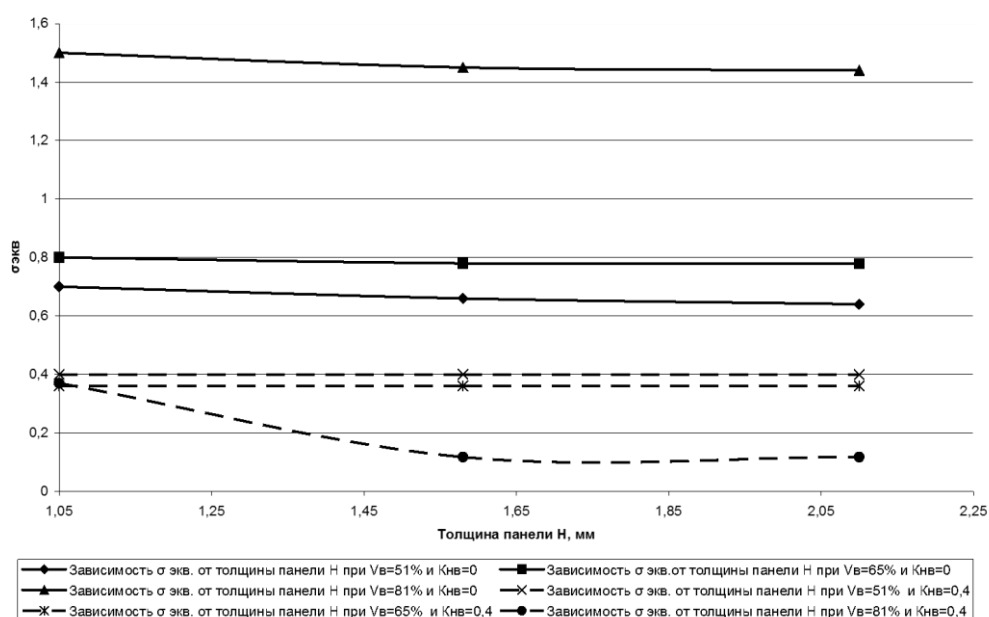


Рис.2. Влияние толщины панели H на эквивалентные остаточные напряжения $\sigma_{э\text{кв}}$ при $K_{нв}=0,4$ и при $K_{нв}=0$ для укладок $(0^\circ/45^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ)$; $(0^\circ/50^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ)$; $(0^\circ/52^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ)$.

Исследование прогибов для укладок с косыми углами позволяет выявить влияние углов разориентации на коробление поверхности панели. В ходе анализа, было установлено, что с ростом угла разориентации прогиб панели значительно увеличивается. Использование такого технологического приема, как натяжение волокон, позволяет добиться снижения величины прогибов в 1,5–2 раза, зависимость, представленная на рис.3, является доказательством вышесказанного.

Подводя итог вышесказанному, можно отметить, что в тонкостенных слоистых конструкциях из композиционных материалов неизбежно образуются нежелательные остаточные технологические напряжения и деформации (коробление), которые снижают как точность полученных изделий при изготовлении, так и их несущую способность при различных видах нагружения в период эксплуатации. Образующиеся технологические остаточные напряжения могут вызывать разрушение матрицы и слоев в элементах конструкции еще на стадии изготовления, что является недопустимым. Исходя из этого, возникает необходимость анализа причин формоизменения и разрушения слоистого элемента,

и после соответствующего анализа необходимо назначать достаточно строго пределы технологических погрешностей при изготовлении.

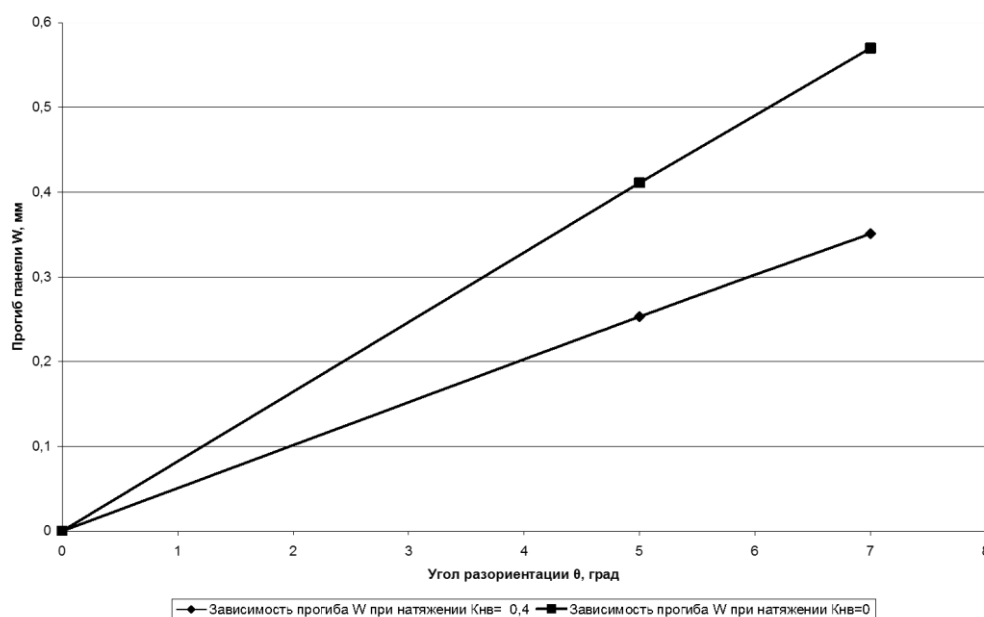


Рис.3. Зависимость прогиба W от угла разориентации при $K_{нв}=0,4$ и $K_{нв}=0$ для укладок $(0^\circ/45^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ)$; $(0^\circ/50^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ)$; $(0^\circ/52^\circ/135^\circ/90^\circ/90^\circ/135^\circ/45^\circ/0^\circ)$.

Приведенный параметрический анализ формоизменения (коробления) многослойных композитных панелей, показал, что при помощи варьирования таких параметров, как толщины панели, угла разориентации, уровня предварительного натяжения волокон и уровня объемного содержания компонент слоя можно эффективно препятствовать короблению многослойных композитных панелей. Кроме того сравнение теоретических и экспериментальных результатов показало адекватность используемой математической модели, так как расхождение значений не превышает 10-15%.

Таким образом, проведенные теоретические и экспериментальные исследования подтверждают необходимость дальнейшей разработки и анализа новых подходов к изготовлению тонкостенных конструкций из композиционных материалов с повышенной трещиностойкостью, низким короблением, меньшим рассеянием свойств, повышенными средней прочностью, усталостной долговечностью и надежностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.
2. Биткина Е.В., Пидодня В.Г., Биткина О.В. Исследование влияния технологических факторов на остаточные напряжения, возникающие в волокнистом композите // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. – 2011. – Т.25 – №4. – С.59-66.
3. Молодцов Г.А., Елпатьевский А.Н., Лурье С.А., Гавва Л.М. Методы решения задач устойчивости слоистых ортотропных панелей из композиционных материалов

несимметричной структуры по толщине с учетом технологических факторов / II Всесоюзная конференция «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов». Сборник тезисов докладов. – Куйбышев: Куйбышевский авиационный институт им. академика С.П. Королева, 1986. – С.71-72.

4. *Биткина О.В., Биткина Е.В.* Анализ технологических остаточных напряжений, возникающих в многослойных композитных панелях с несимметричной структурой пакета композита по толщине // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2012. – Т.14. – №4(2). – С.561-568.
5. *Молодцов Г.А., Гавва Л.М., Осинская Е.А.* Параметрический анализ остаточных температурных напряжений в плоских слоистых панелях из композиционного материала с учетом несимметрии свойств структуры пакета по толщине. – М., 1985. – 47 с.

МОДЕРНИЗИРОВАННЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИИ

Ванцян А.А., Геворкян Г.А.

Институт механики Национальной Академии наук Армении, г. Ереван, Армения

РЕЗЮМЕ

Предложен модернизированный метод итерации для решения трансцендентных уравнений и систем уравнений, который имеет более широкую область и значительную скорость сходимости по отношению к существующим известным методам численного решения уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционный метод итераций или, как его часто еще называют, метод последовательных приближений является одним из наиболее распространенных методов численного решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений вида $f(x) = 0$ и систем нелинейных уравнений $\vec{f}(\vec{x}) = 0$.

Однако, как известно, полагаемое на метод итерации ограничение $|\varphi'(x)| < 1$ существенно ограничивает область сходимости возможных решений.

Как известно, метод Ньютона, или метод касательных, связанный известным преобразованием с классическим методом итераций [1], избавлен от указанных выше недостатков метода итераций, однако при нарушении монотонности функции использование метода Ньютона оказывается тем не менее нецелесообразным.

В публикации [2] была изложена в предварительной трактовке новая разновидность метода итерации, позволяющая, с одной стороны, существенно расширить спектр сходимости возможных решений, а, с другой стороны, успешно использовать эту модификацию при нарушении монотонности функции $f(x)$, т.е. там, где метод Ньютона несостоятелен.

В настоящей публикации эту новую разновидность метода итерации решено было по праву назвать модернизированным методом итерации (ММИ), поскольку ряд алгебраических и трансцендентных уравнений, решенных этим методом, подтверждает эффективность его применения с точки зрения обеспечения и скорости сходимости по отношению к другим известным методам численного решения нелинейных уравнений, таким как традиционный метод итерации, метод Ньютона, метод половинного деления и пр.

В целях математического обоснования и уточнения области возможного применения вышеназванного модернизированного метода итерации формулируется и доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$. Тогда, если существует правильная дробь q такая, что

$$\frac{|1 + \varphi'(x)|}{2} \leq q < 1 \quad (1)$$

при $a < x < b$, то модернизированный процесс итерации

$$x_n = \frac{\varphi(x_{n-1}) + x_{n-1}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a, b]$ к предельному значению

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad (3)$$

которое является единственным корнем уравнения

$$f(x) = 0, \quad \text{или} \quad \varphi(x) = x, \quad (4)$$

на отрезке $[a, b]$, где выполняется условие теоремы Больцано–Коши $f(a) \cdot f(b) < 0$ о существовании отделенного изолированного корня (3) уравнения (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим два последовательных приближения

$$x_n = \frac{\varphi(x_{n-1}) + x_{n-1}}{2} \quad \text{и} \quad x_{n+1} = \frac{\varphi(x_n) + x_n}{2},$$

откуда

$$\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) + x_n - x_{n-1} = 2(x_{n+1} - x_n).$$

Применяя теорему Лагранжа, будем иметь

$$(x_n - x_{n-1})\varphi'(\bar{x}_n) + (x_n - x_{n-1}) = 2(x_{n+1} - x_n), \quad \bar{x}_n \in (x_{n-1}, x_n);$$

или

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{1 + \varphi'(\bar{x}_n)}{2} \right| |x_n - x_{n-1}|,$$

или, с учетом условия (1),

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q |x_n - x_{n-1}|. \quad (5)$$

Отсюда, придавая значение $n = 1, 2, \dots$, последовательно получим

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq q |x_1 - x_0|; \\ |x_3 - x_2| &\leq q |x_2 - x_1| \leq q^2 |x_1 - x_0|, \\ |x_{n+1} - x_n| &\leq q^n |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots, \quad (6)$$

для которого последовательные приближения x_n являются $(n+1)$ -ми частными суммами, т.е.

$$x_n = S_{n+1}.$$

В силу неравенства (5) члены ряда (6) по абсолютной величине меньше соответствующих членов геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, поэтому ряд (6) сходится и притом абсолютно. А из этого следует, что для непрерывной функции $\varphi(x)$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} + \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)}{2} = \frac{\varphi(\xi) + \xi}{2} = \xi,$$

который в итоге равносильен результату

$$\varphi(\xi) = \xi,$$

откуда следует, что ξ есть корень уравнения (4), что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ

$$\frac{|1 + \varphi'(x)|}{2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \frac{1 + \varphi'(x)}{2} \\ \frac{1 + \varphi'(x)}{2} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x) > -3 & (\text{для спиралеобразной итерации при } \varphi'(x) < 0) \\ \varphi'(x) < 1 & (\text{для ступенчатой итерации при } \varphi'(x) > 0) \end{cases}$$

Для наглядности приложения изложенного метода итерации к решению конкретных уравнений вначале рассмотрен пример численного решения простейшего трансцендентного уравнения.

Пример 1:

$$1,5 + x \sin x = 0 \quad \varphi(x) = 1,5 + x \sin x + x \quad \varphi'(x) = \sin x - x \cos x + 1$$

Таблица 1.

А) $\varphi'(2,0) = -0,964$	В) $\varphi'(2,2) = -1,15999$
Matlab нет решения	Matlab $\xi = 3,5746, t = 0,3750$ мкс
Эйткен $\xi = 3,5746 t = 0,1250$ мкс	Эйткен $\xi = 3,5746 t = 0,1410$ мкс
ММИ $\xi = 3,5746 t = 0,0150$ мкс	ММИ $\xi = 3,5746 t = 0,0160$ мкс
Итерации нет решения	Итерации нет решения

В табл.1 приводится сравнительная оценка численно решения трансцендентного уравнения примера I модернизированным методом итерации (ММИ) и известными методами по основным показателям их качества (точности и компьютерному времени).

Далее, в примере 2, рассмотрен случай численного решения трансцендентного уравнения, имеющего комплексные корни.

Пример 2:

$$x \lg x + \cos x = 0 \quad \varphi(x) = -\frac{\cos x}{\lg x} \quad \varphi'(x) = \lg x - \sin x + \frac{1}{\ln 10}$$

Таблица 2.

Начальное приближение x_0	Matlab		ММИ	
	Решение	Время /мкс/	Решение	Время /мкс/
3,0	нет решения	—	0,0245+0,9902i	0,015
2,0	нет решения	—	0,0245+0,9902i	0,015
3,1	нет решения	—	0,0245+0,9902i	0,015
i	0,0245+0,9902i	0,3280	0,0245+0,9902i	0,015
i+1,0	0,0245+0,9902i	0,3280	0,0245+0,9902i	0,015

В табл.2 приводятся итоги численного решения трансцендентного уравнения в комплексных корнях примера 2 посредством применения прикладной программы Matlab и модернизированного метода итерации для разных начальных приближений x_0 .

В качестве третьего примера рассмотрен случай численного решения трансцендентного уравнения в комплексных корнях, полученного в [3], где рассмотрена задача об устойчивости многослойного основания.

Пример 3:

$$\alpha p \operatorname{th} p = 1 + i\beta p,$$

где $p = p_1 + ip_2$, α, β - параметры, принимающие значения

$$\alpha = 0,1; \quad 0,2;$$

$$\beta = 0; \quad 0,001;$$

Уравнение примера 3 можно свести к системе двух трансцендентных уравнений для действительных корней

$$\begin{cases} \alpha p_1 \operatorname{th} p_1 - \alpha p_2 \operatorname{th} p_2 = 1 + \beta p_1 \operatorname{th} p_1 \operatorname{th} p_2 - \beta p_2; \\ \alpha p_1 \operatorname{th} p_2 + \alpha p_2 \operatorname{th} p_1 = \beta p_1 - \operatorname{th} p_1 \operatorname{th} p_2 + \beta p_2 \operatorname{th} p_1 \operatorname{th} p_2. \end{cases}$$

На рис.1 и 2 приводятся зависимости числа итераций, необходимых для достижения ожидаемого предела с точностью $\varepsilon \leq 10^{-5}$, от начальных приближений $p_1^0 = 1, 2, \dots, 10$ при $p_2^0 = 0$ связи с первой парой параметров $\alpha = 0,1$ и $\beta = 0$, для случаев численного решения заданной системы трансцендентных уравнений классическим и модернизированным методами итерации соответственно.

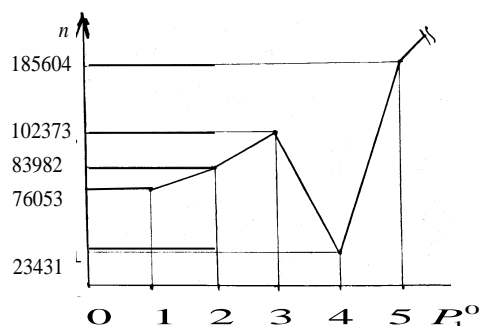


Рис.1.

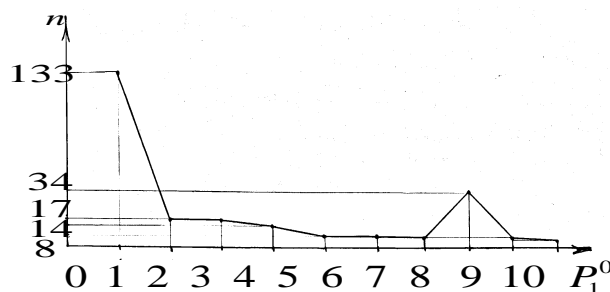


Рис.2.

Следует отметить, что для остальных возможных начальных приближений для $p_2^0 = 1, 2, \dots, 10$ при паре параметров $\alpha = 0,1$ и $\beta = 0$, также как и для следующей пары параметров $\alpha = 0,2$ и $\beta = 0,001$, характеристики сходимости традиционного и моделированного методов итераций существенно не соответствующих характеристик.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, как показывают приведенные примеры, предложенный модернизированный метод итераций имеет значительные преимущества по отношению к существующим методам, а именно, обладает более широкой областью и более высокой скоростью сходимости численных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б.П. и Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
2. *Ванцяи А.А.* Об одном методе решения трансцендентных и алгебраических уравнений // *Information Technologies and Management.* – 2004. – N4. – С.44-47.
3. *Мовсисян Л.А.* Об одном способе сейсмозащиты // *ДНАН РА.* – 2011. – №4. – Т.111. – С.325-335.

УДК 620.022:67.02

СТРУКТУРНО-МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСОКОПРОЧНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПОЛИТЕТРАФТОРЭТИЛЕНА*

Воропаев В.В.

*УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», г. Гродно,
Беларусь*

РЕЗЮМЕ

В работе исследованы особенности формирования гетерофазной структуры композиционных материалов на основе политетрафторэтилена, содержащих наполнители и модификаторы различного состава, габитуса и геометрических размеров при их содержании 20-35% масс. Определены направления совершенствования технологических процессов изготовления изделий с повышенными параметрами деформационно-прочностных и триботехнических характеристик путем управления структурой высоконаполненных фторкомполитов на различных уровнях. Установлен механизм модифицирующего действия продуктов термогазодинамического синтеза политетрафторэтилена (УПТФЭ) в композите. Разработана технология модифицирования компонентов фторкомполитов, содержащих углеродные волокна, частицами УПТФЭ, обеспечивающая повышение износостойкости в 1,1-1,2 раза и прочности в 1,1-1,35 раза при формировании изделий холодным прессованием с последующим спеканием.

Ключевые слова: композиционный материал; политетрафторэтилен; триботехнические характеристики; деформационно-прочностные характеристики

1. ВВЕДЕНИЕ

Важнейшими компонентами оборудования предприятий химического комплекса и энергетики, установок для получения сжатых и сниженных газов, являются герметизирующие уплотнительные устройства, в которых используют элементы, обеспечивающие герметичность статических и подвижных сопряжений. Учитывая условия эксплуатации такого оборудования, предполагающие длительный технологический цикл без обслуживания, реверсивный характер движения, отсутствие специальных смазочных сред, воздействие агрессивных сред и повышенных температур, к материалам для герметизирующих и уплотнительных элементов предъявляют особые требования. Наибольшее распространение в узлах запорной арматуры, применяемой в газо- и водоснабжении, теплоэнергетике и конструкциях компрессорной техники химических производств, получили элементы из фторкомполитов, разработанные на основе политетрафторэтилена (ПТФЭ), модифицированного дисперсными компонентами различного состава и технологии получения.

При наличии достаточно широкой номенклатуры машиностроительных материалов на основе политетрафторэтилена особое место занимают составы, в которых в качестве многофункционального модификатора использованы углеродсодержащие компоненты, прежде всего, углеродные волокна (УВ). Однако при выраженных достоинствах материалов серии Флубон, Флувис по сравнению с

* Работа выполнена при поддержке БРФФИ, грант № T12M-152.

аналогами, содержащими в качестве функциональных модификаторов дискретные частицы минералов (цеолитов, глин), углеродсодержащих частиц (УДАГ, технического углерода, кокса), дисперсных волокон (стеклянных, базальтовых, оксалоновых), не в полной мере реализованы потенциальные возможности, обусловленные составом, структурой и характеристиками как политетрафторэтилена (ПТФЭ), так и высокопрочного (высокомодульного) модификатора – УВ. Наблюдается структурный парадокс, проявляющийся в снижении параметров деформационно-прочностных и триботехнических характеристик при увеличении доли УВ в композиционном материале.

В связи с изложенным актуальной является задача разработки составов и технологии фторкомпозитов с повышенными параметрами деформационно-прочностных и триботехнических характеристик путем направленного регулирования физико-химических и теплофизических процессов на границе раздела «матрица-углеродный наполнитель».

2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Учитывая многообразие областей применения изделий из фторкомпозитов, для исследования были выбраны компоненты, промышленно освоенные на предприятиях Республики Беларусь и Российской Федерации, имеющие регламентированные показатели, определяющие качество. В качестве матричного связующего использовали порошкообразный ПТФЭ марок 4ПН, ПН90, 4ТМ в состоянии промышленной поставки (ГОСТ 10007-80, ТУ 2213-021-13693708-2005, ТУ 2213-022-13693708-2005).

Для модифицирования матричного полимера использовали продукт диспергирования углеродных волокон марки ЛО-1-12Н, производимых ОАО «СветлогорскХимволокно» (ТУ РБ 400031289.170-2001). В отдельных экспериментах использовали углеродный материал «Белум», полученный модифицированием промышленного волокна в среде полимеризующихся фторсодержащих продуктов по технологии, разработанной в ГНУ ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси. В качестве углеродсодержащих модификаторов использовали технический углерод марки П234 (ГОСТ 7885-86), графит пылевидный (ТУ 48-4802-20-98). Для модифицирования компонентов использовали продукты термогазодинамического синтеза (ТГД-синтеза), позиционируемые разработчиком как ультрадисперсный политетрафторэтилен (УПТФЭ) и выпускаемые под торговой маркой «Форум» (Институт химии ДВО РАН).

При изготовлении образцов для испытаний, заготовок и изделий использовали технологию подготовки компонентов, смешивания, прессования и монолитизации, разработанную для фторкомпозитов Флубон и Флувис и применяемую в настоящее время на предприятиях по производству фторкомпозитов. Для получения высокопрочных изделий использовали оригинальные технологии монолитизации заготовок при воздействии температуры (технология ВС) и механических напряжений (технология ХМ).

Топографию поверхности исследуемых образцов наблюдали с помощью растрового электронного микроскопа марки LEO1455VP фирмы «Carl Zeiss» с использованием рекомендаций разработчика.

Деформационно-прочностные характеристики ПКМ определяли в соответствии с действующими ГОСТами и нормативной документацией на фторкомпозиты серии Флубон и Флувис.

Триботехнические характеристики ПКМ оценивали с помощью машины трения ХТИ-72 по схеме «пальчик-диск» в соответствии с нормативной документацией.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В современном материаловедении фторкомпозиатов машиностроительного назначения отсутствуют единые методологические подходы, обеспечивающие получение промышленных партий материалов со стабильными параметрами прочности и износостойкости в рамках одной марки. Широко применяемые в технологии фторкомпозиатов порошкообразные продукты марок Ф4ТМ, Ф4ПН, позиционируемые производителями как политетрафторэтилен, представляют собой частицы с нерегулируемыми параметрами молекулярной массы и морфологии. Анализ свидетельствует о кластерном строении полуфабриката частиц ПТФЭ, которые образованы низкоразмерными фрагментами, соединенными между собой висцерными элементами, обусловленными особенностями синтеза, что приводит к разбросу как размерных, так и морфологических характеристик частиц матричного полуфабриката (рис.1).

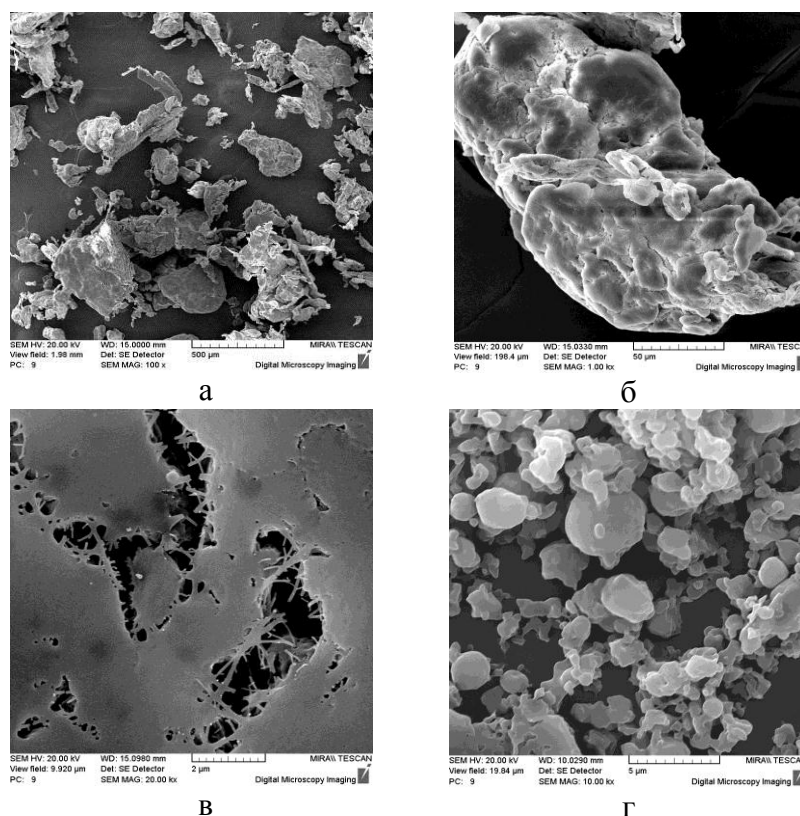


Рис.1. Характерная морфология частиц политетрафторэтилена (а, б, в) и ультрадисперсного политетрафторэтилена (г).

Очевидным является существенный вклад морфологического фактора частиц ПТФЭ в параметры характеристик композиций, полученных на их основе при традиционной технологии фторкомпозиатов, основанной на последовательных стадиях смешивания компонентов, холодного прессования заготовок и их спекания (монолитизации), так как в этом случае существенно влияние межчастичного трения на формирование дефектов структуры композита. Поэтому при выборе компонентов

фторкомпозиата необходимо обеспечивать корреляцию параметров габитуса частиц и морфологии поверхностного слоя с реологическими параметрами ПТФЭ в условиях формирования композитов и изделий из них. Морфологический анализ методами РЭМ и АСМ дисперсных частиц распространенных модификаторов ПТФЭ – фрагментов углеродных волокон (УВ), углеродных нанотрубок (УТ), минеральных продуктов трепела (ТР), шунгита (ШТ) свидетельствует о существенном различии в строении поверхностного слоя, определяющего механическую составляющую адгезионного взаимодействия на границе раздела «матрица ПТФЭ-наполнитель» (рис.2).

Различие в морфологии поверхностного слоя модифицирующих частиц предопределяет отличие в механизме и кинетике формирования граничного слоя на стадии холодного прессования заготовок, так как время их прессования ограничено технологическим циклом и не превышает 3-6 мин. Поэтому даже при относительно высоких значениях давления прессования ($P=60-70$ МПа) не проявляется в полной мере эффект хладотекучести матричных частиц ПТФЭ, который определяет кинетику заполнения микронеровностей поверхностного слоя частиц наполнителя и образования структуры граничного слоя с минимальным количеством дефектов.

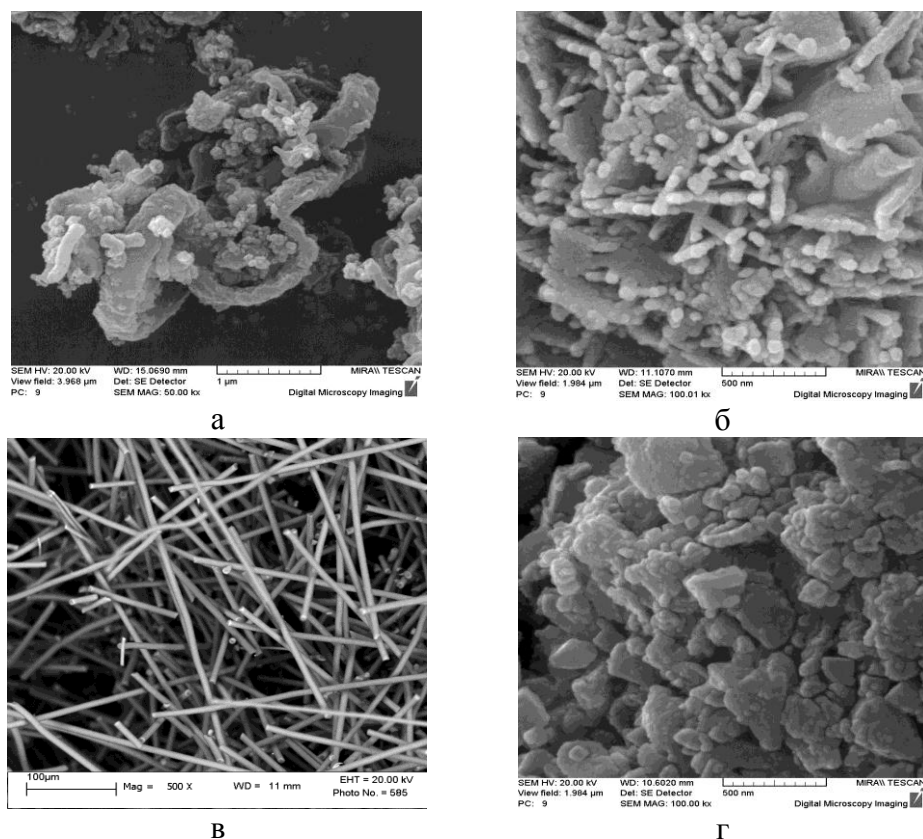


Рис.2. Морфология поверхностного слоя углеродных трубок (а), трепела (б), углеродного волокна (в), шунгита (г).

Наблюдается выраженный концентрационный градиент частиц наполнителя по объему матричного полимера, обусловленный технологией смешения компонентов и различием их геометрических, электрофизических параметров и массы. При этом частицы наполнителя с размерами, меньшими, чем у промышленного порошкообразного ПТФЭ (10-500 мкм), и близким габитусом, образуют кластеры в областях контакта матричного полимера (рис.3).

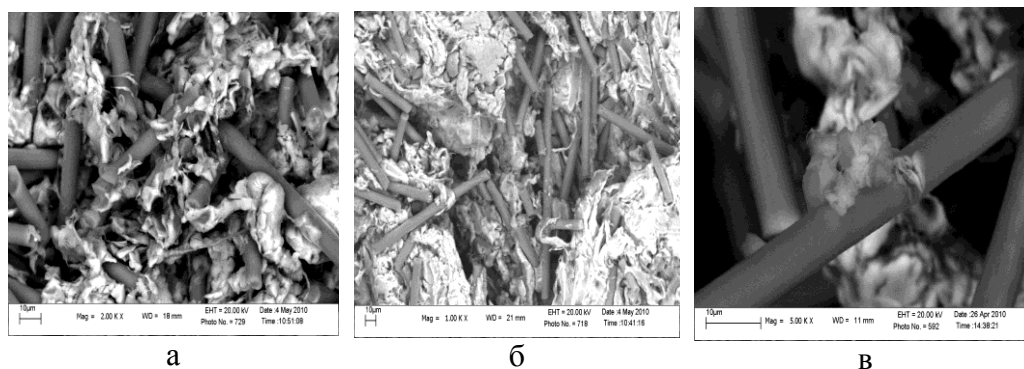


Рис.3. Кластерные структуры фрагментов углеродного волокна в композиционном материале ПТФЭ+10% масс. УВ: исходные (а), после холодного прессования при $P=70$ МПа (б). Распределение частиц УПТФЭ в смеси фрагментов УВ (в).

Дефектные участки с практически полным отсутствием связующего (ПТФЭ), образовавшиеся на стадии смешения (рис.3,а), сохраняются и после стадии холодного прессования (рис.3,б). При этом в результате действия механических и электрофизических факторов процесса смешения исходные частицы ПТФЭ также формируют кластерные структуры, увеличивая концентрационный градиент по объему композиционного материала и заготовок (рис.3,а,б). Вследствие отмеченных факторов формируются технологические предпосылки образования дефектов гетерогенной структуры изделия даже при соблюдении оптимальных технологических режимов подготовки компонентов, получения композиционного материала и изготовления изделий по действующему технологическому регламенту.

Исходя из проведенного анализа определены перспективные направления совершенствования структуры фторкомполитов на межмолекулярном и межфазном уровнях путем использования функциональных компонентов и специальных технологических приемов в рамках традиционного процесса, реализуемого на специализированных предприятиях по производству фторкомполитов и изделий из них.

Для реализации поставленной задачи использовали различные подходы. Стабилизацию геометрических, размерных и технологических параметров промышленных порошков ПТФЭ осуществляли с применением в качестве многофункционального модификатора продуктов термогазодинамического синтеза политетрафторэтилена (УПТФЭ). Характерной особенностью единичных частиц УПТФЭ, которые склонны к образованию кластерных структур (рис.1,г), является наличие в составе олигомерных компонентов различной молекулярной массы с различной температурой плавления и повышенной деформативностью. При модифицировании дисперсных частиц ПТФЭ марок Ф4ТМ и Ф4ПН частицами УПТФЭ происходит изменение габитуса, повышение технологических параметров, которые обуславливают увеличение показателей прочности в 1,1-1,2 раза, относительного удлинения и износостойкости в 2,5-3 раза. Важной особенностью модифицирующего действия УПТФЭ является формирование на поверхности трения разделительного слоя с высокой устойчивостью к процессам передеформирования, снижающего износ при трении без подвода внешней смазки. Высокодисперсные частицы УПТФЭ способствуют повышению параметров деформационно-прочностных характеристик композитов, содержащих как вискерные наполнители (УВ), так и дисперсные, пластинчатой и сферической формы, например, частицы технического углерода (ТУ) (табл.1,2).

Таблица 1.
Характеристики композитов типа Флувис на основе фторопластов разных марок с добавлением модификатора УПТФЭ.

Наименование показателей	Результаты испытаний			
	С добавлением модификатора		Без модификатора	
	Матричный материал		Матричный материал	
	фторопласт-4ТМ	фторопласт-4ПН	фторопласт-4ТМ	фторопласт-4ПН
Прочность при разрыве, МПа, не менее	27	23	24	17
Плотность, кг/м ³ , не менее	2000	1970	1980	1930
Интенсивность изнашивания, $J \cdot 10^{-7}$ мм ³ /Н·м, не более	3,0	3,5	3,3	3,5

Таблица 2.
Прочностные характеристики композитов на основе ПТФЭ и технического углерода с модификатором УПТФЭ.

Материал	Прочность при разрыве, МПа	Износ, $J \cdot 10^{-7}$ мм ³ /Н·м
Фторопласт-4ПН	19,29	238,72
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 0,1% ТУ П 234	22,47	211,52
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 0,5% ТУ П 234	24,30	81,51
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 1% ТУ П 234	24,90	54,33
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 3% ТУ П 234	23,08	26,70
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 5% ТУ П 234	22,47	39,81
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 10% ТУ П 234	22,17	30,94
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 0,1% ТУ П 803	23,08	187,65
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 0,5% ТУ П 803	21,56	213,52
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 1% ТУ П 803	24,30	77,14
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 3% ТУ П 803	19,44	66,66
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 5% ТУ П 803	26,42	66,79
Ф-4ПН + 2,0% «Форум» + 10% ТУ П 803	26,12	49,52

Дисперсные частицы УПТФЭ на стадии подготовки наполнителя располагаются в пустотах кластеров УВ, снижая дефектность композита и способствуя равномерному распределению частиц ТУ на поверхности модифицированного ПТФЭ. О снижении дефектности гетерогенной структуры фторкомпозитов свидетельствует факт повышения параметра плотности. Характерным следствием действия УПТФЭ в композитах с наполнителями висцерного (УВ) и сферического (ТУ) габитусов является повышение износостойкости благодаря образованию устойчивого разделительного слоя из полимер-олигомерных продуктов трибохимических превращений УПТФЭ, ПТФЭ и ТУ.

Реализуется механизм многоуровневого модифицирующего действия УПТФЭ в композиционных материалах, который состоит в понижении дефектности

матричного ПТФЭ и в уменьшении числа кластерных агрегатов частиц наполнителя (УВ, ТУ), в которых отсутствует связующее (рис.3,а).

Проведенные исследования особенностей гетерогенной структуры композиционных материалов на основе политетрафторэтилена и модификаторов различного состава, геометрических параметров, технологии получения и габитуса позволили разработать принципы получения малодефектных изделий, основанные на регулировании процессов межфазного взаимодействия на различных стадиях производства изделий (заготовок).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Исследованы механизмы формирования дефектов гетерофазной структуры фторкомполитов, содержащих повышенное количество углеродных наполнителей (25-35% масс.), обуславливающих механизмы разрушения и изнашивания изделий при эксплуатации в триботехнических и герметизирующих системах. Установлено, что основными факторами, создающими структурно-морфологические предпосылки проявления структурного парадокса снижения прочности и износостойкости при увеличении степени наполнения политетрафторэтилена, являются несоответствие геометрических, размерных и электрофизических характеристик дисперсных частиц компонентов, обуславливающее формирование кластерных агрегатов наполнителя, и низкий уровень адсорбционного взаимодействия в межфазной зоне вследствие структурных и реологических особенностей полимера [1-5].

Развита концепция многоуровневого модифицирования применительно к созданию высоконаполненных композиционных материалов на основе политетрафторэтилена. Установлен механизм модифицирующего действия продуктов термогазодинамического синтеза политетрафторэтилена (УПТФЭ) в композите, основанный на повышении прочностных и триботехнических характеристик матричного полимера, увеличении адгезионного взаимодействия на границе раздела «ПТФЭ-УВ» и повышении устойчивости к многоцикловым воздействиям разделительного слоя в зоне фрикционного контакта. Разработана технология модифицирования компонентов фторкомполитов, содержащих углеродные волокна, ультрадисперсными частицами продуктов термогазодинамического синтеза (УПТФЭ), обеспечивающая повышение износостойкости в 1,1-1,2 раза и прочности по параметрам σ_p и $\sigma_{сж}$ в 1,1-1,35 раза при формировании изделий холодным прессованием с последующим спеканием [6,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воропаев В.В. и др.* Методология формирования и применения функциональных материалов на основе политетрафторэтилена // Горная механика. – 2008. – №2. – С.50-60.
2. *Струк В.А. и др.* Технология триботехнических композитов на основе политетрафторэтилена // Инженерный вестник. – 2009. – №1. – С.110-116.
3. *Антонов А.С. и др.* Механохимические аспекты технологии фторопластовых композитов // Инженерный вестник. – 2009. – №2. – С.20-26.
4. *Воропаев В.В., Горбацевич Г.Н.* Технология формирования триботехнических композитов на основе политетрафторэтилена // Инженерный вестник. – 2009. – №2. – С.51-54.

5. *Воропаев В.В.* Технология высоконаполненных фторопластовых композитов // Наука и инновации. – 2009. – №5. – С.48-49.
6. *Горбачевич Г.Н. и др.* Структура и технология функциональных композиционных материалов на основе политетрафторэтилена // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Серыя 6. Тэхніка. – 2011. – №1 (116). – С.90-99.
7. *Михайлова Л.В., Воропаев В.В., Горбачевич Г.Н.* Технология триботехнических и герметизирующих композиционных материалов на основе политетрафторэтилена // Горная механика и машиностроение. – 2011. – №4. – С.86-97.

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ СТЕПЕНИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПОВРЕЖДЕНИЙ В МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЕЁ НАГРУЖЕНИЯ ДО РАЗРУШЕНИЯ*

Гольдштейн Р.В.¹, Онищенко Д.Д.²

¹ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

²ООО «Газпром добыча шельф», г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

В работе описан новый подход к решению задачи о предсказании коллапса квазистатически нагружаемой многоэлементной системы неизвестного объёма со случайными значениями прочности элементов. В его основе лежит идея сравнения характеристик исследуемой системы, фиксируемых в режиме реального времени в рамках временного «подвижного окна», с характеристиками ряда эталонных моделей, предварительно исследованных аналитическими и эмпирическими методами. Выделенные базовые классы моделей различаются степенью иерархичности внутренней структуры. Эта характеристика напрямую влияет на степень локализации зоны переноса нагрузки с разрушенного элемента на работоспособные. Как следствие, для систем из разных классов имеются различия между типичными характеристиками актов одновременного разрушения групп элементов (пакетов разрушений). Эти характеристики исследуемой системы предлагается отслеживать по ходу её нагружения и сравнивать с эталонными. Сделав вывод о близости системы к тому или иному базовому классу, мы получаем возможность оценивать её остаточный ресурс в рамках конкретной уточнённой модели.

Ключевые слова: квазистатическое разрушение; многоэлементная система; иерархическая система; статистика пакетов разрушений; скользящее окно; статистическая гипотеза; пучок Даниэлса; пучок с локальным перераспределением нагрузки; иерархическое дерево

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. О моделях многоэлементных систем.

Проблема аналитического или статистического исследования процессов разрушения многоэлементных систем стала одной из наиболее актуальных тем исследований в области физики, прикладной механики и техники ещё в первой половине прошлого века и с тех пор не теряет своей остроты. Среди моделей многоэлементных систем особое место занимают те, для которых невозможна детерминистическая постановка задачи о разрушении: либо по причине того, что значения прочности отдельных элементов являются случайными, либо по причине наличия случайности во внутренней структуре системы.

Для таких моделей важен вопрос о предсказании момента полного разрушения по ходу постепенного нагружения системы. Он может возникать, по крайней мере, в трёх принципиально различных ситуациях. В первой из них элементы абстрактной формализованной системы соответствуют реальным физическим объектам, составляющим моделируемую систему. Так обстоят дела в задачах о прочностных свойствах пучков волокон (например, [1]) или в задачах о прогнозировании ресурса сложных устройств [2]. Во второй ситуации элементы математической модели соответствуют взаимодействиям между частями реальной системы. Она имеет

*Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН П25.
Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 11_08-01243а.

место, например, в задачах о поведении электродинамических систем с предохранителями [3]. Наконец, в третьей ситуации моделируемое явление непрерывно по своей природе, а отдельные элементы в математической модели системы возникают как результат дискретизации сплошной среды, поля, связи и т.д. К таким случаям можно отнести исследования вулканической [4] и сейсмической [5] активности. Отметим, что если в первых двух ситуациях число элементов для конкретной системы является фиксированным (хотя, возможно, и неизвестным), в третьей это число становится параметром модели, от значения которого может зависеть степень её пригодности.

Несмотря на различие пространственных и временных масштабов явлений, описываемых в рамках перечисленных моделей, последние объединяет тот факт, что деградация системы (приближение её к окончательному разрушению) сопровождается накоплением в ней повреждённости в том или ином смысле, и наблюдаются последовательные разрушения групп элементов различных размеров. В ряде случаев интерес может представлять отслеживание изменений пространственных характеристик этих групповых разрушений (выделение «сканирующей» области больших напряжений, локализация прогрессирующих дефектов и т.д.). Для таких задач широкое распространение и подробное теоретическое обоснование получил метод акустической эмиссии (АЭ) и его модификации [6,7]. В других случаях, когда либо не выполнены условия применимости метода АЭ, либо расположение дефектов не играет роли при оценке потенциальных последствий их развития, достаточной является информация лишь о количественных характеристиках групповых разрушений.

В обеих ситуациях наибольшее распространение получили модели пучка (и их обобщения) как самые простые и в то же время наиболее универсальные в рассматриваемом классе. Развитие таких моделей, а также вероятностных подходов к определению прочности соответствующих систем и других их характеристик началось с пионерских работ [8,9] и продолжается до настоящего времени (см., например, обзор [10]). Именно эти модели рассматриваются обычно в качестве базового полигона как для апробирования новых прикладных методик оценки ресурса систем, выявления признаков начала прогрессирующего разрушения, оценки текущего риска разрушения за фиксированное время и т.д., так и для общего теоретического анализа перспективности таких методик [11].

1.2. Содержание работы.

В настоящей работе речь пойдёт об одной из таких процедур, позволяющей по итогам полного процесса разрушения системы сделать вывод о близости её свойств к свойствам представителей одного из базовых классов. Эти классы определяются тремя наиболее типичными моделями пучков, различающимися законом перераспределения нагрузки при разрушении группы элементов (волокон): это модель пучка Даниэлса, модель пучка с локальным перераспределением нагрузки (ЛПН) и иерархическая модель пучка. Для них имеются аналитические (в основном асимптотические) и эмпирические оценки прочности, вероятностного распределения масштабов групповых разрушений и т.д. Поэтому основным результатом применения процедуры является интегральный вывод о характеристиках последовательности групповых разрушений, характерных для систем, аналогичных данной. Подчеркнём, что по ходу анализа не делается детальных выводов о внутренней структуре системы; осуществляется лишь выбор той из базовых моделей, чьи свойства позволили бы лучше всего сгладить экспериментальные

данные. Работа алгоритма проиллюстрирована примером на основе численного моделирования разрушения системы, не принадлежащей ни к одному из базовых классов.

Тип результата применения предлагаемой процедуры оставляет возможность в дальнейшем при работе с такими системами оценивать их остаточный ресурс в режиме реального времени, действуя уже в рамках какой-либо из базовых моделей. Последнюю часть намеченного плана мы оставляем пока за рамками рассмотрения, т.к. её технические детали будут в основном иметь статистическую природу и относиться к робастности используемых процедур. В то же время для нас важно было продемонстрировать уже в рамках настоящей работы принципиальную возможность получения статистических выводов о внутренней структуре системы не только по окончании, но и непосредственно по ходу её разрушения. Это имеет большое значение при планировании мониторинга состояния уникальной системы. Полной реализации соответствующей схемы будут посвящены дальнейшие исследования.

Наконец, отметим, что в настоящей работе не затронут вопрос зависимости качества функционирования предлагаемого алгоритма от распределения прочности отдельного элемента. Хотя численные эксперименты показывают, что многие свойства (хотя бы качественные) многоэлементных систем в рассматриваемых моделях инвариантны относительно свойств прочности волокна, детально этот вопрос не изучен. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением одного индивидуального распределения прочности и сосредоточимся на подробном описании постановки задачи и работы алгоритма.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Общие условия.

Рассмотрим процесс квазистатического нагружения многоэлементной системы, элементы которой обладают случайной прочностью. Вероятностное распределение этой характеристики считается одинаковым для всех элементов – равномерным на отрезке $[0;1]$. Такой закон распределения прочности наряду с вейбулловским наиболее часто возникает в механических моделях пучков и выбран нами здесь потому, что соответствующий носитель плотности – отрезок, и на результаты не влияет наличие каких-либо приближений при работе на «хвостах» распределений.

Полное число элементов системы предполагается неизвестным, однако может допускать априорные оценки разного характера. Это замечание тесно связано с наличием в настоящей модели квазистатического приближения. Мы затронем данный вопрос подробнее в разделе 2.3.

Предполагается наличие в системе внутренней механико-геометрической структуры, детали которой, однако, могут быть неизвестны исследователю. Конкретнее, считается, что при действии на систему внешней нагрузки заданной величины усилия, возникающие в отдельных её элементах, однозначно определяются её текущей конфигурацией, т.е. тем, какие из элементов к настоящему моменту разрушены.

Разрушение отдельного элемента происходит в тот момент, когда усилие в нём становится равно его прочности. Считается, что в этот момент текущая нагрузка на указанный элемент мгновенно перераспределяется между остальными работоспособными элементами системы (возможно, не всеми). Правило перераспределения нагрузки считается фиксированным на всё время от начала

процесса нагружения до наступления коллапса. После того, как изменились значения нагрузки на неразрушенные элементы системы, может оказаться, что среди последних появились перегруженные. Они удаляются (перестают считаться работоспособными) с мгновенным перераспределением нагрузки среди остальных элементов по тем же правилам. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не наступит коллапс системы либо не окажется, что среди её элементов нет перегруженных. В последнем случае процесс нагружения продолжается ростом полной нагрузки на систему с того же значения, с которого начиналось разрушение описанной группы волокон, которое мы будем называть пакетом разрушений элементов (или просто пакетом). Число элементов, разрушенных по ходу данного пакета, назовём его объёмом. Завершающий пакет будем называть лавиной, а значение полной нагрузки, соответствующее лавине - критической полной нагрузкой. Термин «текущая/критическая удельная нагрузка» будем употреблять для обозначения отношения текущей/критической полной нагрузки на систему к общему числу элементов системы в её исходном состоянии.

Зададимся целью получать, начиная с некоторого момента времени, обновляемые оценки вероятности того, что исследуемая система относится к одному из заранее выбранных классов. Эти оценки, как следует из вышесказанного, предполагается получать в условиях наличия неполной информации о внутренней структуре системы, количестве её элементов и свойствах их прочности. Важно, что последняя из оценок будет проводиться после наступления коллапса, когда число элементов системы уже станет известно.

Во введении было пояснено, что такая постановка является промежуточной на пути к решению более общей задачи оценки остаточного ресурса системы по ходу развития процесса разрушения.

2.2. Корректность определения пакета.

Вообще говоря, порядок удаления перегруженных элементов из множества работоспособных (если в текущем состоянии их несколько) может влиять на ход процесса разрушения системы. Однако имеется [12] описание класса моделей, для которых характеристики каждого конкретного пакета и состояние системы после его завершения целиком определяются текущей конфигурацией системы, а также вектором нагрузок на её работоспособные элементы, и не зависят от последовательности «вычёркивания» отдельных элементов системы из списка работоспособных. В настоящей работе рассматриваются только системы, обладающие описанным свойством. Для них имеется, таким образом, возможность удалять группы перегруженных элементов целиком и воспринимать каждый пакет как объединение таких групп. Поэтому процесс разрушения может быть полностью описан двумя наборами чисел: объёмов последовательных пакетов и значений полной внешней нагрузки, соответствующих им.

2.3. Размер системы и применимость квазистатического приближения.

Насколько адекватна модель, в которой групповое разрушение (пакет) наделено лишь количественной характеристикой (объёмом), будучи лишено пространственных? Этот вопрос напрямую связан с тем, насколько велико число элементов, составляющих систему. Ясно, что абсолютное значение этого числа играет меньшую роль по сравнению с разбросом возможных пространственных характеристик одновременного группового разрушения набора элементов. Например, при моделировании явлений квазихрупкого разрушения [11,13] или

текучести [14] именно физические свойства процесса подсказывают, системы какого размера (в смысле числа элементов) представляют прикладной интерес, или, эквивалентно, каков абсолютный масштаб части реальной физической системы, допускающей моделирование отдельным элементом в абстрактной механической квазистатической модели.

Представляется полезным воспринимать используемую квазистатическую постановку задачи как предельный случай ряда постановок, параметризованных значением относительного масштаба области, в пределах которой перенос нагрузки между элементами системы происходит мгновенно. Постановки такого типа приводят к работе с потенциалами дальнего действия, зависящими от времени, и критерий разрушения отдельного элемента системы принимает вид «элемент перегружен в течение времени не меньшего, чем t » [15]. Возникают динамические эффекты, при описании которых важна связь между относительным масштабом зоны перераспределения нагрузки и временем установления новых значений нагрузки на элементы. Диапазон масштабов систем, удовлетворительно описываемых в рамках каждой конкретной модели, зависит от свойств этой связи. В нашем случае динамические эффекты при переносе нагрузки отсутствуют – перенос нагрузки осуществляется мгновенно вне зависимости от размера области дополнительного нагружения.

Вообще, в настоящей работе сделан пока акцент на идейной составляющей предлагаемой методики, а не на её применении к конкретным физическим моделям. Поэтому для иллюстрации работы методики моделируются системы, чей размер, с одной стороны, обеспечивает удовлетворительное выполнение ряда асимптотических результатов вероятностной природы, а с другой – ещё не затрудняет численное моделирование (с точки зрения временных затрат и точности вычислений); это значения порядка десятков и сотен тысяч элементов. Как пояснено в предыдущем абзаце, в рамках принятой модели основой для выбора такого диапазона размеров не могут являться те или иные динамические условия. В то же время для ряда физических моделей эти значения являются типичными.

Речь об обобщении методики на случай динамического описания процесса нагружения (и, в частности, о модификации определения пакета для случая наличия зависимости от времени в правиле переноса нагрузки) в рамках настоящей работы не идёт, однако этот вопрос следует, по-видимому, считать одним из важнейших для дальнейшего изучения.

2.4. Представление процесса разрушения.

Обсудим вопрос наблюдаемости моментов времени, соответствующих последовательным пакетам. В рамках действующей постановки задачи в роли «квазистатического времени» может выступать текущая полная нагрузка на систему (или, при известном числе элементов системы, текущая удельная нагрузка, что в ряде случаев показательнее). Измерение данной характеристики по ходу процесса разрушения доступно с высокой степенью точности благодаря уровню современных технических средств, однако сопоставление конкретного её значения данному пакету может представлять отдельную техническую проблему. Например, при экспериментальном изучении вязкоупругих эффектов нагружение образца, как в "жёсткой", так и в "податливой" испытательной системе не позволит избежать запаздывания деформации. Поэтому разрушение группы элементов может являться следствием возникновения не того значения нагрузки, которое наблюдается в текущий момент, а меньшего.

Проиллюстрируем сказанное на примере пучка Даниэлса. Зависимость полной нагрузки на пучок от нагрузки на неразрушенное волокно описывается разрывной функцией; абсциссы точек разрыва суть значения прочности волокон. Дополнив для наглядности график функции вертикальными отрезками в точках разрыва, получим пилообразную кривую, как на рис.1. Но при "жестком" нагружении реализуются только значения нагрузки, неубывающие с ростом усилия в работоспособном элементе. Соответствующая теоретическая зависимость описывается минимальной монотонно возрастающей мажорантой вышеуказанной разрывной функции. Горизонтальные участки графика этой мажоранты соответствуют пакетам (на рисунке красным изображены последние два из них). В реальном эксперименте они будут наклонными (тем больше, чем значимее эффект запаздывания деформации).

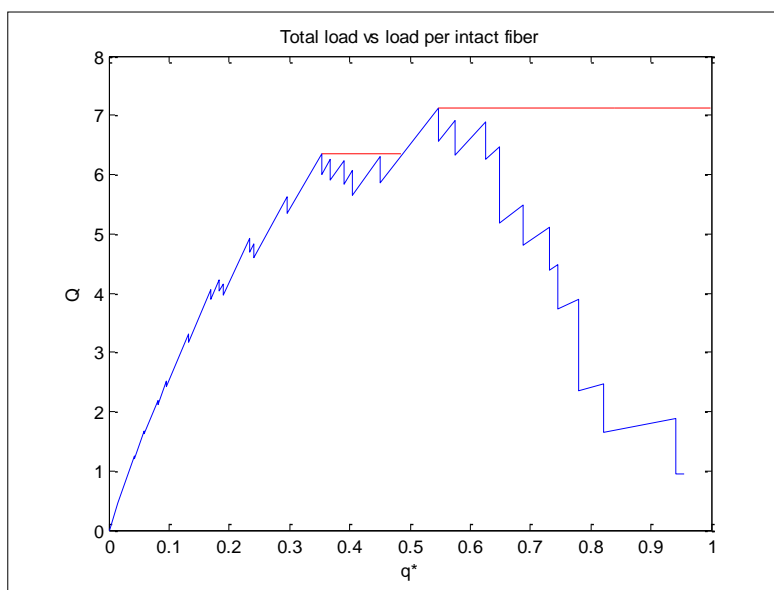


Рис.1. График зависимости полной нагрузки на пучок от усилия в работоспособном волокне для пучка Даниэлса из 30 волокон.

В предположении, что изменение полной нагрузки в пределах реального группового разрушения пренебрежимо мало, авторы серии работ [16-18] предложили свой подход к определению текущей стадии разрушения пучка Даниэлса (точнее, близости пучка к коллапсу), основанный на оценке показателя степени в степенном законе распределения пакетов в рамках полного процесса разрушения. Он предполагает использование только последовательности объёмов пакетов, но не лишён ряда принципиальных недостатков, отмеченных в [19]. В данной работе предлагается альтернативный подход, реализация которого требует использования значений полной нагрузки, соответствующих последовательным пакетам, но в то же время позволяет делать отдельные качественные выводы с использованием одних лишь данных об объёмах пакетов. При этом остаётся в силе предположение о том, что значение полной нагрузки на систему в рамках одного пакета неизменно и наблюдаемо.

Методика, предлагаемая в настоящей работе, предназначена для применения в более общей ситуации, чем намеченная в [19] (последняя относится только к модели пучка Даниэлса), и является её развитием. Она также предполагает представление процесса разрушения точечной траекторией на плоскости (Q, B) , где B – объёмы пакетов, Q – соответствующие значения полной нагрузки, действующей на пучок. В

этих терминах в разделах 3.2-3.4 описываются те из основных свойств базовых моделей, которые являются принципиальными для работы предлагаемой методики.

3. ОСНОВЫ РАБОТЫ МЕТОДИКИ

3.1. Техника "подвижного окна".

Суть предлагаемого подхода - получение обновляемых во времени статистических оценок близости свойств развивающегося процесса к свойствам эталонных процессов различных типов. Эти оценки основаны на анализе не непосредственно траектории на плоскости (Q, V) , а последовательностей значений текущей частоты фиксации пакетов объёмов 1, 2 и 3. Для получения оценок используется техника "подвижного окна": они проводятся по наборам из s последовательных пакетов и обновляются дискретно – после сдвига относительно предыдущего положения окна на половину его ширины (т.е. когда число зафиксированных с начала процесса пакетов увеличилось на $s/2$). Таким образом, полное число точек последовательности (т.е. моментов, в которые фиксируются значения характеристик) оказывается равным $v = \left[\frac{2\beta}{s} \right] - 1$, где β - полное число

пакетов во всём процессе разрушения. Исходя из этого, перед началом работы подбираются 2-4 различных значения ширины s подвижного окна с таким расчётом, чтобы порядок значений v составлял несколько десятков (желательно $10 \leq v \leq 50$). Ясно, что для этого необходимо высказать априорные предположения о размере системы и использовать данные о зависимости полного числа пакетов, предвещающих коллапс, от числа элементов системы для различных базовых классов (см. разделы 3.2-3.4).

Под текущей оценкой частоты пакетов объёма $V, V = 1, 2, 3$ мы понимаем делённое на s количество пакетов такого объёма, зафиксированных в рамках последнего окна.

Перед тем, как приводить необходимые для работы методики общие сведения о свойствах трёх базовых моделей, отметим следующее. Немногочисленность известных к этому времени аналитических результатов о свойствах систем данных трёх типов компенсируется нами использованием эмпирически полученных зависимостей средней критической нагрузки от объёма пучка и средней текущей доли пакетов заданного объёма от стадии разрушения (аналитические результаты для последней характеристики, насколько нам известно, вообще не представлены в литературе), что делает предлагаемую методику, по сути, эмпирической. Однако это не является её слабым местом по той причине, что даже имеющиеся аналитические результаты являются асимптотическими с достаточно низкой скоростью сходимости к соответствующим предельным вероятностным распределениям, и для широкого диапазона больших значений объёмов систем (для которых получить точные аналитические результаты уже не представляется возможным) точность результатов их применения является неудовлетворительной. В этих случаях приближение эмпирическими зависимостями представляется оптимальным способом действия.

3.2. Пучок Даниэлса – общие сведения.

Это – математическая модель пучка из N параллельных волокон одинаковой длины, подвергаемого воздействию возрастающей от нулевого значения продольной нагрузки. Удлинения всех неразрушенных волокон в каждый момент времени одинаковы. Нагрузка на систему равномерно распределяется между всеми её работоспособными элементами.

Описанной модели присвоим символическое обозначение $G(N)$.

Ещё в работе [9] был получен следующий фундаментальный результат: асимптотически при $N \rightarrow \infty$ критическая удельная нагрузка распределена нормально, причём её дисперсия стремится к нулю, а среднее равно максимуму функции $q(x) = x(1 - F(x))$, где $F(x)$ - функция распределения прочности волокна. Таким образом, в нашем случае, когда $F(x) = x, x \in [0;1]$, для критической полной

нагрузки имеем $Q_{cr} \sim \frac{N}{4}, N \rightarrow \infty$. Кроме того, в работе [17] было показано, что распределение объёмов пакетов, зафиксированных в ходе всего процесса разрушения (точнее, зависимость от Δ числа $v(\Delta)$ пакетов объёма Δ),

асимптотически имеет вид $\frac{v(\Delta)}{N} \sim \Delta^{-5/2}$. Мы приводим на рис.2 график

эмпирической зависимости от N следующих двух величин: среднего общего числа пакетов за весь процесс разрушения и средней доли пакетов объёма 1 среди всех пакетов (соответственно верхний и нижний рисунки). Усреднение для каждого значения N проведено по результатам 10 независимых экспериментов.

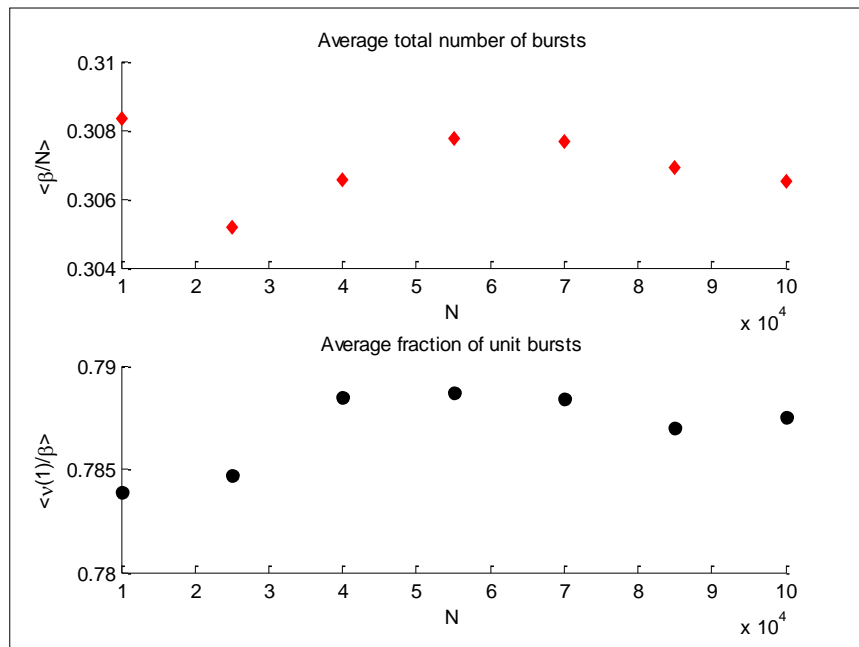


Рис.2. Моделирование разрушения пучков Даниэлса объёма от $N=10\,000$ до $N=100\,000$ волокон.

На рис.3 представлены результаты моделирования разрушения одного пучка объёма $N=100\,000$ волокон. На верхнем левом графике показано распределение объёмов пакетов - экспериментальные данные (звездочки и кружки) в сравнении со

степенной зависимостью $\nu(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ (точки). На остальных трёх рисунках показана зависимость текущей частоты пакетов (соответственно объёма 1, 2 и 3) от стадии разрушения; по оси абсцисс отложены значения нормированной (т.е. отнесённой к критической) текущей удельной нагрузки. Результаты получены для значений ширины окна $s=2000$ пакетов (точки) и $s=5000$ пакетов (кружки); полное число пакетов в этом эксперименте составило $\beta = 30736$.

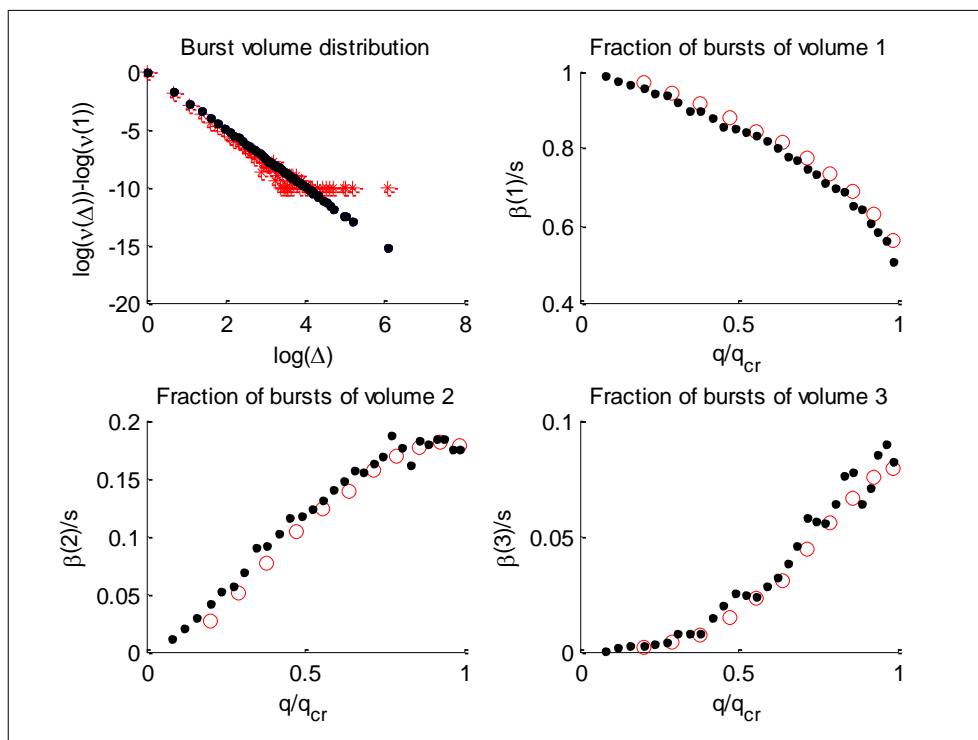


Рис.3. Моделирование разрушения пучка Даниэлса объёма $N=100\,000$ волокон.

3.3. Пучок с пропорциональным перераспределением нагрузки на n ближайших соседей, $n \geq 2$ - общие сведения.

Моделируется пучок из N параллельных волокон одинаковой длины, концы которых жёстко закреплены на двух параллельных круговых обручах. Плоскость обручей перпендикулярна волокнам, т.е. последние занимают положение образующих кругового вертикального цилиндра. При растяжении волокна ведут себя упруго, но, в отличие от пучка Даниэлса, нагрузка на разрушенное волокно перераспределяется локально – на n ближайших работоспособных волокон обратно пропорционально расстоянию до них. Если $(n+1)$ -е по удалённости работоспособное волокно отстает от разрушенного на столько же, на сколько n -е, из этих двух волокон дополнительно нагружается только одно, выбираемое случайно. Периодические граничные условия включены в эту модель для того, чтобы избежать возникновения каких-либо нерегулярных эффектов на "краях" пучка.

Описанной модели присвоим символическое обозначение $\mathbf{L}(N, n)$.

В работе [17] показано для $n=2$, что удельная критическая нагрузка не является асимптотически постоянной, и имеет место асимптотика

$Q_{cr} \sim \frac{N}{\ln N}$, $N \rightarrow \infty$. Там же продемонстрировано, что на ранних стадиях разрушения

степенной закон в распределении объёмов пакетов отличается от того, который имел место для пучка Даниэлса, и характеризуется показателем из интервала (4;5).

На качественном уровне ясно, что при росте отношения n/N свойства системы приближаются к свойствам пучка Даниэлса. На рис.4 представлены эмпирические результаты изучения зависимости средней критической удельной нагрузки от n при $N=50\,000$. Для каждого значения n было проведено 10 независимых экспериментов.

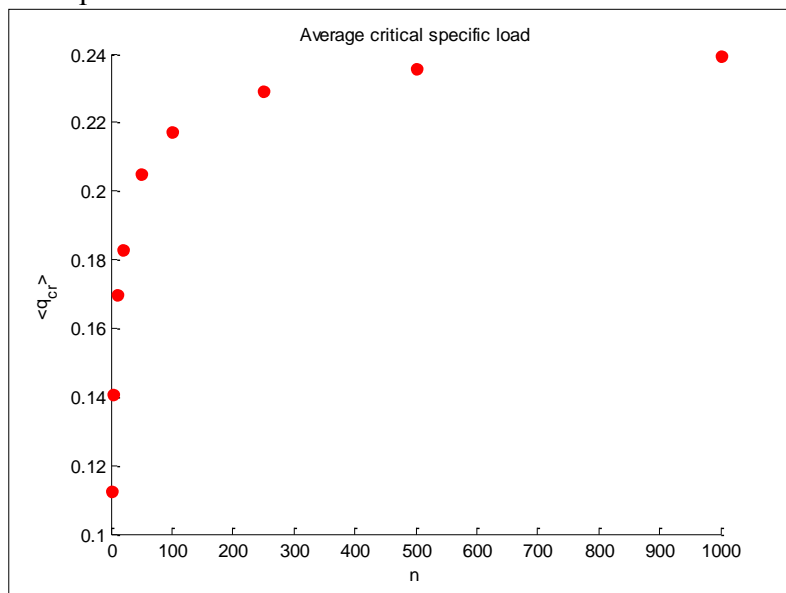


Рис.4. Разрушение пучков объёма $N=50\,000$ волокон с ЛПН на $n=2, 4, 10, 20, 50, 100, 250, 500, 1000$ волокон.

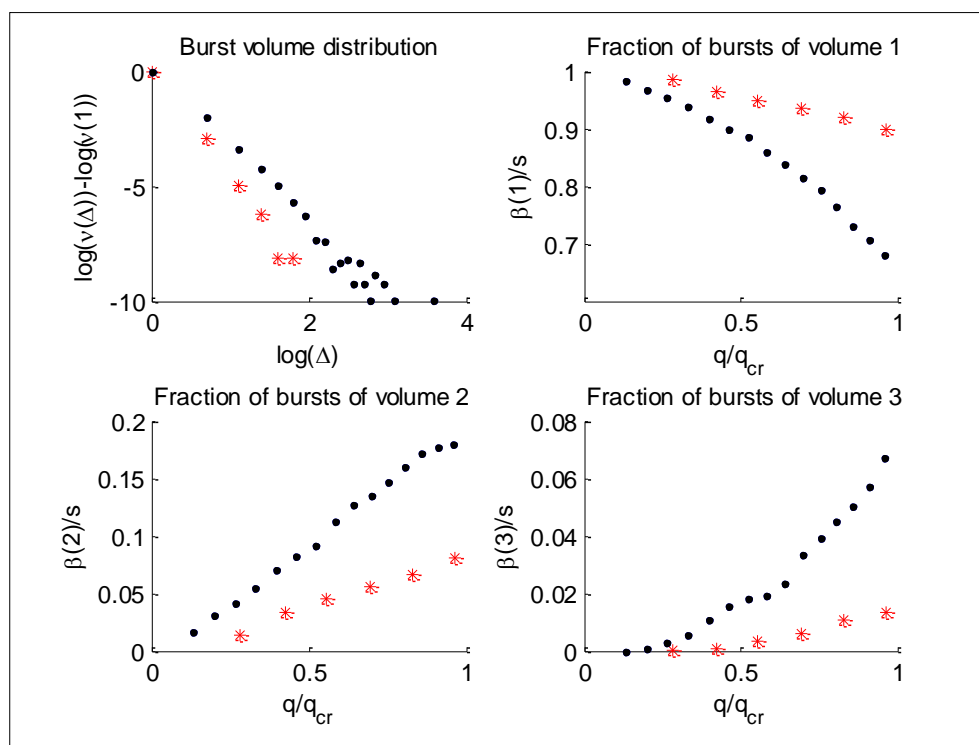


Рис.5. Разрушение одного пучка объёма $N=100\,000$ волокон по двум различным законами перераспределения нагрузки: а) на 2 ближайших волокна (звёздочки); б) на 100 ближайших волокон (точки).

На рис.5 представлены результаты моделирования разрушения одного пучка объёма $N=100\ 000$ волокон в соответствии с двумя различными локальными правилами перераспределения нагрузки: на 2 ближайших работоспособных волокна (звёздочки на графиках) и на 100 ближайших работоспособных волокон (точки на графиках). На верхнем левом графике показано распределение объёмов пакетов - экспериментальные данные (не отмечены точки, соответствующие лавинам). На остальных трёх графиках показана зависимость текущей частоты пакетов (соответственно объёма 1, 2 и 3) от стадии разрушения; по оси абсцисс отложены значения нормированной текущей удельной нагрузки. Результаты получены для значений ширины окна $s=3000$ пакетов; полное число пакетов в этих двух экспериментах составило $\beta=10871$ в первом случае и $\beta=25305$ во втором. Значения критической удельной нагрузки в двух случаях отличаются более чем вдвое: $q_{cr}=0,1036$ в первом эксперименте и $q_{cr}=0,2168$ во втором.

3.4. Иерархическая система – k -арное дерево, $k \geq 2$ – общие сведения.

Геометрическая структура данной механической модели представляет собой дерево, листья которого (собственно физические элементы системы) объединены в логические элементы - блоки по k штук в каждом. Эти блоки образуют первый уровень системы, на котором логические элементы, в свою очередь, объединены в блоки по k штук, и т.д. Самый верхний уровень (состоящий из единственного элемента - корня дерева) логически соответствует системе в целом. Арность дерева k , глубина иерархии (количество логических уровней) d и число физических элементов системы N связаны соотношением $N = k^d$. В исходном состоянии, когда все физические элементы системы работоспособны, нагрузка на них одинакова. При появлении перегруженного элемента и его разрушении нагрузка, которую он нёс, равномерно распределяется между всеми работоспособными элементами в пределах того же блока. В каждый момент времени полная нагрузка на логический элемент считается равномерно распределённой между всеми работоспособными элементами (логическими или физическими, в зависимости от уровня) соответствующего блока. Логический элемент (блок) считается разрушенным, когда в нём не осталось работоспособных элементов. Учитывая, что разрушение отдельного элемента внутри данного блока «ощущается» только его соседями по блоку и не оказывает никакого влияния на соседние блоки, описанное правило можно применять на всех иерархических уровнях системы от нулевого, на котором находятся отдельные физические элементы, до $(d-1)$ -го включительно. Кроме того, всем логическим элементам системы может быть формально приписано значение прочности, т.е. уровень нагрузки на блок, при достижении которого последний разрушается.

Описанной модели присвоим символическое обозначение $T(k, d)$.

В работе [12] приведён краткий обзор асимптотических свойств иерархических систем (в более широком понимании этой модели, чем принятое нами). Среди этих свойств для нас принципиально важным является следующее: если носителем плотности распределения прочности элемента системы выступает отрезок $[0; T]$ (в нашем случае $T=1$), для средней критической удельной нагрузки имеем $\langle q_{cr} \rangle \rightarrow 0, d \rightarrow \infty$, причём функция распределения прочности системы уже при значениях d порядка 20 становится близкой к ступенчатой, а при дальнейшем увеличении глубины происходит смещение «ступеньки» влево.

На рис.6 представлены эмпирические результаты моделирования разрушения иерархических бинарных деревьев глубины от 3 до 17 в сравнении с теоретическими функциями распределения прочности таких систем. На верхнем графике приведены экспериментальные значения средней критической удельной нагрузки (усреднение для каждого значения объёма системы проведено по результатам 10 независимых экспериментов). На нижнем рисунке изображены графики функций распределения прочности пучка для значений $d=3,5,8,12,17$ и график функции распределения прочности отдельного волокна.

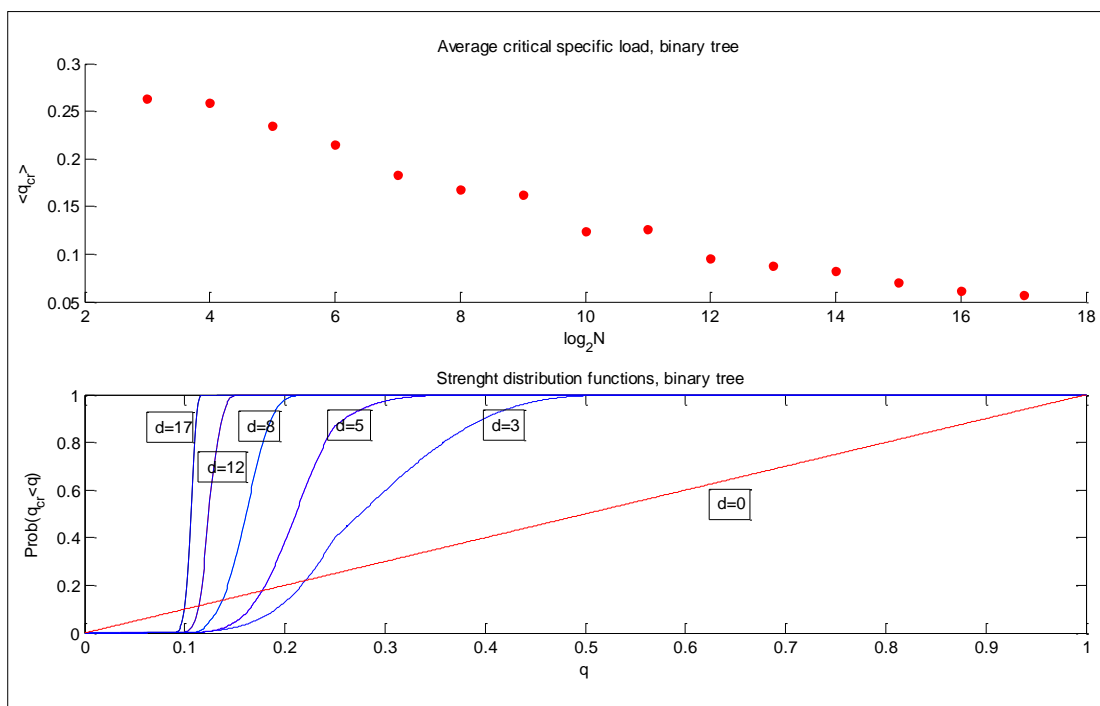


Рис.6. Бинарные иерархические деревья глубины $d=3 \dots 17$: эмпирические результаты и теоретические функции распределения прочности.

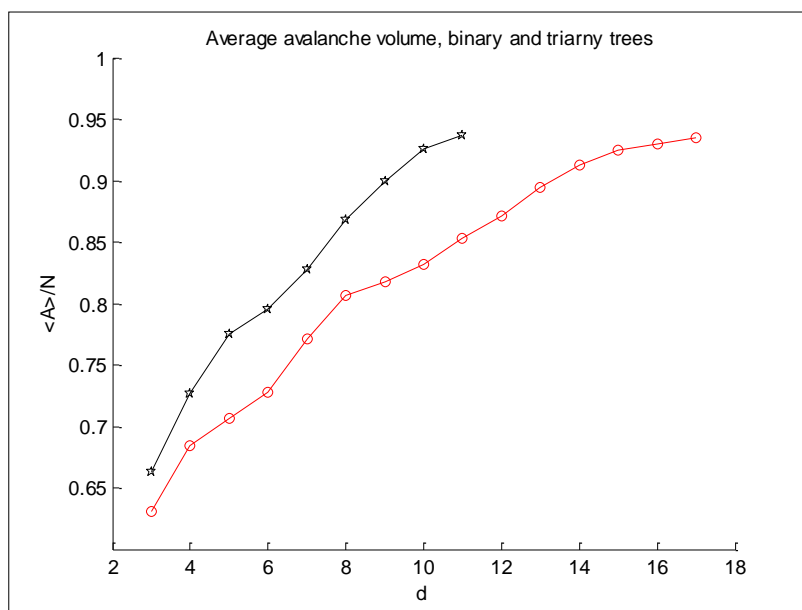


Рис.7. Зависимость среднего объёма лавины от глубины иерархии для бинарных и триарных деревьев.

На рис.7 приведены эмпирические зависимости среднего объёма лавины от глубины иерархии для $k=2$ и $k=3$ (красные кружки и чёрные звёздочки соответственно). Каждая точка получена по результатам 20 независимых экспериментов. Найденные экспериментальные зависимости находятся в хорошем соответствии с результатами работ [20,21].

4. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ МЕТОДИКИ

4.1. Алгоритм.

Для каждого из заранее выбранных значений s (см. раздел 3.1) выполняем следующие шаги.

0. На старте процесса разрушения проводим начальное накопление информации. Этот этап включает в себя 5-7 первых точек фиксации характеристик пакетов (т.е. участок последовательности пакетов длиной в 3-4 ширины окна).

1. В следующий момент фиксации характеристик (т.е. по прошествии очередных $s/2$ зафиксированных пакетов) оцениваем число элементов системы в рамках каждой из гипотез из объединения следующих трёх множеств:

- а) система есть пучок Даниэлса (всего 1 гипотеза);
- б) система есть пучок с ЛПН на ближайших соседей в количестве от 2 до 10 (с шагом 2) либо от 0.1% до 1% (с шагом 0.1%) от объёма пучка (всего 15 гипотез);
- в) система есть иерархическое дерево арности от 2 до 5 (всего 4 гипотезы).

2. Для каждой из $1+15+4=20$ полученных оценок вычисляем условное среднее ожидаемой критической удельной нагрузки (с использованием исходных эмпирических данных о соответствующих эталонных моделях).

3. Для каждой из оценок проводим сравнение текущего пройденного участка трёх траекторий (текущих частот малых пакетов) с соответствующими участками эталонных траекторий (откладываемое по оси абсцисс значение нормированной текущей удельной нагрузки вычисляется с использованием оценки, полученной на предыдущем шаге). Итогом сравнения является уровень значимости, на котором можно принять статистическую гипотезу о совпадении распределений временных рядов - экспериментального и эталонного.

4. Из полученных 20-ти значений выбираем 3 наибольших. Запоминаем соответствующие 3 гипотезы и полученные в этих предположениях оценки числа элементов системы.

5. Переходим на шаг 1.

Алгоритм прекращает работу при наступлении коллапса, при этом отбрасываются данные, относящиеся к последнему (неполному) полуокну. Проводится анализ полученных последовательностей предположений о структуре и числе элементов системы, при этом учитывается в том числе ставшее известным само это число, и влияние значения s . Гипотезы, попадавшие в тройки "лидеров" по ходу эксперимента (для различных использованных значений s такие попадания учитываются аддитивно), сравниваются при помощи статистических методов (например, типа CUSUM-алгоритма [22]) по устойчивости показателей соответствующих уровней значимости. Неформально говоря, выбирается гипотеза с наиболее высоким и устойчивым во времени "уровнем доверия" к ней.

4.2. Иллюстрация работы алгоритма.

Продемонстрируем результаты применения алгоритма к системе, конфигурация, распределение прочности элементов и периодические краевые

условия в которой такие же, как во второй базовой модели, а закон перераспределения нагрузки - иной: в соответствии с ним нагрузка, которую несло перегруженное (удаляемое) волокно, переносится на все работоспособные волокна обратно пропорционально квадрату расстояния до каждого из них.

На рис.8 представлены результаты моделирования разрушения пучка объёма 70 000 волокон (последовательности текущих частот малых пакетов). Перед началом процесса для работы алгоритма были выбраны три значения ширины окна $s_1 = 1000$ (звёздочки на графиках), $s_2 = 1800$ (кружки), $s_3 = 2500$ (треугольники). Критическая удельная нагрузка для пучка составила $q_{cr} = 0,1715$, общее число зафиксированных пакетов $\beta = 13366$. По итогам всего процесса результатом работы алгоритма явилось предположение о принадлежности системы к классу $L(70\ 000, 70)$. Перечислим гипотезы, лидировавшие на промежуточных этапах процесса (соответствующие моменты отмечены на верхнем графике буквами А, В, С, D): в момент А - о принадлежности системы к классу $G(25\ 200)$, в момент В - к классу $G(41\ 700)$, в момент С - к классу $L(58\ 100, 10)$, в момент D - к классу $L(58\ 800, 10)$.

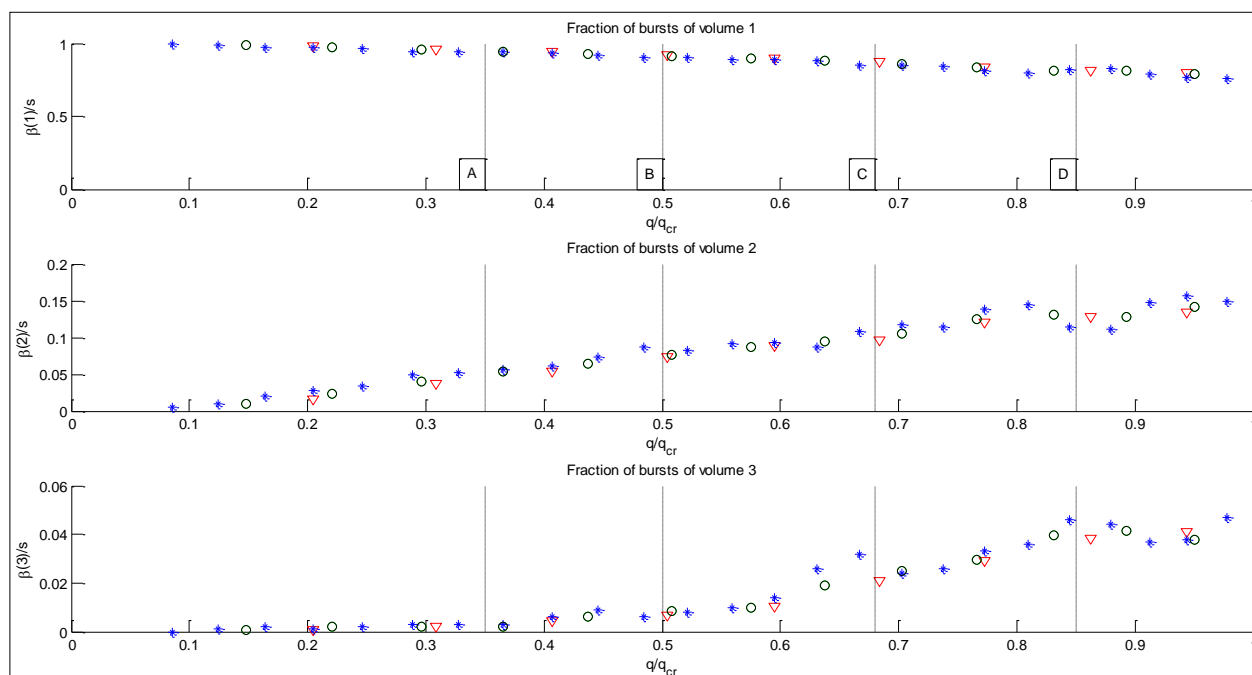


Рис.8. Иллюстрация работы алгоритма.

Экспериментальное значение q_{cr} накрывается 10-процентным доверительным интервалом для удельной прочности системы, построенным в модели $L(70\ 000, 70)$ на основании эмпирической функции распределения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача оценки прочности многоэлементной системы с учётом масштабных эффектов, степени её иерархичности и характерных свойств отдельных уровней - актуальная проблема с различными существующими к ней подходами ([11], [23,24]). Параллельно естественным образом возникает задача построения некоторой регулярной процедуры оценки остаточного ресурса нагружаемой системы в ситуации, когда информация о внутренней структуре системы и её иерархическом

устройстве является неполной. Ясно, что универсальный алгоритм такого типа предложить нельзя - хотя бы в силу многообразия видов структур и типов математических моделей их описания. Однако при наличии определённых чётко сформулированных ограничений реализация такой процедуры становится реальной, что и продемонстрировано в настоящей работе.

Описана процедура, на вход которой подаётся поступающая в режиме реального времени информация о количественных характеристиках групповых разрушений элементов, а также соответствующих им значений полной внешней нагрузки. По ходу развития процесса разрушения через равные промежутки времени осуществляется сравнение фиксируемых характеристик с эмпирическими данными по ряду эталонных моделей, и на основании этого проверяются гипотезы о принадлежности исследуемой системы к одному из базовых классов. Каждый раз отбираются по 3 гипотезы, не отклоняемых на наименьшем уровне значимости. По окончании процесса на основе статистического анализа накопленной последовательности этих обновляемых предположений выбирается одна, окончательная гипотеза. Таким образом, указывается та из предварительно выбранных базовых моделей, в рамках которой с наибольшей вероятностью было возможно наблюдение прошедшего процесса разрушения. Рассмотрен пример, в котором по итогам смоделированного процесса разрушения системы, не входящей в базовые классы, определена та из базовых систем, прочностные свойства которой лучше всего согласуются с экспериментальными данными.

Важным свойством предложенного алгоритма является возможность его модификации для работы на уникальных системах в режиме реального времени, а также расширения классов базовых систем и статистических методов сравнения наблюдений с образцами. Ключевым подготовительным шагом представляется получение недостающих аналитических результатов о свойствах систем из базовых классов (в том числе рассмотренных в рамках данной работы).

Однако наряду с задачей оценки прочности системы (в тех или иных предположениях о её структуре) имеется обратная, «инженерная» постановка: возможно ли на основании финальных требований, предъявляемых к прочности системы (например, на этапе проектирования сооружений), сформулировать условия, которым должны удовлетворять характеристики элементов системы на внутренних уровнях иерархии? Этот вопрос крайне актуален, в частности, при использовании композиционных материалов с многомасштабной структурой или при анализе свойств крупномасштабных строительных конструкций.

Деформационные и прочностные свойства системы в целом определяются, как известно, поведением функций распределения соответствующих характеристик элементов промежуточных уровней на «хвостах». Возникает вопрос: в какой мере данные, касающиеся отдельных уровней иерархии, находят отражение в характеристиках долговечности всей системы? Было бы интересно изучить возможность построения регулярной процедуры для экспериментального определения а) меры «взаимодействия» соседних уровней, т.е. правила, по которому представительные значения параметров меняются от уровня к уровню, б) собственно деформационных характеристик и прочности элементов на разных уровнях и в) вклада, который даёт отдельный уровень в конечный результат. Важным примером для а) может служить ситуация, когда преобразование функции распределения прочности элемента при переходе на следующий уровень иерархии – одно и то же для всех пар соседних уровней; это означает, что иерархичность в системе имеет масштабно-инвариантный характер.

Для ответа на вопрос б) может быть использована идея управляемого процесса нагружения, когда для каждого уровня можно выбором типа и интенсивности воздействия обеспечить приоритетную зависимость отклика системы от свойств элементов именно этого уровня. В данном направлении, помимо подбора типов воздействия и разработки плана эксперимента, возникает отдельная задача оценки глубины иерархии системы. Для решения этой проблемы целесообразно развивать идеи настоящей работы.

Ответ на вопрос в) является ключевым с точки зрения практических рекомендаций проектировщику на основании его конечных требований. Важно, в частности, выяснить следующее: единственным ли способом можно, располагая конкретным набором структурных элементов (и зная поведение соответствующих функций распределений на «хвостах»), добиться требуемых свойств на «хвосте» распределения прочности системы в целом, и можно ли вообще? В серии работ [11,13,25,26] для некоторых систем получены результаты, говорящие о простых правилах учёта свойств промежуточных уровней иерархии: это некоторые из моделей пучков, в которых «хвосты» распределений описываются степенными законами, и соответствующие показатели степеней складываются при переходе от отдельных уровней к системе в целом. Представляет интерес получение классификации моделей многоэлементных систем по характеру взаимодействия свойств отдельных уровней. Кажется вероятным, например, что ситуация будет различаться для систем, обладающих асимптотическим невырожденным распределением прочности [12] и не обладающих таковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Porwal P.K., Beyerlein I.J., Phoenix S.L.* Statistical strength of a twisted fiber bundle: an extension of Daniels equal-load-sharing parallel bundle theory // *J. of mechanics of materials and structures*. – 2006. – Vol.1. – N8. – P.1425-1447.
2. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
3. *Alava M.J., Nukala P.K.V.V., Zapperi S.* Statistical models for fracture // *Adv. Phys.* – 2006. – Vol.55. – P.349-476.
4. *Diodati P., Marchesoni F., Piazza S.* Acoustic emission from volcanic rocks: An example of self-organized criticality // *Phys. Rev. Lett.* – 1991. – Vol.67. – P.2239-2243.
5. *Gabrielov A., Zaliapin I., Newman W.I., Keilis-Borok V.I.* Colliding cascades model for earthquake prediction // *Geophys. J. Int.* – 2000. – Vol.143. – P.427-437.
6. *Брагинский А.П.* О прогнозировании структурных перестроек в материалах по особенностям коллективного поведения источников акустической эмиссии. / В сб. «Физические аспекты прогнозирования разрушения и деформирования гетерогенных материалов». – Л., 1987. – С.55-75.
7. *Netravali A.N., Topoleski L.T.T., Sachse W.H., Phoenix S.L.* An acoustic emission technique for measuring fiber fragment length distributions in the single-fiber-composite test // *Composites Science and Technology*. – 1989. – Vol.35. – P.13-29.
8. *Peirce F.T.* Tensile test for cotton yarns // *J. Textile Inst.* – 1926. – Vol.17. – P.355-368.
9. *Daniels H.E.* The statistical theory of the strength of bundles of threads // *I. Proc. Roy. Soc. London A*. – 1945. – Vol.183. – P.405-435.

10. *Kun F., Raischel F., Hidalgo R.C., Herrmann H.J.* Extensions of fiber bundle models // *Lect. Notes Phys.* – 2006. – Vol.705. – P.57-92.
11. *Bazant Z.P., Pang S.-D.* Mechanics-based statistics of failure risk of quasibrittle structures and size effect on safety factors // *PNAS.* – 2006. – Vol.103. – N25. – P.9434-9439.
12. *Онищенко Д.А.* Вероятностное моделирование многомасштабного разрушения // *Механика твёрдого тела.* – №5. – 1999. – С.27-48.
13. *Bazant Z.P., Pang S.-D.* Activation energy based extreme value statistics and size effect in brittle and quasibrittle fracture // *J. Mechanics and Physics of Solids.* – Vol.55. – 2007. – P.91-131.
14. *Dalton F., Petri A., Pontuale G.* A random neighbor model for yielding // *J. Stat. Mech.* – 2010. – N3. – P03011.
15. *Newman W.I., Phoenix S.L.* Time-dependent fiber bundles with local load sharing // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol.63. – 021507.
16. *Hansen A., Hemmer P.C.* Burst avalanches in bundles of fibers: Local versus global load-sharing // *Physics Letters. A.* – 1994. – Vol.184. – P.394-396.
17. *Kloster M., Hansen A., Hemmer P.C.* Burst avalanches in solvable models of fibrous materials // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol.56. – P.2615-2625.
18. *Hemmer P.C., Pradhan S.* Failure avalanches in fiber bundles for discrete load increase // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol.75. – 046101.
19. *Онищенко Д.Д.* О динамическом оценивании времени жизни многоэлементной системы неизвестного размера со случайными значениями прочности элементов / Всероссийская конференция "Механика наноструктурированных материалов и систем". Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2012. – Т.1. – С.104-113.
20. *Newman W.I., Gabrielov A.M.* Failure of hierarchical distributions of fiber bundles // *Int. J. Fract.* – 1991. – Vol.50. – N1. – P.1-14.
21. *Newman W.I., Turcotte D.L., Gabrielov A.M.* Log-periodic behavior of a hierarchical failure model with applications to precursory seismic activation // *Phys. Rev. E.* – 1995. – Vol.52. – №5. – P.4827-4835.
22. *Chang J.T.* Random walks, moderate deviations, and the CUSUM procedure / Technical report No.2. – California, Stanford: Stanford University, Department of statistics. – August 1989.
23. *Zhang S.-D., Huang Z.Q., Ding E.J.* Complex fiber bundle model for optimization of heterogeneous materials // *Phys. Rev. E.* – 1996. – Vol.54. – P.3314-3319.
24. *Pugno N., Bosia F., Abdalrahman T.* A new hierarchical fibre bundle model to investigate the complex architectures of biological materials // *Phys. Rev. E.* – 2012. – Vol.85. – 011903.
25. *Le J.-L., Bazant Z.P., Bazant M.Z.* Unified nano-mechanics based probabilistic theory of quasibrittle and brittle structures: I. Strength, static crack growth, lifetime and scaling // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2011. – Vol.59. – P.1291-1321.
26. *Le J.-L., Bazant Z.P.* Unified nano-mechanics based probabilistic theory of quasibrittle and brittle structures: II. Fatigue growth, lifetime and scaling // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2011. – Vol.59. – P.1322-1337.

ПОВЕДЕНИЕ ФТОРОПЛАСТОВОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ПОВЕРХНОСТИ ТРЕНИЯ УГЛЕПЛАСТИКА

Горячева И.Г., Шпенев А.Г.

ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, г. Москва, Россия

ВВЕДЕНИЕ

Композитные материалы на основе углеродного волокна и пластиковой матрицы находят важное применение в современной промышленности. Углепластик характеризуется высокой прочностью и жёсткостью, коррозионной стойкостью, малой гигроскопичностью и отсутствием набуханием в воде. Это позволяет применять углепластик не только для создания узлов, несущих высокую механическую нагрузку, но и для создания пар трения в специальных подшипниках скольжения. Углепластик в паре с нержавеющей сталью может работать в водной среде при отсутствии смазки и находит применение в кораблестроении и гидротехнических сооружениях. Углепластики применяются в качестве трибологического материала с 80-ых годов XX века [1]. Изначально основным методом улучшения трибологических свойств углепластиков было изменение химического состава связующего и технологий его отверждения [2]. Следующим этапом стала разработка различных микроструктурных присадок и наполнителей [3,4] и бинарных опор [5]. Последний метод не получил в начале широкого распространения, не смотря на свою эффективность, по причине дороговизны и сложности технологии изготовления подшипника. Ситуация изменилась после разработки в ЦНИИ КМ «Прометей» эффективной технологии изготовления углепластикового подшипника скольжения с фторопластовыми включениями в поверхности трения [6,7]. Такая модификация значительно снижает коэффициент трения в паре углепластик – сталь и значительно увеличивает износостойкость композиции. Это позволило начать внедрение таких композиций в промышленности (на кораблях и гидросооружениях), но вопрос оптимизации количества, размеров и расположения включений пока исследован мало. В данной работе проведено исследование зависимости скорости изнашивания композиции углепластик – фторопласт от площади включений, учитывающее неравномерность износостойкости и температурного расширения материалов. Проведено сравнение полученных результатов с данными экспериментальных исследований. Полученные результаты позволяют решить задачу выбора оптимальных размеров включения для достижения максимальной износостойкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим изотропно упругое цилиндрическое тело с основанием Ω и длиной L (фторопластовую вставку) находящееся в упругом анизотропном слое толщиной h (углепластиковый композит), покоящемся на жёстком полупространстве. Сверху полупространство накрыто жёстким штампом под давлением σ . Во вставке и полупространстве присутствуют линейные градиенты температур в направлении оси z , вызывающие температурное расширение материалов цилиндра и полупространства (рис.1)

$$T_f(z) = T_0^f + k_f z \Big|_{z < L}, \quad T_f(z) = T_1^f + k_c z \Big|_{z > L}, \quad T_c(z) = T_0^c + k_c z$$

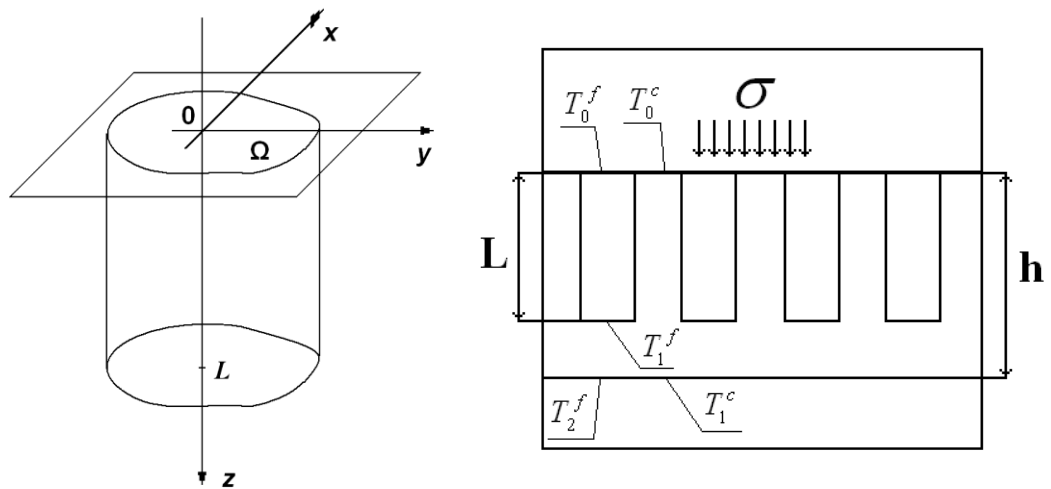


Рис.1. Общий вид композита с включениями.

Материал полупространства считаем трансверсально анизотропным, с осью анизотропии перпендикулярной плоскости отделяющей полупространства (ось z). При этом упругий модуль в плоскости изотропии считаем сильно превосходящим модуль пространства в направлении оси симметрии и модуль материала вставки, коэффициент же температурного расширения в плоскости изотропии считаем равным нулю. Для описания напряжённо-деформированного состояния слоя используем одномерную модель основания Винклера. Из этого следует, что боковая поверхность цилиндра неподвижна в нормальном направлении. Если считать, что изменение напряжённо-деформированного состояния в направлении оси z происходит достаточно медленно к этой задаче можно применить классическое решение задачи о трубе под давлением. Для материала включения считаем верными следующие предположения

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^f &= \sigma_{yy}^f = A(z), \quad \sigma_z^f = const, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{zx}^f = \varepsilon_{zy}^f = \varepsilon_{xy}^f = 0 \\ \varepsilon_{xx}^f &= \varepsilon_{yy}^f = \frac{1}{E_f} (\sigma_{xx}^f - \nu_f (\sigma_{yy}^f + \sigma_z^f)) - \alpha_L^f \Delta T = \frac{(1 - \nu_f) A(z) - \nu_f \sigma_z^f}{E_f} - \alpha_L^f \Delta T \\ \varepsilon_{zz}^f &= \frac{1}{E_f} (\sigma_z^f - \nu_f (\sigma_{xx}^f + \sigma_{yy}^f)) - \alpha_L^f \Delta T = \frac{\sigma_z^f - 2A(z)\nu_f}{E_f} - \alpha_L^f \Delta T \end{aligned} \quad (1)$$

Для материала слоя соответственно следующие

$$\sigma_{zz}^c = const \Big|_{(x,y) \in \Omega}, \quad \sigma_{zz}^c = \sigma_{zz}^f \Big|_{(x,y) \notin \Omega}, \quad \varepsilon_{zz}^c = E_c \sigma_{zz}^c - \alpha_L^c \Delta T \quad (2)$$

Материал включения характеризуется следующими параметрами: E_f – модуль упругости, α_L^f – коэффициент температурного расширения, ν_f – коэффициент Пуассона; материал слоя – следующими: E_c – модуль упругости в направлении оси z , α_L^c – коэффициент температурного расширения в направлении оси z .

На боковой поверхности цилиндра из условия непрерывности имеем следующее граничное условие (учитывая предположение о неподвижности боковой поверхности)

$$u_x^f = u_y^f = 0 \Big|_{(x,y) \in \Omega}$$

Граничные условия на торцевой поверхности цилиндра следующие:

1. условие равновесия:

$$S_f \sigma_z^f + S_c \sigma_z^c = \sigma \quad (3)$$

где $S_f + S_c = 1$, а S_f / S_c соотношение площади вставок к площади композита.

2. условие непрерывности:

$$u_z^f - u_z^\Delta = u_z^c \Big|_{z=h} \quad (4)$$

где u_z^Δ – разность глубины износа вставки и композита в процессе приработки композиции. Он может быть оценен как теоретически, так и экспериментально из профиля поверхности приработанного остывшего материала.

Подставив в граничные условия (3,4) уравнения (1,2) и исключив $A(z)$, получим систему уравнений относительно неизвестных $(\sigma_z^c, \sigma_z^f, u_z^\Delta)$

$$\begin{cases} S_f \sigma_z^f + S_c \sigma_z^c = \sigma \\ C_1 \sigma_z^f + C_2 - u_z^\Delta / h = C_3 \sigma_z^c + C_4 \end{cases} \quad (5)$$

где

$$C_1 = -\frac{1}{E_f} \frac{L}{h} - \frac{1}{E_c} \left(1 - \frac{L}{h}\right) + \frac{2}{E_f} \frac{\nu_f^2}{1 - \nu_f} \frac{L}{h}$$

$$C_2 = \left(\alpha_L^f \frac{L}{h} + \frac{2\nu_f}{1 - \nu_f} \frac{L}{h} \alpha_L^f + \left(1 - \frac{L}{h}\right) \alpha_L^c \right) \frac{T_1^f + T_2^f}{2}$$

$$C_3 = -E_c \quad C_4 = \alpha_L^c \frac{T_0^c + T_1^c}{2}$$

В случае режима установившегося изнашивания интенсивность изнашивания вставки и композита одинакова

$$W = \frac{\partial u_z^w}{\partial t} = K_w \left(\frac{\sigma_z}{\tilde{\sigma}} \right)^\alpha$$

$$K_w = \begin{cases} K_f, (x, y) \in \Omega \\ K_c, (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

где K_f и K_c коэффициенты изнашивания материала вставки и композита соответственно.

Отсюда получаем следующее уравнение

$$\left(\frac{\sigma_z^f}{\sigma_z^c} \right)^\alpha = \frac{K_c}{K_f}$$

Вместе с системой (5) мы получаем замкнутую систему относительно неизвестных $(\sigma_z^c, \sigma_z^f, u_z^\Delta)$. Однако для получения решения пригодного для практического применения, необходимо знать коэффициенты K_f и K_c . Коэффициент изнашивания фторопласта K_f известен и остаётся постоянным в широком диапазоне условий, коэффициент изнашивания углепластика K_c исследован в меньшей степени и сильно зависит от количества фторопласта в зазоре контакта (фторопластовые включения служат твёрдой смазкой в паре сталь-углепластик).

2. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Количество фторопласта в зазоре контакта исследуемой композиции, прежде всего, определяется долей фторопластовых включений в поверхности трения S_f . Для анализа полученного решения и данных, полученных в результате экспериментов, предположим следующий вид зависимости коэффициента изнашивания углепластика K_c от S_f

$$K_c = K_1 + (K_0 - K_1)(1 - S_f)^\beta$$

где K_0 – коэффициент изнашивания углепластика в отсутствии фторопласта в зазоре контакта, K_1 коэффициент изнашивания углепластика при максимально возможном присутствии фторопласта (если учесть вынос фторопласта из зазора контакта, он достигается задолго до того, как весь углепластик будет замещён фторопластом ($S_f = 1$)), β – коэффициент, определяющий насколько быстро контакт насытится фторопластом. На рис.2 и 3 показано, как влияет различная скорость насыщения контакта фторопластом на скорость изнашивания композиции.

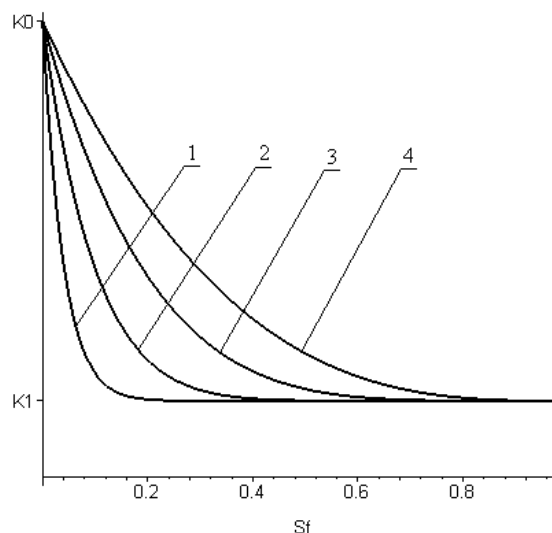


Рис.2. Зависимость коэффициента изнашивания основы от площади вставок при различных β . 1 – $\beta=25$; 2 – $\beta=10$; 3 – $\beta=5$; 4 – $\beta=3$.

Существующие экспериментальные данные получены только для относительно небольшого количества вставок ($S_f < 0.5$). Результаты экспериментов, проведённых в ИПМех РАН по схеме кольцо-диск с полным (круглые метки) и частичным (квадратные метки) перекрытием вставок контртелом, представлены рис.3. Данные для случая полного перекрытия ближе к кривой 1, данные для случая частичного перекрытия – к кривой 3. Т.е. контакт при полном перекрытии быстрее входит в насыщенную фазу при увеличении площади вставок, чем при частичном перекрытии. Это является следствием того, что при частичном перекрытии отток фторопласта из контакта облегчается, а приток затрудняется. Важно отметить, что оптимальная площадь вставок (S_f) будет различна для разных скоростей насыщения контакта фторопластом (параметр β), а скорость насыщения может быть различна для разных сопряжений. Однако полученная модель позволяет на основании опытов, описанных выше, определить скорость насыщения контакта фторопластом для заданного давления в контакте и скорости скольжения. Это в свою очередь

позволяет определить оптимальную площадь включений для любого сопряжения без затратных натурных испытаний.

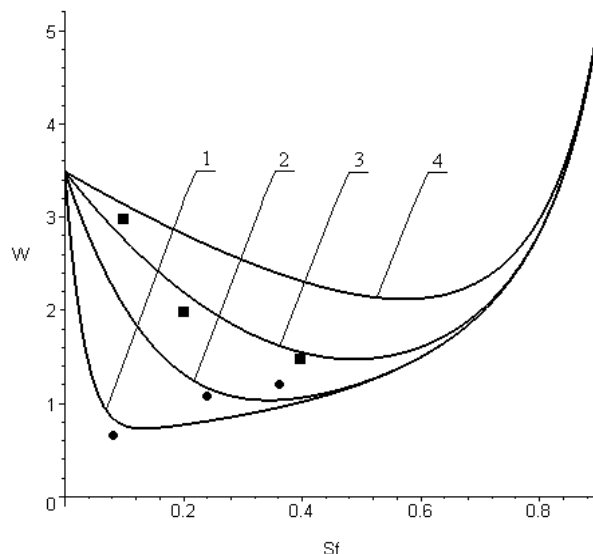


Рис.3. Зависимость скорости изнашивания композиции ($W, 10^{-9} \text{мм}^{-1}$) от площади вставок при различных β . 1 – $\beta=25$; 2 – $\beta=10$; 3 – $\beta=5$; 4 – $\beta=3$.

3. ВЫВОДЫ

В работе построена модель изнашивания углепластика с фторопластовыми включениями, учитывающая неравномерное изнашивание и температурное расширение материалов и поведен анализ экспериментальных данных. Полученная модель позволяет упростить поиск оптимальной площади фторопластовых включений и определение ресурса тибосопряжений на основе углепластика с фторопластовым протектором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахарева В.Е., Альшиц Л.И., Сидоров Н.П. Технология изготовления судовых подшипников скольжения из армированных пластиков // Технология судостроения. – 1981. – №8. – С.46-49.
2. Николаев Г.И., Абозин И.Ю., Бахарева В.Е., Лобынцева И.В., Петрова Л.В. Зависимость антифрикционных характеристик углепластиков от химического состава и структуры эпоксидной матрицы // Вопросы материаловедения. – 2001. – Т.26. – №2. – С.30-38.
3. Горынин И.В. Нанокompозиты: преимущества и перспективы // Technopolis. – 2006. – Т.5. – №21. – С.20-21.
4. Анисимов А.В., Бахарева В.Е., Николаев Г.И., Рыбин В.В. Элементы нанотехнологий при создании подшипников скольжения из антифрикционных углепластиков // Вопросы материаловедения. – 2008. – Т.54. – №2. – С.7-21.
5. Анисимов А.В., Бахарева В.Е., Лобынцева И.В. и др. Бинарные опоры из модифицированных углепластиков для подшипников судовых валопроводов // Вопросы материаловедения. – 2006. – Т.46. – №2. – С.22-26.
6. Бахарева В.Е., Анисимов А.В., Лобынцева И.В., Савелов А.С. Макромодификация антифрикционных углепластиков фторопластом – эффективный путь снижения коэффициента трения // Вопросы материаловедения. – 2012. – №4. – С.81-88.

7. Бахарева В.Е., Анисимов А.В., Савелов А.С., Пеклер К.В., Ильин С.Я., Моркин О.В. Создание макромодифицированных фторопластом углепластиков для подшипников скольжения рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин // Вопросы материаловедения. – 2009. – №1. – С.17-25.

**РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ФИЗИКО-
МЕХАНИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, КОНСТРУКЦИЙ ПРИ
ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛН В ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ***

Гусев Е.Л.

*ФГБУН Институт проблем нефти и газа Сибирского отделения Российской
академии наук, г. Якутск, Россия*

РЕЗЮМЕ

Методами математического и компьютерного моделирования проведено исследование вариационных постановок задач оптимального синтеза физико-механической и геометрической структуры композиционных материалов и конструкций с требуемым и регулируемым комплексом свойств при волновых воздействиях. На основе конструктивного анализа необходимых условий оптимальности установлены качественные закономерности взаимосвязи параметров в композиционных структурах, реализующих предельные возможности по достижению требуемого комплекса свойств при волновых воздействиях.

Широкий круг проблем современного приборостроения, возникающих в авиа- и космической технике, связанных со все возрастающим применением композиционных материалов, конструкций приводит к необходимости исследования, как в прикладном, так и в теоретическом аспектах, возможности наиболее эффективного управления энергетическими характеристиками волновых процессов на основе направленного выбора геометрической и физической структуры структурно-неоднородных композиционных систем.

В качестве соответствующих моделей исследованы модели распространения упругих волн в сложнопостроенных структурно-неоднородных средах, в достаточной мере отражающих основные особенности взаимодействия волновых процессов с конструкциями сложных технических систем различного назначения.

При проектировании конструкций различного назначения актуальной является проблема исследования предельных возможностей конструкций по достижению заданного комплекса свойств. Решение данной проблемы имеет принципиальное значение при проектировании конструкций минимального веса, минимальной стоимости и т.п. При этом важное место занимает выбор или разработка метода оптимизации параметров конструкции, учитывающего специфику рассматриваемой задачи.

Современные конструкции должны удовлетворять широкому комплексу требований, связанных с ограничениями на вес, стоимость, прочность, жесткость, надежность, стойкость к воздействию дестабилизирующих факторов различной физической природы и многим другим, поэтому проблеме оптимального проектирования конструкций уделяется значительное внимание. Применение оболочечных конструкций, особенно слоистой структуры, обеспечивает сочетание

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований - гранты №№10-08-01301-а, 09-08-98501-а.

высокой несущей способности с малой массой. Слоистая структура способствует также достижению необходимых тепло-, звуко-, виброизоляционных и других важных свойств. Это актуально для конструкций ракетно-космической, авиационной, судостроительной и многих других отраслей современной техники. Внедрение композиционных материалов, обладающих высокими удельными характеристиками (прочностью, жесткостью) и многими другими необходимыми для ответственных изделий свойствами такими, как радиопрозрачность, коррозионная стойкость и др., а также возможностью регулирования механических и физических характеристик в широких пределах, позволяет создавать многофункциональные высоко эффективные слоистые конструкции с заданными параметрами. Повышение эффективности конструкций неразрывно связано с совершенствованием подходов и моделей их оптимального проектирования и расчета

В последние десятилетия значительное внимание уделяется изучению закономерностей взаимодействия волновых процессов различной физической природы (электромагнитных, акустических, температурных, упругих) с неоднородными структурами. На знании закономерностей взаимодействия волновых процессов различной физической природы с неоднородными структурами основана работа многих устройств, связанных с преобразованием энергетических спектров волновых процессов. Открытие новых закономерностей взаимодействия волновых процессов с неоднородными средами может позволить, как существенно повысить эффективность существующих преобразователей волновой энергии, так и расширить области эффективного применения волновых преобразователей энергии.

При волновом воздействии на слоистую структуру возникает система отраженных и преломленных волн. Взаимодействуя с падающей волной они образуют сложную интерференционную картину в значительной степени зависящую от геометрической и физической структуры слоистой среды: от физических свойств материалов слоев, геометрических размеров слоев, числа слоев, а также от порядка взаимного расположения слоев с различными физическими свойствами в конструкции.

Меняя физическую и геометрическую структуру слоистой среды можно в значительной степени управлять интерференционной картиной волнового процесса, и в частности амплитудными и фазовыми характеристиками. На этом основана работа многих устройств в различных областях физики, техники, приборостроения.

Одними из наиболее важных характеристик волновых процессов являются энергетические коэффициенты пропускания и отражения, которые характеризуют в виде функции от частоты доли энергии волны, прошедшей через конструкцию (или отраженной от нее). При исследовании волновых процессов в неоднородных структурах центральной проблемой является проблема конструирования слоистой структуры с требуемыми свойствами. Данная проблема заключается в организации такого направленного выбора физической и геометрической структуры слоистой среды, при котором ее энергетические характеристики будут наиболее близки к заданным зависимостям. От решения этой проблемы зависит не только эффективность применяемых неоднородных структур, но и расширение возможностей их эффективного использования в новых областях физики, техники, приборостроения.

Возникающие при решении данной проблемы задачи оптимизации обладают целым рядом специфических особенностей. К таким особенностям относятся:

- дискретность области значений варьируемых параметров, каковыми являются физические свойства материалов слоев (т.к. набор материалов, применяемых при проектировании, как правило, конечен);
- разрывность решений краевых задач, описывающих волновые процессы в слоисто-неоднородных структурах;
- существенная многоэкстремальность волновых задач синтеза;
- некорректность по А.Н. Тихонову задач синтеза, как обратных задач математической физики.

Широкий круг задач, связанный как с решением проблем сейсмологии, сейсмостойкого строительства сложных технических систем, так и проблем современного приборостроения, связанных с все возрастающим применением композиционных материалов, приводит к необходимости исследования, как в прикладном, так и в теоретическом аспектах, возможности наиболее эффективного управления энергетическими характеристиками волновых процессов на основе направленного выбора геометрической и физической структуры структурно-неоднородных композиционных систем [1-3].

Одной из важных задач исследований является учет слоистости грунтового основания. В последние десятилетия в исследованиях авторов, посвященных проблемам сейсмостойкости, наблюдается тенденция учета все большего числа слоев при изучении взаимодействия сейсмических волн с конструкциями различного назначения. Однако исследование явлений, возникающих при взаимодействии сейсмических волн с достаточно большим числом слоев, приводит к значительным сложностям математического характера [4-8].

При проведении математического и компьютерного моделирования для решения задач механики деформируемых твердых тел, основные элементы, к которым сводятся основные схемы конструкций, сооружений, сложных технических систем, как в нефтегазовой отрасли так и многих других отраслях, и которые затем исследуются математическими методами - это слоистые структуры. В форме слоистой структуры представляется геологическая неоднородная среда; в форме слоистой структуры представляется сооружение (распределение неоднородности по высоте сооружения аппроксимируется слоистой структурой); в форме слоистой структуры представляются основания, фундаменты сооружения.

Для того чтобы получить и разработать какие-либо качественные выводы о закономерностях взаимодействия волновых полей с конструкциями сооружений различного назначения, необходимо на основе моделей слоистых сред методами математического и компьютерного моделирования провести исследование влияния структуры слоистых сред, направленного изменения структуры слоистых сред на энергетические характеристики волновых процессов различной физической природы.

Сформулирована и исследована вариационная постановка обратных задач, связанных с взаимодействием волновых процессов со слоисто-неоднородными структурами. В качестве соответствующих моделей исследованы модели распространения волновых полей волн в сложнопостроенных структурно-неоднородных средах, в достаточно полной мере отражающих основные особенности взаимодействия волновых процессов с конструкциями сложных технических систем различного назначения. В качестве критерия оптимизации в рассматриваемой вариационной постановке выбрана среднеквадратичная мера близости энергетического коэффициента пропускания $T(\omega)$ к требуемой зависимости $\tilde{T}(\omega)$ в заданном частотном диапазоне $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$

$$J = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} [T(\omega) - \tilde{T}(\omega)]^2 d\omega \Rightarrow \min \quad (1)$$

Используя общую методологию принципа максимума Л.С.Понтрягина [1-3,9] можно обобщить классический вариант принципа максимума Л.С.Понтрягина на рассматриваемые обратные задачи оптимального синтеза в вариационной постановке. Для общего случая воздействия упругой волны на слоисто-неоднородную структуру функция Гамильтона представима в виде

$$H(*; \rho) \Big|_z = \sum_{m=1}^5 l_m(\rho) A_m(z), \quad b_{s-1} \leq z \leq b_s, \quad s=1, \dots, N, \quad \rho \in \Lambda \quad (2)$$

Здесь N – число слоев, ρ – плотность, Λ – допустимый набор материалов. Функции $l_m(\rho), \rho \in \Lambda; A_m(z), (0 \leq z \leq l)$ определяются в соответствии с методологией построения функций Гамильтона [1-3,9]. Тогда необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина для рассматриваемых задач синтеза в вариационной постановке могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть $\rho^*(z), c^*(z), d^*(z)$ ($0 \leq z \leq l$) – оптимальные распределения плотности, скоростей распространения продольных и сдвиговых волн соответственно по толщине l слоисто-неоднородной структуры. Тогда выполнено условие

$$H(*; \rho^*(z)) \Big|_z = \max_{\rho \in \Lambda} H(*; \rho) \Big|_z \quad (3)$$

$0 \leq z \leq l$

Конструктивный анализ условий достижения функцией Гамильтона (3) своих экстремальных значений позволяет построить аналитические соотношения, которым удовлетворяют материалы допустимого набора, входящие в оптимальную конструкцию, а также ранжировать материалы допустимого набора по степени перспективности для применения при оптимальном проектировании слоисто-неоднородных конструкций с требуемым комплексом свойств в качестве высокоэффективных материалов.

На основе конструктивного исследования математических моделей, описывающих взаимодействие упругих волн со слоисто-неоднородными конструкциями, построены аналитические соотношения, позволяющие проводить априорное выделение материалов, составляющих оптимальную конструкцию экрана. На основе разработанной методики выделения перспективных материалов для проектирования сейсмозащитных экранов в рамках рассматриваемой вариационной постановки обратных задач сейсмологии исследованы конкретные наборы физико-механических свойств материалов и грунтов. Для исследуемых наборов материалов выделены наиболее перспективные сочетания физико-механических характеристик материалов, физико-механических характеристик грунтов, оказывающих существенное влияние на эффективное уменьшение интенсивности упругих волн. Проведен сравнительный качественный анализ отличительных особенностей физико-механических характеристик выделенных перспективных материалов и грунтов.

Результаты, полученные на основе исследования сформулированной вариационной постановки рассматриваемых обратных задач сейсмологии, позволили уточнить и обобщить соответствующие результаты, полученные другими авторами на основе физического моделирования с помощью методов динамической фотоупругости, электрических аналогий и т.п. [7,8].

Рассмотрим случай, когда в качестве допустимых материалов взят набор грунтов с различными физико-механическими свойствами (табл.1).

Таблица 1.

Физико-механические характеристики грунтов.

№ п/п	Порода	V _p , м/с	V _s , м/с	ρ, кг/м ³
1	гранит	6400	3760	2400
2	галечник	2000	500	2350
3	глины	3000	750	2325
4	известняк	6200	3450	2300
5	скальные (мергель, доломит, песчаник)	5900	315	2250
6	ангидриты	5200	2480	2200
7	мел	3250	1300	2150
8	песчано-глинистые	3200	1100	2100
9	щебень	1400	800	1600
10	суглинок	1000	250	1500
11	песок	700	350	1400
12	лесс	600	400	1200

Для рассматриваемого набора 12 видов грунтов наиболее перспективное множество материалов Λ^{**} состоит из 4 материалов

$$\Lambda^{**} = \{\rho^1, \rho^5, \rho^{10}, \rho^{12}\}, \quad (4)$$

В состав данного набора наиболее перспективных материалов, наряду с материалами с максимально различающимися сейсмическими жесткостями (материалы №1 (гранит) и №12 (лесс)), входит материал №10 (суглинок), обладающий наименьшей скоростью распространения сдвиговых волн в нем, а также материал №5 (скальные породы), в котором скорость распространения продольных волн близка к максимально возможной в данном наборе материалов (к скорости распространения продольных волн в материале №1, гранит), а скорость распространения сдвиговых волн близка к минимально возможной для данного набора материалов (к скорости распространения сдвиговых волн в материале №10, суглинок).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев Е.Л. Некоторые вопросы решения задач экранирования сейсмических волн слоисто-неоднородными структурами // Вопросы инженерной сейсмологии. – 2010. – Т.37. – №2. – С.48-73.
2. Гусев Е.Л. Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН. – 1996. – Т.346. – №3. – С.324-326.
3. Гусев Е.Л. Качественные закономерности структуры оптимальных решений в задачах оптимального синтеза многослойных конструкций при воздействии упругих волн // Доклады РАН. – 1998. – Т.368. – №1. – С.53-56.
4. Столяров В.Г. Сейсмические воздействия, сейсмические фундаменты и безопасность зданий / Международные академические чтения «Безопасность

строительного фонда России. Проблемы и решения». Материалы. – Курск, 2006. – С.156-161.

5. *Баженов В.Г., Зефиоров С.В., Лаптев П.В.* Численное моделирование взаимодействия сооружений с двухслойным грунтовым основанием при сейсмических воздействиях / Проблемы прочности пластичности (Межвузовский сборник). – Н. Новгород: Изд-во НГУ, 2005. – Вып.67. – С.162-167.
6. *Абовский Н.П., Енджиевский Л.В., Наделяев В.Д.* Новые конструктивные решения для сейсмостойкого строительства в особых грунтовых условиях // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2004. – №3. – С.30-32.
7. Волновые процессы в конструкциях зданий. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
8. *Мелик-Елчян А.Г.* Повышение сейсмостойкости зданий и сооружений. – Ереван: Айастан, 1989. – 317 с.
9. *Гусев Е.Л.* Математические методы синтеза слоистых структур. – Новосибирск: Наука, 1993. – 262 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Курбанов Н.Т., Бабаджанова В.Г., Юсифли В.Н.

Сумгаитский Государственный Университет, г. Сумгаит, Азербайджан

В современной технике широко используются конструкции, выполненные из различного рода композиционных материалов, поэтому возникает необходимость получения более реальной картины напряженно-деформированного состояния элементов конструкций и проведения исследований в нелинейной постановке задачи с учетом вязкоупругих свойств материала.

В данной работе рассматривается задача о распространении нестационарных волн в нелинейных вязкоупругих стержневых системах, состоящих из двух частей - конечной $x \in [0, l]$ и полубесконечной $x \in [l; +\infty)$.

Считаем, что система при $t < 0$ находится в покое, а в момент времени $t = 0$ воздействие реализуется с торца $x = 0$. Математически задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \sigma^{(i)}}{\partial x} = \rho^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}(x, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

при граничных и контактных условиях

$$\sigma^{(1)}(0, t) = f(t) \quad (2)$$

$$\sigma^{(1)}(l, t) = \sigma^{(2)}(l, t); \quad U^{(1)}(l, t) = U^{(2)}(l, t) \quad (3)$$

$$U^{(2)}(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (4)$$

начальные условия имеют вид

$$U^{(i)}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial U^{(i)}(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

где $\sigma^{(i)}(x, t)$ - напряжения, $U^{(i)}(x, t)$ - перемещения, $\rho^{(i)}$ - плотность материалов, $E^{(i)}$ - модуль упругости, l - длина конечного стержня. $i = 1, 2$, причем при $i = 1$ все соотношение относится к первому стержню, а при $i = 2$ - ко второму, $f(t)$ - заданная функция.

Определяющее соотношение принимаем в виде

$$\sigma^{(i)} = E^{(i)} \left[e^{(i)} - \varepsilon \int_0^t \Gamma_1^i(t - \tau) e^{(i)} d\tau - \varepsilon \int_0^t \Gamma_1^i(t - \tau) e^{(i)} \varphi(e^{(i)}) d\tau \right] \quad (6)$$

где ε - постоянный малый параметр, $e^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}$ - деформация, $\Gamma^{(i)}(t)$ и $\Gamma_1^{(i)}(t)$ - известные функции, характеризующие свойства материалов стержней.

Поставленная задача решается методом малого параметра и преобразованием Лапласа.

Учитывая (6) в уравнении (1), получаем

$$\frac{\partial^2 U^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial^2 U^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} d\tau - \varepsilon \int_0^t \Gamma_1^{(i)}(t-\tau) \times$$

$$\times \left[\varphi \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 U^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial U^{(i)}(x,t)}{\partial x} \frac{d\varphi}{dU_x^{(i)}} \frac{\partial^2 U^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} \right] d\tau = \frac{1}{C^{(i)2}} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}(x,t)}{\partial t^2} \quad (7)$$

где $C^{(i)} = \sqrt{\frac{E^i}{\rho^{(i)}}}$ - скорость распространения волн в средах.

Представляем функции $\varphi(e^{(i)})$ в виде ряда

$$\varphi(e^{(i)}) = k_1 e^{(i)} + \lambda k_2 e^{(i)2} + \lambda^2 k_3 e^{(i)3} + \dots \quad (8)$$

где λ безразмерный параметр меньше единицы, $k_n e^{(i)n}$ конечное число.

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$U^{(i)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n U_n^{(i)}(x,t); \quad \sigma^{(i)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \delta_n^{(i)}(x,t) \quad (9)$$

Учитывая (8) и (9) в уравнении (7) и приравнявая коэффициенты одинаковых степеней λ для первого приближения, получаем

$$\frac{\partial^2 U_1^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial^2 U_1^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} d\tau - \frac{1}{C_1^{(i)2}} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = 0$$

$$\sigma_1^{(i)} = E \left[\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} d\tau \right]$$

$$U_1^{(i)}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U_1^{(i)}(x,0)}{\partial t} = 0$$

$$\sigma_1^{(i)}(\theta,t) = f(t), \quad \sigma_1^{(1)}(l,t) = \sigma_1^{(2)}(l,t) \quad (10)$$

$$U_1^{(1)}(l,t) = U_1^{(2)}(l,t)$$

$$U_1^{(2)}(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Второе приближение находится из следующих систем уравнений

$$\frac{\partial^2 U_2^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial^2 U_2^{(i)}(x,t)}{\partial x^2} d\tau - \frac{1}{C^{(i)2}} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial t^2} = 2\varepsilon k_1 \int_0^t \Gamma_1^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial x^2} d\tau$$

$$U_2^{(i)}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U_2^{(i)}(x,0)}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\sigma_2^{(i)}(0,t) = 0, \quad \sigma_2^{(1)}(l,t) = \sigma_2^{(2)}(l,t)$$

$$U_2^{(1)}(l,t) = U_2^{(2)}(l,t)$$

$$U_2^{(2)}(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

$$\sigma_2^{(i)} = E \left[\frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial x} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial x} d\tau - \varepsilon k_1 \int_0^t \Gamma_1^{(i)}(t-\tau) \left(\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} \right)^2 d\tau \right]$$

Для определения третьего приближения получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial x^2} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial^2 U_3^{(i)} d\tau}{\partial x^2} \frac{1}{C^{(i)^2}} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial t^2} = \\
& = 2\varepsilon k_1 \int_0^t \Gamma_1^{(i)}(t-\tau) \left[\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial x^2} \right] d\tau \\
& U_3^{(i)}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U_3^{(i)}(x,0)}{\partial t} = 0 \\
& \sigma_3^{(i)}(0,t) = 0, \quad \sigma_3^{(1)}(l,t) = \sigma_3^{(2)}(l,t) \\
& U_3^{(1)}(l,t) = U_3^{(2)}(l,t), \\
& U_3^{(2)}(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty \\
& \sigma_3^{(i)} = E \left[\frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial x} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial x} d\tau - 2\varepsilon k_1 \int_0^t \Gamma_1^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial x} d\tau \right]
\end{aligned} \tag{12}$$

Четвертое приближение определяется из системы уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U_4^{(i)}}{\partial x^2} - \varepsilon \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) \frac{\partial^2 U_4^{(i)} d\tau}{\partial x^2} - \frac{1}{C^{(i)^2}} \frac{\partial^2 U_4^{(i)}}{\partial t^2} = \\
& = \varepsilon \int_0^t \Gamma_1^{(i)}(t-\tau) \left[2k_1 \left(\frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial x^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 3k_2 \left(\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial x^2} \right] d\tau \\
& U_4^{(i)}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U_4^{(i)}(x,0)}{\partial t} = 0 \\
& \sigma_4^{(i)}(0,t) = 0, \quad \sigma_4^{(i)}(l,t) = \sigma_4^{(2)}(l,t) \\
& U_4^{(1)}(l,t) = U_4^{(2)}(l,t); \\
& U_4^{(2)}(x,t) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{13}$$

Аналогичным образом можем определить систему уравнений для нахождения последующих приближений.

Из систем уравнений (10) видно, что задача определения функций $U_1^{(i)}(x,t)$ или $\sigma_1^{(i)}(x,t)$, т.е. определение первого приближения, является решением соответствующей линейной задачи вязкоупругости.

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени t к системе уравнений (10), получаем

$$\frac{d^2 \bar{U}_1^{(i)}(x,p)}{dx^2} - \frac{p^2}{C^{(i)^2}} (1 + \varepsilon k^{(i)}(p)) \bar{U}_1^{(i)}(x,p) = 0$$

где чертой сверху обозначено изображение одноименных функций, p - параметр преобразования Лапласа, $\varepsilon k^{(i)}(p) = \frac{\varepsilon \bar{\Gamma}^{(i)}(p)}{1 - \varepsilon \bar{\Gamma}^{(i)}(p)}$.

Решение этого уравнения в изображениях Лапласа для каждого стержня имеет вид

$$\bar{U}_1^{(1)}(x, p) = \frac{C^{(1)} \bar{f}(p) \sqrt{1 + \varepsilon \bar{k}^{(1)}(p)}}{E_1^{(1)} p} \left\{ e^{-\frac{px}{c^{(1)}} \sqrt{1 + \varepsilon \bar{k}^{(1)}(p)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{p(2ln-x) \sqrt{1 + \varepsilon \bar{k}^{(1)}(p)}}{c^{(1)}}} + e^{-\frac{p(2ln+x) \sqrt{1 + \varepsilon \bar{k}^{(1)}(p)}}{c^{(1)}}} \right) \right\}$$

$$\bar{U}_1^{(2)}(x, p) = -\frac{2C^{(1)} C^{(2)} \bar{f}(p)}{p(E^{(1)} C^{(2)} - E^{(2)} C^{(1)})} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \theta^n e^{-\frac{p \sqrt{1 + \varepsilon \bar{k}^{(1)}(p)} [C^{(2)}(2n-1)l + C^{(1)}(x-l)] \sqrt{1 + \varepsilon \bar{k}^{(2)}(p)}}{c^{(1)} c^{(2)}}};$$

$$\theta = \frac{E^{(2)} C^{(1)} - E^{(1)} C^{(2)}}{E^{(2)} C^{(1)} + E^{(1)} C^{(2)}}$$

Отсюда видно, что вычисление оригинала первого приближения решений сводится к вычислению оригинала следующей функции

$$W^{(i)}(x, p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{px}{c^{(i)}} \sqrt{1 + \varepsilon \bar{k}^{(i)}(p)}}$$

Оригиналы этой функций вычисляются по методике, изложенной в работе [1], и имеют вид

$$W^{(i)}(z, p) = H\left(t - \frac{z}{c^{(i)}}\right) \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \varepsilon^m}{2^m m!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2m-k-2)!}{k!(m-k-1)!} \cdot \left(\frac{2z}{c^{(i)}}\right)^{k+1} k_m^{(i)}\left(t - \frac{z}{c^{(i)}}\right) \right] \quad (14)$$

Тогда оригиналы первого приближения решений для каждого стержня определяются формулами

$$\frac{\partial U_1^{(1)}(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \Pi^{(1)}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ W^{(1)}(x, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \theta^n [W^{(1)}(2ln-x, \tau) + W^{(1)}(2ln+x, \tau)] \right\} d\tau \quad (15)$$

$$\frac{\partial U_1^{(2)}(x, t)}{\partial x} = \frac{2c^{(1)} E^{(2)}}{E^{(1)} c^{(2)} - E^{(2)} c^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \theta^n \cdot \int_0^t \Pi^{(2)}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} W^{(2)}\left[\frac{c^{(2)}(2n-1)l + c^{(1)}(x-l)}{c^{(1)}}, \tau\right] d\tau$$

где $k_m^{(i)}(p)$ итерированные ядра

$$k_n^{(i)}(t) = k^{(i)}(t), \dots, k_n^{(i)}(t) = \int_0^t k_1^{(i)}(t-\tau) k_{n-1}^{(i)}(\tau) d\tau$$

Для $\sigma_1^{(1)}(x, t)$ и $\sigma_1^{(2)}(x, t)$ получаем

$$\sigma_1^{(1)}(x, t) = \sigma_0 \left\{ W^{(1)}(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \theta^n [W^{(1)}(2ln-x, t) + W^{(1)}(2ln+x, t)] \right\} \quad (16)$$

$$\sigma_1^{(2)}(x, t) = \frac{2\sigma_0 c^{(1)} E^{(2)}}{E^{(1)} c^{(2)} - E^{(2)} c^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \theta^n W^{(2)}\left(\frac{c^{(2)}(2n-1)l + c^{(1)}(x-l)}{c^{(1)}}, t\right)$$

Для простоты приняли, что $f(t) = \lambda \sigma_0 H(t)$, где σ_0 - постоянная, $H(t)$ - единичная функция Хэвисайда.

Применяя преобразование Лапласа по времени t к уравнению (11), получаем

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_2^{(i)}(x, p)}{\partial x^2} - \frac{p^2}{C^{(i)^2} (1 - \varepsilon \bar{\Gamma}^{(i)}(p))} \bar{U}_2^{(i)}(x, p) = \frac{\varepsilon k_1 \bar{\Gamma}_1^{(i)}(p)}{1 - \varepsilon \bar{\Gamma}^{(i)}(p)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial x} \right)^2$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned}
U_2^{(i)}(x, p) = & A^{(i)} e^{-\frac{xp}{c^{(i)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(i)}(p)}} + B^{(i)} e^{\frac{xp}{c^{(i)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(i)}(p)}} - \frac{C^{(i)} \varepsilon k_1 \Gamma_1^{(i)}(p) \sqrt{1+\varepsilon k^{(i)}(p)}}{2p} \\
& \left[e^{-\frac{xp}{c^{(i)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(i)}(p)}} \int_0^x \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial s} \right)^2 e^{\frac{sp}{c^{(i)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(i)}(p)}} ds + \right. \\
& \left. + e^{\frac{xp}{c^{(i)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(i)}(p)}} \int_x^l \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial s} \right)^2 e^{-\frac{sp}{c^{(i)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(i)}(p)}} ds \right] \quad (17)
\end{aligned}$$

Постоянные $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$ определяются из граничных и контактных условий в преобразованиях Лапласа, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_2^{(1)}(o, p) &= 0, \\
\bar{\sigma}_2^{(1)}(l, p) &= \sigma_2^{(2)}(l, p), \quad \bar{U}_2^{(1)}(l, p) = \bar{U}_2^{(2)}(l, p) \\
\sigma_2^{(2)}(x, p) &= 0, \quad \bar{U}_2^{(2)}(x, p) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty
\end{aligned} \quad (18)$$

Тогда для второго приближения получаем

$$\begin{aligned}
\bar{U}_1^{(1)}(x, p) &= \bar{M}^{(1)}(l, p) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left[e^{-\frac{[(2k+1)l+x]p}{c^{(1)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(1)}(p)}} + e^{-\frac{[(2k+1)l-x]p}{c^{(1)}} \sqrt{1+k^{(1)}(p)}} \right] - \\
&- \bar{N}^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \cdot \left[e^{-\frac{(2kl+x)p}{c^{(1)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(1)}(p)}} + \theta \cdot e^{-\frac{[2(k+1)l-x]p}{c^{(1)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(1)}(p)}} \right] - \bar{\varphi}^{(1)}(x, p) \\
\bar{U}_1^{(1)}(x, p) &= \left[\bar{M}^{(1)}(l, p) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k e^{-\frac{2l(k+1)p}{c^{(1)}} \sqrt{1-\varepsilon \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}} + \bar{M}^{(2)}(l, p) \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k e^{-\frac{2klp}{c^{(1)}} \sqrt{1-\varepsilon \bar{\Gamma}^{(2)}(p)}} - \right. \\
&- \left. N^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \cdot e^{-\frac{(2k+1)lp}{c^{(1)}} \sqrt{1+\varepsilon k^{(1)}(p)}} \right] e^{-\frac{(x-l)p}{c_2} \sqrt{1+\varepsilon k^{(2)}(p)}} - \bar{\varphi}^{(2)}(x, p)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{M}^{(1)}(l, p) &= \frac{c^{(1)} c^{(2)}}{p(c^{(2)} + \mu c^{(1)})} \left[\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}(l, p)}{\partial x} - \mu \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}(l, p)}{\partial x} \right] + \\
&+ \frac{c^{(1)} c^{(2)} \varepsilon \sigma_0 k_1}{p(c^{(2)} + \mu c^{(1)})} \cdot \left[\frac{\bar{\Gamma}^{(1)}(p) (\bar{\Pi}^{(1)}(p))^2}{\sqrt{1-\varepsilon \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}} - \mu \frac{\bar{\Gamma}^{(2)}(p) (\bar{\Pi}^{(2)}(p))^2}{\sqrt{1-\varepsilon \bar{\Gamma}^{(2)}(p)}} \right] + \\
&+ \frac{c^{(1)} \varepsilon k_1 \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}{2c^{(2)}} \bar{\varphi}^{(1)}(l, p) - \frac{\varepsilon k_1 \bar{\Gamma}^{(2)}(p)}{2} \bar{\varphi}^{(2)}(l, p) \\
\bar{N}^{(1)}(p) &= \frac{c^{(1)}}{p \sqrt{1-\varepsilon \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}(o, p)}{\partial x} + \frac{c^{(1)} \varepsilon k_1 \bar{\Gamma}^{(1)}(p) (1+\varepsilon k^{(1)}) (\bar{\Pi}^{(1)}(p))^2}{p \sqrt{1-\varepsilon \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}^{(2)}(l, p) &= \frac{c^{(1)}c^{(2)}}{p(c^{(2)} + \mu c^{(1)})} \left[\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}(l, p)}{\partial x} - \mu \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}(l, p)}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{c^{(1)}c^{(2)}\varepsilon \sigma_0 k_1}{p(c^{(2)} + c^{(1)}\mu)} \left[\frac{\bar{\Gamma}^{(1)}(p) \left(\bar{\Pi}^{(1)}(p) \right)^2}{\sqrt{1 - \varepsilon \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}} - \mu \frac{\bar{\Gamma}^{(2)}(p) \left(\bar{\Pi}^{(2)}(p) \right)^2}{\sqrt{1 - \varepsilon \bar{\Gamma}^{(2)}(p)}} \right] - \\ &- \frac{c^{(1)}\varepsilon k_1 \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}{2c^{(2)}} \varphi_1(l, p) + \frac{\varepsilon k_1 \bar{\Gamma}^{(2)}(p)}{2} \varphi_2(l, p) \\ \bar{N}^{(2)}(p) &= \frac{2c^{(1)}c^{(2)}}{p\sqrt{1 - \varepsilon \bar{\Gamma}^{(1)}(p)}} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}(0, p)}{\partial x} + \frac{2c^{(1)}c^{(2)}\varepsilon k_1 \bar{\Gamma}^{(1)}(p) \left(1 + \varepsilon k^{(1)}(p) \right) \left(\bar{\Pi}^{(1)}(p) \right)^2}{p\sqrt{1 - \varepsilon \bar{\Gamma}^{(1)}(p)} \left(c^{(2)} + \mu c^{(1)} \right)} \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к оригиналу для второго приближения решения, получаем

$$\begin{aligned} U_2^{(1)}(x, t) &= M^{(1)}(l, t) * \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left\{ W^{(1)}\left((2k+1)l + \bar{x}, t \right) + W^{(1)}\left[(2k+1)l - x, t \right] \right\} - N^{(1)}(t) * \\ &* \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \left\{ W^{(1)}(2kl + x, t) + \theta W^{(1)}[2(k+1)l - x, t] \right\} - \varphi^{(1)}(x, t) \\ U_2^{(2)} &= \left\{ M^{(1)}(l, t) * \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k W^{(1)}[2(k+1)l, t] + M^{(2)}(l, t) * \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k W^{(1)}(2kl, t) - N^{(2)}(t) * \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k W^{(1)}[(2k+1)l, t] \right\} * \\ &* W^{(2)}(x, t) - \varphi^2(x, t) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M^{(1)}(l, t) &= \frac{c^{(1)}c^{(2)}}{c^{(2)} + \mu c^{(1)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}(l, t)}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi^{(2)}(l, t)}{\partial x} \right) + \frac{c^{(1)}c^{(2)}\sigma_0 k_1}{(c^{(2)} + \mu c^{(1)})} \left(\Phi^{(1)}(t) - \mu \Phi^{(2)}(t) \right) + \\ &+ \frac{c^{(1)}k_1\varepsilon}{2c^{(2)}} \int_0^t \Gamma^{(1)}(t - \varepsilon) \varphi^{(1)}(l, \tau) d\tau - \frac{k_1\varepsilon}{2} \int_0^t \Gamma^{(2)}(t - \tau) \varphi^{(2)}(l, \tau) d\tau \\ N^{(1)}(t) &= c^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}(0, t)}{\partial x} + c^{(1)}k_1\Phi^{(1)}(t) \\ M^{(2)}(l, t) &= \frac{c^{(1)}c^{(2)}}{c^{(2)} + \mu c^{(1)}} \left[\frac{\partial \varphi^{(1)}(l, t)}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi^{(2)}(l, t)}{\partial x} \right] + \frac{c^{(1)}c^{(2)}\sigma_0 k_1}{c^{(2)} + \mu c^{(1)}} \left[\Phi^{(1)}(t) - \mu \Phi^{(2)}(t) \right] \\ &- \frac{c^{(1)}k_1\varepsilon}{2c^{(2)}} \int_0^t \Gamma^{(1)}(t - \tau) \varphi^{(1)}(l, \tau) d\tau + \frac{\varepsilon k_1}{2} \int_0^t \Gamma^{(2)}(t - \tau) \varphi^{(2)}(l, \tau) d\tau \\ N^{(2)}(t) &= 2c^{(1)}c^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(1)}(0, t)}{\partial x} + \frac{2c^{(1)}c^{(2)}k_1}{c^{(2)} + \mu c^{(1)}} G^{(1)}(t) \end{aligned}$$

$$\varphi^{(1)}(x,t) = \frac{\varepsilon k_1 E}{2\sigma_0} \int_0^t \Gamma^{(1)}(t-\tau) d\Pi^{(1)}(\tau) * \left\{ \int_0^x \int_{\frac{x-s}{c^{(1)}}}^{t-\frac{s}{c^{(1)}}} \left[\frac{\partial U_1^{(1)}(s,t-\tau)}{\partial s} \right]^2 \frac{\partial}{\partial \tau} W^{(1)}(x-s,t) d\tau ds + \right.$$

$$\left. + \int_x^{\frac{c^{(1)}t+x}{2}} \int_{\frac{s-x}{c^{(1)}}}^{t-\frac{s}{c^{(1)}}} \left[\frac{\partial U_1^{(1)}(s,t-\tau)}{\partial s} \right]^2 \frac{\partial}{\partial \tau} W^{(1)}(s-x,\tau) d\tau ds \right\}$$

$$\varphi^{(2)}(x,t) = \frac{\varepsilon k_1 E}{2\sigma_0} \int_0^t \Gamma^{(2)}(t-\tau) d\Pi^{(2)}(\tau) * \left\{ \int_0^x \int_{\frac{x-s}{c^{(2)}}}^{t-\frac{s}{c^{(2)}}} \left[\frac{\partial U_1^{(2)}(s,t-\tau)}{\partial s} \right]^2 \frac{\partial}{\partial \tau} W^{(2)}(x-s,t) d\tau ds + \right.$$

$$\left. + \int_x^{\frac{c^{(2)}t+x}{2}} \int_{\frac{s-x}{c^{(2)}}}^{t-\frac{s}{c^{(2)}}} \left[\frac{\partial U_1^{(2)}(s,t-\tau)}{\partial s} \right]^2 \frac{\partial}{\partial \tau} W^{(2)}(s-x,\tau) d\tau ds \right\}$$

$$\Phi^{(i)}(t) = \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-\tau) (\Pi^{(i)}(\tau))^2 d\tau$$

$$G^{(i)}(t) = \int_0^t \Gamma^{(i)}(t-s) \int_0^s \Pi^{(i)}(s-\tau) (\Pi^{(i)}(\tau))^2 d\tau ds$$

Аналогичным образом можем определить последующие приближения решений.

Теперь исследуем полученные решения.

При $t - \frac{x}{c} \ll 1$ из формулы (14) получаем

$$\sigma_1(x,t) \approx \sigma_0 e^{-\frac{\varepsilon k_0 x}{2c}} H\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

где $k_0 = k(0)$, тогда для второго приближения имеем

$$U_2^{(i)}(x,t) \approx \frac{k_1 \sigma_0^2 c \Gamma_{10}}{E^2 k_0} \left(e^{-\frac{\varepsilon k_0 x}{2c}} - e^{-\frac{\varepsilon k_0 x}{c}} \right) H\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

где $\Gamma_1(t)$ – нелинейное ядро релаксации, которое определяется формулой

$$\Gamma_1(t) = \Gamma_{10} \delta(t) - \tilde{\Gamma}_1(t)$$

Здесь Γ_{10} – постоянная, $\delta(t)$ – дельта функции Дирака.

Отсюда видно, что колебание с течением времени затухает по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания, равным $-\frac{\varepsilon k_0 x}{2c}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильясов М.Х.* Нестационарные вязкоупругие волны. – Баку, 2011.
2. *Гасанов А.Б.* Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия. – Баку: Изд-во ЭЛМ, 2004. – 247 с.

3. *Ильясов М.Х., Курбанов Н.Т.* К решению интегро-дифференциального уравнения динамических задач линейной вязкоупругости // ДАН Азерб. ССР, – 1984. – №5.
4. *Курбанов Н.Т., Бабаджанова В.Г.* Исследование реакции неоднородных вязкоупругих тел на нестационарные внешние воздействия / XVI-я Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. Материалы. – Алушта, 2009. – С.465-468.
5. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
6. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОЗАЩИТЫ КЕРАМИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ ОХЛАЖДАЕМЫХ ЛОПАТОК ГТД ПРИ ГАЗОПЛАМЕННОМ НАГРЕВЕ

Лепешкин А.Р., Бычков Н.Г.

ФГУП “ЦИАМ им. П.И. Баранова”, г. Москва, Россия

Для обеспечения конкурентоспособности авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) приходится повышать температуру газа перед турбиной свыше 1700К. Сохранить работоспособность деталей высокотемпературного газового тракта ГТД при этом возможно лишь при совершенствовании их теплозащиты. В настоящее время в мировой практике широко используются керамические теплозащитные покрытия (ТЗП) на основе ZrO_2 [1-5]. Вместе с тем, сведения об эффективности теплозащиты деталей с помощью ТЗП при разогреве их в газовом потоке весьма ограничены. Характеристики теплопроводности ТЗП, полученные при использовании различных известных лабораторных методов, противоречивы [4,5]. В основном предпочтение отдается плазменному ТЗП. Например, в работе [4] при использовании лазерного импульсного разогрева было получено, что теплопроводность плазменных покрытий примерно в 3 раза ниже, чем у электронно-лучевых. Лазерный импульсный метод нецелесообразно использовать при определении температуры частично прозрачных ТЗП, так как часть лучевого потока разогревает непосредственно металл, на который нанесено ТЗП. Защитный тонкий металлический экран, толщиной 10...15 мкм, наносимый исследователями на поверхность ТЗП со стороны лазера при разогреве, сам начинает испускать лучевой поток. В реальных условиях лопатки турбин и стенки камер сгорания разогреваются газовым потоком.

В данной работе приводится разработанная методика объективной оценки эффективности теплозащиты основного материала деталей ГТД с помощью покрытий при газопламенном разогреве объекта на разработанной установке. Суть данной оригинальной методики, защищенной патентом РФ, состоит в том, что через разъемный образец (модели охлаждаемой детали ГТД), собираемый из двух половинок пропускается высокотемпературный газовый поток (рис.1).

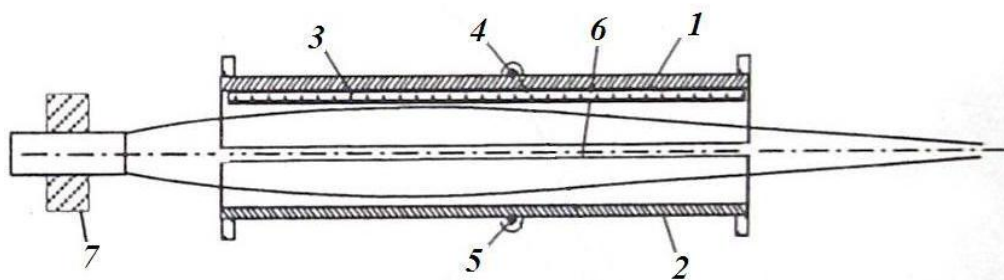


Рис.1. Схема образца на установке: 1 – половинка образца с ТЗП; 2 – половинка образца без ТЗП; 3 – покрытие; 4 – термопара; 5 – термопара; 6 – ось образца; 7 – горелка.

На наружной поверхности половинок составного образца приваривают ХА термопары (диаметром 0,2 мм), которые подключаются к регистрирующей системе на базе компьютера. Половинка образца, защищенная от продуктов сгорания

покрытием, разогревается меньше, чем незащищенная. Разность температур стенок защищенной и незащищенной ТЗП характеризует эффективность ТЗП.

Модели с керамическим ТЗП $ZrO_2+8\%Y_2O_3$, нанесенные по плазменной технологии (рис.2), изготавливались из сплава ВХ-4А. Модели с ТЗП столбчатой структуры (рис.3), нанесенными по электронно-лучевой технологии, изготавливались из сплава ВЖ-98. Незащищенные ТЗП половинки каждой модели изготавливались из того же материала, что и половинки с ТЗП.

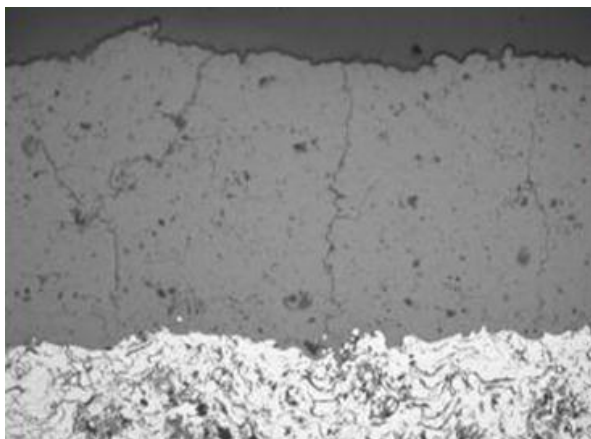


Рис.2. Теплозащитное керамическое покрытие $ZrO_2-Y_2O_3$ (нанесенное по плазменной технологии).

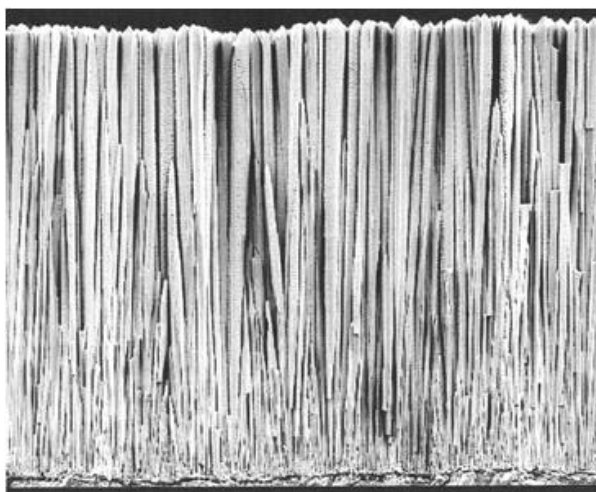


Рис.3. Теплозащитное керамическое покрытие $ZrO_2-Y_2O_3$ (нанесенное по электронно-лучевой технологии).

Для обеспечения надежности определения теплозащитной эффективности испытания на каждой модели повторялись несколько раз. При повторных испытаниях модель разворачивалась вокруг своей оси на 180° . Различия температуры при повторных замерах не превышало $10^\circ C$. Максимальная температура на "холодной" стороне стенки - $900^\circ C$. Температура газового потока - $1773K$.

После поджига горючего газа начинается разогрев внутренних стенок обеих половинок модели. Разность температур на наружной стороне растет до тех пор, пока теплопередача от горячей поверхности стенки к холодной меньше, чем теплоотвод от наружной поверхности в окружающую среду.

При отсутствии организованного охлаждения наружной стороны стенки максимальная разность температур Δt_{\max} снаружи обеих половинок соответствует градиенту температур на ТЗП при этих условиях. В эксперименте Δt_{\max} достигается при температуре холодной стенки 600°C .

Результаты испытаний представлены на рис.4 и 5.

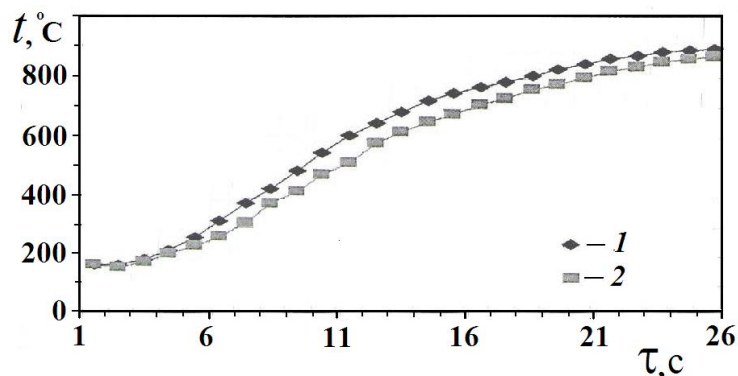


Рис.4. Изменение температуры на наружной (холодной) поверхности образца при исследовании теплозащиты с использованием ТЗП, нанесенного по плазменной технологии: 1 – без ТЗП; 2 – с ТЗП.

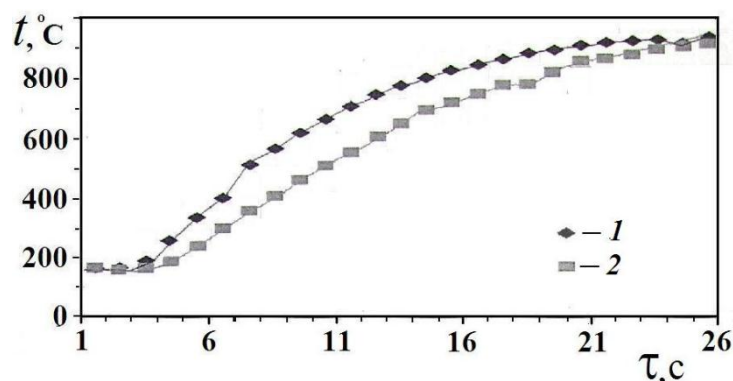


Рис.5. Изменение температуры на наружной (холодной) поверхности образца при исследовании теплозащиты с использованием ТЗП, нанесенного по электронно-лучевой технологии: 1 – без ТЗП; 2 – с ТЗП.

Нужно иметь ввиду, что теплопроводность керамического ТЗП в диапазоне температур $700\pm 300^{\circ}\text{C}$ изменяется примерно на 8%, с такой погрешностью можно распространить результаты измерения эффективности теплозащиты на указанный диапазон температур при испытаниях моделей без применения охлаждения наружной стенки.

Таким образом, полученные результаты экспериментального определения снижения температуры стенки из жаропрочных материалов после нанесения ТЗП из $\text{ZrO}_2 + 8\% \text{Y}_2\text{O}_3$ толщиной примерно 120 мкм показывают, что при газопламенном разогреве моделей испытанное покрытие столбчатой структуры лучше защищает металл, чем испытанное плазменное покрытие (см. табл.1).

Из анализа результатов проведенных исследований следует, что более высокую эффективность теплозащиты (в 1,6 раза) имеет керамическое ТЗП $\text{ZrO}_2 + 8\% \text{Y}_2\text{O}_3$, нанесенное электроннолучевой технологии, чем при нанесении ТЗП по плазменной технологии.

Таблица 1.

Эффективность снижения температуры металла при газопламенном разогреве после нанесения ТЗП толщиной $\delta=120$ мкм по плазменной и электронно-лучевой технологии.

T_r, K	Тип покрытия	$\Delta t_{max}, ^\circ C$
1773	Плазменное	60...70
	Электронно-лучевое	100...110

Δt_{max} – максимальная разница температур (14-я с) на половинах образца с ТЗП и без него в табл.1.

ВЫВОДЫ

Тепловая защита покрытий зависит не только от тепловых потоков, свойств керамического слоя ТЗП, но и от используемой технологии нанесения.

Разработанный оригинальный метод экспериментальной оценки эффективности тепловой защиты деталей с покрытиями, нанесенных по разным технологиям, при газопламенном нагреве обеспечивает получение более точных данных о параметрах и свойств керамики в условиях эксплуатации деталей турбин авиационных двигателей.

Получены результаты исследований и оценки теплозащитного эффекта керамических покрытий охлаждаемых деталей с учетом условий эксплуатации. По результатам экспериментальных исследований теплозащиты получено, что керамическое покрытие столбчатой структуры, нанесенное по электронно-лучевой технологии, лучше защищает металл деталей ГТД, чем покрытие, нанесенное по плазменной технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лепешкин А.Р.* Исследование свойств и структуры теплозащитного микро-наноструктурного композиционного покрытия лопатки ГТД с учетом условий нанесения // Всероссийская конференция “Механика наноструктурированных материалов и систем“. Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2011. – Т.1. – С.75-81.
2. *Лепешкин А.Р., Ваганов П.А.* Расчет напряженного состояния элементов столбчатого керамического покрытия лопатки турбины ГТД с учетом воздействия центробежных сил // Всероссийская конференция “Механика композиционных материалов и конструкций, структурно-сложных и гетерогенных сред“. Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2010. – С.156-161.
3. *Лепешкин А.Р., Бычков Н.Г., Першин А.В.* Лопатка турбины / Патент РФ №2259481, 2005.
4. *Тамарин Ю.А., Качанов Е.Б.* Свойства теплозащитных покрытий, наносимых электронно-лучевой технологией / Научно-технический сборник статей “Новые технологические процессы и надежность ГТД“. – М.: ЦИАМ, 2008. – Вып.7. – С.125-143.
5. *Тамарин Ю.А., Качанов Е.Б.* Электронно-лучевая технология нанесения теплозащитных покрытий / Научно-технический сборник статей “Новые

технологические процессы и надежность ГТД“. – М.: ЦИАМ, 2008. – Вып.7. – С.145-157.

УДК 539.3

О ФУНКЦИИ ГРЮНАЙЗЕРА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ

Лукьянов А.А.

*НОУ ВПО "Международного института компьютерных технологий"
Липецкий Филиал, г. Липецк, Россия*

РЕЗЮМЕ

Предлагается модификация определения функции Грюнайзера на случай анизотропных композитов. Данная функция используется в уравнении состояния Грюнайзера, описывающая аналитическую связь состояний Гюгонио с другими термодинамическими состояниями за ударной волной в анизотропных композитах. Предлагаемая модификация функции Грюнайзера основывается на обобщенной декомпозиции тензора напряжения и представляет собой физически и математически корректное обобщение уравнения состояния Грюнайзера для изотропных материалов и редуцируется к этому уравнению в случае изотропии.

Ключевые слова: анизотропия; уравнение состояния; ударная волна; композит

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с рядом практических приложений, в последнее время уделяется повышенное внимание к моделированию процессов деформирования и разрушения композиционных материалов при ударном нагружении. Долгое время считалось, что поведение анизотропных композиционных материалов и анизотропных металлов при ударном нагружении является изотропным и не зависит от ориентации ударного нагружения [1-4], и лишь недавно было экспериментально показано анизотропное поведение ударных волн в анизотропных материалах [5-7].

В данной работе использован макроскопический континуальный подход для обобщения на случай анизотропного материала существующей теории экстраполяции состояний Гюгонио к другим термодинамическим состояниям для изотропных материалов. Поведение композитных материалов при ударном нагружении приводит к нелинейному поведению и конечным деформациям, поэтому предложено уравнение состояния для точного описания экстраполяции состояний Гюгонио к другим термодинамическим состояниям для анизотропных углеродно-волоконистых композитов любой симметрии. Определение уравнения состояния для анизотропных материалов является важной задачей в металлургии, геофизики, аэрокосмическом секторе и в других областях машиностроения. В данной работе рассматриваются вопросы определения параметра Грюнайзера для описания поведения анизотропных материалов при ударном нагружении. Параметр Грюнайзера является важной феноменологической концепцией для понимания термического расширения материала и поведения сред при ударном нагружении. В работе предлагается модификация определения функции Грюнайзера, основанная на обобщенной декомпозиции тензора напряжения [8-14] и представляет собой физически и математически корректное обобщение уравнения состояния Грюнайзера для изотропных материалов и редуцируется к этому уравнению в случае изотропии. Сравнение численных расчетов с экспериментальными данными

проведено для выбранного углеродно-волоконистого эпоксидного композита при ударном нагружении.

2. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА ГРЮНАЙЗЕРА

Грюнайзер [15] использовал механическое описание атомной решетки для вывода первого определения параметра, Γ , для изотропного материала, который будем обозначать как Γ^{is} , определяя так

$$\Gamma^{is}(\nu) = -\frac{d \log \omega}{d \log \nu} = -\frac{d \log \theta}{d \log \nu} \quad (1)$$

где ω – характеристическая частота атомной решетки, θ – характеристическая температура (т.е. температура Дебая) решетки, и ν – удельный объем решетки материала. В соотношении (1) предполагается, что θ и ω зависят только от объема, но не от индивидуальных компонент тензора деформаций и температуры. Важно отметить, что для анизотропных металлов любой симметрии (в общем случае) такое предположение может быть не верным. Грюнайзер утверждал, что предположение $\theta = \theta(\nu)$ для одноатомной решетки является обоснованным. В связи с этим, все компоненты Γ^{is} в различных направлениях являются одинаковыми (т.е. определяется изотропный параметр Грюнайзера). Объемный параметр Грюнайзера $\Gamma^{is}(\nu, T)$ для изотропных материалов связан с коэффициентом объемного расширения $\alpha^v = (\partial \nu / \partial T)_p / \nu$ или давлением через следующие известные соотношения (в предположении когда $\theta = \theta(\nu)$)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\varepsilon = \frac{\Gamma^{is} c_v}{\nu} \text{ и } \Gamma^{is}(\nu, T) = \alpha^v \frac{\nu K^T}{c_v} \quad (2)$$

где c_v – теплоемкость при постоянном удельном объеме, ν – удельный объем (т.е. $\nu = \frac{1}{\rho}$), ρ – плотность, $K^T = -V(\partial p / \partial V)_T$ – термический объемный модуль сжатия/растяжения, T – температура. Соотношения (2) были получены для случая объемно-напряженного состояния с шаровым тензором напряжения $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ и соответствующим объемным сжатием $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$ [16]. Далее, с термодинамической точки зрения, для такого напряженно-деформируемого состояния также можно получить соотношение

$$\Gamma^{is} = \alpha^v \frac{\nu K^S}{c_p} \quad (3)$$

где K^S – адиабатический объемный модуль сжатия/растяжения, c_p – теплоемкость при постоянном давлении. Отметим, что соотношение (3) распространено в качестве определения изотропного параметра Грюнайзера для моделирования ударных волн. В этой работе в качестве базового определения изотропного параметра Грюнайзера будут использованы соотношения (2). Это обусловлено тем, что (а) тензор напряжения для случая термоупругости определяется законом Дюгамеля-Неймана (обобщенный закон термоупругости) с изотермической матрицей упругих постоянных, (б) теплоемкость при постоянном удельном объеме не меняется с температурой ($c_v = \text{const}$) у твердых веществ (по закону Дюлонга-Пти) для температуры выше некоторой, называемой температурой Дебая [16]. Эти факты и

соотношения (2) являются фундаментальными для моделировании распространения ударных волн.

Другой важный подход при определении параметра Грюнайзера, получивший широкое распространение в моделировании ударных волн, основывается на уравнении состояния Ми-Грюнайзера:

$$\Gamma^{EOS}(v, e) = v \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_v \quad (4)$$

где p – гидростатическое давление, e – удельная внутренняя энергия. Таким образом, представлены два распространенных определения параметра Грюнайзера (т.е. термодинамическое и через уравнение состояния). При моделировании ударных волн предполагается, что $\Gamma^{EOS}(v, e) = \Gamma^{is}(v, T)$. Данное предположение может быть математически обоснованно, используя циклические термодинамические правила дифференцирования, когда они имеют место быть. Стоит отметить, что существует множество определений параметра Грюнайзера. Подробный обзор различных определений параметра Грюнайзера был предложен в работе [16]. В случае изотропного материала тензор напряжения описывается двумя физическими величинами: гидростатическим давлением, приводящим к объемным деформациям, и девиатором напряжений, приводящим к изменению формы тела. Давление определяется как среднее напряжение (гидростатическое напряжение) взятое с обратным знаком. Возникающие для изотропных материалов в области упругости давление напрямую связано с объемными деформациями. Используя этот факт, были получены соотношения (1)-(4). Для анизотропных материалов декомпозиции тензоров напряжений и деформаций на шаровую и девиаторную части взаимно-однозначно не связаны. У анизотропных материалов гидростатическое напряжение зависит от девиаторной части тензора деформации, и декомпозиция не обладает такими же свойствами как для изотропного материала. Таким образом, соотношения (1)-(4) не могут быть обоснованно использованы для анизотропных материалов. Для анизотропных материалов были предложены в разное время следующие определения тензора Грюнайзера

(а) $\Gamma_{ij} = \frac{1}{c_{\bar{\varepsilon}}} \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = - \frac{1}{c_{\bar{\varepsilon}}} \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}}$ – обобщенный тензор Грюнайзера был рассмотрен в

работах Collins и White (1964) [17], Brugger (1965) [18], Barron and Munn (1967) [19]. Данное определение Γ_{ij} достаточно часто используется в литературе. Важно отметить, что определенный таким образом тензор Γ_{ij} смешивает коэффициенты объемного расширения через не диагональные элементы матрицы упругих постоянных. Как результат, осреднение трех диагональных значений Γ_{ii} , $i = 1, 2, 3$ не приводит к выражению для Γ_B^{an} , ассоциированного с объемным расширением по аналогии с выражением (1);

(б) $\Gamma_{ij} = \frac{C_{ijkl}^S \alpha_{kl}^v}{\rho c_{\bar{\varepsilon}}} = \frac{C_{ijkl}^T \alpha_{kl}^v}{\rho c_{\bar{\varepsilon}}}$ – обобщенный тензор Грюнайзера был рассмотрен в

работах Wallace (1980) [20], Winey и Gupta (2004, 2006, 2006) [21-23]. Удельная теплоемкость определяется при постоянных напряжениях или деформациях. Это определение не дает редукции к классическому определению, так как сдвиговые напряжения и деформации участвуют в определении тензора, что не совпадает с классическим определением для изотропного тела;

(с) $\Gamma_{ij} = \frac{3\tilde{K}_\varepsilon^S}{c_{\tilde{\sigma}}} \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T = \frac{3\tilde{K}_\varepsilon^S}{c_{\tilde{\sigma}}} \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial \sigma_{ij}}$ – обобщенный тензор Грюнайзера был

рассмотрен в работе Choy *et. al.* (1984) [24];

(д) $\Gamma_{ij} = -\frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s} \right)_{\varepsilon_{ij}}$ – обобщенный тензор был рассмотрен в работах Wallace (1980)

[20], Winey и Gupta (2004, 2006, 2006) [21-23]. Это определение также не дает редукции к классическому определению по тем же соображениям, что и в пункте (б); Здесь σ_{ij} – тензор напряжения, s – удельная энтропия, ε_{ij} – тензор деформаций, F – свободная энергия Гельмгольца, C_{ijkl}^S , C_{ijkl}^T – адиабатический и изотермический тензоры 4-го ранга упругих постоянных, α_{kl}^V – тензор термического расширения, $c_{\tilde{\sigma}}$ – теплоемкость при постоянном тензоре напряжения, $c_{\tilde{\varepsilon}}$ – теплоемкость при постоянном тензоре деформаций, \tilde{K}_ε^S – второй эффективный объемный модуль сжатия / растяжения для анизотропных материалов (Brugger, 1965 [18]; Ломакин, 1965 [25]; Brugger and Fritz, 1967 [26]; Choy *et. al.*, 1984 [24]; Segletes, 1987 [27]; Lukyanov и Segletes, 2012 [13]).

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ КОРРЕКТНЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ ОБЪЕМНЫЙ ПАРАМЕТР ГРЮНАЙЗЕРА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Параметр Грюнайзера $\Gamma^{is}(v, T)$ для изотропного случая определяется соотношениями (2), используя гидростатическое давление p и соответствующее объемно-напряженное состояние. Было отмечено выше, что гидростатическое напряжение (или давление) индуцирует изменение масштабов для изотропных материалов. При этом девиатор напряжения индуцирует только изменение формы. Очевидно, что для сохранения данных свойств в случае анизотропных материалов (например, для ортотропных материалов), определение “давления” необходимо обобщить, так как гидростатическое давление (изотропно-напряженное состояние), приложенное к анизотропным материалам, приводит к анизотропному деформируемому состоянию. Другими словами, данное нагружение приводит не только к изменению масштабов, но и к изменению формы. Данный факт противоречит определению “обобщенного давления”.

Полное гидростатическое “давление” для анизотропных материалов определяется так [8-14]

$$\sigma_{ij} = -p^* \alpha_{ij} + \tilde{S}_{ij}, \quad p^* = \tilde{p} + \frac{\beta_{ij} \tilde{S}_{ij}}{\alpha_{kl} \beta_{kl}}, \quad \tilde{p} = -\frac{\beta_{ij} \sigma_{ij}}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \quad (5)$$

Эти соотношения позволяют построить корректное обобщение классического давления в упругой области. Во всех выражениях (где отдельно не оговорено) предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Элементы тензора α_{ij} определяются так

$$\alpha_{ii} = \left(\sum_{k=1}^3 C_{ik} \right) \cdot 3\bar{K}_C, \quad i=1, 2, 3; \quad \alpha_{ij} \alpha_{ij} = 3 \quad (6)$$

$$K_C = \frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^3 C_{1k}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^3 C_{2k}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^3 C_{3k}\right)^2}, \quad K_C = \frac{1}{9\overline{K}_C} \quad (7)$$

где C_{ij} – положительно определенная матрица 6×6 упругих постоянных (адиабатическая или изотермическая), K_C – обобщенный первый модуль растяжения/сжатия (адиабатический или изотермический). Элементы тензора второго ранга β_{ij} вычисляются так

$$\beta_{ii} = \left(\sum_{k=1}^3 J_{ik}\right) \cdot 3K_S, \quad i = 1, 2, 3; \quad \beta_{ij}\beta_{ij} = 3 \quad (8)$$

$$\frac{1}{K_S} = \sqrt{3} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^3 J_{1k}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^3 J_{2k}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^3 J_{3k}\right)^2} \quad (9)$$

где $J_{ij} = [C_{ij}]^{-1}$ – элементы симметричной матрицы 6×6 податливостей (адиабатическая или изотермическая), K_S – обобщенный второй модуль растяжения/сжатия (адиабатический или изотермический). Все физические величины (т.е. α_{ij} , β_{ij} , K_C , и K_S) редуцируются к хорошо известным выражениям для классических величин в случае изотропного материала [8-14]. Выражение (2) позволяет предложить следующие обобщение объемного параметра Γ_B^{an}

$$\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial T}\right)_\varepsilon = \frac{\Gamma_B^{an} c_v}{\nu}, \quad \tilde{p} = -\frac{\beta_{ij} \sigma_{ij}}{\alpha_{ij} \beta_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}^T [\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}^v (T - T_0)] \quad (10)$$

где \tilde{p} – часть обобщенного полного давления, соответствующая объемным деформациям ε [8-14], α_{kl}^v – тензор термического расширения (в изотропном случае этот тензор имеет сферический вид, т.е. $\alpha_{kl}^v = \frac{\alpha^v}{3} \delta_{kl}$ и предполагается постоянным $\alpha^v = \text{const}$), C_{ijkl}^T – изотермический тензор 4-го ранга упругих постоянных, ε_{kl} – тензор деформаций, α_{ij} и β_{ij} – первый и второй обобщенные символы Кронекера (данные тензоры могут быть также адиабатическими или изотермическими), которые также диагональны [8-14]. Соотношения (12) приводят к определению

$$\Gamma_B^{an} = \frac{\nu}{c_v} \frac{\beta_{ij} C_{ijkl}^T \alpha_{kl}^v}{\alpha_{pr} \beta_{pr}} = \frac{\nu}{c_v} \frac{3K_S^T \delta_{kl} \alpha_{kl}^v}{\alpha_{pr} \beta_{pr}} \quad (11)$$

где для вывода (11) использовано свойство $\beta_{ij} C_{ijkl}^T = 3K_S^T \delta_{kl}$ [8-12] и K_S^T – изотермический обобщенный второй модуль растяжения/сжатия (9), $\delta_{kl} \alpha_{kl}^v = \alpha_{11}^v + \alpha_{22}^v + \alpha_{33}^v$ – коэффициент объемного расширения. Очевидно, что соотношение (11) может быть также записано, используя адиабатические упругие свойства. В предельном случае изотропии объемный параметр Грюнайзера $\Gamma_B^{an}(\nu, T)$ редуцируется к хорошо известному выражению для объемного изотропного параметра Грюнайзера $\Gamma^{is}(\nu, T)$, определяемого выражениями (2).

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ КОРРЕКТНОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГРЮНАЙЗЕРА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для построения адекватного описания общего поведения анизотропных материалов при ударном нагружении (т.е. высоких давлений) необходимо построение термодинамически корректного уравнения состояния для \tilde{p} (часть полного давления, связанная с объемными деформациями только). Для определения связи между давлением \tilde{p} и объемной деформацией используется обобщенный закон Гука. Подставляя в закон Гука тензор объемных деформаций (сдвиговые деформации не должны давать вклад в определение уравнения состояния также как в изотропном случае) получаем

$$-\alpha_{ij} \dot{\tilde{p}} = \tilde{\mathbf{p}}_{ij}^{\nabla} = C_{ijkl}^T \left[\delta_{kl} \frac{1}{3} \mathbf{D}_{kk} \right] = C_{ijkl}^T \delta_{kl} \frac{1}{3} \mathbf{D}_{kk} = \alpha_{ij} K_C^T \mathbf{div} \vec{v} \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -K_C^T \mathbf{div} \vec{v} = K_C^T \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad \mathbf{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (13)$$

где \mathbf{D}_{ij} – тензор скоростей деформаций. Первый закон (т.е. тождество Гиббса) термодинамики в дифференциальной форме (с учетом закона сохранения массы, импульса) выглядит так

$$\dot{e} = -\tilde{p} \cdot \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{\alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}}{\mathbf{div} \vec{v}} + T \dot{s} = \tilde{p} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}}{\delta_{ij} \mathbf{D}_{ij}} + T \dot{s} \quad (14)$$

В соотношении (14) предполагается сжимаемость среды ($\mathbf{div} \vec{v} \neq 0$), что соответствует типичному поведению конденсированных сред. Свертки $\alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}$ и $\delta_{ij} \mathbf{D}_{ij}$ могут быть переписаны, используя векторное скалярное произведение двух пар векторов: $\alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij} = \|\alpha\|_F \cdot \|\mathbf{D}\|_F \cdot \langle \vec{\alpha}, \vec{\xi} \rangle$ и $\delta_{ij} \mathbf{D}_{ij} = \|\delta\|_F \cdot \|\mathbf{D}^d\|_F \cdot \langle \vec{\delta}, \vec{\xi} \rangle$, где $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса, \mathbf{D}^d – диагональная часть тензора скоростей деформаций (используются диагональные элементы тензора скоростей деформаций, так как тензоры δ_{ij} и α_{ij} являются диагональными тензорами), $\vec{\alpha} = \left\langle \frac{\alpha_{11}}{\|\alpha\|_F}, \frac{\alpha_{22}}{\|\alpha\|_F}, \frac{\alpha_{33}}{\|\alpha\|_F} \right\rangle$ – направление обобщенного гидростатического давления (анизотропного гидростатического давления) и $\|\alpha\|_F = \sqrt{3}$ [8-12], $\vec{\delta} = \left\langle \frac{1}{\|\delta\|_F}, \frac{1}{\|\delta\|_F}, \frac{1}{\|\delta\|_F} \right\rangle$ – направление изотропного гидростатического давления и $\|\delta\|_F = \sqrt{3}$, $\vec{\xi} = \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle$ – направление распространения обобщенно-объемной ударной волны (т.е., $\xi_i = \frac{\mathbf{D}_{ii}}{\|\mathbf{D}^d\|_F}$, $i = 1, 2, 3$)

$$\frac{\alpha_{ij} \mathbf{D}_{ij}}{\mathbf{div} \vec{v}} = \frac{\|\alpha\|_F \cdot \|\mathbf{D}^d\|_F \cdot \langle \vec{\alpha}, \vec{\xi} \rangle}{\|\delta\|_F \cdot \|\mathbf{D}^d\|_F \cdot \langle \vec{\delta}, \vec{\xi} \rangle} = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\xi} \rangle_E}{\langle \vec{\delta}, \vec{\xi} \rangle_E} \quad (15)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ – Евклидово скалярное произведение. Важно отметить, что вектор $\vec{\xi} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ соответствует направлению распространения обобщенно-объемной ударной волны для случая $\|\mathbf{D}^d\|_F$. Соотношение (14) может быть переписано так

$$de = -\tilde{p}dv \frac{(\vec{\alpha}, \vec{\xi})_E}{(\vec{\delta}, \vec{\xi})_E} + Tds \quad \text{или} \quad ds = \frac{\tilde{p}}{T} \frac{(\vec{\alpha}, \vec{\xi})_E}{(\vec{\delta}, \vec{\xi})_E} dv + \frac{1}{T} de \quad (16)$$

Удельная энтропия s является функцией параметров состояния (удельного объема v и удельной внутренней энергии e), и дифференциал энтропии выражается через параметры состояния. Поэтому, вторые производные удельной энтропии по параметрам состояния не зависят от порядка дифференцирования (здесь предполагается непрерывность первых производных и односвязность рассматриваемой среды). Используя соотношение (16), получаем аналоги термодинамических соотношений Максвелла

$$\frac{(\vec{\alpha}, \vec{\xi})_E}{(\vec{\delta}, \vec{\xi})_E} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial e} \right)_v = \frac{\phi \tilde{p}}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial e} \right)_v - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_e \quad (17)$$

где множитель $\phi = \frac{(\vec{\alpha}, \vec{\xi})_E}{(\vec{\delta}, \vec{\xi})_E}$ предполагается константой (т.е. не зависит от параметров состояния или слабо меняющейся функцией параметров состояния). Важно отметить, что соотношение (17) верно для общего необратимого напряженно-деформируемого состояния. Для изотропных материалов известно, что разность между вариацией температуры от внутренней энергии и вариацией температуры от обратимого адиабатического сжатия (или дилатации) связывают при моделировании распространения ударных волн с объемным параметром Грюнайзера (3). Следовательно, при выводе соотношений для анизотропной среды воспользуемся аналогичным предположением, записанным так

$$\frac{\bar{\Gamma}_B^{an}(v, T)}{v} = \phi \tilde{p} \left(\frac{\partial T}{\partial e} \right)_v - \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_e \quad (18)$$

где $\bar{\Gamma}_B^{an}(v, T)$ – второй анизотропный объемный параметр Грюнайзера. В данной работе предполагается, что $\Gamma_B^{an}(v, T) = \bar{\Gamma}_B^{an}(v, T)$. Также, используя соотношения Максвелла (21), можно определить анизотропный параметр Грюнайзера $\Gamma^{an}(v, \vec{\xi})$

$$v \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial e} \right)_v = \Gamma^{an}(v, \vec{\xi}) \quad (19)$$

Объединяя соотношения (21), (22) и (23) получаем

$$\Gamma^{an}(v, \vec{\xi}) = \Gamma_B^{an}(v, T) \frac{(\vec{\delta}, \vec{\xi})_E}{(\vec{\alpha}, \vec{\xi})_E} \quad (20)$$

Таким образом, термодинамически и математически корректное описание обобщенного гидростатического давления при ударном нагружении среды имеет следующие выражение

$$p^* = \tilde{p} + \frac{\beta_{ij} \tilde{S}_{ij}}{\alpha_{ij} \beta_{ij}} \quad (21)$$

$$\tilde{p} = \begin{cases} \frac{\rho_0 c^2 \mu \left[1 + \left(1 - \frac{\Gamma^{an}(\nu, \vec{\xi})}{2} \right) \mu - \frac{\Gamma^{an}(\nu, \vec{\xi})}{2} \mu^2 \right]}{\left[1 - (S_1 - 1) \mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^2} + (1 + \mu) \Gamma^{an}(\nu, \vec{\xi}) E, & \mu > 0 \\ \rho_0 c^2 \mu + (1 + \mu) \Gamma^{an}(\nu, \vec{\xi}) E, & \mu < 0 \end{cases} \quad (22)$$

где $\vec{\xi} = \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle$ – направление распространения объемной ударной волны, $\Gamma^{an}(\nu, \vec{\xi})$ – анизотропный параметр Грюнайзера. Соотношения (25), (26) также описывают корректно поведение материалов при малых объемных деформациях.

Новое определение обобщенного гидростатического давления, анизотропного параметра Грюнайзера и уравнения состояния для анизотропного тела должны редуцироваться к классическим соотношениям в предельном случае изотропии. В случае изотропии, тензор α_{ij} имеет следующие компоненты $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$ и предложенное обобщение редуцируются к классическому случаю, где тензор α_{ij} равен δ_{ij} и соотношения принимают следующую форму

$$\tilde{p} = - \frac{\sigma_{ij} \delta_{ij}}{\delta_{kl} \delta_{kl}} = - \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad p^* = \tilde{p} = p, \quad (23)$$

$$\Gamma^{is} = \Gamma_B^{an} = \Gamma^{an}(\nu, \vec{\xi}), \quad \Gamma^{is}(\nu) = \nu \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\nu \quad (24)$$

где $\tilde{p} = p$ – классическое гидростатическое давление, $\Gamma^{is}(\nu)$ – классический изотропный параметр Грюнайзера.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

Изучается распространение ударных волн (УВ) в углеродно-волокнутом анизотропном эпоксидном композите. Возмущение создается соударением тонкой пластины-ударника (дуралюмин 6082-Т6) толщиной 5мм и тонкой пластины-мишени (углеродно-волокнутого анизотропного эпоксидного композита) толщиной 2.3мм - 5.7мм с различными скоростями в диапазоне от 504 до 940 м/с [7,10-11]. Плоский фронт ударной волны (УВ) распространяется в пластине-мишени. Детальное описание эксперимента может быть найдено в [7,10-11]. Для описания упругого поведения структурированного ортотропного углеродно-волокнутого эпоксидного композита достаточно девяти упругих постоянных [10-11].

На рис.1 приведено сравнение между экспериментальными данными и численным моделированием для распространения ударной волны в направлении, перпендикулярном плоскости волокон углеродно-волокнутого эпоксидного композита [10]. Результаты показывают хорошее совпадение максимальных уровней напряжений за ударной волной, ширину, и длину импульса с экспериментальными данными. В дополнение, время прихода ударной волны также хорошо согласуется между моделированием и экспериментом.

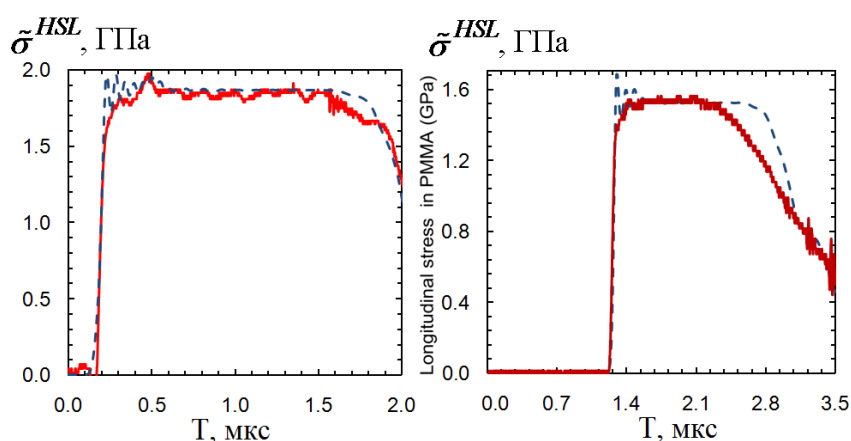


Рис.1. Экспериментальные и численные результаты уровней напряжений Гюгонио $\tilde{\sigma}^{HSL}$ за ударной волной от времени распространения ударной волны в направлении, перпендикулярном плоскости волокон углеродно-волокнутого эпоксидного композита [10]. Толщина пластины-мишени 3.8 мм. Пластина-ударник (дюралюминий 6082-Т6) толщиной 5 мм ударяла со скоростью $V = 504$ мм/с. Сплошная линия соответствует экспериментальным данным. Пунктирная линия соответствует численному моделированию.

На рис.1 также видны отличия между моделированием и экспериментом в области, соответствующей разгрузки материала. Эти отличия пока нельзя однозначно объяснить. Разница могла появиться из-за измерительных методов или из-за физических процессов, неучтенных в предложенной модели (например, сжатие и расширение изначально распределенных микро-повреждений). Важно отметить, что предложенная модель для однородного анизотропного материала была построена без учета внутренней сложной структуры материала и влияния этой структуры на распространение ударной волны. Также не было учтено влияние скоростей деформаций.

6. ВЫВОДЫ

Предложена модификация функции Грюнайзера, основанная на обобщенной декомпозиции тензора напряжения и которая представляет собой физически и математически корректное обобщение функции Грюнайзера для изотропных материалов и редуцируется к этому параметру в случае изотропии. Рассмотрено уравнение состояния для расчетов напряжений Гюгонио за ударной волной в углеродно-волокнутом композитах любой анизотропии, использующее обобщенную декомпозицию тензора напряжения [8-14] и модифицированное определение параметра Грюнайзера, и представляет собой математическое и физическое обобщение уравнения состояния Ми-Грюнайзера для изотропных материалов и редуцируется к классическому варианту в случае изотропии. Приведены расчеты напряжений Гюгонио за ударной волной, используя предложенное уравнение состояния, в направлении, перпендикулярном плоскости волокон. Рассчитанные параметры фронта ударной волны хорошо согласуются с экспериментальными данными. Все это обосновывает правомерность выбранных предположений и выбор обобщенного уравнения состояния для анизотропных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen J.K., Allahdadi A., Carney T.* High-velocity Impact of Graphite/Epoxy Composite Laminates // *Comp. Sci. and Techn.* – 1997. – Vol.57. – P.1268-1270.
2. *Hayhurst C.J., Hiermaier S.J., Clegg R.A., Riedel W., Lambert M.* Development of material models for Nextel and Kevlar-epoxy for high pressures and strain rates // *Int. J. Impact Engineering.* – 1999. – Vol.23. – №1. – P.365-376.
3. *Anderson C.E., O'Donoghue Jr.P.E., Skerhut D.* A mixture theory approach for the shock response of composite materials // *J. Comp. Materials.* – 1990. – Vol.24. – P.1159-1178.
4. *Anderson C.E., Cox P.A., Johnson G.R., Maudlin P.J.* A constitutive formulation for anisotropic materials suitable for wave propagation computer program-II // *Comp. Mech.* – 1994. – Vol.15. – P.201-203.
5. *Bordzilovsky S.A., Karakhanov S.M., Merzhievsky L.A.* Shock response of a unidirectional composite at various orientations of fibers / In: *Shock compression of condensed matter* / Schmidt S.C., Dandekar D.P., Forbes J. ., editors. – Melville, NY: AIP Press, 1998. – P.545-548.
6. *Hereil P.-L., Allix O., Gratton M.* Shock behaviour of 3D carbon-carbon composite // *J. Phys.* – 1997. – Vol.7. – P.529-534.
7. *Millett J.C.F., Bourne N.K., Meziere Y.J.E., Vignjevic R., Lukyanov A.A.* The effect of orientation on the shock response of a carbon fibre-epoxy composite // *Compos. Sci. Technology.* – 2007. – Vol.67. – №15-16. – P.3253-3260.
8. *Lukyanov A.A.* Constitutive behaviour of anisotropic materials under shock loading // *Intern. J. Plasticity.* – 2008. – Vol.24. – №1. – P.140-167.
9. *Лукьянов А.А., Пеньков В.Б.* О распространении ударных волн в анизотропных материалах // *Прикладная математика и механика.* – 2009. – Т.73. – №4. – С.635-644.
10. *Лукьянов А.А.* Моделирование ударных волн в композиционных материалах // *Вестн. СамГУ. Естеств. сер.* – 2010. – Т.76. – №2. – С.105-120.
11. *Lukyanov A.A.* An equation of state of a carbon-fibre epoxy composite under shock loading // *Eur. Phys. J. B.* – 2010. – Vol.74. – P.35-45.
12. *Lukyanov A.A.* Comment on “Modelling shock waves in orthotropic elastic materials [J. Appl. Phys. 104, 044904(2008)]” // *J. Appl. Phys.* – 2010. – Vol.108. – 066102.
13. *Lukyanov A.A., Segletes S.B.* Frontiers in the constitutive modelling of anisotropic shock waves // *Applied Mechanics Reviews.* – 2012. – doi:10.1115/1.4006253.
14. *Лукьянов А.А.* О структуре ударных волн в анизотропных углеродно-волоконистых композитах с учетом микро- и макро- разрушения // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2012. – Т.18. – №3. – С.400-413.
15. *Grüneisen Zustand des festen Koerpers* // *Handbuch der Phys.*, Bd.10. – Berlin: Springer, 1926. – P.1-52.
16. *Poirier J.-P.* Introduction to the Physics of the Earth's Interior. – 2000. – 312 p.
17. *Collins J.G., White G.K.* // *Prog. Low Temp. Phys.* – 1964. – N4. – P.450-479.
18. *Brugger K.* Generalized Grüneisen Parameters in the Anisotropic Debye Model // *Physical Review.* – 1965. – Vol.137. N6A. – P.1826-1827.
19. *Barron T.H.K., Munn R.W.* Analysis of the thermal expansion of anisotropic solids: Application to zinc // *Philos. Mag.* – 1967. – Vol.15. – N133. – P.85-103.
20. *Wallace D.C.* Thermodynamics of Crystals. – New York: Wiley, 1972.

21. *Winey J.M., Gupta Y.M.* Nonlinear anisotropic description for shocked single crystals: Thermoelastic response and pure mode wave propagation // *J. Appl. Phys.* – 2004. – Vol.96. – N4. – P.1993-1999.
22. *Winey J.M., Gupta Y.M.* Nonlinear anisotropic description for the thermomechanical response of shocked single crystals: Inelastic deformation // *J. Appl. Phys.* – 2006. – Vol.99. – 023510.
23. *Winey J.M., Gupta Y.M.* Anisotropic material model and wave propagation simulations for shocked pentaerythritol tetranitrate single crystals // *J. Appl. Phys.* – 2010. – Vol.107. – 103505.
24. *Choy C.L., Wong S.P., Young K.* Thermal expansion and Grüneisen parameters for anisotropic solids // *Physical Review. B.* – 1984. – Vol.29. – N4. – P.1741-1747.
25. *Lomakin V.A.* About a nonlinear elasticity and plasticity theory of anisotropic media // *Proc. Acad. Sci. USSR. Dep. Tech. Sci.* – 1960. – Vol.4. – P.60-64.
26. *Brugger K., Fritz T.C.* // *Phys. Rev.* – 1967. – Vol.157. – P.524.
27. *Segletes S.B.* Deviatoric constitutive relation for anisotropic materials / U.S. Army Ballistic Research Laboratory Report BRL-TR-2825. – Aberdeen Proving Ground, MD. 1987.

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАКЕТОВ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ*

Мартыросов М.И., Рабинский Л.Н., Серпичева Е.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

В докладе рассматриваются слоистые элементы конструкций в виде плоских панелей с несущими слоями (обшивкой) из углепластика или стеклопластика (используются препреги от различных производителей) и наполнителем разных типов. Определяются механические характеристики таких композитных пакетов (предел прочности при растяжении (сжатии) пакета по оси укладки и перпендикулярно ей, предел прочности при сдвиге в плоскости пакета, модуль упругости при растяжении (сжатии) пакета по оси укладки и перпендикулярно ей, модуль упругости при сдвиге в плоскости пакета). Заданными считаются свойства несущих слоев: плотность, толщина монослоя (паспортная или определенная экспериментально в зависимости от технологии изготовления), предел прочности при растяжении по основе и по утку, предел прочности при сжатии по основе и по утку, предел прочности при сдвиге в плоскости листа, модуль упругости при растяжении по основе и по утку, модуль упругости при сжатии по основе и по утку, модуль упругости при сдвиге в плоскости листа, главный коэффициент Пуассона (второстепенный коэффициент Пуассона рассчитывается по теореме Максвелла) и свойства наполнителя: плотность, высота наполнителя в пакете, предел прочности при сжатии, предел прочности при сдвиге (в двух взаимноперпендикулярных плоскостях), модуль упругости при сдвиге (в двух взаимноперпендикулярных плоскостях).

Для конструкций с наполнителем при действии внешних нагрузок характерна совместная работа всех составных элементов слоистого пакета. Наполнитель воспринимает поперечное сжатие и поперечный сдвиг и предохраняет тонкие несущие слои от местной и общей потери устойчивости, обеспечивая в то же время их совместную работу и достаточно высокую жесткость. Несущие слои воспринимают продольное растяжение, сжатие, изгиб и поперечный сдвиг в своей плоскости и предохраняют от внешних воздействий наполнитель, который весьма чувствителен, например, к сосредоточенным нагрузкам.

Такое сочетание и взаимодействие составных элементов слоистого пакета с наполнителем обеспечивают значительную жесткость и высокую несущую способность при сравнительно малой массе всей конструкции.

В качестве несущих слоев в зависимости от типа применяемого наполнителя в работе используются материалы (препреги) Hexcel Composites (США):

- ✓ углерента HexPly M21/34%/UD194/IMA-12K с эпоксидным связующим M21и среднемодульным углеволокном HexTow IMA-12K (толщина монослоя 0,18-0,19 мм, плотность 1,51-1,55 г/см³, объемное содержание наполнителя 55-62%);

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (код проекта НШ-2047.2012.8) и гранта РФФИ (код проекта 11-01-00540_a).

- ✓ углелента HexPly 8552/34%/UD134/AS4-12K с эпоксидным связующим 8552 и высокопрочным углеродным волокном HexTow AS4-12K (толщина монослоя 0,121-0,136 мм, плотность 1,56-1,60 г/см³, объемное содержание наполнителя 55-62%);
- ✓ углеткань HexPly M21/40%/285T2/AS4G-6K с эпоксидным связующим M21 и углеродным волокном HexTow AS4C 6K GP (толщина монослоя 0,28-0,32 мм, плотность 1,51-1,55 г/см³, объемное содержание наполнителя 50-60%);
- ✓ стеклоткань HexPly 8552/42%/220/G1270 с эпоксидным связующим 8552 и наполнителем HexForce 00220 1270 Z6040 (толщина монослоя 0,10 мм, плотность 1,81 г/см³, объемное содержание наполнителя 41%);
- ✓ стеклоткань HexPly M21/37%/7581 с эпоксидным связующим M21 и наполнителем HexForce 07581 1270 Z6040 (толщина монослоя 0,25 мм, плотность 1,88 г/см³, объемное содержание наполнителя 47%).

Рассматриваются также несущие слои из углепластиков и стеклопластиков производства Cytes Engineered materials (США) и ОАО "ОНПП "Технология" (Россия).

Используемые в производстве полимерных композиционных материалов эпоксидные смолы являются отличным связующим по следующим причинам:

- они обладают хорошей адгезией к большинству наполнителей;
- имеют высокие прочностные и упругие характеристики;
- усадка изделий при отверждении в этом случае ниже, чем при использовании полиэфирных или фенольных смол;
- обладают низкой летучестью;
- проявляют стойкость к действию многих растворителей и агрессивных сред;
- характеризуются достаточно высокими электроизоляционными свойствами;
- отверждение этих смол обычно происходит в температурном диапазоне 120°-180°С (более высокая температура отверждения приводит к увеличению термостойкости);
- могут длительное время находиться в полуотвержденном состоянии, что позволяет изготавливать предварительно пропитанные и частично отвержденные полуфабрикаты: препреги;
- имеют высокие эксплуатационные показатели.

К недостаткам эпоксидных смол следует отнести:

- относительно невысокую теплостойкость, приводящую к резкой потере прочностных свойств при температурах, близких к температурам стеклования полимера (однако модифицированные эпоксидные связующие имеют повышенную теплостойкость; композиты на их основе остаются работоспособными до $t^{\circ}=180-200^{\circ}\text{C}$);
- ухудшение свойств в присутствии влаги;
- высокую стоимость.

В качестве заполнителя применяются либо соты, либо новый композиционный материал PARABEAM компании Gamma Holding n.v. (Нидерланды).

Сотовый заполнитель – заполнитель с гексагональной ячейкой на основе арамидноволокнистой бумаги, арамидной ткани или стеклоткани и фенольного связующего. Из используемых в настоящее время форм сотовых заполнителей наибольший интерес представляют шестигранные соты правильной формы, которые обеспечивают высокие характеристики прочности и устойчивости конструкции в целом и сравнительно просты в изготовлении. Стенки сот расположены

перпендикулярно несущим слоям, поэтому наполнитель не воспринимает нагрузку от обшивки и вследствие этого не выпучивается при возрастании нагрузки. Рассматриваются стеклосотопласты ССП-1-2,5 и ССП-1-3,5 (с размером грани ячейки 2,5 мм и 3,5 мм и плотностью $90 \div 110 \text{ кг/м}^3$ и $70 \div 110 \text{ кг/м}^3$ соответственно) и полимеросотопласты ПСП-1К-2,5-48, ПСП-1К-2,5-64, ПСП-1К-2,5-96 (с размером грани ячейки 2,5 мм, толщиной стенки 0,05 мм и плотностью 48, 64 и 96 кг/м^3 соответственно) отечественного производства.

PARABEAM 3D Glass Fabric представляет собой стеклоткань, состоящую из двух сотканых из E-стекловолокна пластин, связанных между собой вертикальным ворсом (также из стекловолокна) в сэндвич-структуру. Стеклоткань PARABEAM впитывает смолу (полиэфирную, винилэфирную, эпоксидную или фенольную), стекловолокно в ворсе укрепляется, стеклоткань увеличивается до заданной высоты. Оптимальное соотношение ткань-смола лежит в пределах от 1:0,9 до 1:1,5 (например, для полиэфирной смолы 1:1,1; для эпоксидной 1:0,95).

PARABEAM имеет следующие преимущества:

- совместимость со всеми термопластичными смолами;
- вертикальный ворс вплетен в пластины (единая 3D сэндвич-структура 100% E-стекла);
- высокие прочностные и упругие характеристики;
- превосходное соединение с чужеродными материалами;
- стойкость к поглощению влаги;
- высокие изоляционные свойства;
- легкий ремонт возможных повреждений;
- несложная технология производства (изготавливается по технологии плетения вельвета на станке);
- повышенный срок службы.

В работе проводится экспериментальное определение основных механических характеристик этого материала на испытательной машине INSTRON (Великобритания) при комнатной температуре и влажности - в состоянии поставки образцов (режим RTD: Room Temperature Dry). Испытания в других режимах (CTD: Cold Temperature Dry, ETD: Evaluated Temperature Dry и ETW: Evaluated Temperature Wet) не проводились. Влияние температуры и влажности на характеристики прочности и деформативности пакетов слоистых композитов в работе не рассматривалось.

Теоретическая часть работы посвящается численному анализу прочностных, жесткостных и весовых характеристик рассматриваемых слоистых, симметричных по толщине пакета, композитов. Рассматриваются различные по количеству несущих слоев пакеты (8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 слоев), а также различные форматы смешанной укладки этих слоев, например:

- 1) $+45^\circ/0^\circ/90^\circ/-45^\circ/\text{Заполнитель}/-45^\circ/90^\circ/0^\circ/+45^\circ$;
- 2) $0^\circ/+45^\circ/-45^\circ/90^\circ/\text{Заполнитель}/90^\circ/-45^\circ/+45^\circ/0^\circ$;
- 3) $+45^\circ/90^\circ/90^\circ/-45^\circ/\text{Заполнитель}/-45^\circ/90^\circ/90^\circ/+45^\circ$;
- 4) $+45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ/\text{Заполнитель}/-45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/+45^\circ$;
- 5) $+45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/+45^\circ/-45^\circ/\text{Заполнитель}/-45^\circ/+45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ/+45^\circ$;
- 6) $+45^\circ/90^\circ/90^\circ/+45^\circ/90^\circ/90^\circ/-45^\circ/\text{Заполнитель}/-45^\circ/90^\circ/90^\circ/+45^\circ/90^\circ/90^\circ/+45^\circ$;
- 7) $90^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ/\text{Заполнитель}/90^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/90^\circ$;
- 8) $+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ/+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/\text{Заполнитель}/-45^\circ/0^\circ/+45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ/+45^\circ$;
- 9) $90^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ/\text{Заполнитель}/90^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/90^\circ$;
- 10) $-45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ/\text{Заполнитель}/-45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/+45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ$

и другие.

Укладка слоев производится во всех основных направлениях: 0° , $+45^\circ$, -45° , 90° . Необходимо обеспечить не менее 10% слоев каждого из четырех направлений укладки (правило 10%). Это позволяет минимизировать напряжения в связующем и создать наиболее благоприятные условия эксплуатации композитных изделий. Ось 0° совпадает с направлением максимальной нагрузки. Положительными считаются углы, отсчитываемые по ходу часовой стрелки от направления 0° . Слои с 0° необходимо располагать внутри композитного пакета, а не выносить их на контакт с наполнителем. На контакт с наполнителем можно выносить слои с ориентацией 90° или $\pm 45^\circ$. Этой рекомендации следует придерживаться, прежде всего, для сотовых наполнителей. Можно отметить, что путем варьирования процентного соотношения слоев в пакете можно влиять на величину коэффициента Пуассона. Расчеты выполняются с учетом влияния на механические характеристики пакета коэффициента укладки (методика ФГУП „ЦАГИ”). Проводится сравнительный и параметрический анализ.

Рассматриваются следующие критерии разрушения композитов: maximum stress, maximum strain, Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hankinson, Cowin, Hashin-Rotem, Puck, Grant-Sanders, Tsai-Hill, Puppo-Evensen, Yamada-Sun. Значительное количество критериев разрушения композитов по сравнению с критериями разрушения металлов объясняется анизотропией композитов, сложностью структуры и недостаточной изученностью механики их разрушения. Существующие критерии являются феноменологическими и описывают прочность в слое на основе экспериментальных данных по результатам испытаний на растяжение, сжатие и сдвиг. Критерии разрушения определяют критическую комбинацию действующих в монослое напряжений (деформаций), приводящую к его разрушению. Анализ прочности композитного пакета в общем случае сводится к определению напряженно-деформированного состояния его слоев и вычислению их коэффициентов запаса по используемым критериям. Минимальный из них определяет запас прочности всего композитного пакета.

Математически критерии разрушения, как правило, описываются функциями, значение которых сравнивается с единицей.

Следует отметить, что у ряда критериев разрушения композитных пакетов существенным недостатком является невозможность определения причины разрушения монослоя: произошло разрушение матрицы или волокна. Разрушение матрицы отдельно взятого монослоя не всегда ведет к исчерпанию его несущей способности и композитный пакет в целом может и далее воспринимать действующую нагрузку (Hill, Hoffman и др.). В настоящее время все большее распространение нашли критерии, которые позволяют анализировать запасы прочности матрицы и волокна отдельно (Hashin-Rotem, Puck и др.).

Конечно-элементная модель (в линейной постановке) создана в программном комплексе NX 7.5 с использованием приложения Advanced Simulation. Применяются конечные элементы типа Laminate и Shell. Основная идея метода конечных элементов (МКЭ) состоит в том, что любую непрерывную величину (перемещение, давление и др.), подчиняющуюся граничным условиям на границе области и соответствующую какому-либо дифференциальному уравнению во внутренних точках, можно аппроксимировать дискретной моделью. При этом в расчетной области фиксируется конечное число точек, называемых узловыми точками или узлами. Значение непрерывной величины в каждом узле считается переменной и определяется в ходе решения задачи. Узлы определяют некоторый набор

подобластей достаточно простой формы - элементов. Эти элементы имеют общие узлы и аппроксимируют с некоторой погрешностью форму области. Искомая непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом. Для каждого элемента определяется свой полином, причем полиномы подбираются так, чтобы сохранялась непрерывность величины вдоль границ элемента. Подстановка аппроксимаций в определяющие дифференциальные уравнения дает систему уравнений относительно узловых значений искомой величины. Решение этой системы позволяет определить приближенное решение искомой задачи.

В общем случае МКЭ является разновидностью методов аппроксимации. Особенностью МКЭ является выбор базисных функций, которые не задаются одним выражением для всей рассматриваемой области, а определяются только для отдельных элементов. В результате аппроксимация искомой функции строится кусочным образом и отдельно на каждом элементе. В МКЭ в качестве базисных функций используются полиномы (обычно линейные или квадратичные).

Рассматривается шарнирное закрепление по всему контуру изучаемых слоистых панелей. В качестве нагрузки принимается распределенное аэродинамическое давление по поверхности (закон изменения давления задается).

В докладе приводятся многочисленные примеры численных расчетов и экспериментальных исследований, проведенных авторами по изучаемой теме. Дается сравнение полученных результатов с данными других российских и зарубежных специалистов, работающих в области механики и технологии композиционных материалов.

УДК 678.01:678.017:678.019.32

ВЛИЯНИЕ ФАКТОРОВ ХОЛОДНОГО КЛИМАТА НА ПОКАЗАТЕЛИ ИЗГИБНОЙ ПРОЧНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ СТЕКЛО- И БАЗАЛЬТОПЛАСТИКОВ

Федоров Ю.Ю., Бабенко Ф.И., Лапий Г.П.

ФГБУН Институт проблем нефти и газа Сибирского отделения Российской академии наук, г. Якутск, Россия

РЕЗЮМЕ

Экспериментально исследовано влияние низких температур и пятилетней экспозиции в холодном климате (условия неотапливаемого склада) на механические свойства однонаправленных стекло-, базальтопластиковых стержней строительного назначения. Показатели свойств определялись методом продольного изгиба стержней в условиях шарнирного закрепления образцов при температуре 20 и минус 60°C. Результаты исследования показали существенное, до 20%, увеличение деформационно-прочностных показателей свойств при низких температурах и высокую климатическую стойкость изделий.

Ключевые слова: стеклопластик; базальтопластик; деформация; прочность; модуль упругости; климатическая стойкость

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе исследовали механические свойства промышленных образцов стеклопластиковых стержней двух типов (на основе полиэфирного и эпоксидного связующего) и базальтопластиковых стержней на основе эпоксидного связующего диаметром 5,5 и 5,0 мм производства ООО "Бийский завод стеклопластиков". Армирующие волокна стеклопластика – ровинги из алюмоборосиликатного стекла (стекло Е) с диаметром элементарной нити 17 мкм, базальтопластика – ровинги с диаметром нити 13 мкм. Стержни изготавливают методом непрерывной протяжки через формующую фильеру однонаправленных волокнистых материалов, предварительно пропитанных полимерным связующим, с последующим отверждением в полимеризаторе [1]. Экспонирование образцов в ненапряженном состоянии в неотапливаемом складе в климатических условиях г.Якутска проводилось в течение 5 лет, испытания - с периодичностью в 1 год.

Сложность испытаний армированных композиционных материалов на растяжение и изгиб состоит в том, что контактные нагрузки от механизмов нагружения влияют на напряженное состояние в зоне разрушения образца. Был выбран метод продольного изгиба, который имеет преимущества по сравнению с трех- и четырехточечными схемами изгиба, поскольку расчетная зона разрушения находится далеко от точек приложения нагрузки к образцу. Еще одним преимуществом этого метода является то, что для продольного изгиба требуется нагрузка примерно в 50 раз меньшая, чем для растяжения/сжатия образца такого же диаметра.

Показатели свойств определялись методом продольного изгиба стержней в условиях шарнирного закрепления образцов при температуре 20 и минус 60°C, скорости испытаний 5 мм/мин, на испытательной машине UTS-20К с

термокриокамерой. Образцы нагружали до разрушения с одновременной записью в компьютер значений текущей нагрузки, времени и сближения концов стержня. Обоснование и апробация метода проведены в работах [1-3]. Теория метода предполагает, что стержни обладают линейной упругостью, что в нашем случае подтверждается с точностью ~3%.

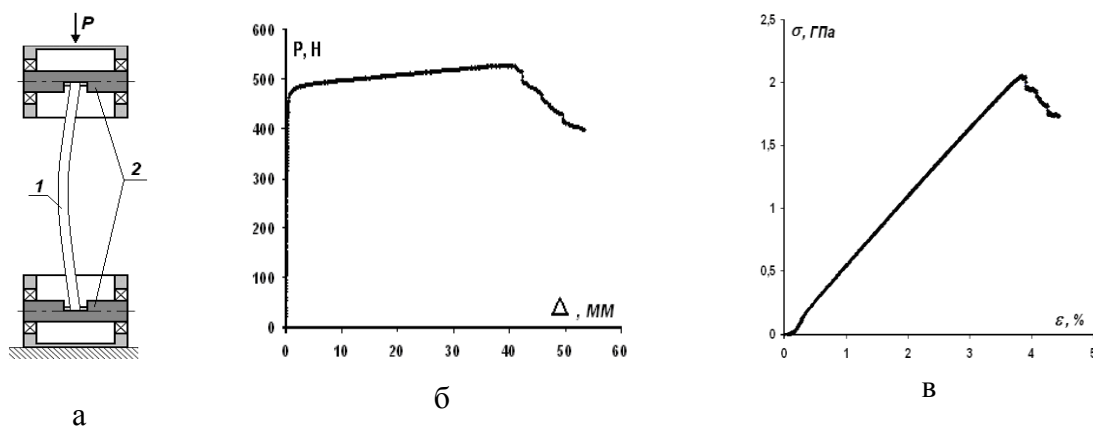


Рис.1. Схема установки (а): 1- образец, 2- шарнирные опоры, типичная диаграмма нагружения (б) и типичная диаграмма деформирования (в) стержней при нагружении методом продольного изгиба.

2. ВЛИЯНИЕ НИЗКИХ КЛИМАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУР

Основной особенностью влияния низких температур является существенное увеличение (до 20%) деформационно-прочностных показателей образцов (рис.2), причем это относится как к прочностным, так и деформационным характеристикам изделий.

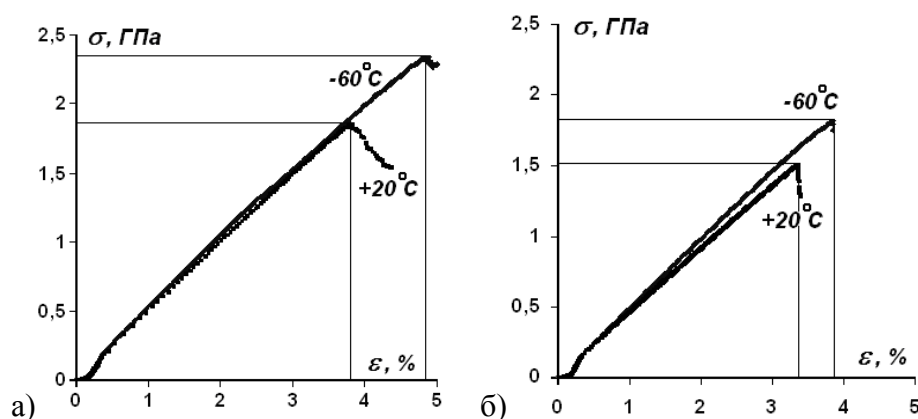


Рис.2. Характерные диаграммы деформирования стержней из стекло- (а) и базальтопластика (б) на эпоксидном связующем при температурах испытаний 20°C и -60°C.

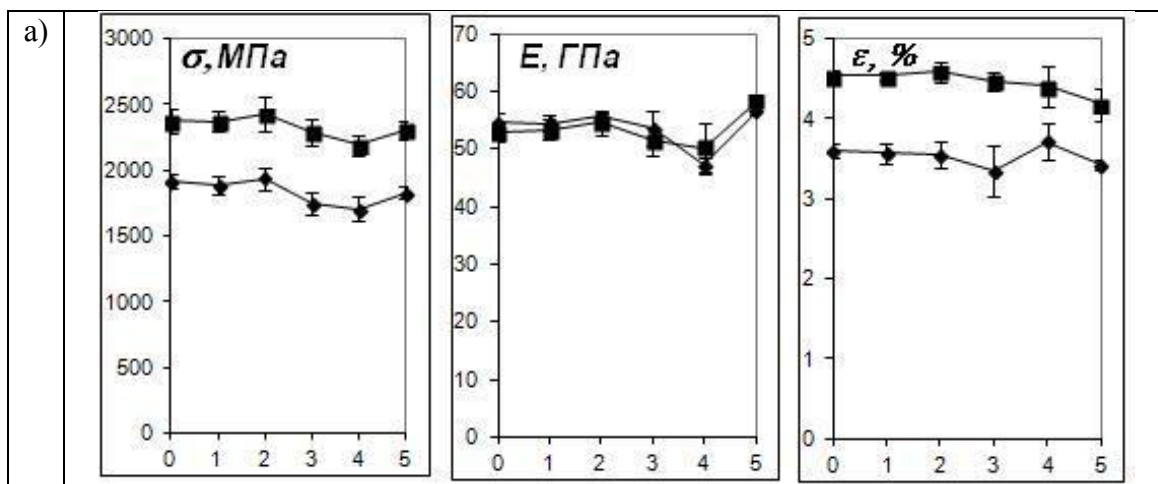
Выявленная температурная зависимость изменения деформационно-прочностных показателей весьма существенна для условий холодного климата и, по-видимому, обусловлена спецификой температурной зависимости механических свойств армирующих волокон [4]. Кроме того, в [5] приводятся ссылки на работы, в которых экспериментально установлено увеличение деформации до разрушения, как

у пластичных, так и у хрупких материалов при наличии в них сложного напряженного состояния, в частности, при их сжатии в направлении, поперечном основной разрушающей нагрузке. Подобные эффекты наблюдаются и в композиционных материалах, например, разрушение борных волокон в гибридных композитах (волокна бора и стали в алюминиевой матрице) в ряде случаев наступает при больших деформациях, чем в бороалюминии [5]. Этот эффект пока не имеет удовлетворительного объяснения. На основании предварительных расчетов его связывают с возрастанием напряжений обжатия борных волокон, возникающих вследствие увеличения эффективной жесткости алюминиевой матрицы в присутствии стальных волокон. В нашем случае действие радиальных напряжений обжатия волокна со стороны матрицы вызваны, как разницей коэффициентов Пуассона компонентов, так и остаточными технологическими напряжениями усадки, и, наконец, термическими напряжениями, возникающими в условиях испытания образцов при конкретной температуре опыта (-60°C) с учетом существенного (практически на порядок) различия в коэффициентах термического расширения волокон и матрицы.

3. ВЛИЯНИЕ СТАРЕНИЯ

Экспонирование стеклопластиковых и базальтопластиковых стержней согласно ГОСТ 9.708-83 [6] проводилось в ненапряженном состоянии в неотапливаемом складе в климатических условиях г.Якутска в течение пяти лет. Съемы и испытания образцов проводились с периодичностью в 1 год. Результаты испытаний на продольный изгиб при температурах 20 и минус 60°C образцов СПА представлены на рис.3. Каждая точка графика – среднее значение по результатам 5-7 испытаний. Границы доверительного интервала рассчитаны при вероятности 0,95.

Существенность изменения показателей прочности, деформативности и жесткости определяли после каждого съема путем проверки значимости расхождений между средними значениями текущего и исходного показателей свойств [7]. Проведенная статистическая обработка результатов (при уровне значимости 0,05) показала, что для стеклопластиковых стержней после третьего года экспозиции расхождения между средними значениями неслучайны и обусловлены старением материала, а изменения показателя – статистически значимы, в то время как для базальтопластиковых значимые изменения показателей происходят лишь после пятого года экспозиции.



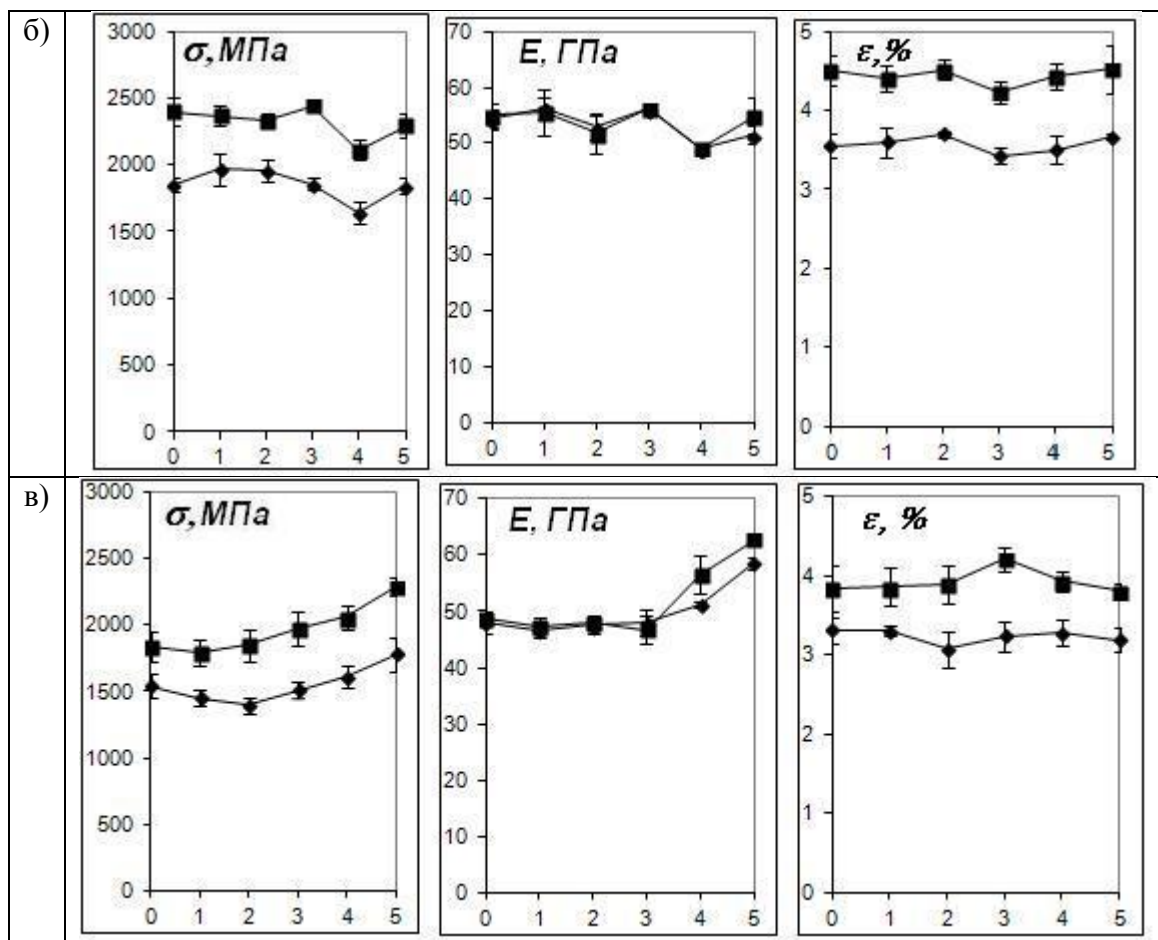


Рис.3. Зависимости разрушающих напряжений σ , модулей упругости E и предельных деформаций ϵ стержней от времени экспонирования и температуры испытания (\blacklozenge +20 и \blacksquare -60°C): а) стеклопластиковых на основе полиэфирного связующего; б) стеклопластиковых на основе эпоксидного связующего; в) базальтопластиковых на основе эпоксидного связующего.

4. ВЫВОДЫ

Установлено существенное увеличение (до 20%) деформационно-прочностных показателей стержней при низких климатических температурах. Выявленная температурная зависимость изменения деформационно-прочностных показателей весьма существенна для условий холодного климата и, по-видимому, обусловлена спецификой температурной зависимости механических свойств армирующих волокон и действием радиальных напряжений обжатия волокна со стороны матрицы, возникающих в условиях испытания (-60°C).

Результаты 5-летних испытаний стержней на старение показали высокую климатическую стойкость изделий. Проведенная статистическая обработка результатов (при уровне значимости 0,05) показала, что статистически значимые изменения показателей происходят после трех лет экспонирования для стеклопластиков и после пяти лет – для базальтопластиков. Отметим, что базальтопластиковый композит, в отличие от стеклопластика, проявляет тенденцию к увеличению показателей прочности в процессе воздействия факторов холодного климата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Испытания упругих стержней методом продольного изгиба / Под ред. В.Ф.Савина, А.Н.Блазнова. – Барнаул: Изд-во Алтайского госуниверситета, 2009. – 222 с.
2. Арнаут *А.К.*, Тарнопольский *Ю.М.* Продольный изгиб как метод определения изгибной прочности композитных материалов // Механика композитных материалов. – 2004. – Т.40. – №1. – С.25-42.
3. Луговой *А.Н.* Исследование механических характеристик однонаправленно армированного стеклопластика методом продольного изгиба: Автореф. дис ... канд. техн. наук: 05.02.01. – Барнаул, 2005. – 24 с.
4. Трофимов *Н.Н.*, Канович *М.З.*, Карташов *Э.М.* и др. Физика композиционных материалов: в 2-х т. – Т.2. – М.: Мир, 2005. – 344 с.
5. Овчинский *А.С.* Процессы разрушения композиционных материалов: имитация микро- и макромеханизмов на ЭВМ. – М.: Наука, 1988. – 278 с.
6. ГОСТ 9.708-83 «Пластмассы. Методы испытаний на старение при воздействии естественных и искусственных климатических факторов».
7. Венцель *Е.С.*, Овчаров *Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480 с.

ВИБРОДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЯ СТЕРЖНЯ*

Хакимов А.Г.

*ФГБУН Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ Российской академии наук,
г. Уфа, Россия*

РЕЗЮМЕ

Исследуются собственные продольные, крутильные и изгибные колебания стержня с одним повреждением. Получено, что при расположении повреждения в узле колебаний собственные частоты продольных колебаний не зависят от его длины. По трем собственным частотам продольных колебаний определяются координата, длина и площадь поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По двум собственным частотам крутильных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По низшей частоте изгибных колебаний по известной координате, длине, площади поперечного сечения в зоне повреждения определяется осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне.

Ключевые слова: стержень; собственные частоты; продольные колебания; крутильные колебания; изгибные колебания; повреждение; длина поврежденного участка; координата

1. ВВЕДЕНИЕ

В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот продольных колебаний [1-8], крутильных колебаний [9-11] или изменение частоты собственных изгибных колебаний [12-13]. В [1] и ряде других работ для стержня, совершающего продольные колебания, трещина моделируется как продольная пружина с жесткостью и для балки, совершающей изгибные колебания, повреждение моделируется вращательной пружиной с жесткостью. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. Решению обратных задач о продольных, крутильных и изгибных установившихся волнах в стержнях конечной длины посвящены работы [2,4-13]. Метод конечных элементов используется для анализа изгибных колебаний не вращающегося ротора с открытыми трещинами в [14]. В [15] представлен интегральный признак идентификации дефектов в элементах стержневых конструкций, позволяющий определять не только их наличие и местоположение, но и степень поврежденности.

Здесь исследуются собственные продольные, крутильные и изгибные колебания стержня с одним повреждением. Решена обратная задача по определению параметров повреждения стержня по собственным частотам продольных, крутильных и изгибных колебаний.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 11-01-97003-р_поволжье_а, 11-01-00293_а).

2. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Продольные колебания стержня с надрезом и с сосредоточенными массами на концах рассмотрены в [7], где получены частотные уравнения в виде определителя. Здесь рассматривается напряженно-деформированное состояние прямого стержня, закрепленного верхним и нижним концами на упругом подвесе жесткостью k_{1x} и k_{2x} и растянутой под действием собственного веса и силы тяжести грузов массами M_1 , M_2 (рис.1). Предполагается, что в стержне имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Это повреждение не приводит к изгибу стержня и моделирует его повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Рассматривается только напряженно-деформированное состояние в пределах упругости для тонкого стержня. Поскольку трещина появляется в результате развития незначительного зародыша, причем необязательно в наиболее напряженном сечении, то предполагается, что повреждение может быть в любом месте по длине стержня. Задача состоит в определении координаты повреждения и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

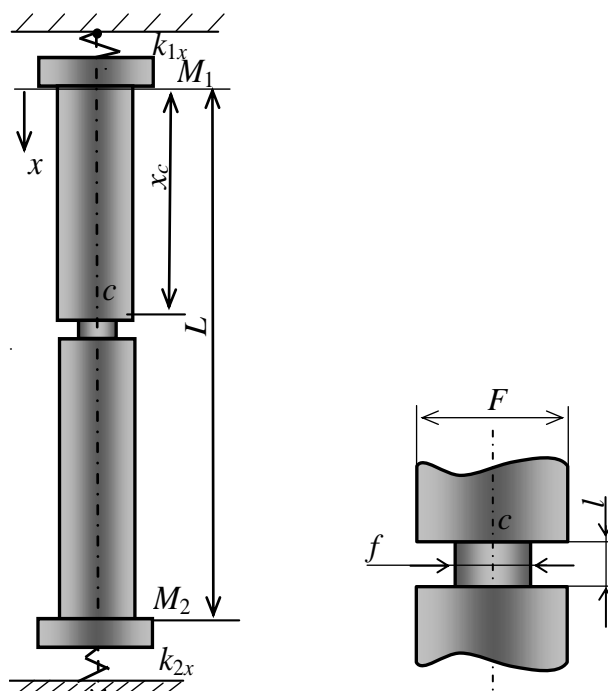


Рис.1. Расчетная схема.

Обозначим через L , F – длину и площадь поперечного сечения стержня, E , ρ , μ – модуль упругости, плотность и коэффициент внутреннего трения, через l , f – длину и площадь поперечного сечения повреждения, x_c – его координату, u , T – перемещение и сила натяжения стержня. Между напряжением σ и деформацией ε принимается следующая зависимость

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем

$$E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right). \quad (1)$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$T = k_{1x}u + M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x=0), \quad T = -k_{2x}u - M_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x=L). \quad (2)$$

В пределах повреждения с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [16]. Однако здесь для простоты принимаем одноосное растяжение – сжатие. Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x=x_c$ и $x=x_c+l$ (условия равенства усилий и перемещений)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = m_f \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right), \quad u_1 = u_2, \quad (x = x_c), \quad (3)$$

$$m_f \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial t}, \quad u_2 = u_3, \quad (x = x_c + l), \quad m_f = \frac{f}{F}. \quad (4)$$

Условия вида (3)-(4) приводятся также в статье [17], где предложена универсальная процедура обработки данных разрезного стержня Гопкинсона [18]. Таким образом, в приведенной простейшей модели повреждения фигурируют его координата x_c , длина повреждения l и параметр m_f . В прямой задаче координата повреждения x_c , его длина l и параметр m_f известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

Частное решение задачи (1) при $\mu=0$ имеет вид

$$u = (A_i \cos \alpha_i x + B_i \sin \alpha_i x) \sin \omega_i t \quad (\alpha_i = \omega_i / a_i, a^2 = E_i / \rho_i),$$

а шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_{cl}$, $x_{cl} \leq x \leq L$ ($x_{cl}=x_c+l$) определяются из шести граничных условий (2)-(4). Отметим, что волновое число α для продольных колебаний в зоне повреждения не изменяется, если модули упругости и плотности материала стержня одинаковые на всех трех участках, соответственно, $\alpha_i = \alpha$ ($i=1 \div 3$). Для того чтобы A_i , B_i ($i=1 \div 3$) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (5)$$

ненулевые элементы которого записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= k_{1x} - M_1 \omega_l^2, a_{12} = -EF\alpha, \\ a_{25} &= (-k_{2x} + M_2 \omega_l^2) \cos(\alpha L) + EF\alpha \sin(\alpha L), \\ a_{26} &= -EF\alpha \cos(\alpha L) + (-k_{2x} + M_2 \omega_l^2) \sin(\alpha L), \\ a_{31} &= \sin(\alpha x_c), a_{32} = -\cos(\alpha x_c), a_{33} = -m_f \sin(\alpha x_c), a_{34} = m_f \cos(\alpha x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha x_c), a_{42} = \sin(\alpha x_c), a_{43} = -\cos(\alpha x_c), a_{44} = -\sin(\alpha x_c), \\ a_{53} &= m_f \sin(\alpha x_{cl}), a_{54} = -m_f \cos(\alpha x_{cl}), a_{55} = -\sin(\alpha x_{cl}), a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}), \\ a_{63} &= \cos(\alpha x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}), a_{65} = -\cos(\alpha x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}). \end{aligned}$$

Условие (5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости. Если частное решение представить в амплитудной форме $u_i = C_i \sin(\alpha_i x + \delta_i) \sin \omega_i t$, то частотное уравнение после исключения шести констант C_i, δ_i ($i=1 \div 3$) записывается

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left\{ \alpha_2 x_{cl} + \operatorname{arctg} \left[m_f \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_1 x_c + \operatorname{arctg} \frac{EF_1 \alpha_1}{k_{1x} - M_1 \omega_l^2} \right) \right] - \alpha_2 x_c \right\} = \\ & = m_f \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_3 x_{cl} + \operatorname{arctg} \frac{EF_3 \alpha_3}{-k_{2x} + M_2 \omega_l^2} - \alpha_3 L \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Когда коэффициенты $k_{1x}, k_{2x} \rightarrow \infty$, тогда частотное уравнение упрощается.

Для стержня без повреждения и без сосредоточенных масс из частотного уравнения следует, что $\cos \alpha L = 0$, а собственные частоты равны [1] $\alpha L = (2k-1)\pi/2$ ($k=1,2,\dots$) или $\omega_{1k} = (2k-1)\pi a/2L$.

Для определения x_c, l и m_f необходимо провести анализ собственных частот продольных колебаний стержня с повреждением. Такой анализ проведен в работах [1-8].

2.1. Прямая задача.

Решение уравнения (6) проведено численно для следующих параметров системы: $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho=7800$ кг/м³, $L=200$ мм, диаметр образца $D=10$ мм, $x_c=15$ мм, $l=1$ мм, $k_{1x} \rightarrow \infty$, $k_{2x}=0$, $M_1=0$ кг, $M_2=0$ кг. Скорость звука $a=5063.6$ м/с. При этом первая, вторая и третья собственные частоты стержня без повреждения $\omega_{11}=39770.18194$ рад/с, $\omega_{12}=119310.5458$ рад/с, $\omega_{13}=198850.9097$ рад/с. Для стержня с повреждением при $x_c=15$ мм, $m_f=0.707$, $l=1$ мм решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний стержня $\omega_{11}=39690.05596$ рад/с, $\omega_{12}=119.1183972$ рад/с, $\omega_{13}=198671.0768$ рад/с.

На рис.2 приведены зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ от координаты повреждения x_c для параметра $m_f=0.707$ и различных l (кривая 1–0.001, 2–0.002, 3–0.003 м). Эти зависимости имеют периодический характер.

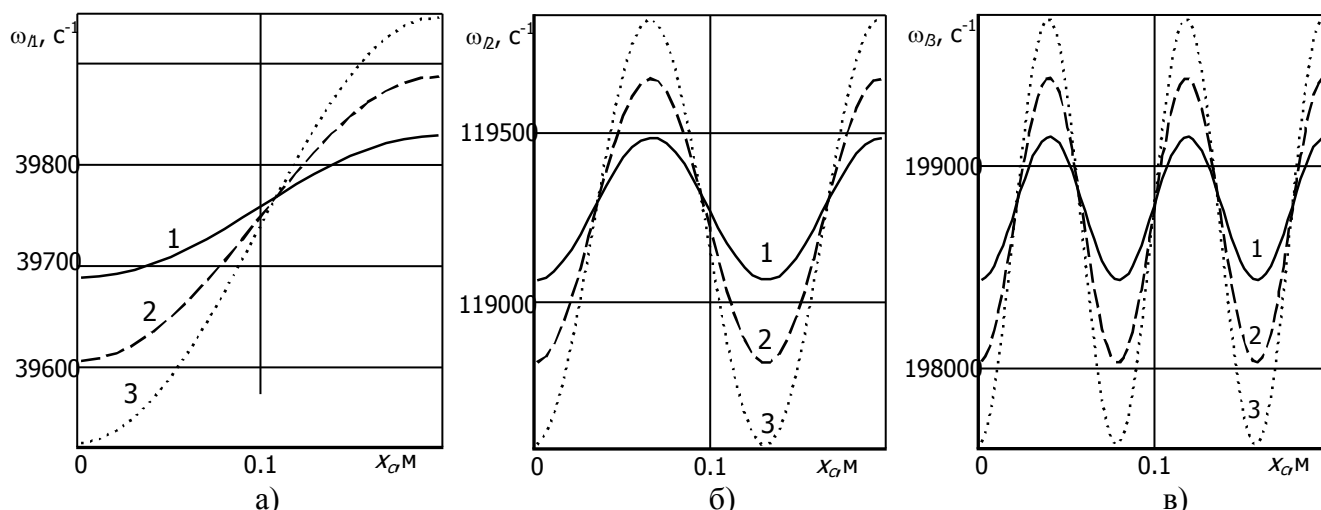


Рис.2. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ от координаты повреждения x_c для параметра $m_f=0.707$ и различных l (кривая 1–0.001, 2–0.002, 3–0.003 м).

На рис.3 приведены зависимости круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ от длины поврежденного участка l для параметра $m_f=0.707$ и различных координат x_c (кривая 1–0.01, 2–0.02, 3–0.03 м). Видно, что с ростом

длины поврежденного участка происходит уменьшение первых двух низших собственных частот продольных колебаний стержня.

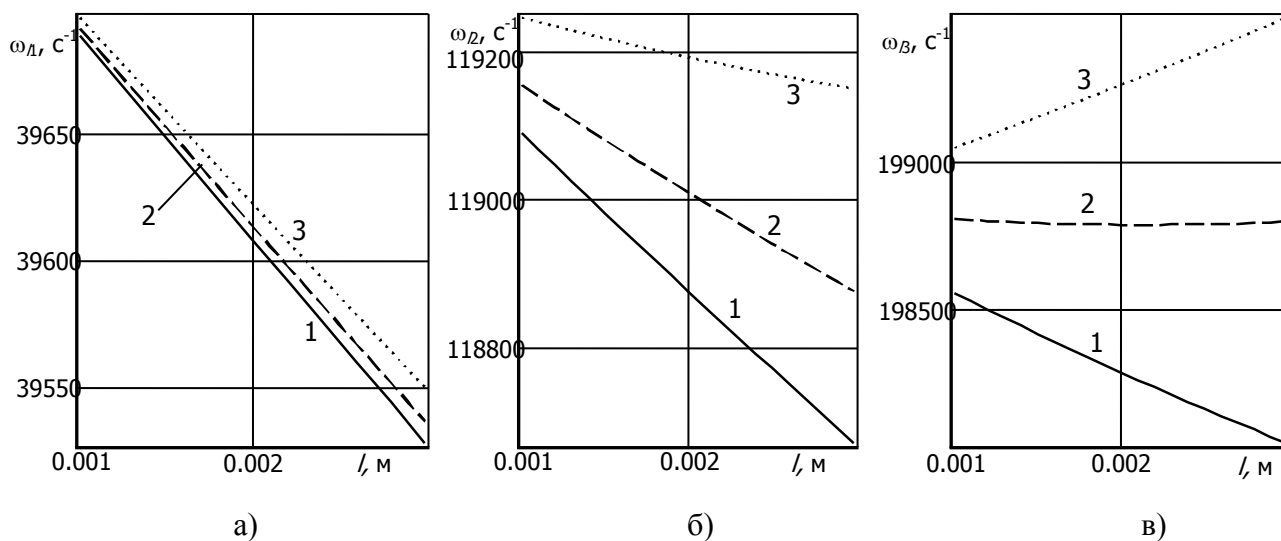


Рис.3. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня ω_{l1} , ω_{l2} , ω_{l3} от длины поврежденного участка l для параметра $m_f=0.707$ и различных координат x_c (кривая 1–0.01, 2–0.02, 3–0.03 м).

На рис.4 приведены зависимости круговых частот продольных колебаний стержня ω_{l1} , ω_{l2} , ω_{l3} от параметра m_f для длины поврежденного участка $l=0.01$ м и различных координат x_c (кривая 1–0.01, 2–0.02, 3–0.03 м). Видно, что с ростом относительной площади поврежденного участка (параметра m_f) происходит увеличение первых двух низших собственных частот продольных колебаний стержня.

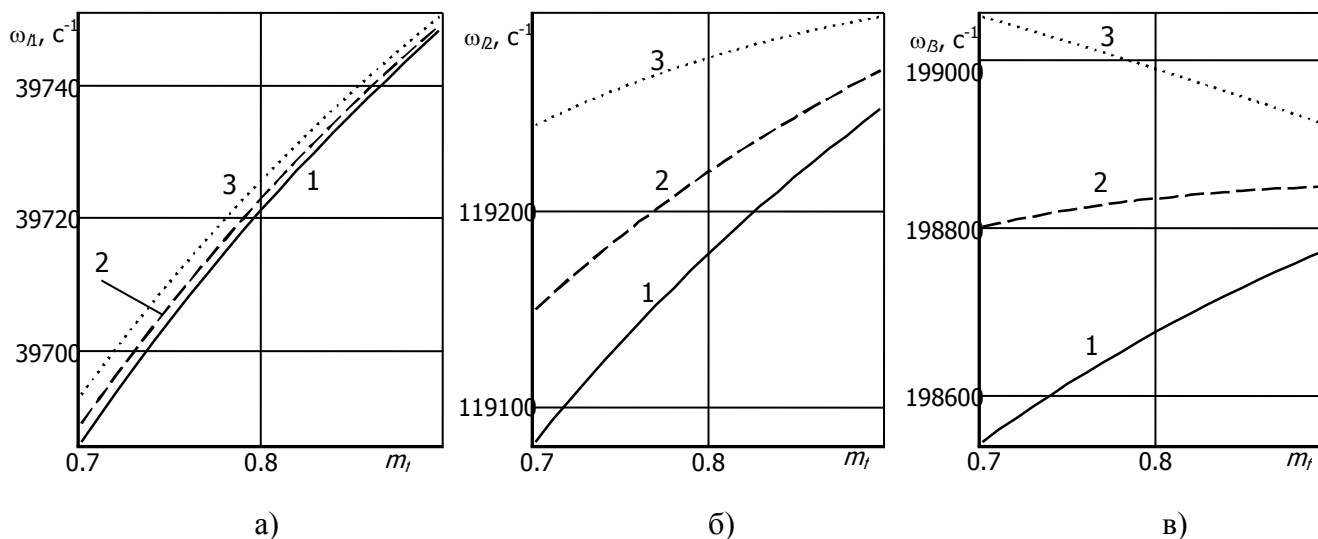


Рис.4. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня ω_{l1} , ω_{l2} , ω_{l3} от параметра m_f для длины поврежденного участка $l=0.01$ м и различных координат x_c (кривая 1–0.01, 2–0.02, 3–0.03 м).

2.2. Обратная задача.

Если частотное уравнение записать для трех частот свободных продольных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата

повреждения x_c , его длина l и параметр m_f . Например, для круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{11}=39690$ рад/с, $\omega_{12}=119118$ рад/с, $\omega_{13}=198671$ рад/с. решение обратной задачи дает, что стержень имеет повреждение $x_c=14.847$ мм, $m_f=0.722$, $l=1.075$ мм.

На рис.5 приведены зависимости координаты повреждения x_c (фрагмент а), его длины l (фрагмент б) и параметра m_f (фрагмент в) от круговых частот продольных колебаний стержня ω_{11} , для $\omega_{12}=118.350$ рад/с (кривая 1), $\omega_{12}=118.360$ рад/с (кривая 2), $\omega_{12}=118.370$ рад/с (кривая 3), $\omega_{13}=202970$ рад/с.

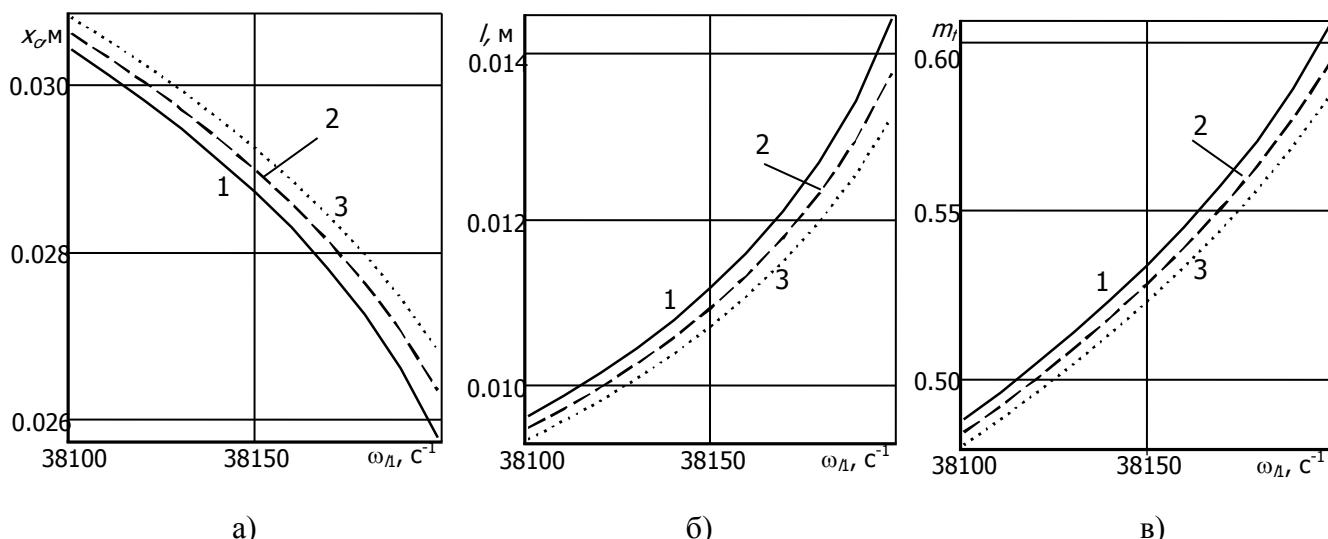


Рис.5. Зависимости координаты повреждения x_c (фрагмент а), его длины l (фрагмент б) и параметра m_f (фрагмент в) от круговых частот продольных колебаний стержня ω_{11} , для $\omega_{12}=118.350$ рад/с (кривая 1), $\omega_{12}=118.360$ рад/с (кривая 2), $\omega_{12}=118.370$ рад/с (кривая 3), $\omega_{13}=202970$ рад/с.

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных продольных колебаний можно определить координату повреждения x_c , его длину l и параметр m_f .

3. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Здесь рассматриваются собственные крутильные колебания стержня с повреждением. Стержень закреплен верхним и нижним концами на упругих опорах с жесткостью на кручение c_{1x} и c_{2x} и соединен по концам с дисками с моментами инерции J_1 и J_2 (рис.6). Задача состоит в определении начальной координаты повреждения, его длины и его параметра.

Обозначим через L, J_p, J_k длину, полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения неповрежденной части стержня [19], G, ρ – модуль сдвига и плотность, через l – длину повреждения, j_p, j_k – полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения, x_c – его начальную координату, φ, M – угол поворота и крутящий момент в сечении стержня. Между крутящим моментом M и относительным углом закручивания θ принимается следующая зависимость

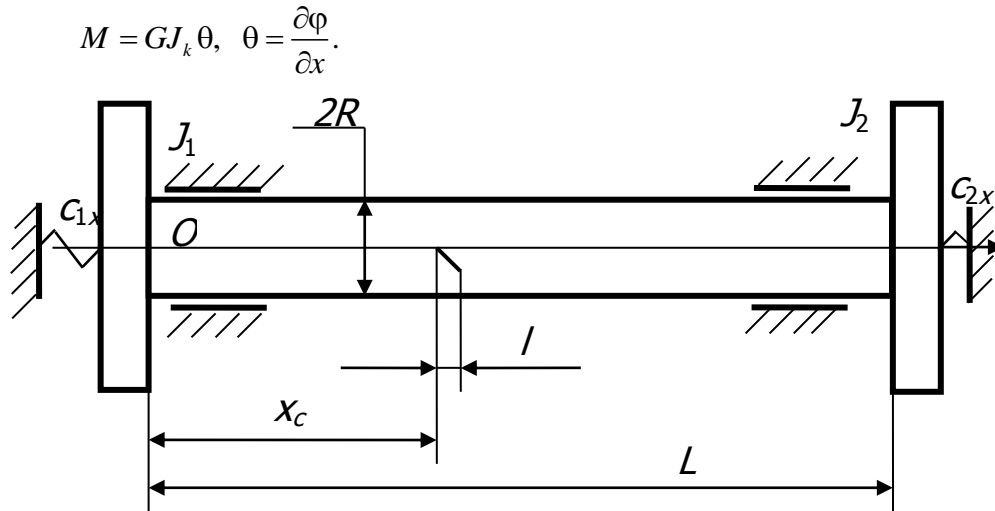


Рис.6. Расчетная схема.

В соответствии со сказанным имеем

$$GJ_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_k \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$M = c_{1x} \varphi + J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (x=0), \quad M = -c_{2x} \varphi - J_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (x=L). \quad (8)$$

В пределах повреждения с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние, но принимаем гипотезу плоских сечений. Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства крутящих моментов и углов поворота), причем, для стержня с круглым сечением [19]

$$J_k = J_p = \frac{\pi R^4}{2}, \quad j_p \leq J_p, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = m_k^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad (x = x_c),$$

$$m_k^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad (x = x_c + l), \quad m_k^2 = \frac{j_k}{J_k}. \quad (10)$$

Частное решение задачи (7) имеет вид

$$\varphi = (A_i \cos \alpha_i x + B_i \sin \alpha_i x) \sin \omega_i t \quad (\alpha_i = \omega_i / a_i),$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \omega_i / a_1 = \omega_i \sqrt{\rho J_p / GJ_k}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 m_p / m_k, \quad m_p = \sqrt{j_p / J_p}.$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_{cl}$ и $x_{cl} \leq x \leq L$, ($x_{cl} = x_c + l$), определяются из шести граничных условий (8)-(10). Для того чтобы A_i, B_i ($i = 1 \div 3$) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель вида (5) равнялся нулю, где его ненулевые элементы записываются в виде

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= c_{1x} - J_1 \omega_t^2, a_{12} = -GJ_k \alpha_1, a_{25} = (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \cos(\alpha_3 L) + GJ_k \alpha_3 \sin(\alpha_3 L), \\
 a_{26} &= (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \sin(\alpha_3 L) - GJ_k \alpha \cos(\alpha_3 L), \\
 a_{31} &= \sin(\alpha_1 x_c), a_{32} = -\cos(\alpha_1 x_c), a_{33} = -m_k m_p \sin(\alpha_2 x_c), a_{34} = m_k m_p \cos(\alpha_2 x_c), \\
 a_{41} &= \cos(\alpha_1 x_c), a_{42} = \sin(\alpha_1 x_c), a_{43} = -\cos(\alpha_2 x_c), a_{44} = -\sin(\alpha_2 x_c), \\
 a_{53} &= \alpha_1 m_k m_p \sin(\alpha_2 x_{cl}), a_{54} = -\alpha_1 m_k m_p \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{55} = -\alpha_3 \sin(\alpha_3 x_{cl}), \\
 a_{56} &= \alpha_3 \cos(\alpha_3 x_{cl}), a_{63} = \cos(\alpha_2 x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha_2 x_{cl}), \\
 a_{65} &= -\cos(\alpha_3 x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha_3 x_{cl}).
 \end{aligned}$$

Частотное уравнение здесь не приводится из-за его громоздкости. Если частное решение представить в амплитудной форме $\varphi = C_i \sin(\alpha_i x + \delta_i) \sin \omega_t t$, то частотное уравнение после исключения шести констант $C_i, \delta_i (i = 1 \div 3)$ записывается

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tg} \left\{ \alpha_2 x_{cl} + \operatorname{arctg} \left[m_k^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_1 x_c + \operatorname{arctg} \frac{GJ_k \alpha_1}{c_{1x} - J_1 \omega_t^2} \right) \right] - \alpha_2 x_c \right\} = \\
 & = m_k^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \left(\alpha_3 x_{cl} + \operatorname{arctg} \frac{GJ_k \alpha_3}{-c_{2x} + J_2 \omega_t^2} - \alpha_3 L \right). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели повреждения фигурируют его начальная координата x_c , длина l и параметры m_k и m_p . В прямой задаче начальная координата повреждения x_c , длина l и параметры m_k и m_p известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины. Когда коэффициенты жесткости c_{1x} и $c_{2x} \rightarrow \infty$ или равны нулю вместе с моментами инерции J_1 и J_2 , тогда частотное уравнение упрощается.

Для определения x_c , l , m_k и m_p необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний вала с повреждением.

3.1. Прямая задача.

Решение уравнения (6) проведено численно для следующих параметров системы: $G = 0.77 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $a = 3141.9$ м/с. $L = 0.2$ м, $R = 0.005$ м, $J_1 = J_2 = 0$, $c_1 \rightarrow \infty$, $c_2 = 0$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты стержня без повреждения $\omega_{t1} = 24676.74894$ рад/с, $\omega_{t2} = 74030.24683$ рад/с. Для стержня с повреждением при $x_c = 0.02$ м, $l = 0.005$ м, $m_p = 0.9$, $m_k = 0.8$ решение прямой задачи дает, что круговые частоты крутильных колебаний стержня $\omega_{t1} = 24349.92577$ рад/с, $\omega_{t2} = 73373.63594$ рад/с.

На рис.7 приведены зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б) от параметра m_k для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м и различных m_p (кривая 1–0.90; 2–0.95; 3–1.00). Видно, что с возрастанием параметра m_k две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня увеличиваются.

На рис.8 приведены зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б) от параметра m_p для координаты повреждения $x_c = 0.02$ м, длины $l = 0.005$ м и различных m_k (кривая 1–0.600; 2–0.605;

3–0.610). С возрастанием параметра m_p две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня уменьшаются.

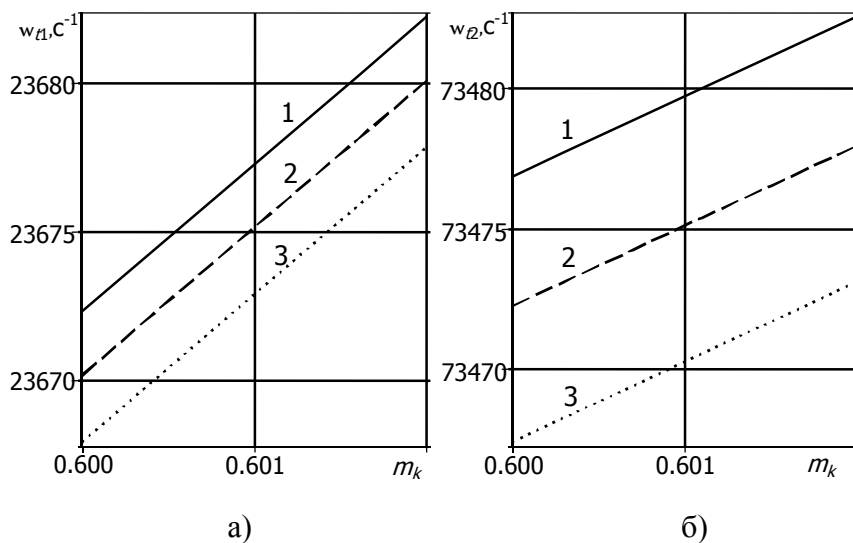


Рис.7. Зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент *a*), ω_{t2} (фрагмент *б*) от параметра m_k для координаты повреждения $x_c=0.02$ м, длины $l=0.005$ м и различных m_p (кривая 1–0.90; 2–0.95; 3–1.00).

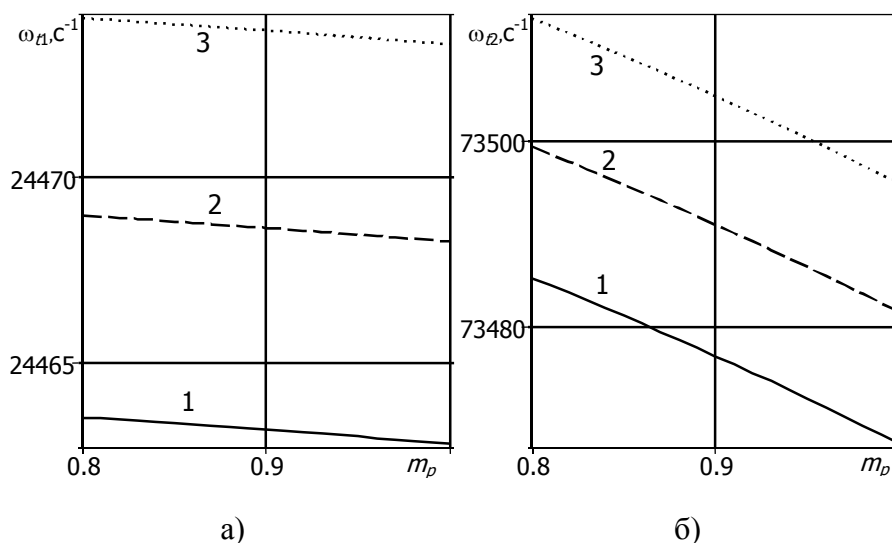


Рис.8. Зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент *a*), ω_{t2} (фрагмент *б*) от параметра m_p для координаты повреждения $x_c=0.02$ м, длины $l=0.005$ м и различных m_k (кривая 1–0.600; 2–0.605; 3–0.610).

3.2. Обратная задача.

Если частотное уравнение записать для двух частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются параметры m_k и m_p при известных координате повреждения x_c и его длине l . Например, для координаты повреждения $x_c=0.02$ м, длины $l=0.005$ м для круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_{t1}=24549$ рад/с, $\omega_{t2}=73700$ рад/с решение обратной задачи дает, что стержень имеет параметры $m_k=0.6967$, $m_p=0.9141$.

На рис.9 приведены зависимости параметров: m_k (фрагмент а), m_p (фрагмент б) от круговой частоты крутильных колебаний стержня ω_{t1} , для $\omega_{t2}=4855$ рад/с (кривая 1), $\omega_{t2}=4850$ рад/с (кривая 2), $\omega_{t2}=4845$ рад/с (кривая 3) для координаты повреждения $x_c=0.015$ м, длины $l=0.001$ м.

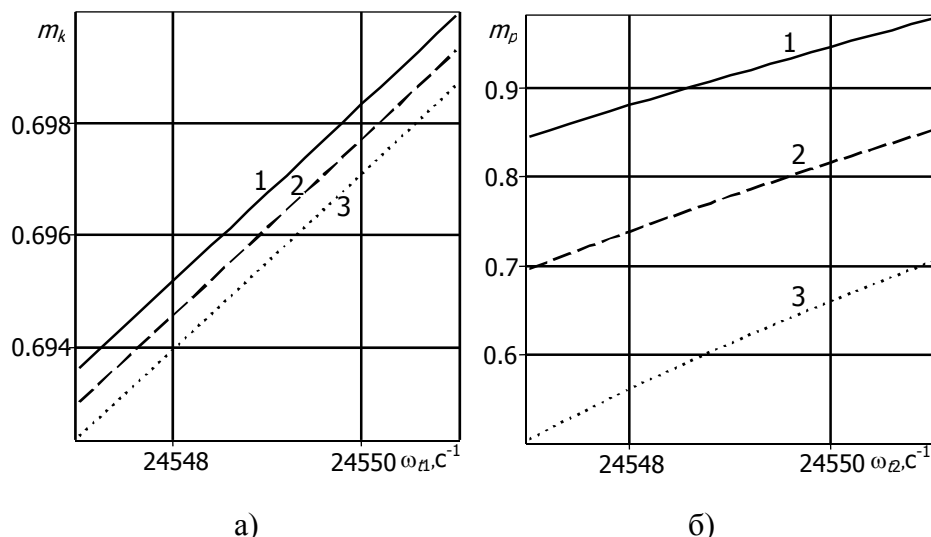


Рис.9. Зависимости параметров: m_k (фрагмент а), m_p (фрагмент б) от круговой частоты крутильных колебаний стержня ω_{t1} , для $\omega_{t2}=73700$ рад/с (кривая 1), $\omega_{t2}=73710$ рад/с (кривая 2), $\omega_{t2}=73720$ рад/с (кривая 3) для координаты повреждения $x_c=0.02$ м, длины $l=0.005$ м.

Проведенные исследования показывают, что при известных координате повреждения и его длине по двум частотам свободных крутильных колебаний можно определить параметр жесткости и полярный момент инерции в зоне повреждения.

4. ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассматривается напряженно-деформированное состояние консольной балки (рис.10). Предполагается, что в балке имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Это повреждение моделирует, в частности, раскрытую трещину. Задача состоит в определении координаты повреждения и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

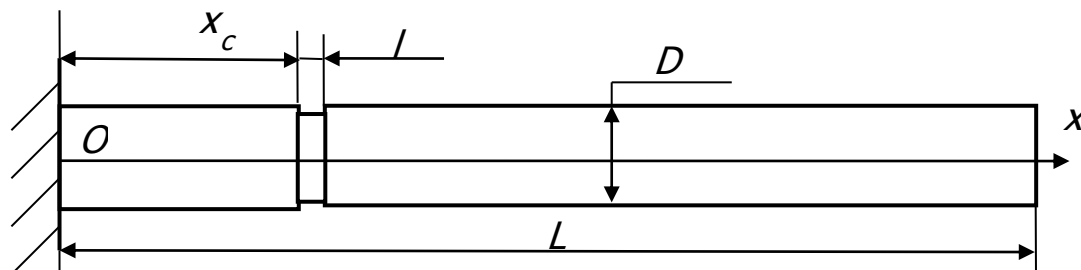


Рис.10. Расчетная схема.

Обозначим через L, J_y длину и момент инерции поперечного сечения балки относительно оси y , E, ρ – модуль упругости, плотность, через l, x_c, j_y – длину

повреждения, его координату, момент инерции поперечного сечения относительно оси y в зоне повреждения, w – прогиб балки.

Уравнение, определяющее форму изгибных колебаний балки, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \lambda^{*4} w, \quad \lambda^* = \sqrt[4]{\frac{m_l \omega_f^2}{EJ}}, \quad (12)$$

где m_l – масса единицы длины балки, ω – частота. Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x = 0), \quad M_y = 0, \quad Q_z = 0 \quad (x = L). \quad (13)$$

где M_y , Q_z – изгибающий момент и перерезывающая сила, которые определяются по формулам

$$M_y = EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q_z = -EJ_y \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (14)$$

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства перемещений, углов поворота, моментов, перерезывающих сил)

$$\begin{aligned} w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad M_{y1} = M_{y2}, \quad Q_{z1} = Q_{z2}, \quad (x = x_c), \\ w_2 = w_3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, \quad M_{y2} = M_{y3}, \quad Q_{z2} = Q_{z3}, \quad (x = x_c + l). \end{aligned} \quad (15)$$

Условия (15) с учетом (14) записываются в виде

$$\begin{aligned} w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = m_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = m_y \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}, \quad (x = x_c), \\ w_2 = w_3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, \quad m_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}, \quad m_y \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^3}, \\ m_y = \frac{J_y}{J_y}, \quad (x = x_c + l). \end{aligned} \quad (16)$$

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad \xi_{cl} = \frac{x_c + l}{L}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{L}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L},$$

представим (13), (16) в виде (в дальнейшем тильда над w опускается)

$$\begin{aligned} w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 0), \quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 w_3}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\xi = 1), \\ w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_1^2}{\partial \xi^2} = m_y \frac{\partial w_2^2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial w_1^3}{\partial \xi^3} = m_y \frac{\partial w_2^3}{\partial \xi^3}, \quad (\xi = \xi_c), \\ w_2 = w_3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \frac{\partial w_3}{\partial \xi}, \quad m_y \frac{\partial w_2^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2}, \quad m_y \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} = \frac{\partial w_3^3}{\partial \xi^3}, \quad (\xi = \xi_c + \varepsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели повреждения фигурируют длина повреждения ε , его координата ξ_c и параметр повреждения m_y .

Прогиб балки на трех участках представляется в виде [20]

$$\begin{aligned}w_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + C_3 y_{13} + C_4 y_{14}, \\w_2 &= C_5 y_{21} + C_6 y_{22} + C_7 y_{23} + C_8 y_{24}, \\w_3 &= C_9 y_{31} + C_{10} y_{32} + C_{11} y_{33} + C_{12} y_{34},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}y_{i1} &= \frac{\cos \lambda_i \xi + c h \lambda_i \xi}{2}, y_{i2} = \frac{\sin \lambda_i \xi + sh \lambda_i \xi}{2}, \\y_{i3} &= \frac{-\cos \lambda_i \xi + c h \lambda_i \xi}{2}, y_{i4} = \frac{-\sin \lambda_i \xi + sh \lambda_i \xi}{2}, \lambda_i^4 = \lambda_i^{*4} L^4,\end{aligned}$$

линейно независимые решения уравнения (12) [20], удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}y_{i1}(0) &= 1, y_{i1}'(0) = 0, y_{i1}''(0) = 0, y_{i1}'''(0) = 0, \\y_{i2}(0) &= 0, y_{i2}'(0) = \lambda_i, y_{i2}''(0) = 0, y_{i2}'''(0) = 0, \\y_{i3}(0) &= 0, y_{i3}'(0) = 0, y_{i3}''(0) = \lambda_i^2, y_{i3}'''(0) = 0, \\y_{i4}(0) &= 0, y_{i4}'(0) = 0, y_{i4}''(0) = 0, y_{i4}'''(0) = \lambda_i^3.\end{aligned}$$

Для стержня круглого поперечного сечения

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \sqrt[4]{\frac{4\rho\omega_f^2}{ER^2}} L, \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_1 \sqrt[4]{\frac{m_f}{m_y}}$$

и прямоугольного поперечного сечения

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \sqrt[4]{\frac{12\rho\omega_f^2}{EH^2}} L, \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_1 \sqrt[4]{\frac{m_f}{m_y}},$$

где H – высота сечения.

Функции $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, y_{i4}$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned}y_{i1}' &= \lambda_i y_{i4}, y_{i2}' = \lambda_i y_{i1}, y_{i3}' = \lambda_i y_{i2}, y_{i4}' = \lambda_i y_{i3}, \\y_{i1}'' &= \lambda_i^2 y_{i3}, y_{i2}'' = \lambda_i^2 y_{i4}, y_{i3}'' = \lambda_i^2 y_{i1}, y_{i4}'' = \lambda_i^2 y_{i2}, \\y_{i1}''' &= \lambda_i^3 y_{i2}, y_{i2}''' = \lambda_i^3 y_{i3}, y_{i3}''' = \lambda_i^3 y_{i4}, y_{i4}''' = \lambda_i^3 y_{i1}.\end{aligned}$$

Граничные условия и условия (17) в развернутом виде записываются

$$\begin{aligned}C_1 &= 0, C_2 = 0, \\C_9 y_{31}''(1) + C_{10} y_{32}''(1) + C_{11} y_{33}''(1) + C_{12} y_{34}''(1) &= 0, \\C_9 y_{31}'''(1) + C_{10} y_{32}'''(1) + C_{11} y_{33}'''(1) + C_{12} y_{34}'''(1) &= 0, \\C_3 y_{13}(\xi_c) + C_4 y_{14}(\xi_c) &= \\&= C_5 y_{21}(\xi_c) + C_6 y_{22}(\xi_c) + C_7 y_{23}(\xi_c) + C_8 y_{24}(\xi_c), \\C_3 y_{13}'(\xi_c) + C_4 y_{14}'(\xi_c) &= \\&= C_5 y_{21}'(\xi_c) + C_6 y_{22}'(\xi_c) + C_7 y_{23}'(\xi_c) + C_8 y_{24}'(\xi_c), \\C_3 y_{13}''(\xi_c) + C_4 y_{14}''(\xi_c) &= \\&= m_y [C_5 y_{21}''(\xi_c) + C_6 y_{22}''(\xi_c) + C_7 y_{23}''(\xi_c) + C_8 y_{24}''(\xi_c)], \\C_3 y_{13}'''(\xi_c) + C_4 y_{14}'''(\xi_c) &= \\&= m_y [C_5 y_{21}'''(\xi_c) + C_6 y_{22}'''(\xi_c) + C_7 y_{23}'''(\xi_c) + C_8 y_{24}'''(\xi_c)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_5 y_{21}(\xi_{cl}) + C_6 y_{22}(\xi_{cl}) + C_7 y_{23}(\xi_{cl}) + C_8 y_{24}(\xi_{cl}) = \\
& = C_9 y_{31}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{32}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{33}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{34}(\xi_{cl}), \\
& C_5 y'_{21}(\xi_{cl}) + C_6 y'_{22}(\xi_{cl}) + C_7 y'_{23}(\xi_{cl}) + C_8 y'_{24}(\xi_{cl}) = \\
& = C_9 y'_{31}(\xi_{cl}) + C_{10} y'_{32}(\xi_{cl}) + C_{11} y'_{33}(\xi_{cl}) + C_{12} y'_{34}(\xi_{cl}), \\
& m_y [C_5 y''_{21}(\xi_{cl}) + C_6 y''_{22}(\xi_{cl}) + C_7 y''_{23}(\xi_{cl}) + C_8 y''_{24}(\xi_{cl})] = \\
& = C_9 y''_{31}(\xi_{cl}) + C_{10} y''_{32}(\xi_{cl}) + C_{11} y''_{33}(\xi_{cl}) + C_{12} y''_{34}(\xi_{cl}), \\
& m_y [C_5 y'''_{21}(\xi_{cl}) + C_6 y'''_{22}(\xi_{cl}) + C_7 y'''_{23}(\xi_{cl}) + C_8 y'''_{24}(\xi_{cl})] = \\
& = C_9 y'''_{31}(\xi_{cl}) + C_{10} y'''_{32}(\xi_{cl}) + C_{11} y'''_{33}(\xi_{cl}) + C_{12} y'''_{34}(\xi_{cl}),
\end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения (18) с учетом вышеприведенных соотношений принимают вид

$$\begin{aligned}
& C_9 y_{33}(1) + C_{10} y_{34}(1) + C_{11} y_{31}(1) + C_{12} y_{32}(1) = 0, \\
& C_9 y_{32}(1) + C_{10} y_{33}(1) + C_{11} y_{34}(1) + C_{12} y_{31}(1) = 0, \\
& C_3 y_{13}(\xi_c) + C_4 y_{14}(\xi_c) = C_5 y_{21}(\xi_c) + C_6 y_{22}(\xi_c) + C_7 y_{23}(\xi_c) + C_8 y_{24}(\xi_c), \\
& C_3 y_{12}(\xi_c) + C_4 y_{13}(\xi_c) = C_5 y_{24}(\xi_c) + C_6 y_{21}(\xi_c) + C_7 y_{22}(\xi_c) + C_8 y_{23}(\xi_c), \\
& C_3 y_{11}(\xi_c) + C_4 y_{12}(\xi_c) = m_y [C_5 y_{23}(\xi_c) + C_6 y_{24}(\xi_c) + C_7 y_{21}(\xi_c) + C_8 y_{22}(\xi_c)], \\
& C_3 y_{14}(\xi_c) + C_4 y_{11}(\xi_c) = m_y [C_5 y_{22}(\xi_c) + C_6 y_{23}(\xi_c) + C_7 y_{24}(\xi_c) + C_8 y_{21}(\xi_c)], \\
& C_5 y_{21}(\xi_{cl}) + C_6 y_{22}(\xi_{cl}) + C_7 y_{23}(\xi_{cl}) + C_8 y_{24}(\xi_{cl}) = \\
& = C_9 y_{31}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{32}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{33}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{34}(\xi_{cl}), \\
& C_5 y_{24}(\xi_{cl}) + C_6 y_{21}(\xi_{cl}) + C_7 y_{22}(\xi_{cl}) + C_8 y_{23}(\xi_{cl}) = \\
& = C_9 y_{34}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{31}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{32}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{33}(\xi_{cl}), \\
& m_y [C_5 y_{23}(\xi_{cl}) + C_6 y_{24}(\xi_{cl}) + C_7 y_{21}(\xi_{cl}) + C_8 y_{22}(\xi_{cl})] = \\
& = C_9 y_{33}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{34}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{31}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{32}(\xi_{cl}), \\
& m_y [C_5 y_{22}(\xi_{cl}) + C_6 y_{23}(\xi_{cl}) + C_7 y_{24}(\xi_{cl}) + C_8 y_{21}(\xi_{cl})] = \\
& = C_9 y_{32}(\xi_{cl}) + C_{10} y_{33}(\xi_{cl}) + C_{11} y_{34}(\xi_{cl}) + C_{12} y_{31}(\xi_{cl}).
\end{aligned} \tag{19}$$

Для того чтобы $C_3 \div C_{12}$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, которое здесь не приводится. Из полученного частотного уравнения по низшей собственной частоте по известной координате повреждения ξ_c , его относительной длине ε и относительной площади m_f можно определить параметр m_y .

4.1. Прямая и обратная задачи.

Расчеты проведены для следующих параметров стержня: $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho=7800$ кг/м³, $L=200$ мм, диаметр образца $D=10$ мм, $x_c=15$ мм, $l=1$ мм, $m_f=0.9$, $m_y=0.4096$. При этом вычисленные значения первой круговой собственной частоты балки с повреждением $\omega_{f1}=1108.880110$ с⁻¹. Для стержня без повреждения решение прямой задачи дает, что собственные частоты изгибных колебаний балки $\omega_{f1}=1112.752212$ с⁻¹. Решение обратной задачи при $x_c=15$ мм, $l=1$ мм, $m_f=0.9$ для

$\omega_{f1}=1111 \text{ с}^{-1}$ дает, что $m_y=0.5729$. Таким образом, по известной координате, длине, площади поперечного сечения в зоне повреждения по низшей частоте изгибных колебаний определяется осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим решение прямой задачи по определению трех низших собственных частот продольных колебаний, двух низших частот крутильных колебаний и одной низшей частоты изгибных колебаний стержня для следующих параметров системы: $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho=7800 \text{ кг/м}^3$, $L=200$ мм, диаметр образца $D=10$ мм, $k_{1x} \rightarrow \infty$, $k_{2x}=0$, $M_1=0$ кг, $M_2=0$ кг, $x_c=40$ мм, $l=2$ мм, $m_f=0.8$, $G=0.77 \cdot 10^{11}$ Па, $J_1=J_2=0$, $c_1 \rightarrow \infty$, $c_2=0$, $m_p=0.9$, $m_k=0.8$, $m_y=0.5220$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты продольных колебаний стержня без повреждения $\omega_{l1}=39770.18194$ рад/с, $\omega_{l2}=119310.5458$ рад/с, $\omega_{l3}=198850.9097$ рад/с, первая и вторая собственные частоты крутильных колебаний $\omega_{t1}=24676.74894$ рад/с, $\omega_{t2}=74030.24683$ рад/с, первая собственная частота изгибных колебаний консольной балки $\omega_{f1}=1112.752212$ рад/с. Для стержня с повреждением решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний стержня $\omega_{l1}=39688.95432$ рад/с, $\omega_{l2}=119375.2700$ рад/с, $\omega_{l3}=199248.035$ рад/с, круговые частоты крутильных колебаний $\omega_{t1}=24557.37985$ рад/с, $\omega_{t2}=73991.25473$ рад/с, круговая частота изгибных колебаний $\omega_{f1}=1112.167523$ рад/с.

Решение обратной задачи для круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_{l1}=39670$ рад/с, $\omega_{l2}=119400$ рад/с, $\omega_{l3}=199200$ рад/с, круговых частот крутильных колебаний $\omega_{t1}=24500$ рад/с, $\omega_{t2}=73980$ рад/с и круговой частоты изгибных колебаний $\omega_{f1}=1115$ рад/с. дает, что повреждение имеет параметры: $x_c=44.65$ мм, $l=1.03$ мм, $m_f=0.621$, $m_p=0.818$, $m_k=0.615$, $m_y=0.500$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Задача вибродиагностики стержня по собственным частотам продольных, крутильных и изгибных колебаний стержня с одним повреждением может быть решена также следующим образом.

1. По четырем собственным частотам крутильных колебаний определяются координата, длина участка повреждения, полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По двум собственным частотам изгибных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются площадь и осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне.

2. По четырем собственным частотам изгибных колебаний определяются координата, длина участка повреждения, площадь и осевой момент инерции поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По двум собственным частотам крутильных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения.

7. ВЫВОДЫ

Установлено, что при расположении повреждения в узле колебаний собственные частоты продольных колебаний не зависят от его длины. По трем собственным частотам продольных колебаний определяются координата, длина и площадь поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По двум собственным частотам крутильных колебаний при известных координате повреждения и его длине определяются полярный момент инерции и параметр жесткости поперечного сечения стержня в зоне повреждения. По низшей частоте изгибных колебаний по известной координате, длине, площади поперечного сечения в зоне повреждения определяется осевой момент инерции поперечного сечения стержня в этой зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gladwell G.M.L.* Inverse problems in vibration. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – С.608.)
2. *Ильгамов М.А.* Диагностика повреждений вертикальной штанги / Труды института механики УНЦ РАН. Вып.5. – Уфа: «Гилем», 2007. – С.201-211.
3. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
4. *Ватульян А.О., Солуянов Н.О.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. – 2005. – №9. – С.44-56.
5. *Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений вертикальной штанги на упругой подвеске // Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело". – 2010. – URL: <http://www.ogbus.ru/authors/Khakimov/Khakimov1.pdf>.
6. *Ilgamov M.A., Sultanov B.Z., Tazhitdinov A.N., Khakimov A.G.* Damage diagnostics in a vertical bar hanged on the elastic suspender with concentrated mass / 10th European Conference on Non-Destructive Testing. Abstracts. Part 1. – М.: Publishing house Spektr, 2010. – P.345-347.
7. *Khakimov A.G.* Damage diagnostics in a vertical rod with concentrated masses on the elastic suspender // Intern. J. of Mechanics and Applications. – 2012. – Vol.2. – N5. – P.70-73.
8. *Ахметвалиева Э.Н., Ахтямов А.М.* Диагностика поперечного надреза вертикальной штанги // Контроль. Диагностика. – 2012. – №8. – С.31-34.
9. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. – 2010. – Т.46. – №6. – С.93-98.
10. *Сафина Г.Ф.* Исследование по крутильным колебаниям вала с дисками // Дефектоскопия. – 2011. – Т.47. – №3. – С.51-65.
11. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала турбокомпрессора с искусственным дефектом // ИВУЗ. Авиационная техника. – 2011. – №1. – С.71-73.
12. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. – 2009. – Т.45. – №6. – С.83-89.
13. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений балки на шарнирных опорах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №2. – С.42-48.

14. *Guangming Dong, Jin Chen* Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. – 2011. – Vol.28. – N1. – P.171-182.
15. *Акопьян В.А., Черпаков А.В., Рожков Е.В., Соловьев А.Н.* Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций // *Контроль. Диагностика*. – 2012. – №7. – С.50-56.
16. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 450 с.
17. *Лопатников С.Л., Гама Б.А., Краутхаузер К., Джиллести Дж.Мл.* О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона // *Письма в ЖТФ*. – 2004. – Т.30. – Вып.3. – С.39-46.
18. *Kolsky H.* An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading // *Proceedings of the Physics Society of London*. – 1949. – Vol.62. – N359. – P.676-700.
19. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
20. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т.3. / Под общей редакцией И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ ПАКЕТА КОМПОЗИТНЫХ СЛОЕВ, АРМИРОВАННЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ

Шишкин В.М., Левашов А.П.

ГОУ ВПО Вятский государственный университет, г. Киров, Россия

РЕЗЮМЕ

В работе построены физические уравнения композитного слоя, армированного однонаправленными волокнами, учитывающие рассеяние энергии в материале при гармоническом законе деформирования. Для построения отмеченных уравнений используется концепция комплексного модуля упругости и принцип соответствия. Проведена линеаризация оператора связи комплексных напряжений с комплексными деформациями слоя по логарифмическим декрементам колебаний материала. Построен комплексный гистерезисный оператор пакета произвольно уложенных композитных слоев.

Рассматривается пакет композитных слоев (рис.1а). Напряженное состояние пакета считается плоским. Произвольный слой с номером k имеет толщину h_k и армирован однонаправленными волокнами под углом φ_k к оси Ox пакета (рис.1б). Обычно волокна слоя располагаются в его поперечной плоскости случайным образом, и при достаточно частом их расположении композитный слой может считаться ортотропным материалом, находящимся в плоском напряженном состоянии. Физические уравнения слоя k пакета в этом случае имеют вид [1]

$$\{\sigma\}_k = [D]_s \{\varepsilon\}_k, \quad (1)$$

где $\{\sigma\}_k = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \tau_{12}\}_k$, $\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \gamma_{12}\}_k$ – векторы, содержащие соответственно напряжения и деформации данного слоя. Физическая матрица $[D]_s$ считается одинаковой для всех слоев

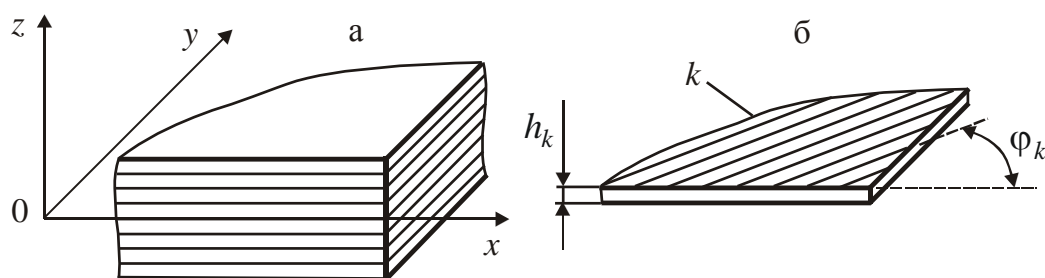


Рис. 1. Пакет композитных слоев (а) и произвольный слой с номером k (б)

$$[D]_s = \begin{bmatrix} \frac{E_1/(1-\mu_{12}\mu_{21})}{\mu_{21}E_2/(1-\mu_{12}\mu_{21})} & \frac{\mu_{12}E_1/(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_2/(1-\mu_{12}\mu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $E_1, E_2, G_{12}, \mu_{12}, \mu_{21}$ – соответственно модули нормальной упругости и модуль сдвига, а также коэффициенты Пуассона материала слоя.

Для моделирования демпфирующих свойств композитного слоя предлагается использовать известную концепцию комплексного модуля упругости и принцип

соответствия [2]. Согласно данному принципу физические уравнения при гармоническом законе деформирования упруго-гистерезисного материала записываются в той же форме, что и уравнения соответствующей физически линейной задачи с заменой в последних всех упругих констант материала их комплексными аналогами. Для слоя k данные уравнения будут такими

$$\{\sigma^*\}_k = [D^*]_s \{\varepsilon^*\}_k. \quad (3)$$

Здесь $\{\sigma^*\}_k = \{\sigma_1^* \sigma_2^* \tau_{12}^*\}_k$, $\{\varepsilon^*\}_k = \{\varepsilon_1^* \varepsilon_2^* \gamma_{12}^*\}_k$ – соответственно комплексные напряжения и комплексные деформации слоя k в его осях ортотропии; $[D^*]_s$ – гистерезисный оператор, определяемый через комплексные модули упругости E_1^* , E_2^* , G_{12}^* и комплексные коэффициенты Пуассона μ_{12}^* , μ_{21}^* данного слоя

$$[D^*]_s = \begin{bmatrix} \frac{E_1^*/(1-\mu_{12}^*\mu_{21}^*)}{\mu_{21}^*E_2^*/(1-\mu_{12}^*\mu_{21}^*)} & \frac{\mu_{12}^*E_1^*/(1-\mu_{12}^*\mu_{21}^*)}{E_2^*/(1-\mu_{12}^*\mu_{21}^*)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^* \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Комплексные модули E_1^* , E_2^* , G_{12}^* находятся в соответствии с гипотезой комплексного внутреннего трения Е.С. Сорокина [3]

$$\begin{aligned} E_1^* &= E_1(1+i\delta_1/\pi); \\ E_2^* &= E_2(1+i\delta_2/\pi); \\ G_{12}^* &= G_{12}(1+i\delta_{12}/\pi), \end{aligned} \quad (5)$$

где δ_1 , δ_2 , δ_{12} – логарифмические декременты колебаний композитного слоя при деформировании его соответственно вдоль волокон, поперек волокон и при сдвиге.

Для выяснения вопроса относительно вида коэффициентов μ_{12}^* , μ_{21}^* предположим, что композитный слой является идеально упругим и на него действует только напряжение σ_2 . Тогда относительная деформация вдоль волокон в соответствии с обобщенным законом Гука будет такой

$$\varepsilon_1 = -\mu_{12} \sigma_2 / E_2. \quad (6)$$

Для упруго-гистерезисного слоя вместо (6) следует записать

$$\varepsilon_1^* = -\mu_{12}^* \sigma_2^* / E_2^*. \quad (7)$$

Так как рассеяние энергии в композитном слое в этом случае обусловлено только деформированием его поперек волокон, то реакция слоя на напряжение σ_2^* в виде деформации ε_1^* должна быть мгновенной. Поэтому сдвиг фазы деформации ε_1^* по отношению к напряжению σ_2^* должен быть нулевым, что будет выполняться только при условии: $\mu_{12}^* = \mu_{12}(1+i\delta_2/\pi)$. Аналогично получается коэффициент μ_{21}^* : $\mu_{21}^* = \mu_{21}(1+i\delta_1/\pi)$. Найденные таким образом коэффициенты μ_{12}^* , μ_{21}^* удовлетворяют условию симметрии оператора $[D^*]_s$: $\mu_{12}^*E_1^* = \mu_{21}^*E_2^*$.

Остановимся на вопросе определения логарифмических декрементов δ_1 , δ_2 , δ_{12} , определяющих рассеяние энергии при циклическом деформировании композитного слоя. Подавляющее большинство работ посвящено моделированию диссипативных свойств многослойных композитных материалов, составленных из чередующихся жестких и мягких слоев, причем материал слоев считается изотропным [3,4]. Для волокнистых композитов возможны те же подходы, что используются при определении эффективных характеристик жесткости [5], т.е. модели, основанные на

выделении представительного элемента объема, что представляет одну из задач механики структурно неоднородных тел. Однако изучение этого вопроса еще далеко от завершения [6]. Поэтому, не углубляясь в подробности данного вопроса, будем считать, что значения $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}$ композитного слоя известны (их можно определить экспериментально, используя известные методики нахождения демпфирующей способности традиционных конструкционных материалов), и сосредоточим внимание на цели настоящей работы – моделировании демпфирующих свойств пакета композитных слоев.

Комплексный гистерезисный оператор $[D^*]_S$, представленный выражением (4), можно разложить на вещественную и мнимую составляющие

$$[D^*]_S = [D]_{\text{Re}} + i[D]_{\text{Im}}. \quad (8)$$

Матрицы $[D]_{\text{Re}}$ и $[D]_{\text{Im}}$ состоят из элементов

$$\begin{aligned} D_{11,\text{Re}} &= E_1(c - fb_1)/(c^2 + f^2); \\ D_{11,\text{Im}} &= E_1(f + cb_1)/(c^2 + f^2); \\ D_{12,\text{Re}} &= D_{21,\text{Re}} = \mu_{12}(D_{11,\text{Re}} - D_{11,\text{Im}}b_2); \\ D_{12,\text{Im}} &= D_{21,\text{Im}} = \mu_{12}(D_{11,\text{Im}} + D_{11,\text{Re}}b_2); \\ D_{13,\text{Re}} &= D_{31,\text{Re}} = 0; \quad D_{13,\text{Im}} = D_{31,\text{Im}} = 0; \\ D_{22,\text{Re}} &= E_2(c - fb_2)/(c^2 + f^2); \\ D_{22,\text{Im}} &= E_2(f + cb_2)/(c^2 + f^2); \\ D_{23,\text{Re}} &= D_{32,\text{Re}} = 0; \quad D_{23,\text{Im}} = D_{32,\text{Im}} = 0; \\ D_{33,\text{Re}} &= G_{12}; \quad D_{33,\text{Im}} = G_{12}\delta_{12}/\pi. \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (9) введены обозначения

$$\begin{aligned} c &= 1 - a(1 - b_1b_2); \quad f = a(b_1 + b_2); \\ a &= \mu_{12}\mu_{21}; \quad b_1 = \delta_1/\pi; \quad b_2 = \delta_2/\pi. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, вопрос учета демпфирующих свойств композитного слоя по существу решен. Однако оператор $[D^*]_S$ нелинейно зависит от логарифмических декрементов δ_1, δ_2 , что не увязывается с концепцией упруго-гистерезисного тела, положенной в основу получения физических уравнений несовершенного упругих материалов [3].

Для выяснения степени влияния δ_1, δ_2 на оператор $[D^*]_S$ (матрицы $[D]_{\text{Re}}$ и $[D]_{\text{Im}}$) рассмотрим, например, элемент $D_{11,\text{Re}}$ матрицы $[D]_{\text{Re}}$ и выделим в его числителе и знаменателе слагаемые, содержащие b_1, b_2

$$D_{11,\text{Re}} = E_1 \frac{1 - a - ab_1^2}{(1 - a)^2 + a(ab_1^2 + 2b_1b_2 + ab_2^2) + a^2b_1^2b_2^2}. \quad (11)$$

Считая b_1 и b_2 величинами малыми (по сравнению единицей), отбросим в (11) величины второго и более высокого порядка малости

$$D_{11,\text{Re}} = E_1/(1 - a) = E_1/(1 - \mu_{12}\mu_{21}). \quad (12)$$

Подобным образом поступим с элементом $D_{11,\text{Im}}$ матрицы $[D]_{\text{Im}}$

$$D_{11,Im} = E_1 \frac{b_1 + ab_2 + ab_1^2 b_2}{(1-a)^2 + a(ab_1^2 + 2b_1 b_2 + ab_2^2) + a^2 b_1^2 b_2^2}. \quad (13)$$

Оставляя в (13) только малые величины первого порядка получаем

$$D_{11,Im} = \frac{E_1}{1-a_1} \cdot \frac{b_1 + ab_2}{1-a} = D_{11,a} \frac{\delta_1 + \mu_{12} \mu_{21} \delta_2}{(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \pi}. \quad (14)$$

Выражения (12), (14) можно использовать для вычисления элементов $D_{12,Re}$ и $D_{12,Im}$

$$D_{12,Re} = \mu_{12}(D_{11,Re} - D_{11,Im} b_2) = \mu_{12} D_{11,Re} \left(1 - \frac{b_1 + ab_2}{1-a} \cdot b_2 \right); \quad (15)$$

$$D_{12,Im} = \mu_{12}(D_{11,Im} + D_{11,Re} b_2) = \mu_{12} D_{11,Re} \frac{b_1 + b_2}{1-a}.$$

После отбрасывания в $D_{12,Re}$ величин второго порядка малости по сравнению с b_1 и b_2 выражения (15) примут вид

$$D_{12,Re} = \mu_{12} D_{11,Re}; \quad D_{12,Im} = \mu_{12} D_{11,Re} \frac{b_1 + b_2}{1-a} = D_{12,Re} \frac{\delta_1 + \delta_2}{(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \pi}. \quad (16)$$

Аналогичным образом получают элементы $D_{22,Re}$, $D_{22,Im}$, $D_{21,Re}$, $D_{21,Im}$

$$D_{22,Re} = E_2 / (1 - \mu_{12} \mu_{21}); \quad D_{22,Im} = D_{22,Re} \frac{\delta_2 + \mu_{12} \mu_{21} \delta_1}{(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \pi}; \quad (17)$$

$$D_{21,Re} = \mu_{21} D_{22,Re}; \quad D_{21,Im} = D_{21,Re} \frac{\delta_1 + \delta_2}{(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \pi}.$$

Выражения (12), (14), (16) и (17) показывают, что матрица $[D]_{Re}$ получается не зависящей от декрементов δ_1 , δ_2 и совпадающей с матрицей жесткости $[D]_S$, а матрица $[D]_{Im}$ линейно зависит от данных декрементов и представляет матрицу гистерезисного демпфирования композитного слоя

$$[D]_{Re} = [D]_S = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 & \mu_{12} \bar{E}_1 & 0 \\ \mu_{21} \bar{E}_2 & \bar{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$[D]_{Im} = [D_g]_S = \begin{bmatrix} \bar{E}_1(\bar{\delta}_1 + a\bar{\delta}_2) & \mu_{12} \bar{E}_1(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2) & 0 \\ \mu_{21} \bar{E}_2(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2) & \bar{E}_2(\bar{\delta}_2 + a\bar{\delta}_1) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \delta_{12} / \pi \end{bmatrix}. \quad (19)$$

В выражениях (18), (19) введены обозначения

$$\bar{E}_i = E_i / (1-a); \quad \bar{\delta}_i = \delta_i \pi^{-1} / (1-a) \quad (i = 1; 2); \quad a = \mu_{12} \mu_{21}. \quad (20)$$

Таким образом, получается линейризованный относительно δ_1 , δ_2 гистерезисный оператор композитного слоя

$$[D]_S^* = [D]_S + i[D_g]_S. \quad (21)$$

Наличие оператора $[D]_S^*$ позволяет построить комплексный гистерезисный оператор пакета композитных слоев

$$[D]^* = [D] + i[D_g], \quad (22)$$

где $[D], [D_g]$ – соответственно матрица жесткости и матрица гистерезисного демпфирования данного пакета. Для построения матрицы $[D]$ можно использовать соотношение, полученное в работе [1]

$$[D] = h^{-1} \sum_{k=1}^n h_k [T_\varepsilon^{(k)}]^T [D]_s [T_\varepsilon^{(k)}]. \quad (23)$$

Здесь h_k, h – соответственно толщина слоя k и толщина всего пакета; $[T_\varepsilon^{(k)}]$ – матрица связи деформаций $\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \gamma_{12}\}_k$ слоя k с деформациями $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}$ пакета: $\{\varepsilon\}_k = [T_\varepsilon^{(k)}] \{\varepsilon\}$. Матрица $[T_\varepsilon^{(k)}]$ зависит от угла укладки φ_k слоя k пакета [1]

$$[T_\varepsilon^{(k)}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_k & \sin^2 \varphi_k & 0,5 \sin 2\varphi_k \\ \sin^2 \varphi_k & \cos^2 \varphi_k & -0,5 \sin 2\varphi_k \\ -\sin 2\varphi_k & \sin 2\varphi_k & \cos 2\varphi_k \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Матрица $[D_g]$ строится в виде, аналогичном выражению (23)

$$[D_g] = h^{-1} \sum_{k=1}^n h_k [T_\varepsilon^{(k)}]^T [D_g]_s [T_\varepsilon^{(k)}]. \quad (25)$$

Соотношения (23), (25) справедливы при произвольных углах армирования φ_k .

На практике часто используются симметричные схемы укладки слоев. В этом случае оператор $[D]^*$ можно представить в виде, аналогичном выражению (4) для отдельного композитного слоя

$$[D]^* = \begin{bmatrix} E_x^*/(1-\mu_{xy}^*\mu_{yx}^*) & \mu_{xy}^*E_x^*/(1-\mu_{xy}^*\mu_{yx}^*) & 0 \\ \mu_{yx}^*E_y^*/(1-\mu_{xy}^*\mu_{yx}^*) & E_y^*/(1-\mu_{xy}^*\mu_{yx}^*) & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}^* \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Здесь $E_x^*, E_y^*, G_{xy}^*, \mu_{xy}^*, \mu_{yx}^*$ – технические комплексные модули упругости и комплексные коэффициенты Пуассона пакета композитных слоев

$$\begin{aligned} E_x^* &= D_{11}^* - (D_{12}^*)^2/D_{22}^*; \quad E_y^* = D_{22}^* - (D_{12}^*)^2/D_{11}^*; \quad G_{xy}^* = D_{33}^*; \\ \mu_{xy}^* &= D_{12}^*/D_{11}^*; \quad \mu_{yx}^* = D_{12}^*/D_{22}^*. \end{aligned} \quad (27)$$

Проведены численные эксперименты по оценке влияния линеаризации оператора $[D]_s^*$ на вещественную и мнимые части оператора $[D]^*$. Для экспериментов выбран волокнистый композит КМУ-8. Механические характеристики композитного слоя: $E_1 = 1,25 \cdot 10^5$ МПа; $E_2 = 0,09 \cdot 10^5$ МПа $G_{12} = 0,05 \cdot 10^5$ МПа; $\mu_{12} = 0,02$; $\delta_1 = 0,18$; $\delta_2 = 0,08$; $\delta_{12} = 0,11$.

Схема укладки композитных слоев в пакете

$$\{\bar{h}\} = \{0,4 \ 0,2 \ 0,2 \ 0,2\}; \quad \{\varphi\} = \{0^\circ \ 90^\circ \ 45^\circ \ -45^\circ\}. \quad (28)$$

Здесь $\{\bar{h}\}$ – вектор, содержащий суммарные относительные толщины слоев (по отношению к толщине h пакета) с углами укладки, указанными в векторе $\{\varphi\}$. Ниже приведены значения $[D]^*$ в МПа, вычисленные в соответствии с выражениями (22), (23), (24) с использованием линеаризованного относительно δ_1, δ_2 и исходного оператора $[D]_s^*$ (в последнем случае обозначение $[D]^*$ заменено на $[\tilde{D}]^*$)

$$[D]^* = \begin{bmatrix} 68067,039 & 13486,033 & 0 \\ 13486,033 & 44737,430 & 0 \\ 0 & 0 & 15972,368 \end{bmatrix} + \quad (29)$$

$$+i \begin{bmatrix} 3812,316 & 846,822 & 0 \\ 846,822 & 2407,226 & 0 \\ 0 & 0 & 812,673 \end{bmatrix};$$

$$[\tilde{D}]^* = \begin{bmatrix} 68064,037 & 13482,549 & 0 \\ 13482,549 & 44735,268 & 0 \\ 0 & 0 & 15972,368 \end{bmatrix} + \quad (30)$$

$$+i \begin{bmatrix} 3812,285 & 846,813 & 0 \\ 846,813 & 2407,206 & 0 \\ 0 & 0 & 812,667 \end{bmatrix}.$$

Значения $[D]^*$ и $[\tilde{D}]^*$ практически совпадают, что говорит о возможности применения линеаризованного гистерезисного оператора (21) для учета упругих и демпфирующих свойств композитного пакета композитных слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шишкин В.М., Левашов А.П. Определение обобщенных жесткостей композиционного материала с произвольной схемой укладки слоев / Всероссийская научно-техническая конференция “Общество-наука-инновации”. Сборник материалов. – Киров, 2010. – Т.3. – С.328-331.
2. Василенко Н.В. Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей / В кн. «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем». – Киев: Наукова думка, 1974. – С.5-12.
3. Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. – Киев: Вища школа, 1977. – 252 с.
4. Голотина Л.А., Кожевникова Л.Л. Численные алгоритмы перехода от исследования структурных механизмов деформирования композита к континуальным описаниям его механического поведения / XV международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. Сборник материалов. – Алушта, 2007. – С.167-168.
5. Дубенец В.Г. Рассеяние энергии в слоистых композиционных материалах / В кн. «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем». – Киев: Наукова думка, 1982. – С.40-46.
6. Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. Колебания вибродемпфированных структурно-неоднородных конструкций // VIII Российская научно-техническая конференция “Демпфирующие материалы”. Сборник материалов. – Киров, 1999. – С.80-84.

Аэро-, гидромеханика, реология сред с нанонаполнителями

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЗАКОНЫ КОАЛЕСЦЕНЦИИ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

Бошнятов Б.В.

*ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия*

РЕЗЮМЕ

Дан краткий обзор основных теоретических моделей коалесценции пузырьков газа в жидкости и показано, что все известные модели коалесценции противоречат экспериментальным данным для мелких пузырьков. Предложен новый подход описания процесса коалесценции пузырьков, основанный на установленных автором экспериментальных законах коалесценции: законе критического числа Рейнольдса - для мелких пузырьков и законе критического числа Вебера - для крупных.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы коалесценции, наряду с дроблением пузырьков газа в жидкости, играют важную роль в формировании локальных распределений пузырьков по размерам в объеме газожидкостного реактора. Знание этих распределений позволяет, на основе численного решения уравнений механики жидкости, рассчитать величину удельной межфазной поверхности, массоперенос и другие характеристики реактора [1,2].

Теоретическое описание сближения двух пузырьков газа разного размера, в окружении других пузырьков, сводится к исследованию полных уравнений Навье-Стокса для многих частиц, задача, которая в настоящее время может быть решена лишь приближенными методами и для предельных случаев малых или очень больших чисел Рейнольдса [3-6]. Более того, для промежуточных чисел Рейнольдса в настоящее время не представляется возможным и решение задачи о парном столкновении двух пузырьков.

Так, плотность функции распределения пузырьков по размерам $n(d,z,t)$ на заданной высоте реактора z , находят из, так называемого, «балансного уравнения популяций» (balance of population equation), аналогичного кинетическому уравнению, в которое заложены те или иные математические модели дробления и коалесценции [7]. Эти модели, как правило, имеют 4÷6 эмпирических констант. Численные значения этих констант, предлагаемые различными авторами, могут отличаться в несколько раз [8,9]. В ряде случаев, для максимального упрощения задачи, при построении физической и математической модели газожидкостного аппарата используют экспериментальные зависимости для нахождения, так называемого, среднего объемно-поверхностного диаметра пузырьков, по которому затем вычисляют размер межфазной поверхности [10,11]. По существу, в настоящее время точность и надежность теоретических методов расчета газожидкостных реакторов ограничены недостаточным знанием сложных физических процессов дробления и в ещё большей степени коалесценции пузырьков.

Следует обратить внимание еще на один важный факт. Основная масса экспериментальных исследований (в том числе и по определению численных значений вышеупомянутых эмпирических констант) касается коалесценции пузырьков относительно большого размера (2÷3 мм и более). И лишь в последние

годы, в связи с исследованиями микропузырьковых сред [12,13] и перспектив их использования в промышленных технологических процессах [14-17], возникла необходимость детальных исследований коалесценции маленьких пузырьков диаметром от 0,02÷3 мм [18-24].

Настоящая работа представляет собой краткий обзор работ автора за период 2008-12 гг. по теме доклада. В первом разделе дается краткое изложение общепризнанных теоретических моделей коалесценции пузырьков, применяемых в практических расчетах газожидкостных реакторов и устройств. Во втором разделе изложен новый подход в описании коалесценции пузырьков, который основан на установленных автором экспериментальных законах коалесценции.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОАЛЕСЦЕНЦИИ ПУЗЫРЬКОВ

Коалесценцией пузырьков газа в жидкости называют процесс слияния двух или более пузырьков в один при их непосредственном контакте. В динамических условиях, когда время контакта пузырьков τ ограничено, не все столкновения пузырьков заканчиваются коалесценцией. Модель коалесценции должна предсказывать вероятность коалесценции пузырьков, при их столкновениях в жидкости. В ряде работ используют модели коалесценции, основанные непосредственно на эмпирических корреляциях, которые учитывают только геометрические параметры: размеры пузырьков, критическое расстояние между ними, и др. [7]. В литературе имеется достаточное количество теоретических работ, в которых вероятность коалесценции рассчитывают из более фундаментальных соображений, однако при получении конечных формул, авторы вынуждены использовать упрощающие предположения и 2÷3 эмпирические константы.

Наиболее распространенные модели этого типа, основаны на, так называемом, дренажном механизме коалесценции (рис.1), в котором процесс коалесценции двух пузырьков разделяют на три стадии: 1 - сближение пузырьков и образование тонкой жидкой пленки между ними, 2 - дренаж жидкости из пленки и её утончение до критической толщины и 3 - разрыв пленки жидкости и объединение пузырьков в один более крупный [25].

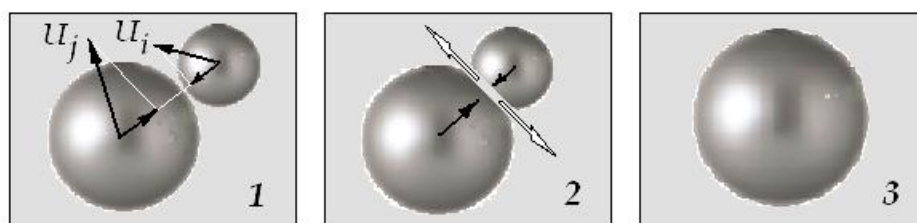


Рис.1. Три стадии дренажного механизма коалесценции пузырьков газа в жидкости.

Считается, что коалесценция пузырьков имеет место, если продолжительность второй и третьей стадии t_c меньше продолжительности контакта пузырьков τ . Таким образом, условие коалесценции имеет вид

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{t_c}{\tau} > 1 \\ 1, & \text{if } \frac{t_c}{\tau} < 1 \end{cases} \quad (1)$$

Однако часто вероятность коалесценции представляют в виде экспоненциальной функции [7-9].

$$P_{ij} = \exp\left(-\frac{t_c}{\tau}\right) \quad (2)$$

Единственным основанием использования формулы (2) является то, что она дает лучшее, чем условие (1) соответствие экспериментальным данным, поэтому соотношение (2) является чисто эмпирическим.

Таким образом, задача определения вероятности коалесценции пузырьков сводится к вычислению времен t_c и τ . Время коалесценции t_c определяют, как время необходимое для дренажа жидкой пленки от начальной толщины h_o до конечной, критической толщины h_f , поскольку разрыв пленки (третья стадия коалесценции) происходит намного быстрее. В моделях коалесценции основанных на теории смазки: №1 [26-28] и №2 [29,30], величины h_o и h_f являются, по существу, размерными эмпирическими константами. Отметим, что если общепринято $h_o=10^{-4}$ м, то в работах [29,30] авторы рекомендуют $h_f=10^{-8}$ м, а в монографии [28] - $h_f=10^{-7}$ м.

Определение времени контакта пузырьков τ полностью основано лишь на эмпирических соображениях, при этом полагают, что продолжительность контакта пузырьков пропорциональна степени их деформации при столкновении:

$$\tau = C_\tau d_{ij} / U_{ij} \quad (3)$$

где C_τ – эмпирическая константа, которая определяет степень деформации пузырьков. У различных авторов эта константа может изменяться в пределах $C_\tau=0,25 \div 0,6$. При столкновении пузырьков различного диаметра вводят [31,32]

понятие эквивалентного диаметра $d_{ij} = \frac{2d_i d_j}{(d_i + d_j)}$.

При расчетах продолжительности контакта пузырьков в турбулентных потоках обычно используют формулу Левича, так же полученную из размерных соображений [28,33]

$$\tau = \frac{\left(\frac{d_{ij}}{2}\right)^{2/3}}{\varepsilon^{1/3}}, \quad (4)$$

где ε – скорость диссипации турбулентной энергии. Уравнение (4) получается из (3) простой подстановкой масштаба скорости $U_{ij} \approx (\varepsilon \cdot d_{ij})^{1/3}$ для изотропной турбулентности Колмогорова-Обухова [34].

Наиболее совершенной из современных моделей коалесценции является модель, предложенная в работе [31], в которой рассматривается сближение двух пузырьков на основе аналитического и численного анализа уравнений Навье-Стокса. Конечная формула для отношения t_c/τ , получена в предположении невязкой, идеальной жидкости, однако она содержит только две безразмерные эмпирические константы (Модель №3). Таким образом, дренажные модели коалесценции отличаются друг от друга характером допущений при выводе конечной формулы для отношения времен t_c/τ . Рис.2 демонстрирует существование этих отличий.

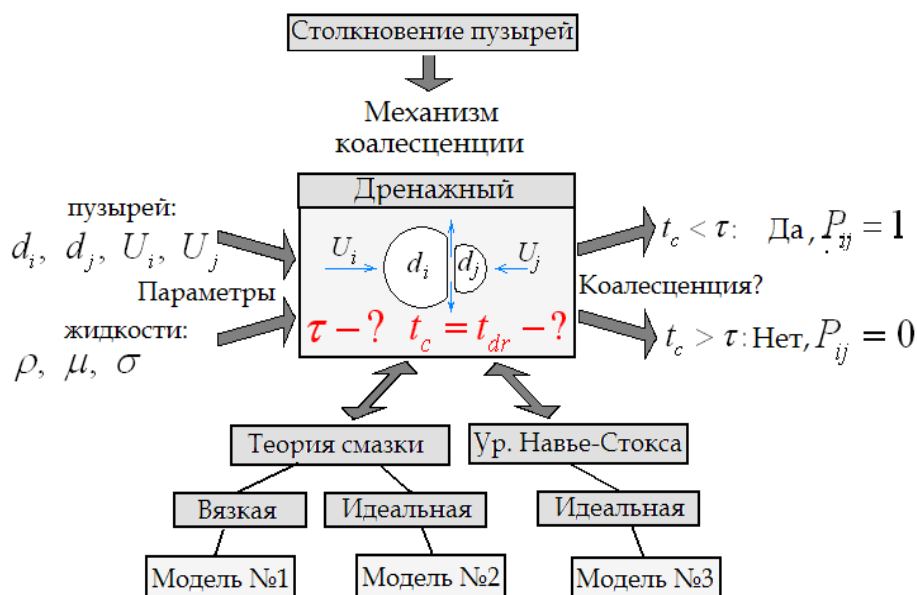


Рис.2. Блок схема основных допущений теоретических моделей коалесценции пузырьков, основанных на предположении о дренажном механизме процесса.

2. НОВЫЙ ПОДХОД В МОДЕЛИРОВАНИИ КОАЛЕСЦЕНЦИИ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА В ЖИДКОСТИ

Главная мотивация исследований по разработке новых подходов в моделировании коалесценции пузырьков заключалась в том, что ни одна из существующих теоретических моделей коалесценции не могла объяснить странное поведение микропузырьковых сред. С одной стороны, в работах [12-14,35] отмечалось, что микропузырьковые среды с размером пузырьков менее 0,1 мм обладают повышенной агрегативной устойчивостью (коалесценция пузырьков отсутствует), в том числе и в турбулентных потоках. С другой стороны, в ультразвуковом поле коалесценцию пузырьков наблюдают и при размерах пузырьков менее 0,04 мм [36]. В работах [15,35,37-40] обращалось внимание на существенное влияние дистанционных гидродинамических сил, возникающих при сближении пузырьков газа в жидкости, на процесс их столкновения и коалесценцию. Однако до недавнего времени систематические исследования этих явлений, в особенности для пузырьков размером менее 2÷3 мм, не проводились. Впервые результаты таких исследований коалесценции пузырьков были опубликованы в работах [18,38].

В этих работах автором предложен новый подход для описания динамического процесса коалесценции, основанный на гипотезе, что результат столкновения пузырьков (имеет место коалесценция или нет) определяется безразмерными критериями, вычисленными по параметрам жидкости и пузырьков газа до их столкновения. В этом случае отпадает необходимость в каких-либо предположениях о механизме коалесценции и допущениях, упрощающих задачу, при математическом описании процесса утончения и разрыва жидкой пленки, разделяющей пузырьки до их объединения. Эксперименты автора, а также других авторов, обработанные в соответствии с принятой гипотезой, подтвердили её справедливость. Оказалось, что условия коалесценции пузырьков газа в жидкости описываются двумя

экспериментальными законами: законом критического числа Рейнольдса для мелких пузырьков и законом критического числа Вебера для крупных пузырьков.

2.1. Закон критического числа Рейнольдса.

Эксперименты [18,19,21] показали, что при коалесценции мелких пузырьков вероятность коалесценции не зависит от числа Вебера, а полностью определяется числом Рейнольдса. Мелкими пузырьками будем называть пузырьки, для которых числа Рейнольдса, вычисленные по относительной скорости их сближения $Re = \rho U_{ij} d_{ij} / \mu < 100$ (где μ – коэффициент динамической вязкости). При этом (рис.3), если $Re < Re_c$, то коалесценция отсутствует ($P=0$); если же $Re > Re_c$ – коалесценция пузырьков имеет место ($P=1$). Для чистых ньютоновских жидкостей $Re_c \approx 30$.

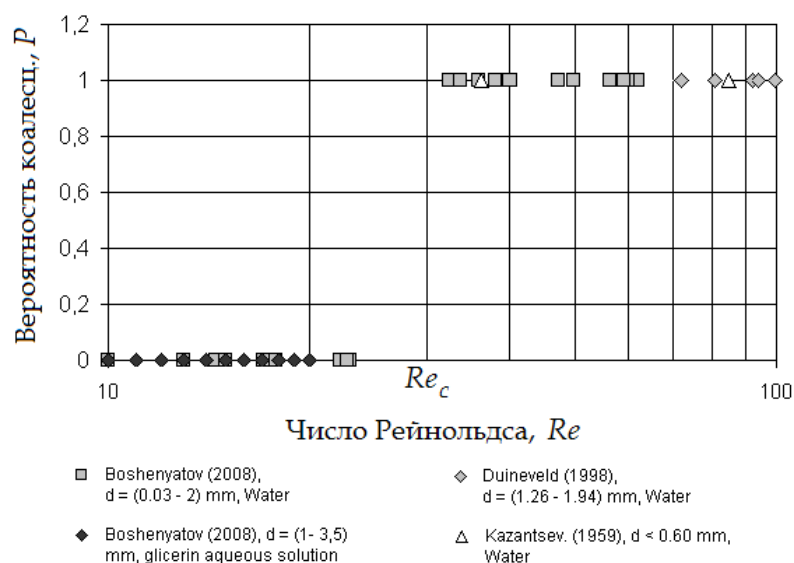


Рис.3. Закон критического числа Рейнольдса ограничивает коалесценцию мелких ($Re < 100$) пузырьков.

2.2. Закон критического числа Вебера.

Анализ и обобщение имеющихся в литературе экспериментальных исследований коалесценции относительно крупных пузырьков ($Re > 100$), в соответствии новым подходом описания процесса столкновений и коалесценции пузырьков, позволили автору установить, что в этом случае исчезает зависимость вероятности коалесценции от числа Рейнольдса и остается лишь зависимость от числа Вебера [24,40].

Второй закон коалесценции, ограничивающий коалесценцию пузырьков сверху (со стороны больших размеров пузырьков) может быть сформулирован в виде (см.рис.4): Коалесценция крупных пузырьков ($Re > 100$) в жидкости отсутствует, если число $W > W_c$.

Из рис.4 видно, что при числах Вебера $W < W_c$ коалесценция пузырьков имеет место, как в маловязких жидкостях (вода), так и в вязких (синтетическое масло); при $W_c' < W < W_c$, имеем промежуточную область - наблюдаются отскоки пузырьков и их коалесценция; при числах Вебера $W > W_c$ коалесценция пузырьков всегда отсутствует. По данным работ [39,41] и для воды, и для синтетического масла $W_c' \approx 2$, а $W_c \approx 5$ (для чистой воды).

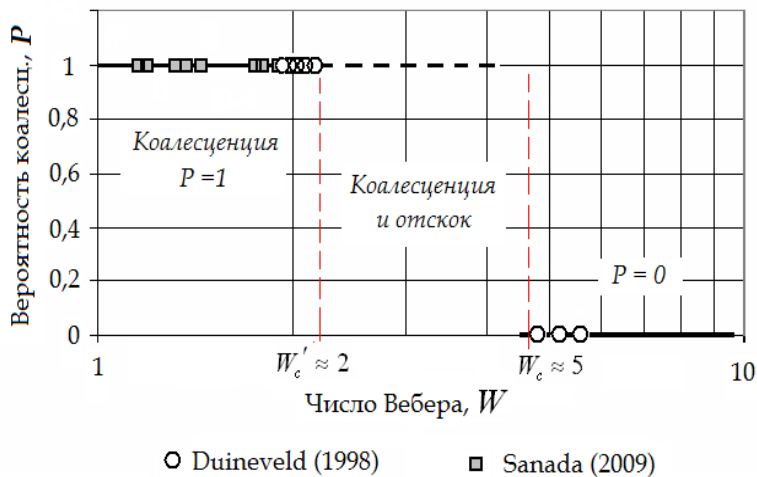


Рис.4. Закон критического числа Вебера.

2.3. Модель коалесценции пузырьков, основанная на экспериментальных законах коалесценции.

Экспериментальные законы коалесценции, сформулированные в разделах 2.1 (рис.3) и 2.2 (рис.4), позволяют представить условие коалесценции газовых пузырьков в жидкости в виде

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } Re > Re_c \text{ and } W < W_c \\ 0, & \text{if } Re < Re_c \text{ or } W > W_c \end{cases} \quad (5)$$

где P_{ij} – вероятность коалесценции пузырьков; $Re_c \approx 30$, $W_c \approx 4 \div 5$ – критические значения чисел Рейнольдса и Вебера, соответственно.

Адекватность наиболее распространенных моделей коалесценции экспериментальным данным, включая предложенную автором модель №4, условия коалесценции (5), была исследована в работах [23,42,43] методом прямого компьютерного моделирования и сравнением с представительным экспериментом [44] по измерениям функции распределения пузырьков по размерам.

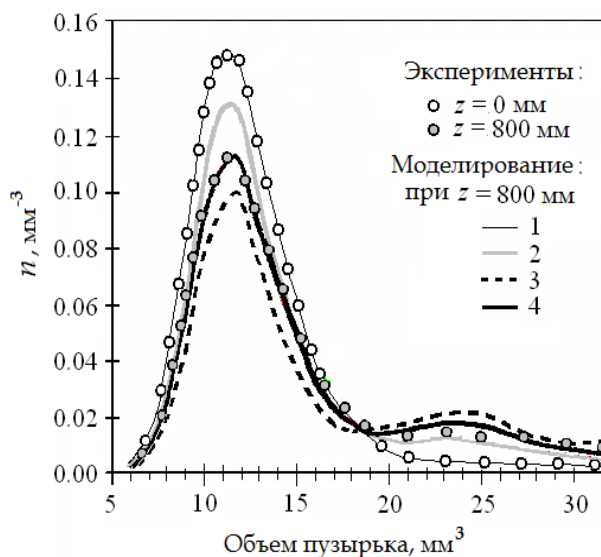


Рис.5. Плотность функции распределения пузырьков по размерам в колонном реакторе по экспериментам [44] и сравнение с численным

моделированием на основе различных моделей коалесценции: 1- вязкая модель теории смазки (модель №1); 2- невязкая модель теории смазки (модель №2); 3- невязкая модель ур. Навье-Стокса (модель №3); модель №4, основанная на экспериментальных законах коалесценции.

Из рис.5 видно, что предложенная автором модель коалесценции №4 с наибольшей точностью соответствует экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов В.Н., Доманский И.В. Газожидкостные реакторы. – Ленинград: «Машиностроение», Ленинградское отделение, 1976. – 216 с.
2. Соколов В.Н., Яблокова М.А. Аппаратура микробиологической промышленности. Ленинград: «Машиностроение», Ленинградское отделение, 1988. – 278 с.
3. Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // ДАН. – 2011. – Т.438. – №5. – С.626-628.
4. Бошенятов Б.В. К вопросу о присоединенной массе и гидродинамическом взаимодействии пузырьков в жидкости / Научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Сборник материалов. – Томск: Томский государственный университет, 2011. – С.349-350.
5. Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В. Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4. – Часть 3. – С.740-741.
6. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Кульбицкий Ю.Н. Гидродинамика дисперсных и газожидкостных потоков // ДАН. – 1984. – Т.278. – №1. – С.65-68.
7. Mihail R., Straja S. A theoretical model concerning bubble size distributions // Chem. Eng. Journal. – 1986. – Vol.33. – N2. – P.71-77.
8. Wang T., Wang J., Jin Y. Population balance model for gas-liquid flows: Influence of bubble coalescence and breakup models // Industrial & engineering chemistry research. – 2005. – Vol.44. – N19. – P.7540-7549.
9. Laakkonen M., Alopaeus V., Aittamaa J. Validation of bubble breakage, coalescence and mass transfer models for gas-liquid dispersion in agitated vessel / 2nd International Conference on Population Balance Modeling – PBM (2004) // Chemical Engineering Science. – 2006. – Vol.61. – N1. – P.218-228.
10. Блазнов А.Н. Исследование и разработка абсорберов на основе жидкостно-газовых струйных аппаратов с удлиненной камерой смешения / Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н. – Бийск: Бийский технологический институт, 2001. – 24 с.
11. Razzaque M.M., Afacan A., Liu S., Nandakumar K., Masliyah J.H., Saders R.S. Bubble size in coalescence dominant regime of turbulent air-water flow through horizontal pipes // Intern. J. of Multiphase Flow. – 2003. – Vol.29. – Iss.9. – P.1451-1471.
12. Boshenyatov B.V. Measurement of parameters of two-phase flow with very small gas bubbles in horizontal tubes / Intern. Conf. on the methods of aerophysical research. Proceeding. – Novosibirsk: Publishing House “Nonparel”, 2004. – Part IV. – P.81-86.
<http://www.itam.nsc.ru/~libr/eLib/confer/ICMAR2004/Part4/Boshenyatov.pdf>
13. Бошенятов Б.В. Гидродинамика микропузырьковых газожидкостных сред // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т.308. – №6. – С.156-164.

14. *Бошнятов Б.В.* Диалектика качества пузырьковых сред и технологий / IX Международная научно-практическая конференция «Качество – стратегия XXI века». Материалы. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – С.91-94.
15. *Бошнятов Б.В.* О перспективах применения микропузырьковых газожидкостных сред в технологических процессах // Известия ВУЗ. Физика. – 2005. – №11. – Приложение. – С.49-54.
16. *Yoon R.H.* Microbubble flotation // Mineral Engineering. – 1993. – P.619-630.
17. *Бошнятов Б.В., Бошнятов Е.В., Косинцев В.И., Сечин А.И.* Микропузырьковая флотация – экологически чистая и эффективная технология глубокой переработки угля // Вестник Алма-атинского института энергетики и связи. – 2009. – Т.4. – №1. – С.13-18.
18. *Бошнятов Б.В.* О влиянии числа Рейнольдса на коалесценцию пузырьков в жидкости // Известия ВУЗ. Физика. – 2008. – Т.51. – №8/2. – С.67-71.
19. *Бошнятов Б.В.* Роль гидродинамического взаимодействия при коалесценции пузырьков в жидкости // ДАН. – 2009. – Т.427. – №3. – С.321-323.
20. *Бошнятов Б.В.* Моделирование коалесценции пузырьков на основе критического числа Рейнольдса // ДАН. – 2010. – Т.430. – №6. – С.767-769.
21. *Boshenyatov B.* A Dynamic model of bubble coalescence in Newtonian fluids / 4th Intern. Symp. on advanced fluid/solid science and technology in experimental mechanics (4th ISEM'09-Niigata). Proceedings. – Japan, 2009. – 6 p.
22. *Fujikawa T., Uemura T., Iguchi M.* Behavior of a chain of very small bubbles in stagnant water / 4th Intern. Symp. on advanced fluid/solid science and technology in experimental mechanics (4th ISEM'09-Niigata). Proceedings. – Japan, 2009. – 6 p.
23. *Boshenyatov B.V.* Validation of basic models of bubble coalescence for gas-liquid dispersion in column reactor / 6th Intern. Symp. on advanced science and technology in experimental mechanics. Proceedings. – Japan: Osaka, 2011. – Report 049.
24. *Boshenyatov B.* Laws of bubble coalescence and their modeling (pp. 211-240) / Chapt.4 in Book “New Developments in Hydrodynamics Research”. – New York: Nova Science Publishers, 2012. – 316 p.
25. *Marrucci G.* A theory of coalescence // Chemical Engineering Science. – 1969. – Vol.24. – N6. – P.975-985.
26. *Coulaloglou C.A., Tavlarides L.L.* Description of interaction processes in agitated liquid-liquid dispersions // Chemical Engineering Science. – 1977. – Vol.32. P.1289-1297.
27. *Thomas R.M.* Bubble coalescence in turbulent flows // Int. J. Multiphase Flow. – 1981. – Vol.6. – N6. – P.709-717.
28. *Kolev N.I.* Multifase Flow Dynamic. – Berlin: Springer, 2005. – 699 p.
29. *Prince M.J., Blanch H.W.* Bubble coalescence and break-up in airsparged bubble column // A.I.Ch.E. Journal. – 1990. – Vol.36. – N10. – P.1485-1499.
30. *Sommerfeld M., Bournloutski E., Bröder D.* Euler/Lagrange calculations of bubbly flows with consideration of bubble coalescence // The Canadian Journal of Chemical Engeneering. – 2003. – Vol.81. – P.508-518.
31. *Chesters A.K., Hoffman G.* Bubble coalescence in pure liquids // Appl. Sci. Res. – 1982. – Vol.38. – P.353-361.
32. *Kamp A.M., Chesters A.K., Colin C., Fabre J.* Bubble coalescence in turbulent flows: A mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow // Intern. J. of Multiphase Flow. – 2001. – Vol.27. – Iss.8. – P.1363-1396.

33. *Levich V.G.* Physico-Chemical Hydrodynamics. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
34. *Kolmogoroff A.N.* The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers // C. R. Acad. Sci. U.S.S.R. – 1941. Vol.30. – P.825-828.
35. *Serizawa A., Inui T., Yahiro T., Kawara Z.* Laminarization of Micro-Bubble Containing Milky Bubbly Flow in Pipe / 3-rd European-Japanese Two-Phase Flow Group Meeting. – Certoza de Pontignano, 21-27 September 2003.
36. *Казанцев В.Ф.* Движение газовых пузырьков под действием сил Бьеркнеса, возникающих в акустическом поле // ДАН СССР. – 1959. Т.129. – №1. – С.64-67.
37. *Бошнятов Б.В.* Исследование микропузырьковых сред и потоков / Всероссийский Симпозиум «Современные проблемы аэрогидромеханики». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2004. – С.14-26.
38. *Бошнятов Б.В.* Исследование агрегативной устойчивости микропузырьковых газожидкостных сред // Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Сборник материалов. – Томск: Томский государственный университет, 2008. – С.340-342.
39. *Duineveld P.C.* Bouncing and coalescence of bubble pairs rising at high Reynolds number in pure water or aqueous surfactant solutions // Appl. Sc. Res. – 1998. – Vol.58. – P.409-439.
40. *Бошнятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие и коалесценция пузырьков газа в жидкости / Всероссийская конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, структурно-сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. М.: ИПРИМ РАН, 2010. – С.36-50.
41. *Sanada T., Sato A., Shirota M., Watanabe M.* Motion and coalescence of a pair of bubbles rising side by side // [Chemical Engineering Science](#). – 2009. – Vol.64. – P.2659-2671.
42. *Бошнятов Б.В., Попов В.В., Семянистый А.В.* Численное моделирование коалесценции пузырьков всплывающих в невозмущенной жидкости // Международная конференция “Потоки и структуры в жидкостях: Физика геосфер”. Тезисы докладов. – М.: Изд-во ИПМ РАН, ТГУ. – 2009. – С.38-41.
43. *Boshenyatov B.V., Semyanistij A.V.* Comparison of bubble coalescence models with data from direct computer simulation and experiment / XIX Intern. Conf. on Chemical Reactors (CHEMREACTOR-19). Abstracts. – Austria: Vienna, 2010.
44. *Bröder D., Sommerfeld M.* Experimental studies of bubble interaction and coalescence in a turbulent flow by an imaging PIV/PTV system / 11th Intern. Symp. Application of Laser Techniques to Fluid Mechanics. – Portugal: Lisbon, 2002.

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ И ГОРЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Воротилин В.П.

*ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия*

РЕЗЮМЕ

Рассмотрены вопросы движения и горения турбулентных струй горючего газа в сносящем потоке окислителя - воздуха. Исходя из фактов существования четкой границы раздела между турбулентной струей и обтекающим ее внешним потоком, предложен механизм крупномасштабного захвата внешней среды и на его основе получено уравнение баланса «турбулентной» жидкости, замкнувшее систему уравнений движения и горения турбулентных струй. Рассмотрены различные варианты горения турбулентных струй с учетом ряда усложняющих гидродинамических и физико-химических факторов движения и горения. В частности, учтены эффекты излучения, внешней турбулентности, добавок инертных газов. В теории отсутствуют эмпирические корреляции и подгоночные константы. Это дает основание утверждать, что получаемые на ее основе результаты расчетов должны обладать силой объективных законов и поэтому могут стимулировать осмысленную постановку экспериментальных исследований для выяснения конкретных особенностей процессов горения.

Ключевые слова: турбулентные струи; мгновенные реакции; диффузионное горение

1. ВВЕДЕНИЕ

Ввод струй горючего газа в сносящий поток окислителя является одним из основных конструктивных способов осуществления процессов горения в различного рода теплотехнических устройствах, газовых горелках, камерах сгорания авиационной и космической техники. Как правило, эти процессы протекают в условиях турбулентного движения и смешения горючего и окислителя при наличии множества трудно учитываемых сопутствующих конструктивных, физических, термодинамических, химических и физико-химических факторов горения, затрудняющих получение однозначных и целенаправленных результатов о закономерностях горения на основе экспериментальных исследований. С теоретической точки зрения основная трудность исследований связана с упомянутым турбулентным характером движения, смешения и химического взаимодействия топлива и окислителя. Хотя формально эти процессы полностью описываются уравнениями гидродинамики и конвективного тепло- и массопереноса с химическими реакциями, однако никаких теоретических результатов на основе точных или приближенных решений этих уравнений до сих пор получено не было. Существующие в настоящее время методы описания таких течений основаны на численных решениях модельных уравнений типа RANS (т.е. усредненные по времени исходных точных уравнений), дополненных моделями турбулентности, либо с помощью техники LES в сочетании с подсеточными моделями. Безусловно, численные методы являются полезным и необходимым дополнением теории, но только в том случае, когда теория существует. Но, как сказано выше, теория турбулентности еще не создана. О моделях RANS еще Сполдинг, один из разработчиков подобных моделей, говорил «мы их используем только потому, что

ничего иного у нас нет». Они основаны на полуэмпирических и эмпирических корреляциях с использованием подгоночных констант для совпадения с экспериментом и поэтому не обладают предсказательной силой теории.

Особенностью движения турбулентных струй является наличие четко различимой границы раздела между областью турбулентного течения в струе и ламинарным течением во внешней среде. Именно на этой границе происходят процессы смешения топлива струи и окислителя внешней среды. Существующие модели движения и горения турбулентных струй, основанные на представлениях полуэмпирической теории, особенности этих процессов никак не учитывают. Механизм турбулентной вязкости применяется ко всему пространству, в котором движется турбулентная струя, включая область внешнего ламинарного течения [1]. Поэтому граница струи превращается в чисто формальное математическое понятие: ее положение определяется как то расстояние от оси струи, на котором локальное значение скорости струи отличается от скорости внешнего ламинарного потока на некоторую произвольно задаваемую малую величину. Реакции горения относятся к классу химических реакций, протекающих с большими скоростями молекулярных реакций. Для них лимитирующей стадией процесса является подвод реагентов к зоне реакции, а сама реакционная зона вырождается в поверхность. Поэтому для процессов диффузионного горения вопросы смешения окислителя и горючего газа турбулентной струи становятся основными в решении всей проблемы. Перенос окислителя внешней среды происходит по механизму молекулярной диффузии, а горючего турбулентной струи под воздействием крупномасштабных турбулентных пульсаций. Но это различие в механизмах сближения реагентов в существующих моделях, использующих для описания переноса обоих реагентов механизм турбулентной диффузии, также никак не учитывается. Картина горения схематично представляется в виде вытянутого вдоль струи эллипсоида, внутри которого находится еще не сгоревший газ, снаружи окислитель, а реакция горения происходит на поверхности эллипсоида [2-4]. Таким образом, одна из важнейших экспериментально наблюдаемой особенности смешения веществ, участвующих в реакции горения, остается вне поля зрения классической теории турбулентных струй. Основой предлагаемой теории явились представления о крупномасштабном захвате внешней среды на возмущенной границе турбулентной струи, ранее использованные при описании гидродинамики различных вариантов струйных течений (барботажные, пористые струи и т.д.), а также горения турбулентных струй в неподвижной внешней среде и спутном потоке [5-8].

2. О МЕХАНИЗМЕ ЗАХВАТА ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Напомним вкратце обоснование идеи механизма динамического взаимодействия внешнего ламинарного течения с турбулентной струей и вывод замыкающего уравнения захвата (турбулизации) внешней среды. Одной из проблем турбулентных течений со свободными границами являлся вопрос о завихрении внешней среды. В литературе сложились две точки зрения на возможный механизм завихрения. По одной предполагалось, что завихрение внешней среды происходит в пределах существующего на границе турбулентной струи вязкого суперслоя под действием сил молекулярной вязкости [9]. Другая точка зрения на захват и завихрение внешней среды основывалась на представлениях о том, что возмущения границы турбулентной струи, как бы огибая участки внешней среды, захватывают (large-scale engulfing) их вовнутрь турбулентной области течения [10]. Но ни одна из

них не затрагивала вопроса о механизме обратного влияния внешней среды на движение самой турбулентной струи. То, что параметры турбулентной струи зависят от условий течения внешней среды следует, например, из формальной постановки задачи с краевым условием $u(x, y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow u_\infty$, учитывающим влияние внешних условий, т.е. зависимость решения от параметра u_∞ . Отметим, что и в соотношениях для скорости расширения турбулентной струи, из соображений размерности задаваемых в виде [1]

$$dr/dt \approx u' \approx |u - u_\infty|$$

где u' - пульсация скорости поперек струи, u - средняя по сечению струи скорость, также неявно подразумевается некоторый механизм воздействия внешней среды на турбулентную струю, хотя и без объяснения конкретного способа его реализации. Поскольку течение турбулентных струй автомодельно по числу Рейнольдса, т.е. не зависит от молекулярной вязкости, то воздействием вязкого трения на течение струи можно пренебречь. Отсюда как единственно возможный альтернативный механизм взаимодействия внешнего течения и турбулентной струи остается механизм формирования вихрей на возмущенной границе турбулентной струи. Суть его в том, что относительное движение турбулентной струи и внешней среды на малых временах контакта и малых расстояниях вдоль струи можно представить как параллельное течение двух несмешивающихся жидкостей, обладающих различными физическими свойствами. Так как граница струи представляет собой сильно искривленную поверхность, естественно допустить, что ее обтекание внешним потоком будет происходить в отрывном режиме с образованием отрывных вихрей и квадратичным законом трения, выражение которого на малом участке dx вдоль оси струи x запишем в виде

$$F_{fr} = \gamma \rho_\infty (u - u_\infty)^2 dx \quad (1)$$

где γ - константа, u - средняя скорость струи, ρ_∞ и u_∞ - плотность и скорость внешней среды – смеси кислорода, далее помечаемого индексом «*ok*», и индексом «*in*» инертной примеси – азота

$$\rho_\infty = (1 - \varepsilon_\infty) \rho_{ok\infty} + \varepsilon_\infty \rho_{in\infty}$$

ε_∞ - объемная доля азота (для воздуха $\varepsilon_\infty = 0.79$).

По смыслу деления всей области течения на внешнюю безвихревую среду и собственно турбулентную струю указанные отрывные вихри должны остаться в составе струи, играя для нее роль источника турбулентности. Поэтому и импульс, при трении отдаваемый им струей, также должен возвратиться струе. Приравняв выражение для потока возвращаемого импульса на том же участке dx

$$j = \rho_\infty u_c |u - u_\infty| dx$$

силе трения F_{fr} , для искомой скорости захвата u_c получим выражение

$$u_c = \gamma |u - u_\infty|$$

С учетом внешней турбулентности обобщенное выражение для u_c примет вид [8]

$$u_c = \gamma (|u - u_\infty| + \xi_t u_\infty) \quad (2)$$

где $\xi_t = u_t / u_\infty$ - отношение интенсивности турбулентных пульсаций внешнего потока к его скорости. Так в работе [12] ее уровень для внешнего течения оценивался величиной $\xi_t \sim 3-6\%$. Отметим, что введенное понятие скорости захвата не следует смешивать со скоростью натекания внешней среды на струю,

обозначенную как u_{ex} . Последняя выводится из уравнения материального баланса и факт ее существования не зависит от режима течения струи. Теперь для струи, движущейся вдоль оси x , можно написать уравнение баланса массы «турбулентной» жидкости (турбулентных вихрей), рассматривая произведение $\rho_\infty u_c$ как источник ее массы на единице площади поверхности струи. Обозначив через S площадь поперечного сечения струи, а через Π его периметр, указанное уравнение представим в виде

$$d(\rho u S)/dx = \gamma \rho_\infty (|u - u_\infty| + \xi_i u_\infty) \Pi \quad (3)$$

где ρ - средняя плотность, r - радиус струи, x - текущая координата вдоль оси струи. Общий характер соотношений (2),(3) подчеркивает то обстоятельство, что никакие конкретные свойства крупных вихрей, особенности механизма их формирования на возмущенной границе турбулентной струи в их окончательном виде ни в чем не проявляются. Под влиянием хаотических турбулентных пульсаций крупномасштабные вихри окислителя проникают во внутренние области течения в струе, дробятся на мелкие вихри, в конечном счете, равномерно распределяясь по ее всему поперечному сечению. Таким образом, видим двоякую роль, которую играют соотношения (2),(3) в процессах горения турбулентных струй. С одной стороны они выражают суть механизма турбулентности в струях, а с другой позволяют оценить верхнюю границу интенсивности смешения окислителя из внешней среды с горючим реагентом струи, величина которой с учетом соотношений (1)-(3) равна

$$q_{ok} = \gamma(1 - \varepsilon_\infty) \rho_{ок\infty} (|u - u_\infty| + \xi_i u_\infty) \Pi \quad (4)$$

Отметим, что факт существования отрывных вихрей на границах турбулентных струй наглядно иллюстрируют флэш-снимки подкрашенных турбулентных струй экспериментальной работы [11], цель которой была попытка обосновать факт существования упомянутого выше вязкого суперслоя.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ И ГОРЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

Внешний поток оказывает двоякое воздействие на структуру и характер течения турбулентной струи. Во-первых, под динамическим напором его нормальной к оси струи составляющей скорости происходит отклонение траектории струи в направлении его течения. Во-вторых, создаваемая им разность давлений между передней и кормовой частью обтекаемой струи приводит к деформации профиля поперечного сечения струи, принимающего форму, близкую к сегменту круга [1]. Иллюстративная картина течения струи и ее геометрия показаны на рис.1.

Геометрические характеристики струи: площадь ее поперечного сечения S , периметр Π и диаметр D_{max} связаны с параметрами φ и r_φ соотношениями

$$\begin{aligned} S &= r_\varphi^2 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \\ \Pi &= 2r_\varphi (\varphi + \sin \varphi) \\ D_{max} &= 2r_\varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим трудности классической теории при рассмотрении данной задачи. При решении на основе уравнений турбулентной диффузии из-за отсутствия понятия физической границы турбулентной струи невозможно разделить области ламинарного и турбулентного течения и, следовательно, получить оценку физического воздействия внешнего ламинарного потока на ту область течения,

которая фактически является турбулентной струей. В рамках интегральных методов граница струи задается произвольным образом, исходя из соображений наилучшего приближения результатов расчета к эксперименту. Трудности этой методики усугубляются тем обстоятельством, что для турбулентных струй в сносщем потоке необходимо учитывать центростремительную силу, возникающую при искривлении траектории струи под напором внешнего потока. Одним из параметров, входящих в выражение для этой силы, является масса струи (на единицу ее длины), для оценки которой необходимо уметь рассчитывать объем и истинное положение границ турбулентной струи, что при использовании методов полуэмпирической теории, не прибегая к обесценивающим ее дополнительным произвольным гипотезам и соотношениям, является неосуществимой задачей.

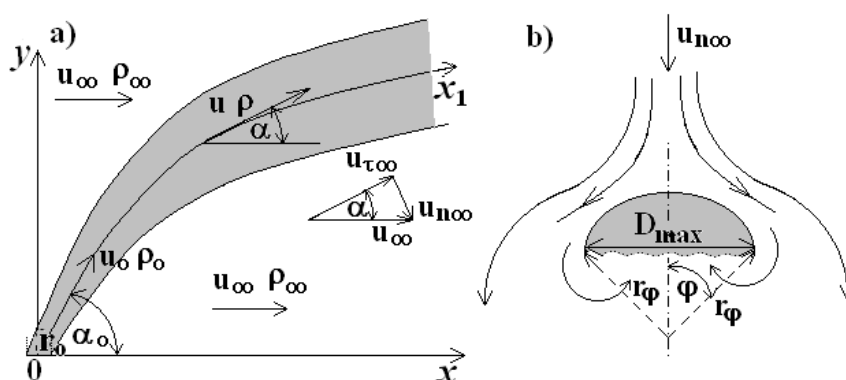


Рис.1. Схема движения турбулентной струи в сносщем потоке газа: а) сечение струи в плоскости симметрии ее движения; u_0, ρ_0 - начальные скорость и плотность струи, вытекающей из отверстия с радиусом r_0 под некоторым углом α_0 к оси x в поток внешней среды, движущейся вдоль оси x с плотностью ρ_∞ и скоростью u_∞ ; u, ρ - средние по сечению скорость и плотность струи; $u_{\tau\infty}$ и $u_{\nu\infty}$ - проекции u_∞ вдоль струи и перпендикулярно к ней; x_1 - криволинейная координата траектории струи; б) профиль поперечного сечения струи в форме сегмента с углом раствора φ и радиусом r_φ .

3.1. Необходимые упрощения в постановке задачи.

Горение турбулентных струй в реальных условиях отличается исключительным многообразием режимов и влияющих на него сопутствующих физико-химических процессов и конструктивных факторов. Поэтому с точки зрения поставленных целей исследования, а именно, выяснения и описания механизма воздействия турбулентности на процесс горения, необходимы существенные упрощения общей картины горения. В данной работе рассматривается горение одиночной струи горючего газа в сносщем потоке воздуха с плотностью ρ_∞ и температурой $T_\infty K$. Исходный состав струи, вытекающей из отверстия радиуса r_0 , с начальной скоростью u_0 , начальной температурой $T_0 K$ есть смесь горючего газа, обозначаемого индексом « f », и инертной примеси с начальной плотностью ρ_0

$$\rho_0 = (1 - \varepsilon_0)\rho_{f0} + \varepsilon_0\rho_{in0}$$

где ε_0 - объемная доля инертного газа.

Исключаются все особенности горения, связанные с начальными этапами его возникновения, т.е. предполагается, что реакция начинается сразу же с момента выхода струи горючего газа в окружающее пространство окислителя. Состояние исходных компонент газовой фазы и продуктов реакции описывается уравнением идеального газа

$$\rho_g = \mu P_\infty / RT$$

где μ - молекулярный вес, $P_\infty = 1.013 \cdot 10^5$ [паскаль] - давление, одно и то же для всей струи и внешней среды, $R = 8.314$ [кдж/моль К] - газовая постоянная. Химическая формула реакции записывается в виде

$$m_{ok}\mu_{ok} + \mu_f = m_{p1}\mu_{p1} + m_{p2}\mu_{p2}$$

где pi -индекс продуктов реакции H_2O и CO_2 , m_i - стехиометрический коэффициент, обозначающий количество молекул реагента « i » на одну молекулу реагента « f ». Эффектная скорость реакции W_i [кг/м³с] реагента « i » выражается через искомую W_f

$$W_i = \pm n_i W_f$$

$$n_i = m_i (\mu_i / \mu_f)$$

где знак «+» относится к исходным реагентам, «-» к продуктам реакции. Выделяемая в единице объема струи тепловая энергия горения $Q_T = \lambda_f W_f$, где λ_f - тепловыделение на единицу массы реагента « f ». Теплоемкость компонент C_{pi} [кдж/кг К] - предполагается функцией температуры и состава струи.

Предполагается, что с момента выхода струя движется в развитом турбулентном режиме со всеми характерными признаками турбулентности, позволяющим использовать уравнение (3). Текущие плотность, скорость и температура струи, из-за турбулентного перемешивания принимаются постоянными по поперечному сечению струи. Отметим, что на первый взгляд использование одномерного приближения представляется чрезмерным упрощением столь сложных явлений, какими являются процессы движения и горения турбулентных струй. При использовании классической методики усреднения поперечные профили скорости, концентрации, температуры в турбулентной струе принимают сложную (колоколообразную) форму с максимумом в центре струи, и постепенно уменьшаясь до заданного значения во внешней среде. Однако, при такой методике усреднения, исчезает понятие реально существующей, четкой границы раздела между областью турбулентного течения в струе и обтекающей ее внешней ламинарной средой. Течение в окрестности границы струи представляет собой чередующие зоны ламинарного и турбулентного течения, со времен классических работ Коррсина и Таунсенда описываемого как явление перемежаемости. Если проводить условное усреднение, т.е. в средних значениях учитывать вклад только по турбулентной фазе течения, то все упомянутые профили по поперечному сечению струи будут приближаться к плоской форме. Уже одно только это оправдывает использование постоянных по сечению струи значений искомых переменных скорости, температуры и концентраций. Но самое главное то, что, как будет видно из результатов предлагаемой работы, механизм смешения окислителя внешней среды и топлива струи целиком и абсолютно связан только с процессами крупномасштабного захвата внешней среды на границах струи, при описании которого детали распределения средних по сечению струи никакого значения не имеют.

3.2. Вывод уравнений движения и горения турбулентной струи в сносящем потоке.

В системе координат (x, y) касательная к траектории образует угол α с осью x . С учетом равенства $dy/dx = tg(\alpha)$ для криволинейной координаты x_1 имеем выражение

$$dx_1/dx = \left(1 + (dy/dx)^2\right)^{1/2} \equiv (1+t^2)^{1/2}/t$$

где введено сокращение $t = ctg(\alpha)$.

Уравнения баланса масс компонент реакции и инертной примеси, температуры, компоненты импульса вдоль оси x_1 получим, суммируя потоки этих величин через сечения x_1 и $x_1 + dx_1$, нормальные к траектории струи, дополнив их уравнением захвата (3), в котором x следует заменить на x_1 и вместо u_∞ взять ее проекцию u_{∞} на направление оси x_1

$$u_{\infty} = u_\infty \cos(\alpha) \equiv u_\infty t / (1+t^2)^{1/2}$$

и также уравнением баланса для нормальной к оси x_1 компоненты импульса. Последнее получим на основе следующих соображений. Как было сказано выше, искривление траектории происходит под динамическим напором обтекающего ее внешнего потока газа, точнее, его нормальной к оси струи составляющей скорости

$$u_{n\infty} = u_\infty \sin(\alpha) \equiv u_\infty / (1+t^2)^{1/2}$$

Рассматривая небольшой участок струи как цилиндрическое тело и полагая, что его обтекание имеет отрывной характер, силу сопротивления, действующую на участок струи некоторой малой длины dx_1 вдоль ее оси, запишем в виде

$$F_{fr} = (1/2)\gamma_{fr}\rho_\infty u_{n\infty}^2 (D_{\max} dx_1)$$

где γ_{fr} - коэффициент сопротивления обтекания струи, Искривление траектории приводит к появлению центробежной силы, уравновешивающей силу трения

$$F_c = \rho u^2 (S dx_1) / R$$

где R - абсолютная величина радиуса кривизны траектории струи

$$R = \left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2} / \left|d^2y/dx^2\right| \equiv (1+t^2)/(dt/dx_1)$$

Искомое уравнение получим, приравняв друг другу F_{fr} и F_c . Окончательно систему всех перечисленных уравнений представим в виде

$$\begin{aligned} d(\rho u S)/dx_1 &= \gamma \rho_\infty (|u - u_{\infty}| + \xi_i u_{\infty}) \Pi \\ d(\rho_i u S V_i)/dx_1 &= -W_i S + q_i \Pi \\ d(\rho u S)/dx_1 - \rho_\infty u_{\infty} (dS/dx_1) - \rho_\infty u_{ex} \Pi &= 0 \\ d(\rho u^2 S)/dx_1 - u_{\infty} d(\rho u S)/dx_1 &= 0 \\ \rho u^2 S (dt/dx_1) &= (1/2)\gamma_{fr}\rho_\infty u_{\infty}^2 D_{\max} \\ d(\bar{C}_p \rho u S T)/dx_1 &= \lambda_f W_f S + (\gamma C_{p\infty} \rho_\infty T_\infty (|u - u_{\infty}| + \xi_i u_{\infty}) - \sigma T^4) \Pi \end{aligned} \quad (6)$$

В полученной системе уравнений первое - уравнение захвата всей массы внешней среды (иначе уравнение баланса «турбулентной жидкости»; второе - баланс массы для каждого из компонент реакции и инертной примеси; V_i - объемная доля

i -го компонента на единицу длины струи; q_i - доля i -го компонента, захватываемого из внешней среды: q_{ok} задается формулой (4), а для q_{in} с учетом (1)-(3) имеем

$$q_{in} = \gamma \varepsilon_{\infty} \rho_{in\infty} (|u - u_{\tau\infty}| + \xi_i u_{\tau\infty}) \Pi$$

для остальных веществ $q_i = 0$; третье уравнение определяет скорость натекания (или эжекции) u_{ex} внешней среды на струю; оно имеет смысл баланса массы для внешней среды при заданной скорости захвата внешней среды u_c , определяемой формулой (2); оно было использовано при выводе четвертого уравнения системы - уравнения баланса для продольной компоненты скорости; пятое уравнение - баланс сил, действующих на струю по нормали к оси x_1 ; шестое уравнение - уравнение теплового баланса; В нем \bar{C}_p - среднее значение теплоемкости смеси

$$\bar{C}_p = \sum_i C_{pi} (\rho_i / \rho) V_i,$$

первое слагаемое в правой части - теплота реакции, 2-е - тепло захватываемой массы внешней среды, 3-е - сток тепла за счет излучения по закону Стефана-Больцмана, $\sigma = 5.673 \cdot 10^{-11}$ [кДж/К⁴м²с] - константа излучения.

К написанным уравнениям следует добавить два дополнительных условия, связывающих между собой V_i , ρ_i и ρ

$$\sum V_i = 1, \quad \sum \rho_i V_i = \rho$$

Для удобства последующих расчетов перейдем к безразмерным переменным, используя в качестве характерных масштабов скорости, длины и плотности параметры струи в выходном сечении $x=0$ u_0 , r_0 и ρ_0 . Искомые V_i найдем, интегрируя вторые уравнения системы (6). Подставив их в выражения для \bar{C}_p и ρ , в результате несложных, но громоздких преобразований получим

$$\bar{C}_p = C_{p0T} + C_{p\infty T} (1-u) + uW (C_{p1} n_{p1} + C_{p2} n_{p2} - C_{pok} n_{pok} - C_{pf})$$

$$\rho = \frac{\rho_{ok}}{\left[(1-u)(\rho_{ok\infty} / \rho_{\infty}) + u\rho_{ok0} + uW(m_{p1} + m_{p2} - m_{ok} - 1)(\mu_{ok} / \mu_f) \right]}$$

где C_{p0T} и $C_{p\infty T}$ - теплоемкости струи во входном сечении и внешней среды, вычисленные при текущей температуре струи T , W - расход реагента « f » на длине струи x_1

$$W = \int_0^{x_1} W_f S dx_1$$

Дальнейшие преобразования уравнений системы (6) удобно проводить, используя привычное понятие круглой струи, радиус которой r (иначе приведенный радиус струи) связан с площадью S соотношением $S = \pi r^2$. С учетом (5) переменную r_φ как функцию r и φ запишем в виде $r_\varphi = \pi F(\varphi) r$, где введено сокращение

$$F(\varphi) = 1 / (\pi(\varphi - \sin(\varphi)\cos(\varphi)))^{1/2}$$

Также выражая параметры S , Π , D_{max} через r и φ , уравнения системы (6) (без второго и третьего уравнений, которые уже использовались) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
d(\rho ur^2)/dx_1 &= 2\gamma_1\gamma\rho_\infty(|u-u_\infty|+\xi_t u_\infty)r \\
d(\rho u^2 r^2)/dx_1 - u_\infty d(\rho ur^2)/dx_1 &= 0 \\
\rho u^2 r dt/dx_1 &= (1/2)\gamma_2\gamma_{fr}\rho_\infty u_\infty^2 \\
d(\bar{C}_p \rho ur^2 T)/dx_1 &= \lambda_f W_f r^2 + 2\gamma_1(\gamma C_{p\infty}\rho_\infty T_\infty(|u-u_\infty|+\xi_t u_\infty) - (\sigma/\rho_0 u_0)T^4)r
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\gamma_1 = (\varphi + \sin(\varphi))F(\varphi)$, $\gamma_2 = \sin(\varphi)F(\varphi)$ - константы, учитывающие изменение формы поперечного сечения струи.

Систему (7) дополним уравнениями траектории

$$dx/dx_1 = t/(1+t^2)^{1/2}, \quad dy/dx_1 = 1/(1+t^2)^{1/2}$$

и начальными условиями в точке $x_1=0$. В соответствии с принятой схемой истечения струи эти условия запишем в виде

$$u=1; \quad \rho=1; \quad S=\pi; \quad x=y=0; \quad t=\text{ctg}(\alpha_0)$$

Осталась проблема оценки эффективной скорости горения W_f . Как отмечалось ранее, величина W_f формируется под влиянием двух факторов, характеризующих процесс смешения – захвата окислителя из внешней среды и последующего перемешивания реагентов внутри струи. Для оценки скорости захвата окислителя q_{ok} было получено выражение (4). Очевидно, величина q_{ok} задает максимум возможных значений параметра W_{ok} , достигаемый при бесконечном возрастании интенсивности турбулентного смешения внутри струи. В этом случае для W_f и W (с учетом интегрирования первого уравнения системы (7)) получим выражения

$$\begin{aligned}
W_f &\equiv q_{ok}/(n_{ok}r^2) \equiv 2\gamma_1\gamma\rho_\infty\beta_\infty(|u-u_\infty|+\xi_t u_\infty)/r \\
W &= \beta_\infty(\rho ur^2 - 1)
\end{aligned}$$

где для краткости записи введено обозначение

$$\beta_\infty = (1-\varepsilon_\infty)\rho_{ok\infty}/(n_{ok}\rho_\infty)$$

Вдоль струи величина W монотонно возрастает, достигая максимума при полном исчерпании реагента « f », равного его входному потоку $W_{\max} = \rho_{f0}(1-\varepsilon_0)$. При этом для переменной $\omega = \rho ur^2$ получим значение $\omega_{\max} = 1 + \rho_{f0}(1-\varepsilon_0)/\beta_\infty$. При $\omega > \omega_{\max}$ величина W в уравнениях будет иметь постоянное значение, равное W_{\max} , а $W_f \equiv 0$.

4. РАСЧЕТЫ И СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Полученные соотношения и уравнения помимо реакционных и физико-химических параметров реагентов, в частности, взятых из [13] зависимостей теплоемкости от температуры и состава, содержат множество параметров, определяющих общие условия движения и горения струи. Это угол α_0 между начальным направлением струи и внешнего потока газа, параметры ε_0 и ε_∞ - доли инертной примеси в струе на входе и во внешней среде, начальная скорость u_0 и температура T_0 струи на входе, скорость u_∞ , плотность ρ_∞ и температура T_∞ внешней среды, интенсивность мелкомасштабных пульсаций внешней среды ξ_t .

Теория содержит три константы γ , φ , γ_{fr} , по своему физическому смыслу не зависящие от перечисленных выше параметров движения и горения и поэтому рассматриваются как универсальные константы. Значение константы γ принято равным 0.11 (оно получается при усреднении классического профиля скорости однородной затопленной струи [1] по ее поперечному сечению и имеет смысл полуугла ее расширения). Угол φ характеризует степень деформации поперечного сечения струи. Во всех последующих расчетах его значение принималось равным 60° , характерным для подъема пузырей Девиса [14] и для струи в сносящем потоке [1]. Значение коэффициента трения поперечного обтекания струи принято равным 0.75. Для сравнения напомним, что при турбулентном обтекании круглого цилиндра величина $\gamma_{fr} \approx 0.6 - 0.8$ [15].

Обилие независимых параметров даже для такой предельно упрощенной схемы горения, как рассмотренной в данной работе, указывает на трудности поиска и выявления общих законов горения на основе опытных данных. Но закономерности, установленные для частных вариантов горения турбулентных струй, по крайней мере, на качественном уровне могут быть использованы для проверки правильности теоретических расчетов.

4.1. Примеры расчета траекторий движения турбулентных струй в сносящем потоке в отсутствии реакции.

В данном разделе приводятся результаты расчета траекторий турбулентной струи в сносящем потоке для различных комбинаций значений независимых параметров течения, дающие наглядное представление о влиянии этих параметров на геометрические характеристики струйного потока. Для сравнения с экспериментом на рисунках приведены расчеты по эмпирическим зависимостям Шандорова, взятым из [1].

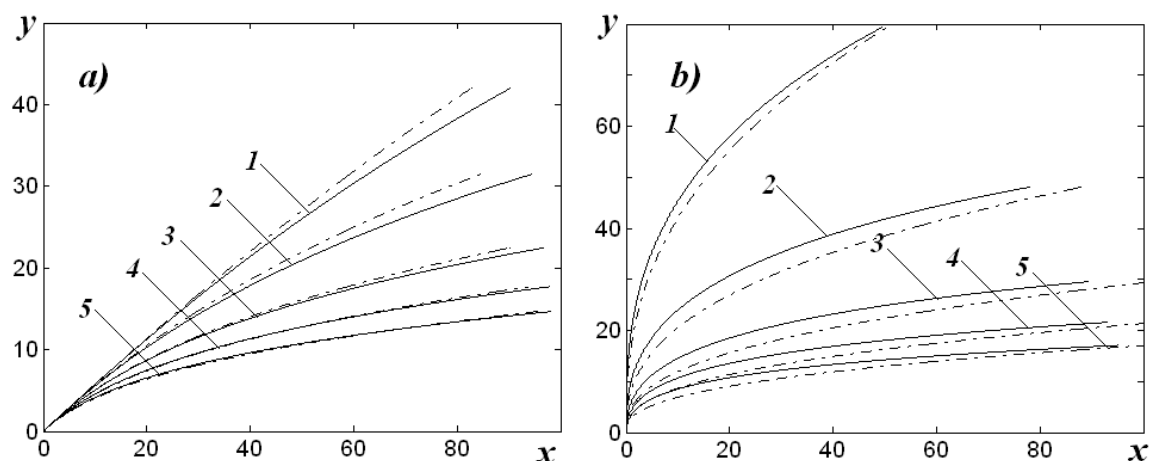


Рис.2. Кривые траекторий струи метана, выходящей во внешний поток под углом $\alpha_0 = 30^\circ$ (на рис.2а) и под прямым углом $\alpha_0 = 90^\circ$ (на рис.2б) и последовательно возрастающих значениях относительной скорости сносящего потока: 1 - $u_\infty / u_0 = 0.02$; 2 - 0.05; 3 - 0.1; 4 - 0.15; 5 - 0.2; штрих пунктиры - эмпирические корреляции из [1].

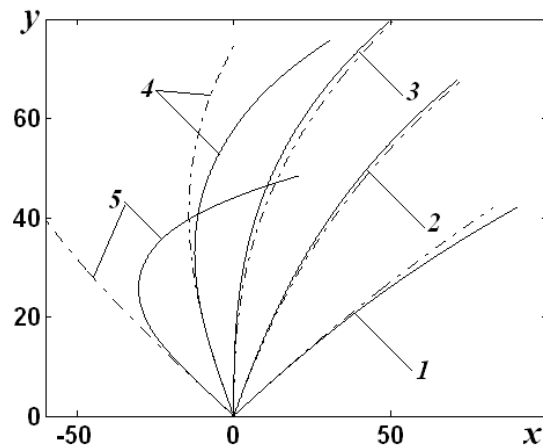


Рис.3. Кривые траекторий струи метана при различных углах выхода к направлению внешнего сносящего потока: 1 - $\alpha_0 = 30^\circ$; 2 - 60° ; 3 - 90° ; 4 - 120° ; 5 - 150° ; и фиксированной скорости сносящего потока $u_\infty / u_0 = 0.02$; штрих пунктиры – эмпирические корреляции из [1].

4.2. Горение турбулентной струи метана в воздухе при $u_\infty = 0$.

На рис.2,3 приведены некоторые характеристики горения турбулентной струи метана ($\mu_f = 16$, $\rho_f = 0.692 \text{ кг/м}^3$ и $\lambda_f = 471 \cdot 10^4 \text{ кдж/кг}$) в неподвижной внешней среде при $T_0 = T_\infty = 298.1 \text{ К}$. На рис.4 показаны расчеты зависимости средней по сечению струи температуры $T(x)$ от безразмерной координаты $x \equiv x/r_0$ при различных условиях горения струи с учетом эффектов теплового излучения для ряда чисел Рейнольдса в выходном сечении струи $Re = u_0 r_0 / \nu$ в интервале $3000 \leq Re < \infty$.

На каждом из рис.4 кривые рассчитывались при фиксированном числе Рейнольдса, возрастающем от серии к серии: для кривых серии а) $Re = 3000$; б) $Re = 25000$; в) $Re \rightarrow \infty$; и одном и том же наборе значений параметра ε_0 из интервала $0 \leq \varepsilon_0 < 1$. Как и следовало ожидать, с ростом Re интенсивность горения увеличивается. Фактически это происходит из-за того, что с возрастанием начальной скорости струи u_0 уменьшаются относительные потери теплоты на излучение. Можно отметить естественную тенденцию к снижению абсолютного максимума температуры по мере уменьшения числа Re , а также сокращению длины выгорания струи с увеличением ε_0 . Однако неожиданным выглядит тот результат, что максимум температуры при уменьшении Re переходит к струе, разбавленной инертной примесью. Так в серии кривых метана при $Re = 3000$ даже кривая с $\varepsilon_0 = 0.8$ имеет максимум T больший, чем кривая струи чистого топлива. Объясняется этот эффект особенностями взаимодействия противоположно направленных механизмов притока тепла в уравнении теплового баланса в сочетании с тем теплофизическим свойством смеси газа, что по мере насыщения струи инертной примесью происходит существенное уменьшение ее средней теплоемкости, кривые которой показаны на рис.3.

Расчет кривых длины факела горения L проводился в соответствии с определением, данным в работе [16], как расстояние от точки максимума температуры струи до сечения, в котором ее температура падает до $T \approx 800 - 900 \text{ К}$.

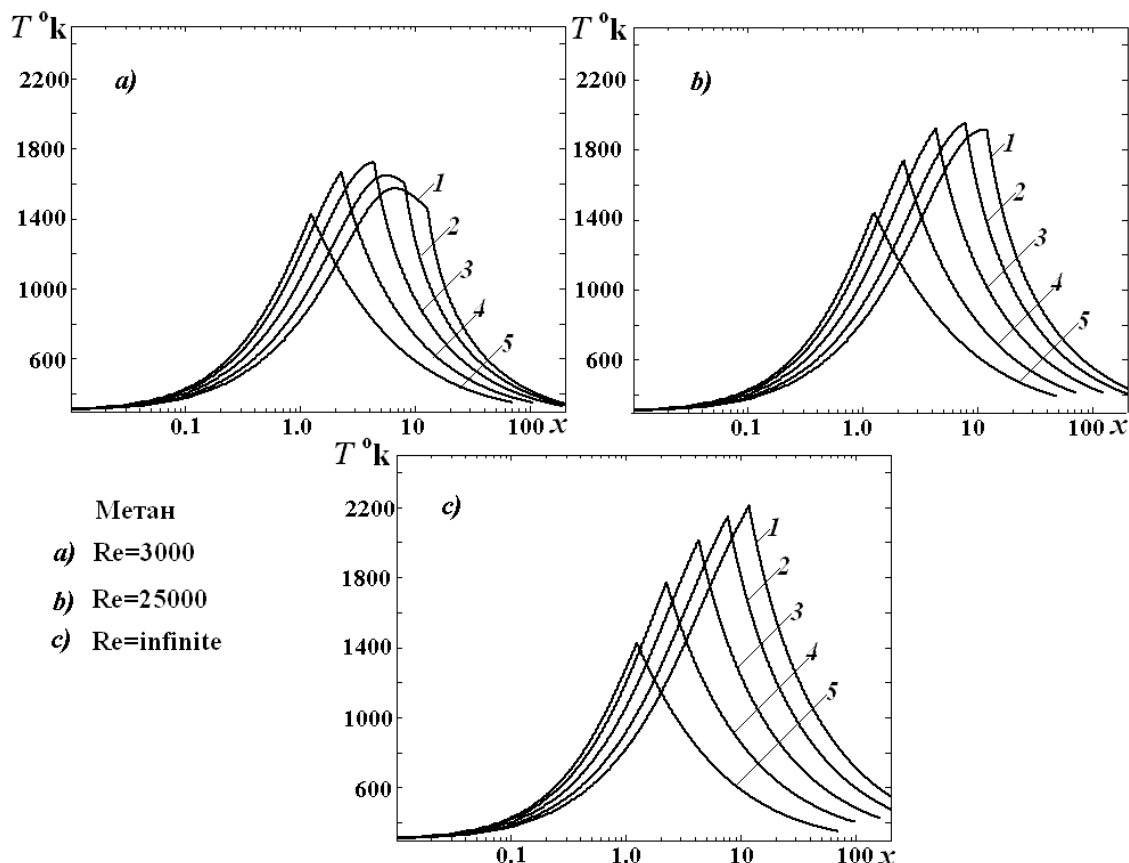


Рис.4. Средняя температура вдоль струи $T(x)$ при некоторых значениях числа Рейнольдса и объемной доли инертной примеси (азота) ε_0 : для кривых с номером 1 $\varepsilon_0 = 0$; 2 - 0.3; 3 - 0.6; 4 - 0.8; 5 - 0.9; для всех кривых рис.4 a $Re = 3000$; рис.4 b - $Re = 16000$; рис.2 c - $Re \rightarrow \infty$.

На рис.5 a приведены кривые зависимости $L(Re)$ при $\varepsilon_0 = 0$ и на рис.5 b $L(\varepsilon_0)$ при $Re = 6000$. Сплошные кривые - расчет по уравнениям настоящей теории: кривые с номером 1 рассчитаны при температуре для конца факела $T(x=L) = 800K$, а кривые с номером 2 при $T(x=L) = 900K$ (естественно, что протяженность последних будет несколько меньше). Пунктирными линиями нанесена эмпирическая зависимость из [16]. Отметим, что экспериментально установленную закономерность возрастания L с ростом Re , трудно объяснить с точки зрения классических представлений. Действительно, с одной стороны гидродинамика турбулентных струй от молекулярной вязкости не зависит, а с другой с ростом Re интенсивность перемешивания и, следовательно, эффективная скорость горения должны только возрастать. При этом длина факела горения может только сокращаться, в пределе $Re \rightarrow \infty$, достигая некоторого минимального значения L_{min} . Подтверждением тому служат расчеты на основе моделей турбулентной диффузии [2-4], результаты которых также не зависят от Re . В рамках представленной теории парадоксальный факт увеличения длины факела горения L с ростом Re объясняется тем, что с ростом Re уменьшаются относительные потери на излучение. Чтобы подчеркнуть роль фактора теплового излучения, на рисунках приведены кривые с индексом r (кривые $1r$ и $2r$), рассчитанные при тех же условиях, что и кривые 1 и 2, но без учета эффектов излучения. Видим, что без учета теплового излучения кривые $L(Re)$

и $L(\varepsilon_0)$ лежат существенно выше экспериментальной зависимости, при этом, как и следовало ожидать, L от Re не зависит. Сопоставляя результаты теории и эксперимента с учетом того, что в теоретических расчетах не использовалось ни одной подгоночной константы, можно отметить их удовлетворительное согласие для кривых $L(Re)$ и $L(\varepsilon_0)$.

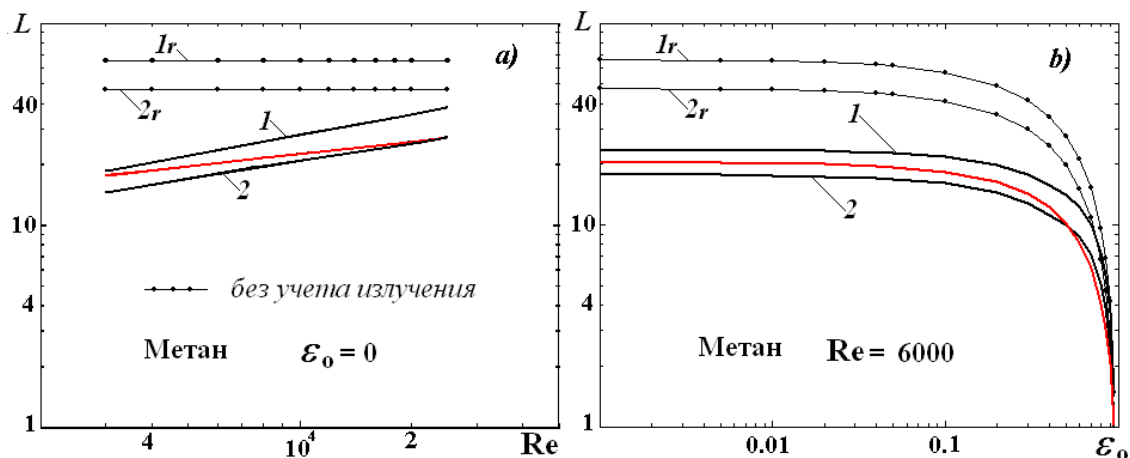


Рис.5. Длина факела горения струи метана: на рис.5а - как функция числа Рейнольдса; на рис.5б - как функция параметра ε_0 . Сплошные кривые - теоретический расчет: кривые 1 получены при $T(L) = 800$ К; с номером 2 при $T(L) = 900$ К; пунктирные - экспериментальная зависимость из [13]. Кривые $1r$ и $2r$ - расчет при тех же условиях, что и кривые 1 и 2, но без учета эффектов излучения.

Как видно из приведенных кривых, предложенная теория движения турбулентной струи в сносящем потоке, а также горения в неподвижной внешней среде качественно и количественно описывает результаты классических экспериментов, подтверждая тем самым справедливость принятых допущений теории, что дает основание для дальнейшего обобщения теории в принятом направлении исследования горения турбулентных струй и проведения расчетов в широком интервале начальных газосодержаний, скоростей и других исходных параметров струйных течений.

4.3. Горение турбулентных струй в сносящем потоке.

Особенности горения турбулентных струй в сносящем потоке иллюстрируют кривые траекторий струй и длины факела горения при различных условиях движения и горения, представленные на рис.6-9. Получены количественные оценки влияния таких сопутствующих факторов горения как угол выхода струи горючего газа в сносящий поток окислителя, относительная скорость сносящего потока, влияние интенсивности турбулентных пульсаций внешней среды. На рис.6 показаны траектории горящих струй метана при различных углах выхода струи в сносящий поток и фиксированной скорости внешнего течения. Для сравнения показаны кривые траекторий при тех же условиях движения, но в отсутствии горения (пунктирные кривые) и с горением, но без учета эффектов излучения (штрих-пунктирные кривые). Тот факт, что горящая струя при тех же условиях движения сносится сильнее, чем не горящая, объясняется существенным уменьшением плотности горячей струи и, соответственно, увеличением воздействием на нее относительного

динамического напора внешнего потока. Кривые траекторий на рис.7, рассчитанные при фиксированном угле выхода струи и некотором наборе значений относительной скорости внешнего потока, иллюстрируют влияние скорости сносящего потока на форму траектории горячей струи. Для сравнения также приведены кривые траекторий без горения и с горением, но без излучения, физический механизм отличия которых от кривых с горением тот же, что и для кривых на рис.6.

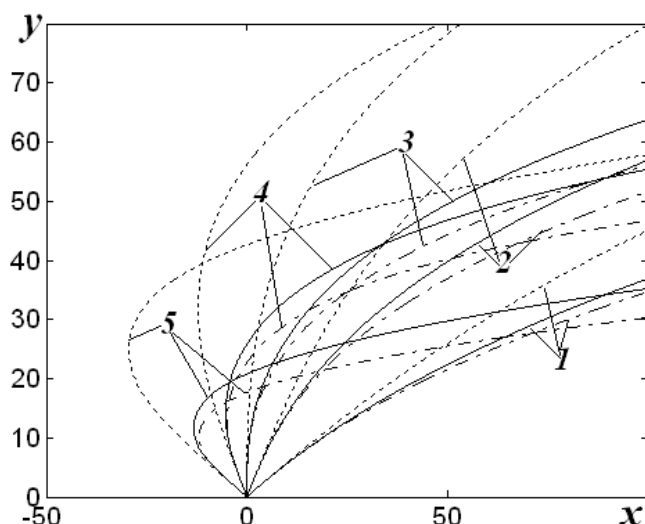


Рис.6. Траектории струи метана при различных углах выхода струи во внешний поток окислителя – воздуха, $u_\infty/u_0 = 0.02$, $Re = 6000$: 1 - $\alpha_0 = 30^\circ$; 2 - 60° ; 3 - 90° ; 4 - 120° ; 5 - 150° ; пунктирные кривые - без горения; штрихпунктирные - горение без учета излучения.

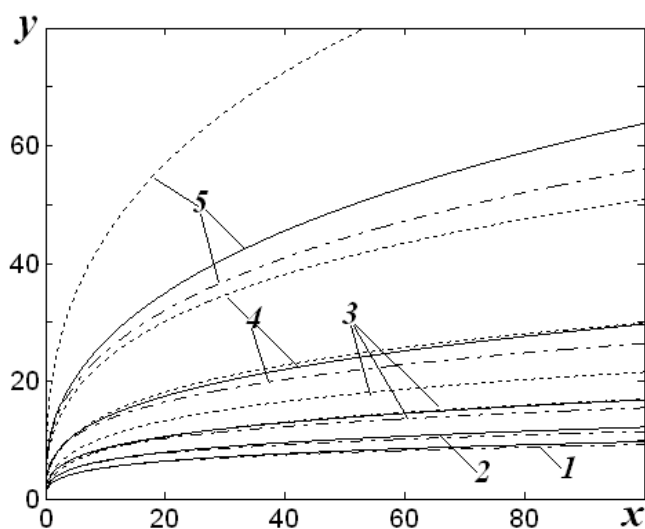


Рис.7. Траектории при угле выхода $\alpha_0 = 90^\circ$ и ряде значений скорости сносящего потока: 1 - $u_\infty/u_0 = 0.2$; 2 - 0.15; 3 - 0.1; 4 - 0.05; 5 - 0.02; и прочих условий, что и на рис.6.

На рис.8 и 9 представлены кривые длины факела горения как функции числа Рейнольдса струи на выходе во внешнюю среду (но фактически выходной скорости струи), определенной как то расстояние вдоль криволинейной оси струи x_1 , на котором ее температура падает до $800K$.

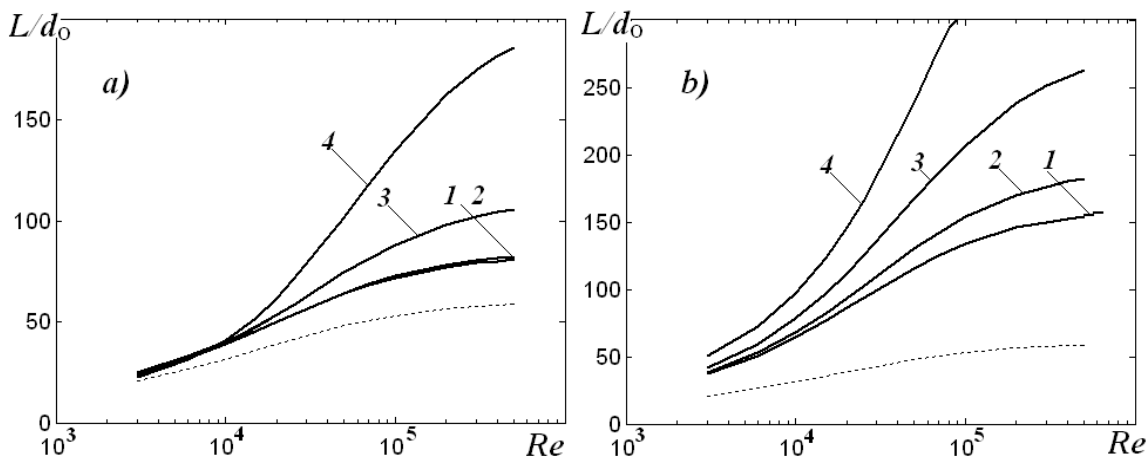


Рис.8. Длина факела горения при температуре конца факела $T = 800\text{K}$ и скорости сносящего потока $u_\infty/u_0 = 0.02$ на рис.8a и $u_\infty/u_0 = 0.1$ на рис.8b и различных углах наклона струи: для кривых 1 $\alpha_0 = 0^\circ$; 2 - 30° ; 3 - 60° ; 4 - 90° кривые пунктиром - L/d_0 при горении в неподвижной воздушной среде.

На рис.8 кривые рассчитывались для набора углов выхода струи во внешний поток, нулевым значением параметра внешней турбулентности и фиксированном значении скорости внешнего потока, на каждом из рис.8a и рис.8b. Характерной особенностью полученных кривых оказалось резкое возрастание длины факела горения как с ростом угла наклона струи, так и с увеличением скорости внешнего потока. С точки зрения представленной теории этот эффект горения объясняется более быстрым приближением скорости струи к скорости внешнего течения с увеличением угла выхода струи в сносящий поток и, следовательно, уменьшением скорости захвата окислителя внешней среды и, соответственно, уменьшением эффективной скорости горения. Кривые рис.9 иллюстрируют влияние фактора внешней турбулентности на длину факела горения.

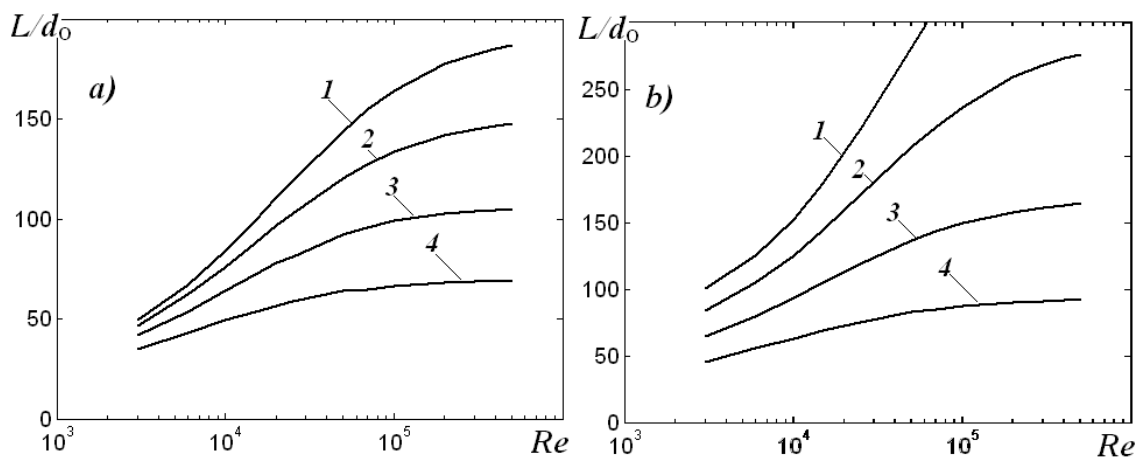


Рис.9. Длина факела горения при скорости сносящего потока $u_\infty/u_0 = 0.2$, углах наклона струи $\alpha_0 = 0^\circ$ на рис.9a и $\alpha_0 = 90^\circ$ на рис.8b и различных значениях параметра интенсивности турбулентных пульсаций внешней среды $\xi_t = v_{*\infty}/u_\infty$: для кривых 1 $\xi = 0.025$; 2 - 0.05; 3 - 0.1; 4 - 0.2.

На каждом из рис.9а и рис.9b кривые рассчитывались при фиксированных значениях угла выхода струи – на рис.9а при $\alpha_0 = 0^\circ$ и на рис.9b при $\alpha_0 = 90^\circ$, и одном и том же наборе значений параметра интенсивности внешней турбулентности ξ_i . Возрастание длины факела горения с увеличением угла выхода струи и, напротив, интенсификация горения с увеличением параметра ξ_i объясняется действием тех же механизмов движения и горения, что и при интерпретации кривых предыдущих рисунков.

5. ВЫВОДЫ

Теоретически решается задача движения и горения турбулентной струи горючего газа в сносящем потоке окислителя - воздуха. В отличие от ранее разрабатывавшихся полуэмпирических моделей движения и горения турбулентных струй учтена главная особенность движения турбулентной струи – наличие четкой границы раздела между струей и внешней ламинарной средой. На основе представлений о крупномасштабных вихрях, образующихся на возмущенной границе струи, получено уравнение захвате (турбулизации) внешней среды, одновременно явившееся замыкающим уравнением для системы интегральных уравнений движения турбулентных струй. Учтены два важных фактора горения – зависимость теплоемкости струи от температуры и состава и тепловое излучение в рамках закона Стефана-Больцмана. Фактор границы как источника турбулентности дал основание описывать искомые параметры струи (скорость, концентрации, температуру) в упрощенной форме однородных распределений по сечению струи, а поверхность струи рассматривать как поверхность излучения при заданной температуре струи. Скорость захвата реагента из внешней среды определяет величину максимально возможной скорости горения при любых условиях перемешивания внутри струи. Именно этот предельный вариант смешения рассмотрен в работе для качественной оценки искомых параметров процесса горения. Все расчеты параметров струйного горения проведены без привлечения подгоночных констант и эмпирических корреляций. Правомерность физических предпосылок предложенной теории нашло подтверждение при сравнении результатов расчета с имеющимися экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г.Н.* Теория турбулентных струй. – М.: Наука, 1984. – 715 с.
2. *Вулис Л.А., Ярин Л.П.* Аэродинамика факела. – Л.: Энергия, 1978. – 216 с.
3. *Сполдинг Д.Б.* Горение и массообмен. – М.: Машиностроение, 1985. – 236 с.
4. *Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р.* Горение. Физические и химические аспекты. – М.: Физматлит, 2003. – 540 с.
5. *Великодный В.Ю., Воротилин В.П., Еремеев А.В., Никитенко Л.К., Яновский Ю.Г.* Теоретическое и экспериментальное исследование газожидкостных турбулентных струй с закруткой / Конференция «Современные проблемы механики гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2005. – Т.3. – С.368-377.
6. *Воротилин В.П., Великодный В.Ю.* О механизме горения турбулентных струй / Всероссийская конференция «Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Успехи, проблемы, перспективы». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2010. – С.122-136.

7. *Воротилин В.П.* К теории горения турбулентных струй с учетом эффектов излучения / Всероссийская конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, структурно-сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2011. – С.99-109.
8. *Воротилин В.П.* О горении турбулентных струй в спутном потоке / Всероссийская конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2011. – С.158-171.
9. *Corrsin S., Kistler A.L.* Free-stream boundaries of turbulent flows / NASA Rept. №1244, 1955.
10. *Brown G.L., Roshko A.* Density effect and large structure in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol.64. – P.775-816.
11. *Westerweel J., Fukushima C., Pedersen J.M., Hunt J.C.R.* // Momentum and scalar transport at the turbulent/non-turbulent interface of a jet // J. Fluid Mech. – 2009. – Vol.631. – P.199-230.
12. *Аннушкин Ю.М.* Основные закономерности выгорания турбулентных струй водорода в воздушных каналах // ФГВ. – 1981. – Т.17. – №4. – С.59.
13. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. т. I и II // Под ред. В.П.Глушко. – Изд. АН СССР, 1978-1982гг.
14. *Бетчелор Дж.* Введение в динамику жидкостей. –М.: Мир, 1973. – 756 с.
15. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. –М.: Наука, 1969. – 742 с.
16. *Полежаев Ю.В., Воробьев Б.А., Коровин Г.К.* Экспериментальное исследование длины свободного диффузионного факела горючих газов, разбавленных инертными газами // ИФЖ. – 2010. – Т.83. – №2. – С.298-303.

УДК 532 (075.8)

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Исмаилова Ш.Г., Гаджиева Г.Ф., Гахраманов П.Ф., Исмаилов Р.Ш.

Сумгаитский Государственный Университет, г. Сумгаит, Азербайджан

РЕЗЮМЕ

Рассматривается построение математических моделей движения двухфазных сплошных сред с тепломассообменом. Получены необходимые уравнения движения и критерии подобия гидродинамических процессов.

Ключевые слова: двухфазная среда; континуум; тепломассообмен; реологические уравнения; гидродинамический процесс; критерии подобия; краевые условия

1. ВВЕДЕНИЕ

Круг проблем, относящихся к механике гетерогенных сред, весьма обширен и особенно интенсивно развивается в последнее время. Это вызвано важными практическими приложениями в задачах: нефтегазодобычи; транспорта нефти, газа и других жидкостей; технологических процессов, машин и оборудования; гидро-, тепло- и атомной энергетики; авиационной, космической и ракетной техники; охраны окружающей среды; химической технологии и многих других. Характерной особенностью гетерогенных сред является наличие в потоке несущей и несомой фаз (жидкость-твердые частицы или пузырьки газа, газ-капли жидкости или твердые частицы), между которыми существует обмен массой, импульсом и энергией. Кроме того, специфической особенностью рассматриваемой среды является также и то, что когда обе фазы можно считать несжимаемыми, гетерогенная система ведет себя как сжимаемая среда.

К настоящему времени основные уравнения движения гетерогенных сред являются установленными [1-5 и др.] при отсутствии внешних источников (стоков) массы, импульса и энергии потока среды. При этом суммарная масса смеси вследствие присоединения (через проницаемый контур) к ней новой массы (или отсоединения от нее) значительно изменяется. Такие потоки часто встречаются в задачах вдува (или отсоса) при управлении пограничным слоем сепарационных систем, коллекторных теплообменников, диффузорных и конфузорных каналов, сопел Лавала с перфорированными стенками; рассеивающих выпусков; распределительных (или сборных) нефте- и газопроводов и др. Общим для этих задач является то, что движения среды в их проточной части происходит с переменной массой.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представим гетерогенную среду в виде совокупности большого числа различных групп частиц (молекул, капель, пузырей, твердых включений и др.), находящихся в непрерывном хаотическом движении. Для математического описания такой среды будем использовать осредненное описание движения [1] с введением

понятия многоскоростного континуума и взаимопроникающего движения его составляющих. Многоскоростной континуум состоит из совокупности отдельных веществ, каждое из которых относится к своей составляющей (фазе или компоненте) смеси и заполняет фиксированный объем всей системы. Для каждого из этих составляющих континуумов, входящих в состав смеси, в каждой точке объема можно определить среднюю плотность, скорость, температуру и другие кинематические и динамические параметры, относящиеся к своему континууму и своей составляющей смеси, определяемые как функции четырехмерного пространства $f_i(x, y, z, t)$. Для определения параметров двухфазных сред выделим объем смеси V , ограниченный поверхностью S . Пусть в некотором объеме (считаем момент времени t фиксированным) с массой m , содержится n фаз с объемами $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ ($V = \sum_{i=1}^n V_i$) и массами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ ($m = \sum_{i=1}^n m_i$).

Подсчитаем объемную концентрацию. Для этого рассмотрим объем V_i , занимаемый i -й фазой и отнесем ее ко всему объему смеси V . Предел полученного количества (при стягивании V в некоторую точку a) дает объемную концентрацию этой фазы в данной точке, $\varphi_i = \lim_{V \rightarrow 0} (V_i/V)$. Здесь и в дальнейших рассуждениях слова «объем стягивается в точку» и запись $V \rightarrow 0$ будут означать переход к физически бесконечно малому объему (т.е. объему, достаточно малому по сравнению с масштабом задачи, но большему по сравнению с межмолекулярными расстояниями). Остановимся на понятиях средней плотности, скорости и напряжения. Под плотностью гетерогенной среды ρ будем понимать предел отношения массы смеси m , содержащейся в объеме V , к этому объему, т.е. $\rho = \lim_{V \rightarrow 0} (m/V)$. Тогда истинная плотность i -й фазы будет $\rho_i = \lim_{V_i \rightarrow 0} (m_i/V_i)$, а пропорциональная плотность $\rho_{i0} = \lim_{V \rightarrow 0} (m_i/V)$. Следовательно, можно написать следующие соотношения $\rho_{i0} = \rho_i \varphi_i$, $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_{i0} = \sum_{i=1}^n \rho_i \varphi_i$, $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$. Теперь можно определить среднюю скорость и

напряжения. Скорость двухфазной среды $\vec{u} = \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_i \varphi_i \vec{u}_i$, где \vec{u}_i - скорость i -й фазы. Напряжения внешних массовых и поверхностных сил, действующих на среду,

будут $\vec{F} = \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_i \varphi_i \vec{F}_i$ и $\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \vec{\sigma}_i$ (где \vec{F}_i и $\vec{\sigma}_i$ - напряжения массовых и поверхностных сил, действующих на i -ю фазу смеси). Помимо указанных внешних сил, внутри объема среды за счет взаимодействия отдельных фаз возникают еще так называемые силы взаимодействия. Они обусловлены скольжением одних фаз относительно других [1].

При движении гетерогенной сплошной среды с переменной массой учитывается, что в каждой ее точке с координатами x, y, z в данный момент времени t к ней присоединяется (или от нее отсоединяется) элементарная масса i -й фазы со скоростью \vec{u}_{*i} . Причем вектор скорости \vec{u}_{*i} на некоторую величину может отличаться от вектора скорости основной массы i -й фазы \vec{u}_i (т.е. $\vec{u}_i \neq \vec{u}_{*i}$). Поскольку дополнительная элементарная масса может присоединяться к

фарсированной частице (или отсоединяться от нее) с различных направлений, то вводится в рассмотрение: q_{*i} - поток массы, $\vec{u}_{*i}q_{*i}$ - поток импульса и $(e_{*i} + u_{*i}^2/2)q_{*i}$ - поток энергии за единицу времени на единицу объема.

Таким образом, при выводе основных уравнений движения гетерогенная (неоднородная) среда рассматривается как континуум, состоящий из нескольких (по крайней мере из двух) фаз, например, несущей (жидкости, газа или пара) и несомой (твердых частиц, пузырей или каналь), массы которых и среды в целом со временем непрерывно изменяются вследствие отсоединения от них или присоединения к ним новых масс обеих фаз.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для вывода соответствующих уравнений выделим ограниченный поверхностью S произвольной объем V и рассмотрим в нем i -ю фазу. Согласно законам сохранения запишем следующие балансовые уравнения в интегральной форме

1. уравнение баланса массы

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \varphi_i) = - \int_S (\rho_i \varphi_i u_{in}) dS + \int_V (q_{*i} + (-1)^i \chi) dV, \quad i=1,2. \quad (1)$$

2. уравнение баланса импульса

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \varphi_i \vec{u}_i) dV = - \int_S [(\rho_i \varphi_i \vec{u}_i) u_{in} - \varphi_i \vec{\sigma}_{in}] dS + \int_V [(\rho_i \varphi_i \vec{F}_i + \vec{u}_{*i} q_{*i}) + (-1)^i (\vec{R}_i + \vec{u}_i \chi)] dV \quad (2)$$

3. уравнение баланса кинетического момента

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r}_i \times \vec{u}_i \rho_i \varphi_i) dV = - \int_S [(\vec{r}_i \times \vec{u}_i \rho_i \varphi_i) u_{in} - \vec{r}_i \times \varphi_i \vec{\sigma}_{in}] dS + \int_V [(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \rho_i \varphi_i) + (\vec{r}_i \times \vec{u}_{*i} q_{*i}) + (-1)^i (\vec{r}_i \times \vec{R}_i + \vec{r}_i \times \vec{u}_i \chi)] dV \quad (3)$$

4. уравнение баланса кинетической энергии

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \varphi_i u_i^2 / 2) dV = - \int_S [(\rho_i \varphi_i u_i^2 / 2) u_{in} - \varphi_i \vec{u}_i \cdot \vec{\sigma}_{in}] dS + \int_V [(\rho_i \varphi_i \vec{F}_i \cdot \vec{u}_i + N_i + q_{*i} u_{*i}^2 / 2) + (-1)^i (\vec{R}_i \cdot \vec{u}_i + \chi u_i^2 / 2)] dV \quad (4)$$

5. уравнение баланса полной энергии

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (e_i + u_i^2 / 2) \rho_i \varphi_i dV = - \int_S [\rho_i \varphi_i (e_i + u_i^2 / 2) u_{in} - \varphi_i \vec{u}_i \cdot \vec{\sigma}_{in} + \varphi_i \vec{q}_{in}^*] dS + \int_V [\rho_i \varphi_i \vec{F}_i \cdot \vec{u}_i + (e_{*i} + u_{*i}^2 / 2) q_{*i} + (-1)^i (\vec{R}_i \cdot \vec{u}_i + Q_i + (e_{\chi i} + u_{\chi i}^2 / 2) \chi)] dV \quad (5)$$

где: ρ_i, φ_i, u_i - истинная плотность, объемная концентрация и скорость i -ой фазы (компонентов); \vec{u}_{*i} - скорость присоединяемой (или отсоединяемой) массы; q_{*i} - удельная присоединяемая (или отсоединяемая, при этом $q_{*i} < 0$) масса; χ - удельная масса фазового перехода; $\vec{F}_i, \vec{\sigma}_i$ - удельный вектор массовых и тензор напряжения

поверхностных сил; \vec{u}_χ - скорость массы межфазного перехода; \vec{R}_i - удельный вектор межфазных сил; \vec{r}_i - радиус вектор; n - внешняя нормаль; e_i - удельная внутренняя энергия i -й фазы; e_{*i}, e_χ - соответственно удельная внутренняя энергия присоединяемой (или отсоединяемой) массы и фазовых превращений; Q_i - интенсивность межфазного теплообмена; N_{*i} - удельная мощность внутренних сил; \vec{q}_i^* - вектор удельного теплового потока к i -й фазе смеси.

В области непрерывных движений интегральные уравнения баланса масс, импульсов и энергии, записанные для i -й (несущей или несомой) фазы (1)-(5), эквивалентны дифференциальным уравнениям. Если в правой части (1)-(5) по формуле Гаусса-Остроградского преобразуем интегралы по поверхности S в интегралы по объему V , то после соответствующих преобразований получим для i -й фазы следующие дифференциальные уравнения

1. уравнение переноса массы (уравнение неразрывности)

$$\frac{d}{dt}(\rho_i \varphi_i) + \rho_i \varphi_i \operatorname{div} \vec{u}_i = q_{*i} + (-1)^i \chi, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

2. уравнение переноса импульса (уравнение динамики)

$$\rho_i \varphi_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \rho_i \varphi_i \vec{F}_i + \operatorname{div}(\varphi_i \vec{\sigma}_i) + (\vec{u}_{*i} - \vec{u}_i) q_{*i} + (-1)^i [\vec{R}_i + (\vec{u}_\chi - \vec{u}_i) \chi] \quad (7)$$

3. уравнение симметричности тензора напряжений

$$\vec{\sigma}_{ijk} = \vec{\sigma}_{ikj} \quad (8)$$

4. уравнение переноса кинетической энергии

$$\begin{aligned} \rho_i \varphi_i \frac{d}{dt} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) &= \rho_i \varphi_i \vec{F}_i \vec{u}_i + \operatorname{div}(\varphi_i \vec{\sigma}_i \vec{u}_i) + N_{*i} + \\ &+ \frac{1}{2} (u_{*i}^2 - u_i^2) q_{*i} + (-1)^i \left[\vec{R}_i \vec{u}_i + \frac{1}{2} (u_\chi^2 - u_i^2) \chi \right] \end{aligned} \quad (9)$$

5. уравнение переноса полной энергии

$$\begin{aligned} \rho_i \varphi_i \frac{d}{dt} \left(e_i + \frac{u_i^2}{2} \right) &= \rho_i \varphi_i \vec{F}_i \vec{u}_i + \operatorname{div}[\varphi_i (\vec{\sigma}_i \vec{u}_i - \vec{q}_i^*)] + (E_{*i} - E_i) q_{*i} + \\ &+ (-1)^i [\vec{R}_i \vec{u}_i + Q_i + (E_\chi - E_i) \chi], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$E_i = e_i + u_i^2 / 2, \quad E_\chi = e_\chi + u_\chi^2 / 2, \quad E_{*i} = e_{*i} + u_{*i}^2 / 2. \quad (11)$$

Сложив (1)-(5) или (6)-(10) для среды в целом, получим следующие дифференциальные уравнения

$$\text{сплошности} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = q_*, \quad (12)$$

$$\text{динамики} \quad \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \vec{\sigma} + (\vec{u}_* - \vec{u}) q_*; \quad \vec{\sigma}_{ij} = \vec{\sigma}_{ji}, \quad (13)$$

$$\text{кинетической энергии} \quad \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \rho (\vec{F} \vec{u}) + \operatorname{div} (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) + N_* + \frac{1}{2} (u_*^2 - u^2) q_*, \quad (14)$$

$$\text{полной энергии} \quad \rho \frac{dE}{dt} = \rho (\vec{F} \cdot \vec{u}) + \operatorname{div} (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) - \operatorname{div} \vec{q}^* + (E_* - E) q_*, \quad (15)$$

где

$$E = e + u^2/2; \quad E_* = e_* + u_*^2/2. \quad (16)$$

При медленных процессах (т.е. при скоростях движения среды существенно меньших скорости звука) можно использовать уравнение внутренней (тепловой) энергии, получаемое из сравнения (14) и (15)

$$\rho \frac{de}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q}^* - N_{*i} - (e - e_*)q_* \quad (17)$$

Входящую в это уравнение мощность внутренних сил N_{*i} можно определить из сравнения уравнения кинетической энергии (14) и уравнения динамики (13). Для этого умножим скалярно обе части (13) на вектор скорости среды \vec{u} , и полученный результат вычтем из (14). Тогда можно записать

$$N_{*i} = -\vec{\sigma} \operatorname{div} \vec{u} - 0,5(\vec{u} - \vec{u}_*)^2 q_* \quad (18)$$

Таким образом, систему основных уравнений движения среды с переменной массой (т.е. с воздействием внешних источников массы, импульса и энергии) представим в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} &= q_*; \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} &= \rho \vec{F} + \operatorname{div} \vec{\sigma} + (\vec{u}_* - \vec{u})q_*; \\ \rho \frac{de}{dt} &= -\operatorname{div} \vec{q}^* - N_{*i} - (e - e_*)q_*. \end{aligned} \quad (19)$$

Из этой системы, при отсутствии внешних источников массы $q_* = 0$, импульса $(\vec{u}_* - \vec{u})q_* = 0$ и энергии $(e - e_*)q_* = 0$, можно получить известные уравнения гидрогазодинамики

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0; \quad \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla \vec{\sigma}; \quad \rho \frac{de}{dt} = -\nabla \vec{q}^* + \sigma \nabla \vec{u}. \quad (20)$$

Полученные уравнения справедливы для описания движения составляющих смеси и среды в целом с любыми физическими свойствами. Однако эта система является недоопределенной. К ней необходимо привлечь термодинамические и реофизические уравнения состояния, а также уравнение для теплового потока. Эти дополнительные соотношения устанавливаются при построении математической модели конкретной изучаемой среды. В качестве примера рассмотрим течение вязкой несжимаемой среды. Условие несжимаемости среды выполняется в тех случаях, когда скорость течения среды (жидкости или газа) значительно меньше скорости звука. Капельные жидкости (нефть, нефтепродукты, вода и др.) - практически несжимаемые среды, это условие выполняется частично и для газовых (воздушных) потоков, если в них число Маха $M_a \leq 0.3$ [6]. Это означает, что теплофизические параметры среды постоянны [7]. В этом случае можно записать следующие дополнительные соотношения: а) для тензора напряжения поверхностных сил: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, где p - давление, δ_{ij} - символ Кронекера, τ_{ij} - тензор вязких напряжений. В несжимаемых ньютоновских сплошных средах: $\tau_{ii} = 2\mu u_{i,i}$ при $i = j$ и $\tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ при $i \neq j$, где μ - коэффициент динамической вязкости; б) для потока тепла (по закону Фурье): $q^* = -\lambda \nabla T$, где λ - коэффициент теплопроводности; в) для внутренней энергии; $e = cT$, $e_* = cT_*$, где

T, T_* - температуры основной и присоединяемой (или отсоединяемой) массы среды; c - удельная теплоемкость (в несжимаемых средах $c = c_p = c_v$). Таким образом, получим следующую систему гидротермодинамических уравнений вязкой несжимаемой среды с переменной массой

$$\left. \begin{aligned} \nabla \vec{u} = q; \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{F} - \rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{u}_* - \vec{u}) q; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T = a \nabla^2 T + \frac{2\nu}{c} \varepsilon_{ij}^2 + [(T_* - T) + \psi] q; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} - u_{j,i})$; $\psi = [(\vec{u}_* - \vec{u})^2 - 2p]/2c$; $\nu = \mu / \rho$; $a = \lambda / \rho c$; $q = q_* / \rho$.

Из (21) при отсутствии влияния внешних источников (или стоков) массы, импульса и энергии, как частный случай, вытекают известные уравнения движения Навье-Стокса [6,7]

$$\nabla \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{F} - \rho^{-1} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (22)$$

и переноса тепла в вязкой несжимаемой среде [8]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T = a \nabla^2 T + (u_{i,j} + u_{j,i})^2 \nu / 2C \quad (23)$$

Следовательно, установленные уравнения (21) являются более универсальными и применимы для решения широкого круга теплофизических и гидродинамических задач. Анализ этой систем уравнений показывает, что они образуют замкнутую систему пяти уравнений для определения $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$, P и T (т.к. величины $q_*, \nu, \rho, c, a, T_*, u_*, \vec{F}$, входящие в эту систему, являются заданными). Эти уравнения устанавливают связь с временными и пространственными изменениями скорости, давления и температуры в любой точке среды. При решении конкретных задач к системе гидротермодинамических уравнений нужно присоединить и условия однозначности (краевые условия), включающие геометрические (характеризующие форму и размеры тела или системы), физические (характеризующие физические свойства среды), временные (или начальные, характеризующие особенность процесса в начальный момент времени; для стационарных задач это условие отпадает) и граничные (характеризующие особенности протекания процесса на границах среды) условия. В соответствии с этим для математического моделирования гидротермодинамических процессов формулируется краевая задача. После постановки краевых условий необходимо перейти к математическому исследованию процесса и получить (точное или приближенное) решение задачи. Отметим, что точное решение удастся получить лишь при упрощенной постановке задачи, т.е. для наиболее несложных моделей среды. При течении же среды в области сложной геометрии (с неравномерным распределением скорости, давления и температуры) аналитическое решение краевой задачи встречает непреодолимые математические трудности. В этих условиях наиболее эффективными могут оказаться численные методы конечных разностей [9-11 и др.].

4. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Аналитическое решение задач гидродинамических процессов с тепломассообменом встречает весьма большие трудности. Введение в уравнения

движения дополнительных членов (учитывающих механическое и тепловое взаимодействие, существенно усложняющих граничные условия) приводит к тому, что чисто аналитическое исследование процессов возможно лишь при приближенной постановке задачи. Это позволяет допускать некоторое упрощение исходных уравнений, как отбрасыванием несущественных для данной задачи членов, так и заменой сложных точных связей между величинами приближенными [12]. Такую замену при изучении сложных систем называют теорией подобия. Для анализа гидродинамических процессов в теплопроводящих средах с их сложным характером он является весьма важным инструментом.

Для обеспечения подобия моделируемых течений необходимо равенство некоторых безразмерных комплексов, называемые числами подобия. Их можно определить двумя путями, либо из уравнения движения процесса, либо из анализа размерностей.

Перейдем к рассмотрению условий подобия двух потоков ньютоновских вязких несжимаемых сред с переменной массой. Для этого приводим уравнения (21) к безразмерному виду, выбрав в качестве масштабов времени, длины (в частности, координат), скоростей, давлений, массовых сил и т.д. Обозначим безразмерные величины теми же буквами, что и размерные, но с черточкой, произведем следующую замену

$$t = t_0 \bar{t}, x = l_0 \bar{x}, y = l_0 \bar{y}, z = l_0 \bar{z}, \quad u = V_0 \bar{u}, v = V_0 \bar{v}, w = V_0 \bar{w}, P = P_0 \bar{P}, \quad (24)$$

$$T = T_0 \bar{T}, T_* = T_{*0} \bar{T}_*, q_* = q_{*0} \bar{q}_*, \quad F_x = g \bar{F}_x, F_y = g \bar{F}_y, F_z = g \bar{F}_z.$$

Подставляя эти значения t, x, \dots, P, \dots в уравнения (21), получим

$$\frac{\rho V_0}{l_0} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = q_{*0} \bar{q}_*;$$

$$\frac{\rho V_0}{t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho V_0^2}{l_0} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = \rho g \bar{F}_x - \frac{P_0}{l_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} +$$

$$+ \frac{\mu V_0}{l_0^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) + (V_{*0} \bar{u}_* - V_0 \bar{u}) q_{*0} \bar{q}_*;$$

.....

$$\frac{\rho V_0}{t_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho V_0^2}{l_0} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = \rho g \bar{F}_z - \frac{P_0}{l_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} +$$

$$+ \frac{\mu V_0}{l_0^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) + (V_{*0} \bar{w}_* - V_0 \bar{w}) q_{*0} \bar{q}_*;$$

$$\frac{\rho C T_0}{t_0} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho C V_0 T_0}{l_0} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) =$$

$$= \frac{\lambda T_0}{l_0^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) + C (T_{*0} \bar{T}_* - T_0 \bar{T}) q_{*0} \bar{q}_*. \quad (25)$$

после чего, сократим обе части этих уравнений на выбранную комбинацию масштабов и физических констант, сведя число составленных комплексов к минимуму. Разделим обе части уравнения неразрывности на $(\rho V_0)/l_0$, уравнение динамики на $(\rho V_0^2)/l_0$, а уравнение энергии на $(\rho C V_0 T_0)/l_0$ и, опустив для простоты черточки над безразмерными величинами, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = J_* q_*;$$

$$Sh \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{F_r} F_x - Eu \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (k_* u_* - u) J_* q_*;$$

$$Sh \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{F_r} F_y - Eu \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (k_* v_* - v) J_* q_*; \quad (26)$$

$$Sh \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{F_r} F_z - Eu \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (k_* w_* - w) J_* q_*;$$

$$Sh \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + (\theta_* T_* - T) J_* q_*.$$

Из этой системы следует, что если два потока среды подобны, т.е. они описываются одинаковыми уравнениями (а также с одинаковыми краевыми условиями), представленными в безразмерном виде, то для них должны быть одинаковы по величине следующие безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{V_0 t_0} = Sh; \quad \frac{V_0^2}{g l_0} = F_r; \quad \frac{P_0}{\rho V_0} = Eu; \quad \frac{V_0 l_0}{\nu} = Re; \\ \frac{V_0 l_0}{a} = Pe; \quad \frac{q_* l_0}{\rho V_0} = J_*; \quad \frac{V_*}{V_0} = k_*; \quad \frac{T_*}{T_0} = \theta_*, \end{aligned} \quad (27)$$

где $a = \lambda / \rho C$ - коэффициент температуропроводности.

Таким образом, для подобных физических явлений (гидродинамических, тепловых) основная система уравнений движения, записанная в безразмерном виде (26), должна быть одной и той же. Для подобных явлений числа $Sh, F_r, Eu, Re, Pe, k_*, \theta_*, J_*$, определяемые по заданным параметрам, должны быть одинаковы (условие одинаковости чисел подобия обозначается как *idem*, заменяющим слова одного и того же значения), поэтому эти числа называются также критериями подобия, т.е.

$$\begin{aligned} Sh = idem; \quad F_r = idem; \quad Eu = idem; \quad Re = idem; \quad Pe = idem; \\ J_* = idem; \quad k_* = idem; \quad \theta_* = idem. \end{aligned}$$

Физический смысл чисел подобия $Sh, F_r, Eu, Re, Pe, k_*, \theta_*, J_*$ можно установить, рассмотрев физическое содержание каждого слагаемого уравнения движения. Из анализа уравнений движения среды с переменной массой следует, что число Струхала Sh выражает отношение локальной инерционной силы к конвективной; число Фруда F_r характеризует отношение сил инерции к силе тяжести; число Эйлера Eu характеризует отношение сил давления к силе инерции; число Рейнольдса Re выражает отношение сил инерции к силе вязкости; число Пекле Pe характеризует конвективно-теплопроводного переноса тепла в текущих средах; новые числа J_*, k_*, θ_* характеризуют меру соотношения между массовым расходом, скоростью и температурой вводимого (присоединяемого или отсоединяемого) и основного потоков среды. Эти числа характеризуют отношения величин различной физической природы и поэтому являются критериями подобия.

При изучении процессов конвективного теплообмена одним из важных критериев является число Нуссельта Nu . Для вывода числа Nu , используя дифференциальное уравнение теплоотдачи (или т.н. теплового граничного условия третьего рода), можем получить [7]: $Nu = \alpha_0 l_0 / \lambda$, характеризующее интенсивность конвективного теплообмена между средой (жидкостью) и поверхностью тела. К числу теплового подобия относят и число Био $Bi = \alpha / (\lambda_{тб} / l_0)$, которое выражает меру соотношения интенсивности теплоотдачи и интенсивности теплопроводности тела.

Обычно в тех случаях, когда какая-либо физическая величина, входящая в критерий подобия, не может быть определена экспериментально или вычислена, ее исключают за счет перегруппировки двух или нескольких критериев подобия, получая при этом т.н. производные критерии подобия.

Наменкулатура и число критериев подобия выбираются в зависимости от решаемой задачи. При этом не исключено появление автомодельных областей, в которых выявление того или иного критерия вырождается. В ряде практических задач можно рассматривать приближенное подобие, когда число определяющих критериев сокращается до того минимума, который может быть реализован в модельном или численном эксперименте.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применением законов сохранения массы, импульса и энергии получены необходимые уравнения механики гетерогенных сплошных сред с переменной массой и критерии подобия гидродинамических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. – М.: Энергоиздат, 1981. – 472 с.
2. Соу С. Гидродинамика двухфазных систем. / Пер. с англ. под ред. М.Е. Дейча. – М.: Мир, 1971. – 536 с.
3. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Попыриш А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравномерности частиц. – Новосибирск: Наука, 1980. – 160 с.
4. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. – М.: Энергия, 1978. – 296 с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. ч.1. – М.: Наука, 1987. – 464. с.
6. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидрогазодинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
7. Исаченко В.П. и др. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 488 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
10. Гахраманов П.Ф. Конечно-разностные схемы. – Баку, 2004. – 225 с.
11. Андерсон Д., Таннехилл Дж, Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. В 2-х томах. – М.: Мир, 1990. – 728 с.
12. Седов Л.И. Методы подобия и размерности. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОСАЖДЕНИЯ НАКИПИ В ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ С МАГНИТНОЙ ОБРАБОТКОЙ ВОДЫ

Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.

*ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия*

РЕЗЮМЕ

Уточнен расчет характеристик коллоидных наносистем при воздействии магнитного поля. Учтено, что процесс осаждения молекул солей накипи на стенку теплообменника протекает по другим законам, чем их выпадение на частицах взвеси в объеме водного потока. При этом коэффициент массопереноса из раствора на взвесь на четыре порядка больше, чем на стенку, что является важным фактором снижения накипи.

Также учтен характерный для поведения нанообъектов размерный эффект, вызывающий уменьшение коэффициента поверхностного натяжения на границе твердой и жидкой фаз. Это приводит к увеличению концентрации критических зародышей по экспоненциальному закону и также сказывается на величине противонакипного эффекта. Из сравнения результатов расчета с экспериментом оценена величина параметра Толмена, характеризующего толщину переходного слоя для зародышей CaCO_3 в воде, что представляет самостоятельный научный интерес.

Ключевые слова: магнитная обработка воды; противонакипный эффект; коагуляция; критический зародыш; пересыщенный раствор; коэффициент массопереноса; константа Толмена

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, для борьбы с накипеобразованием используют обработку водного потока магнитным полем, что просто реализуется и экономично в эксплуатации. Однако до сих пор нет общепринятой физической теории, объясняющей механизм наблюдаемого явления.

В данной работе на примере эксперимента [1], где магнитный аппарат представлял собой стальную цилиндрическую трубу с коаксиально вмонтированными в нее встречно ориентированными цилиндрическими магнитами, сделана попытка уточнить предложенную ранее модель противонакипной активности магнитного поля [2,3], основанную на теории Дерягина-Ландау-Фервея-Оовербека (ДЛФО) [4-6].

2. СОСТОЯНИЕ РАСТВОРА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В пересыщенном растворе существует равновесная концентрация критических зародышей [7], которая однозначно определяется термодинамическими характеристиками раствора (температурой, пересыщением). Как известно, такие зародыши могут с равной вероятностью раствориться либо укрупниться и их наличие в растворе наиболее ощутимо, поскольку частицы меньшего размера быстро растворяются, а большего – имеют меньшую вероятность гомогенной нуклеации, к тому же, быстро укрупняясь, выпадают в осадок.

3. ТЕОРИЯ ДЕРЯГИНА-ЛАНДАУ-ФЕРВЕЯ-ООВЕРБЕКА

В работах по магнитной обработке водного потока, основанных на теории ДЛФО [5,6], суммарная энергия взаимодействия коллоидных частиц с двойным электрическим слоем определяется следующей формулой

$$E = E_1 + E_2$$

где лондоновская энергия притяжения (формула Гамакера)

$$E_1 = -\frac{k_G}{6} \cdot \left[\frac{2}{s^2 - 4} + \frac{2}{s^2} + \ln\left(1 - \frac{4}{s^2}\right) \right]$$

а энергия кулоновского отталкивания имеет вид

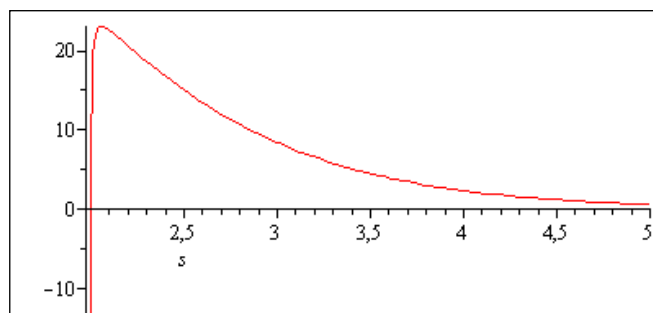
$$E_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \phi^2}{2} \ln[1 + \exp(-a(s-2)\chi)]$$

где ϕ - электрокинетический потенциал коллоидной частицы (вольт), k_G - постоянная Гамакера (Дж), $\chi = \sqrt{\frac{8Ce^2}{\varepsilon_0 \varepsilon k_B T}}$ - обратная длина Дебая ($1/м$), k_B - постоянная Больцмана, ε_0 - диэлектрическая постоянная вакуума, ε - диэлектрическая постоянная среды (в нашем случае воды), $s = l/r$, l - расстояние между центрами коллоидных частиц радиуса r (м), C - мольная концентрация ионов в воде ($моль/м^3$).

Наличие высокого потенциального барьера электростатического отталкивания делает процесс коагуляции маловероятным, что иллюстрируется графиком рис.1. Высота потенциального барьера на кривой рис.1 и, следовательно, вероятность коагуляции при столкновениях частиц, определяется безразмерной величиной $1/W$, где коэффициент замедления W определяется выражением

$$W = 2 \int_2^{\infty} \frac{\exp\left[\frac{E(s)}{k_B T}\right]}{s^2} ds. \tag{1}$$

E/k_G



s

Рис.1. Зависимость потенциала взаимодействия E/k_G от безразмерного расстояния между центрами кристаллов s . Расчетные параметры: $\varepsilon = 81$, $T = 300K$,

$$C = 2.5 \frac{моль}{м^3}, k_G = 10^{-20} Дж, r = 5 \cdot 10^{-9} м. \phi = 0.38В.$$

4. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРОТИВОНАКИПНОГО ЭФФЕКТА

Коэффициент снижения накипи на стенках теплообменника за счет магнитной обработки воды определим формулой [2]

$$\Theta = 1 + \frac{\sum_{k=2} I_{2k.маг}}{\beta_1 L \pi d (C - C_0)}, \quad (2)$$

где поток $I_{2k.маг}$ (моль/с) кристаллизации молекул $CaCO_3$ на суммарную поверхность коллоидных частиц k -го ($k=2,3,\dots$) порядка в омагниченном растворе определяется формулой

$$I_{2k.маг} = \beta_2 \frac{\pi d^2}{4} 4\pi r_{кр}^2 \sqrt[3]{k^2} \left(C - C_0 \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}} \right) \int_0^L n_k(x) dx, \quad (3)$$

$\pi L d$ - площадь поверхности трубы диаметра d и длины L (при выводе этой формулы мы пренебрегли изменением размеров коллоидных частиц, при движении вдоль трубы); β_1 и β_2 - коэффициенты массопередачи на поверхность стенки теплообменника и на частицы взвеси (м/с), соответственно. $n_k(x)$ - концентрация коллоидных частиц порядка k на расстоянии x от начала трубы ($м^{-3}$), C_0 - равновесная мольная концентрация молекул $CaCO_3$ в воде ($моль/м^3$), при которой вероятности их сорбции и десорбции на плоскую границу раздела твердой и жидкой фаз равны друг другу,

В выражении (3) учтено, что k -я частица образована на k -том этапе коагуляции, имеет радиус $\sqrt[3]{k} \cdot r_{кр}$, ей соответствует равновесная концентрация молекул накипеобразователя в воде C_k и для относительного перенасыщения

$$f(k) = \frac{C - C_k}{C_0} \text{ справедливо соотношение [2]}$$

$$f(k) = \frac{C}{C_0} - \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}} \quad (4)$$

Эта формула наглядно поясняет процессы, происходящие с началом коагуляции в пересыщенном растворе. Частицы в ходе коагуляции агрегируются - укрупняются до надкритических размеров, для них раствор становится пересыщенным и на их поверхности начинается кристаллизация молекул солей накипи из водного потока.

5. УТОЧНЕНИЕ ТЕОРИИ БЫСТРОЙ КОАГУЛЯЦИИ СМОЛУХОВСКОГО

Далее оценим интенсивность процесса коагуляции для получения количественных оценок и их сравнения с известным экспериментом [1]. Предположим, что в растворе с заданным пересыщением имеются коллоидные частицы критического радиуса с концентрацией n_0 и система находится в динамическом равновесии. Теория быстрой коагуляции Смолуховского предлагает следующее выражение для расчета изменения концентрации первичных, вторичных и т.д. коллоидных частиц $n_k(t)$ со временем [8]

$$n_k(t) = \frac{n_0 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{k-1}}{\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

где $\tau = \frac{3\eta W}{4k_B T n_0}$ т.н. время коагуляции, причем коэффициент замедления W определяется выражением (1); η - динамическая вязкость воды при температуре T .

Однако формула (5) в нашем случае требует уточнения, т.к. она не учитывает того, что уменьшение концентрации критических зародышей в ходе коагуляции неизбежно должно сопровождаться восполнением их концентрации до равновесной за счет гомогенной нуклеации новых частиц в объеме пересыщенного раствора. Появление новых зародышей увеличивает поверхность взвеси и также вносит вклад в противонакипный эффект.

Уточненная формула для расчета изменения концентрации коллоидных частиц $n_k(t)$ со временем учитывает восполнение концентрации первичных (критических) зародышей и имеет следующий вид [2]

$$n_1(t) = n_0 = \text{const},$$
$$n_k(t) = n_0 \cdot \left(\frac{t}{\tau + t}\right)^{k-1} \quad k = 2, 3, \dots \quad (6)$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И РАЗМЕРОВ КРИТИЧЕСКИХ ЗАРОДЫШЕЙ

Равновесная концентрация критических зародышей n_0 , необходимая для расчетов по формуле (3) с учетом (6), определяется формулой [9]

$$n_0 = CN_A Z \exp\left(-\frac{\Delta G(r_{kp})}{k_B T}\right), \quad (7)$$

где $Z = \left(\frac{\Delta G(r_{kp})}{3\pi k_B T N^2}\right)^{0.5}$ - т.н. «фактор неравновесности (Зельдовича)»,

$N = \frac{4}{3} \pi r_{kp}^3 / \frac{M}{\rho N_A}$ - число молекул в критическом зародыше и N_A - число Авогадро,

$\Delta G(r_{kp})$ - энергия Гиббса, требуемая для образования критического зародыша с радиусом r_{kp} , $M = 0.1 \text{ кг} / \text{моль}$ - молярная масса CaCO_3 , $\rho = 2710 \text{ кг} / \text{м}^3$ - плотность твердой фазы CaCO_3 .

Отметим, что в расчетах [2] использовалось значение поверхностного натяжения на плоской границе твердая фаза/жидкость $\sigma_{\text{т.ж.}} = 0.16 \text{ Дж} / \text{м}^2$ и соответствующий ему критический радиус зародыша $r_{kp0} = 1.5 \text{ нм}$. При этом зависимость энергетических характеристик на границе раздела фаз от кривизны поверхности не была учтена.

В работе [10] показано, что характеристики процессов массопереноса в пересыщенном растворе, когда радиус поверхности сравним с межфазной областью, формируются с учетом константы Толмена δ . В частности, при гомогенной генерации нанозародышей эффективное значение поверхностной энергии $\sigma_{\text{эфф}}$ на

границе раздела жидкость/кристалл снижается в зависимости от константы Толмена δ и определяется выражением

$$\sigma_{эфф} = \frac{\sigma_{т.ж.}}{1 + 2\delta / r_{кр}} \quad (8)$$

где параметр δ принимает значения в интервале $0 \leq \delta \leq 0.75r_{кр0}$.

При этом радиус реального критического зародыша вычисляется по формуле [10]

$$r_{кр} = \frac{r_{кр0}}{2} \left(1 - \frac{4\delta}{r_{кр0}} + \sqrt{\frac{4\delta + r_{кр0}}{r_{кр0}}} \right). \quad (9)$$

Энергия Гиббса определяется выражением

$$\Delta G(r_{кр}) = \frac{4\pi r_{кр}^3 \sigma_{т.ж.}}{3} \left(\frac{3}{r_{кр} + 2\delta} - \frac{2}{r_{кр0}} \right) \quad (10)$$

7. РАЗЛИЧИЕ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА НА ТРУБУ И НА ВЗВЕСЬ

Противонакипный эффект, как следует из (2,3), пропорционален отношению коэффициентов массопередачи β_2/β_1 . Ранее традиционно полагали [11], что $\beta_2=\beta_1$, но это оказалось неверным по следующим причинам.

Массопередача на поверхность стенки теплообменника m/c определяется гидродинамикой турбулентного потока в круглой трубе [12]

$$\beta_1 = 0.023 \text{Re}^{-0.2} \text{Pr}^{-2/3} u \quad (11)$$

где Re и Pr - числа Рейнольдса и Прандтля, а u – скорость водного потока в трубе.

Массопередача на поверхность взвеси соответствует условиям массопереноса на твердую сферу в неподвижной среде, при этом коэффициент β_2 определяется иначе [13]

$$\beta_2 = D / r_{кр}, \quad (12)$$

D – коэффициент диффузии молекул CaCO_3 в воде.

Таким образом, массоперенос вещества из раствора на стенки трубы и на поверхность взвеси подчиняется разным закономерностям. Количественная оценка по формулам (11,12) показала существенное отличие интенсивности указанных процессов: $\beta_2/\beta_1 \approx 10^4$.

8. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ПРОТИВОНАКИПНОГО ЭФФЕКТА Θ

При оценке противонакипного эффекта Θ , как и ранее [2], расчетные параметры: $C = 2.5 \text{ моль} / \text{м}^3$, $C_0 = 0.14 \text{ моль} / \text{м}^3$ выбраны с учетом их соответствия условиям эксперимента [1], с которым мы сравниваем результаты моделирования.

Далее используем полученные результаты для количественной оценки противонакипного эффекта, который определим в соответствии с (2) коэффициентом Θ снижения накипи на стенках теплообменника за счет магнитной обработки воды. Для этого предварительно с учетом константы Толмена δ определим характеристики коллоидного раствора:

- величину радиуса $r_{кр}$ реального критического зародыша (9),
- эффективное значение (8) поверхностной энергии $\sigma_{эфф}$ на границе раздела жидкость/кристалл,

- равновесную начальную концентрацию (7) критических зародышей n_0 ,
- изменение концентрации коллоидных частиц $n_k(t)$ со временем (6),
- энергию Гиббса (10), требуемую для образования критического зародыша,
- отношение коэффициентов β_2/β_1 массопереноса вещества из раствора на стенки трубы и на поверхность взвеси по формулам (11) и (12) и затем
- величину потока $I_{2k.маг}$ кристаллизации молекул $CaCO_3$ на суммарную поверхность коллоидных частиц k -го ($k=2,3\dots$) порядка в омагниченном растворе.

В результате проведенных вычислений построена зависимость коэффициента Θ снижения накипи от безразмерного параметра Толмена $\delta/r_{кр0}$, приведенная на рис.2. По этой кривой для условий эксперимента [1] $\Theta=30$ найдено значение безразмерного параметра Толмена $\delta/r_{кр0}=0.335$, что соответствует величине константы Толмена $\delta=0.5$ нм. Это согласуется с указанным в работах [10,14] ожидаемым на практике значением $\delta<1.0$ нм. Также определены следующие значения параметров:

$r_{кр} \approx 1$ нм, чему соответствует число молекул в зародыше $N=68$, $\sigma_{эфф} \approx 0.08$ Дж / м².

Следует отметить, что адекватная оценка интенсивности процесса массопереноса на взвешенные частицы, а также учет роли размерного эффекта в гомогенной генерации зародышей позволили существенно уточнить значения вышеуказанных параметров, приведенные в работе [2].

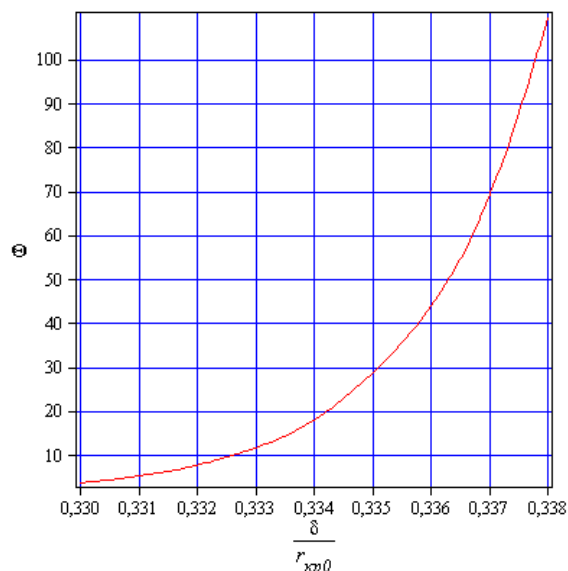


Рис.2. Зависимость противонакипного эффекта Θ при разных значениях от безразмерного параметра Толмена $\delta/r_{кр0}$.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено поведение пересыщенного раствора солей $CaCO_3$ при магнитной обработке водного потока. Использована известная гипотеза, согласно которой после воздействия магнитного поля из-за деформации двойного электрического слоя коллоидный раствор теряет устойчивость и в нем начинается коагуляция критических зародышей. Далее учтено, что в растворе возникают частицы с

радиусом больше критического и на них за счет гетерогенной кристаллизации оседают молекулы накипи из пересыщенного раствора. Показано, что три существенных обстоятельства определяют величину противонакипного эффекта:

1. Массоперенос кристаллизующихся молекул из водного раствора на взвесь протекает намного активнее, чем на стенки теплообменника.
2. Удельная энергия образования новой поверхности существенно уменьшается при малых размерах критических зародышей, экспоненциально увеличивая скорость их гомогенной генерации и концентрацию в растворе.
3. Убыль концентрации критических зародышей непрерывно восполняется за счет гомогенной генерации новых критических зародышей для сохранения динамического равновесия жидкой и твердой фаз в пересыщенном растворе.

Совокупность указанных эффектов приводит к радикальному перераспределению накипи между стенкой и взвесью в пользу последней, что и определяет наблюдаемый противонакипный эффект магнитной обработки.

Таким образом, получен вывод, что определенная совокупность известных физических явлений приводит к противонакипному эффекту $\Theta = 30$, как в эксперименте [1], причем значение константы Толмена, при которой реализуется указанный эффект, согласуется с известной оценкой диапазона ее значений [10,14]. Это в целом подтверждает предложенную авторами гипотезу о механизме снижения накипи при магнитной обработке воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Szkatula A., Balanda M., Kopes M.* Magnetic treatment of industrial water. Silica activation // *The Europ. Phys. J. – Appl. Phys.* – 2002. – Vol.18. – P.41-49.
2. *Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.* Механизм снижения накипи при магнитной обработке воды в теплоэнергетических устройствах // *Теплоэнергетика.* – 2013. – №3. С.27-34.
3. *Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.* Влияние коагуляции коллоидных частиц на снижение накипобразования при магнитной обработке воды в теплоэнергетических устройствах // *Теплоэнергетика.* – 2011. – №7. – С.13-16.
4. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. – М.: Наука, 1985. – 398 с.
5. *Гамаюнов Н.И.* Воздействие постоянного магнитного поля на движущиеся растворы и суспензии // *Коллоидный журнал.* – 1994. – Т.56. – №2. – С.290-298.
6. *Kozic V., Lipus L.C.* Magnetic Water Treatment for a Less Tenacious Scale // *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* – 2003. – Vol.43. – P.1815-1819.
7. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика (Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Т.10). – М.: Наука, 1979. – 528 с.
8. *Наука о коллоидах. Т.1. Необратимые процессы / Под ред. Г.Р. Кройта.* – М.: ИЛ, 1955. – 540 с.
9. *Случинская И.А.* Основы материаловедения и технологии полупроводников. – М.: Изд. МИФИ, 2002. – 376 с.
10. *Рехвиашвили С.Ш., Кишитокова Е.В., Розенберг Б.А.* Модель наночастицы в теории неоднородной среды // *Журнал технической физики.* – 2009. – Т.79. – №12. – С.10-13.
11. *Мартынова О.И., Копылов А.С., Кашинский В.И., Очков В.Ф.* Расчет противонакипной эффективности ввода затравочных кристаллов в теплоэнергетических устройствах // *Теплоэнергетика.* – 1979. – №9. – С.21-25.

12. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. – М.: Мир, 1977.
13. Шервуд Т., Пигфорд Р., Уилки Ч. Массопередача. – М.: Химия, 1982.
14. Жуховицкий Д.И. Энергетические характеристики поверхности малых кластеров // Журнал физической химии. – 2001. – Т. 75. – №7. – С.1159-1168.

ПРОТИВОНАКИПНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВВОДА ЗАТРАВОЧНЫХ КРИСТАЛЛОВ В ПЕРЕСЫЩЕННЫЙ ВОДНЫЙ ПОТОК

Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.

ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Для борьбы с накипью на теплопередающих поверхностях успешно применяют метод ввода затравочных кристаллов. В настоящей работе предложена усовершенствованная модель взаимодействия затравочных кристаллов с молекулами растворенных солей накипеобразователя в потоке воды внутри теплообменной трубы. В частности, учтено, что процесс осаждения молекул солей накипи на стенках теплообменника протекает по другим законам, чем их выпадение на частицах затравки в объеме водного потока, а также то обстоятельство, что затравочные кристаллы имеют дисперсию (разброс) по размерам. Полученная система уравнений решена в первом приближении, что дало возможность качественно объяснить зависимость эффективности снижения накипи от распределения взвешенных кристаллов по размерам, а также от температуры.

Ключевые слова: противонакипный эффект; пересыщенный раствор; коэффициент массопереноса; затравочные кристаллы

Образование накипи в теплообменных устройствах существенно снижает эффективность эксплуатации различных технических устройств [1]. Одним из распространенных методов уменьшения накипи в таких устройствах – ввод затравочных кристаллов [2].

В работах [3,4] разработана теория, позволяющая количественно определить зависимость эффективности данной методики от различных физико-химических параметров (размеры кристаллов, их концентрация, различные гидродинамические режимы течения воды в трубе и т.д.). Однако в указанных работах по аналогии с [2] принималось далекие от реальности упрощающие допущения, что все кристаллы затравки имеют одинаковые размеры, а коэффициенты массопередачи на стенку и на кристаллы одинаковы. Кроме того, не рассматривалась практически очень важная зависимость эффекта от температуры воды. Целью настоящей работы является усовершенствование модели [3,4] с целью учета вышеуказанных эффектов.

Как и в [3,4] в настоящей работе рассматривается теплообменная труба длиной L и диаметром d_t , внутри которой течет вода со скоростью V_0 при абсолютной температуре T . Жесткость воды (или масса $C(x)$ растворенного накипеобразователя $CaCO_3$), приходящаяся на единицу массы воды (безразмерная массовая концентрация растворенного $CaCO_3$), меняется вдоль трубы и зависит от координаты x . Значение $x=0$ соответствует входному сечению трубы. Пересыщение воды по накипеобразователю определим выражением

$$\Delta C(x) = C(x) - C_0,$$

где C_0 - равновесная жесткость воды.

Пусть в водный поток на входе трубы вводятся затравочные микрокристаллы кальцита с объемной концентрацией n_0 и эффективным радиусом r , который соответствует предположению о сферичности частиц. Тогда концентрация частиц в сечении x будет равняться

$$n_0(x) = \int_0^{\infty} v(r, x) dr, \quad (1)$$

где $v(r, x)$ - плотность распределения частиц с координатой x по размерам r . Поскольку концентрация затравочных кристаллов полагается неизменной вдоль трубы, справедлива формула

$$n_0(x) = n_0(0) = \int_0^{\infty} v(r, 0) dr \equiv n_0, \quad (2)$$

где $v(r, 0)$ - начальное распределение частиц на входе трубы, аппроксимируемое далее нормальной функцией

$$v(r, 0) = A \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\lambda^2}\right). \quad (3)$$

Здесь r_0 - наиболее вероятный эффективный радиус кристаллика затравки на входе в трубу, а λ^2 - дисперсия распределения. График функции (3) для типичных параметров приведен на рис.1 (сплошная линия).

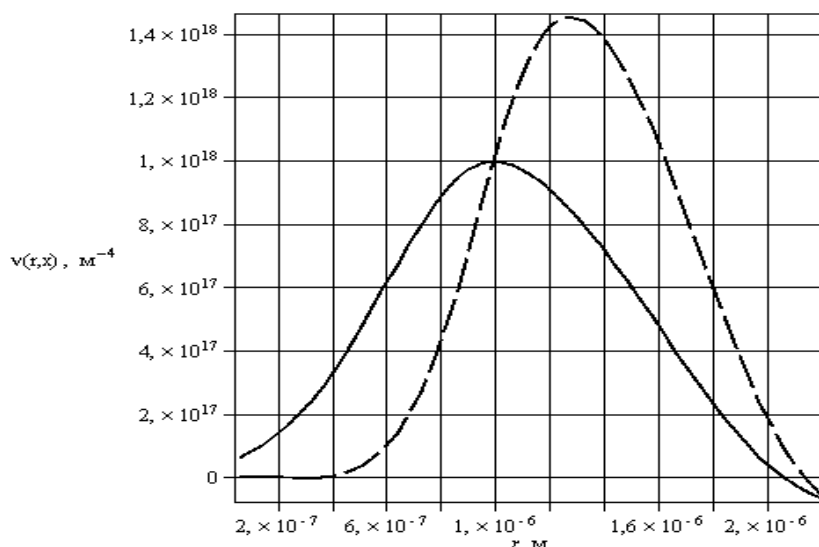


Рис.1. Зависимость плотности распределения частиц затравки $v(r, x)$ от радиуса r в двух разных сечениях трубы x . Сплошная линия: $x=0$; тире: $x=1$ м. Расчетные параметры: $L=5$ м, $d_i=0.037$ м, $T=320$ К, $C(0)=200 \cdot 10^{-6}$, $V_0=0.5$ м/с, $r_0=10^{-6}$ м, $A=10^{18}$ м⁻⁴, $\lambda=4 \cdot 10^{-7}$ м, $n_0=10^{12}$ м⁻³.

При смещении вдоль оси x на величину dx радиус кристалла увеличивается на dr , поэтому с учетом выражения (2) для функции распределения выполняется условие

$$v(r, x) = v(r + dr, x + dx). \quad (4)$$

Действительно, из закона сохранения числа частиц тогда следует равенство (4) или эквивалентное ему равенство

$$\frac{\partial v(r, x)}{\partial r} dr = -\frac{\partial v(r, x)}{\partial x} dx. \quad (5)$$

Найдем связь между dx и dr . Общая масса молекул $CaCO_3$ оседающих на кристаллы затравки с радиусами $(r, r+dr)$ в элементарном объеме трубы $\Delta x \frac{\pi d_t^2}{4}$ за время dx/V_0 равняется

$$dM = \rho \Delta C(x) \beta_0 v(r, x) 4\pi r^2 dr \cdot dx \cdot \Delta x \cdot \frac{\pi d_t^2}{4 \cdot V_0}, \quad (6)$$

где $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ - плотность воды.

Также учтено, что коэффициент β_0 соответствует осаждению накипи на взвесь, когда ее частицы неподвижны относительно потока жидкости, т.к. переносятся вместе с ним. При этом массообмен протекает за счет молекулярной диффузии и коэффициент β_0 соответствует условиям массопереноса на твердую сферу в неподвижной среде [6]

$$\beta_0(r) = \frac{D}{r} \quad (7)$$

D - коэффициент диффузии молекул $CaCO_3$ в воде.

Учтем также, что при перемещении некоторого кристалла на расстояние dx вдоль трубы, его эффективный радиус увеличится на величину dr , а объем на величину $4\pi r^2 dr$. Следовательно, прирост массы всех кристаллов dM будет выражаться формулой

$$dM = \frac{\pi d_t^2}{4} 4\pi r^2 \rho_s v(r, x) \cdot \Delta x \cdot (dr)^2. \quad (8)$$

Здесь ρ_s - плотность кальцита. Приравнявая (6) и (8) с учетом (5) получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial v(r, x)}{\partial x} = -\frac{\rho D \cdot \Delta C(x)}{\rho_s V_0 r} \cdot \frac{\partial v(r, x)}{\partial r}. \quad (9)$$

Еще одно уравнение выводится из условия, что изменение массы растворенного $CaCO_3$ при прохождении расстояния dx вдоль трубы меняется как за счет кристаллизации на затравке, так и из-за кристаллизации (оседания накипи) на стенках и имеет вид

$$\frac{d\Delta C(x)}{dx} = -\frac{\Delta C(x)}{V_0} \left\{ \frac{4\beta_1}{d_t} + \int_0^\infty 4\pi r \cdot D \cdot v(r, x) dr \right\}. \quad (10)$$

Коэффициент массопередачи на поверхность стенки круглой теплообменной трубы (m/c) определяется формулой [5]

$$\beta_1 = 0.023 \text{Re}^{-0.2} \text{Pr}^{-2/3} u$$

где Re и Pr - числа Рейнольдса и Прандтля, а u - скорость турбулентного водного потока в трубе, которая приводится к следующему виду

$$\beta_1 = 0.023 \cdot V_0^{0.8} \cdot d_t^{-0.2} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{-\frac{7}{15}} \cdot D^{\frac{2}{3}} \quad (11)$$

Величины диффузии D и динамической вязкости μ связаны соотношением Эйнштейна

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\mu r_m}, \quad (12)$$

где k_B - постоянная Больцмана, r_m - эффективный радиус молекулы $CaCO_3$, который можно оценить как

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi N_A \rho_s}}. \quad (13)$$

Здесь $M=0.1\text{кг/моль}$ и $\rho_s = 2700\text{кг/м}^3$ - молярная масса и плотность кальцита, соответственно, N_A - постоянная Авогадро.

Зависимость равновесной жесткости воды C_0 (безразмерная величина) от абсолютной температуры $T(\text{К})$ представлена эмпирической формулой [1]

$$C_0 = 2.59 \cdot 10^{-6} \cdot (T - 273)^{0.5} \exp(-0.02527(T - 273)). \quad (14)$$

а динамическая вязкость воды μ ($\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}$) определяется выражением [7]

$$\mu = \frac{1.78 \cdot 10^{-3}}{1 + 0.0337(T - 273) + 0.000221(T - 273)^2}. \quad (15)$$

Решение системы уравнений (9)-(10) с учетом соотношений (11)-(15) позволяет вычислить т.н. эффективность противонакипной обработки Θ - безразмерный коэффициент, показывающий соотношение масс общей накипи по всей длине трубы в обычной системе и в системе с введением кристаллов затравки. Учитывая, что плотность потока молекул $CaCO_3$ на стенки пропорциональна пересыщению, для отношения полных потоков получаем

$$\Theta = \frac{\int_0^L \Delta C_0(x)}{\int_0^L \Delta C(x)}, \quad (16)$$

где $\Delta C_0(x)$ - распределение пересыщения при отсутствии затравочных кристаллов, являющееся решением уравнения

$$\frac{d\Delta C_0(x)}{dx} = -\frac{\Delta C_0(x)}{V_0} \cdot \frac{4\beta_1}{d_t}. \quad (17)$$

Точное решение данной интегро-дифференциальной системы уравнений довольно сложно – требует применения метода итерации. Для качественного анализа применялось первое приближение: в подынтегральном выражении в правой части (10) вместо $\nu(r, x)$ подставляли начальное распределение $\nu(r, 0)$ из (3). В результате проведенного анализа была построена зависимость распределения зародышей по размерам $\nu(r, x)$, представленная на рис.1, в двух сечениях трубы – при $x=0$ (сплошная кривая) и при $x=1\text{м}$ (штриховая кривая).

Из полученных графиков рис.1 видно, что с удалением от начала трубы функция распределения частиц становится более узкой, а их среднестатистический размер увеличивается. Достоверность расчета подтверждается тем, что площади под указанными кривыми, соответствующие общей концентрации частиц в каждом из сечений, одинаковы. Такое поведение функции распределения можно объяснить формулой (7), согласно которой коэффициент массопереноса обратно пропорционален радиусу частиц.

На рис.2 приведена зависимость противонакипной эффективности Θ от абсолютной температуры воды, где показано, что эффективность противонакипной

обработки повышается с ростом температуры - очень важный для практики результат.

Поясним физическое существо этого результата. Напомним, что в формуле (15) эффективность противонакипной обработки Θ определена отношением масс накипи в обычной системе и в системе с мелкодисперсной затравкой. Числитель этой дроби, пропорциональный пересыщению раствора, растет с температурой, поскольку равновесная жесткость воды C_0 согласно (14) уменьшается. Знаменатель формулы (15), соответствующий пересыщению в системе с затравкой, таким же образом реагирует на рост пересыщения раствора с температурой, однако одновременно с этим поток накипи на взвешенные частицы растет с температурой по кубическому закону. Это снижает концентрацию растворенного вещества и, соответственно, пересыщение, что оказывает противоположное действие на знаменатель, замедляя его температурный рост. Таким образом, рост знаменателя с повышением температуры в системе с затравкой происходит медленнее, чем в обычной системе. Этим объясняется увеличение противонакипной эффективности введения затравки по мере роста температуры.

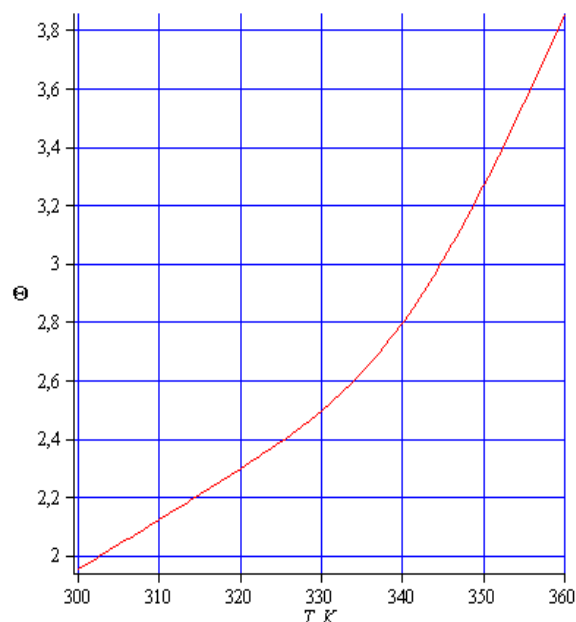


Рис.2. Зависимость противонакипной эффективности Θ от абсолютной температуры воды. Расчетные параметры те же, что на рис.1, кроме $A = 10^{19} \text{ м}^{-4}$, $n_0 = 10^{13} \text{ м}^{-3}$.

Следует отметить, что на практике вводимые вещества затравки характеризуются определенной дисперсией – разбросом размеров кристаллов. Поэтому для выбора вводимого реагента полезно знать, как дисперсия размеров взвешенных кристаллов влияет на противонакипную эффективность Θ вводимой затравки. Зависимость противонакипной эффективности Θ от квадратного корня от дисперсии распределения затравочных кристаллов по размерам при постоянстве концентрации $n_0 = 10^{13} \text{ м}^{-3}$ представлена на рис.3. Отсюда следует вывод, важный при выборе параметров затравки, состоящий в том, что среди затравок с фиксированными значениями полной концентрации n_0 и одинакового среднего эффективного радиуса r_0 большей эффективностью противонакипной обработки

будет обладать затравка с большей дисперсией. Это можно объяснить с помощью формулы (7), согласно которой частицы меньшего радиуса оказывают большее влияние на кристаллизацию молекул растворенного вещества на взвеси.

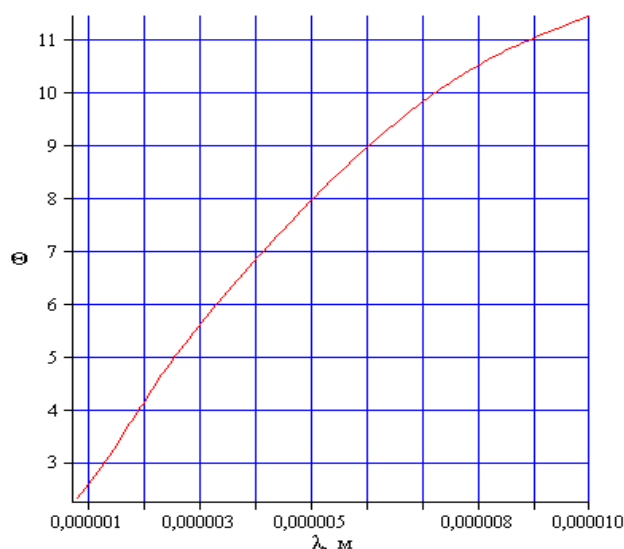


Рис.3. Зависимость противонакипной эффективности Θ от квадратного корня от дисперсии распределения затравочных кристаллов по размерам при постоянстве концентрации $n_0 = 10^{13} \text{ м}^{-3}$. Другие расчетные параметры соответствуют рис.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена уточненная модель формирования накипи в современных теплоэнергетических установках, использующих введение затравочных кристаллов для повышения своей эффективности. Принцип снижения накипи, как полагалось и в предыдущей работе [4], основан на том, что поверхность введенных затравочных кристаллов конкурирует с поверхностью теплообменной трубы, переключая на себя поток кристаллизации молекул растворенного вещества, тем самым уменьшая отложение на теплопередающих поверхностях. Впервые учтено, что при малых размерах взвешенных частиц коэффициент массопереноса на них кристаллизующихся молекул из пересыщенного раствора существенно больше, чем коэффициент массопереноса на стенки трубы. С учетом указанного уточнения модели проведены расчеты коэффициента снижения накипи на стенках трубы в зависимости от эффективного размера затравочных кристаллов, дисперсии их распределения по размерам, а также от температуры раствора.

Полученные результаты имеют важное практическое значение, т.к. позволяют более точно прогнозировать параметры теплоэнергетических установок и повышать эффективность их функционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Присяжнюк В.А.* Физико-химические основы предотвращения кристаллизации солей на теплообменных поверхностях // Сантехника, Отопление, Кондиционирование. – 2003. – №10. – С.26-30.

2. Мартынова О.И., Копылов А.С., Кашинский В.И., Очков В.Ф. Расчет противонакипной эффективности ввода затравочных кристаллов в теплоэнергетических устройствах // Теплоэнергетика. – 1979. – №9. – С.21-25.
3. Кошоридзе С.И., Левин Ю.К., Яновский Ю.Г. Анализ процесса кристаллизации солей в омагниченном водном потоке // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2007. – №4. – С.70-75.
4. Кошоридзе С.И., Левин Ю.К. Анализ физической модели снижения накипи в теплоэнергетических устройствах // Теплоэнергетика. – 2009. – №5. – С.66-68.
5. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. – М.: Мир, 1977. – 464 с.
6. Шервуд Т., Пигфорд Р., Уилки Ч. Массопередача. – М.: Химия, 1982. – 696 с.
7. Ривкин С.Л., Александров А.А. Термодинамические свойства воды и водяного пара. Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 80 с.

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕТОКСИКАЦИИ БИОЖИДКОСТЕЙ МЕТОДАМИ ФИЛЬТРАЦИИ И МАГНИТОСОРБЦИИ

Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.

*ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия*

РЕЗЮМЕ

Учтено, что процесс осаждения молекул вредных соединений на поглощающей поверхности пор в объеме пористого фильтра протекает по другим законам, чем захват этих молекул частицами взвешенного сорбента в объеме потока биожидкости. При этом коэффициент массопереноса вредных молекул из раствора на взвешенные частицы магнитного сорбента может при определенных условиях быть существенно больше, чем на поверхность пористого фильтра.

Проведено сравнение эффективности 2-х методов детоксикации:

- использование фильтрующих пористых поглотителей;
- применение взвешенных частиц магнитоуправляемого сорбента.

Показано, что перспективность метода детоксикации биожидкостей с использованием взвешенных частиц магнитоуправляемого сорбента предпочтительна не только отсутствием травмирующего влияния на клеточные структуры, но и принципиально большей эффективностью процесса сорбции молекул вредных соединений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассмотрены различные методы детоксикации биожидкостей – путем фильтрации и магнитосорбции. Оба указанных метода широко применяются на практике [1-3], поэтому представляется целесообразным сравнить их эффективность при различных диапазонах используемых параметров – величине пор фильтров, размерах частиц магнитоуправляемого сорбента.

Фильтрационный метод, как известно, состоит в пропускании очищаемой жидкой среды через объем пористого материала с развитой твердой сорбирующей поверхностью, способной активно взаимодействовать с удаляемым токсином. Характеристики такого метода очистки определяются активностью сорбента, размером пор, перепадом давления на его входе и выходе. Используем при анализе капиллярную модель фильтра, согласно которой поры имеют вид протяженных вдоль тока жидкости капилляров. При фильтрационном методе, как известно, размер пор должен быть достаточно велик ($r_{\text{ф}} \gg 10$ мкм), чтобы не оказывать вредного влияния на клеточные структуры. Это, очевидно, ограничивает эффективность фильтрации единичного объема жидкости.

Метод магнитосорбции основан на использовании композиционных материалов нового типа – нанопорошков с покрытием их поверхности тончайшим слоем (в пределе – монослоем) сорбирующего материала, т.н. магнитоуправляемых сорбентов (МУС). Указанные МУС вводятся в очищаемый раствор, например, в биожидкость (кровь, плазму). Вредные примеси, содержащиеся в биожидкости, поглощаются (сорбируются) развитой поверхностью сорбционного, например, углеродного слоя МУС. Затем с помощью магнитного поля осуществляют сепарацию отработанных частиц и выведение их (вместе с вредными примесями) из

русла биожидкости. Характеристики такого метода очистки определяются активностью сорбента, размером гранул МУС, его концентрацией в объеме очищаемой среды.

Эффективность действия такого сорбента, очевидно, может быть существенно повышена с учетом нанодисперсной структуры МУС – размер гранул МУС может выбираться в диапазоне $r_{МУС} \approx 0.2 \text{ мкм} - 3 \text{ мкм}$.

2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ФИЛЬТРАЦИИ И МАГНИТОСОРБЦИИ

Эффективность очистки биожидкости фильтрационным методом оценим величиной потока молекул, осаждаемых внутри капилляров фильтра I_1 (моль/с). Аналогичной характеристикой для метода детоксикации с использованием МУС является поток молекул токсина I_2 (моль/с), поглощаемых поверхностью частиц МУС, взвешенных в потоке биожидкости. Напишем аналитические выражения для указанных характеристик.

Дифференциальный поток токсинов $dI_1(x)$, осаждаемых на длине dx фильтра в капиллярах диаметром d и длиной L определяется выражением

$$dI_1(x) = \beta_1 C_1(x) S_1 \pi d \cdot n_\phi \cdot dx, \quad (1)$$

где n_ϕ - число капилляров на единицу площади поперечного сечения фильтра ($1/\text{м}^2$), S_1 - площадь поперечного сечения фильтра (м^2).

Дифференциальный поток токсинов $dI_2(x)$, осаждаемых на длине dx в реакторе с МУС с площадью поперечного сечения S_2 (м^2) определяется выражением

$$dI_2(x) = \beta_2 \cdot C_2(x) S_2 4\pi r_M^2 n_M \cdot dx \quad (2)$$

где n_M - количество частиц МУС радиуса r_M в единице объема жидкости ($1/\text{м}^3$); β_1 и β_2 - коэффициенты массопередачи токсинов внутри капилляров фильтра и на поверхности МУС ($\text{м}/\text{с}$), соответственно; $C_1(x)$, $C_2(x)$ - концентрация токсинов в очищаемой биожидкости ($\text{моль}/\text{м}^3$) на расстоянии x от начала фильтра и реактора МУС, соответственно.

2.1. Метод фильтрации.

Сопоставляя рассматриваемые методы детоксикации, важно обратить внимание на существенное отличие физических процессов, реализуемых в них при сорбции вредных молекул активной сорбирующей поверхностью.

По проведенным оценкам поток биожидкости в капиллярах фильтра ламинарен. Тогда коэффициент массопереноса β_1 в формуле (1) описывается выражением для конвективной диффузии в ламинарном потоке жидкости в круглой трубе [4]

$$\beta_1 = 1.6 \text{Re}^{-2/3} \text{Pr}^{-2/3} u \cdot (d/L)^{1/3} \quad (3)$$

где $\text{Re} = \frac{u \cdot d}{\nu}$ и $\text{Pr} = \frac{\nu}{D}$ - число Рейнольдса и диффузионное число Прандтля, соответственно, D - коэффициент диффузии молекул токсина в биожидкости, ν - кинематическая вязкость очищаемой биожидкости, u - скорость течения биожидкости в капилляре.

2.2. Метод магнитосорбции.

При использовании метода магнитосорбции процесс захвата вредных молекул частицами взвешенного сорбента в объеме потока биожидкости характеризуется коэффициентом массопереноса β_2 , который соответствует иному физическому процессу - осаждению молекул на взвесь, когда ее частицы неподвижны относительно потока жидкости, т.к. переносятся вместе с ним. При этом массообмен протекает за счет молекулярной диффузии и коэффициент β_2 соответствует условиям массопереноса на твердую сферу радиуса r_{MUC} в неподвижной среде [5]

$$\beta_2 = D / r_M \quad (4)$$

Ниже будет показано, что интенсивность процесса массопереноса вредных молекул из раствора на взвешенные частицы магнитного сорбента может при определенных условиях быть существенно больше, чем на поверхность пор в объеме пористого фильтра, что является важным фактором большего снижения концентрации вредных веществ в потоке биожидкости методом магнитосорбции.

3. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ МАГНИТОСОРБЦИИ И ФИЛЬТРАЦИИ

Для получения количественных оценок введем параметр

$$\Theta = \beta_2 / \beta_1, \quad (5)$$

в удобной для практики форме определяющий соотношение эффективности сравниваемых методов детоксикации.

Была проведена оценка коэффициентов β_1 и β_2 в реальных диапазонах параметров фильтрового и магнитосорбционного методов очистки биожидкости

$$u < 1 \text{ см/с}; r_M < 3 \text{ мкм.}$$

С целью оценки влияния различных параметров рассмотренных устройств – вязкости и коэффициента молекулярной диффузии очищаемой жидкой среды, а также диаметра капилляров на интенсивность массопереноса, а по существу – на эффективность процесса детоксикации, расчет производился для 2-х вариантов параметров, отличающихся на порядок друг от друга. Так, были рассмотрены вязкие и невязкие жидкости в диапазоне кинетической вязкости от 10^{-6} до $10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ с коэффициентом диффузии D от 10^{-9} до $10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$, а также узкие (с 10 кратным превышением диаметра эритроцитов) и широкие капилляры с диаметром 60 мкм и 600 мкм. Соответствующие параметры сведены в таблицу 1, где приведены параметры семейства из 4 кривых для фильтрового метода и 2 кривые для метода магнитосорбции.

Таблица.

Характеристики процессов фильтрации и магнитосорбции при сравнительной оценке их эффективности при очистке биожидкостей.

№	Метод детоксикации	Кинематическая вязкость $\nu, \text{ м}^2/\text{с}$	Коэффициент диффузии $D, \text{ м}^2/\text{с}$	Диаметр капилляра $d, \text{ мкм}$
1	Фильтрация	10^{-6}	10^{-9}	60
2		10^{-5}	10^{-10}	60
3		10^{-6}	10^{-9}	600
4		10^{-5}	10^{-10}	600
5	Магнитосорбция	10^{-6}	10^{-9}	-
6		10^{-5}	10^{-10}	-

При исходных данных, указанных в таблице под номерами 1-4, с использованием формулы (3) рассчитаны зависимости коэффициентов массопереноса вещества на стенку капилляра $\beta_1(u)$ от скорости протекания жидкости по капилляру, которые приведены на графике рис.1 в виде соответствующих кривых 1-4.

Расчет коэффициентов массопереноса для фильтрового метода проведен в диапазонах исходных данных, реализуемых на практике при использовании рассматриваемого метода детоксикации.

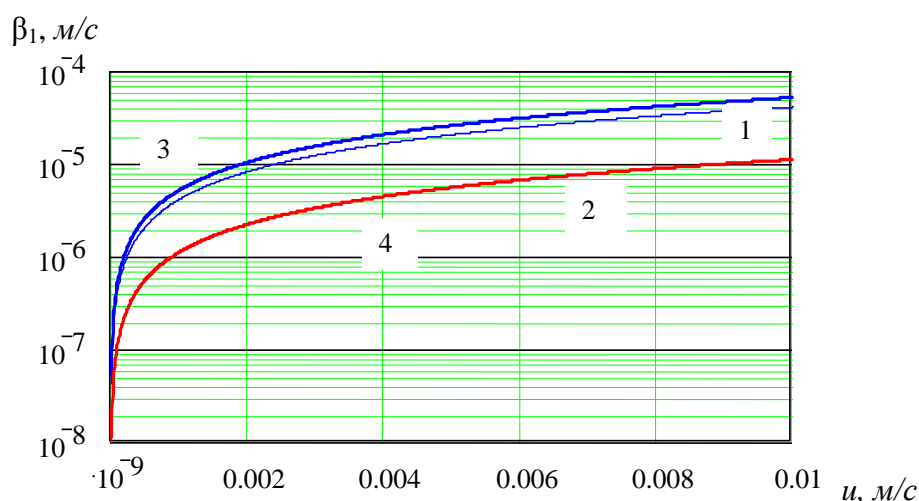


Рис.1. Зависимости коэффициента массопереноса β_1 в биожидкости от скорости ее течения в капилляре (кривые 1-4) при фильтровом методе очистки для различных исходных данных (см. таблицу), длина капилляров $L=0.1$ м.

При исходных данных, указанных в строках таблицы под номерами 5-6, с использованием формулы (4) рассчитаны зависимости коэффициентов массопереноса вещества на поверхность взвешенных кристаллов $\beta_2(r_M)$ от радиуса взвешенных частиц. Эти зависимости приведены на графике рис.2 в виде соответствующих кривых 5-6.

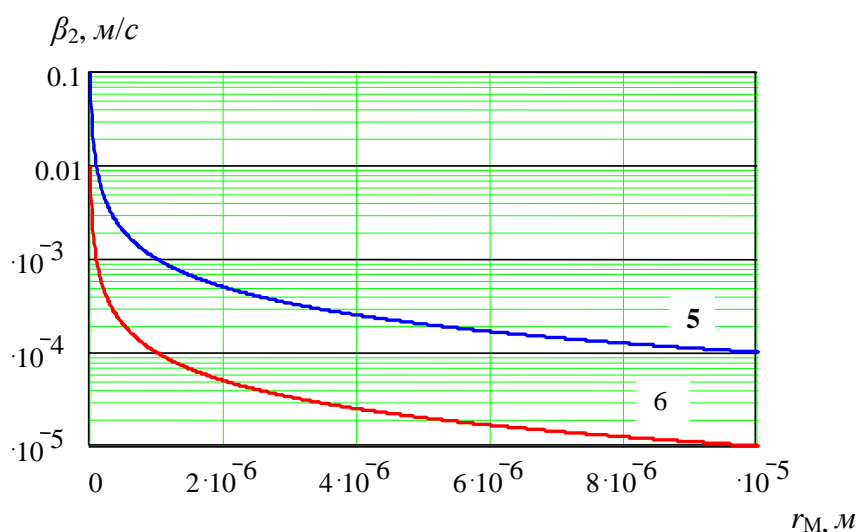


Рис.2. Зависимости коэффициентов массопереноса β_2 при детоксикации биожидкости методом магнитосорбции от радиуса частиц МУС (кривые 5-6, по таблице).

4. ВЫВОДЫ

Анализ графиков рис.1 и рис.2 позволяет сделать следующие выводы:

- детоксикация более эффективно происходит при магнитосорбции, причем в типичных для практики случаях коэффициент массопереноса β_2 в методе магнитосорбции при размере частицы МУС $r_M=1$ мкм на 2 порядка больше коэффициента массопереноса β_1 в фильтровом методе при скорости жидкости в капилляре $u=2$ мм/с;
- наиболее эффективен массоперенос молекул токсинов на частицы МУС в маловязких жидкостях;
- эффективность детоксикации растет с повышением степени дисперсности МУС;
- наибольших значений коэффициенты массопереноса в фильтровом методе достигают при увеличении скорости течения жидкости в капилляре, а в магнитосорбционном методе – при уменьшении размера частицы МУС.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных результатов указывает на то, что коренное различие процессов массопереноса токсинов на взвесь МУС и на стенки капилляров обеспечивает повышенную эффективность метода магнитосорбции по сравнению с фильтровым методом детоксикации. Следует также отметить, что сопоставление проводилось в отношении коэффициентов массопереноса, выражающих поток молекул токсинов, в предположении равенства площадей сорбирующих поверхностей. В случае метода с использованием МУС увеличение поверхности достигается повышением степени дисперсности частиц МУС, что может быть сделано без увеличения размеров аппаратуры. Фильтровой метод такой возможности не предоставляет, т.к. размер диаметра капилляров ограничен снизу размерами клеточных структур в очищаемой биожидкости. Это говорит о дополнительных резервах повышения эффективности магнитосорбции по сравнению с детоксикацией методом фильтрации, причем это может быть совмещено с существенным уменьшением габаритов аппаратуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комиссарова Л.Х., Филиппов В. И., Гончаров Л.А., Попова Т.С., Кутушов М.В., Мартынов А. Н., Брусенцов Н. А., Байбуртский Ф.С. Детоксикация организма с использованием магнитоуправляемых сорбентов. – <http://magneticliquid.ru/news.html>
2. Komissarova L.Kh., et.al. Absorptive capacity of iron-based magnetic carriers for blood detoxification // J. of Magnetism and Magnetic Materials. – 2001. – Vol.225. – P.197-201.
3. Ковалев Г.Н., Левин Ю.К., Снегирева Н.С., Яновский Ю.Г. Магнитоуправляемый сорбент, способ его изготовления и способ его применения. – Патент РФ №2356620 от 23.04.2008г.
4. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. – М.:Мир, 1977. – 464 с.
5. Шервуд Т., Пигфорд Р., Уилки Ч. Массопередача. – М.: Химия, 1982. – 696 с.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА НИЗКИХ ЧАСТОТ В ВОДЕ С ГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬЯМИ

Левин Ю.К., Попов В.В.

ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена задача о нахождении эффективных коэффициентов вязкости микропузырьковой газожидкостной среды, моделируемой гомогенной жидкостью. Получено аналитическое выражение для расчета коэффициента поглощения звуковых волн в области частот, существенно меньших собственных частот пузырей. Используя это выражение, найдена формула для расчета объемной вязкости микропузырьковой газожидкостной среды. Проведено сравнение с экспериментами, которое показало anomalously высокое значение второго коэффициента вязкости (объемная вязкость) среды по сравнению с ее сдвиговой вязкостью.

Известно, что присутствие в жидкости газовых микровключений – микропузырьков, приводит к сильному изменению ее акустических свойств [1]. Например, скорость звука в воде с воздушными микропузырьками составляет $c=100$ м/с уже при объемном газосодержании $\varphi = V_2 / (V_1 + V_2) = 0,01$ (рис.1). Это существенно ниже скорости звука в дегазированной воде $c_1=1450$ м/с и скорости звука в сухом воздухе $c_2=330$ м/с. Здесь V_1, V_2 – объемы, занимаемые жидкостью и газом, соответственно, $V=V_1+V_2$ – общий объем рассматриваемой микронеоднородной газожидкостной среды.

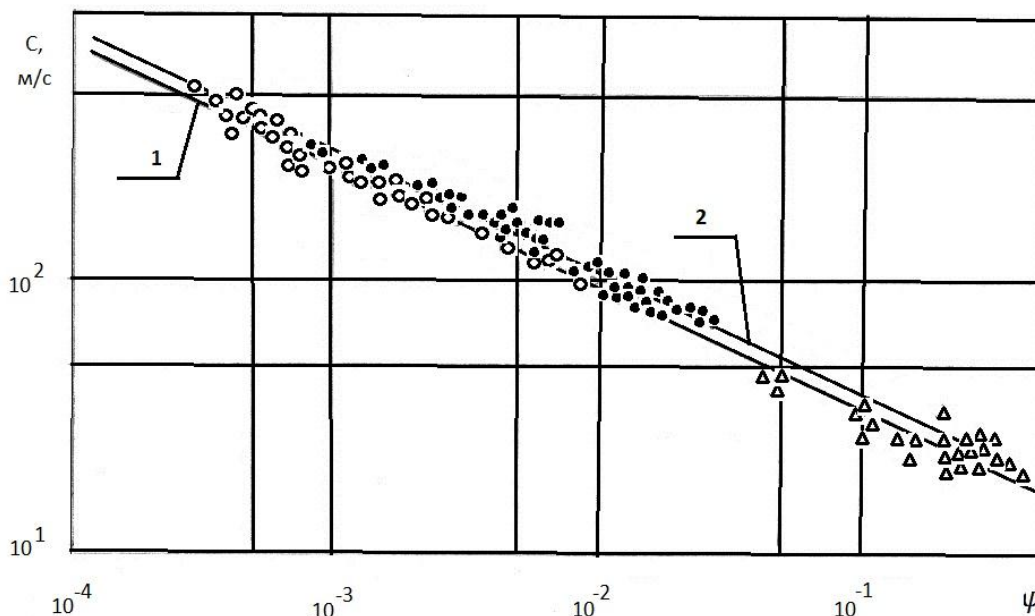


Рис.1. График зависимости скорости звука в микропузырьковой водо-воздушной среде от газосодержания: черные точки – результаты измерений работы [2], светлые кружки и треугольники – работы [3], 1 – расчет по формуле Бэтчелора [4] для пузырьков с $d \geq 200$ мкм, 2 – то же, с $d = 2$ мкм.

Коэффициент поглощения звука α такой среды

$$\alpha = -\ln(A_x/A_0)/(x - x_0), \text{ непер/м} \quad (1)$$

на несколько порядков выше по сравнению с коэффициентами поглощения звука дегазированной жидкостью α_1 и газом α_2 [5-7].

Ранее в кандидатской диссертации Попова В.В. было экспериментально показано, что спад амплитуды (в данном случае размаха) $A(x) \equiv A_x$ звукового импульса аperiodической формы (рис.2) в водо-воздушной микропузырьковой среде происходит по экспоненциальному закону

$$A_x = A_0 \exp(-\alpha(x - x_0)) \quad (2)$$

С $\alpha = 1,72$ непер/м при $\varphi = 0,025$ [5-7].

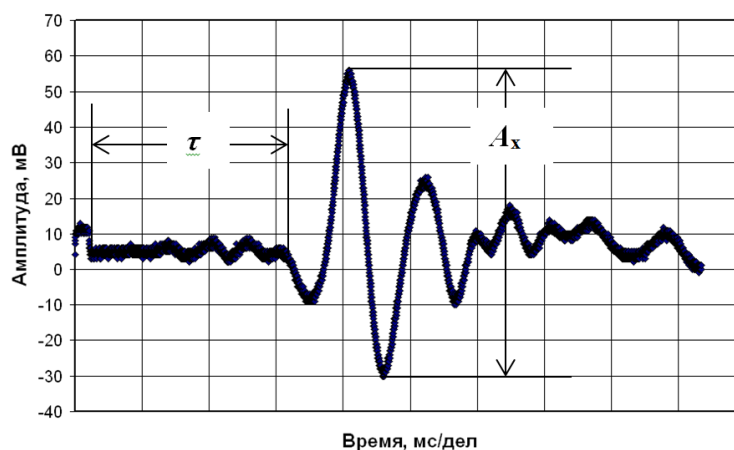


Рис.2. Типичная оциллограмма зондирующего звукового импульса. Скорость горизонтальной развертки 1 мс/дел: A_x — амплитуда (размах), τ — временная задержка.

Отсюда следует что, использование формулы (1) для расчета коэффициента поглощения звука α является экспериментально обоснованным применительно к исследуемым микропузырьковым средам в области частот звука f существенно меньших собственных частот микропузырей $f \ll f_0$. Для расчета собственной частоты f_0 газовых пузырей с равновесным диаметром d_0 на практике общепринято [8] использовать формулу

$$f_0 = \frac{1}{\pi d_0} \sqrt{\frac{3b\gamma(p_1^0 + \frac{4\sigma}{d_0})}{\rho_1}} \quad (3)$$

Здесь d_0 — равновесный диаметр пузырька, м; p_1^0 — гидростатическое (невозмущенное) давление в окружающей пузырек жидкости, Па; $b = 1 \dots 1/\gamma$ — коэффициент политропичности газа; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты газа, $\gamma = 1,4$ для воздуха; σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе пузырька — окружающая жидкость, Н/м; ρ_1 — плотность жидкости, кг/м³. Расчет по данной формуле для воздушных, гелиевых и водородных пузырьков дает (рис.3)

Видно, что собственные частоты f_0 микропузырьков с диаметрами $d \leq 60$ мкм составляют сотни и более кГц вне зависимости от того, какой режим сжимаемости газа в них реализуется — изотермический с $b = 1/\gamma$, или адиабатический с $b = 1$.

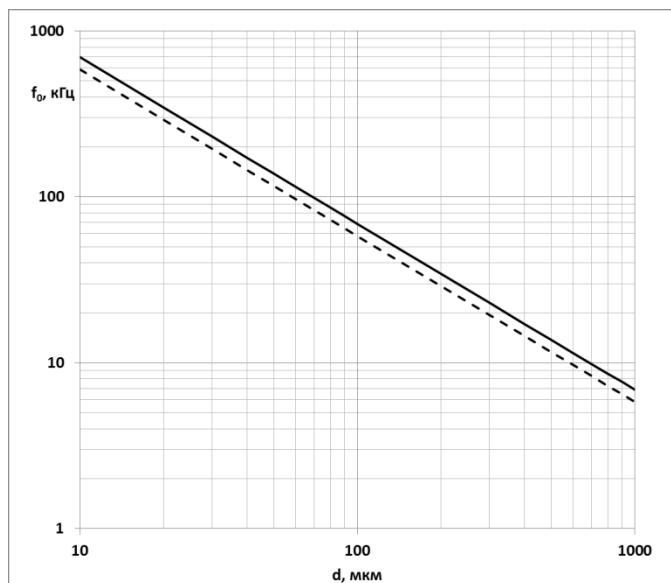


Рис.3. Собственная частота f_0 газовых пузырей в воде на глубине $H=1$ м от их диаметра d . Сплошная линия адиабатический режим ($b=1$), пунктирная – изотермический режим сжимаемости газа пузырей ($b = 1/\gamma$).

При работе в области частот $f \ll f_0$ и газосодержаний $\varphi \leq 0,01$ далее нами будет использоваться гомогенная модель, впервые предложенная академиком Л.И.Седовым [9]. В этой модели пузырьковые среды представляются сплошной текучей средой с эффективными гидродинамическими параметрами, подлежащими экспериментальному или теоретическому определению. Это такие параметры, как плотность ρ , сжимаемость $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)$, скорость звука c , сдвиговая η и объемная ζ вязкости при газосодержании φ . Общепринято для их расчета использовать следующие формулы [1]

$$\rho = \rho_1(1 - \varphi) + \rho_2\varphi \quad (4)$$

$$\beta = \beta_1(1 - \varphi) + \beta_2\varphi \quad (5)$$

$$c^2 = 1/\beta_e \quad (6)$$

$$\eta = \eta_1(1 + k\varphi) \quad (7)$$

$$\zeta - \text{нет формулы} \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{V_2}{V_1 + V_2} \quad (9)$$

В 1987 году Поповым В.В. совместно с Бошнятовым Б.В. впервые была проведена серия экспериментов по измерению сдвиговой вязкости водо-воздушной микропузырьковой среды и ее зависимости от газосодержания φ [5,6,10]. Результаты этих экспериментов приведены на рис.4 (график взят из кандидатской диссертации Попова В.В.). Позднее аспирантом Чернышевым И.В. были проведены эксперименты по измерению сдвиговой вязкости такой среды на основе стоковского метода измерений (по скорости падения шарика в исследуемой среде) [11].

Все эти эксперименты подтверждают известную формулу Эйнштейна для сдвиговой вязкости суспензий с $k = 2,5$

$$\eta = \eta_1(1 + k\varphi) \quad (10)$$

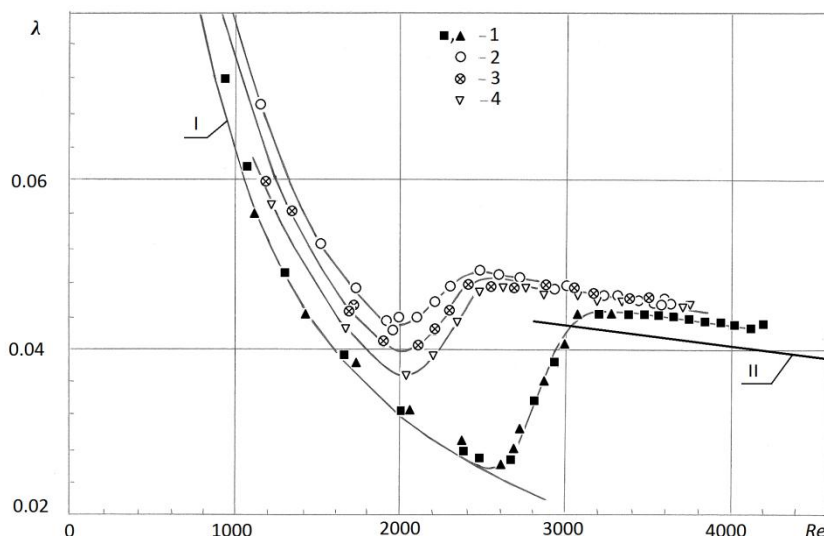


Рис.4. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления λ от числа Рейнольдса Re водо-воздушного микропузырькового потока в гладкой горизонтальной трубе круглого поперечного сечения с внутренним диаметром $d=4,04$ мм и общей длиной $L=1380$ мм: I – чистая жидкость, ламинарный режим ($\varphi=0$, $\lambda=64/Re$), II – турбулентный режим, формула Блазиуса $\lambda=0.32Re^{-1/4}$; 1 – $\varphi=0$; 2 – $\varphi=5 \cdot 10^{-3}$; 3 – $\varphi=3.7 \cdot 10^{-3}$; 4 – $\varphi=2.3 \cdot 10^{-3}$.

Одновременно с этим нами экспериментально был зафиксирован факт (рис.5) аномально высокого поглощения газожидкостными микропузырьковыми средами звука низких по сравнению с собственной частотой пузырей частот $f \ll f_0$ [5-8,13]. Этот факт до сих пор теоретически не объяснен.

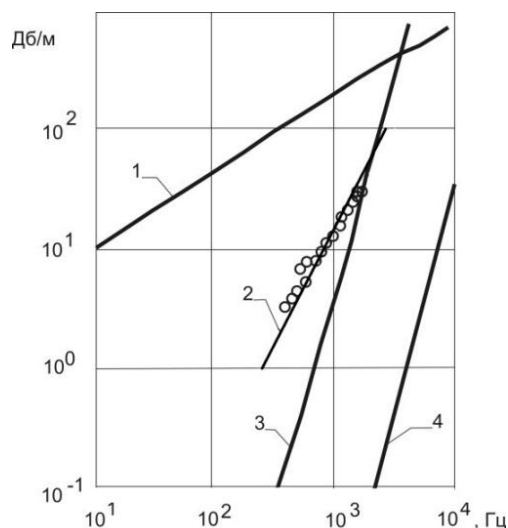


Рис.5. Зависимость коэффициента поглощения водо-воздушной микропузырьковой среды от частоты звуковой волны: светлые кружки – экспериментальные данные по поглощению ($d=10-100$ мкм, $\varphi=2,5\%$) [5,6]; 1, 3, 4 – расчет по формулам работ [12], [1], [13 применительно к условиям проведения эксперимента; 2 – расчет по нижеприведенной формуле (14) с $\zeta = 2,69 \cdot 10^4$.

Как показал анализ опубликованных в открытой печати теоретических работ по данной тематике, основным предположением практически всех этих работ является предположение об аддитивности вкладов каждого из пузырей среды в суммарный коэффициент поглощения α средой. При этом поглощение на одном пузыре рассчитывается как сумма вкладов, вносимых вязкостью жидкости, радиационным рассеиванием и тепловой диссипацией. А именно, декремент колебаний δ пузыря рассчитывается по формуле

$$\delta = \delta_{\eta} + \delta_r + \delta_t \quad (11)$$

Здесь δ_{η} – декремент колебаний, обусловленный вязкостью жидкости (без учета объемной вязкости), δ_t – декремент колебаний, связанный с теплообменом через границу раздела фаз жидкость - газ, δ_r – декремент, обусловленный радиационными потерями - рассеиванием звука на пузыре.

Использование этих предположений обосновано лишь в области частот звука вблизи собственных частот пузырей $f \sim f_0$ и малой числовой плотности пузырей (не взаимодействующих друг с другом пузырей). Это предположение не выполняется в нашем случае, т.к. здесь собственные частоты пузырей составляют сотни килогерц (в наших экспериментах используются зондирующие звуковые импульсы с частотами, лежащими в диапазоне $f \approx 0,1-5$ кГц, т.е. $f \ll f_0$). Среднеобъемное же расстояние между пузырями $\langle L \rangle$ сопоставимо с их диаметрами уже при объемном газосодержании в несколько процентов ($\langle L \rangle / d \approx 4$ при $\varphi = 1\%$).

В нашем случае физически оправданным представляется использование вышеупомянутой гипотезы академика Седова Л.И. для интерпретации результатов вышеописанных экспериментов, т.е. использовать для расчета скорости звука c и коэффициента поглощения α классические формулы

$$c^2 = 1 / \beta \rho \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + k \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_v} \right) \right] \quad (13)$$

Здесь η, ζ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости микропузырьковой среды, k – коэффициент теплопроводности, c_p, c_v – удельные теплоемкости среды при постоянном давлении и объеме, соответственно. Учитывая, что в микропузырьковой среде теплоемкости c_p и c_v слабо отличаются от теплоемкости несущей жидкости c_1 ($c_p \approx c_v \approx c_1$), получим для расчета коэффициента поглощения α формулу

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta \right] \quad (14)$$

Справедливость формулы (12) для вычисления скорости звука была проверена экспериментально ранее [2]. Эксперименты подтверждают ее. Формула для расчета коэффициента поглощения, приведенная выше – классическая формула акустики бесструктурных сплошных сред и учета релаксационных процессов. Важно, что она правильно описывает функциональную зависимость коэффициент поглощения от частоты $\alpha \propto \omega^2$ в нашей области параметров. Поскольку $\mu = \mu_1(1+k\varphi) \approx \mu_1$, из вышеприведенных рассуждений следует, что в микропузырьковой газожидкостной среде объемная вязкость ζ на несколько порядков превышает сдвиговую в области: $f \ll f_0, \varphi \leq 3\%$. Поэтому такую среду можно рассматривать как некоторую текучую

среду с аномально высокой эффективной второй (объемной) вязкостью ($\zeta \gg \eta$). Интересно отметить, что в экспериментальной акустике давно известны «обычные» жидкости, у которых второй коэффициент вязкости на два порядка превышает сдвиговую вязкость η [13]

Жидкость ($t^0=20^0\text{C}$)	$\alpha_\eta/f^2, 10^{-17} \text{ с}^2/\text{см}$ теория без учета ζ	$\alpha_\eta/f^2, 10^{-17} \text{ с}^2/\text{см}$ эксперимент
вода (1–220 МГц)	8,5	23
этиловый спирт (13–250 МГц)	22	55
бензол (11–165 МГц)	8,6	850
уксусная кислота (3,7–31 МГц)	17	2880

Выведем формулу для расчета объемной вязкости микропузырьковой среды на основе имеющихся экспериментальных данных о поглощении звука. Пусть в газожидкостной микропузырьковой среде в направлении оси X распространяется плоская звуковая волна давления, амплитуда которой изменяется по закону

$$p = p_0 \exp(i(kx - \omega t)) \quad (15)$$

Здесь p_0 – амплитуда волны при $x=0$; $k=(\omega/c+i\alpha)$ – комплексное волновое число; $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота волны; c – скорость звука в среде; α – коэффициент поглощения звука в среде. Работа сил давления W в волне за один цикл колебаний $2\pi/\omega$ не равна нулю только в том случае, если существует ненулевой сдвиг фаз между колебаниями давления p и вызванными ими объемными деформациями v среды

$$W = \oint p dv \neq 0 \quad (16)$$

В первом приближении этот сдвиг фаз θ равен

$$\theta = -F(\varphi) \frac{\omega}{\omega_0} \quad (17)$$

где $F(\varphi)$ – неизвестная пока функция газосодержания φ . При этом $\lim_{\varphi \rightarrow 0} F(\varphi) \rightarrow 0$. Здесь $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота звука; $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 – собственная частота пузырей, задаваемая формулой (3). Проводя вычисление W по формуле (16) с учетом (17), получим следующее выражение для плотности диссипируемой за одно колебание в акустической волне энергии

$$W = p_0 v_0 \pi F(\varphi) \frac{\omega}{\omega_0} \quad (18)$$

или за единицу времени

$$w = \frac{W}{T} = p_0 v_0 \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} F(\varphi) \frac{\omega}{\omega_0} = p_0 v_0 \frac{1}{2} F(\varphi) \frac{\omega^2}{\omega_0} \quad (19)$$

Величина α выражается через плотность энергии плоской звуковой волны, поглощаемой средой за единицу времени и среднюю плотность потока звуковой энергии $\langle \Pi \rangle$ по формуле [13]

$$\alpha = \frac{w}{\langle \Pi \rangle} \quad (20)$$

В нашем случае $\langle \Pi \rangle = c\rho_0 v_0 / 2$ – средняя плотность потока звуковой (потенциальной) энергии волны при $\theta=0$ и $x=0$. Подставляя это выражение в формулу (20) для коэффициента поглощения α микропузырьковой средой звука низких по сравнению с собственной частотой пузырей частот $\omega \ll \omega_0$ получим

$$\alpha = F(\varphi) \frac{\omega^2}{\omega_0 c} \quad (21)$$

Сравнивая формулы (14) и (21) для объемной вязкости микропузырьковой среды ζ имеем

$$\zeta = F(\varphi) \frac{2\rho c^2}{\omega_0} - \frac{4}{3}\eta \quad (22)$$

При условии $\zeta \gg \eta$

$$\zeta = F(\varphi) \frac{2\rho c^2}{\omega_0} \quad (23)$$

Используя имеющиеся экспериментальные данные по поглощению звука микропузырьковой водо-воздушной средой [13], можно показать, что функция $F(\varphi)$ выражается в виде $F(\varphi) = k\varphi$, с неизвестной константой k , подлежащей экспериментальному определению. Подводя итог, окончательно получим

$$\alpha = k \frac{\varphi \omega^2}{\omega_0 c} \quad (24)$$

Ниже приведены экспериментальные графики, подтверждающие формулу (24). В частности – линейную зависимость α от газосодержания φ (рис.6) и обратную пропорциональность от скорости звука c (рис.7)

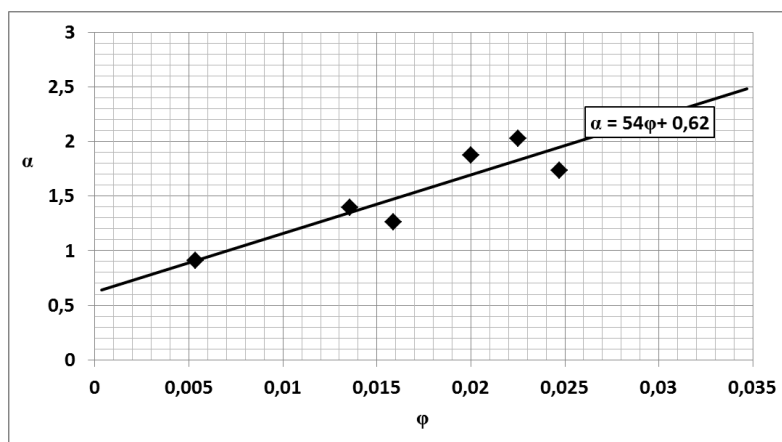


Рис.6. Зависимость коэффициента поглощения звука α , (непер/м) в микропузырьковой водо-воздушной среде от объемного газосодержания φ . Сплошная линия – аппроксимирующая экспериментальные точки линейная зависимость, вида $\alpha = 54\varphi + 0.62$ [14].

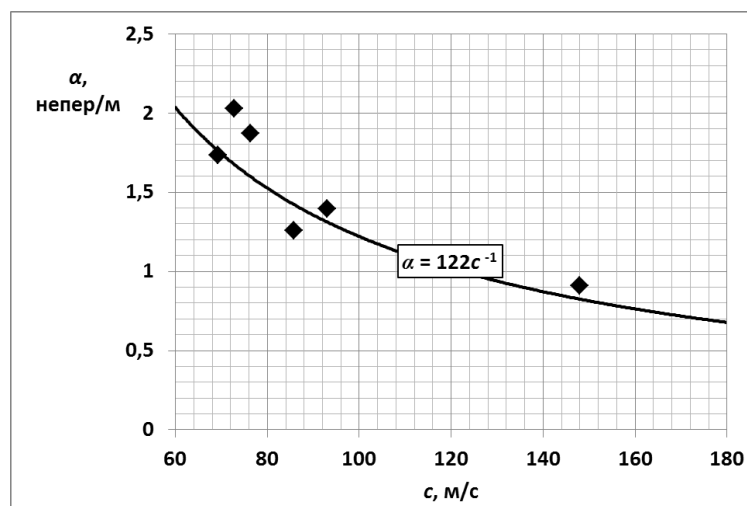


Рис.7. Зависимость поглощения звука низких ($f \approx 1$ кГц) частот в микропузырьковой водо-воздушной среде от величины скорости звука в ней. Сплошная линия – аппроксимирующая экспериментальные точки зависимость вида $\alpha = 122/c$.

ВЫВОДЫ

В работе получено аналитическое выражение для расчета коэффициента поглощения звука микропузырьковой газожидкостной средой в области частот низких по сравнению с собственной частотой пузырей.

Показано, что такие микропузырьковые газожидкостные среды, рассматриваемые в рамках модели гомогенной среды с эффективными гидрофизическими параметрами, подлежащими расчету или экспериментальному измерению, характеризуются аномально высоким значением второго коэффициента вязкости (объемная вязкость) по сравнению со сдвиговой вязкостью среды.

Проведено сравнение с экспериментом. Показано, что имеющиеся экспериментальные данные подтверждают полученные в работе теоретические формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, ч.1-2. – М.: Наука, 1987. – 464 с., 360 с.
2. Бошнятов Б.В., Попов В.В. Об измерении газосодержания микродисперсных газожидкостных сред акустическим методом / В сб.: Гидродинамические проблемы технологических процессов. Под ред. акад. В.В.Струминского. – М.: Наука, 1988. – с.211-215.
3. Silberman E. Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes // JASA. – 1970. – Vol.48. – N5. – P.1195-1197.
4. Бэтчелор Г.К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости // Механика. – 1968. – №3. – С.65-84.
5. Попов В.В. Микропузырьковая газожидкостная среда / Дисс. на соиск. ст. канд. физ.-мат. наук. – Долгопрудный: МФТИ, 1991. – 111 с.
6. Попов В.В. Микропузырьковая газожидкостная среда / Автореферат дисс. на соиск. ст. канд. физ.-мат. наук. – Долгопрудный: МФТИ, 1991. – 18 с.

7. *Бошнятов Б.В., Попов В.В.* Затухание низкочастотных звуковых волн в микропузырьковой газожидкостной среде // *Фундаментальные исследования*, М.: «Академия естествознания». – 2009. – №3. – С.99-102.
8. *Бошнятов Б.В.* Исследование нерезонансного эффекта затухания низкочастотных звуковых волн в микропузырьковой газожидкостной среде // *Известия ВУЗ. Физика*. – 2005. – №11. – С.43-48.
9. *Седов Л.И.* Жидкость с пузырьками как однородная материальная среда / Отчет Института механики МГУ. – 1973. – №1468.
10. *Бошнятов Б.В., Попов В.В.* Экспериментальные исследования турбулентных течений микропузырьковых газожидкостных смесей в гладких трубах / Всесоюзная конференция по кинетической теории разреженных и плотных газовых смесей и механике неоднородных сред (11-13 июня 1987 г., Ленинград). – Программа конференции. – С.10.
11. *Бошнятов Б.В., Чернышев И.В.* К вопросу об эффективной вязкостимикропузырьковой среды / В сб. научных трудов «Молекулярная газодинамика и механика неоднородных сред». – М.: Наука, 1990. – С.43-48.
12. *Нагиев Ф.Б., Хабеев Н.С.* Динамика растворимых газовых пузырьков // *Изв. АН СССР. МЖГ*. – №6. – 1985.
13. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
14. *Бошнятов Б.В., Попов В.В.* Нерезонансный механизм поглощения звука в микропузырьковой водо-воздушной среде / Всероссийская конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, структурно сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2010. – С.61-68.

УДК 621.7.043: 621.77: 621.777.01: 53.072.22: 532.5.01: 539.381: 539.89

О ЧИСЛЕННОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ РАВНОКАНАЛЬНОГО МНОГОУГЛОВОГО ПРЕССОВАНИЯ АМОРФНОГО ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА В ДВУХПОВОРОТНОМ ШТАМPE С ПОДВИЖНОЙ ВЫХОДНОЙ СТЕНКОЙ

Периг А.В.¹, Голоденко Н.Н.²

¹*Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск*

²*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка,
Украина*

РЕЗЮМЕ

В работе предложена и численно реализована гидродинамическая модель технологического процесса равноканального многоугольного прессования для вязкого течения физической модели аморфного полимерного композита через двухповоротный прямоугольный сегаловский штамп с подвижной выходной стенкой. Модель обеспечивает построение плоских и пространственных расчетных эпюр для линий тока вязкого течения, функций тока и вихря, горизонтальной и вертикальной составляющих скорости, модуля полной скорости вязкого потока, тангенциальных напряжений, а также давления прессования для следующих трех технологических режимов деформирования. Рассчитан первый режим течения – в случае неподвижной выходной стенки многоугольного штампа. Определены параметры второго режима прессования – в случае выходной стенки, совершающей переносное движение по направлению вязкого течения. Установлены кинематические особенности третьего режима экструзии – в случае выходной стенки, движущейся противоположно к направлению вязкого течения.

Ключевые слова: равноканальное многоугольное прессование; аморфный полимерный композит; двухповоротный сегаловский штамп; подвижная выходная стенка многоугольного штампа; плоское вязкое течение несжимаемой ньютоновской сплошной среды; краевая задача для уравнений Навье-Стокса в форме уравнения переноса вихря; численное конечноразностное решение

1. ВВЕДЕНИЕ

Реологически сложное течение аморфных полимерных композитов при осуществлении равноканального многоугольного прессования (РКМУП) в многоугольных сегаловских штампах широко исследуется с 1998 г. в работах Sue H.-J. и др. [1], Белошенко В.А. и др. [2], Aouf В. и др. [3]. Гидродинамические подходы к моделированию вязких течений полимерных материалов при РКУП и РКМУП развиты в работах Перига А.В. и др. [4-6]. В то же время в известных работах [1-6] не в полной мере учтены особенности вязкого течения полимеров при РКМУП через двухповоротные штампы с подвижной выходной стенкой, что и обуславливает актуальность данной работы.

2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Целью работы является построение гидродинамической модели ньютоновского вязкого течения аморфного полимерного материала через равноканальный

двухповоротный многоугольной штамп сегаловской геометрии с наличием подвижной выходной стенки, задающей дополнительное переносное движение в системе угловой штамп – вязкая полимерная заготовка (рис.1). При этом необходимо определить как основные кинематические особенности вязкого течения полимерного композита, так и оценить ключевые энергосиловые параметры технологического процесса РКМУП через штамп с подвижной выходной стенкой de (рис.1).

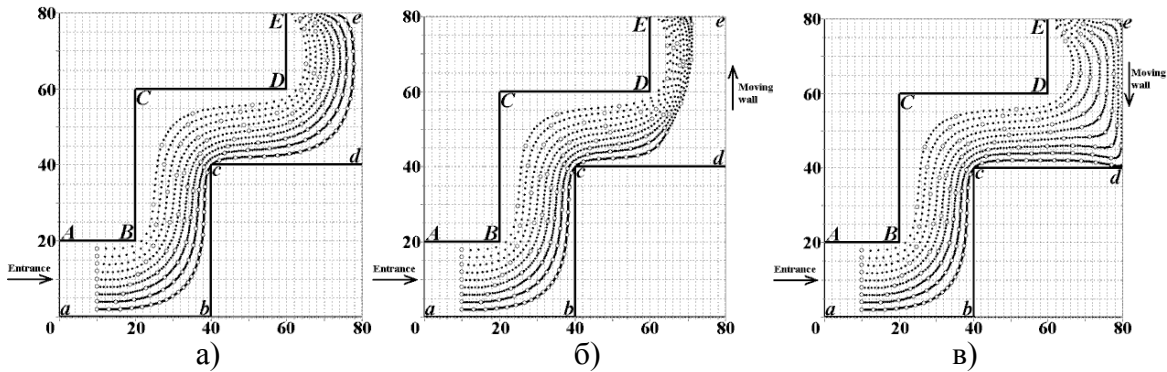


Рис.1. Расчетные линии тока для размерной характерной скорости РКМУП $\bar{U}_0 = 270$ мкм/с для следующих режимов прессования: стенка de неподвижна $\bar{U}_b = 0$ (а), стенка de движется в направлении вязкого потока со скоростью $\bar{U}_b = \bar{U}_0$ (б), стенка de движется навстречу потоку со скоростью $\bar{U}_b = (-1) \cdot \bar{U}_0$ (в).

В вязкостном приближении плоскую задачу моделирования РКУП аморфных полимеров можно рассматривать в гидродинамической постановке (рис.1-8) в рамках численного конечноразностного интегрирования уравнений Навье-Стокса (УНС) в форме безразмерного уравнения переноса вихря (УПВ)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{Re} \left(\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right); \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

в которое входят следующие безразмерные величины: ζ – функция вихря (рис.3); t – время; u, v – составляющие (рис.4-5) скорости w (рис.6) вязкого потока вдоль осей x и y ; x, y – декартовы координаты; \mathbf{Re} – число Рейнольдса.

Также отметим, что если используются размерное и безразмерное значения величины, то размерная величина выделяется верхним подчёркиванием.

В соотношении (1) безразмерная функция вихря ζ (рис.3) определяется как $\zeta = \bar{\zeta} \bar{a} / \bar{U}_0$, где $\bar{\zeta}$ [1/с] – размерная функция вихря; \bar{a} [м] – ширина каждого из каналов многоугольного штампа; \bar{U}_0 [м/с] – характерная скорость прессования.

Безразмерное время t в уравнении (1) связано с размерным временем \bar{t} [с] как $t = \bar{t} \bar{\eta}_{vis} / (\bar{\rho} \bar{a}^2)$ или $t = \bar{t} \bar{v}_{vis} / (\bar{a}^2)$, где \bar{v}_{vis} [м²/с] – кинематическая вязкость, $\bar{\eta}_{vis} = \bar{v}_{vis} \bar{\rho}$ [Па·с] – динамическая вязкость, $\bar{\rho}$ [кг/м³] – плотность вязкой физической модели полимерного материала. Число Рейнольдса \mathbf{Re} в данной задаче определяется как $\mathbf{Re} = \bar{U}_0 \bar{a} \bar{\rho} / \bar{\eta}_{vis}$. В выражении (1) безразмерная x -проекция скорости u связана с размерной составляющей \bar{u} [м/с] как $u = \bar{u} / \bar{U}_0$ (рис.4).

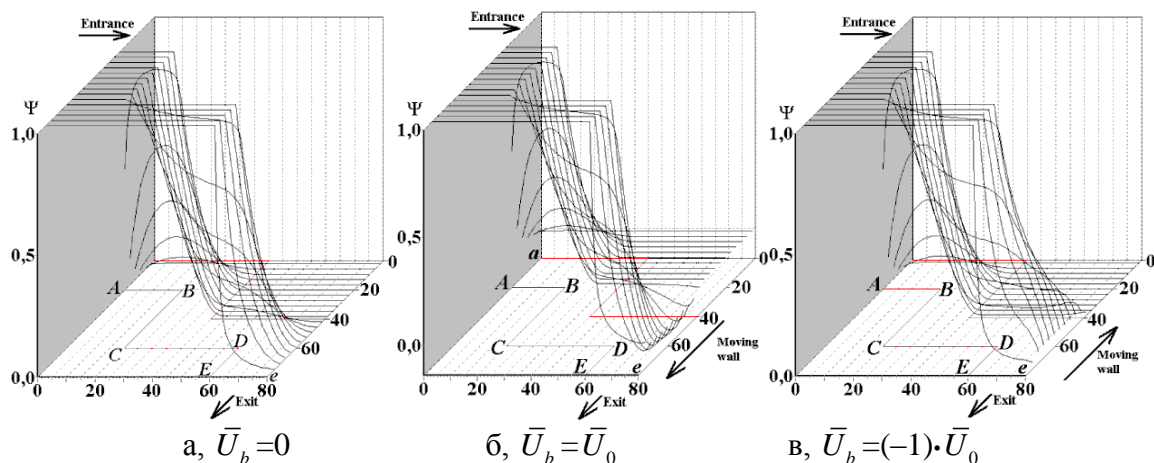


Рис.2. Расчетная безразмерная функция тока ψ .

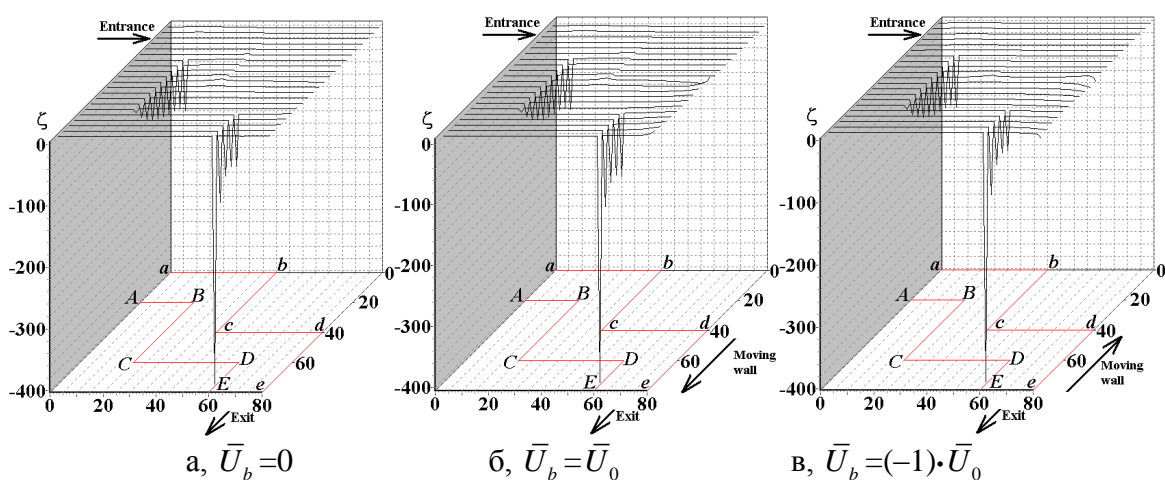


Рис.3. Расчетная безразмерная функция вихря ζ .

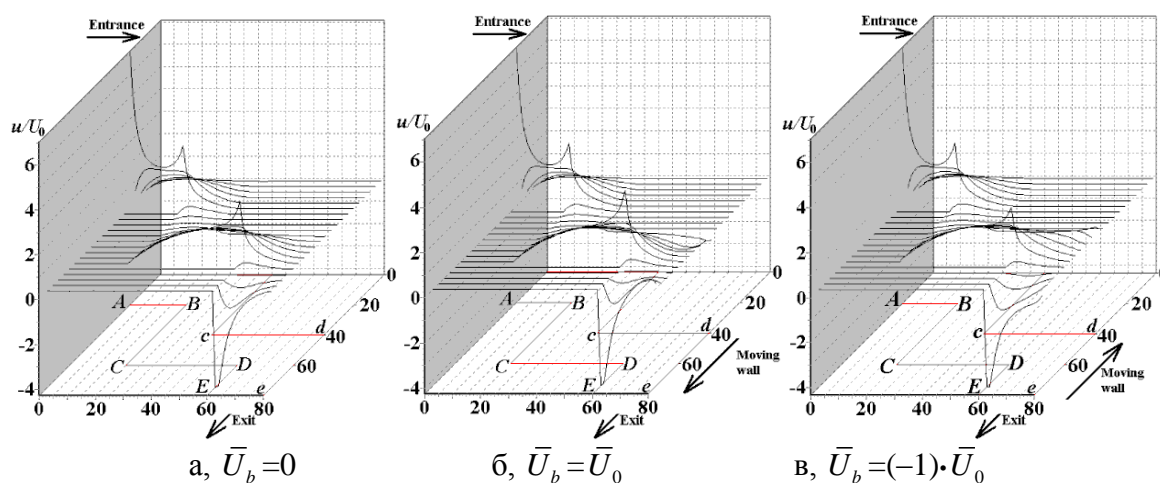


Рис.4. Расчетная вертикальная составляющая скорости вязкого потока.

В формуле (1) безразмерная y -проекция скорости v связана с размерной составляющей \bar{v} [м/с] как $v = \bar{v} / \bar{U}_0$ (рис.5). Безразмерные декартовы координаты x и y в (1) связаны с размерными декартовыми координатами \bar{x} [м] и \bar{y} [м] как $x = \bar{x} / \bar{a}$ и $y = \bar{y} / \bar{a}$ или как $x = \mathbf{Re} \cdot ut$ и $y = \mathbf{Re} \cdot vt$.

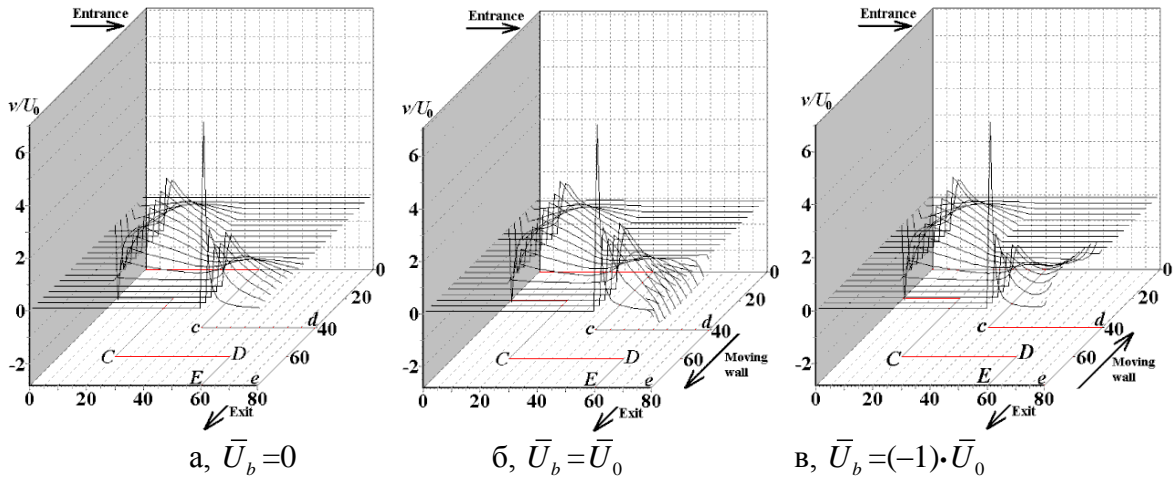


Рис.5. Расчетная горизонтальная составляющая скорости вязкого потока.

Поскольку рассматривается установившийся режим вязкого течения физической модели полимерного материала через многоугольной штамп с выходной подвижной стенкой de (рис.1-8), то начальные условия для краевой задачи, описываемой УПВ (1), могут приниматься в виде грубого приближения к стационарному решению: $u^0_{i,j}=0$; $v^0_{i,j}=0$; $\zeta^0_{i,j}=0$; $\psi^0_{i,j}=0$.

Граничные условия для стенок многоугольного штампа запишем как условия для полного прилипания вязкого материала (рис.1).

Для левой границы вязкого потока $ABCDE$ на рис.1 имеем

$$\psi_{i,j} = 0 \quad (2)$$

Для правой границы вязкого потока $abcde$ на рис.1 имеем

$$\psi_{i,j} = 1 \quad (3)$$

Для участков AB и CD вязкого потока на рис.1 имеем

$$\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j}) / \eta^2, \quad (4)$$

где η – шаг координаты вдоль оси y ; i и j – номера ячеек разностной сетки вдоль осей x и y соответственно.

Для участков BC и DE вязкого потока на рис.1 имеем

$$\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) / \xi^2, \quad (5)$$

где ξ – шаг координаты вдоль оси x .

Для участков ab и cd вязкого потока на рис.1 имеем

$$\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) / \eta^2 \quad (6)$$

Для участка bc вязкого потока на рис.1 имеем

$$\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j}) / \xi^2 \quad (7)$$

Для участка выходной стенки de , движущегося со скоростью U_b , имеем

$$\zeta_{i,j} = 2(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j} + \eta \cdot (U_b / U_0)) / \xi^2 \quad (8)$$

Для угловых точек C , b и d , лежащих в вершинах вогнутых (со стороны вязкого потока) углов, имеем

$$\zeta_{i,j} = 0. \quad (9)$$

Для угловых точек многоугольного штампа B и D в разностном уравнении, записанном для узла $(i,j-1)$, имеем

$$\zeta_{i,j} = 2\psi_{i,j-1}/\eta^2. \quad (10)$$

Для угловых точек многоугольного штампа B и D в разностном уравнении, записанном для узла $(i+1,j)$, имеем

$$\zeta_{i,j} = 2\psi_{i+1,j}/\xi^2. \quad (11)$$

Для угловой точки c в разностном уравнении, записанном для узла $(i-1,j)$,

$$\zeta_{i,j} = 2\psi_{i-1,j}/\xi^2. \quad (12)$$

Для угловой точки c в разностном уравнении, записанном для узла $(i,j+1)$,

$$\zeta_{i,j} = 2\psi_{i,j+1}/\eta^2. \quad (13)$$

На входе (Aa) в многоугольной штампа на рис.1 имеем

$$\psi_{0,j} = \psi_{1,j}, \quad u_{0,j} = 1, \quad v_{0,j} = 0. \quad (14)$$

На выходе (Ee) из многоугольного штампа на рис.1 имеем

$$\psi_{i,n} = \psi_{i,n-4} - 2\psi_{i,n-3} + \psi_{i,n-1}, \quad \zeta_{i,n} = \zeta_{i,n-4} - 2\zeta_{i,n-3} + \zeta_{i,n-1}, \quad u_{i,n} = 0. \quad (15)$$

Результаты численного интегрирования краевой задачи (1)-(15) в виде плоских и пространственных эпюр представлены на рис.1-8.

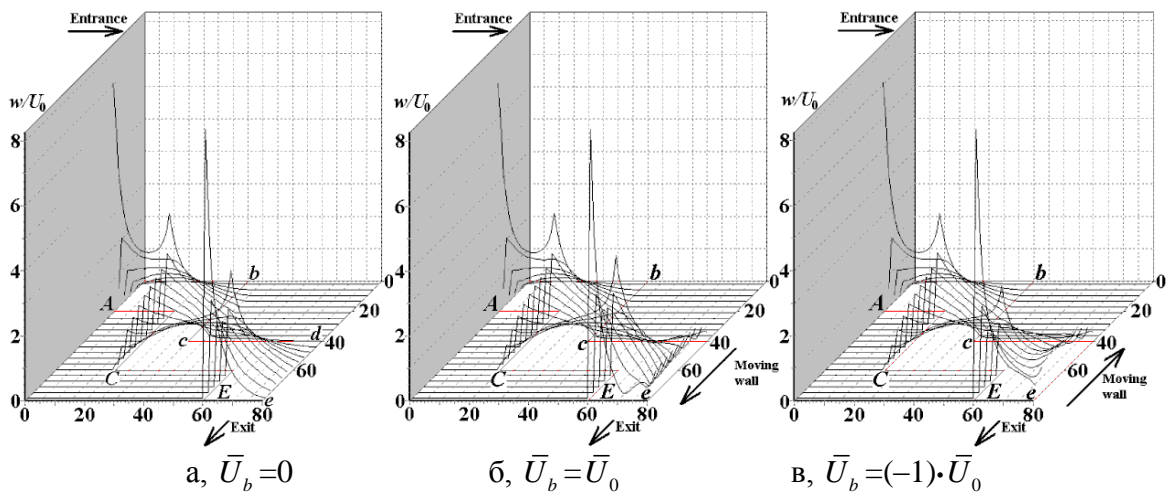


Рис.6. Расчетный модуль скорости вязкого потока $w=(u^2+v^2)^{0,5}$.

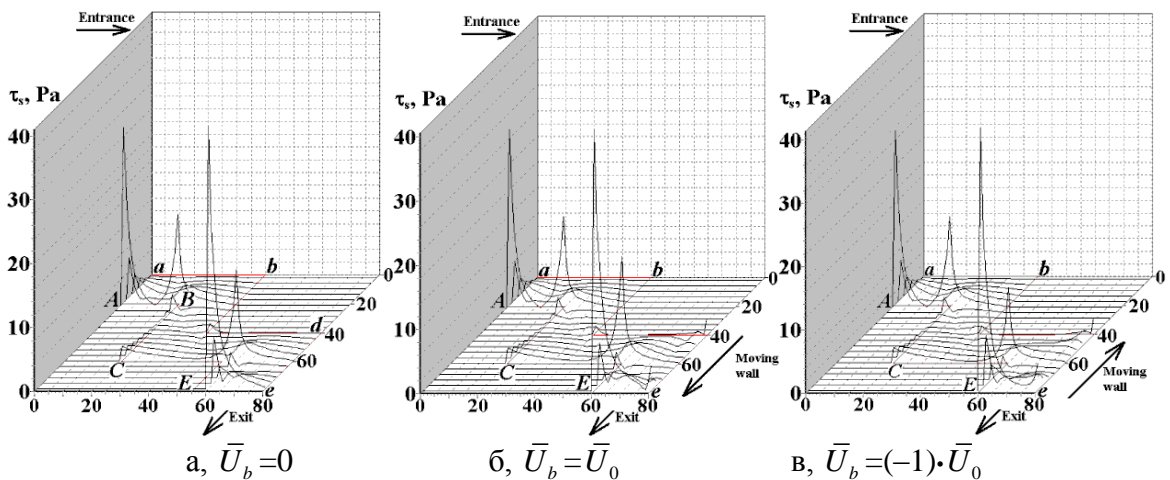


Рис.7. Расчетные поля тангенциальных напряжений $\bar{\tau}_s$.

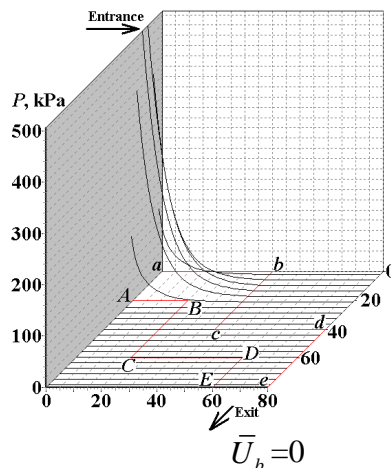


Рис.8. Расчетное поле давления прессования.

В рамках учета подвижности выходной стенки de многоугольного сегаловского штампа были выполнены следующие численные расчеты для трех выбранных режимов вязкого течения при осуществлении РКМУП:

а) выходная стенка штампа de неподвижна, т.е. $\mathbf{V}_{\text{wall } de} = \mathbf{0}$, а характерная скорость $U_b = 0$ (поз. «а» на рис.1-8). Время установления стационарного течения в этом случае составляет 18,426 с. На рис.1а видно, что в случае неподвижной выходной стенки de ($\bar{U}_b = 0$) в окрестности т. d наблюдается формирование свободной от маркеров симметричной застойной зоны вязкого течения модели полимера, которая примыкает к cde ;

б) подвижная стенка de движется со скоростью $\bar{U}_b = \bar{U}_0$ в направлении потока (поз. «б» на рис.1-7), т.е. $\mathbf{V}_{\text{wall } de} \uparrow \uparrow \mathbf{U}_0$, а характерная скорость $U_b/U_0 = (+1)$. Время установления стационарного течения в этом случае составляет 46,111 с. На рис.1б теоретически установлено, что в случае переносного движения подвижной стенки de в направлении истечения вязкого полимерного потока ($\bar{U}_b \uparrow \uparrow \bar{U}_0$; $\bar{U}_b > 0$) имеет место потеря симметрии и существенное увеличение размеров застойной зоны течения в окрестности т. d ;

в) подвижная стенка de движется навстречу вязкому потоку (поз. «в» на рис.1-7), т.е. $\mathbf{V}_{\text{wall } de} \uparrow \downarrow \mathbf{U}_0$, а характерная скорость $U_b/U_0 = (-1)$. Время установления стационарного течения в этом случае составляет 59,815 с. В случае движения подвижной стенки de навстречу вязкому потоку на рис.1в ($\bar{U}_b \uparrow \downarrow \bar{U}_0$; $\bar{U}_b < 0$) имеет место минимизация размеров застойной зоны течения в окрестности т. d равноканального многоугольного штампа.

Общими числовыми данными для всех трех режимов вязкого течения при РКМУП, представленных на рис.1-8, являются следующие числовые значения физических величин для деформируемой вязкой модели полимерного композита, а также геометрических параметров углового штампа и заготовки: ширина каждого канала $\bar{a} = 40$ мм многоугольного штампа, плотность вязкой пластилиновой модели полимера $\bar{\rho} = 1850$ кг/м³, предел текучести пластилина $\bar{\sigma}_s = 217$ кПа [7], удельные теплоемкость и теплопроводность вязкой пластилиновой модели $c = 1,004$ кДж/(кг·К) и $\bar{\lambda} = 0,7$ Дж/(м·с·К) [8], динамическая вязкость $\bar{\eta}_{vis} = 135,05$ Па·с, кинематическая вязкость $\bar{v}_{vis} = \bar{\eta}_{vis} / \bar{\rho} = 0,073$ м²/с, средняя размерная скорость углового прессования $\bar{U}_0 = 270 \cdot 10^{-6}$ м/с, число Рейнольдса

$Re = \bar{U}_0 \bar{a} \bar{\rho} / \bar{\eta}_{vis} = 1,48 \cdot 10^{-4}$, размерное давление прессования $\bar{p} = 518$ кПа на входе aA (рис.8), число шагов координаты вдоль ширины канала $q=20$, число шагов координатной сетки по горизонтали 80, по вертикали – 80, шаг координаты составляет 2 мм, шаг итераций по времени равен 74 мс, метки времени выбраны через 100 с, $t_1=100$ с – момент времени для построения изохронны №1, относительная погрешность итераций 0,001.

Как следует из результатов численного интегрирования краевой задачи (1)-(15), представленных на рис.1, результаты гидродинамического моделирования ньютоновского течения континуума позволяют сформулировать рациональные технологические рекомендации по выбору режимов для РКМУП аморфных и аморфно-кристаллических полимерных композитов, которые обеспечивают минимизацию геометрических размеров застойной зоны вязкого течения в двухповоротном сегаловском штампе с подвижной выходной стенкой de (рис.1).

3. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Дополнительно проанализируем первый расчетный случай, когда выходная стенка штампа de неподвижна, т.е. $\mathbf{V}_{wall\ de}=\mathbf{0}$, а характерная скорость $\bar{U}_b=0$ (поз. «а» на рис.1-8). Данному простейшему случаю вязкого течения при РКМУП соответствуют результаты физического моделирования, приведенные на рис.9.

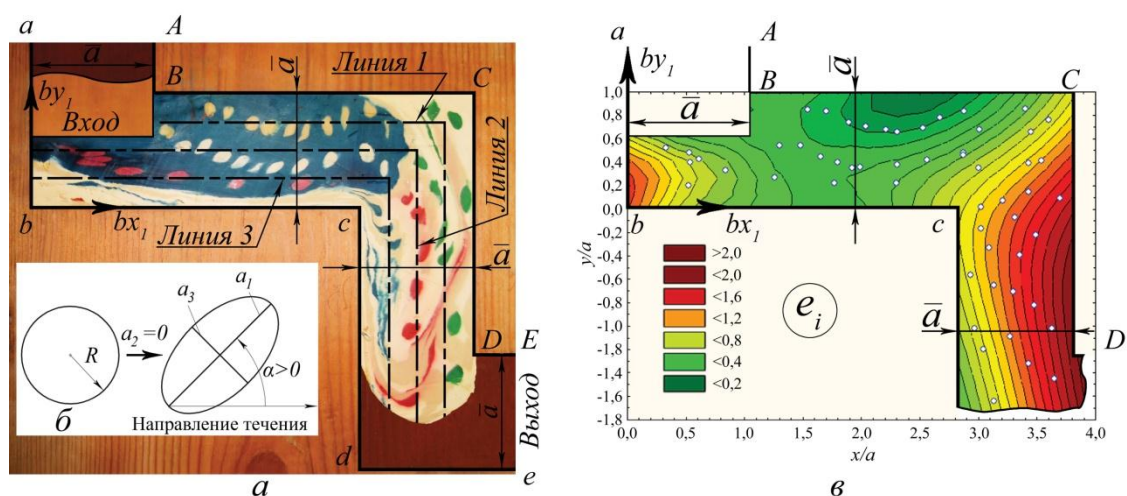


Рис.9. Экспериментальная физическая модель (а), схема трансформации исходной кольцевой сетки (б) и экспериментальное поле интенсивностей логарифмических деформаций (в) для вязкого течения мягкой модели деформируемого аморфного полимерного материала через двухповоротный многоугольный сегаловский штамп с неподвижными стенками.

Определим геометрию равноканального многоугольного штампа $ABCDE-abcde$, через который течет вязкая физическая модель аморфного полимерного материала, на основании методов физического моделирования (рис.9). Рассмотрим вязкое течение сплошной мягкой аморфной среды через физическую модель двухповоротного сегаловского разъемного штампа с шириной каналов $\bar{a}=40$ мм и углами $2\theta=90^\circ$ в т. B и т. b между входным ($ABab$) и переходным ($BCbc$) каналами, а также в т. C и т. c между переходным ($BCbc$) и выходным ($CDcd$) каналами для случая полностью неподвижной выходной стенки de , т.е. $\mathbf{V}_{wall\ de}=\mathbf{0}$ (рис.9). Исходная

кольцевая сетка в начальной прямоугольной заготовке формировалась сверлением сквозных отверстий диаметрами 4 мм в замороженной мягкой физической модели, которые заполнялись размягченным однородным одноцветным материалом вдоль каждой из линий 1-3 на рис.9а, причем масштаб исходной сетки выбирался из условия расположения 3-х исходных кольцевых маркеров на ширине \bar{a} модели заготовки. Измерением максимальных a_1 и минимальных a_3 линейных размеров эллиптических фигур, в которые трансформировались исходные цилиндрические вставки (рис.9б), было рассчитано экспериментальное поле интенсивностей логарифмических деформаций (рис.9в). Анализ экспериментальных результатов на рис.9в показывает, что на переходном участке ($BCbc$) интенсивность логарифмических деформаций $\langle e_i \rangle_{BCbc} = 0,42$, а наибольшая средняя интенсивность деформаций наблюдается в зоне ($CDcd$) выходного канала $\langle e_i \rangle_{CDcd} = 0,58$ (рис.9в), причем для физических маркеров на условных линиях 1, 2 и 3 значения средних интенсивностей деформаций $\langle e_i \rangle$ составляют 0,42; 0,43 и 0,66 соответственно.

В рамках анализа представленных на рис.9а экспериментально наблюдаемых результатов по характеру формирования макроскопической ротации в объеме модели деформируемой вязкой аморфной заготовки при РКМУП через штамп с неподвижными стенками, определим понятие макроскопической ротации материала. Для этого воспользуемся разложением тензора пластической дисторсии β_{ij} на симметричную ε_{ij} и антисимметричную ω_{ij} части: $\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$, где ε_{ij} определяет деформацию в некотором выделенном объеме заготовки, а ω_{ij} – чистый поворот среды как единого целого [9]. В работе [9] вектор пластического поворота определяется как $\Omega_i = (1/2) \cdot e_{ijk} \cdot \omega_{jk}$, где e_{ijk} – тензор Леви-Чивиты. В рамках проведенного физического эксперимента введем в рассмотрение углы α_i наклонов больших осей эллиптических маркеров к направлению течения bx_1 (рис.9б). Поскольку измеряемые углы α_i характеризуют наличие поворотных мод при интенсивном пластическом деформировании, то существует соответствие между углами α_i и модулями интегральных величин $\int \Omega_i dt$, т.е. $\alpha_i \sim \left| \int \Omega_i dt \right|$. Т.о. можно утверждать, что углы α_i на рис.9а-б определяют локальный угол поворота главных осей течения. При этом под экспериментально наблюдаемой макроскопической ротацией $\Delta\alpha$, характеризующей степень «перемешивания» материала в объеме заготовки (рис.9а), будем понимать приращение угла α (рис.9б) для двух последовательных положений эллиптического маркера $\Delta\alpha = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ на одной из линий 1-3.

Следует отметить, что экспериментальные результаты на рис.9 получены для вязкого течения мягкой физической модели аморфной полимерной заготовки через многоугольный штамп $ABCDE-abcde$ с неподвижной выходной стенкой de , т.е. $\mathbf{V}_{wall\ de} = \mathbf{0}$. Геометрические контуры углового штампа на рис.9а, наряду с введенными буквенными обозначениями, были использованы в данной работе для постановки краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в форме уравнения переноса вихря (1)-(15). Концепция экспериментально наблюдаемой макроскопической ротации на рис.9а представляет собой наглядную геометрическую интерпретацию результатов численного математического моделирования (поз. «а» на рис.1-8) в рамках интегрирования поставленной краевой задачи (1)-(15), описывающей вязкое течение в многоугольном штампе с подвижной выходной стенкой de , т.е. для $\mathbf{V}_{wall\ de} \neq \mathbf{0}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обратим внимание на характер влияния неустойчивостей численного решения краевой задачи (1)-(15) на входе (Aa) и на выходе (Ee) вязкого потока на корректность результатов численного интегрирования (рис.1-8). Проанализируем расчетные линии тока, полученные для неподвижной $U_b/U_0=0$ (поз. «а» на рис.1-8), для движущейся в направлении вязкого потока $U_b/U_0=+1$ (поз. «б» на рис.1-7) и для движущейся навстречу потоку $U_b/U_0=-1$ (поз. «в» на рис.1-7) стенки de штампа. Неустойчивости численного конечноразностного решения задачи (1)-(15), зарождающиеся на входной границе (Aa) многоугольного штампа, распространяются по направлению многоугольного прессования вдоль U_0 , т.е. «вниз по потоку», а неустойчивости, зарождающиеся на выходной границе (Ee) движутся навстречу к направлению течения материала, т.е. «вверх по потоку». Численное решение (рис.1-8) даёт корректные результаты, согласующиеся с физическим экспериментом, лишь в том случае, когда вход (Aa) и выход (Ee) потока находятся достаточно далеко от интересующей нас многоугольной переходной области ($ABCDE-abcde$) штампа, в идеале на бесконечности. Поэтому с целью устранения искажений, вызванных неустойчивостями на входе (Aa), пространственные эпюры энергосиловых параметров РКМУП (рис.1-8) получены при условии, что начальные точки взяты не у границы координатной сетки, соответствующей входу (Aa) вязкого потока ($i=0$), а на удалении 20 ячеек от неё. Аналогично на всех указанных пространственных эпюрах полученные расчетные поля были обрезаны на расстоянии 20 ячеек от границы конечноразностной сетки, соответствующей выходу (Ee) потока ($i=80$), чтобы в поле зрения не попадали расчетные искажения, вызванные неустойчивостями на выходе (Ee).

В рамках проведенного гидродинамического моделирования необходимо дополнительно рассмотреть вопрос об обтекании внутренних углов BCD , abc и cde внутри закрытого русла внутренней полости равноканального многоугольного штампа ($ABCDE-abcde$) сегаловской геометрии на рис.1-8. При ламинарном движении сплошной среды имеет место формирование застойных зон BCD , abc и cde вязкого течения (рис.1-8). При турбулентном движении вязкой сплошной среды в указанных зонах BCD , abc и cde возникают вихревые потоки – макротурбулентности. Численные методы, пригодные для анализа макротурбулентностей, пока не вполне разработаны. Из-за ограниченного числа ячеек разностной сетки расчетные линии тока в вихревых зонах BCD , abc и cde не замыкаются. Полученные в процессе численного решения линии тока огибают застойные зоны BCD , abc и cde (рис.1-8) подобно тому, как они огибают застойные зоны BCD , abc и cde (рис.1-8) при ламинарном движении. Однако то, что линии тока в вихревых зонах BCD , abc и cde замкнуты, можно видеть на диаграмме распределения функции тока ψ (рис.2а-в). Линиям тока соответствует постоянство функции тока $\psi=\text{const}$.

В рамках проведенного гидродинамического анализа установлено, что повышение корректности численного интегрирования краевой задачи (1)-(15) и более точное определение пространственных эпюр энергосиловых параметров для ламинарных ньютоновских течений физических моделей полимерных материалов при различных режимах реализации РКМУП возможно посредством устранения влияния входных и выходных неустойчивостей на границах вязкого потока.

В рамках физического моделирования течения вязкого материала при РКМУП через штамп с неподвижной выходной стенкой de (рис.9а) было установлено, что в объеме мягкой аморфной модели заготовки, расположенном в окрестности условной

линии 1, прилегающей к стенке ($ABCD$) штампа, имеет место наибольшее значение $\langle |\alpha| \rangle = 1,15$ рад для величины локального угла поворота главных осей вязкого течения. В рамках численного математического моделирования вязкого течения (поз. «а» на рис.1-8) среди расчетных эпюр были получены численные поля модуля скорости вязкого потока $w = (u^2 + v^2)^{0,5}$ как для случая неподвижной выходной стенки de , т.е. $\mathbf{V}_{\text{wall } de} = \mathbf{0}$ и $\bar{U}_b = 0$ (рис.6а); так и для случая подвижной выходной стенки de , движущейся в направлении вязкого потока со скоростью $\bar{U}_b = \bar{U}_0$; $\mathbf{V}_{\text{wall } de} \uparrow \uparrow \mathbf{U}_0$ (рис.6б) и для случая стенки de , движущейся навстречу потоку со скоростью $\bar{U}_b = (-1) \cdot \bar{U}_0$; $\mathbf{V}_{\text{wall } de} \uparrow \downarrow \mathbf{U}_0$ (рис.6в). Интересно отметить, что данные эпюры на рис.6 также обнаруживают локальные всплески на пространственных графиках w в окрестности стенки ($ABCD$) штампа, к которой прилегает условная линия 1 (рис.9а). Указанное согласование результатов физического (рис.9) и математического (поз. «а» на рис.1-8) моделирования свидетельствует о формировании значительных градиентов полной скорости вязкого потока $w = (u^2 + v^2)^{0,5}$ в объеме деформируемого вязкого аморфного полимерного материала для режимов течения с $U_b/U_0 = 0$; $U_b/U_0 = +1$ и $U_b/U_0 = -1$. На физическом уровне всплески расчетной величины w на рис.6а-в по-видимому обуславливают относительное вращательное движение волокон сплошной аморфной вязкой полимерной среды. В результате имеет место формирование поворотных мод интенсивного пластического деформирования (рис.9а), накопление высокой неравномерности деформаций в объеме вязкого материала, а также локализация интенсивной макроскопической ротации в зонах ($BCbc$) переходного и ($CDcd$) выходного канала двухповоротного прямоугольного многоугольного штампа сегаловской геометрии при осуществлении РКМУП в рамках реализации технологических режимов углового деформирования с $U_b/U_0 = 0$; $U_b/U_0 = +1$ и $U_b/U_0 = -1$ (рис.1-8).

5. ВЫВОДЫ

С применением экспериментального метода исходных кольцевых сеток и численного теоретического метода конечных разностей, записанного для уравнений Навье-Стокса в форме уравнения переноса вихря, выполнено описание динамики формирования макроротора в объемах вязких аморфных физических моделей деформируемых полимерных композитных заготовок при их локальном вязком течении в многоугольном двухповоротном штампе сегаловской геометрии с $2\theta = 90^\circ$ и подвижной выходной стенкой de для трех режимов деформирования с $U_b/U_0 = 0$, $U_b/U_0 = +1$ и $U_b/U_0 = -1$.

Физическое моделирование макроротора основывалось на пропорциональности величин вектора пластического поворота и локального угла поворота главных осей течения. Численное моделирование макроротора при течении сплошной среды через штамп с подвижной выходной стенкой de основывалось на пропорциональности модулей вектора полной скорости и градиента скорости течения. Совместное применение экспериментально-теоретических методов анализа позволило установить формирование опасной зоны в деформируемом материале заготовки, который течет в окрестности стенки ($ABCD$) многоугольного двухповоротного равноканального сегаловского штампа.

Предложен и реализован численный гидродинамический подход к анализу вязкого течения физической модели аморфного полимерного композитного материала при равноканальном многоугольном прессовании через двухповоротный

сегаловский штамп с подвижной выходной стенкой de , основанный на численном конечноразностном решении краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в форме уравнения переноса вихря. Разработанный алгоритм описывает установившиеся плоские течения вязких несжимаемых ньютоновских жидкостей в многоугольных штампах с подвижной выходной стенкой de , а также корректно учитывает кинематическое влияние неподвижного входного и подвижного выходного каналов двухповоротного штампа.

В рамках предложенного численного расчетного подхода учет наличия подвижной выходной стенки de многоугольного штампа, движущейся параллельно направлению угловой экструзии с размерной скоростью \bar{U}_b , реализован в виде соответствующего граничного условия для данной перемещающейся стенки de . Предложенное граничное условие содержит размерную скорость \bar{U}_b и записано для безразмерной функции вихря ζ , относящейся к узлам разностной сетки, принадлежащих подвижной выходной стенке de многоугольного штампа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sue H.-J., Li C.K.-Y. Control of orientation of lamellar structure in linear low density polyethylene via a novel equal channel angular extrusion process // J. of Materials Science Letters. – 1998. – Vol.17. – P.853-856.
2. Белошенко В.А., Бейгельзимер Я.Е., Варюхин В.Н. Твердофазная экструзия полимеров. – Киев: Наукова думка, 2008. – 207 с.
3. Aour B., Zairi F., Boulahia R. et al. Experimental and numerical study of ECAE deformation of polyolefins // Computational Materials Science. – 2009. – Vol.45. – N3. – P.646-652.
4. Perig A.V., Laptev A.M., Golodenko N.N., Erfort Yu.A., Bondarenko E.A. Equal channel angular extrusion of soft solids // Materials Science and Engineering: A. – 2010. – Vol.527. – N16-17. – P.3769-3776.
5. Периг А.В., Голоденко Н.Н., Жбанков Я.Г. и др. Кинематические особенности вязкого течения аморфного материала при равноканальном многоугольном прессовании через двухповоротный прямоугольный штамп // Письма о материалах. – 2011. – Т.1. – №4. – С.217-221.
6. Периг А.В., Голоденко Н.Н. О динамических особенностях вязкого течения полимеров при равноканальном многоугольном прессовании через штамп с подвижной стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2012. – №3. – С.149-176.
7. Sofuoğlu H., Rasty J. Flow behavior of plasticine used in physical modeling of metal forming processes // Tribology International. – 2000. – Vol.33. – N8. – P.523-529.
8. Chijiwa K., Hatamura Y., Hasegawa N. Characteristics of plasticine used in the simulation of slab in rolling and continuous casting // Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan. – 1981. – Vol.21. – N8. – P.178-186.
9. Попов В.Л., Слядников Е.Е. Вихри пластической дисторсии в твердых телах при интенсивных внешних воздействиях // ПЖТФ. – 1995. – Т.21. – Вып.2. – С.84-88.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЖИМАЕМОГО БАРОТРОПНОГО ВЕЩЕСТВА В НЕДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ*

Саваторова В.Л.¹, Талонов А.В.¹, Власов А.Н.², Волков-Богородский Д.Б.²

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследуется процесс фильтрации вязкого сжимаемого баротропного вещества в недеформируемой среде, структура пор в которой предполагается периодической. В постановке задачи используется уравнение движения, дополненное уравнением неразрывности, граничным условием прилипания и баротропным соотношением. В качестве уравнения движения используется обобщение уравнения Бринкмана на случай возможного нестационарного течения, принимающее во внимание нелинейные эффекты, связанные с зависимостью коэффициентов вязкости и трения от давления.

Для решения уравнений, описывающих фильтрацию в среде с периодической структурой пор, используется метод асимптотического усреднения. Возможность применения метода усреднения обеспечивается выполнением условия пространственного разделения масштабов, согласно которому в гетерогенной среде могут быть выделены такие характерные масштабы: микромасштаб (размер пор l) и макромасштаб (глобальный размер L), что будет справедливым соотношение $\varepsilon \sim l/L \ll 1$.

Эффективный тензор проницаемости определяется в ходе решения соответствующих задач на ячейке периодичности и их последующего усреднения. Распределения скорости и давления в нулевом приближении находятся путем решения усредненного макроскопического уравнения. Исследуется эффект нелинейности, связанной с зависимостью коэффициентов вязкости и трения от давления. Исследуется влияние различных видов баротропных соотношений между плотностью и давлением.

Ключевые слова: фильтрация; уравнение Бринкмана; пористые среды; гомогенизация; метод асимптотического усреднения; нелинейность

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы фильтрации в пористых средах играют важную роль в геофизике, при разработке нефтяных месторождений; их моделирование имеет многочисленные приложения для создания композиционных материалов и различных фильтрующих устройств. Пористые материалы можно рассматривать как гетерогенные среды с множеством неоднородностей в виде пор. Очевидно, что рассмотрение каждой отдельной неоднородности при моделировании материала не представляется возможным. Выход из этого затруднения состоит в том, чтобы моделировать гетерогенный материал, заменяя его эффективной гомогенной средой, обладающей

*Данная работа была выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы» (гос. контракт №11.519.11.6036).

теми же макроскопическими свойствами и поведением при внешнем воздействии, что и реальный объект. В рассматриваемом далее методе макроскопические свойства и поведение материала выводятся, исходя из его строения и понимания процессов, происходящих на уровне «элементарного» объёма со структурой (типового элемента структуры), определяющего строение гетерогенного материала. В периодических средах типовой элемент структуры буквально представляет собой не что иное, как ячейку периодичности. Возможность выделения типового элемента структуры крайне существенна для применения метода усреднения (см.[1-3]). Отметим, что реальные пористые среды редко бывают строго упорядоченными по своей структуре. Однако, как это было показано в [4-6], в случаях, когда условие пространственного разделения масштабов выполняется, существует значительное сходство в поведении реальных материалов и их эффективных моделей, основанных на допущении о периодически упорядоченном пространственном распределении пор.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается нестационарная фильтрация сжимаемого баротропного вещества в недеформируемой пористой среде. Метод усреднения используется для определения эффективной проницаемости подобной среды, а также пространственного распределения скорости и давления фильтрующегося вещества.

Положим, что в пористой среде можно выделить несколько характерных масштабных уровней: макроуровень с характерным размером L и микроуровень с характерным размером l . Также будем считать, что на микроуровне среда характеризуется периодической структурой с периодом Ω . Будем рассматривать фильтрацию сжимаемого вязкого вещества сквозь жёсткую матрицу в пределах типового элемента структуры (играет роль ячейки периодичности) Ω с характерным размером $O(l)$ (масштабный микроуровень, рис.1). Обозначим границу ячейки периодичности как $\partial\Omega$, её часть, занятую твёрдым телом как Ω_s , часть, занятую жидкостью, как Ω_f , и границу раздела твёрдое тело-жидкость в пределах ячейки периодичности как G .

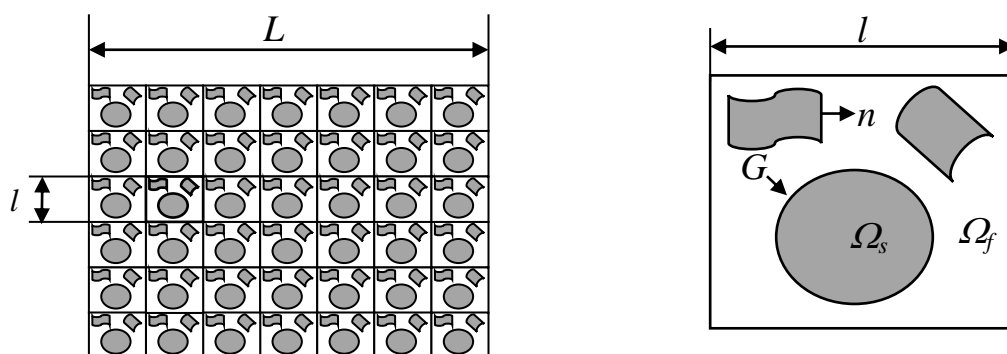


Рис.1. Характерные масштабные уровни L и l . а) пористая среда с характерным размером L ; б) ячейка периодичности с характерным размером l .

Уравнения, описывающие фильтрационное течение вещества сквозь жёсткую пористую матрицу, могут быть выведены систематически. В этой статье мы не станем выводить уравнение движения из основных принципов, мы приведём ссылку на работу [7], где этот вывод приведён.

Закон сохранения момента импульса может быть записан в виде

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + I_i + \rho b_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

где T_{ij} – тензор напряжений Коши; ρ – плотность; $x_i (i = 1, 2, 3)$ – координаты; t – время; v_i – i -ая компонента вектора скорости; b_i – i -ая компонента объёмной силы, I_i – i -ая компонента силы взаимодействия.

Вообще говоря, существуют различные механизмы взаимодействий (см. [7]), однако в данной работе будем предполагать, что взаимодействия обусловлены главным образом силами трения между порами и фильтрующимся веществом

$$I_i = -\alpha(p)v_i, \quad (2)$$

где $\alpha(p)$ – коэффициент трения, который в общем случае зависит от давления p .

Входящие в уравнение (1) компоненты тензора напряжений имеют вид

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda(p)\Delta\delta_{ij} + 2\mu(p)D_{ij}. \quad (3)$$

Здесь $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $\Delta \equiv D_{11} + D_{22} + D_{33} = D_{ii}$, δ_{ij} – символ Кронекера, $\mu(p)$ –

динамическая вязкость. Величина $\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right)$ известна как объёмная вязкость, являющаяся коэффициентом пропорциональности между средней величиной нормального вязкостного напряжения и скоростью изменения объёма.

Такие величины как плотность, вязкость, коэффициент трения, вообще говоря, не являются константами. Так, например, соотношение между давлением и плотностью жидкости хорошо описывается эмпирической формулой Доусона и Хиггинсона [8]. Зависимость вязкости от давления обсуждалась уже давно, о чём свидетельствует монография [9], а также публикации [10-13], в которых дискутировалась важность учёта зависимости вязкости от давления для широкого спектра проблем, связанных с течением жидкостей. Эксперименты [12] подтверждают сильную (экспоненциальную) зависимость вязкости от давления

$$\mu(p) = \mu_0 \exp(\beta p) \quad (4)$$

где $\mu_0 > 0$ и $\beta \geq 0$ – константы. Это выражение ведёт к аналогам формулы (4) для коэффициентов $\alpha(p)$ и $\lambda(p)$

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= \alpha_0 \exp(\beta p), \quad \alpha_0 \geq 0, \\ \lambda(p) &= \lambda_0 \exp(\beta p), \quad \lambda_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (2)-(3) в (1) и пренебрегая объёмными силами, получаем уравнение движения фильтрующегося вещества в виде

$$\begin{aligned} -grad p + \mu(p)\Delta\mathbf{v} + (\lambda(p) + 2\mu(p)) grad div \mathbf{v} - \alpha(p)\mathbf{v} = \\ = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} grad)\mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Это уравнение представляет собой обобщение уравнения Навье-Стокса-Бринкмана [14-16] на случай возможного нестационарного течения, при котором учитываются также нелинейные эффекты, связанные с зависимостью коэффициентов вязкости и трения от давления.

Уравнение (6) должно быть дополнено уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (7)$$

граничным условием прилипания

$$v|_G = 0 \quad (8)$$

и баротропным соотношением

$$f(p, \rho) = 0. \quad (9)$$

Введём следующие безразмерные величины: число Рейнольдса

$$Re = \frac{|\rho(v \operatorname{grad})v|}{|\mu \Delta v|}, \text{ нестационарное число Рейнольдса } Rt = \frac{|\rho \partial v / \partial t|}{|\mu \Delta v|}, \text{ число Струхалия}$$

$$S = \frac{|\partial \rho / \partial t|}{|\operatorname{div}(\rho v)|} = \frac{|\rho \partial v / \partial t|}{|\rho(v \operatorname{grad})v|} = \frac{Rt}{Re}, \text{ а также величины } Q = \frac{|\operatorname{grad} p|}{|\mu \Delta v|} \text{ и } B = \frac{|\alpha v|}{|\mu \Delta v|}.$$

Полагая

$$\begin{aligned} x_i &= l_c x_i^*, \quad p = p_c p^*, \quad v_i = v_c v_i^*, \quad t = t_c t^*, \\ \mu &= \mu_c \mu^*, \quad \alpha = \alpha_c \alpha^*, \quad \lambda = \lambda_c \lambda^*, \quad \rho = \rho_c \rho^*, \end{aligned} \quad (10)$$

проведём абезразмеривание исходных уравнений (6)-(9) в предположении, что $Re = O(1)$, $Rt = O(1)$, $S = O(1)$, $Q = O(\varepsilon^{-2})$, $B = O(\varepsilon^{-2})$, $\varepsilon = l_c / L_c \ll 1$.

Отбросим «*» и получим систему обезразмеренных уравнений в виде

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad}_x p + \varepsilon^2 \mu \Delta_x v + \varepsilon^2 (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x v - \alpha v = \\ = \varepsilon^2 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \operatorname{grad}_x) v \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho v) = 0 \quad (12)$$

$$v|_G = 0 \quad (13)$$

$$f(p, \rho) = 0 \quad (14)$$

Для решения обезразмеренной задачи (11)-(14) применим метод асимптотического (двухмасштабного) усреднения [1-2,17-19].

3. ПРОЦЕДУРА ДВУХМАСШТАБНОГО УСРЕДНЕНИЯ

Применим процедуру усреднения [1-2] к среде, в которой можно выделить два характерных пространственных масштаба: макроуровень с характерным размером L и микроуровень с характерным размером l , причём $l/L \ll 1$ (рис.1). Будем считать, что на микроуровне среда обладает периодической структурой с характерным размером ячейки периодичности $O(l)$ и характеризуется координатами $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, которые описывают процессы локально. На макроуровне среду будем описывать с помощью координат $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, характеризующих процессы глобально. Таким образом, любая величина, входящая в (11)-(14) и зависящая от координат, будет функцией локальных переменных ξ и глобальных переменных x . Тогда связь между глобальными и локальными координатами будет следующей

$$x = \varepsilon \xi, \text{ где } \varepsilon = l/L. \quad (15)$$

Предположим что справедливо соотношение $l/L \ll 1$. В этом случае ε представляет собой малый параметр.

В рамках метода асимптотического усреднения решения задачи (11)-(14) будем искать в виде разложений в ряд по малому параметру ε

$$\begin{aligned} p &= p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots \\ v_i &= v_i^{(0)} + \varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)} + \dots \\ \rho &= \rho^{(0)} + \varepsilon \rho^{(1)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

где функции в (17) предполагаются периодическими по локальной переменной ξ .

Фильтрационные характеристики можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu(p) &= \mu^{(0)}(p^{(0)}) + O(\varepsilon) \\ \lambda(p) &= \lambda^{(0)}(p^{(0)}) + O(\varepsilon) \\ \alpha(p) &= \alpha^{(0)}(p^{(0)}) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (17)$$

которые являются ξ -периодическими функциями.

Подставляя разложения (16)-(17) в соотношения (11)-(14) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε , получим рекуррентную цепочку уравнений

при ε^{-1}

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial (\rho^{(0)} v_i^{(0)})}{\partial \xi_i} = 0 \quad (19)$$

$$v_i^{(0)} \Big|_G = 0 \quad (20)$$

$$f(\rho^{(0)}, p^{(0)}) = 0 \quad (21)$$

при ε^0

$$\mu^{(0)} \frac{\partial^2 v_i^{(0)}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} + \mu^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + \lambda^{(0)} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) - \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} \right) - \alpha^{(0)} v_i^{(0)} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^{(0)} v_i^{(0)})}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho^{(0)} v_i^{(1)} + \rho^{(1)} v_i^{(0)})}{\partial \xi_i} = 0 \quad (23)$$

$$v_i^{(1)} \Big|_G = 0 \quad (24)$$

$$p^{(1)} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^{(0)} + \rho^{(1)} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^{(0)} = 0 \quad (25)$$

и т.д.

Из соотношений (18), (21) следует, что величины $p^{(0)}$, $\rho^{(0)}$, $\mu^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$ не зависят от локальных координат

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= p^{(0)}(x, t), \quad \rho^{(0)} = \rho^{(0)}(x, t), \\ \mu^{(0)} &= \mu^{(0)}(x, t), \quad \lambda^{(0)} = \lambda^{(0)}(x, t), \quad \alpha^{(0)} = \alpha^{(0)}(x, t) \end{aligned} \quad (26)$$

С учётом (26) можно записать соотношения (22) и (19) в виде

$$\mu^{(0)} \frac{\partial^2 v_i^{(0)}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} - \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i} \right) - \alpha^{(0)} v_i^{(0)} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial (v_i^{(0)})}{\partial \xi_i} = 0 \quad (28)$$

Решение задачи (26), (27), (20) будем искать в виде

$$v_i^{(0)} = -N_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \quad N_{ij} = k_{ij} / \mu^{(0)}(p^{(0)}) \quad (29)$$

$$p^{(1)} = -Q_j \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \quad (30)$$

где величины N_{ij} , Q_j периодические функции переменной ξ , причём $\langle Q_j \rangle = 0$ ввиду ξ -периодичности $p^{(1)}$.

Определим процедуру усреднения по ячейке периодичности в виде

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_\Omega} \int_{\Omega_f} f dV, \quad (31)$$

где Ω обозначает ячейку периодичности объёмом V_Ω , а Ω_f – её часть, занятую жидкостью.

Подстановка соотношений (29)-(30) в систему уравнений (26), (27), (20) приводит к **задаче на ячейке** периодичности в виде

$$\frac{\partial Q_j}{\partial \xi_i} - \mu(p^{(0)}) \frac{\partial^2 N_{ij}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \alpha^{(0)} N_{ij} = \delta_{ij} \quad (32)$$

$$\frac{\partial N_{ij}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (33)$$

$$N_{ij}|_G = 0 \quad (34)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Задача (32)-(34) является задачей с периодическими условиями на границах ячейки. Рассматривая $p^{(0)}$ как параметр, мы можем решать задачу на ячейке и определять величины N_{ij} , Q_j .

Заметим, что макроскопическое распределение скорости определяется соотношением, сходным по своему виду с хорошо известным законом фильтрации Дарси [20]. При этом компоненты эффективного тензора проницаемости, входящие в это соотношение, вычисляются в результате решения системы уравнений (32)-(34), первое из которых является уравнением Бринкмана (см. [14-16,18,19]).

Обратимся теперь к макроскопическому описанию процесса фильтрации. Для этого подставим выражения (29)-(30) в соотношения (23), (24), (21) и проведём усреднение по ячейке периодичности в соответствии с (31). Учитывая (26), а также принимая во внимание ξ -периодичность функций $v^{(1)}$, $p^{(1)}$, получим усреднённую **макроскопическую задачу** в виде

$$\begin{aligned}
m \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div}_x \left(\rho^{(0)} \langle v^{(0)} \rangle \right) &= 0 \\
\langle v_i^{(0)} \rangle &= - \langle N_{ij} \left(p^{(0)} \right) \rangle \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \\
f \left(\rho^{(0)}, p^{(0)} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{35}$$

где m – пористость, $\langle N \left(p^{(0)} \right) \rangle$ – эффективный тензор, компоненты которого связаны с компонентами эффективного тензора проницаемости $\langle k \rangle$ посредством соотношений $\langle k_{ij} \rangle = \langle N_{ij} \left(p^{(0)} \right) \rangle \mu^{(0)} \left(p^{(0)} \right)$. Для определения $\langle N_{ij} \left(p^{(0)} \right) \rangle$ требуется, решив задачу на ячейке (32)-(34), получить $N_{ij} \left(p^{(0)} \right)$, а затем применить к полученным $N_{ij} \left(p^{(0)} \right)$ процедуру усреднения в соответствии с (31). Вид зависимости коэффициентов вязкости и трения от давления будет влиять на величины $\langle N_{ij}^n \left(p^{(0)} \right) \rangle$ и $\langle k_{ij} \rangle$.

Возвращаясь к размерным переменным, перепишем (35) в виде

$$\begin{aligned}
m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \langle v \rangle \right) &= O(\varepsilon) \\
\langle v_i \rangle &= - \frac{K_{ij}^{\text{eff}}}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial x_j} + O(\varepsilon), \quad K_{ij}^{\text{eff}} = l_c^2 \langle k_{ij} \rangle \\
f(p, \rho) &= O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{36}$$

При $O(\varepsilon) \equiv 0$ задача (36) является усреднённой макроскопической задачей, соответствующей задаче теории эффективного модуля. Выбрав вид барометрического соотношения и проинтегрировав уравнения (36), можно получить макроскопическое распределение давления фильтрующегося вещества. Это давление в свою очередь может быть использовано для определения макроскопического распределения скорости в соответствии со вторым уравнением системы (36). Но вначале следует найти компоненты эффективного тензора проницаемости путём решения задачи на ячейке (32)-(34) и последующего усреднения решений для N_{ij} .

4. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СРЕДЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТОНКИХ ПРОНИЦАЕМЫХ КАНАЛОВ (ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

В качестве примера рассмотрим случай фильтрации вязкого сжимаемого вещества сквозь среду, представляющую собой периодическую систему тонких цилиндрических проницаемых каналов в жёсткой матрице. Предположим, что каналы характеризуются радиусом R и ориентированы вдоль одной из координатных осей. Будем считать, что каждый объём ячейки периодичности мал по сравнению с глобальным характеристическим размером среды L .

Предположим, что каналы ориентированы вдоль оси x_3 . Тогда получим, что линии тока параллельны той же самой оси, и для скорости будет справедливо выражение

$$v^{(0)} = \{0, 0, v_3^{(0)}\} \quad (37)$$

Учитывая это выражение для вектора скорости, из соотношения (29) следует, что

$$N_{1j} = N_{2j} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (38)$$

Далее, пользуясь условием (33), получим

$$N_{3j} = N_{3j}(\xi_1, \xi_2), \quad j = 1, 2, 3. \quad (39)$$

Подстановка (39) в (32) приводит к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3} - \mu(p^{(0)}) \nabla_{\xi\xi}^2 N_{31} + \alpha^{(0)} N_{31} &= 0 \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3} - \mu(p^{(0)}) \nabla_{\xi\xi}^2 N_{32} + \alpha^{(0)} N_{32} &= 0 \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_3} - \mu(p^{(0)}) \nabla_{\xi\xi}^2 N_{33} + \alpha^{(0)} N_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (40)$$

Из (39), (40) следует, что $\frac{\partial Q_j}{\partial \xi_3} = const_j$ ($j = 1, 2, 3$). Функции Q_j должны быть периодическими на ячейке, поэтому $C_j(\xi_3) = const_j \cdot \xi_3$. Наконец, требование $\langle p^{(1)} \rangle = 0$ может быть удовлетворено, если принять $const_j$ нулевыми. Откуда получаем, что $C_j(\xi_3) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Таким образом, задача на ячейке (32)-(34) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \mu(p^{(0)}) \nabla_{\xi\xi}^2 N_{3j} - \alpha^{(0)} N_{3j} &= 0 \\ \mu(p^{(0)}) \nabla_{\xi\xi}^2 N_{33} - \alpha^{(0)} N_{33} + 1 &= 0 \\ N_{3j}|_G &= 0, \quad N_{33}|_G = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

где $j=1, 2$.

Чтобы найти N_{3j} ($j=1, 2$), перейдём к полярной системе координат. Тогда первое из уравнений (41) примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dN_{3j}}{dr} \right) - \frac{\alpha^{(0)}}{\mu(p^{(0)})} N_{3j} = 0. \quad (42)$$

Потребуем, чтобы функции $N_{3j}(r)$ ($0 \leq r \leq R$) были ограничены при $r \rightarrow 0$ и удовлетворяли условию прилипания на границе раздела твёрдое тело-жидкость

$$N_{3j}(r = R) = 0 \quad (43)$$

Делая замену переменных $r = y \sqrt{\mu(p^{(0)})/\alpha^{(0)}}$, из уравнения (42) получаем уравнение

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dN_{3j}(y)}{dy} \right) - N_{3j}(y) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$N_{3j} = C_1 I_0(y) + C_2 K_0(y), \quad j = 1, 2$$

где $I_0(y)$ и $K_0(y)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка, соответственно первого и второго рода. Поскольку функция N_{3j} ограничена при $y \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$), то $C_2 = 0$, т.к. $K_0(y \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Из условия прилипания на границе (43) следует, что $N_{3j}\left(R\sqrt{\alpha^{(0)}/\mu(p^{(0)})}\right) = C_1 I_0\left(R\sqrt{\alpha^{(0)}/\mu(p^{(0)})}\right) = 0$. Следовательно $C_1 = 0$, т.к. $I_0\left(R\sqrt{\alpha^{(0)}/\mu(p^{(0)})}\right) \neq 0$. Итак, получаем

$$N_{3j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (44)$$

Чтобы найти N_{33} , так же, как и в предыдущем случае, перейдём к полярной системе координат. В результате из второго уравнения системы (41) получим

$$\mu(p^{(0)}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dN_{33}}{dr} \right) - \alpha^{(0)} N_{33} + 1 = 0.$$

Потребуем также, чтобы функция $N_{33}(r)$ ($0 \leq r \leq R$) была ограничена при $r \rightarrow 0$ и удовлетворяла условию прилипания на границе твёрдое тело-жидкость

$$N_{33}(r = R) = 0$$

Представляя функцию $N_{33}(r)$ в виде $N_{33}(r) = \tilde{N}_{33}(r) + \frac{1}{\alpha^{(0)}}$ и делая замену переменных $r = y\sqrt{\mu(p^{(0)})/\alpha^{(0)}}$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left(y \frac{d\tilde{N}_{33}(y)}{dy} \right) - \tilde{N}_{33}(y) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\tilde{N}_{33} = C_1 I_0(y) + C_2 K_0(y)$$

Поскольку функция N_{33} ограничена при $y \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$), то \tilde{N}_{33} также должна быть ограниченной, и потому $C_2 = 0$, т.к. $K_0(y \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Из условия прилипания следует, что $C_1 I_0\left(R\sqrt{\alpha^{(0)}/\mu(p^{(0)})}\right) + 1/\alpha^{(0)} = 0$. Следовательно

$$\tilde{N}_{33} = -\frac{I_0(y)}{\alpha^{(0)} I_0\left(R\sqrt{\alpha^{(0)}/\mu(p^{(0)})}\right)}.$$

Итак, получаем

$$N_{33} = \frac{1}{\alpha^{(0)}} \left(1 - \frac{I_0\left(r\sqrt{\alpha^{(0)}/\mu(p^{(0)})}\right)}{I_0\left(R\sqrt{\alpha^{(0)}/\mu(p^{(0)})}\right)} \right) \quad (45)$$

Усредняя (44)-(45) по ячейке периодичности, в соответствии с процедурой усреднения (31) получим выражения

$$\begin{aligned} \langle N_{33} \rangle &= \frac{2\pi m}{\alpha^{(0)}} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{\sqrt{\mu(p^{(0)})} \cdot R \cdot I_1 \left(R \sqrt{\alpha^{(0)} / \mu(p^{(0)})} \right)}{\sqrt{\alpha^{(0)}} \cdot I_0 \left(R \sqrt{\alpha^{(0)} / \mu(p^{(0)})} \right)} \right) = \\ &= \frac{m}{\alpha^{(0)}} \frac{I_2 \left(R \sqrt{\alpha^{(0)} / \mu(p^{(0)})} \right)}{I_0 \left(R \sqrt{\alpha^{(0)} / \mu(p^{(0)})} \right)}, \quad \langle N_{3j} \rangle = 0, \quad j=1,2 \end{aligned} \quad (46)$$

где $I_1(y)$ и $I_2(y)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода первого и второго порядка соответственно.

Теперь обезразмеренная макроскопическая задача (35) будет иметь вид

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \rho(p^{(0)})}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\rho(p^{(0)}) \langle N_{33} \rangle \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3} \right) &= 0 \\ \langle v_3^{(0)} \rangle &= - \langle N_{33} \rangle \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_3}, \quad \langle k_{33} \rangle = \mu(p^{(0)}) \langle N_{33} \rangle \\ f(p^{(0)}, \rho^{(0)}) &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Возвращаясь к размерным переменным, перепишем (47) в виде

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \rho(p)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\rho(p) \langle N_{33}(p) \rangle \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) &= O(\varepsilon) \\ \langle v_3 \rangle &= - \frac{K_{33}^{eff}}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial x_3} + O(\varepsilon), \quad K_{33}^{eff} = l_c^2 \langle k_{33} \rangle \\ f(p, \rho) &= O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (48)$$

Теперь, выбрав вид барометрического соотношения и проинтегрировав первое из уравнений (48), можно получить макроскопическое распределение давления фильтрующегося вещества. Это давление в свою очередь может быть использовано для определения макроскопического распределения скорости в соответствии со вторым уравнением системы (48).

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ

В этом параграфе будут представлены результаты решения макроскопической задачи (48) о фильтрации вязкого сжимаемого баротропного вещества в недеформируемой среде, представляющей собой периодическую систему тонких цилиндрических проницаемых каналов. Нами будут рассмотрены два вида барометрических соотношений. Пусть в первом случае давление и плотность фильтрующегося вещества будут связаны эмпирической формулой Доусона и Хиггинсона [6]

$$\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{ap}{1+bp} \right) \quad (49)$$

где ρ_0 , a , b – константы, значения которых будут указаны ниже.

Во втором случае рассмотрим барометрическое соотношение в виде [19]

$$\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_\rho} \right) \quad (50)$$

где K_ρ – коэффициент объёмного сжатия, p_0 – давление, соответствующее плотности ρ_0 .

Ниже мы рассмотрим несколько возможных соотношений, связывающих вязкость и коэффициент трения с давлением жидкости. Для случаев, когда зависимость вязкости и коэффициента трения от давления описывается экспоненциальным и степенным соотношениями, также вычислим распределения давления и скорости для различных значений параметров, характеризующих степень нелинейности.

Предположим, что начальное и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} p(t=0) &= p_{ini} = 100 \text{ кПа}, \\ p(x_3=0) &= 200 \text{ кПа}, \quad p(x_3=L) = 100 \text{ кПа} \end{aligned} \quad (51)$$

Пусть плотность и вязкость фильтрующегося вещества равны $\rho_0 = 850 \text{ кг/м}^3$ и $\mu_0 = 0,051 \text{ Па}\cdot\text{с}$ соответственно, коэффициент вязкости равен $\alpha_0 = \mu_0 / k_c$, где $k_c = 4 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$. Коэффициент объёмного сжатия положим равным $K_\rho = 10^9 \text{ Па}$, радиус $R \sim 10^{-2} \text{ м}$, характерный размер $l \sim 10^{-5} \text{ м}$, характерный размер $L = 1,0 \text{ м}$, пористость $m=0,3$. Константы a и b будем считать равными $a = 0,6 \text{ ГПа}^{-1}$ и $b = 1,7 \text{ ГПа}^{-1}$ соответственно (см. [8]).

Решение одномерной задачи на ячейке (41) позволяет определить компоненты тензора эффективной проницаемости среды. Пользуясь (46), получаем значение коэффициента проницаемости эффективной среды, равное $K_{eff} = 1,195 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$.

На рис.2 представлено распределение давления фильтрующегося вещества на различные моменты времени для случая, когда зависимость коэффициентов вязкости и трения от давления определяется соотношениями (4)-(5) при $\beta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$.

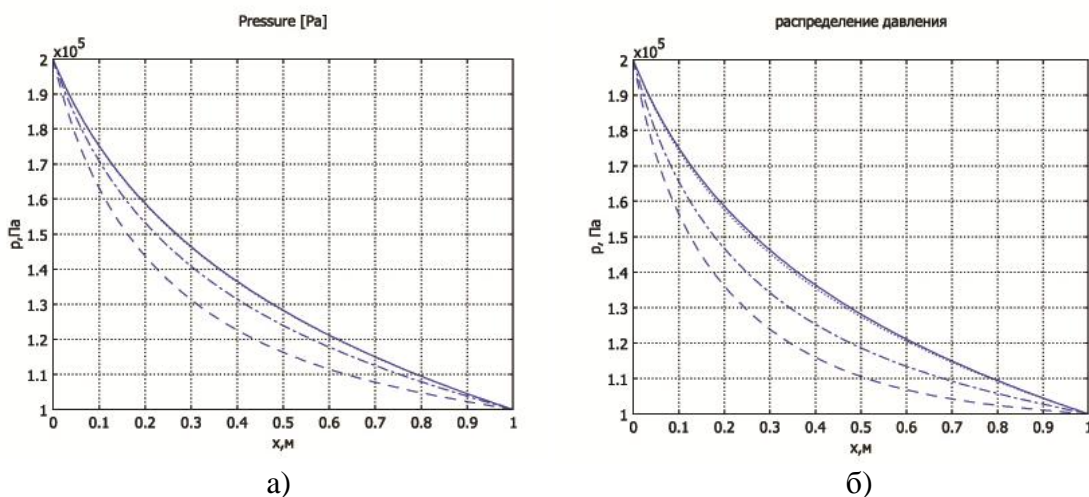


Рис.2. Распределение давления: а) для баротропического соотношения (50); б) для баротропического соотношения (49) (штриховая линия – $t = 0,1 \text{ с}$; штрих-пунктир – $t = 0,2 \text{ с}$; пунктир – $t = 0,6 \text{ с}$; сплошная линия – $t = 1,0 \text{ с}$).

Далее приводятся результаты расчётов на примерах зависимости вязкости, коэффициента трения и плотности от давления.

Пример 1: $\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{ap}{1+bp} \right)$, $\mu(p) = \mu_0 \exp(\beta p)$, $\alpha(p) = \alpha_0 \exp(\beta p)$

Интегрирование первого из уравнений (48) с учётом барометрического соотношения (49), зависимостей (4)-(5) и упомянутых выше начального и граничных условий (51) даёт распределение давления, вид которого приведён на рис.3а.

Из рис.3а видно, что, в случае $\beta = 0$, когда не учитывается зависимость μ и α от давления, распределение $p(x)$ представляет собой линейную функцию, и величина давления в любой точке внутри рассматриваемого интервала превышает соответствующие значения для случаев с другими значениями β . При этом, чем больше значение степени нелинейности β , тем больше кривизна графика зависимости давления от координаты, и тем меньше величина давления в любой точке внутри рассматриваемой области. Следует также отметить, что, согласно [8], кривые, учитывающие зависимость динамической вязкости от давления, находятся в лучшем согласии с данными экспериментов.

На рис.3б представлено макроскопическое распределение скорости, вычисленное для рассматриваемого случая в соответствии со вторым уравнением системы (48).

На рис.3б можно видеть, что, чем больше значение параметра β , тем больше кривизна графика зависимости скорости от координаты. Этого следует ожидать, поскольку в случае большей вязкости происходит большая диссипация энергии, и это ведёт к уменьшению скорости фильтрации жидкости.

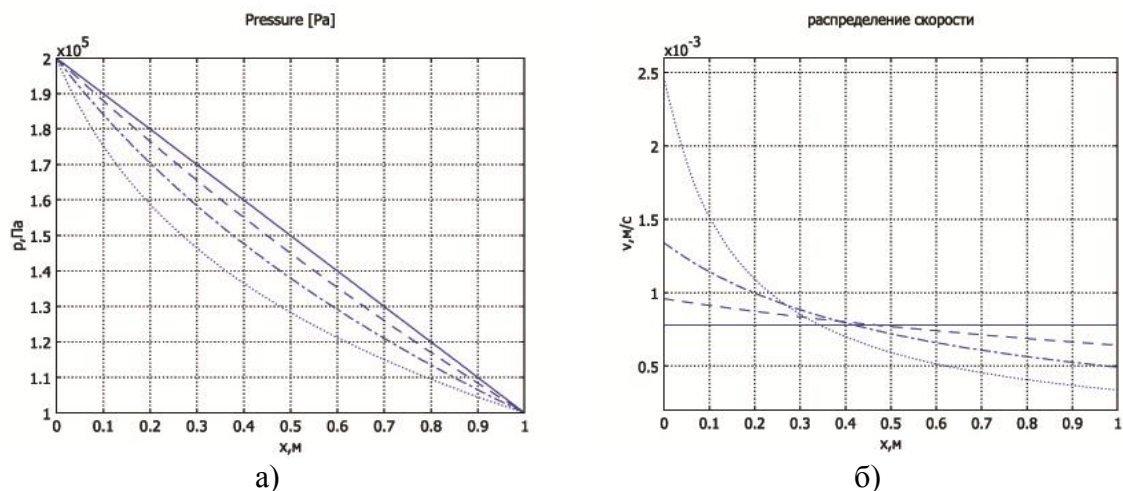


Рис.3. Распределение давления и скорости на момент времени $t = 1,0c$: сплошная линия – $\beta = 0$; штриховая линия – $\beta = 0,4 \cdot 10^{-5} Pa^{-1}$; штрих-пунктир – $\beta = 1,0 \cdot 10^{-5} Pa^{-1}$; пунктир – $\beta = 2,0 \cdot 10^{-5} Pa^{-1}$.

Пример 2: $\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{ap}{1+bp} \right)$, $\mu(p) = \mu_0 (p/p_0)^n$, $\alpha(p) = \alpha_0 (p/p_0)^n$

Рассматриваемый пример отличается от предыдущего несколько иным видом зависимости вязкости и коэффициента трения от давления. Интегрирование первого

из уравнений (48) с учётом начального и граничных условий (51) даёт распределение давления, вид которого приведён на рис.4а.

Из рис.4а видно, что, в случае $n = 0$, когда не учитывается зависимость μ и α от давления, распределение $p(x)$ представляет собой линейную функцию, и величина давления в любой точке внутри рассматриваемого интервала превышает соответствующие значения для других случаев. При этом, чем больше значение степени нелинейности n , тем больше кривизна графика зависимости давления от координаты, и тем меньше величина давления в любой точке внутри рассматриваемой области.

На рис.4б представлено макроскопическое распределение скорости, вычисленное для рассматриваемого примера в соответствии со вторым уравнением системы (48).

Из рис. 4б можно видеть, что, чем больше значение параметра n , тем больше кривизна графика зависимости скорости от координаты.

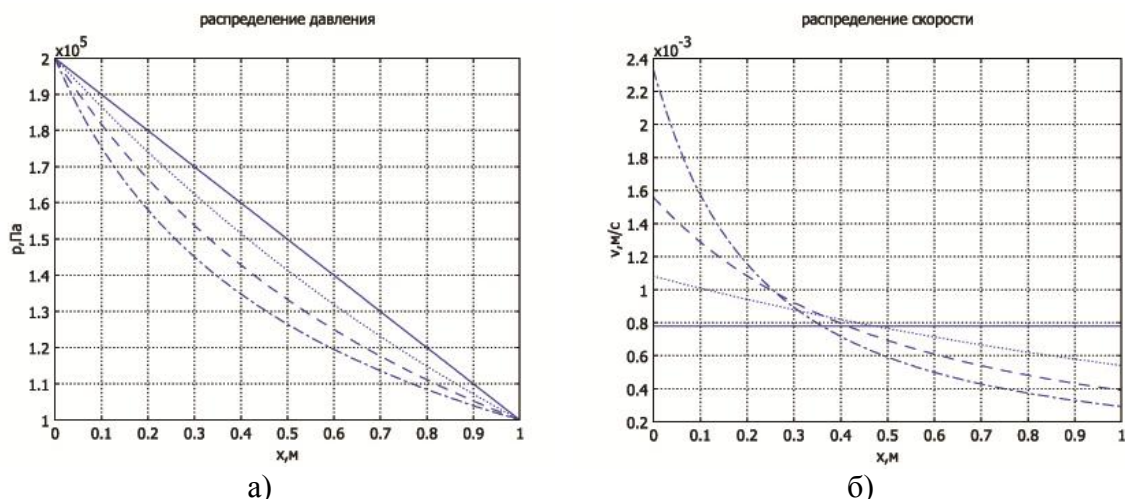


Рис.4. Распределение давления и скорости на момент времени $t = 1,0c$: сплошная линия – $n = 0$; пунктир – $n = 1$; штриховая линия – $n = 2$; штрих-пунктир – $n = 3$.

Пример 3: $\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_\rho} \right)$, $\mu(p) = \mu_0 \exp(\beta p)$, $\alpha(p) = \alpha_0 \exp(\beta p)$

Для рассматриваемого примера (как, впрочем, и для последующего) характерен иной вид барометрического соотношения. Интегрирование первого из уравнений (48) с учётом барометрического соотношения (50), зависимостей (4)-(5), а также условий (51) даёт распределение давления, вид которого приведён на рис.5а.

Из рис.5б видно, что, в случае $\beta = 0$, когда не учитывается зависимость μ и α от давления, распределение $p(x)$ представляет собой линейную функцию, и величина давления в любой точке внутри рассматриваемого интервала превышает соответствующие значения для случаев с другими значениями β . При этом, чем больше значение степени нелинейности β , тем больше кривизна графика зависимости давления от координаты, и тем меньше величина давления в любой точке внутри рассматриваемой области. Следует также отметить, что, согласно [8],

кривые, учитывающие зависимость динамической вязкости от давления, находятся в лучшем согласии с данными экспериментов.

На рис.5б представлено макроскопическое распределение скорости, вычисленное для рассматриваемого примера в соответствии со вторым уравнением системы (48).

На рис.5б можно видеть, что, чем больше значение параметра β , тем больше кривизна графика зависимости скорости от координаты. Этого следует ожидать, поскольку в случае большей вязкости происходит большая диссипация энергии, и это ведет к уменьшению скорости жидкости

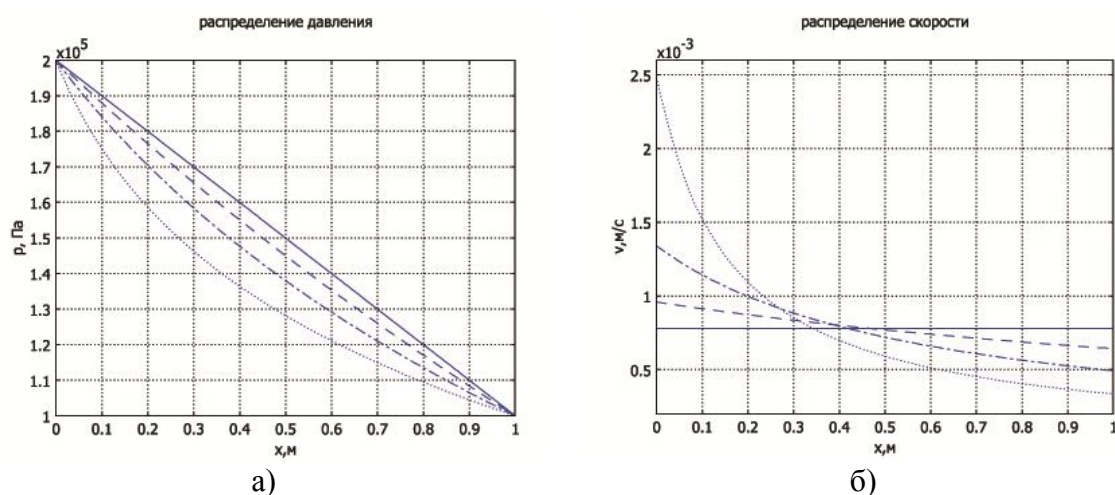


Рис.5. Распределение давления и скорости на момент времени $t=1,0c$: сплошная линия – $\beta=0$; штриховая линия – $\beta=0,4 \cdot 10^{-5} Pa^{-1}$; штрих-пунктир – $\beta=1,0 \cdot 10^{-5} Pa^{-1}$; пунктир – $\beta=2,0 \cdot 10^{-5} Pa^{-1}$.

Пример 4: $\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_p} \right)$, $\mu(p) = \mu_0 (p / p_0)^n$, $\alpha(p) = \alpha_0 (p / p_0)^n$

Рассматриваемый пример отличается от предыдущего степенным видом зависимости вязкости и коэффициента трения от давления. Интегрирование первого из уравнений (48) с учётом начального и граничных условий (51) даёт распределение давления, вид которого приведен на рис.6а.

Из рис.6а видно, что, в случае $n=0$, когда не учитывается зависимость μ и α от давления, распределение $p(x)$ представляет собой линейную функцию, и величина давления в любой точке внутри рассматриваемого интервала превышает соответствующие значения для других случаев. При этом, чем больше значение степени нелинейности n , тем больше кривизна графика зависимости давления от координаты, и тем меньше величина давления в любой точке внутри рассматриваемой области.

На рис.6б представлено макроскопическое распределение скорости, вычисленное для рассматриваемого примера в соответствии со вторым уравнением системы (48).

Из рис. 6б можно видеть, что, чем больше значение параметра n , тем больше кривизна графика зависимости скорости от координаты.

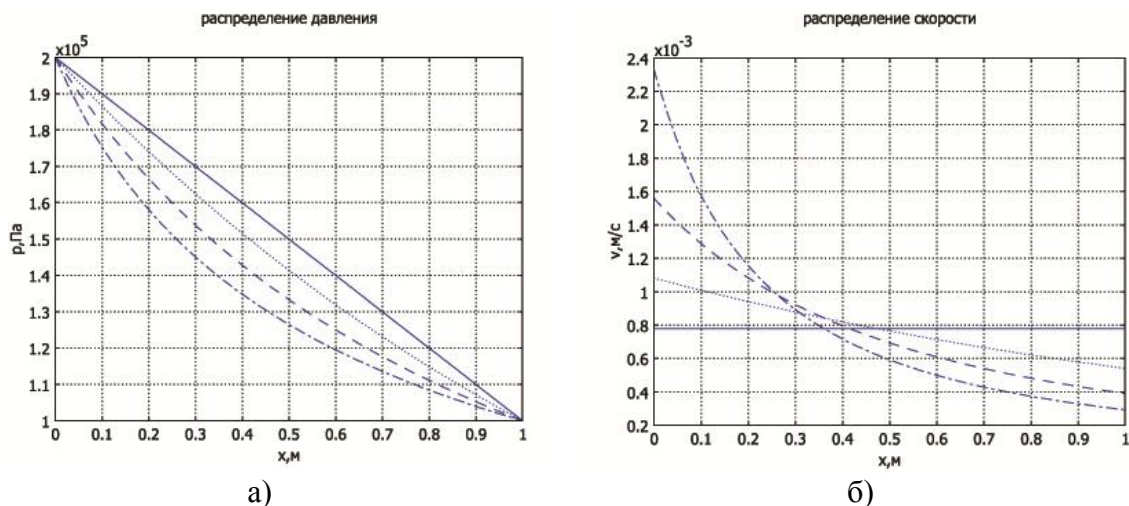


Рис.6. Распределение давления и скорости на момент времени $t = 1,0c$: сплошная линия – $n = 0$; пунктир – $n = 1$; штриховая линия – $n = 2$; штрих-пунктир – $n = 3$.

6. ВЫВОДЫ

Метод усреднения был применён при моделировании процесса фильтрации вязкого сжимаемого баротропного вещества в недеформируемой пористой среде. Предполагалось, что пористая среда может быть рассмотрена как периодическая. Были выписаны уравнения на всех характерных масштабах и получены усреднённые макроскопические соотношения, определяющие скорость и давление фильтрующегося вещества. Компоненты эффективного тензора проницаемости были определены в ходе решения соответствующих задач на ячейке периодичности и их последующего усреднения. В общем случае такие задачи на ячейках должны решаться численно. Было получено аналитическое решение задачи на ячейке для частного случая фильтрации в жёсткой среде, представляющей собой периодически чередующиеся слои, состоящие из тонких проницаемых каналов. Заметим, что используемый метод усреднения можно применять к рассмотрению и других задач, в которых присутствует несколько характерных пространственных масштабов периодичности.

Распределения скорости и давления в нулевом приближении были найдены из решения усредненного макроскопического уравнения. Было показано, что в случае, когда зависимость вязкости и коэффициента трения от давления не учитывается, рассчитанные величины давления и скорости фильтрующегося вещества получаются завышенными в сравнении с аналогичными результатами, полученными с учётом этой зависимости. Давление и скорость, вычисленные с учётом зависимости этих величин от давления, находятся в лучшем согласии с данными экспериментов [10]. Из полученных результатов видно, что, чем сильнее зависимость вязкости и коэффициента трения от давления жидкости, тем больше будет кривизна графика распределения давления, и тем меньше будет величина давления в точке с фиксированной координатой в пределах рассматриваемой области.

Были рассмотрены два примера баротропных соотношений (см. [8,21]). Сравнение распределений давления и скорости с аналогичными результатами, полученными для различных видов баротропных соотношений, показывает, что учёт зависимости вязкости и коэффициента трения от давления оказывает гораздо более

сильное влияние на исследуемые величины, чем учёт зависимости плотности от давления, что хорошо согласуется с опубликованными ранее результатами [10,11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 471 с.
3. *Auriault J.-L.* Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible? // *Int. J. Eng. Sci.* – 1991. – Vol.29. – N7. – P.785-795.
4. *Quintard M., Whitaker S.* Transport in ordered and disordered porous media: volume-averaged equations, closure problems, and comparison with experiments // *Chem. Eng. Sci.* – 1993. – Vol.48. – N14. – P.2537-2564.
5. *Беляев А.Ю.* Усреднение в задачах фильтрации. – М.: Наука, 2004. – 200 с.
6. *Власов А.Н., Мерзляков В.П.* Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 208 с.
7. *Rajagopal K.R.* On a hierarchy of approximate models for flows of incompressible fluids through porous solids // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.* – 2007. – Vol.17. – N2. – P.215-252.
8. *Dowson D., Higginson G.R.* Elastohydrodynamic lubrication. The fundamentals of roller and gear lubrication. – Oxford: Pergamon Press, 1977. – 235 p.
9. *Bridgman P.W.* The Physics of High Pressure. – London: G.Bell & Sons, 1959. – 445 p.
10. *Nakshatrala K.B., Rajagopal K.R.* A numerical study of fluids with pressure dependent viscosity flowing through a rigid porous media // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* – 2011. – Vol.67. – N3. – P.342-368.
11. *Kannan K., Rajagopal K.R.* Flow through porous media due to high pressure gradients // *Applied Mathematics and Computation.* – 2008. – Vol.199. – N2. – P.748-759.
12. *Barus C.* Isotherms, isopiestic and isometrics relative to viscosity // *American J. of Science.* – 1893. – Vol.45. – P.87-96.
13. *Bair S., Kottke P.* Pressure–viscosity relationships for elastohydrodynamics // *Tribol. Trans.* – 2003. – Vol.46. – P.289-295.
14. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Appl. Scient. Res.* – 1947. – A1. – P.27-34.
15. *Brinkman H.C.* On the permeability of media consisting of closely packed porous particles // *Appl. Scient. Res.* – 1947. – A1. – P.81-86.
16. *Auriault J.-L.* On the Domain of Validity of Brinkman’s Equation // *Transp. Porous Media.* – 2009. – P.215-223.
17. *Auriault J.-L.* Upscaling Heterogeneous Media by Asymptotic Expansions // *J. of Engineering Mechanics.* – 2002. – Vol.128. – N8. – P.817-822.
18. *Саваторова В.Л., Талонов А.В., Власов А.Н.* Усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в слоистой пористой среде // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2010. – Т.16. – №4. – С.483-502.
19. *Savatorova V.L., Rajagopal K.R.* Homogenization of a generalization of Brinkman’s equation for the flow of a fluid with pressure dependent viscosity through a rigid porous solid. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* – 2011. – Vol.91. – N8. – P.630-648.

20. *Darcy H.* Les Fontaines Publiques de La Ville de Dijon. – Paris: Victor Dalmont, 1856.
21. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.

УДК 53.097/538.956

ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СУСПЕНЗИЙ С НАНОРАЗМЕРНОЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗОЙ. ПОЛИИМИДЫ

Яновский Ю.Г.¹, Семенов Н.А.¹, Сидорова Г.Я.¹, Гусева М.А.¹, Орлов В.Н.²

¹*ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва,
Россия*

²*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

Представлены данные электрореологических свойств нового класса «умных материалов» – электрореологических суспензий (ЭС) на основе наноразмерных полимерных частиц полиимидов. В широком диапазоне изменения скоростей сдвигового деформирования, при различных концентрациях дисперсной фазы описаны кривые течения подобных объектов. Методами электронной микроскопии и динамического рассеяния света впервые определены размеры и электрофизические свойства поверхности частиц полиимида. Полученные результаты открывают перспективы для широкого практического использования подобного класса ЭС.

Ключевые слова: полиимиды, наночастицы, электрореологические суспензии, кривые течения, дзета потенциал, удельная поверхность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Электрореологические суспензии (ЭС) – «умные материалы», поскольку их реологические и механические свойства (вязкость, предел текучести, модуль сдвига, и др.) могут управляться воздействием прикладываемого внешнего электрического поля [1-6]. В зависимости от параметров этого поля и физико-химической природы составляющих компонентов ЭС могут проявлять или свойства вязкой текучей среды, или твердообразного вязкопластичного тела. Подобные материалы перспективны с практической точки зрения, в частности, в устройствах, требующих резких, мгновенных и обратимых перепадов свойств рабочего тела – гасители колебаний, демпферы, амортизаторы, стабилизаторы движения и т.п. Создание нового поколения ЭС с ярко выраженным по сравнению с уже используемыми промышленно образцами увеличенным электрореологическим откликом – важная научная и практическая задача. Теоретически доказано, что перспективными могут быть ЭС с дисперсной фазой на основе полимеров, например, наноразмерных частиц полиимида. Действительно, в работе [1] в рамках прямого вычислительного квантово-механического метода (КМ) проводили моделирование наноструктуры и наноскопических реологических и электрореологических характеристик ЭР сред с дисперсной фазой на основе полиимидов. Теоретически были описаны реологические свойства ЭС в широком диапазоне изменения сдвиговых деформаций при наложении электрических полей различной величины в нормальном направлении к тангенциально приложенным деформациям. В расчетах [1] использовали кластерное приближение [7], в котором нанодисперсные частицы ЭР жидкости моделировали в явном (молекулярном) виде, а среду в континуальном приближении. Введение электрических полей в квантово-механические расчеты

проводили в рамках пакета программ NDDO/sp-spd [8]. Для каждой модели, оптимизированной в электрическом поле, рассчитывали наноскопические координаты сдвиговой деформации, изменение которых позволяло описывать требуемую последовательность деформационных состояний модельного фрагмента ЭРС. Результаты этих вычислений опубликованы в [1]. С учетом прогнозов [1] цель настоящей работы состояла в экспериментальной проверке теоретических прогнозов и выводов [1] путем широкомасштабных реологических исследований натуральных образцов ЭРС на основе полиимидов, синтезированных в ИПРИМ РАН по оригинальной технологии [11].

2. МЕТОДОЛОГИЯ СИНТЕЗА ПОЛИИМИДОВ, ПОДГОТОВКА МОДЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Среди известных способов химического синтеза полиимидов наиболее технологичным является одностадийная высокотемпературная поликонденсация диаминов и диангидридов тетракарбоновых кислот, при которой стадии ацилирования и циклизации протекают одновременно в высококипящем растворителе при 180–210°C [9]. В настоящей работе экспериментальный химический синтез полиимидов проводили именно методом одностадийной высокотемпературной полициклизации в растворе, используя м-крезол (или нитробензол) в качестве растворителя, при подъеме температуры и последующем термостатировании в этих условиях. Технология синтеза достаточно проста, ее этапы рассмотрим кратко на примере синтеза 1,4-фенилендиамина и диангидрида 4,4'-оксидифталевой кислоты. В реактор (снабжен магнитной мешалкой, обратным воздушным холодильником, барботером для подвода инертного газа и счетчиком пузырьков и др.), был загружен 1,4-фенилендиамина и диангидрида 4,4'-оксидифталевой кислоты и крезол.

Процесс синтеза предусматривал нагрев реакционной массы с непрерывным продувом инертным газом для отвода реакционной воды, выдержку при повышенной температуре, а также охлаждение, растворение в хлороформе и высаживание полимера. Выпавший осадок полиимида отфильтровывали, промывали, переосаждали [10].

По описанной выше технологии химического синтеза была получена серия образцов полиимидов различного состава (табл. 1).

Таблица 1.

Составы образцов полиимидов, синтезированных для приготовления ЭРС.

Химические реагенты, используемые при синтезе	Наименование образцов								
	СП-11	СП-12	СП-13	СП-19	СП-20	СП-21	СП-25	СП-26	СП-27
Амины									
4,4'-(9-Флуоренилиден)- дианилин									
2,4,4'-Оксидианилин									
N,N-диэтил-п-фенилен- диамин									
Ангидриды									
Пиромеллитовый ангидрид									
3,3',4,4'-Дифенилтетра- карбоновый диангидрид									

Для подтверждения корректности методики и определения химического состава, полученных соединений (полиимидов) привлекали ИК-спектроскопию.

Согласно прогнозам работы [1], в настоящем исследовании дисперсионной средой ЭРС был выбран полиметилсилоксан (ПМС-400) с плотностью $0,95 \text{ г/см}^3$ и $\varepsilon=4$. Для электрореологических испытаний готовили образцы ЭРС с концентрацией твердой фазы – 5 и 10 масс. %.

3. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Реологические испытания проводили на одном из современных типов реовискозиметров – реоспектрометре RS-150 (НААКЕ, Германия). Прибор позволяет исследовать широкую гамму реологических характеристик неньютоновских вязкоупругих сред, в том числе с явно выраженными тиксотропными свойствами, и имеет большие возможности варьирования параметров и режимов деформирования. Для изучения электрореологических эффектов данный прибор снабжен дополнительными измерительными узлами (цилиндр–цилиндр, плоскость–плоскость и др.), позволяющими создавать электрические поля в рабочих зазорах. При проведении электрореологических испытаний необходим контроль однородности электрического поля в рабочем зазоре прибора (для обеспечения равномерности поляризации по всему объему образца) и ориентации электрического поля по отношению к направлению сдвиговой деформации. В данном исследовании электрореологические испытания проводили на рабочем узле плоскость–плоскость. ЭР узел представляет собой систему плоских электродов из нержавеющей стали, (диаметр рабочей поверхности составлял 35 мм), изолированных от штатных систем вискозиметра керамической осью. Верхний электрод (плоский диск) закреплен на оси, соединенной с приводом ступенчатого генерирования различных скоростей вращения (оборотов). Второй электрод, также в форме диска, неподвижен и расположен под первым. Взаимное расположение рабочих поверхностей жестко фиксируется при помощи специальной конструкции. Для обеспечения равномерности зазора между плоскими поверхностями (1 мм) расстояние между ними тщательно тарируется. Напряжения на ячейку через скользящий контакт подаются на подшипник, который соединен с металлической осью верхнего электрода и на нижний неподвижный электрод. Схема измерительной электрореологической ячейки приведена на рис.2.

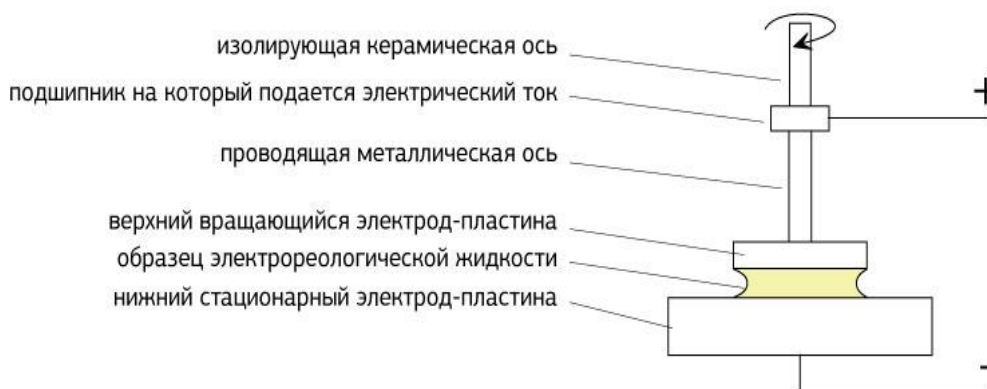


Рис.2. Схема электрореологической ячейки реовискозиметра RS-150 с рабочим узлом типа плоскость-плоскость.

Электрореологические эксперименты проводили в режиме установившегося сдвигового течения, на которое в нормальном направлении накладывали электрическое поле в диапазоне напряжений от 0 до 3.5 кВ. Интервал изменения скоростей сдвига в данных исследованиях составлял от 1 до 300 с⁻¹. Длительность каждого из этих экспериментов составляла 300 с.

Важным этапом работы были исследования размеров частиц полиимидов и оценка электрических свойств их поверхности. Измерения размеров частиц проводили на электронном просвечивающем микроскопе и на приборе Zetasizer Nano 25 (Malvern, США) методом динамического рассеяния света. На приборе Zetasizer также проводили оценки электрофизических свойств поверхности частиц полиимида в среде полиметилсилоксана.

4. ПОДБОР ОБРАЗЦОВ ПОЛИИМИДА С ОПТИМАЛЬНЫМИ ЭР СВОЙСТВАМИ

Как уже указывали выше, для электрореологических исследований синтезировали опытные партии образцов полиимидов, с различными химическими концевыми группами (химические составы этих образцов полиимидов представлены в табл.1). Из этого многообразия предстояло выбрать объекты с наиболее ярко выраженным электрореологическим эффектом. Эти эффекты, в частности, можно фиксировать по кривым течения ЭРС, а именно зависимостям касательных напряжений от скорости сдвига, полученным при различных значениях приложенных электрических полей. Для сопоставления достаточно выбрать несколько реперных точек на кривой течения при фиксированных значениях скорости сдвига. Сравнение вышеуказанных реологических параметров следует проводить как в отсутствие, так и при наложении электрических полей.

Для тестовых реологических испытаний ЭРС были приготовлены образцы с 5 масс.% концентрацией полиимидов в ПМС-400. Для простоты электрореологического тестового эксперимента реологические оценки проводили не в широком диапазоне изменения скоростей деформации, а в режиме постоянной скорости сдвига при значениях $\dot{\gamma}$ 12 и 27 с⁻¹. Полученные в ходе подобных испытаний результаты представлены на рис.3.

Из диаграмм видно, что у 4-х образцов – СП-19, СП-20, СП-26 и СП-27 – при повышении напряжения электрического поля существенно изменяются и вязкость и напряжения сдвига. Однако, наиболее сильно электрореологический эффект выражен у образцов СП-20 и СП-27 (см. табл.1), поэтому с учетом проведенных тестовых испытаний для дальнейших широкомасштабных электрореологических экспериментов были выбраны именно эти объекты.

Как уже указывали выше, важный этап исследований состоял в оценки размеров частиц синтезированных авторами полиимидов (табл.1). Данные электронной просвечивающей микроскопии для образца СП-20 представлены на рис.4. Слева – электронная фотография, а справа – обработанная с помощью специализированного программного пакета SPIP (Scanning Probe Image Processor, Дания) диаграмма распределения частиц полиимида по размерам. Виден бимодальный тип распределения с максимумами в области 20 и 90 нм, частицы порошка имеют округлую форму и размер около 20 нм, частицы объединены в агрегаты размером около 90 нм. Усредненный размер частиц образца СП-20 приближенно составляет 55 нм. Отметим, что данный размер частиц попадает в наномасштабную область.

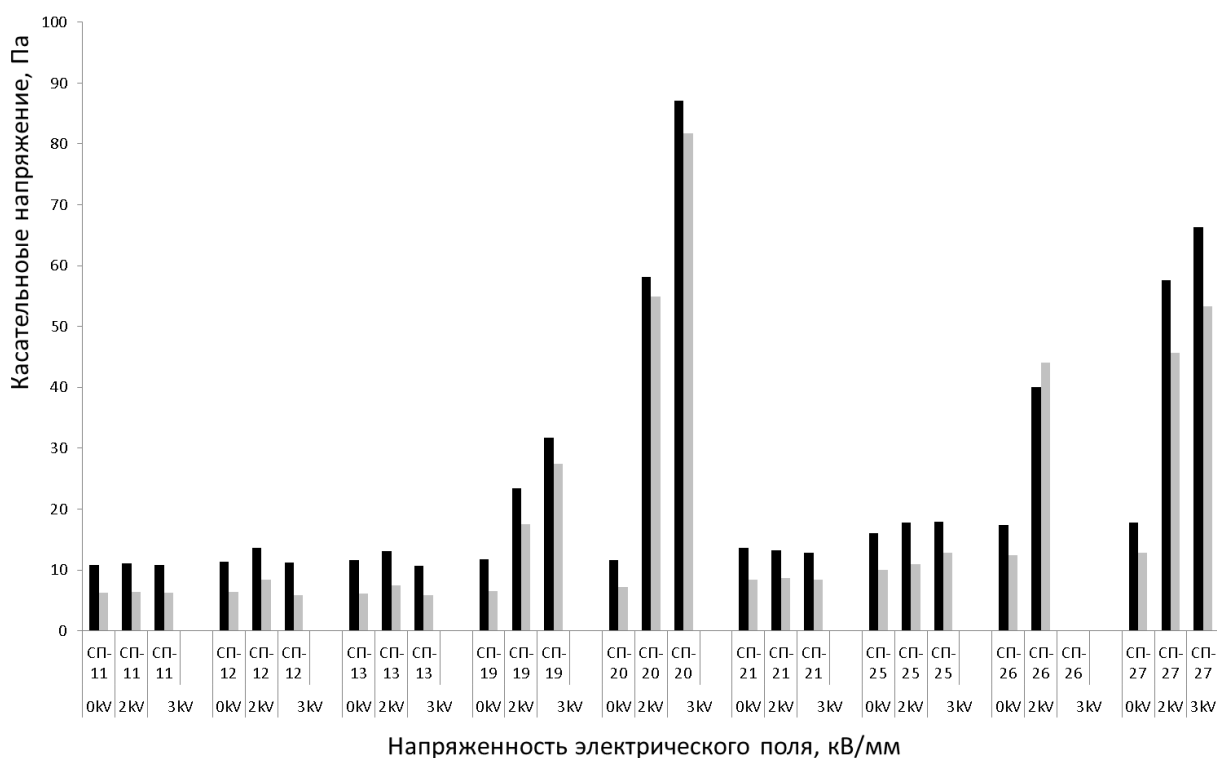


Рис.3. Диаграммы тестовых испытаний. Значения касательных напряжений (Па) при постоянных скоростях сдвига 12 c^{-1} (■) и 27 c^{-1} (□) для ЭРС с 5 масс.% концентрацией различных типов полиимидов (обозначения см. табл.1)

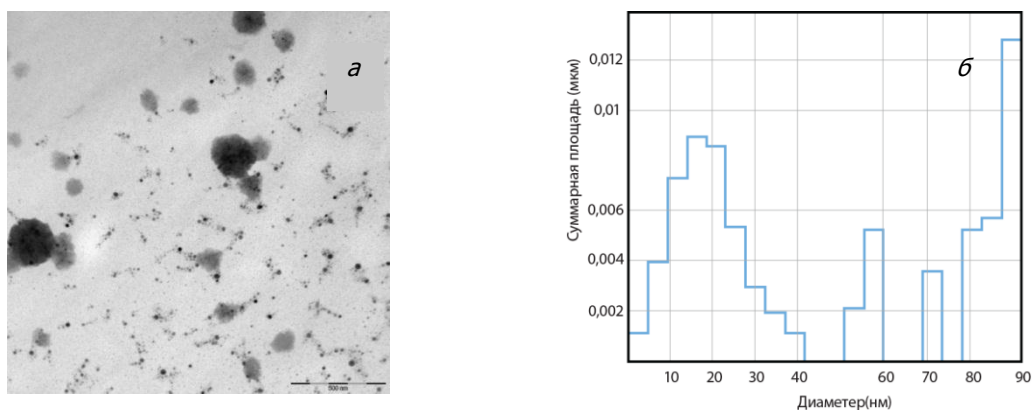


Рис.4. Электронная фотография частиц полиимида СП-20 (а); распределение частиц по размерам (б).

Для сравнения на рис.5 представлены данные электронной микроскопии для порошков полиимида СП-11, СП-12, СП-13, изображения а, б, в, соответственно. Видно, что размеры этих порошков значительно больше, чем у СП-20. Более того, отчетливо наблюдаются агрегаты микронных размеров. Результаты измерения размеров частиц приведены в таблице 2.

Отметим, что многие особенности структуры и физико-механических свойств нанообъектов связаны именно с большими величинами их поверхности [12].

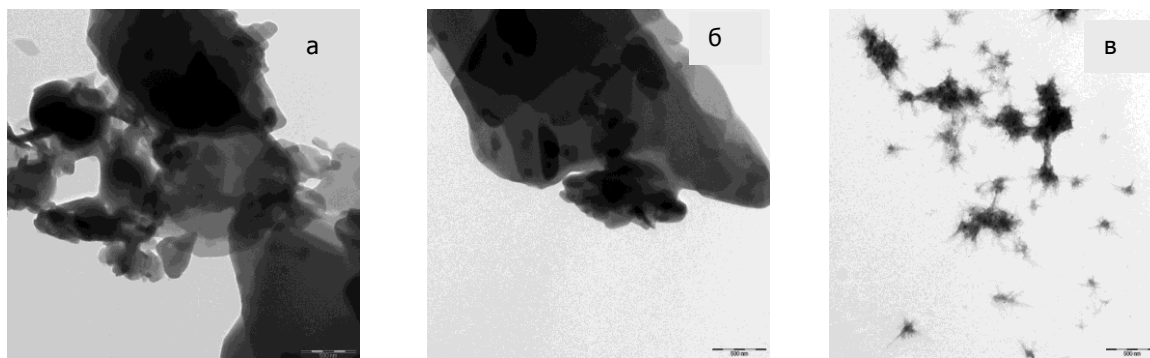


Рис.5. Данные электронной микроскопии для образцов полиимидов СП-11, СП-12, СП-13 (а-в), соответственно.

Таблица 2.

Диаметры частиц/агрегатов частиц полиимидов различного химического состава по данным электронной микроскопии после обработки в программе SPIP.

Образец	СП-11	СП-12	СП-13	СП-20
Пиковый размер, нм	1100	800	360	20

Зная плотность, по полученным размерам частиц полиимида можно рассчитать удельную поверхность частиц по соотношению

$$S_u = \frac{6}{\rho D_r},$$

где ρ – плотность; D_r – размер диаметра частицы [12]. Как известно удельная поверхность очень важный параметр дисперсной фазы суспензии, которая играет существенную роль в формировании структуры ЭРС. В таблице 3 приведены рассчитанные значения удельной поверхности, согласно данным таблицы 2.

Таблица 3.

Значения электрофизических параметров частиц полиимидов – диаметр, величина удельной поверхности и (ζ) потенциала и величина напряжения сдвига (τ) при $\dot{\gamma} = 27 \text{ c}^{-1}$ для различных образцов ЭРС (см. табл.1), при различной напряженности электрического поля.

Образец	Размер частиц, D, нм	$S_{u0} \text{ м}^2/\text{г}$	ζ , мВ	τ Па, 0 кВ/мм	τ Па, 2,5 кВ/мм	τ Па, 3,5 кВ/мм
СП-11	1100	3,843	-12,9	10,82	11,03	10,82
СП-12	800	5,28	1,1	11,33	13,57	11,24
СП-13	360	11,74		11,73	23,47	31,76
СП-20	20	211,27	140	11,61	58,11	87,13

На рис.6 показана зависимость значений касательных напряжений, измеренных при скорости сдвига $\dot{\gamma} = 27 \text{ c}^{-1}$, от частиц полиимидов для ЭРС различного диаметра химического состава (см. табл.1 и 2). Из рис.6 (справа) видно, что значения напряжения сдвига в электрореологических экспериментах резко увеличиваются с уменьшением диаметра частиц. Это свидетельствует об увеличении прочности структуры у ЭРС с наноразмерной дисперсной фазой. Отметим, что подобная резкая зависимость прочности материала наблюдается и для полимерных композитов,

наполненных наноразмерными частицами. В обоих случаях проявление подобных закономерностей можно объяснить увеличением удельной поверхности порошкообразных наполнителей с уменьшением диаметра частиц [12]. Данное объяснение подтверждается результатами рис.6 (слева), на котором представлена зависимость сдвиговых напряжений от S_i для ЭРС с различными размерами дисперсной фазы (см. табл.2).

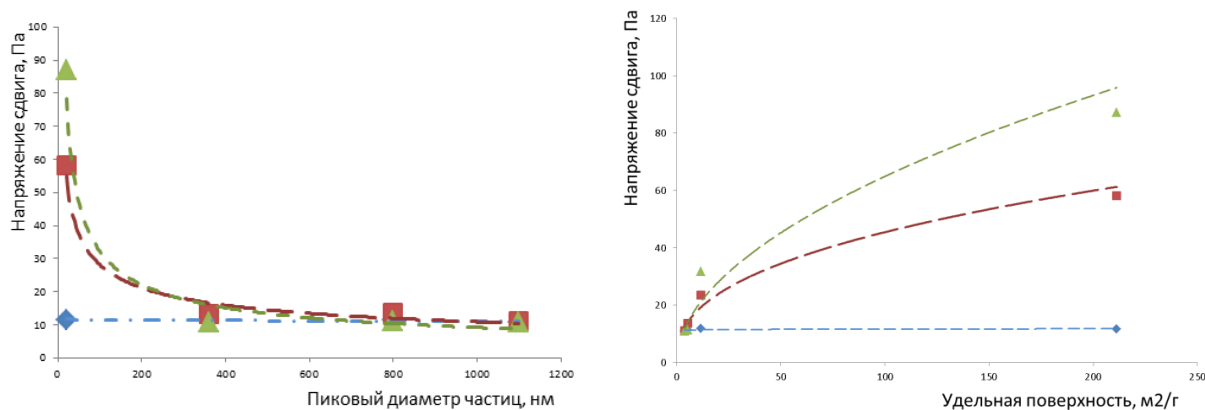


Рис.6. Зависимость касательных напряжений (при $\dot{\gamma} = 27 \text{ c}^{-1}$) от диаметра частиц (слева) и удельной поверхности (справа) ЭРС на основе полиимидов различного химического состава (см. табл. 2). Напряженность электрического поля кВ/мм: \blacklozenge – 0, \blacksquare – 2,5; \blacktriangle – 3,5

5. ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЧАСТИЦ ПОЛИИМИДА. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЕ СВЕТА

Динамическое рассеяние света (ДРС), или фотонная корреляционная спектроскопия – метод измерения размеров и параметров двойного электрического слоя наночастиц, основанный на определении коэффициента диффузии дисперсных частиц в жидкости путем анализа характерного времени флуктуаций интенсивности рассеянного света. Суть метода динамического рассеяния света базируется на анализе следующего физического явления. Хаотичное броуновское движение дисперсных частиц в дисперсионной среде вызывает флуктуации их локальной концентрации. В свою очередь, эти флуктуации приводят к локальным неоднородностям показателя преломления среды. При прохождении лазерного луча через такую среду часть света будет рассеяна на этих неоднородностях. Флуктуации интенсивности рассеянного света будут соответствовать флуктуациям локальной концентрации дисперсных частиц, а коэффициент диффузии однозначно связан с радиусом частицы.

Измерения дзета (ζ) потенциала, или потенциала двойного электрического слоя поверхности частиц дисперсии, позволяет определить силу взаимодействия между частицами, а тем самым и предсказать способность их к агрегации. Таким образом, величина ζ является одной из характеристик стабильности подобной коллоидной среды или суспензии. Важным является оценка влияния этого физического параметра индивидуальных частиц на реологические свойства материала, в котором они используются в качестве дисперсной фазы. Сравнительные оценки роли ζ потенциала на электрореологические свойства среды удобно проводить по значениям касательных напряжений в реологических экспериментах при некоторых постоянных значениях скорости деформации. Такие данные

представлены в табл.3 для различных образцов ЭРС с полиимидами в качестве дисперсной фазы, химический состав которых дан в табл.1. В четвертой колонке слева табл.3 показаны значения ζ потенциала в милливольтгах (мВ), а в последующих значения касательных напряжений ($\dot{\gamma}=27\text{c}^{-1}$), при различной напряженности электрического поля (кВ/мм). Отметим, что данные значения ζ и τ уместно сравнивать, исходя из геометрических размеров частиц полиимидов. Наблюдается отчетливая взаимосвязь между размерами частиц полиимидов и величинами их ζ потенциала в среде полиметилсилоксана – чем меньше диаметр, тем выше ζ потенциал. Наибольшее значение ζ потенциала наблюдается у наноразмерного образца полиимида, частицы которого обладают наибольшей поверхностью, по сравнению с микроразмерными частицами.

Из табл.3 видно, что наибольшие величины τ достигаются для образца СП-20. На рис.7 построены графические зависимости величины напряжения сдвига (при $\dot{\gamma}=27\text{c}^{-1}$) от значений ζ потенциала.

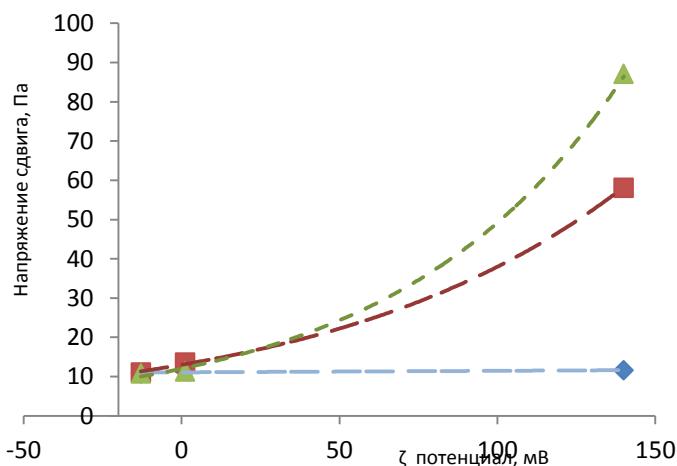


Рис.7. Зависимость напряжения сдвига (при $\dot{\gamma}=27\text{c}^{-1}$) от ζ потенциала для ЭРС различного химического состава (см. табл. 3). Напряженность электрического поля кВ/мм: \blacklozenge – 0, \blacksquare – 2,5, \blacktriangle – 3,5

В отсутствии электрического поля значения τ практически постоянны для всех проанализированных образцов ЭРС. Очевидно, что основную роль на реологические параметры в этом случае оказывают не электрофизические свойства дисперсной фазы, а ее концентрация. Однако в электрическом поле величина ζ потенциала, безусловно, имеет большое значение, поскольку сказывается на величинах τ .

Из данных табл.2 и 3 отчетливо прослеживается следующая закономерность, чем меньше геометрические размеры частиц дисперсной фазы электрореологической суспензии, тем больше величина ее удельной поверхности и соответственно ζ потенциал в дисперсной среде ЭРС и тем выше электрореологический отклик. Подобная взаимосвязь между ζ и τ показана на рис.7.

6. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В РЕЖИМЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ СДВИГОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В ходе реологических исследований при установившемся сдвиговом течении проводили два типа испытаний в режиме установившегося сдвигового деформирования, при варьировании (плавном повышении) скорости сдвига от 1 до 300c^{-1} , а также испытания с постоянной скоростью сдвига 12 и 27c^{-1} при

длительности деформирования в течение 300 с. Зазор между плоскостью и ротором составлял 1 мм. Серия образцов полиимида СП-20 имела следующий химический состав: 4,4'-(9-Флуоренилиден)-дианилин и пиромеллитовый ангидрид (см. табл.2).

Зависимости касательных напряжений от скорости сдвига, полученные в ходе этих испытаний для ЭРС СП-20, представлены на рис.8.

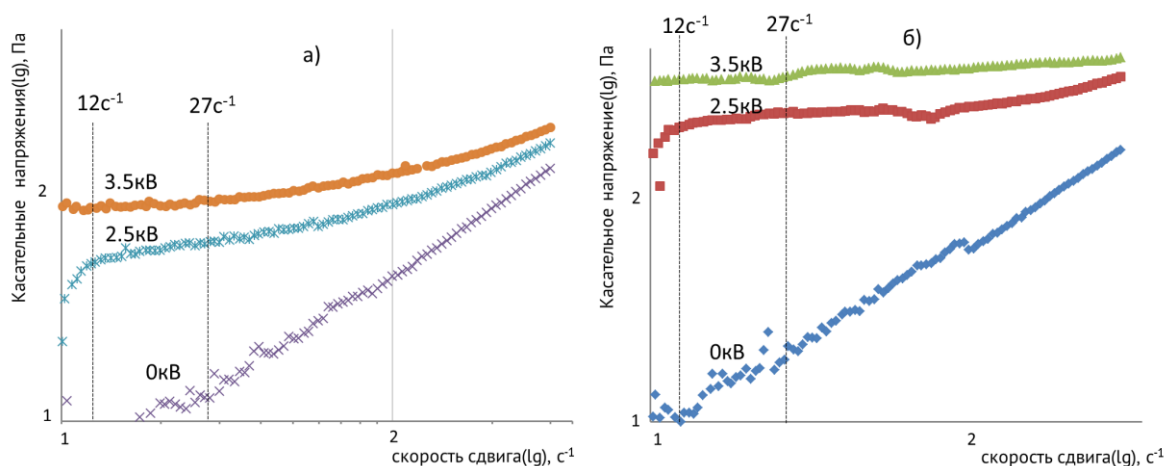


Рис.8. Зависимости касательных напряжений от скорости сдвига для образцов ЭРС СП-20. Концентрация дисперсной фазы 5 (а), 10 масс.% (б). Температура 298 К.

Как видно из зависимостей $\tau(\dot{\gamma})$ (кривые течения) в отсутствии электрического поля в изученном диапазоне скоростей сдвига ЭРС СП-20 ведет себя как среда со слабо выраженными неньютоновскими свойствами. Ее поведение приближенно можно аппроксимировать степенным законом типа

$$\tau = k\dot{\gamma}^n,$$

где k и n параметры, величины которых определяются свойствами компонент суспензии. Конкретный вид аппроксимационной зависимости целесообразно выбирать на стадии разработки алгоритмов управления электрореологическими свойствами среды, исходя из конкретного инженерного устройства (демпфер, амортизатор, стабилизатор и т.п.). И этот вопрос будет обсуждаться на дальнейших этапах работы.

Зависимости вязкости от скорости сдвига $\eta(\dot{\gamma})$ для ЭРС СП-20 показаны на рис.9. Видно, что в отсутствии поля ЭРС СП-20 проявляет слабо выраженные неньютоновские свойства, однако, при приложении электрического поля зависимости $\eta(\dot{\gamma})$ резко изменяются. Масштаб этих изменений отчетливо виден из диаграммы на рис.9, где представлены значения η при постоянных скоростях сдвига 12 и 27 с^{-1} для 5 и 10 масс.% полиимида (пунктир на рис.9).

Итак, из рис.8-9 видно, что при повышении напряженности электрического поля и концентрациях дисперсной фазы 5 и 10 масс.% в ЭРС СП-20 в обсуждаемом диапазоне режимов деформирования наблюдаются резкие изменения (увеличения) реологических характеристик среды – напряжения сдвига и вязкости – по сравнению с теми же параметрами измеренными в отсутствии электрического поля. Также видно, что для 10 масс.% суспензии полиимида ЭР эффект выражен более ярко. Подобное поведение ЭРС можно объяснить особенностями структуры СП-20, что подтверждается результатами визуализации процесса структурирования с помощью оптического микроскопа (Micros MC 400, Австрия).

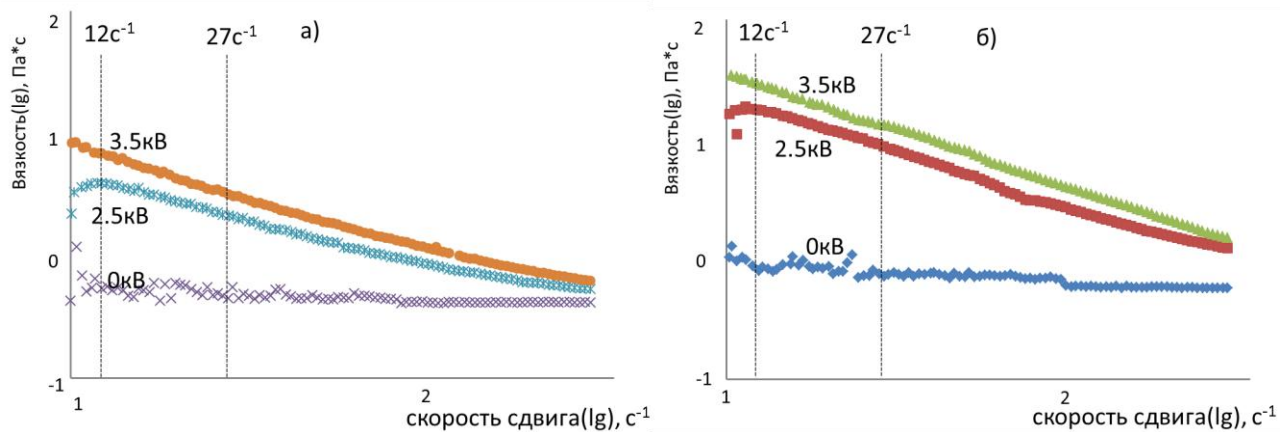


Рис.9. Зависимости вязкости от скорости сдвига для образцов ЭРС СП-20. Концентрация дисперсной фазы образца 5 (а) и 10 масс.% (б). Температура 298 К.

Для проведения электрооптических экспериментов было сконструировано специальное устройство в виде плоского конденсатора. Между стенками конденсатора помещалась исследуемая ЭРС. При наложении электрического поля в среде начинают происходить процессы структурообразования – образуются вертикальные тяжи, что четко фиксируется встроенной в микроскоп кинокамерой. Результаты оптической визуализации показывают, что при концентрации полиимида 10 масс.% в среде образуются более прочные и развитые структуры. Усреднение оптических изображений на все анализируемое поле показывает, что число сформированных тяжей при напряженности электрического поля 3,5 кВ/мм в два раза выше, чем при 2,5 кВ/мм.

Интерес представляет сопоставление теоретических квантово-механических (КМ) прогнозов изменения электрореологических характеристик подобной ЭРС [1] с экспериментально полученными на реовискозиметре RS-150 реологическими данными. На рис.10 показаны результаты такого сравнения.

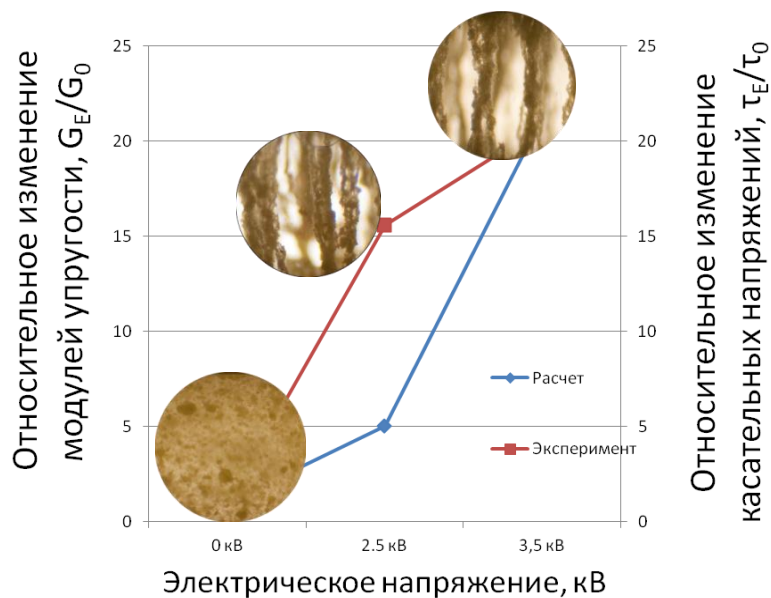


Рис.10. Сравнение экспериментально полученных реологических результатов с рассчитанными в КМ вычислениями значениями [1].

На вставке рис.10 даны фотографии структуры ЭРС в отсутствие и в присутствии электрического поля. Отчетливо видна структура ЭРС на различных этапах эксперимента, которая меняется от хаотически распределенных в дисперсной среде твердых частиц суспензии до нитеобразных, ориентированных в направлении поля цепочек (тяжей). В таблице 4 представлены численные значения сравниваемых реологических параметров.

Таблица 4.

Численные значения сравниваемых реологических параметров.

Напряженность электрического поля	Теоретические значения модуля упругости при сдвиге, G_E , ГПа	Относительное изменение модулей упругости, G_E/G_0	Экспериментальные значения напряжения сдвига, τ_E , Па	Относительное изменение напряжений сдвига, τ_E/τ_0
0 кВ/мм	0,8	1	16,35	1
2,5 кВ/мм	4	5	255,15	15,60
3,5 кВ/мм	17	21,25	339,33	20,75

Поскольку в квантово-механических экспериментах на кластерах представительных элементов структуры для ЭРС вычисляли значения модуля упругости при сдвиге [1], а в реологических экспериментах определяли касательные напряжения сдвига в режиме установившегося сдвигового деформирования, то для сопоставления указанных величин целесообразно использовать их относительные изменения. Для этого проводили нормирование текущих вычисляемых или регистрируемых реологических величин к их начальным значениям в отсутствие электрического поля.

Как следует из рис.10 при 2,5 кВ наблюдается качественное и количественное отличие предсказываемых теоретически и экспериментально определенных значений реологических параметров. Это может быть связано с практически мгновенной реакции ЭРС на приложение электрического поля и формированием объемной структуры в среде ЭРС в экспериментах с наложением электрического поля, в то время как в КМ вычислениях процесс структурообразования моделируется пошагово, т.е. электрические напряжения и деформации растут постепенно, ступенчато.

7. ВЫВОДЫ

Получено несколько различных видов ЭРС на основе полиимида, и проведено комплексное сравнение их свойств. Впервые исследованы электрореологические свойства нового типа ЭРС на основе полимерной наноразмерной дисперсной фазы – частиц полиимида и дисперсионной среды полиметилсилоксана.

Теоретический прогноз технологии синтеза, физико-механических и реологических свойств полиимидов различного химического состава был выполнен авторами в рамках квантово-механических (КМ) расчетов на предварительном этапе работы. Эти результаты позволили также спрогнозировать компонентный состав ЭРС на основе полиимидов и полиметилсилоксанов с оптимальной химической структурой и электрореологическими свойствами.

Образцы порошков полиимидов различного химического состава получали в ходе одностадийной высокотемпературной полициклизации соответствующих реагентов в растворе М-крезола.

Синтезированные порошки полиимидов были охарактеризованы методами: ИК-спектроскопии (по химическому составу); электронной микроскопии (размеры частиц и агрегатов); фотонной корреляционной микроскопии (электрофизические свойства); реологическими тестовыми экспериментами (электрореологические эффекты). Это позволило выбрать для широкомасштабных реологических исследований объекты ЭРС с оптимальными наиболее ярко выраженными электрореологическими свойствами.

Проведены широкомасштабные реологические и электрореологические испытания ЭРС на основе наиболее перспективных образцов полиимидов (дисперсная фаза) и полиметилсилоксана (дисперсионная среда). Получены кривые течения указанных объектов, построены зависимости вязкости среды от параметров деформирования и величины напряженности электрического поля.

Построена математическая аппроксимация указанных реологических зависимостей в виде различных приближений – по линейному, степенному, полиномиальному законам. Подобная аппроксимация позволит управлять электрореологическими параметрами ЭРС при их практическом использовании в различных технических устройствах.

Установлено, что ЭРС, полученные на основе наноразмерных частиц полиимидов, обладают мощным электрореологическим эффектом. Подобные свойства позволяют отнести ЭРС на основе наноразмерных частиц полиимидов к классу “giant” (супермощных) электрочувствительных материалов.

Установлено, что электрореологический отклик подобных ЭРС зависит от размеров частиц дисперсной фазы, величины ее удельной поверхности, величины ζ потенциала частиц в дисперсной среде, напряженности приложенного электрического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yanovsky Yu.G., Nikitina E.A., Karnet Yu.N. et al. Smart materials with electrically controlled properties. Electrorheological suspensions with a nanosized polymeric disperse phase. Part 1. Quantum mechanical modeling of the electrorheological effect // Int. J. Nanomechanical Science and Technology. – 2011. – Vol.2. – N2. – P.145-166.
2. Block H., Kelly J.P., Qin A. et al. Materials and mechanisms in electrorheology // Langmuir. – 1990. – Vol.6. – P.6.
3. Hao T. Electrorheological suspensions // Advanced Materials. – 2001. – Vol.13. – P.1847.
4. Lu K., Lan Y., Men Sh. et al. Synthesis and electrorheological characterization of polyaniline and Na⁺-montmorillonite clay nanocomposite // Int. J. Modern Physics. B. – 2001. – Vol.15. – P.657-664.
5. Lengálová A., Pavlinek V., Sába P. et al. The effect of dielectric properties on the electrorheology of suspensions of silica particles coated polyaniline // Physica. A. – 2003. – Vol.321. – P.411.
6. Rejon L., Ponce M.A., De la Luz C. et al. Effect of dielectric constant of the liquid phase of electrorheological fluids // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 1995. – Vol.6. – P.840-845.

7. *Nikitina E.A.* Computational modeling of surfaces and interfaces of nanoobjects // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – Т.7. – №3. – P.288-310.
8. Оригинальный пакет квантово-механических программ NDDO/sp-spd, реализованный в параллельном режиме расчета (ИПРИМ РАН, Свидетельство о государственной регистрации №2009614949 от 10.09.2009).
9. *Кузнецов А.А., Яблокова М.Ю., Цегельская А.Ю. и др.* Каталитический процесс получения линейных и сверхразветвленных полиимидов в активной среде / XVIII-й Менделеевский съезд по общей и прикладной химии. Сборник тезисов докладов. – М., 2007. – Т.2. – С.347.
10. *Кузнецов А.А., Цегельская А.Ю. Бузин П.В.* Одностадийный высокотемпературный синтез полиимидов в расплаве в бензойной кислоте: кинетика реакций, моделирующих стадии поликонденсации и циклизации // Высокомолекулярные соединения. – 2007. – Т.49. – №11. – С.1895.
11. *Winslow W.M.* Methods and means for transmitting electrical impulses into mechanical force / Pat. US № 2417850. – 1947.
12. *Яновский Ю.Г., Валиев Х.К., Корнев Ю.В. и др.* Роль масштабного фактора при изучении механических свойств композиционных материалов с нанонаполнителями // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №2. – С.291-304.

Том 1
СОДЕРЖАНИЕ

Прочность гетерогенных материалов, композитов, адаптивных материалов и конструкций	3
Прочность и трещиностойкость дисперсно-армированных термопластов в условиях холодного климата Бабенко Ф.И., Сухов А.А., Федоров Ю.Ю., Саввинова М.Е.....	4
Температурные ограничения по применению армированных полиэтиленовых труб для газопроводов в условиях низких температур Бабенко Ф.И., Федоров Ю.Ю., Саввина А.В.....	11
Учет влияния анизотропных свойств композитных преград и стохастичности процессов при проникании инденторов Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С.....	16
Исследование формоизменения и остаточных напряжений многослойных панелей из несимметричных слоистых композитов с учетом технологических факторов Биткина О.В.....	30
Модернизированный метод итерации Ванцян А.А., Геворкян Г.А.....	40
Структурно-морфологические закономерности получения высокопрочных композиционных материалов на основе политетрафторэтилена Воропаев В.В.....	45
О статистической оценке степени локализации повреждений в многоэлементной механической системе по результатам её нагружения до разрушения Гольдштейн Р.В., Онищенко Д.Д.....	53
Поведение фторопластового включения в поверхности трения углепластика Горячева И.Г. Шпенев А.Г.....	70
Разработка и применение математических методов для решения задач оптимального синтеза физико-механической и геометрической структуры композиционных материалов, конструкций при воздействии волн в вариационной постановке Гусев Е.Л.....	76
Исследование нестационарных динамических волн в нелинейных вязкоупругих стержневых системах Курбанов Н.Т., Бабаджанова В.Г., Юсифли В.Н.....	82
Исследование теплозащиты керамических покрытий охлаждаемых лопаток ГТД при газопламенном нагреве Лепешкин А.Р., Бычков Н.Г.....	90

О функции Грюнайзера для анизотропных композитов Лукьянов А.А.....	95
Расчетно-экспериментальное исследование пакетов слоистых композитов с различными заполнителями Мартиросов М.И., Рабинский Л.Н., Серпичева Е.В.....	106
Влияние факторов холодного климата на показатели изгибной прочности однонаправленных композитов на основе стекло- и базальтопластиков Федоров Ю.Ю., Бабенко Ф.И., Лапий Г.П.....	111
Вибродиагностика повреждения стержня Хакимов А.Г.....	116
Моделирование демпфирующих свойств пакета композитных слоев, армированных однонаправленными волокнами Шишкин В.М., Левашов А.П.....	132
<i>Аэро- и гидромеханика, реология сред с нанонаполнителями.....</i>	138
Теоретические модели и законы коалесценции газовых пузырьков в жидкости Бошнятов Б.В.....	139
К теории движения и горения турбулентных струй в сносящем потоке внешней среды Воротилин В.П.....	148
Основные уравнения гидромеханики сплошных гетерогенных сред с переменной массой Исмайлова Ш.Г., Гаджиева Г.Ф., Гахраманов П.Ф., Исмаилов Р.Ш.....	165
Модель процесса осаждения накипи в теплоэнергетических установках с магнитной обработкой воды Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.....	174
Противонакипная эффективность ввода затравочных кристаллов в пересыщенный водный поток Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.....	182
Сравнение эффективности детоксикации биожидкостей методами фильтрации и магнитосорбции Кошоридзе С.И., Левин Ю.К.....	189
Распространение звука низких частот в воде с газовыми пузырями Левин Ю.К., Попов В.В.....	194
О численном гидродинамическом моделировании равноканального многоуглового прессования аморфного полимерного композита в двухповоротном штампе с подвижной выходной стенкой Периг А.В., Голоденко Н.Н.....	203

Нестационарная фильтрация сжимаемого баротропного вещества в недеформируемой пористой среде	
Саваторова В.Л., Талонов А.В., Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б.....	214
Электрореологические и электрофизические свойства суспензий с наноразмерной дисперсной фазой. Полиимиды	
Яновский Ю.Г., Семенов Н.А., Сидорова Г.Я., Гусева М.А., Орлов В.Н.....	231