

Содержание

Аверков А.Н., Жуков М.Ю., Сахарова Л.В. Расчет стационарного pH -градиента в растворе аминокислот при больших плотностях тока.	8
Азаров А.Д. Моделирование больших деформаций полимеров	13
Александров В.М., Горячева И.Г. Движение нагрузки по вязкоупругому полупространству	17
Бабешко В.А., Бабешко О.М. О представлении решений в задачах с плоско-параллельными неоднородностями	22
Баранов И.В., Садчиков Е.В., Соловьев А.Н. Генетические алгоритмы в обратных задачах идентификации	30
Беликов Н.В., Занимонец Ю.М., Юдин А.С. Некоторые вопросы создания объектно-независимого программно-методического комплекса обработки экспериментальных данных	36
Бобров С.В., Наседкин А.В., Рыбьянец А.Н. Некоторые конечно-элементные модели для пористых пьезокompозитов 3-0 и 3-3 связности	41
Боев Н.В. Двукратное отражение высокочастотных волн от поверхностей системы двух полостей, находящихся в бесконечной упругой среде	47
Буйло С.И. Зависимость амплитуды акустического излучения скопления дислокаций и микротрещин от частоты и скорости нагружения твердых тел	51
Ватульян А.О. Новое интегральное уравнение в коэффициентных обратных задачах теории упругости	55
Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Собственные формы локализации волнового процесса в упругом слое с горизонтальной трещиной	58
Гольдштейн Р.В., Попов А.Л. Исследование гравитационного изгиба локально-опертой круглой пластины	63
Драгилев В.М. К восстановлению стационарной контактной нагрузки, действующей на упругое тело, по смещениям на участке свободной поверхности	67
Еремеев В.А. О потере устойчивости упругой сферы при раздувании	72
Жуков М. Ю. Феноменологическая модель для описания поведения самоплавающих микроорганизмов.	77
Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Параметрическое возбуждение волн на границе раздела двухслойной системы	82
Зубов Л.М. Равновесие гибкой пластинки с дислокациями и дисклинациями	87
Казаков К.Е. Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого основания с тонким неоднородным покрытием	93
Калашников В.В., Карякин М.И. Об использовании полубратного метода для определения интегральных деформационных характеристик	98
Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в заполненных жидкостью двухслойных вязкоупругих трубках	103
Ковалев Ю.Д., Стативка Е.Н. Смешанная кососимметричная задача электроупругости для неоднородного слоя	108

Комар Л.А., Свистков А.Л., Морозов И.А. Моделирование структуры резин и ее возможного влияния на формирование механических свойств материала	113
Краснов А.Ю. Большие деформации нелинейно-упругого шара, нагруженного внутренним давлением	118
Курбатова Н.В., Романова Н.М. Конечно-элементное решение задачи изгиба для естественно закрученного стержня	123
Куреннов С.С. Расчет динамических напряжений в клеевом нахлесточном соединении	127
Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении растущих тел	131
Марценюк М.А., Кислухин Н.М., Бекурин Д.Б., Ощепков А.Ю. Моделирование синергий плавательных движений	137
Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Товстик П.Е. Континуальные и дискретные модели формирования наногофрированных структур	142
Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н. Деформирование анизотропного массива горных пород с выработками при учете ползучести	147
Овчинникова С.Н. Пересечения нейтральных кривых в задаче Куэтта – Тейлора при вращении цилиндров в одну сторону	152
Паршин Д.А. Наращивание гравитирующего упругого шара	157
Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Новый метод построения определителей матриц-символов Грина динамических смешанных задач для сред с неоднородностями различной природы	162
Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Группы симметрий и система одномерных оптимальных подалгебр трехмерных уравнений теории пластичности	166
Саркисян С.О., Варданян С.А. Термоупругость микрополярных тонких пластин	171
Сафроненко В.Г., Трифонов В.В., Шутько В.М. Несимметричные вынужденные колебания составной композитной оболочки вращения	176
Скалюх А.С. Расчет двумерного поля предварительной поляризации керамики с использованием одномерной модели диэлектрического отклика	181
Снопов А.И. Диабатическая модель расширения газового облака под воздействием радиационного притока тепла	186
Сумбатьян М.А., Мацуга В.В. К расчету звукового поля однородного турбулентного потока	189
Устинов Ю.А. Некоторые задачи теории упругости для тел с винтовой анизотропией	194
Фильштинский Л.А., Кобзарь В.Н. Граничная задача связанной термоупругости для двумерных областей	198
Хапилова Н.С., Залетов В.В., Алтухова М.Л. Численно-аналитический метод исследования процесса образования трещины гидроразрыва	202
Чебаков М.И. Плоские контактные задачи для двухслойного основания	207
Шалдырван В.А., Васильев Т.А. Некоторые численные аспекты реализации методом Лурье-Воровича задачи о деформировании короткого кольцевого цилиндра	212

Шейдаков Д.Н. Неустойчивость растянутого полого цилиндра при кручении и внутреннем давлении	217
Шишкина О.В., Келлер И.Э., Трусов П.В. Об устойчивости сверхпластического течения к малым возмущениям границы	222
Шкутин Л.И. Анализ плоских межфазных деформаций стержней и пластин	227
Юдин А.С., Гончар Г.В., Щитов Д.В. Анализ резервов прочности составной оболочки	232
Юдович В.И. Двусторонние вариационные оценки интеграла Дирихле в случае смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана	237

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ ВОРОВИЧА И.И.

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Труды IX Международной Конференции,
посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН

И.И. Воровича

г. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.

I

Издательство ООО «ЦВВР»

Ростов-на-Дону

2005

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ ВОРОВИЧА И.И.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Труды IX Международной Конференции,
посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН

И.И. ВОРОВИЧА

г. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.

Т. 1

Издательство ООО «ЦВВР»

Ростов-на-Дону

2005

ББК В25

Ответственный редактор

профессор А.В. Белоконь

Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г.Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г. Т. 1. Ростов-на-Дону. Издательство ООО «ЦВВР». 2005 г. 244с.

ISBN 5-94153-035-8

Сборник содержит научные доклады, представленные на IX-ую Международную конференцию "Современные проблемы механики сплошной среды" (Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.), посвященную 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича.

Научная программа конференции включает разнообразные актуальные разделы механики сплошной среды: математические проблемы механики сплошной среды, математические модели в механике разрушения, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций, связанные физико-механические поля в механике сплошной среды, смешанные задачи механики сплошной среды, вычислительная механика и др.

ISBN 5-94153-035-8

Д – 01(03) – без объявл.

ББК В25

IX Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды" (Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

© НИИ механики и прикладной математики РГУ, 2005г.



ВОРОВИЧ ИОСИФ ИЗРАИЛЕВИЧ

(21.06.1920 – 06.09.2001)

21 июня 2005 года исполнилось 85 лет со дня рождения выдающегося отечественного механика и математика, действительного члена Российской Академии Наук Иосифа Израилевича Воровича.

И. И. Ворович родился в 1920 году в г. Стародубе Брянской области. После окончания школы поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета, где обучался до начала Великой Отечественной войны, закончив 4 курса. Далее — учеба в Военно-Воздушной академии им. Н. Е. Жуковского, служба авиатехником и авиаинженером на Волховском и Забайкальском фронтах, участие в составе батальона Военно-Воздушной академии в Параде Победы.

Большая часть жизни И. И. Воровича связана с Ростовским госуниверситетом, в котором он проработал с 1950 г. и до последнего дня своей жизни – 6 сентября 2001 г. За более чем 50 лет им созданы кафедра теории упругости (1961), Институт механики и прикладной математики РГУ (1971), школа ученых-механиков, известная во всем мире.

С момента образования в РГУ кафедры теории упругости он — ее научный лидер и бессменный заведующий. Коллектив ученых и инженеров кафедры к концу 70-х годов обладал значительным научным потенциалом, и в 1971 г. на основе этого коллектива был создан научно-исследовательский институт механики и прикладной математики, директором которого на протяжении 30 лет был Иосиф Израилевич.

С 1970 г. — член-корреспондент АН СССР (Отделение проблем машиностроения, механики и процессов управления), с 1990 г. — действительный член АН СССР по тому же отделению. 1992 г. — действительный член Международной Инженерной академии. 1994 г. — почетный член Международной Академии наук высшей школы, член Международного общества математики в Штуттгарте.

Иосиф Израилевич — автор более 300 опубликованных работ в области механики, машиностроения, прикладной математики, математической экологии и 15 монографий, по которым его ученики и последователи, студенты и аспиранты разных вузов изучают математические вопросы нелинейной теории оболочек,

контактные задачи теории упругости, функциональный анализ и его приложения, особенности распространения волн в слоистых упругих средах, новые постановки задач устойчивости вязкоупругих систем, вопросы разрешимости основных краевых задач электроупругости, особенности исследования обратных задач акустики и теории упругости. Блестящее владение математическим аппаратом и физическое чутье позволило ему исследовать самые сложные проблемы современной механики. И. И. Ворович не только обогатил мировую науку новыми результатами в целом ряде разделов механики деформируемого твердого тела, математической экологии, но и предопределил развитие новых разделов механики — таких, как вычислительная механика, биомеханика, обратные задачи механики.

За научные заслуги И. И. Ворович награжден медалью академика П. Л. Капицы и медалью академика А. А. Благонравова. За разработку математической модели Азовского моря удостоен звания Лауреата государственной премии СССР (1983 г.), а за цикл работ в области теории оболочек — звания Лауреата Государственной премии РФ (1998 г.).

И. И. Ворович оставил огромное творческое наследие: глубокие идеи и методы во всех областях механики и прикладной математики, в которых ему приходилось творить за многие годы научной работы, школу учеников и последователей.

Благодаря инициативе И. И. Воровича с 1995 года в Ростовском госуниверситете проходят ставшие традиционными международные конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". Благодаря этим конференциям, которые начали проходить в первые годы после распада СССР, сохранились и вышли на новый уровень контакты с учеными Украины, Армении, Белоруссии, талантливая молодежь получила возможность представить свои результаты на суд научной общественности.

Имя Иосифа Израилевича и научные традиции, заложенные им в Ростовском университете, продолжает жить. Его имя присвоено Институту механики и прикладной математики — главному детищу, которому он отдал большую часть своих творческих сил. В 2004 г. благодаря усилиям его супруги и поддержке учеников вышла в свет книга "Воспоминания об академике И. И. Воровиче", в которой своим восприятием этого замечательного человека и ученого делятся как маститые члены Академии наук, знавшие его еще в довоенные годы, так и относительно молодые его ученики и последователи. Одна из задумок Иосифа Израилевича, — всеобъемлющий труд по механике, — к сожалению, осталась невыполненной, однако силами его учеников и сотрудников кафедры теории упругости РГУ была подготовлена и издана в 2005 г. первая часть монографии "Лекции по механике Ньютона".

Продолжает жить и научная школа академика Воровича, свидетельством чего являются гранты и победы в конкурсах, работы молодых исследователей.

Все ученики с благодарностью вспоминают этого обаятельного, доброжелательного и деликатного, простого в общении и мудрого человека, талантливого ученого, вся жизнь которого является образцом для подражания в деле служения науке и Родине.

Белоконь А. В., Ватульян А. О.

Содержание

Аверков А.Н., Жуков М.Ю., Сахарова Л.В. Расчет стационарного pH -градиента в растворе аминокислот при больших плотностях тока.	8
Азаров А.Д. Моделирование больших деформаций полимеров	13
Александров В.М., Горячева И.Г. Движение нагрузки по вязкоупругому полупространству	17
Бабешко В.А., Бабешко О.М. О представлении решений в задачах с плоско-параллельными неоднородностями	22
Баранов И.В., Садчиков Е.В., Соловьев А.Н. Генетические алгоритмы в обратных задачах идентификации	30
Беликов Н.В., Занимонец Ю.М., Юдин А.С. Некоторые вопросы создания объектно-независимого программно-методического комплекса обработки экспериментальных данных	36
Бобров С.В., Наседкин А.В., Рыбьянец А.Н. Некоторые конечно-элементные модели для пористых пьезокомпозитов 3-0 и 3-3 связности	41
Боев Н.В. Двукратное отражение высокочастотных волн от поверхностей системы двух полостей, находящихся в бесконечной упругой среде	47
Буйло С.И. Зависимость амплитуды акустического излучения скопления дислокаций и микротрещин от частоты и скорости нагружения твердых тел	51
Ватульян А.О. Новое интегральное уравнение в коэффициентных обратных задачах теории упругости	55
Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В. Собственные формы локализации волнового процесса в упругом слое с горизонтальной трещиной	58
Гольдштейн Р.В., Попов А.Л. Исследование гравитационного изгиба локально-опертой круглой пластины	63
Драгилев В.М. К восстановлению стационарной контактной нагрузки, действующей на упругое тело, по смещениям на участке свободной поверхности	67
Еремеев В.А. О потере устойчивости упругой сферы при раздувании	72
Жуков М. Ю. Феноменологическая модель для описания поведения самоплавающих микроорганизмов.	77
Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Параметрическое возбуждение волн на границе раздела двухслойной системы	82
Зубов Л.М. Равновесие гибкой пластинки с дислокациями и дисклинациями	87
Казаков К.Е. Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого основания с тонким неоднородным покрытием	93
Калашников В.В., Карякин М.И. Об использовании полубратного метода для определения интегральных деформационных характеристик	98
Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в заполненных жидкостью двухслойных вязкоупругих трубках	103
Ковалев Ю.Д., Стативка Е.Н. Смешанная кососимметричная задача электроупругости для неоднородного слоя	108

Комар Л.А., Свистков А.Л., Морозов И.А. Моделирование структуры резин и ее возможного влияния на формирование механических свойств материала	113
Краснов А.Ю. Большие деформации нелинейно-упругого шара, нагруженного внутренним давлением	118
Курбатова Н.В., Романова Н.М. Конечно-элементное решение задачи изгиба для естественно закрученного стержня	123
Куреннов С.С. Расчет динамических напряжений в клеевом нахлесточном соединении	127
Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении растущих тел	131
Марценюк М.А., Кислухин Н.М., Бекурин Д.Б., Ощепков А.Ю. Моделирование синергий плавательных движений	137
Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Товстик П.Е. Континуальные и дискретные модели формирования наногфрированных структур	142
Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н. Деформирование анизотропного массива горных пород с выработками при учете ползучести	147
Овчинникова С.Н. Пересечения нейтральных кривых в задаче Куэтта – Тейлора при вращении цилиндров в одну сторону	152
Паршин Д.А. Нарастивание гравитирующего упругого шара	157
Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Новый метод построения определителей матриц-символов Грина динамических смешанных задач для сред с неоднородностями различной природы	162
Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Группы симметрий и система одномерных оптимальных подалгебр трехмерных уравнений теории пластичности	166
Саркисян С.О., Варданян С.А. Термоупругость микрополярных тонких пластин	171
Сафроненко В.Г., Трифонов В.В., Шутько В.М. Несимметричные вынужденные колебания составной композитной оболочки вращения	176
Скалюх А.С. Расчет двумерного поля предварительной поляризации керамики с использованием одномерной модели диэлектрического отклика	181
Снопов А.И. Диабатическая модель расширения газового облака под воздействием радиационного притока тепла	186
Сумбатьян М.А., Мацуга В.В. К расчету звукового поля однородного турбулентного потока	189
Устинов Ю.А. Некоторые задачи теории упругости для тел с винтовой анизотропией	194
Фильштинский Л.А., Кобзарь В.Н. Граничная задача связанной термоупругости для двумерных областей	198
Хапилова Н.С., Залетов В.В., Алтухова М.Л. Численно-аналитический метод исследования процесса образования трещины гидроразрыва	202
Чебаков М.И. Плоские контактные задачи для двухслойного основания	207
Шалдырван В.А., Васильев Т.А. Некоторые численные аспекты реализации методом Лурье-Воровича задачи о деформировании короткого кольцевого цилиндра	212

Шейдаков Д.Н. Неустойчивость растянутого полого цилиндра при кручении и внутреннем давлении	217
Шишкина О.В., Келлер И.Э., Трусов П.В. Об устойчивости сверхпластического течения к малым возмущениям границы	222
Шкутин Л.И. Анализ плоских межфазных деформаций стержней и пластин	227
Юдин А.С., Гончар Г.В., Щитов Д.В. Анализ резервов прочности составной оболочки	232
Юдович В.И. Двусторонние вариационные оценки интеграла Дирихле в случае смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана	237

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО рН-ГРАДИЕНТА В РАСТВОРЕ АМИНОКИСЛОТ ПРИ БОЛЬШИХ ПЛОТНОСТЯХ ТОКА

Аверков А. Н., Жуков М. Ю., Сахарова Л. В.

Ростовский госуниверситет

Численными и асимптотическими методами исследована задача о создании стационарного рН градиента в водном растворе аминокислот. Показано, что при больших плотностях тока профили концентраций и величины рН отличаются от классических и становятся кусочно-постоянными.

Аналитическими и численными методами исследована одна из задач теории электрофореза — метода разделения электрическим полем многокомпонентных смесей на отдельные компоненты. Рассмотрена проблема создания стационарного рН-градиента в многокомпонентном растворе аминокислот при проведении процесса изоэлектрофокусирования [1–3]. Основная трудность при построении решения состоит в наличии в нелинейных дифференциальных уравнениях малого параметра при старших производных. Этот параметр, пропорциональный характерному значению коэффициента диффузии и обратно пропорциональный плотности электрического тока, обычно имеет порядок $10^{-4} - 10^{-8}$.

Ранее считалось [1–3], что с увеличением плотности тока стационарный градиент рН становится близким к линейному, а профили концентраций аминокислот близки к гауссову распределению в окрестности изоэлектрических точек. Полученные ниже результаты показали, что в действительности, при сверхбольших плотностях тока, профили концентраций и рН становятся кусочно-постоянными. На практике это означает существенное снижение разрешающей способности метода разделения смеси на отдельные компоненты.

1. Постановка задачи. Система уравнений в безразмерных переменных, описывающая стационарное распределение рН в растворе, в случае одномерной электрофоретической камеры ($0 \leq x \leq 1$) для n -компонентного раствора аминокислот имеет вид [1, 3]:

$$i_k \equiv -\varepsilon \gamma_k a_k' + \gamma_k \theta_k(\psi) a_k E = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$j = \sum_{k=1}^n \gamma_k (-\varepsilon (\theta_k(\psi) a_k)' + \sigma_k(\psi) a_k E) + 2K_w \gamma_0 (E - \varepsilon \psi') \operatorname{ch}(\psi - \psi_0), \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n \theta_k(\psi) a_k + 2K_w \operatorname{sh} \psi = 0, \quad (3)$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{\gamma_H \gamma_{OH}}, \quad \psi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma_{OH}}{\gamma_H}, \quad H = K e^\psi, \quad \text{pH} = -\lg H, \quad (4)$$

$$\varphi_k(\psi) = \delta_k + \operatorname{ch}(\psi - \psi_k), \quad \theta_k(\psi) = \frac{1}{\varphi_k(\psi)} \frac{d\varphi_k(\psi)}{d\psi}, \quad \sigma_k(\psi) = \frac{1}{\varphi_k(\psi)} \frac{d^2\varphi_k(\psi)}{d\psi^2}. \quad (5)$$

Здесь $a_k(x)$ — молярная концентрация аминокислоты, $\psi(x)$ — функции кислотности, связанная с рН раствора, $E(x)$ — напряженность электрического поля, $i_k(x)$ — плотности молярных потоков, j — плотность электрического тока, ε — параметр, характеризующий диффузию, γ_k — подвижность ионов аминокислоты ($\varepsilon\gamma_k$ — коэффициент диффузии), $\theta_k(\psi)$, $\sigma_k(\psi)$ — молярный заряд и молярная проводимость аминокислоты, γ_H , γ_{OH} — подвижности ионов водорода H^+ и гидроксила OH^- , γ_0 — эффективная подвижность ионов воды, δ_k — отношение констант диссоциации аминокислоты, ψ_k — изоэлектрическая точка (значение ψ , при котором молярный заряд k -ой аминокислоты и ее электрофоретическая подвижность $\gamma_k\theta_k(\psi)$ обращаются в нуль), K_w — константа диссоциации воды.

Уравнения переноса $i'_k(x) = 0$ (см. (1)) проинтегрированы с учетом краевых условий $i_k(0) = 0$, $i_k(1) = 0$, соответствующих непроницаемости торцов электрофоретической камеры. Уравнения (2), (3) — закон Ома с учетом диффузионных членов и уравнение электронейтральности раствора. Соотношения (5), задающие молярные заряды и проводимость компонент раствора, определяются химическими реакциями и приведены для случая аминокислот вида $NH_3^+R_kCOO^-$, где R_k — аминокислотный остаток (см. [1]).

Общее количество вещества M_k для каждой аминокислоты считаем заданным:

$$\int_0^1 a_k(x)dx = M_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Основная цель работы — численное и асимптотическое определение концентраций аминокислот $a_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, напряженности электрического поля $E(x)$ и функции кислотности $\psi(x)$ (или рН(x) см. (4)) в случае больших величин плотности тока j (или малых величин параметра диффузии ε) при заданных значениях параметров смеси (γ_k , δ_k , ψ_k , M_k , γ_H , γ_{OH} , K_w).

Сделаем следующее важное замечание. Несмотря на то, что уравнения (1)–(3) содержат производную $\psi'(x)$, дополнительных условий для определения функции $\psi(x)$ не требуется. Роль такого условия играет уравнение электронейтральности.

2. Преобразование системы. Для системы (1)–(3) найдена замена переменных, позволяющая получить аналитические выражения для функций $\psi(x)$, $E(x)$.

Введем новую «концентрацию» $c_k(x)$ и «эффективную» напряженность электрического поля $E_0(x)$:

$$a_k(x) = c_k(x)\varphi_k(\psi(x)), \quad E_0(x) = E(x) - \varepsilon\psi'(x). \quad (7)$$

Нетрудно показать, что $\psi(x)$ и $E(x)$ определяются явными формулами, если известны величины $c_k(x)$:

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{2K_w + \sum_{k=1}^n c_k(x)e^{\psi_k}}{2K_w + \sum_{k=1}^n c_k(x)e^{-\psi_k}}, \quad E(x) = E_0(x) + \varepsilon\psi'(x), \quad E_0(x) = \frac{j}{\sigma(x)},$$

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k c_k(x) \left\{ \varphi_k(\psi) \frac{d}{d\psi} \frac{1}{\varphi_k(\psi)} \frac{d}{d\psi} \varphi_k(\psi) \right\}_{\psi=\psi(x)} + 2K_w\gamma_0 \text{ch}(\psi(x) - \psi_0). \quad (8)$$

Для определения $c_k(x)$ с учетом условий (6) и замен (7) имеем систему $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dx} \ln c_k(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d}{d\psi} \ln \varphi_k(\psi) \Big|_{\psi=\psi(x)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \left(\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{j} \right), \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} m_k(x) = c_k \varphi_k(\psi(x)), \quad k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

с краевыми условиями:

$$m_k(0) = 0, \quad m_k(1) = M_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

3. Главный член асимптотики при $K_w \rightarrow 0$. Нелинейную краевую задачу (9)–(11) можно решать численно стандартным методом пристрелки, сводя (9)–(11) к решению задачи Коши с неизвестными начальными данными $c_k(0)$. В конечном итоге, для определения $c_k(0)$ требуется решать n нелинейных трансцендентных уравнений, например, методом Ньютона, нуждающегося, как известно, в хороших начальных приближениях. Для малых значений параметров ε_0 и K_w начальные приближения возможно получить, используя асимптотические соотношения.

Анализ уравнений (9) показывает, что при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ правые части уравнений пропорциональны $d\varphi_k(\psi)/d\psi = \text{sh}(\psi - \psi_k)$ (см. (5)). Это, в свою очередь, означает, что $\psi(x) \rightarrow \psi_k$, $k = 1, \dots, n$. Очевидно, что такое возможно лишь когда функции $c_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, $\psi(x)$ и $E(x)$ являются почти кусочно-постоянными.

Пусть имеются непересекающиеся отрезки (x_{k-1}, x_k) . Предположим, что

$$c_k(x) \equiv c_k^0, \quad x \in (x_{k-1}, x_k); \quad c_k(x) \equiv 0, \quad x \notin (x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (12)$$

где c_k^0 — некоторые константы.

Из (8) при $K_w \rightarrow 0$, в частности, следует:

$$\psi(x) \equiv \psi_k, \quad x \in (x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (13)$$

Введем функции:

$$\Phi_k(x) \equiv \frac{1}{\sigma(x)} \frac{1}{\varphi_k(\psi(x))} \frac{d\varphi_k(\psi(x))}{d\psi}, \quad F_k(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x \Phi_k(s) ds, \quad k = 1, \dots, n. \quad (14)$$

На интервалах (x_{i-1}, x_i) имеем:

$$\Phi_k(x) \equiv \frac{\theta_k(\psi_i)}{\gamma_i c_i^0} = \Phi_k^{(i)}, \quad \varepsilon_0 F_k(x) = \sum_{s=1}^{i-1} \Phi_k^{(s)}(x_s - x_{s-1}) + \Phi_k^{(j)}(x - x_{i-1}). \quad (15)$$

Интегрируя (9), с учетом обозначений (14), выводим:

$$c_k(x) = c_k(0) e^{F_k(x)}. \quad (16)$$

Принимая во внимание, что $c_k(x) = c_k^0$ для $x \in (x_{k-1}, x_k)$ (см. (12)) и, используя (13), (15), получим:

$$c_k(0) = c_k^0 e \left(-\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{s=1}^{k-1} \Phi_k^{(s)}(x_s - x_{s-1}) \right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Значения c_k^0 легко определяются из краевого условия $m_k(1) = M_k$ (см. (11) или (6)) с учетом (12), (13):

$$c_k^0 = \frac{m_k}{(\delta_k + 1)(x_k - x_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Соотношения (17), (18), (15) и дают требуемое начальное приближение для $c_k(0)$, если известны длины интервалов (x_k, x_{k-1}) , $k = 1, \dots, n$.

4. Результаты расчетов. Недостатком формул (17), (18) для главного члена асимптотики является тот факт, что длины отрезков (x_k, x_{k-1}) , $k = 1, \dots, n$ неизвестны — для их определения следует строить следующие члены асимптотического разложения. Более точно, необходимо построение внутренних погранслойных решений в «зазорах» между отрезками (x_k, x_{k-1}) . Однако, вычислительный эксперимент показал, что достаточно эффективно, по крайней мере, для $n > 5$ выбирать в формулах (17), (18) длины отрезков одинаковыми: $(x_k - x_{k-1}) = 1/n$. Установлено, что асимптотические формулы и результаты расчетов хорошо согласуются, начиная с $\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-4}$, $K_w \approx 10^{-4}$.

В частности, результаты расчетов методом пристрелки при $n = 8$ для параметров $\delta_k = 99$, $\psi_k = 3.85 - 0.6k$, $M_k = 160$, $\varepsilon_0 = 5.25 \cdot 10^{-6}$, $\gamma_k = 0.15$, $\psi_0 = -0.274$, $\gamma_0 = 7.077$, $K_w = 10^{-5}$ приведены в табл. 1. Для удобства в таблице приведены $z_k = -\varepsilon_0 \ln c_k(0)$. Величины $z_k^*(0)$ соответствуют асимптотическим значениям. Отметим, что соотношения (17), (18) плохо применимы для $c_1(0)$ и для получения его асимптотического значения требуются дополнительные построения — процедура аналогичная п. 3, но для $c_k(1)$.

k	2	3	4	5	6	7	8
z_k	0,00042	0,00138	0,00325	0,00662	0,01256	0,02264	0,03894
z_k^*	0,00039	0,00137	0,00324	0,00664	0,01262	0,02276	0,03914

Таблица 1. Сравнение численного и асимптотического решения

На рис. 1 показано распределение концентраций $c_k(x)$ и величины $\psi(x)$ для случая $n = 8$ при различных значениях параметра $\varepsilon_0 = 5.25 \cdot 10^{-5}$ (слева) и $\varepsilon_0 = 5.25 \cdot 10^{-6}$ (справа). Хорошо видно, что $c_k(x)$ располагаются последовательно вдоль оси x и «сосредоточены» на интервале (x_{k-1}, x_k) . Максимумы концентраций соответствуют изоэлектрическим точкам ψ_k . В классическом случае, когда ε_0 не очень мало, функция $\psi(x)$ монотонно убывает и профили концентрации близки к гауссовым распределениям (левый рисунок). С уменьшением ε_0 (или увеличением плотности тока) профили концентраций $c_k(x)$ на (x_{k-1}, x_k) становятся почти постоянными, $\psi(x)$ «выравнивается», т.е. $\psi(x) \approx \psi_k$, и между интервалами (x_{k-1}, x_k) возникают скачки. Кроме этого, при уменьшении ε_0 «зазоры» между интервалами (x_{k-1}, x_k) уменьшаются (правый рисунок).

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (04-01-96814-р2004юг-а) и (03-01-00802-а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.1768.2003.1).

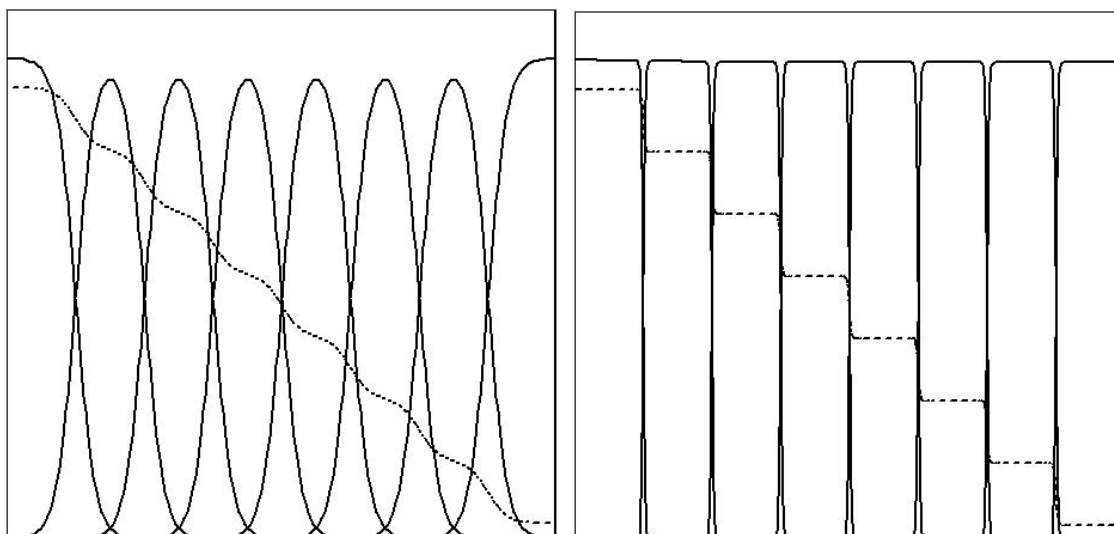


Рис. 1. Профили концентраций $c_k(x)$, $k = 1, \dots, 8$ и $\psi(x)$ (пунктир)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И. Математическая теория электрофореза. Киев: Наукова думка, 1983, 204 с.
- [2] Righetti P. G. Isoelectric focusing: Theory, Methodology and Application. Elsevier Biomedical Press, New York–Oxford: Elsevier, 1983. 386 p.
- [3] Mosher R. A., Saville D. A., Thorman W. The Dynamics of Electrophoresis. VCH Publishers, New York, 1992. 236 p.

Averkov A. N., Zhukov M. Yu., Sakharova L. V. *Calculation of the stationary pH-gradient in an amino acids mixture at extra-large electric current.* To study the problem of stationary pH-gradient formation in an amino acids mixture numerical and asymptotic methods is used. It is shown, that the profiles of concentrations and pH differ from classic and become piecewise constant function at the extra-large electric current.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛИМЕРОВ

Азаров А. Д.

НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И., РГУ

tenzor@ms.math.rsu.ru

В работе представлены соотношения связи напряжений и деформаций при условии больших деформаций полимерных материалов, полученные с помощью двумерной механической модели.

В настоящей работе продолжено развитие двумерной механической модели, описывающей однородное деформирование [1]. Исходные положения развиваемого подхода формулируются следующим образом.

Используется нетрадиционный способ соединения элементов, обеспечивающий нелинейное вязко-упругое поведение (см. рис. 1) в первую очередь за счет геометрического фактора деформирования.

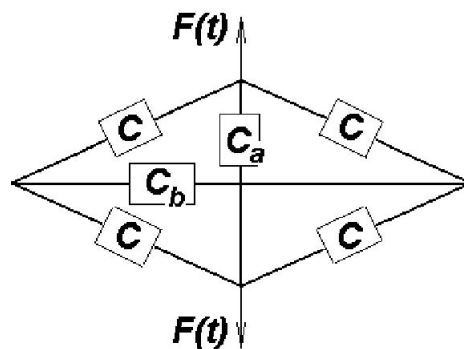


Рис. 1. Двумерная конструкция модели

Здесь C, C_a, C_b — обобщенные механические модели Максвелла, трехэлементные модели типа стандартного вязкоупругого тела [2]. В математическом представлении это дифференциальные операторы: C_a, C_b определяют свойства в продольном и поперечном направлениях, а C обеспечивает взаимосвязь между свойствами в указанных направлениях («свойство Пуассона»). Соответствующие математические зависимости представлены ниже.

Основной алгоритм модели имеет следующий вид.

Даны геометрические характеристики модели: a_0, b_0 — начальные продольный и поперечный размеры (половинные значения),

Входной процесс $a(t)$ в нижеследующем примере задан в виде кусочно-линейной функции: нагрузка, фиксация удлинения (для демонстрации релаксации), разгрузка, "отдых" (возврат, последствие).

Текущие размеры:

$A(t) = a_0 + a(t)$ — продольный,

$B(t) = b_0 - b(t)$ — поперечный,

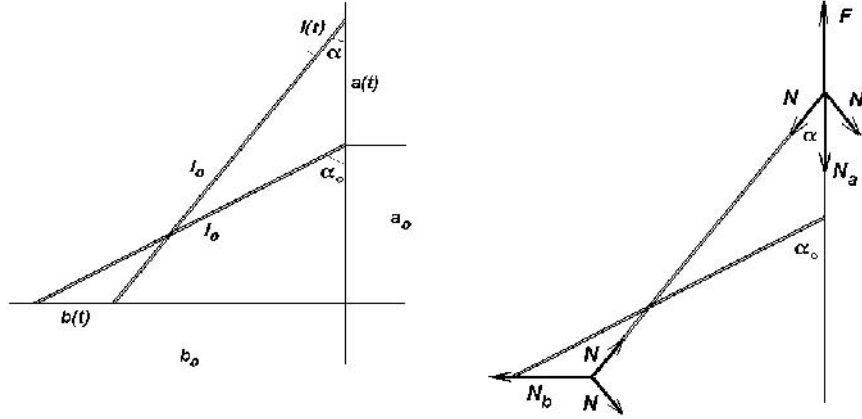


Рис. 2. Геометрия деформирования и силовые факторы

$L(t) = l_0 + l(t)$ — диагональный,
вычисляются после решения системы уравнений.

Связь между силовыми и геометрическими характеристиками (напряжениями и деформациями) компонентов модели определяется дифференциальными соотношениями:

продольные свойства

$$N_a(t) = n_1 a(t) - n_2 \eta_a(t) \quad \eta_a'(t) = n_3 (a(t) - \eta_a(t))$$

поперечные свойства

$$N_b(t) = p_1 b(t) - p_2 \eta_b(t) \quad \eta_b'(t) = p_3 (b(t) - \eta_b(t))$$

свойства по диагональным направлениям

$$N(t) = r_1 l(t) - r_2 \eta_l(t) \quad \eta_l'(t) = r_3 (l(t) - \eta_l(t))$$

Механические свойства по каждому направлению характеризуются тремя параметрами, среди них: характеристики жесткости пружин $n_1, n_2, p_1, p_2, r_1, r_2$ параметры с индексом 1 соответствуют мгновенно-упругому модулю материала (жесткости пружин), а с индексом 2 определяют величину падения модуля в ходе релаксации. Временные реологические характеристики отвечают за скорость релаксации — это частотные характеристики n_3, p_3, r_3 или времена релаксации $n_3^{-1}, p_3^{-1}, r_3^{-1}$ моделей Максвелла.

Силовые характеристики модели, определяются из условий равновесия в узлах конструкции модели (см. рис. 2):

$$F(t) = 2N(t)\cos(\alpha(t)) + N_a(t) \quad N_b(t) = 2N(t)\sin(\alpha(t))$$

где $\alpha(t) = \arctg[(b_0 - b(t))/(a_0 + a(t))]$ — текущее значение угла.

Из второго условия следуют соотношения для вычисления поперечной деформации $b(t)$, имеющие вид системы, включающей наряду с нелинейным уравнением и два линейных дифференциальных уравнения

$$p_1 b(t) - p_2 \eta_b(t) = 2(r_1 l(t) - r_2 \eta_l(t))\sin(\alpha(t))$$

$$\sin(\alpha(t)) = (b_0 - b(t))/(a_0 + a(t))$$

$$\eta_b'(t) = p_3 (b(t) - \eta_b(t))$$

$$\eta_l'(t) = r_3 (l(t) - \eta_l(t))$$

где $l(t) = [(a_0 + a(t))^2 + (b_0 - b(t))^2]^{\frac{1}{2}} - l_0$ — удлинение пружины C .

После преобразования приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений, из которых численным интегрированием определяется зависимость поперечного удлинения $b(t)$ от продольного $a(t)$,

$$b'(t) = [p_1 + 2r_1(\sin(\alpha(t)))^2 + 2(l_0 + l(t))^{-1}(r_1l(t) - r_2\eta_l(t))\cos(\alpha(t))]^{-1} - [p_2p_3(b(t) - \eta_b(t)) + r_1\sin(2\alpha(t))a'(t) - 2r_2r_3\sin(\alpha(t)) - 2r_2r_3(l(t) - \eta_l(t)) - (l_0 + l(t))^{-1}\sin(2\alpha(t))(r_1l(t) - r_2\eta_l(t))a'(t)]$$

$$l(t) = [(a_0 + a(t))^2 + (b_0 - b(t))^2]^{\frac{1}{2}} - l_0$$

$$\sin(\alpha(t)) = (b_0 - b(t))/(a_0 + a(t))$$

$$\eta'_b(t) = p_3(b(t) - \eta_b(t))$$

$$\eta'_l(t) = r_3(l(t) - \eta_l(t))$$

Расчет усилия (напряжения) $F(t)$, необходимого для обеспечения соответствующего удлинения (деформации) $a(t)$, осуществляется вместе с решением второго дифференциального уравнения

$$F(t) = r_1l(t) - r_2\eta_l(t)\cos(\alpha(t)) + (n_1a(t) - n_2\eta_a(t))$$

$$\cos(\alpha(t)) = (a_0 + a(t))/(l_0 + l(t))$$

$$\eta'_a(t) = n_3(a(t) - \eta_a(t))$$

На рис. 3 приведены результаты численных расчетов для материала с существенной реологией. На графике "напряжения-деформации" представлены два варианта: в варианте 1 диагональная пружина сильнее, а в варианте 2 слабее продольной и поперечной. На рис. 3 представлены также временные зависимости изменения усилия $F(t)$ при нагружении и разгрузке с постоянной скоростью деформации, а также с промежуточным и конечным процессами релаксации.

Интересным и не очевидным свойством двумерной модели является слабое вязко-упругое деформирование объема $V(t)$.

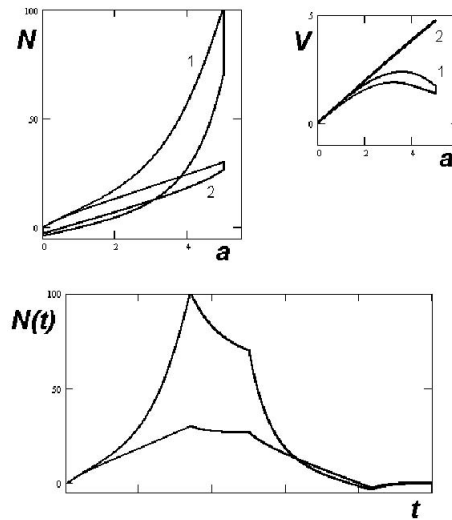


Рис. 3. Результаты численного расчета

Модель представляет свойства материала в условиях одноосного растяжения.

При этом рассматриваются деформации не только в продольном, но и в поперечном направлении. Возможно растяжение по любому из этих направлений.

Продольное удлинение (деформация) с точки зрения конструкции модели является естественным входным процессом. Его задание определяет перемещения остальных элементов модели. При необходимости назначения усилия (напряжения) входным процессом, выполняется численная процедура обращения зависимости “вход- выход”.

В данной модели пока не использован традиционный способ управления нелинейным поведением: зависимости вязкости от напряженно-деформированного состояния. Применение такого механизма и спектра времен релаксации увеличит возможности моделирования разных типов полимерных материалов. Второй способ модификации модели связан с использованием нелинейных пружин.

Предлагаемая модель показала возможность описания характерных для полимеров высокоэластических деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Азаров. А.Д. Двумерная механическая модель для описания больших деформаций полимеров. // III Всероссийская конференция по теории упругости с международным участием (г.Ростов-на-Дону-Азов, 13-16 октября 2003). Труды. Изд. “Новая книга“. 2004. С. 5–10.
- [2] Аскадский А.А., Матвеев Ю.И. Химическое строение и физические свойства полимеров. М.: Химия, 1983. 248 с.

Azarov A.D. *Modelling of the large deformation of polymer.*

Relations between stress and strains for the description of the large reological deformation of polymer by means of the two-dimensional mechanical model (on base of springs and plungers) are represented in this work.

ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Александров В. М., Горячева И. Г.

Институт проблем механики РАН, Москва

Изучается задача о движении с постоянной скоростью распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству, описываемому моделью стандартного вязкоупругого тела [1,2]. Рассмотрение задачи ведется в подвижной системе координат, связанной с нагрузкой. Определяется зависимость нормального перемещения поверхности полупространства от движущейся по этой поверхности нагрузки.

Пусть определяющие соотношения для материала вязкоупругого изотропного полупространства ($|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $z < 0$) имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x + \beta \dot{\sigma}_x &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)(\varepsilon_x + \alpha \dot{\varepsilon}_x) + \nu(\varepsilon_y + \alpha \dot{\varepsilon}_y) + \nu(\varepsilon_z + \alpha \dot{\varepsilon}_z)], \\ \sigma_y + \beta \dot{\sigma}_y &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)(\varepsilon_y + \alpha \dot{\varepsilon}_y) + \nu(\varepsilon_x + \alpha \dot{\varepsilon}_x) + \nu(\varepsilon_z + \alpha \dot{\varepsilon}_z)], \\ \sigma_z + \beta \dot{\sigma}_z &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)(\varepsilon_z + \alpha \dot{\varepsilon}_z) + \nu(\varepsilon_x + \alpha \dot{\varepsilon}_x) + \nu(\varepsilon_y + \alpha \dot{\varepsilon}_y)], \\ \tau_{xy} + \beta \dot{\tau}_{xy} &= G(\gamma_{xy} + \alpha \dot{\gamma}_{xy}), \quad \tau_{xz} + \beta \dot{\tau}_{xz} = G(\gamma_{xz} + \alpha \dot{\gamma}_{xz}), \\ \tau_{yz} + \beta \dot{\tau}_{yz} &= G(\gamma_{yz} + \alpha \dot{\gamma}_{yz}),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ — компоненты тензора деформаций, G и ν — длительные модуль сдвига и коэффициент Пуассона, α и β — параметры, характеризующие вязкие свойства среды ($\alpha > \beta$), точка сверху означает производную по времени.

Пусть также по границе вязкоупругого полупространства $z = 0$ с постоянной скоростью V в отрицательном направлении оси x не изменяя своей величины движутся нормальная нагрузка q , касательная продольная нагрузка τ_1 и касательная поперечная нагрузка τ_2 . Будем предполагать, что все эти нагрузки распределены по области $(x, y) \in \Omega$ и обращаются в нуль на контуре L области Ω . Очевидно величины q, τ_1 и τ_2 , а также все напряжения, деформации и перемещения в полупространстве, можно представить в форме

$$f(x + Vt, y, z).\tag{2}$$

Допустим, что V много меньше скорости звука в вязкоупругом теле, что позволяет пренебречь инерционными членами в известных уравнениях равновесия относительно компонент тензора напряжений. Очевидно также, что имеют место формулы Коши, связывающие компоненты тензора деформаций с перемещениями.

Введем подвижную систему координат

$$x' = x + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (3)$$

тогда в силу (2) имеет место соотношение

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x'} V \quad (4)$$

(штрихи далее будем опускать).

Обозначим

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i + \alpha \dot{u}_i = u_i + \alpha V \frac{\partial u_i}{\partial x}, & \varepsilon_{ij}^* &= \varepsilon_{ij} + \alpha \dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \alpha V \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x}, \\ \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij} + \beta \dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \beta V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

тогда определяющие соотношения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_x^* + \nu(\varepsilon_y^* + \varepsilon_z^*)], & \sigma_y^* &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_y^* + \nu(\varepsilon_x^* + \varepsilon_z^*)], \\ \sigma_z^* &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_z^* + \nu(\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*)], \\ \tau_{xy}^* &= G\gamma_{xy}^*, & \tau_{xz}^* &= G\gamma_{xz}^*, & \tau_{yz}^* &= G\gamma_{yz}^*, \end{aligned} \quad (6)$$

причем очевидно, что величины σ_{ij}^* удовлетворяют указанным выше уравнениям равновесия для напряжений, а величины ε_{ij}^* и u_i^* связаны отмеченными выше формулами Коши. Подставляя выражения ε_{ij}^* , представленные через u_i^* , в соотношения (6), а затем последние в уравнения равновесия для напряжений (со звездочками), получим относительно u_i^* уравнения Ламе

$$\begin{aligned} (1-2\nu)\Delta u^* + \frac{\partial \theta^*}{\partial x} &= 0, & (1-2\nu)\Delta v^* + \frac{\partial \theta^*}{\partial y} &= 0, \\ (1-2\nu)\Delta w^* + \frac{\partial \theta^*}{\partial z} &= 0, & \theta^* &= \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* + \varepsilon_z^*, \end{aligned} \quad (7)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Запишем теперь граничные условия задачи в подвижной системе координат: при $z = 0$

$$\sigma_z = -q(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_1(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_2(x, y), \quad (8)$$

где функции $q(x, y)$, $\tau_1(x, y)$ и $\tau_2(x, y)$ равны нулю вне области Ω , а также на ее контуре L . На бесконечности в полупространстве перемещения u_i исчезают. Для введенных выше величин со звездочками граничные условия (8) переписутся в виде: при $z = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_z^* &= -q^*(x, y), & \tau_{xz}^* &= \tau_1^*(x, y), & \tau_{yz}^* &= \tau_2^*(x, y), \\ q^*(x, y) &= q(x, y) + \beta V \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}, & \tau_k^*(x, y) &= \tau_k(x, y) + \beta V \frac{\partial \tau_k(x, y)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $k = 1, 2$, а функции $q^*(x, y)$, $\tau_1^*(x, y)$ и $\tau_2^*(x, y)$ равны нулю вне области Ω . На бесконечности в полупространстве величины u_i^* исчезают.

Решение уравнений (7) в полупространстве $z \leq 0$ при граничных условиях (9) по существу приведено в [3] (гл. 2, § 8). В частности, на основании формулы (8.33) указанного параграфа монографии [3] при $z = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 w^*(x, y, 0) &= w_0^*(x, y) + w_1^*(x, y) + w_2^*(x, y), \\
 w_0^* &= -\frac{1-\nu}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \frac{q^*(\xi, \eta)}{R} d\Omega, \quad R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}, \\
 w_1^* &= \frac{1-2\nu}{4\pi G} \int_{\Omega} \int \tau_1^*(\xi, \eta) \frac{\xi-x}{R^2} d\Omega, \\
 w_2^* &= \frac{1-2\nu}{4\pi G} \int_{\Omega} \int \tau_2^*(\xi, \eta) \frac{\eta-y}{R^2} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что функции w_k^* ($k = 0, 1, 2$) в силу первого соотношения (5) и первой формулы (10) можно также представить в форме

$$w_k^* = w_k + \alpha V \frac{\partial w_k}{\partial x}. \tag{11}$$

Подставляя в соотношения (10) выражения (9) и (11), получим

$$\begin{aligned}
 w_k + \alpha V \frac{\partial w_k}{\partial x} &= f_k(x, y) \quad (k = 0, 1, 2), \\
 f_0(x, y) &= -\frac{1-\nu}{2\pi G} \left[g_0(x, y) + \beta V \frac{\partial g_0(x, y)}{\partial x} \right], \\
 f_k(x, y) &= \frac{1-2\nu}{4\pi G} \left[g_k(x, y) + \beta V \frac{\partial g_k(x, y)}{\partial x} \right] \quad (k = 1, 2), \\
 g_0(x, y) &= \int_{\Omega} \int \frac{q(\xi, \eta)}{R} d\Omega, \quad g_1(x, y) = \int_{\Omega} \int \tau_1(\xi, \eta) \frac{\xi-x}{R^2} d\Omega, \\
 g_2(x, y) &= \int_{\Omega} \int \tau_2(\xi, \eta) \frac{\eta-y}{R^2} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{12}$$

При выводе формул для $f_k(x, y)$ ($k = 0, 1, 2$) были приняты во внимание соотношения

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \int \frac{q'_{\xi}(\xi, \eta)}{R} d\Omega &= - \int_{\Omega} \int q(\xi, \eta) \left(\frac{1}{R} \right)'_{\xi} d\Omega = \frac{\partial g_0(x, y)}{\partial x}, \\
 \int_{\Omega} \int \tau'_{1\xi}(\xi, \eta) \frac{\xi-x}{R^2} d\Omega &= - \int_{\Omega} \int \tau_1(\xi, \eta) \left(\frac{\xi-x}{R^2} \right)'_{\xi} d\Omega = \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x},
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\int_{\Omega} \int \tau'_{2\xi}(\xi, \eta) \frac{\eta - y}{R^2} d\Omega = - \int_{\Omega} \int \tau_2(\xi, \eta) \left(\frac{\eta - y}{R^2} \right)'_{\xi} d\Omega = \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x},$$

которые получаются с учетом того, что функции $q(x, y)$, $\tau_1(x, y)$ и $\tau_2(x, y)$ обращаются в нуль на контуре L области Ω , а переменные ξ и x входят в выражения

$$\frac{1}{R}, \quad \frac{\xi - x}{R^2}, \quad \frac{\eta - y}{R^2} \quad (14)$$

в виде разности.

Очевидно, что $w(-\infty, y, 0) = 0$, и тогда также $w_k(-\infty, y) = 0$ ($k = 0, 1, 2$). Интегрируя дифференциальное уравнение (12) для w_k при этом начальном условии, найдем

$$w_k = \frac{1}{\alpha V} \int_{-\infty}^x e \left(\frac{x_1 - x}{\alpha V} \right) f_k(x_1, y) dx_1. \quad (15)$$

Подставляя сюда выражения $f_k(x, y)$ в форме (12), интегрируя по частям, где это возможно, и изменяя затем порядок интегрирования, окончательно получим такие соотношения

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{1 - \nu}{2\pi G} \left[\frac{\beta V}{\alpha V} g_0(x, y) + \frac{1}{\alpha V} \left(1 - \frac{\beta V}{\alpha V} \right) h_0(x, y) \right], \\ w_k &= \frac{1 - 2\nu}{4\pi G} \left[\frac{\beta V}{\alpha V} g_k(x, y) + \frac{1}{\alpha V} \left(1 - \frac{\beta V}{\alpha V} \right) h_k(x, y) \right] \quad (k = 1, 2), \\ h_0(x, y) &= \int_{\Omega} \int q(\xi, \eta) K_0 \left(\frac{\xi - x}{\alpha V}, \frac{\eta - y}{\alpha V} \right) d\Omega, \\ h_k(x, y) &= \int_{\Omega} \int \tau_k(\xi, \eta) K_k \left(\frac{\xi - x}{\alpha V}, \frac{\eta - y}{\alpha V} \right) d\Omega \quad (k = 1, 2), \\ K_0(u, v) &= e^u \int_u^{\infty} \frac{e^{-w} dw}{\sqrt{w^2 + v^2}}, \quad K_1(u, v) = e^u \int_u^{\infty} \frac{w e^{-w} dw}{w^2 + v^2}, \\ K_2(u, v) &= v e^u \int_u^{\infty} \frac{e^{-w} dw}{w^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Интегралы в последних трех формулах (16) не вычисляются в замкнутом виде, но легко вычисляются численно при заданных значениях u и v .

Итак, по формуле

$$w(x, y, 0) = w_0 + w_1 + w_2 \quad (17)$$

с учетом последних трех соотношений (12) и соотношений (16) найдем зависимость нормального перемещения границы вязкоупругого полупространства от движущихся по этой границе усилий $q(x, y)$, $\tau_1(x, y)$ и $\tau_2(x, y)$. Указанная зависимость является исходной для изучения более сложных контактных задач о движении штампа по границе вязкоупругого полупространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00002).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
- [2] *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
- [3] *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
- [4] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962. 1100 с.

Alexandrov V.M., Goryacheva I.G. *Movement of a load over a viscoelastic half-space.*

It is studied a movement with a constant velocity of a distributed load over a viscoelastic half-space, which is described by a model of a standard viscoelastic body. The problem is studied in a moving coordinate system coupled with the load. It is determined the dependence of the normal displacement of the half-space boundary surface caused by the moving load.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ С ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Бабешко В. А., Бабешко О. М.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Предложен подход анализа зон концентрации напряжений, возникающих в литосферных плитах в окрестности неоднородностей. В качестве неоднородностей могут быть жесткие включения и трещины.

Наряду с разрушением литосферных плит как деформируемых тел в зонах, где превышает предел прочности, важное место занимает разрушение, происходящее вследствие наличия различных неоднородностей — полостей трещин, разломов, жестких включений, неоднородностей другой природы. Для выяснения причин, вызывающих разрушение неоднородных материалов на этой основе, а также классификации объектов, способствующих разрушению в связи с неоднородностями, была разработана теория вирусов вибропрочности. При некоторых параметрах среды, наличии неоднородностей, воздействии на деформируемое тело данные объекты приводят к локализации деформаций, напряжений или волновых процессов в случае вибрации, а затем и к резонансам, разрушающим материал.

В исследовании этих задач существует два подхода — полуаналитический, развиваемый в работах [1–3], и численный, разработанный в [4, 5]. Первый основан на получении общего представления решений интегральных уравнений, описывающих поведение среды, при наличии неоднородности. Затем, анализируя построенные представления решений, формулируют условия, обеспечивающие локализацию процесса, а в некоторых случаях и резонансов.

Во втором подходе производится численное решение интегральных уравнений и на этой основе исследуются напряженно-деформационные и энергетические поля в среде. На этой основе определяются условия локализации и резонансов в средах с неоднородностями. В настоящей работе развивается первый подход, основанный на исследовании методом факторизации систем интегральных уравнений и выявлении условий локализации и резонансов. Поскольку различные наборы неоднородностей по-разному локализуют волновой процесс, для их различия, особенно совокупностей, вводится классификация таких совокупностей неоднородностей, названных «вирусами» вибропрочности, чем подчеркивается возможность их разрушительного воздействия на среду при определенных параметрах.

В настоящей работе дается решение проблемы для простейших вирусов такого рода, одной из реализаций которых являются совокупности плоскопараллельных жестких включений, полостей-трещин и их комбинаций, расположенных на параллельных плоскостях в деформируемой среде [1–3]. Наряду с многочисленными примерами наличия таких объектов в задачах механики, электроники, теории рассеивания, экологии, где они часты, американские ученые обнаружили их экспериментально в литосферных плитах, применив для глубинного исследования Земли

вибросейсмические методы. По-видимому, впервые это было получено профессором университета Теннесси (Ноксвил) Р. Вильямсом.

В работах [1–3] проведены исследования по построению системы интегральных уравнений простейших вирусов для случая когда неоднородности расположены на этажах параллельных плоскостей. Результаты этих работ позволяют записать системы интегральных уравнений для вирусов класса 1 — совокупности жестких включений и класса 2 — совокупности трещин. Осуществив редукцию граничных условий, если в этом есть необходимость, системы интегральных уравнений можно представить в виде

$$\sum_{r=1}^L \sum_{n=1}^{N_r} \sum_{m=1}^3 \int \int_{\Omega_{nr}} k_{spm}^0(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{mnr}^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f_{spl}^0(x_1, x_2), \quad (1)$$

$$x_1, x_2 \in \Omega_{pl}, \quad s = 1, 2, 3; \quad p = 1, 2, \dots, N_r; \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

Здесь в случае вируса класса 1 q_{mnr}^0 является m -компонентой неизвестного скачка напряжений, действующих на площадке Ω_{nr} , расположенной на уровне (плоскости) под номером r и имеющей на этом уровне номер n .

f_{spl}^0 — заданные соответственно компонентам напряжений компоненты перемещений в той же последовательности.

В случае вируса класса 2 скачки перемещений и компоненты напряжений меняются местами.

Введем обозначение преобразования Фурье в форме

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2)k(x_1, x_2) = \iint_{R^2} k(x_1, x_2)e^{i\langle \alpha, x \rangle} dx_1 dx_2 \equiv K(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{V}^{-1}(x_1, x_2)K(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} K(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 \equiv k(x_1, x_2).$$

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Рассмотрим матрицу-функцию

$$\mathbf{K}^0(\alpha_1, \alpha_2) = \{\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2)k_{spm}^0(x_1, x_2)\}. \quad (2)$$

Заметим, что она является блочной, состоящей из блоков-матриц третьего порядка. Влияние уровней на коэффициенты описывается экспоненциальными функциями, как с вещественными, так и с мнимыми показателями.

Запись интегральных уравнений в форме (1) необходима для наглядного описания вируса. Однако для исследования нужна другая форма записи. Осуществим в (2) переход к обозначениям, приводящим к стандартным записям матриц и векторов. Для функций в левой и правой частях введем сплошную нумерацию. Расположим все компоненты напряжений в случае вируса 1 в определенной последовательности как компоненты одного неизвестного вектора, перенумеровав для этого все этажи подряд, области на этажах и компоненты векторов в них, если они встречаются. По этому же правилу введем сплошную нумерацию для вектора правой части системы.

В результате систему (1) можно представить в виде

$$\sum_{r=1}^R \int \int_{\Omega_r} k_{mr}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_r(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f_m(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega_m, \quad (3)$$

$$m = 1, 2, \dots, R.$$

Или в операторном виде

$$\mathbf{K}\mathbf{q} \equiv \int \int_{\sigma_1\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha)\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{q} e^{-i\langle\alpha, x\rangle} d\alpha = \mathbf{f}, \quad \mathbf{q} = \{q_r\}, \quad \mathbf{K} = \{K_{mr}\} \quad (4)$$

$$\mathbf{f} = \{f_m\}, \quad \mathbf{F}(\alpha) \equiv \mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{F}(x_1, x_2).$$

Заметим, что в этих обозначениях некоторые функции k_{mr} могут оставаться одинаковыми для разных r .

Аналогично поступаем и в случае вируса 2.

2. Система (3) выписана для произвольной анизотропной многослойной упругой среды при наличии возможных термоэлектроупругих, магнитостатических, агрессивных химических воздействий и других возможных характеристик.

Элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ в общем случае являются аналитическими функциями. Они описываются отношением аналитических функций двух комплексных переменных. Для пакетов слоев это отношение целых функций, тогда элементы являются мероморфными функциями.

Будем считать, что матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ обладает при вещественных γ_k асимптотическим поведением вида

$$\mathbf{M}(\gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{M}(\gamma_1)\gamma_2^{-1}[1 + O(\gamma_2^{-1})], \quad 0 \leq \gamma_1 \leq 2\pi, \quad \gamma_2 \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$\alpha_1 = \gamma_2 \cos \gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \sin \gamma_1, \quad \mathbf{M}(\gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{K}(\gamma_2 \cos \gamma_1, \gamma_2 \sin \gamma_1),$$

что имеет место для вируса класса 1.

Элементы матрицы-функции $\mathbf{M}(\gamma_1, \gamma_2)$ могут иметь при вещественных γ_k конечное число полюсов $\gamma_2 = \xi_m(\gamma_1)$, а определитель — конечное число нулей $\gamma_2 = z_n(\gamma_1)$ на вещественной оси. Полюсы обходятся контурами интегрирования по определенным правилам, описанным в [6]. Вектор-функции \mathbf{q}, \mathbf{f} принадлежат некоторым пространствам \mathbf{H}_s .

Далее, говоря об аппроксимации функций, содержащих на вещественной оси полюсы, понимаем приближение функций в C , умноженных на полином, содержащий эти полюсы.

1. Элементы матрицы-функции $\mathbf{M}(\gamma_1, \gamma_2)$ можно приблизить на вещественной оси мероморфными функциями с сохранением вещественных полюсов и асимптотического поведения (5). В условиях корректной разрешимости системы (3) в каком-нибудь \mathbf{H}_s система с приближенной матрицей также разрешима и погрешность приближения линейно зависит от погрешностей аппроксимаций на контурах интегрирования δ_1, δ_2 [6].

Матрицу-функцию $\mathbf{M}(\gamma_1, \gamma_2)$ можно приближенно представить на вещественной оси в виде

$$\mathbf{M}(\gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{M}_0(\gamma_1, \gamma_2)\mathbf{\Pi}(\gamma_1, \gamma_2).$$

Здесь матрица-функция $\mathbf{M}_0(\gamma_1, \gamma_2)$ имеет мероморфные элементы по параметру γ_2 . Полюса ее элементов и нули определителя находятся вне некоторой полосы η , содержащей вещественную ось. Элементы матрицы-функции $\mathbf{\Pi}(\gamma_1, \gamma_2)$ являются рациональными функциями. Полюса ее элементов и нули ее определителя совпадают с полюсами соответствующих элементов и нулями определителя матрицы-функции в полосе η .

Пусть полиномы $p_1(\gamma_1, \gamma_2)$, $p_2(\gamma_1, \gamma_2)$ имеют нули $\gamma_2 = z_n(\gamma_1)$ и $\gamma_2 = \xi_m(\gamma_1)$ соответственно, допускающие разложения в ряды Фурье по координате γ_1 .

Ради простоты ограничимся часто встречающимся случаем, когда полиномы имеют четный порядок, а нули обладают свойством парности вида

$$\begin{aligned} z_n^\pm(\gamma_1) &= \sum_{s=-S}^S z_{n,2s+1} e^{i(2s+1)\gamma_1} \pm \sum_{s=-S}^S z_{n,2s} e^{i2s\gamma_1}, \\ \xi_n^\pm(\gamma_1) &= \sum_{s=-S}^S \xi_{n,2s+1} e^{i(2s+1)\gamma_1} \pm \sum_{s=-S}^S \xi_{n,2s} e^{i2s\gamma_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$S \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq 2\pi.$$

Рациональная функция $p_1(\gamma_1, \gamma_2)/p_2(\gamma_1, \gamma_2)$ на вещественной оси допускает приближение рациональной функцией

$$p_1(\alpha_1, \alpha_2, S)/p_2(\alpha_1, \alpha_2, S)$$

в виде отношения полиномов двух комплексных переменных. Аппроксимирующие полиномы имеют как минимум столько же нулей, что и полиномы исходной функции, которые при $s \rightarrow \infty$ сливаются.

Матрицу-функцию $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ можно представить с учетом описанных аппроксимаций в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \mathbf{P}, \quad \mathbf{K}_0 = \{\mathbf{K}_{0pr}(\alpha_1, \alpha_2)\}, \quad \mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{l} p_{1rn}(\alpha_1, \alpha_2, S) \\ p_{2rn}(\alpha_1, \alpha_2, S) \end{array} \right\}. \quad (7)$$

2. Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение, порождающее характеристический полином $p_{1mm}(\alpha_1, \alpha_2, S)$ порядка $2M$:

$$-p_{1mm}(i\partial x_1, i\partial x_2, S)\varphi_m(x_1, x_2) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, R, \quad (8)$$

$$x_1, x_2 \in \Omega_m.$$

Поставим для него в пространстве $\mathbf{H}_s(\Omega_m)$ краевую задачу, сформулировав краевые условия для производных по внешней нормали к границе области, т. е.

$$\partial_n^{k-1} \varphi_m(x) = g_{mk}(x), \quad x \in \partial\Omega_m, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (9)$$

Решая краевую задачу методом факторизации [7], получим представление вида

$$p_{1mm}(\alpha_1, \alpha_2, S)\Phi_m(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{\partial\Omega_m} \theta_m \equiv \Theta_m, \quad (10)$$

$$\Phi_m(\alpha_1, \alpha_2) = \iint_{\Omega_m} \varphi_m(x) e^{i\langle \alpha, x \rangle} dx.$$

Здесь θ_m — внешняя форма.

Важно заметить, что в правой части (10) находятся подряд производные по внешней нормали к границе $\partial\Omega_m$ порядков до $2M - 1$ [7], включая нулевую, обозначенные g_{mk} , $k = 1, 2, \dots, 2M$. Таким образом, решение краевой задачи при заданных g_{mk} , $k = 1, 2, \dots, M$ сведено к определению M функций g_{mk} , $k = M + 1, \dots, 2M$. Строя решение краевой задачи, выразим последние функции через первую группу функций, считающихся известными [7].

Будем далее считать, что для оператора \mathbf{K}_0

$$\mathbf{K}_0\varphi \equiv \iint_{\sigma_1\sigma_2} \mathbf{K}_0(\alpha)\mathbf{V}(\alpha)\varphi e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha \quad (11)$$

построен обратный оператор \mathbf{K}_0^{-1} . Различные приемы их построения имеются, например, в [6] и др.

В соответствии с введенной топологией краевые задачи (8), (9) рассматриваются на двумерных ориентируемых многообразиях Ω_m с ориентируемыми границами $\partial\Omega_m$ [7]. Области Ω_m располагаются слева от границы $\partial\Omega_m$. При факторизации они обозначаются знаком плюс, а расположенные справа от $\partial\Omega_m$ — знаком минус. Области Ω_m могут быть ограниченными, неограниченными, многосвязными с гладкими границами, в том числе уходящими на бесконечность. Будем использовать введенное в работах [7] понятие факторизации функций относительно областей применительно к краевым задачам. Мы не останавливаемся на выборе и применении конкретного вида факторизации — классической или обобщенной, отсылая по всем этим вопросам к [7]. Таким образом факторизацию, сопровождающуюся построением классов функций с носителем в Ω_m или вне ее, в дальнейшем будем обозначать соответственно в виде

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}_{\Omega_m}^{\pm}, \quad \{\mathbf{F}(\alpha)\}_{\Omega_m}^{\pm}.$$

Компоненту вектора под номером m обозначаем $(\)_m$.

Для точного или, в случае аппроксимации, приближенного решения системы интегральных уравнений (3) справедлива

Теорема 1. Решение системы интегральных уравнений вируса класса 1 имеет вид

$$q_n(x) = p_n(x) + \varphi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, R.$$

$$p_n(x) = \left\{ \mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1} \left\{ \left\{ \sum_{r=1}^R \frac{p_{1mr}\Theta_r}{p_{2mr}p_{1rr}} \right\}_{\Omega_m}^+ + (\mathbf{K}_0^{-1}f)_m \right\} \right\}_n. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= \left\{ \mathbf{V}^{-1} p_{1mm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S) \int_{\partial\Omega_m} \theta_m \right\}_{\Omega_m}^+ \\ &\quad \left\{ \mathbf{V}^{-1} p_{1mm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S) \int_{\partial\Omega_m} \theta_m \right\}_{\Omega_m}^- = 0. \\ &\quad \left\{ \mathbf{V}^{-1} \Pi^{-1} \left\{ \sum_{r=1}^R \frac{p_{1mr} \Theta_r}{p_{2mr} p_{1rr}} \right\}_{\Omega_m}^+ + (\mathbf{K}_0^{-1} f)_m \right\}_{\Omega_m}^- = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Последние два соотношения представляют системы одномерных интегральных уравнений, нормально разрешимых. Они служат для определения неизвестных граничных функций $g_{km}(x)$, $k = 1, 2, \dots, 2M$; $m = 1, 2, \dots, R$. Их количество совпадает с числом неизвестных. Регуляризация этих систем — запись в виде интегральных уравнений второго рода осуществляется так же, как и в [7].

Доказательство теоремы полностью повторяет приемы, использованные при введении обобщенной факторизации, детально изложенные в [6], и здесь не приводится.

Рассмотрим случай вируса класса 2, который несколько сложнее первого, так как имеет дополнительные условия. Неоднородности представляют собой совокупности трещин произвольной в плане формы, расположенные на параллельных плоскостях-этажах. Система интегральных уравнений имеет вид (3) с той разницей, что асимптотическое поведение коэффициентов на бесконечности описывается соотношением

$$\mathbf{M}(\gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{M}(\gamma_1) \gamma_2 [1 + O(\gamma_2^{-1})], \quad \gamma_2 \rightarrow \infty,$$

кроме того, компоненты неизвестного вектора должны на границах своих областей обращаться в нуль, т. е.

$$q_m(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_m, \quad m = 1, 2, \dots, R.$$

Решение системы для вируса класса 2 сводится к рассмотренному выше случаю путем использования преобразования.

Для этого представим систему (4) в форме

$$\mathbf{K}_1^q \equiv \iint_{\sigma_1 \sigma_2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + B^2)^{-1} \mathbf{K}(\alpha) \mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{q} e(-i\langle \alpha, x \rangle) d\alpha = \mathbf{f}_1 + \mathbf{g}, \quad B > 0,$$

где у новой матрицы-функции уже имеет место поведение элементов (5).

Компоненты вектора в правой части являются решениями в областях Ω_m краевых задач

$$(-\partial^2 x_1 - \partial^2 x_2 + B^2) g_m = 0, \quad g_m(x) = g_m^0, \quad x \in \partial\Omega_m, \quad g = \{g_m\} \in \mathbf{H}_s,$$

которые можно построить методом факторизации [7].

f_1 — любое частное решение этого дифференциального уравнения с правой частью f . Функции g_m^0 нуждаются в определении.

Теорема 2. Решение системы интегральных уравнений вируса класса 2 имеет вид

$$q_n(x) = p_n(x) + \varphi_n(x), \quad m = 1, 2, \dots, R.$$

$$p_n(x) = \left\{ \mathbf{V}^{-1} \Pi^{-1} \left\{ \left\{ \sum_{r=1}^R \frac{p_{1mr} \Theta_r}{p_{2mr} p_{1rr}} \right\}_{\Omega_m}^+ + (\mathbf{K}_{10}^{-1}(f_1 + g))_m \right\} \right\}_n. \quad (14)$$

$$\varphi_m(x) = \left\{ \mathbf{V}^{-1} p_{1mm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S) \int_{\partial\Omega_m} \theta_m \right\}_{\Omega_m}^+.$$

$$\left\{ \mathbf{V}^{-1} p_{1mm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, S) \int_{\partial\Omega_m} \theta_m \right\}_{\Omega_m}^- = 0.$$

$$\left\{ \mathbf{V}^{-1} \Pi^{-1} \left\{ \left\{ \sum_{r=1}^R \frac{p_{1mr} \Theta_r}{p_{2mr} p_{1rr}} \right\}_{\Omega_m}^+ + (\mathbf{K}_{10}^{-1}(f_1 + g))_m \right\} \right\}_{\Omega_m}^- = 0. \quad (15)$$

$$p_n(x) + \varphi_n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_n.$$

$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{10} \mathbf{P}$ — аналог представления (7) для данной задачи.

Последняя система уравнений служит для определения функций g_m^0 на границах областей Ω_n .

Аналогично строится решение смешанного вируса, сочетающего одновременно включения и трещины.

Получив представление решений задач для компонент векторов контактных напряжений, в случае вируса 1, или перемещений берегов трещин в случае вируса 2, можем, зная поведение нулей определителя символа интегрального уравнения и представление решений краевых задач, получить асимптотическое поведение характеристик напряженно-деформированного состояния и условия локализации вибрационного процесса.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (03-01-00694), программа р2003юг (03-01-96537, 03-01-96527, 03-01-96519, 03-01-96584, 04-01-96822, проект РИ-112/001/301, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В. А. «Вирусы» вибропрочности // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 1994. Спецвыпуск. № 1. С. 90–91.

- [2] *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Вильямс Р.* Метод факторизации решения некоторых неоднородных краевых задач // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. С. 10–12.
- [3] *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 473–477.
- [4] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* К проверке существования явления высокочастотного резонанса в полуограниченных областях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 3. С. 208–209.
- [5] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Кириллова Е. В.* Динамическая контактная задача для кругового штампа, сцепленного с упругим слоем // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 780–785.
- [6] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [7] *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Исследование краевых задач двойной факторизацией // ДАН. 2005. Т. 403. № 1. С. 20–24.

Babeshko V. A., Babeshko O. M. *About representation of decisions in problems with plane-parallel heterogeneities.* The work offers an approach to analyze zones of stress concentration, which originate in lithosphere plates in the neighborhood of inhomogeneities, e. g. rigid inclusions and fractures.

ГЕНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Баранов И. В.*, **Садчиков И. В.****, **Соловьев А. Н.*****

** Донской государственный технический университет*

*** Ростовский государственный университет*

**** Донской государственный технический университет*

℘ Ростовский государственный университет

Рассмотрена задача об определении характеристик (плотности, модуля Юнга и коэффициента Пуассона) включения в упругом теле. Дополнительной информацией для решения обратной коэффициентной задачи теории упругости служит поле смещений, измеренное на части свободной поверхности тела. Кроме этого предполагается известной геометрия включения. В случае установившихся колебаний задача идентификации может быть сведена к проблеме минимизации некоторого функционала зависящего от параметров включения в некоторой заданной области их изменения. Задача минимизации решается на основе разработанного генетического алгоритма. Осуществлена его программная реализация, ориентированная на определение упругих характеристик включения с использованием кластерной версии конечноэлементного комплекса ACELAN. Приведены результаты численных экспериментов по определению характеристик одиночного упругого включения в плоской задаче теории упругости.

Одной из задач неразрушающего контроля качества изделий является обнаружение внутренних неоднородностей (трещин, включений, полостей). Эта задача может быть разделена на два этапа: на первом - определяются геометрические характеристики неоднородности, на втором этапе идентифицируются свойства включения. Проблему первого этапа можно решить методами интроскопии [1]. Исходной информацией для решения задачи второго этапа может служить поле смещений, измеренное на свободной границе тела, при гармоническом или нестационарном воздействии на него. В этом случае задача идентификации может быть сведена к проблеме минимизации некоторого функционала зависящего от параметров включения (плотность, упругие постоянные), в некоторой заданной области их изменения. В том случае, когда число этих параметров велико, либо функционал имеет несколько локальных минимумов или является сильно овражистым, обычные градиентные методы не дают надежного результата. В последнее время появился совершенно новый перспективный класс вычислительных алгоритмов для решения задач оптимизации – так называемые эволюционные или генетические алгоритмы (ГА) [2, 3], использующие для своей работы некоторые принципы развития биологических популяций. Их появление связано с пионерской работой Дж. Холланда [4] в 1975 г. Несмотря на свою недостаточную теоретическую обоснованность, тем не менее, в задачах многомерной оптимизации, эти алгоритмы имеют определенное преимущество перед традиционными схемами. Они не требуют задания начального приближения, не используют априорной информации о целевой функции и позволяют с большой вероятностью находить глобальные

экстремумы в случае ее сложного рельефа. Однако, при решении обратных задач теории упругости применение этих алгоритмов сдерживается их достаточно медленной сходимостью, что, в свою очередь, связано с большими вычислительными затратами. В данной работе разработан оригинальный генетический алгоритм, который сочетает идеи эволюционных алгоритмов с достаточно быстрой сходимостью. Осуществлена его программная реализация, ориентированная на определение упругих характеристик включения с использованием кластерной версии конечноэлементного комплекса ACELAN [5].

1. Постановка обратной задачи. Рассмотрим установившиеся колебания с круговой частотой ω анизотропного неоднородного упругого тела, занимающего конечную односвязную область V с границей S . Внутри области V имеется ряд непересекающихся подобластей V_q , $q = 1, 2, \dots, N$, упругие свойства в которых отличаются от свойств основного тела и возможно разные для каждой подобласти, обозначим через $V_0 = V \setminus \{\cup_{q=1}^N V_q\}$. Граница области имеет участок S_0 , свободный от напряжений и может быть описана объединением непересекающихся областей $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (на S_1 - заданы кинематические, а на S_2 - силовые граничные условия). На границе внутренних подобластей предполагаются непрерывность векторов смещений и напряжений.

Амплитудные характеристики этих колебаний удовлетворяют системе дифференциальных уравнений линейной теории упругости [6]

$$\sigma_{ij,j} = \rho^{(q)} \omega^2 u_i, \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl}^{(q)} u_{k,l} \quad i = 1, 2, 3, \quad \underline{x} \in V_q \quad q = 0, 1, \dots, N \quad (1)$$

граничным условиям прямой краевой задачи

$$u_i|_{S_1} = u_i^{(1)}, \quad t_i|_{S_2} = \sigma_{ij} m_j|_{S_2} = p_i, \quad t_i|_{S_0} = 0 \quad (2)$$

где u_i , t_i - компоненты векторов смещений и напряжений, $c_{ijkl}^{(q)}$ - компоненты тензора упругих постоянных, $\rho^{(q)}$ - плотность.

В обратной задаче упругие постоянные и плотности в подобластях V_q , $q = 1, 2, \dots, N$ являются неизвестными, информацией для их определения служит поле смещений, измеренное на границе S_0

$$u_i|_{S_0} = u_i^{(0)} \quad (3)$$

На практике наиболее просто осуществляется измерение поля смещений в конечном наборе M точек границы и при K - значениях частоты колебаний, поэтому соотношение (3) имеет вид

$$u_i(\underline{x}_m, \omega_r)|_{S_0} = u_i^{(0)}(\underline{x}_m, \omega_r); \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad r = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

В случае, когда геометрические характеристики подобластей V_q , $q = 1, 2, \dots, N$ известны, задача идентификации упругих постоянных и плотностей - $c_{ijkl}^{(q)}$ и $\rho^{(q)}$ ($q = 1, 2, \dots, N$) сводится к нахождению абсолютного (нулевого) минимума функционала F , задающего норму разности (в некотором пространстве L) между измеренным (3) и найденным из решения краевой задачи (1)-(2) полем смещения, при этом область изменения искомых параметров определяется их физическим

смыслом. Пространство L определяется двумя соображениями: исходной дополнительной информацией (свойствами функций $u_i^{(0)}$) и методом решения прямой краевой задачи (1)-(2). Так, например, в случае условий (4) и решения прямой задачи методом конечных элементов, функционал F может быть представлен в виде

$$F(\tilde{c}_{ijkl}^{(q)}, \tilde{\rho}^{(q)}) = \left(\sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^K \sum_{n=1}^2 [u_n^{(0)}(\underline{x}_m, \omega_r, c_{ijkl}^{(q)}, \rho^{(q)}) - u_n(\underline{x}_m, \omega_r, \tilde{c}_{ijkl}^{(q)}, \tilde{\rho}^{(q)})|_{S_0}]^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

при этом область W изменения переменных $\tilde{c}_{ijkl}^{(q)}, \tilde{\rho}^{(q)}$ известна.

2. Генетический алгоритм нахождения минимума функции нескольких переменных в заданной области их изменения. Последовательность оптимизируемых параметров (особь [7]) записывается в виде хромосомы. Для представления хромосом использовано двоичное кодирование (код Грэя [7]) с последовательным расположением генов фиксированной длины, при этом каждому параметру соответствует один ген, и все гены имеют одинаковую длину. Предполагается, что область изменения (гиперпараллелепипед в R^n , где n – число переменных) каждого из разыскиваемых параметров известна. Область линейно отображается в гиперкуб с ребром длиной 2^s . Таким образом, каждый параметр переводится в целочисленную точку на отрезке $[0..2^s]$, содержащем $2^s + 1$ точек. Далее, это целое число переводится в двоичное представление с помощью кода Грэя.

В алгоритме использованы следующие традиционные генетические операторы [7]: 1. Двухточечный кроссовер (скрещивание): случайно выбираются две позиции i_1 и i_2 в хромосоме и хромосомы обмениваются своими частями, которые расположены между i_1 и i_2 . В частности, если позиция i_2 равна длине хромосомы, то фактически выполняется односточечный кроссовер. 2. k -точечная мутация. Случайно выбирается позиция в хромосоме, и инвертируется значение бита. Процедура повторяется k раз. В вычислительных экспериментах $k = 3$. 3. Инверсия. В хромосоме случайно выбирается позиция i , а затем меняются местами части хромосомы, расположенные до и после этой позиции.

Разработанный оригинальный генетический алгоритм состоит из следующих пунктов. **1⁰**. Случайным образом (здесь и далее использовано равномерное распределение) генерируется начальная популяция, содержащая N хромосом (нулевое поколение). **2⁰**. Хромосомы сортируются в порядке от лучшей к худшей, в соответствии со значением целевой функции на хромосоме. Счетчику i назначается значение 1. **3⁰**. Случайно выбираются две хромосомы. **4⁰**. С вероятностью p_c они скрещиваются и порождают двух потомков. Если скрещивания не происходит, то потомками считаются исходные хромосомы. **5⁰**. К каждому из потомков с вероятностью p_m применяется оператор мутации. **6⁰**. К каждому из потомков пункта **5⁰** с вероятностью p_i применяется оператор инверсии. **7⁰**. Отбирается лучшая из этих двух хромосом, и помещается в поколение вместо $N/2 + i$ -той хромосомы. Счетчик i увеличивается на единицу. **8⁰**. Пункты **3⁰-7⁰** повторяются $N/2$ раз. **9⁰**. Пункты **2⁰-8⁰** повторяются до выполнения критерия останова.

Критерием останова всего процесса является стягивание ядра популяции

(некоторого процентного числа Q лучших особей) в сферу заданного достаточно малого радиуса - R_ϵ .

В предложенном алгоритме, в отличие от традиционной рулетки с секторами, площадь которых пропорциональна приспособленности особи, применена “суперэлитная” стратегия, которая обеспечивает, с одной стороны, гарантированное сохранение лучшего из найденных решений, а с другой стороны, достаточно быструю сходимость процесса. Вероятность кроссовера p_c выбирается $\sim 0,9$. Чтобы уравновесить сильное давление отбора, вероятности мутации и инверсии, в отличие от традиционных схем [7], нужно назначать достаточно большими: $p_m \sim 0,7$, а $p_i \sim 0,2$. (Мутация обеспечивает локальный поиск – уточнение, а инверсия – большие броски в области поиска). Таким образом, настроенными параметрами алгоритма являются число особей в популяции – N , число мутирующих бит – k , параметры Q и R_ϵ , а также вероятности p_c , p_m и p_i . По своим свойствам данный алгоритм занимает некое промежуточное положение между неслучайными, и чисто случайными методами поиска экстремума.

3. Пример численной реализации.

Таблица

Пример N	1	2	3	4	5	6
Материал внешней области	Медь	Медь	Медь	Медь	Медь	
Материал внутренней области (включения)	Железо	Вакуум	Железо	Железо	Воздух	
Погрешность в геометрии включения	10-12%	0%	0%	0%	0%	
Погрешность в измеряемых на поверхности тела перемещениях	0%	0%	0%	1%	0%	
Относительный размер включения	0,1	0,1	0,01	0,01	0,01	
Число обращений к функционалу	1790	1956	2602	2500	1195	
Число поколений	100	115	150	150	150	
	Найдено решение					
ρ	7,6963	0	7,812	7,858	0,0133	
E	1,9891	0,1443	1,988	1,9992	0,000152	2,0
ν	0,2863	0,4999	0,279	0,289	0,4199	0,29
Значение F	$2,560110^{-6}$	3,8891	$1,2610^{-11}$	$1,1510^{-13}$	$1,4810^{-9}$	

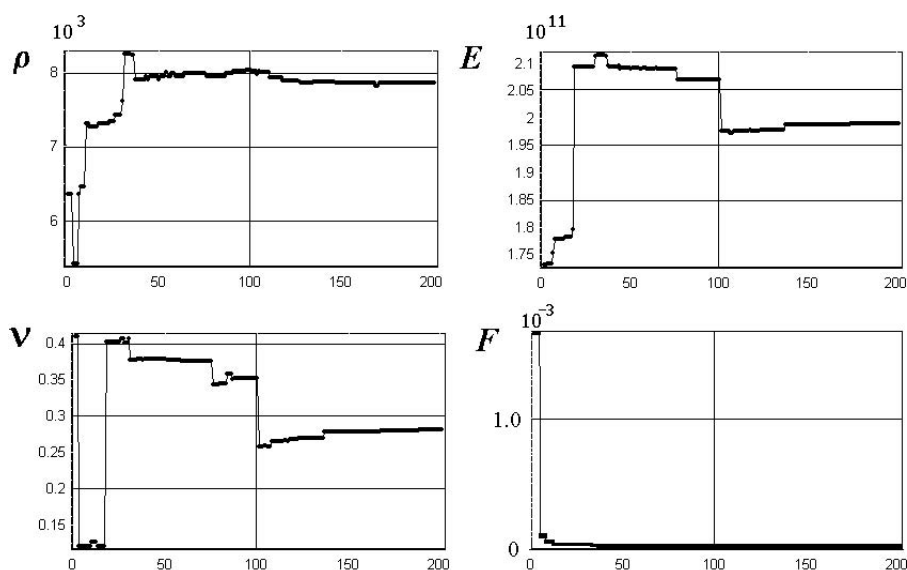


Рис. 1.

В качестве примера программной и численной реализации предлагаемых подходов, рассмотрена модельная задача об определении параметров одного упругого изотропного включения в форме круга (центр $x_0 = 0.7$, $y_0 = 0.4$, здесь и далее длины приведены в метрах) в квадратной области $([0.0, 0.1] \times [0.0, 0.1])$ для плоской задачи теории упругости. Левая боковая сторона квадрата жестко закреплена, к верхней стороне приложено равномерно распределенное нормальное давление, на правой, свободной от напряжений, стороне измерялся вектор смещения (см. рис. 2). Находились три параметра: ρ , E , ν – плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона соответственно. В качестве материала внешней области была выбрана медь. Эксперименты проводились для различных включений – железо, воздух, вакуум. Также исследовалась зависимость получаемого решения от размера включения, погрешности в геометрии включения, погрешности измерения перемещений на внешней границе тела. Решение прямой задачи, моделирующее процесс измерения граничных волновых полей в узлах на правой боковой стороне, проводилось в ACELAN. В численном эксперименте была выбрана “рабочая” частота $\omega = 21.0$ кГц. Область поиска $W = \{\rho, E, \nu \mid [0.0, 10.0 \cdot 10^3] \times [0.0, 5.0 \cdot 10^{11}] \times [0.0, 0.5]\}$, было выбрано 10 узлов измерения смещений на поверхности тела. Использовалось 20 особей в одном поколении при вероятностях $p_c = 0,9$, $p_m = 0,7$, $p_i = 0,2$. Результаты некоторых экспериментов приведены в таблице. Точное решение для примеров 1,3,4 указано в таблице в колонке 6. Время одного обращения к целевой функции (функционалу) составляло 0.53 с.

Анализ проведенных экспериментов показывает, что предложенный алгоритм за обозримое время позволяет уверенно идентифицировать как достаточно большие (порядка 10% характерного размера изделия), так и малые (порядка 1%) включения, причем погрешности в определении геометрии включения не слишком сильно влияют на качество получаемого решения.

На рис. 1 представлены зависимости лучшего значения ρ , E , ν (лучшей осо-

би в поколении) и целевой функции F в зависимости от числа поколений ГА в одном из экспериментов. Анализ результатов, отображенных на этих графиках, позволяет провести дальнейшую модернизацию ГА, внося в него некоторую “интеллектуальную” компоненту, как альтернативу случайного поиска при большом номере числа поколений. Это усовершенствование касается сужения области поиска, как по длине соответствующих интервалов, так и по количеству искомым переменных.

Авторы благодарят Ватульяна А.О. за обсуждение результатов и постановок задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 03-07-90411, 05-01-00734) и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковалев А. В. Поисковые технические средства на основе методов интроскопии. Акустические поисковые системы. Специальная техника. 2000. N 2. <http://st.ess.ru/publications/articles/kovalev4/kovalev.htm>.
- [2] Goldberg D.E. Goldberg DE 1989 Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning (Reading, MA:Addison-Wesley).
- [3] Chiroiu V., Moldoveanu F., Chiroiu C., Scalerandi M., Ruffino E. 1999 Application of genetic algorithm in defects visualization Rev. Roum. Sci. Tech. 44 2.
- [4] Holland J. H. Adaptation in natural and artificial systems. An introductory analysis with application to biology, control, and artificial intelligence. —London: Bradford book edition, 1994. 211 p.
- [5] Белоконь А.В., Бычков А.А., Васильченко К.Е., Надолин Д.К., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Разработка кластерной версии КЭ комплекса ACELAN. // Параллельные вычисления в задачах математической физики. Сборник трудов всероссийской научно-технической конференции, 21-25 июня 2004, г. Ростов-на-Дону. Ростов-на-Дону изд-во РГУ, 2004. С. 24-35.
- [6] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
- [7] Вороновский Г.К. и др. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. Харьков: Основа, 1997. 112 с.

Baranov I.V., Sadchikov E.V., Soloviev A.N. *The genetic algorithm designed.* Its program embodying oriented on definition of parameters of elastic inserts with usage of the cluster version of FEM complex ACELAN is realized.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СОЗДАНИЯ ОБЪЕКТНО-НЕЗАВИСИМОГО ПРОГРАММНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Беликов Н. В., Занимонец Ю. М., Юдин А. С.

*НИИ Механики и прикладной математики им. Воровича И.И. РГУ
Ростовский госуниверситет*

В работе дано определение степени исправности объекта, проводится идентификация математической модели, приводятся формулы для вычисления степени исправности объекта.

1. Постановка задачи. Методы математической статистики и теории оценивания при обработке измерительной информации широко применяются в различных областях техники [1, 2]. Целый ряд таких задач в общих чертах описан в [3]. Достоинством их является то, что независимо от различия физических принципов построения систем алгоритмы их функционирования могут быть построены как частные случаи решения формализованной математической задачи оценивания. Однако применение теории математической статистики к проблемам контроля технического состояния объектов не находит пока широкого практического использования.

В дальнейшем, при проведении статического анализа будем предполагать, что объект имеет единственный вход U и единственный выход X , является стационарным, а аддитивная помеха n не зависит от входного сигнала и представляет собой стационарный случайный процесс. При этих предположениях связь между измеряемыми переменными U и X может быть описана функцией $E(X|U) = F(U, C)$, где $E(X|U)$ – среднее значение исследуемой величины X (выход объекта) при значении контролируемой переменной U , а $F(U, C)$ – определена с точностью до вектора неизвестных параметров C .

Рассматриваемый подход к задаче испытания объектов основывается на задаче идентификации для детерминированных систем, которая ставится как задача отыскания такого аналитического выражения $F(U, C)$, которое позволит выполнить аппроксимацию N пар результатов измерений (u, x) по некоторому критерию близости. Таким образом, задача идентификации сводится к некоторой экстремальной задаче минимизации выбранного критерия. Аппроксимация данных при выбранном виде модели $F(U, C)$ осуществляется за счет выбора значения вектора параметров C и его размерности.

Общим требованием к виду модели является требование непротиворечивости физическим законам, ответственным за процессы, протекающие в исследуемом объекте. На основе полученной модели $F(U, X)$ и ее точностных характеристиках проводится статический анализ функциональных узлов объекта.

2. Методика определения степени исправности объекта. Среди многочисленных задач диагностического обеспечения определение исправного состояния объекта является одним из наиболее важных [4]. Объект считается исправным, если значения характеристик составляющих его функциональных узлов находятся в пределах предусмотренных техническими документами на его изготовление и настройку, а внешние факторы – в пределах предусмотренных условиями его эксплуатации. Объект неисправен, если хотя бы одна характеристика любого функционального узла имеет отклонение, превышающее допустимый технологический разброс на изготовление и настройку.

Будем считать, что объект отработал правильно при некотором входе u и соответствующем выходе x , если пара (u, x) принадлежит заданной эталонной области $UX_{ЭТ}$. Здесь, и в дальнейшем, полагаем, что U принадлежит множеству входов $U_{ЭТ}$, для которых определена эталонная область. Для численной характеристики качества работы объекта введем понятия предельной и интегральной степени исправности.

Предельную степень исправности $P_{\text{Пред}}$ определим как наименьшую по $U \subset U_{ЭТ}$ вероятность того, что пара (u, x) , полученная в результате испытания объекта, будет находиться внутри эталонной области $UX_{ЭТ}$, то есть

$$P_{\text{Пред}} = \min_{u \in UX_{ЭТ}} P((u, x) \in UX_{ЭТ} | u \in U_{ЭТ}).$$

Предельная степень исправности связана с самым “ненадежным местом” в объекте, Для более полной характеристики качества работы объекта вводится интегральная степень исправности Ринг, определяемая как

$$P_{\text{Инт}} = \int_{u \in U_{ЭТ}} P((u, x) \in UX_{ЭТ} | u \in U_{ЭТ}) du / \text{mes}(U_{ЭТ}),$$

где $\text{mes}(U_{ЭТ})$ – это мера множества входов $U_{ЭТ}$, для которых определена эталонная область. В скалярном случае $\text{mes}(U_{ЭТ}) = U_{\text{max}} - U_{\text{min}}$. Иными словами, под интегральной степенью исправности понимается часть точек (u, x) , полученных в результате работы объекта, которые принадлежат эталонной области.

Имеет смысл рассматривать не просто либо предельную, либо интегральную степень исправности, а вводить их комбинацию $P_{\text{комб}} = aP_{\text{Инт}} + (1 + a)P_{\text{Пред}}$, $0 \leq a \leq 1$.

О качестве работы объекта можно судить по тому, в каких пределах находится степень исправности объекта (предельная, интегральная или комбинированная). Например, если степень исправности более 0.9, то качество работы объекта можно считать хорошим, если менее 0.7, то объект неисправен, если более 0.7, но меньше 0.9, то объект можно считать пригодным, но работающим с нежелательными, хотя и допустимыми искажениями.

3. Идентификация объекта. Для нахождения степени исправности объекта необходимо определить математическую модель, описывающую этот объект и ее точностные характеристики. Пусть имеется N пар значений (u, x) , являющихся входом и выходом исследуемого объекта. По критерию минимальности средне-

квадратичной погрешности $S = \sum_{i=1}^N \left(F(u[i], C) - x[i] \right)^2 / (N - m)$ подбирается модель $X = F(U, C)$, описывающая связь между точками $(u[i], x[i])$, $i := 1..N$ где m – размерность вектора параметров (размерность модели). Считая заданным вид функции $F(U, C)$, для определения параметров модели C следует приравнять нулю частные производные по вектору параметров для среднеквадратичной погрешности $dS/dC[i] = 0$, $i := 1..m$. Таким образом, для нахождения вектора параметров модели получим систему m уравнений. Если в качестве модели объекта рассматривать линейную регрессионную модель $x = Z^T(u)C$, где $Z(u)$ – вектор-функция регрессии, а T – символ транспонирования, то полученная система будет линейной. Решение системы получаем известными методами. Размерность модели m также может рассматриваться как минимизируемый параметр. В этом случае задача параметрической идентификации переходит в задачу *структурно-параметрической идентификации*. Решение этой задачи получается путем итераций решений задачи параметрической идентификации.

4. Доверительный интервал для прогноза индивидуальных значений выхода объекта. Для прогнозирования работы объекта необходимо определить доверительный интервал, внутри которого с некоторой степенью достоверности, обусловленной заданным уровнем значимости “а”, будет находиться отдельное значение x – выхода объекта, соответствующее некоторому входу u . Пусть определена модель объекта $X = F(U, C)$ и дисперсия модели D , равная квадратному корню из минимальной среднеквадратичной погрешности S , имеющей нормальное распределение. В этом случае доверительный интервал для прогноза индивидуальных значений x будет иметь вид: $[F(u - i), C) - L(a)D; F(u[i], C) + L(a)D]$, где $L(a)$ – квантиль нормального распределения при заданном уровне значимости “а”. Например, с вероятностью 0.9974 можно ожидать, что фактическое значение $x[i]$, соответствующее входу $u[i]$, будет находиться внутри интервала $[F(u[i], C) - 3D; F(u[i], C) + 3D]$.

5. Нахождение степени исправности объекта. После нахождения модели объекта и определения доверительного интервала для прогноза индивидуальных значений x можно получить алгоритм вычисления степени исправности объекта.

Предельная степень исправности объекта будет равна вероятности, соответствующей максимальному значению квантиля нормального распределения $L(a)$, при котором множество точек (u, x) , таких, что $F(u, C) - L(a)D \leq x \leq F(u, C) + L(a)D$ принадлежит эталонной области.

Рассмотрим получение предельной степени исправности в случае задания эталонной области следующим образом: $X1(u) \leq X2(u)$, $u \in U_{\exists T}$, где $X1(u)$ и $X2(u)$ – заданные функции.

Для нахождения максимального значения квантиля нормального распределения $L(a)$ определим по оси X расстояние R от функции регрессии до границы эталонной области $R = \min\{R1, R2\}$, где $R1 = \min_u \left(F(u, C) - X1(u) \right)$, $R2 = \min_u \left(X2(u) - F(u, C) \right)$.

Отсюда получаем $L(a) = R/D$, где D – дисперсия модели. Предельная степень

работоспособности равна значению интеграла

$$P_{\text{пред}} = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-L(a)}^{L(a)} e^{-t^2/2} dt.$$

Построим алгоритм определения интегральной степени исправности. Для произвольной точки $u \in U_{\text{ЭТ}}$ максимальное значение квантиля нормального распределения $L_u(a)$, при котором доверительный интервал в этой точке будет принадлежать эталонной области, находится по формуле: $L_u(a) = \min\{(X2(u) - F(u, C)), (F(u, C) - X1(u))\}/D$.

Каждому такому значению соответствует P_u – вероятность попадания пары (u, x) в эталонную область при заданном u . В соответствии с определением интегральной степени исправности получаем:

$$P_{\text{инт}} = \int_{u \in U_{\text{ЭТ}}} P_u du / \text{mes}(U_{\text{ЭТ}}).$$

Применив для нахождения P_u формулу, используемую при подсчете предельного значения степени исправности, получим

$$P_{\text{инт}} = (1/\sqrt{2\pi}(\text{mes}U_{\text{ЭТ}})) \int_{u \in U_{\text{ЭТ}}} \left[\int_{-L(a)}^{L(a)} e^{-t^2/2} dt \right] du.$$

6. Методика расчета нормированных погрешностей измерения амплитудных параметров системы. Для определения нормированных погрешностей измерительных каналов системы используем следующий алгоритм. На вход УСД (устройства сбора данных) по m каналам подается заданный эталонный сигнал $U_{\text{ист}}$. Снимаем N измерений по каждому из m каналов устройства. Обозначим X_{ij} – i измерение по j каналу ($i := 1..N$, $j := 1..m$). Считаем, что X_{ij} имеют нормальное распределение и попарно независимы. В процессе измерений уточняем достаточные статистики

$$SN_j = \sum_{i=1}^N X_{ij}, \quad DN_j = \sum_{i=1}^N X_{ij}^2$$

по правилу:

$$S_{0j} := 0; \quad D_{0j} := 0; \\ S_{ij} := S_{i-1,j} + X_{ij}, \quad D_{ij} := D_{i-1,j} + X_{ij}^2, \quad i = 1..N, \quad j = 1..m$$

Для каждого j -го канала по полученным статистикам вычисляем среднее значение $S_j = SN_j/N$ и несмещенную дисперсию $D_j = (DN_j - SN_j^2)/N$.

Среднеквадратичное отклонение, являющееся основной характеристикой случайной погрешности, оцениваем величиной $\sqrt{D_j}$. В качестве неустранимой систематической погрешности принимаем среднеквадратичное отклонение среднего

значения S_j , оцененное как $\sqrt{D_j}/N$. Для суммирования случайной и систематической погрешностей воспользуемся формулой $D_{\text{сум}} = \sqrt{D_j}/N + D_j$.

В качестве нормирующего значения выберем диапазон измерений на канале W_j . Нормированные погрешности j канала (в процентах) с учетом вышеприведенных формул находятся следующим образом:

$$\text{Выход (среднее значение)} \quad S_j = \sum_{i=1}^N X_{ij}/N$$

Учитываемая систематическая погрешность

$$S_{j\text{уч.сист}} = 100(S_j - U_{\text{ист}})/W_j$$

Не учитываемая систематическая погрешность

$$D_{j\text{неуч.сист}} = 100 \sqrt{\sum_{i=1}^N (X_{ij} - S_j)^2 / (N(N-1))} / W_j$$

$$\text{Случайная погрешность} \quad D_j = 100 \sqrt{\sum_{i=1}^N (X_{ij} - S_j)^2 / (N-1)} / W_j$$

Полная (систематическая неучитываемая + случайная)

$$D_j = \sqrt{D_{j\text{неуч.сист}}^2 + D_j^2}.$$

Результирующей характеристикой j -го канала являются нормированные учитываемая систематическая и полная погрешности.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Эйкхоф П. Основы идентификации систем управления. М:Мир, 1975. 676 с.
- [2] Огарков Е А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. Е :Энергоатомиздат, 1990. 208 с.: ил.
- [3] Венгеров А. А., Щаренский В. А. Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. Е: Энергоиздат, 1982.
- [4] Клюев В.В, Пархоменко П.П. и др. Технические средства диагностирования: Справочник. М: Машиностроение, 1989. 672 с.

Belikov N.V. Zanimonets Y.M. Yudin A.S. *Some problems of development of object-independent software and methodical complex for experimental data processing.* The concept of degree of working condition of object is defined in the paper. Also in the paper the mathematical model of object and its accuracy parameters are identified. The paper includes the formulae for computation of degree of working condition of object.

НЕКОТОРЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПОРИСТЫХ ПЬЕЗОКОМПОЗИТОВ 3-0 И 3-3 СВЯЗНОСТИ

Бобров С.В., Наседкин А.В., Рыбьянец А.Н.

Ростовский госуниверситет

В рамках метода эффективных модулей и конечно-элементного подхода для определения констант пористой пьезокерамики разработаны новые модели представительных объемов частично управляемой структуры. Представленные структуры позволяют моделировать пористые пьезокомпозиы 3-0 и 3-3 связности. Проведенные расчеты полного набора эффективных модулей пористой пьезокерамики ПКР-1 и сравнение их с результатами специальных экспериментов позволяют рекомендовать модель 3-3 связности как наиболее адекватную среди построенных.

В последние годы пористые пьезокерамические материалы привлекают все большее внимание для использования в ультразвуковых пьезопреобразователях. Основными преимуществами пористых пьезокомпозиов по сравнению с плотной пьезокерамикой являются их низкий акустический импеданс и высокая эффективность по ряду параметров. Во многих практических применениях пористые пьезокерамические материалы могут рассматриваться как однородные среды с эффективными модулями. Для расчета эффективных модулей пористых пьезокомпозиов различного типа связности был разработан ряд методов ([7, 9] и др.) Ниже развивается техника, основанная на методах эффективных модулей, моделировании представительных объемов и применении конечно-элементных технологий. В рамках этого подхода разработаны новые перспективные структуры представительных объемов, пригодные для моделирования пористых пьезокомпозиов 3-0 и 3-3 связности.

Метод эффективных модулей в стандартном варианте. В настоящем разделе кратко опишем технику метода эффективных модулей в стандартном варианте [2, 6, 8], обобщающем подход Фойгта для упругих композиов на случай пьезоэлектрических тел.

Пусть Ω – область, занимаемая неоднородным телом с пьезоэлектрическими свойствами; $\Gamma = \partial\Omega$ – граница тела; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – вектор внешней единичной нормали к Γ ; $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор-функция перемещений; $\varphi(\mathbf{x})$ – функция электрического потенциала. Всюду далее через $\boldsymbol{\varepsilon}$ будем обозначать тензор деформаций; через $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор механических напряжений; через \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля, а через \mathbf{D} – вектор электрической индукции. Поля $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{E} выражаются через \mathbf{u} и φ следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^*)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение модули неоднородной пьезоэлектрической среды $\mathbf{c}^E = \mathbf{c}^E(\mathbf{x})$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\epsilon}^S = \boldsymbol{\epsilon}^S(\mathbf{x})$ в соответствии с определяющими соотношениями:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E}. \quad (2)$$

Рассмотрим следующую статическую задачу электроупругости для представительного объема Ω :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ – некоторый постоянный симметричный положительно определенный тензор, \mathbf{E}_0 – некоторый постоянный вектор.

Для "эквивалентной" однородной среды с постоянными материальными свойствами $\mathbf{c}_0^E = \mathbf{c}^{Eff}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}^{eff}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^S = \boldsymbol{\varepsilon}^{Seff}$ задача (1)–(4) имеет простое решение $\mathbf{u}_0 = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\varphi_0 = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0$, причем деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ и напряженность электрического поля \mathbf{E} в области Ω будут равны соответственно $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и \mathbf{E}_0 , а механические напряжения $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ и электрическая индукция $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ будут выражаться в виде:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{c}^{Eff} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{e}^{eff*} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{D}_0 = \mathbf{e}^{eff} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^{Seff} \cdot \mathbf{E}_0.$$

Основным условием для нахождения эффективных модулей \mathbf{c}^{Eff} , \mathbf{e}^{eff} , $\boldsymbol{\varepsilon}^{Seff}$ в рассматриваемом методе принимаются равенства $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\sigma}_0$, $\langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{D}_0$, где в угловых скобках обозначены осредненные характеристики: $\langle (\dots) \rangle = (1/\Omega) \int_{\Omega} (\dots) d\Omega$.

Можно показать, что в случае пьезокерамической матрицы, однородно поляризованной вдоль оси x_3 , для определения полного набора эффективных модулей достаточно решить пять статических задач (1)–(4) со следующими специальными граничными условиями в (4):

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{E}_0 = 0 &\Rightarrow c_{1j}^{Eff} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad e_{31}^{eff} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_0; \\ \text{II)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{E}_0 = 0 &\Rightarrow c_{j3}^{Eff} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad e_{33}^{eff} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_0; \\ \text{III)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{E}_0 = 0 &\Rightarrow c_{44}^{Eff} = \langle \sigma_{23} \rangle / (2\varepsilon_0), \quad e_{15}^{eff} = \langle D_2 \rangle / (2\varepsilon_0); \\ \text{IV)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1 &\Rightarrow e_{15}^{eff} = -\langle \sigma_{13} \rangle / E_0, \quad \varepsilon_{11}^{Seff} = \langle D_1 \rangle / E_0; \\ \text{V)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_3 &\Rightarrow e_{3j}^{eff} = -\langle \sigma_{jj} \rangle / E_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{33}^{Seff} = \langle D_3 \rangle / E_0, \end{aligned}$$

где \mathbf{e}_k – орты основной декартовой системы координат, а в расчетных формулах для модулей использованы стандартные двухиндексные обозначения.

Более подробно математические аспекты метода эффективных модулей и другие его варианты приведены в [2].

Модели представительных объемов. Приведенные формулы расчета эффективных модулей предполагают решение соответствующих краевых задач электроупругости в областях Ω , которые должны являться представительными объемами пористых пьезокомпозиов. В качестве представительных объемов в идеале следует брать области, достаточно большие по сравнению с размерами неоднородностей (т.е. пор), но малые по сравнению с расстояниями, на которых существенно меняются осредняемые величины. Реально получаемые пористые пьезокерамические материалы имеют случайную нерегулярную структуру пористости с порами различных размеров. Например, на рис. 1 приведена оптическая фотография среза пьезокерамики ПКР-1 при пористости в 60 %. Отметим, что ранее ([4, 5, 8] и др.) для моделирования пористых структур рассматривались различные области Ω : в форме куба с кубической порой; эллипсоида с эллипсоидальной порой; модель пьезокерамического куба, равномерно разбитого на меньшие кубики, часть из которых случайным образом объедалась порами, и др. В [3, 8] были предложены усложнения метода с учетом частичной поляризации керамики в окрестности пор.

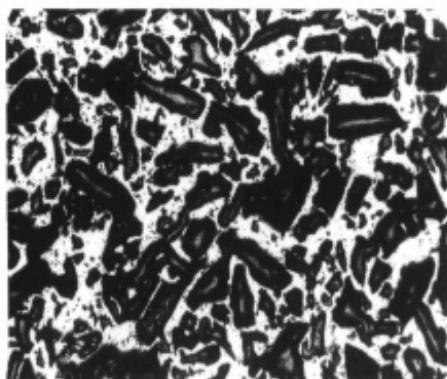


Рис. 1. Пьезокерамика ПКР-1 (60 % пористости).

Во всех этих случаях решение краевых задач электроупругости I–V проводилось численно по методу конечных элементов.

В настоящей работе анализируются три новые модели представительных объемов с частично управляемой (но и случайной) структурой пористости. Эти конструкции представительных объемов моделируют случаи полностью закрытой 3-0 пористости, смешанной 3-0 – 3-3 пористости с порами различной величины и 3-3 пористости. При этом во всех трех случаях поддерживается неразрывность и механическая жесткость каркаса.

Для обеспечения полностью закрытой 3-0 пористости предложена модель с частично управляемой структурой пористости. Представительный объем здесь взят в форме куба, разбитого равномерно на одинаковые элементарные составные кубики. В свою очередь каждый элементарный составной куб подразделяется на пьезоэлектрический каркас и кубик еще меньшего размера. Последний может быть как порой, так и средой с теми же пьезоэлектрическими свойствами, что и каркас. По заданной величине пористости часть маленьких кубиков случайным образом объявляются порами. В результате получается модель с полностью закрытой пористостью типа 3-0.

Для моделирования связности 3-3 были разработаны две модели. Одна модель, условно называемая моделью 3-0 - 3-3 связности, является развитием первой модели. В ней помимо больших кубиков в каркасе порами могут быть также тонкие параллелепипеды. Алгоритм заполнения построенного объема порами реализован на языке программирования C++. Элементам, составляющим объем Ω , поставлена в соответствие матрица размера $8n^3$, где n – количество ячеек вдоль каждой из осей. Если элемент не является порой, то он представлен в матрице нулем, иначе – целым числом – количеством элементов-пор, находящихся в непосредственном контакте с данным элементом. Для предотвращения возможности замыкания цепочки элементов-пор в программе введено ограничение на максимально возможное количество соединенных друг с другом пор. Распределение пор происходит в четыре этапа. На первом этапе признак пористости распределяется случайным образом среди кубических элементов. Во время следующих трех этапов поры распределяются случайным образом между элементами-параллелепипедами, причем

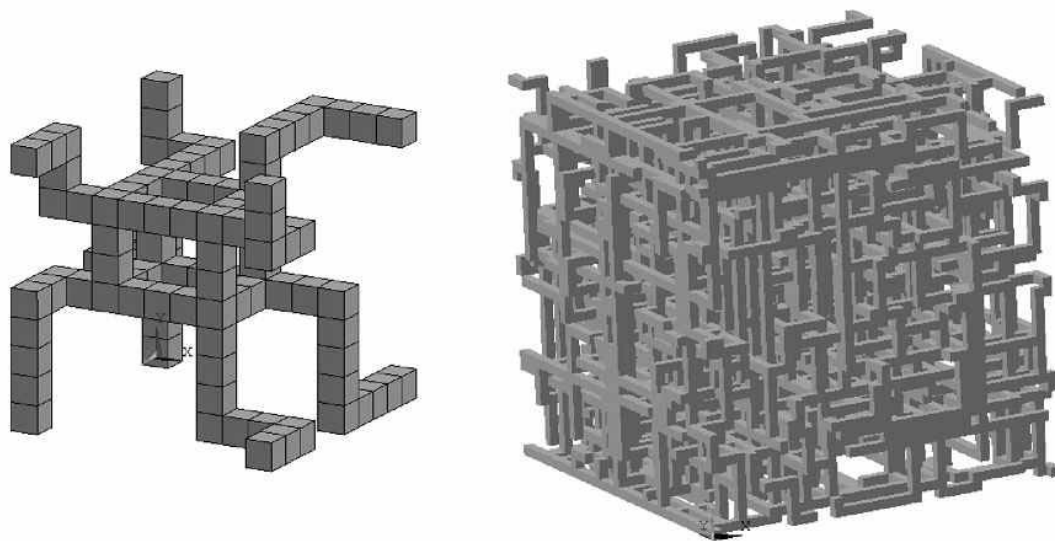


Рис. 2. Каркас и полная модель 3-3 связности.

признак пористости присваивается элементу только в том случае, если длина образовавшейся после добавления этого элемента цепочки элементов-пор не превысит допустимую.

Модель 3-3 связности строится следующим образом. В качестве объема рассматривается куб, полученный транслированием вдоль трех направлений ячеек одинаковой структуры. Ячейки, в свою очередь, также представляют собой куб, состоящий из кубических элементов размера $10 \times 10 \times 10$. В ячейке всегда присутствует связный каркас с элементами в вершинах куба. Каркас состоит из параллелепипеда, представленного своими ребрами (линейные размеры указываются датчиком случайных чисел), а также из цепочек элементов, соединяющих его вершины с вершинами основной ячейки. Соединительные цепочки элементов генерируются случайно. Каркас занимает 10 % от общего объема ячейки. (Таким образом, максимально возможная пористость, которая может быть достигнута в данной модели, составляет 90 %). Для достижения требуемого процента пористости в ячейки случайным образом добавляется необходимое число звеньев материала.

Пример каркаса приведен на рис. 2 слева, а один из вариантов сгенерированной структуры пористого объема Ω 3-3 связности – на рис. 2 справа.

Для численного решения задач I–V в объемах Ω были разработаны программы на макроязыке APDL конечно-элементного пакета ANSYS, предоставляющего возможности пьезоэлектрического анализа. Особенностью этих программ являлось совпадение геометрических и конечно-элементных моделей. При моделировании элементарной ячейки все геометрические фигуры, ее составляющие, строились как конечные элементы, а вершины этих фигур являлись узлами итогового разбиения. Таким образом, после транслирования ячеек и соответствующего удаления одинаковых соприкасающихся узлов получались представительные объемы Ω , разбитые на конечные элементы. Так как для каждой модели было необходимо решать пять

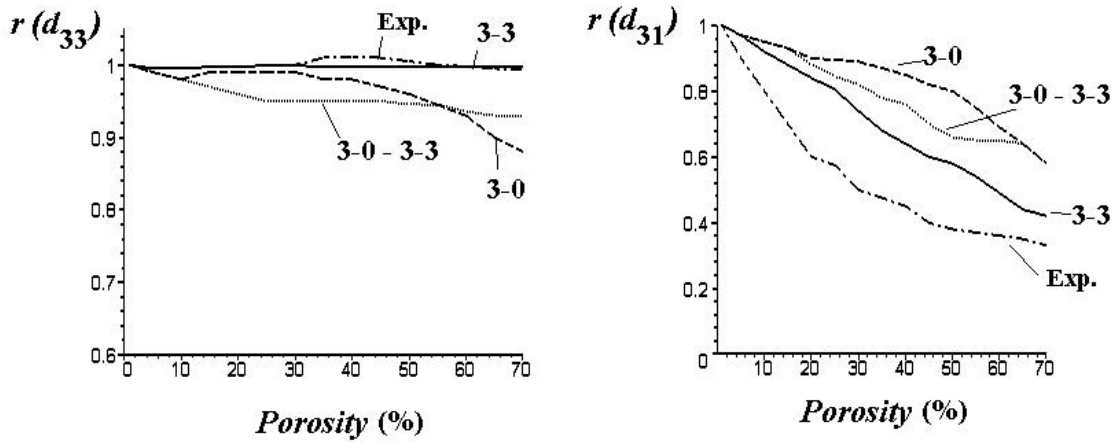


Рис. 3. Зависимости эффективных пьезомодулей от пористости.

задач с различными граничными условиями, то, соответственно, были разработаны программы, в которых задавались необходимые граничные условия I–V и находились различные эффективные модули.

Обсуждение результатов. Комплекс расчетов был проведен для пористой пьезокерамики ПКР-1, модули которой для плотного материала были взяты из [1]. Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными ([1] и специальные дополнительные эксперименты).

По результатам конечно-элементных расчетов полного набора эффективных модулей c_{ij}^{Eff} , e_{ij}^{eff} , ϵ_{ij}^{Seff} были вычислены другие эффективные характеристики: упругие податливости s_{ij}^{Eeff} , пьезомодули d_{ij}^{eff} , коэффициенты электромеханической связи k_t^{eff} , k_p^{eff} , скорости v_t^{eff} , v_{33}^{Deff} и т.д.

На рис. 3 приведены зависимости от величины пористости отношений пьезомодулей для пористой и плотной керамики $r(d_{3j}) = d_{3j}^{eff}/d_{3j}$ ($j = 1, 3$) для всех трех моделей 3-0; 3-0 – 3-3 и 3-3 связности, а также данные обработки экспериментов.

Как видно из рис. 3, для модели 3–3 связности наблюдается очень хорошее соответствие с экспериментом для значений пьезомодуля d_{33}^{eff} в широком диапазоне изменения пористости. Компьютерные вычисления пьезомодуля d_{31}^{eff} пористой керамики несколько хуже соответствуют вычисленным из экспериментов. Однако, и здесь лучшее соответствие наблюдается для модели 3-3 связности. Наибольшее отличие расчетных значений от экспериментальных наблюдается для 3-0 модели. Подобные сравнительные характеристики трех моделей имеют место и для других эффективных модулей и величин. Таким образом, можно заключить, что модель представительного объема 3-3 связности дает наилучшие результаты по сравнению с другими моделями, а также хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Работа выполнена в рамках грантов РФФИ (03-07-90411, 04-01-96803, 05-01-00752), программы "Университеты России" и гранта по поддержке ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Данцигер А.Я., Разумовская О.Н., Резниченко Л.А., Сахненко В.П., Клевцов А.Н., Дудкина С.И., Шилкина Л.А., Дергунова Н.В., Рыбьянец А.Н. Многокомпонентные системы сегнетоэлектрических сложных оксидов: физика, кристаллохимия, технология. Аспекты дизайна пьезоэлектрических материалов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 2002. Т. 2. 365 с.
- [2] Наседкин А.В. О некоторых способах определения эффективных характеристик неоднородных пьезоматериалов // Совр. пробл. мех. сил. среды: Тр. VII Межд. конф. памяти акад. РАН И.И.Воровича, Ростов-на-Дону, 22-24 окт. 2001 / Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2002. Т. 1. С. 14–22.
- [3] Наседкин А.В. О некоторых численных экспериментах по расчету эффективных модулей пористой пьезокерамики // Совр. пробл. мех. сил. среды: Тр. VIII Межд. конф., Ростов-на-Дону, 14-18 окт. 2002 / Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2003. С. 110–115.
- [4] Наседкин А.В. Реализация в ANSYS метода эффективных модулей для расчета характеристик пористых пьезокомпозиов // Сб. тр. III конф. пользователей программного обеспечения CAD-FEM GmbH (Москва, 22-24 апр. 2003 г.). / Под ред. А.С. Шадского. М.: Изд-во "Барс", 2003. С. 478–481.
- [5] Наседкин А.В., Рыбьянец А.Н. Моделирование структуры представительных объемов пористых пьезокомпозиов и расчет их эффективных характеристик // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 91–95.
- [6] Хорошун Л.Н., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композиционных материалов. Киев.: Наукова Думка, 1989. 347 с.
- [7] Dunn H., Taya M. Electromechanical properties of porous piezoelectric ceramics // J. Am. Ceram. Soc. 1993. V. 76. P. 1697–1706.
- [8] Getman I., Lopatin S. Theoretical and experimental investigation of the porous PZT ceramics // Ferroelectrics. 1996. V. 186. P. 301–304.
- [9] Wersing W., Lubitz K., Moliaupt J. Dielectric, elastic and piezoelectric properties of porous PZT ceramics // Ferroelectrics. 1986. V. 68. P. 77–97.

Bobrov S.V., Nasedkin A.V., Rybjanets A.N. *Some finite element models for 3-0 and 3-3 porous piezocomposites.* Theoretical aspects of the effective moduli method for an inhomogeneous piezoelectric media were examined. Based on these techniques and using finite element method (FEM) the full set of effective moduli for PCR porous ceramics having wide porosity range was calculated. New different models of representative volume were considered: piezoelectric cubic volume evenly divided on partial cubic volumes a part of which randomly declared as pores (3-0 and 3-0 – 3-3 connectivity) and piezoelectric cube with 3-3 porosity. The results of FEM modeling were compared with the experimental data for different porosity.

ДВУКРАТНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН ОТ ПОВЕРХНОСТЕЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ПОЛОСТЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Боев Н. В.

Ростовский государственный университет, механико-математический факультет

Двукратное отражение высокочастотных волн от поверхностей системы двух полостей, находящихся в бесконечной упругой среде. На основе асимптотической оценки многомерных дифракционных интегралов методом стационарной фазы получен в замкнутом виде главный член асимптотики перемещений дифрагированного поля в случае двукратного отражения с учетом трансформаций упругих волн.

На основе асимптотической оценки многомерных дифракционных интегралов методом стационарной фазы получен в замкнутом виде главный член асимптотики перемещений дифрагированного поля в случае двукратного отражения с учетом трансформаций упругих волн.

Применение ГТД Келлера, основанной на использовании коэффициентов расходимости, уже в случае двукратного отражения волны является достаточно громоздким. Если исследовать задачу о переотражении высокочастотной волны от поверхности упругого тела с различными возможными трансформациями волн произвольного N числа раз, то, на наш взгляд, более удобно исходить из оценки $2N$ кратного дифракционного интеграла методом многомерной стационарной фазы. Основой исследования общего случая произвольного числа переотражений является задача о двукратном отражении, к рассмотрению которой переходим.

Прямое использование интегрального представления Сомильяны [1] по всей зоне “света” для отраженных волн невозможно [2], так как оно не описывает многократно отраженных волн. Если в формулу Сомильяны подставить в качестве полного поля $u(y)$ значения первичного поля, то интегральная формула Сомильяны дает лишь однократно отраженную волну. Двукратно отраженная волна получится лишь тогда, когда значения $u(y)$ включают в себя и первичное поле, и его однократное отражение. Для решения задачи о двукратном переотражении будем исходить из модификации [2] интегральной формулы Сомильяны. Следуя этой модификации, двукратно отраженные волны будем находить интегрированием по окрестности S_2 второй точки зеркального отражения y_2^* , лучей, полученных при однократном отражении от окрестности S_1 первой точки зеркального отражения y_1^* . Такая модификация означает, что при нахождении главного члена асимптотики четырехкратного дифракционного интеграла мы будем находиться в рамках расчета амплитуды перемещений в двукратно отраженной волне по ГТД.

Пусть из точки x_0 бесконечной упругой среды на граничную поверхность находящейся в ней полости падает сферическая монохроматическая высокочастотная волна. Волна порождается сосредоточенной в точке x_0 силой $Qe^{-i\omega t}$, где ω - частота колебаний. При этом главный член асимптотики амплитуды перемещений

в продольной (p) составляющей сферической волны в точке $y(y_1, y_2, y_3)$ упругого пространства определяются на основе матрицы Купрадзе.

$$Q_{\mathbf{q}} = (Q, \mathbf{q})$$

$$\mathbf{u}_q^{(p)}(y) = Q_q q \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} \left[1 + O\left((k_p R_0)^{-1}\right) \right], \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}}{|\mathbf{x}_0 \mathbf{y}|}, R_0 = |x_0 - y|$$

Здесь ρ – плотность, λ, μ – коэффициенты Лямэ, $k_p = \omega/c_p, k_s = \omega/c_s, c_p, c_s$ – волновые числа и скорости продольной и поперечной волн.

Зависимость характеристик задачи от времени монохроматическая, в частности, для перемещений в упругой среде она имеет вид:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \text{Re} \left[u(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t} \right]$$

Переотражение высокочастотной волны рассмотрим на примере повторного отражения луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$, излучающегося из точки x_0 (p волна (1)) и принимающегося в точке x_3 с возможной трансформацией $p - s - p$ (продольной в поперечную и поперечной в продольную).

Компоненты вектора перемещений p -волны в точке приема x_3 даются следующей формулой

$$u_k^{(p)}(x_3) = \iint_{S_2} T_{y_2} \left[U_p^{(k)}(y_2, x_3) \right] \cdot \mathbf{u}(y_2; s) dS_2,$$

$$U_j^{(k)}(y, x) = U_{jp}^{(k)}(y, x) + U_{js}^{(k)}(y, x), U_{jp}^{(k)}(y, x_3) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left(\frac{e^{ik_p R}}{R} \right)$$

$$T_y \left[\mathbf{U}^{(k)}(y, x) \right] = 2\mu \frac{\partial \mathbf{U}^{(k)}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \text{ div} \left(\mathbf{U}^{(k)} \right) + \mu \left(\mathbf{n} \times \text{rot} \left(\mathbf{U}^{(k)} \right) \right),$$

$$R = |x - y| k, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Здесь $u(y_2; s)$ – вектор полного перемещения в точке $y_2 \in S_2$ окрестности точки зеркального отражения y_2^* , который определяется после первой $p - s$ трансформации на окрестности S_1 точки зеркального отражения y_1^* .

При асимптотической оценке интеграла Кирхгофа в формуле (2) компоненты вектора полного поля перемещений $u_k(y_2; s)$, $k = 1, 2, 3$ под знаком интеграла следует выбрать как решение локальной задачи дифракции об отражении плоской падающей s -волны, сформированной при $p - s$ трансформации на окрестности S_1 точки зеркального отражения y_1^* .

В то же время компоненты вектора перемещений $u_k^{(s)}(y_2)$, $k = 1, 2, 3$ сами

выражаются подобной формулой

$$u_k^{(s)}(y_2) = \iint_{S_1} T_{y_1} [U_s^{(k)}(y_1, y_2)] \cdot u(y_1; p) dS_1$$

$$U_{js}^{(k)}(y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[k_s^2 \delta_{kj} \left(\frac{e^{ik_s R_1}}{R_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left(\frac{e^{ik_s R_1}}{R_1} \right) \right], \quad (3)$$

$$R_1 = |y_1 - y_2|$$

где вектор $u(y_1; p)$ полного поля перемещений в точках $u(y_1; p)$ окрестности y_1^* следует выбрать как решение локальной задачи дифракции об отражении плоской падающей p -волны (1) от окрестности S_1 . После подстановки (1) в (3), а (3) в (2) и перехода в сферическую систему координат r, θ, ψ в точке y_2^* приходим к компонентам перемещений в точке x_3 .

$$u_r^{(p)}(x_3) = - \frac{Q_q}{4\pi\mu} \frac{k_p}{k_s} \left(\frac{k_p}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k_p}{2k_s} \right)^2 \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_3}{L_0 L_1 L_2} V_{ps}(y_1^*) V_{sp}(y_2^*) \times$$

$$\times \iint_{S_2} \iint_{S_1} e^{ik_p \varphi_{psp}} dS_1 dS_2$$

$$u_\theta^{(p)}(x_3) = 0, u_\psi^{(p)}(x_3) = 0, u_\theta^{(p)}(x_3) = 0, u_\psi^{(p)}(x_3) = 0$$

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, \quad L_1 = |y_1^* - y_2^*|, \quad L_2 = |y_2^* - x_3| \quad (4)$$

где V_{ps} и V_{sp} коэффициенты $p-s$ и $s-p$ трансформаций.

Окончательный результат может быть получен из выражения (4) применением метода четырехмерной стационарной фазы [3].

$$u_r^{(p)}(x_3) = B_2 \times \frac{e \left\{ i \left[k_p L_0 + k_s L_1 + k_p L_2 + \frac{\pi}{4} \left(\delta_4^{(psp)} + 4 \right) \right] \right\}}{L_0 L_1 L_2 \sqrt{|\det(D_4^{(psp)})|}} \quad (5)$$

$$B_2 = \frac{Q_q}{4\pi\mu} \frac{k_p}{k_s} V_{ps}(y_1^*) V_{sp}(y_2^*) \cos \gamma_1 \cos \gamma_3$$

где $\delta_4^{(psp)} = \text{sign} D_4^{(psp)}$, $D_4^{(psp)} = (d_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ – гессин симметричной структуры, а его элементы d_{ij} , $i \leq j$ определяются выражениями:

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \beta \end{Bmatrix} + \frac{k_s}{k_p L_1} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_1 \\ \sin^2 \beta_1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{Bmatrix} \left(\cos \gamma + \frac{k_s}{k_p} \cos \gamma_1 \right)$$

$$\begin{Bmatrix} d_{33} \\ d_{44} \end{Bmatrix} = \frac{k_s}{k_p L_1} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_2 \\ \sin^2 \beta_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{L_2} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_3 \\ \sin^2 \beta_3 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \end{Bmatrix} \left(\frac{k_s}{k_p} \cos \gamma_2 + \cos \gamma_3 \right)$$

$$\begin{aligned}
d_{12} &= -L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta - k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \\
d_{34} &= -k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 - L_2^{-1} \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \\
d_{13} &= k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - c_{11}), d_{14} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - c_{21}) \\
d_{23} &= k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \beta_1 \cos \alpha_2 - c_{12}), d_{24} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \beta_1 \cos \beta_2 - c_{22}) \\
c_{11} &= a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + a_{31} b_{31}, c_{12} = a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{32} b_{31} \\
c_{21} &= a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} + a_{31} b_{32}, c_{22} = a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{32} b_{32}.
\end{aligned}$$

где элементы матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, $k, j = 1, 2, 3$ определяются направлениями падающих и отраженных волн в точках зеркального отражения y_1^* и y_2^* , при этом элементы матрицы B определяются также углом поворота плоскости луча $x_0 - y_1^* - y_2^*$ в точке y_2^* .

Итак, амплитуда переотраженной волны (5) выражается через определитель четвертого порядка, элементы которого выписаны в явном виде и определяются геометрическими и механическими параметрами задачи.

Следуя изложенному методу, могут быть рассмотрены и любые другие возможные отражения и трансформации луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$, а также отражения и трансформации луча произвольное (N кратное) число раз.

Работа выполнена поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428) и гранта РФФИ № 05-01-00155а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [2] *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теории дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [3] *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Boyev N.V. *Double reflection of high-frequency waves from surfaces of a pair of voids dislocated in an unbounded elastic medium..* On the basis of a certain asymptotic estimate of manifold diffraction integrals by a stationary phase method there is obtained in an explicit form the leading asymptotic term for displacements in diffraction wave field, in the case of double re-reflections with a transformation of elastic waves.

ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУДЫ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СКОПЛЕНИЯ ДИСЛОКАЦИЙ И МИКРОТРЕЩИН ОТ ЧАСТОТЫ И СКОРОСТИ НАГРУЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Буйло С. И.

НИИ механики и прикладной математики Ростовского госуниверситета

Рассмотрена модель акустического излучения скопления дислокаций при его переходе через границу. Получена зависимость амплитуды акта акустической эмиссии от скорости деформации и частоты нагружения. Для случая степенного амплитудного распределения получены алгоритмы, позволяющие восстановить количество потерянных актов акустической эмиссии (АЭ) ниже порога дискриминации аппаратуры и скорректировать параметры регистрируемого потока актов АЭ при различной частоте и скорости нагружения.

Известно, что каждому коллективному акту повреждения структуры материала (срыв лавины дислокаций, слияние микротрещин между собой, с макротрещиной и т.д.) соответствует первичный упругий импульс, процесс излучения которого представляет собой так называемый акт АЭ (акт акустической эмиссии). Таким образом, измерение интенсивности потока (скорости следования) актов АЭ и их общего количества позволяет исследовать кинетику накопления повреждений, диагностировать стадии деформации и прогнозировать момент наступления разрушения [1].

Вместе с тем, практическое использование метода АЭ для количественного определения параметров процессов накопления повреждений при деформировании в широком диапазоне скоростей (или частот) нагружения сопровождается существенными трудностями, так как еще недостаточно изучена связь параметров АЭ со скоростью деформации.

Дело в том, что при регистрации АЭ всегда существует некоторый пороговый уровень дискриминации, ниже которого сигналы АЭ просто не могут быть зарегистрированы. При этом плотность амплитудного распределения АЭ обычно имеет монотонно спадающий вид, что приводит к потере достаточно большой части излученных импульсов АЭ, имеющих амплитуду ниже порога дискриминации. В этих условиях зависимость амплитуды АЭ излучения от скорости деформации приводит к тому, что при разных скоростях деформации теряется разный процент излученных импульсов АЭ. Это при относительно высоких порогах дискриминации (например, вследствие высокого уровня шумов) заметно снижает точность и достоверность результатов оценки параметров процессов накопления повреждений по параметрам сопутствующей АЭ.

Рассмотрим связь амплитуды АЭ со скоростью деформации на примере модели излучения АЭ при переходе скопления дислокаций через границу. При деформировании материалов движущиеся дислокации скапливаются у препятствий, что приводит к появлению касательного напряжения, большего, чем активирующее источник. Релаксация этого напряжения сопровождается излучением импульсов АЭ.

Полагая, что каждая дислокация при пересечении границы излучает короткий экспоненциальный импульс x_{oi} , и учитывая, что их суперпозиция дает регистрируемый импульс амплитудой X , нами получен следующий вид нормированной амплитуды суммарного импульса АЭ [2].

$$A = \frac{X}{nx_{oi}} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} e\left(-\frac{\lambda l}{n}\right); \quad \lambda^{-1} \sim \bar{v}; \quad \bar{v} \sim \dot{\epsilon}, \quad (1)$$

где n – количество дислокаций в скоплении; λ – отношение времени пересечения границы скоплением к постоянной времени релаксации напряжения τ_a ; \bar{v} – среднее значение скорости дислокаций.

Далее, учитывая, что скорость деформации $\dot{\epsilon}$ линейно связана со средней скоростью дислокаций \bar{v} , и перейдя от суммирования к интегрированию получим

$$A \simeq \frac{1}{n} \int_0^{n-1} e\left(-\frac{Cl}{n\dot{\epsilon}}\right) dl = \frac{\dot{\epsilon}}{C} \left[1 - e\left(-\frac{C}{\dot{\epsilon}}\right)\right]. \quad (2)$$

Здесь C некоторая константа. Аналогичные зависимости выполняются и при объединении скопления микротрещин в макротрещину.

Соотношение (2) устанавливает общий вид зависимости скорости или частоты нагружения на амплитудные параметры АЭ. Это, как будет показано ниже, позволяет скорректировать влияние этой зависимости и на интенсивность регистрируемых импульсов, что, в свою очередь, позволяет заметно повысить точность определения общего количества актов АЭ до разрушения.

Дело в том, что усталостные испытания обычно сопровождаются большим количеством акустических помех, что вынуждает устанавливать достаточно высокий порог u_t дискриминации регистрируемых сигналов АЭ. Как следствие, это приводит к тому, что значительная часть актов АЭ не может быть зарегистрирована и теряется, т.к. их амплитуды лежат ниже порога дискриминации.

Для решения этой проблемы нами предложен метод восстановления количества актов АЭ с амплитудами ниже порога дискриминации по известной плотности амплитудного распределения АЭ.

К настоящему времени можно считать установленным, что плотность амплитудного распределения АЭ обычно имеет монотонно-спадающий вид, и в большом динамическом диапазоне хорошо описывается зависимостью вида [3]:

$$w(u) = (u/u_v)^{-m}, \quad 1 < m < 3. \quad (3)$$

При этом обычно $m \approx const$ почти вдоль всей кривой нагружения и чаще всего $m \approx 2$.

Пронормировав (3) на единичную площадь, и проведя соответствующие преобразования, в результате получим нормированную плотность амплитуд АЭ в виде

$$w_n(x) = (1 - m)(D^{1-m} - 1)w(x). \quad (4)$$

Здесь $x = u/u_t$ – нормированная амплитуда; $D = u_{max}/u_t$ – динамический диапазон сигналов АЭ; u_{max} – максимальная амплитуда, соответствующая верхней границе динамического диапазона сигналов АЭ.

Допустим, что в случае высокой скорости нагружения было зарегистрировано N_a^* актов АЭ, а динамический диапазон сигналов АЭ при этом был D_1 . Тогда, при уменьшении скорости деформации динамический диапазон регистрируемых сигналов уменьшится до значения D_2 , а зарегистрированное количество актов АЭ N_a будет определяться следующим соотношением

$$N_a = N_a^* \int_1^D w_n(x) dx$$

Дважды пронормировав $w(x)$ на единичную площадь при соответствующих значениях динамического диапазона D , посчитав соответствующие интегралы и проведя преобразования получим, что восстановленное при уменьшении скорости деформации общее количество актов АЭ N_a^* для случая наиболее часто встречаемого на практике значения показателя степени $m = 2$ можно определить из соотношения

$$N_a^* = N_a \frac{(D_1 - 1)D_2}{(D_2 - 1)D_1} \quad \text{при } m = 2. \quad (5)$$

Полученное нами соотношение (5) в принципе решает поставленную задачу, т.е. позволяет восстановить потерянные при уменьшении скорости (или частоты) деформации акты АЭ, имеющие амплитуды ниже порога дискриминации u_t . Вместе с тем, его практическое использование встречает определенные трудности, т.к. для оценки динамического диапазона сигналов D надо знать максимальную амплитуду сигналов АЭ u_{max} , измерение которой с требуемой точностью (при этом, чаще всего по одному единственному импульсу) далеко не всегда оказывается возможным.

В случае наиболее часто наблюдаемой эмиссии с амплитудным параметром m близким к 2, для решения этой проблемы нами предлагается метод оценки динамического диапазона D по измерению среднего значения амплитуд АЭ m_x . Требуемую для реализации этого метода связь средней амплитуды с динамическим диапазоном регистрируемых сигналов можно получить с помощью формулы математического ожидания случайной величины x с известной ее нормированной плотностью распределения $w_n(x)$

$$m_x = \int_1^D x w_n(x) dx = \frac{1 - m}{D^{1-m} - 1} \int_1^D x^{1-m} dx = \frac{\ln D}{1 - D^{-1}} \quad \text{при } m = 2. \quad (6)$$

Соотношение (6) позволяет достаточно просто оценить D по экспериментально измеренным значениям m_x . Это особенно ценно, т.к. полученный выше вид зависимости амплитуды АЭ от скорости деформации (2), как показывает практика, наиболее точно выполняется именно при измерении средней амплитуды регистрируемых сигналов АЭ.

Таким образом, используя полученные соотношения (1)-(6) можно восстановить количество потерянных актов АЭ ниже порога дискриминации аппаратуры и скорректировать параметры регистрируемого потока актов АЭ при различной частоте и скорости нагружения.

Эксперименты показывают, что такое восстановление во многих случаях дает существенное увеличение точности оценки параметров процессов накопления повреждений в материалах по данным АЭ испытаний. Это позволяет заметно (обычно почти вдвое) повысить достоверность результатов АЭ диагностики предразрушающего состояния материалов.

Работа выполнена поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буйло С.И. Диагностика стадий деформации и разрушения по интегральным параметрам потока актов акустической эмиссии // Дефектоскопия РАН. 2004. № 8. С. 66–78.
- [2] Builo S.I., Crostack H.A., Reuss G. Application of Acoustic Emission Amplitude Analysis to Strength Diagnostics and NDT. //Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 2-ой Междунар. конф. Ростов-на-Дону. 1996. Т. 3. С. 34–37.
- [3] Буйло С.И. Использование статистических моделей для количественной оценки искажения амплитудных распределений сигналов акустической эмиссии и повышения достоверности результатов АЭ метода // Дефектоскопия РАН. 1996. № 5. С. 25–34.

Builo S.I. *Dependence of Amplitude of an Acoustic Emission of a Pile-up of Dislocations and Microcracks from Frequency and Strain Rate of Solid Bodies*. The model of an acoustic radiation of a pile-up of dislocations for want of it transition through the boundary is considered. The dependence of amplitude of the act of acoustic emission of a strain rate and frequency of loading is obtained. For case of power peak amplitude distribution the algorithms permitting to restore an amount of the lost AE-acts under of a threshold of discrimination of an equipment and to correct parameters of a registered AE-acts flow for want of to various frequency and a velocity of loading are obtained.

НОВОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ватульян А.О.

Ростовский государственный университет

На основе теоремы взаимности для неоднородных упругих тел построены новые соотношения и интегральные уравнения, использующиеся при решении коэффициентных обратных задач.

Рассмотрены примеры для стержня и прямоугольника.

Задачи об определении коэффициентов дифференциальных операторов, которые описывают волновые процессы в идеально-упругих и вязкоупругих телах, в последние годы приобретают все большую актуальность в связи с проблемами идентификации в разных областях механики. Модель однородной изотропной теории упругости, играющая огромную роль в современной практике расчетов на прочность, устойчивость и колебания, в некоторых случаях требует уточнения и отказа от гипотезы однородности среды (в геофизике, наномеханике, горной механике), причем определение модулей упругости как функций координат из экспериментальных данных о волновых полях на поверхности тела требует решения обратных задач. Наиболее информативными считаются нестационарные постановки [1-3], однако случай установившихся колебаний, часто встречающийся на практике, требует совершенно иных математических средств. В настоящей работе предложены новые интегральные уравнения, к которым сводятся обратные задачи для конечных упругих тел в случае установившихся колебаний на основе процедуры линеаризации.

1. Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях с частотой ω односвязной ограниченной области V с границей $S = S_u \cup S_\sigma$. При этом будем различать два состояния: первое соответствует тензору модулей упругости $C_{ijkl}^{(1)}(x)$, компонентам вектора смещений $u_i^{(1)}$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$, второе - соответственно $C_{ijkl}^{(2)}(x)$, $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$. В области V для каждого состояния выполнены уравнения движения и закон Гука

$$\sigma_{ij,j}^{(m)} + \rho\omega^2 u_i^{(m)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sigma_{ij}^{(m)} = C_{ijkl}^{(m)} u_{k,l}^{(m)} \quad (1)$$

и граничные условия, одинаковые для обоих состояний

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i. \quad (2)$$

Для взаимных состояний, удовлетворяющих (1-2), имеет место соотношение взаимности

$$\int_V (C_{ijkl}^{(2)} - C_{ijkl}^{(1)}) u_{k,l}^{(2)} u_{i,j}^{(1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS = 0, \quad (3)$$

причем в случае, когда $C_{ijkl}^{(1)}(x) = C_{ijkl}^{(2)}(x)$, объемный интеграл в (3) равен нулю и имеем известное соотношение Бетти [4]. Соотношение (3) позволяет формулировать операторные соотношения, связывающие упругие характеристики области V и граничные поля смещений и напряжений на S .

2. Сформулируем задачу об определении упругих модулей как функций координат по информации

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (4)$$

соответствующей измерению поля перемещений на части границы S_σ , на которой осуществляется нагружение, и моделирующей эхо-режим в акустических методах неразрушающего контроля. Отметим, что часто в постановке обратных задач считается известным поле смещений на части границы, свободной от нагрузок, однако в этом случае система разрешающих уравнений содержит промежуточные неизвестные функции.

Задача об определении модулей упругости решается на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого осуществляется решение линейной задачи.

Полагая

$u_i^{(1)} = u_i^{(0)}$, $u_i^{(2)} = u_i^{(0)} + \nu_i$, $C_{ijkl}^{(1)} = C_{ijkl}^{(0)}$, $C_{ijkl}^{(2)} = C_{ijkl}^{(0)} + R_{ijkl}$ и, сохраняя в (3) линейные по ν_i и R_{ijkl} слагаемые, с учетом дополнительного условия (4) получим

$$\int_V R_{ijkl} u_{k,l}^{(0)} u_{i,j}^{(0)} dV + \int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(0)}) dS = 0, \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (5)$$

Соотношение (5) можно трактовать как интегральное уравнение относительно компонент $R_{ijkl}(x)$, если предварительно решена прямая задача о распределении поля смещений внутри области V и на ее границе S с упругими характеристиками $C_{ijkl}^{(0)}(x)$, (эталонное поле). В изотропном случае тензор упругих постоянных выражается через две функции Ляме $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ и уравнение (5) примет вид

$$\int_V [\lambda^{(1)}(x) (u_{k,k}^{(0)})^2 + \frac{1}{2} \mu^{(1)}(x) (u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}) (u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)})] dV + \int_{S_\sigma} p_i [f_i - u_i^{(0)}] dS = 0, \quad (6)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

Функции $\lambda^{(1)}(x)$ и $\mu^{(1)}(x)$ находятся из интегрального уравнения (6) на основе процедуры регуляризации [5] при наличии априорной информации о том, что они положительны. Отметим, что подынтегральное выражение в объемном интеграле в (5)-(6) представляет собой по форме аналог удвоенной удельной потенциальной энергии деформаций, в которой деформации соответствуют эталонному полю, а модули – другому. Поверхностный интеграл характеризует работу заданной нагрузки на дополнительных полях перемещений, характеризующих разность между компонентами на границе S_σ эталонного поля перемещений и перемещениями, заданными в обратной задаче. Интегральное уравнение (6) на основе процедуры дискретизации сводится к решению линейной алгебраической системы, при решении которой необходимо использовать регуляризующие алгоритмы [5]. Отметим, что недостаток информации для восстановления модулей упругости восполняется как за счет дополнительных интегральных соотношений вида (5)-(6) при изменении вида или области нагружения; так и за счет априорного сужения класса отыскиваемых функций, например, до кусочно-линейных. На основании (5,6)

формулируется итерационный процесс о нахождении искомых упругих характеристик.

3. В качестве примеров приведем вид интегральных уравнений в некоторых частных случаях.

В антиплоской задаче для бруса с поперечным сечением S соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$\int_S \mu^{(1)}(x) \left[\left(\frac{du^{(0)}}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{du^{(0)}}{x_2} \right)^2 \right] dS + \int_{l_2} p[f - u^{(0)}] dl_x = 0, \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (7)$$

и служит для определения модуля сдвига.

4. В задаче о продольных колебаниях стержня длины l с переменным модулем Юнга $E = E(x)$ соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$\int_0^l E_1(x) (u_0')^2 dx + p(-u_0(l, \omega) + f(\omega)) = 0, \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (8)$$

и используется для нахождения модуля Юнга.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 05-01-00734) и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-2113.2003.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 261с.
- [2] Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Наука, Новосибирск. 1990. 304с.
- [3] Вии H.D. Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction. Boca Raton. FL: CRC Press, 1994. 224pp.
- [4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

Vatulyan A.O. *New integral equation in the inverse coefficient problems of the theory of elasticity.* On the base of the reciprocity theorem new expressions and integral equations, using for the coefficient inverse problems solving for the inhomogeneous elastic bodies are built. The examples for the beam and rectangle are considered.

СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В УПРУГОМ СЛОЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В.
Кубанский государственный университет, Краснодар

На основе разработанных полуаналитических методов решения задач дифракции упругих волн на горизонтальной трещине исследуется прохождение и отражение нормальных мод в слое и механизмы их блокирования. Показано, что резонансное блокирование сопровождается локализацией энергии в окрестности трещины. Проводится анализ коэффициентов прохождения и отражения в зависимости от частоты, размеров и расположения трещины и их связь с точками спектра краевой задачи. Найдены вещественные точки спектра, для которых строятся собственные формы колебаний, описывающие локализацию волнового процесса в окрестности трещины.

1. При дифракции бегущих волн на поверхностных и внутренних препятствиях возможен захват и локализация энергии. Это явление, сопровождается резонансным ростом амплитуды колебаний частиц в окрестности препятствия [1] - [5]. Такие задачи возникают при неразрушающем (волновом) контроле отслоений пленочных и нано-покрытий, дефектов сварных соединений и зон разрушения слоистых композитов. Характерной особенностью резонансной локализации энергии является резкое экранирование прохождения нормальных мод на определенных частотах. Проведенные ранее исследования механизмов блокирования рэлеевской волны приповерхностной трещиной в полуплоскости [6] показали, что наряду с резонансным захватом энергии на частотах ω , близких к вещественным резонансным полюсам ω_n ($\omega = \text{Re } \omega_n, |\text{Im } \omega_n| \ll 1$), возможно также полное блокирование за счет взаимного гашения набегающей и переотраженной рэлеевской волны без резонансной локализации энергии. В настоящей работе приводятся результаты дальнейших исследований для случая трещины в слое.

2. В плоской постановке рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u} = (u_x, u_z)$) упругого изотропного двуслойного волновода, занимающего в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x, z)$ область $|x| \leq \infty, -H \leq z \leq 0$, разделенную на два слоя $S_1 : -d \leq z \leq 0$ и $S_2 : -H \leq z \leq -d$. Перемещения \mathbf{u} в каждом из слоев удовлетворяют уравнениям Ляме с различными в общем случае значениями упругих констант и плотности при $z > -d$ и $z < -d$. Трещина моделируется бесконечно тонким разрезом по отрезку $|x| \leq a, z = -d$, на берегах которого отсутствуют напряжения $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \sigma_{zz})$:

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=-d} = 0, \quad |x| < a, \quad (1)$$

а поле смещений терпит разрыв с неизвестным скачком

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{z=-d-0} - \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{z=-d+0}. \quad (2)$$

На остальной части границы $z = -d$ напряжения и смещения непрерывны. Ввиду линейности задачи гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен. Рассматривается свободный волновод, на границах которого $z = 0$ и $z = -H$ заданы условия отсутствия напряжений. Постановку задачи замыкают условия излучения на бесконечности, вытекающие из принципа предельного поглощения [2].

Поле смещений \mathbf{u} в волноводе с дефектом складывается из возбуждаемого поверхностным источником волнового поля \mathbf{u}_0 и поля дифрагированных волн \mathbf{u}_c : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_c$. С помощью преобразования Фурье \mathcal{F} по горизонтальной координате x эти поля можно выразить в виде контурных интегралов через заданную нагрузку \mathbf{q}_0 и неизвестный скачок смещений \mathbf{v} соответственно:

$$\mathbf{u}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [K(\alpha, z)\mathbf{Q}_0(\alpha) + M(\alpha, z)\mathbf{V}(\alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3)$$

Здесь K, M – трансформанты Фурье матриц Грина рассматриваемого волновода, столбцами которых являются векторы смещений, вызванных сосредоточенными сдвиговой и нормальной нагрузками (для K) и сосредоточенными скачками смещений на разрезе (для M); $\mathbf{Q}_0 = \mathcal{F}[\mathbf{q}_0]$, $\mathbf{V}_0 = \mathcal{F}[\mathbf{v}]$.

Скачок \mathbf{v} определяется из уравнения Винера-Хопфа $\mathcal{L}\mathbf{v} = \mathbf{f}(x)$, $|x| < a$, которое возникает при подстановке интегрального представления (3) в граничные условия (1). Его решение строится по схеме Петрова-Галеркина путем разложения $\mathbf{v}(x)$ по базисным функциям $p_k(x)$ (сплайнам или ортогональным полиномам):

$$\mathbf{v}(x) \approx \sum_{k=0}^N \mathbf{c}_k p_k(x),$$

а невязки $\mathcal{L}\mathbf{v} - \mathbf{f}$ по системе проекторов $\varphi_l(x)$. Тем самым задача сводится к линейной алгебраической системе уравнений относительно вектора неизвестных коэффициентов разложения $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_N)^T$: $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}$, с матрицей $\mathbf{A} = \|a_{lk}\|_{l,k=1}^N$, $a_{lk} = (\mathcal{L}p_k, \varphi_l)_{L_2}$ и правой частью $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_N)$, $\mathbf{f}_l = (-\tau_0(-d), \varphi_l)_{L_2}$. После нахождения \mathbf{c} для вычисления волнового поля \mathbf{u} и его энергетических характеристик, используется представление (3) (или вытекающее из него разложение по нормальным модам (вычетам в полюсах матриц K и M)).

Искомые резонансные полюса ω_n (точки спектра интегрального оператора \mathcal{L}) аппроксимируются корнями характеристического уравнения $\det \mathbf{A}(\omega) = 0$. Соответствующие им собственные решения \mathbf{u}_n выражаются через обобщенные собственные векторы \mathbf{c}

$$\mathbf{A}(\omega_n) \mathbf{c} = 0.$$

3. В случае трещины в полуплоскости характерной особенностью коэффициента прохождения рэлеевской волны \varkappa^+ , рассматриваемого как функция частоты ω и глубины трещины d , является наличие широкой и глубокой котловины в рельефе поверхности $\varkappa^+(\omega, d/a)$ [6]. В случае слоя вместо одной широкой котловины, на графике поверхностей $\varkappa^+(\omega, a)$ и $\varkappa^+(\omega, d)$ наблюдаются периодические узкие провалы (каньоны), указывающие на резонансный характер запираания волновода. Поиск параметров полного блокирования, как и в [6], проводился путем минимизации функции \varkappa^+ , выбирая за начальные приближения точки на дне каньонов.

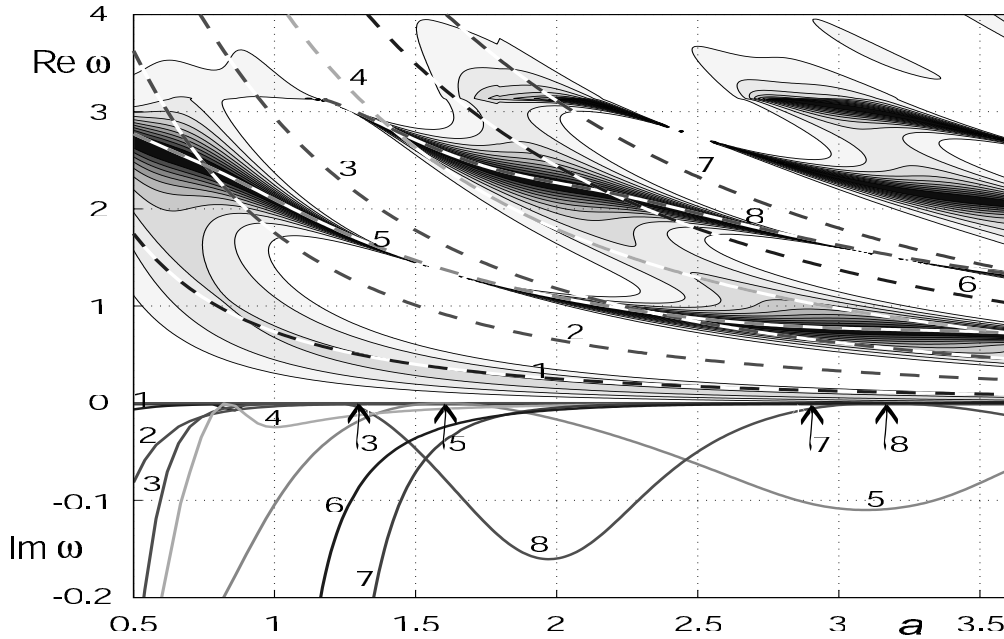
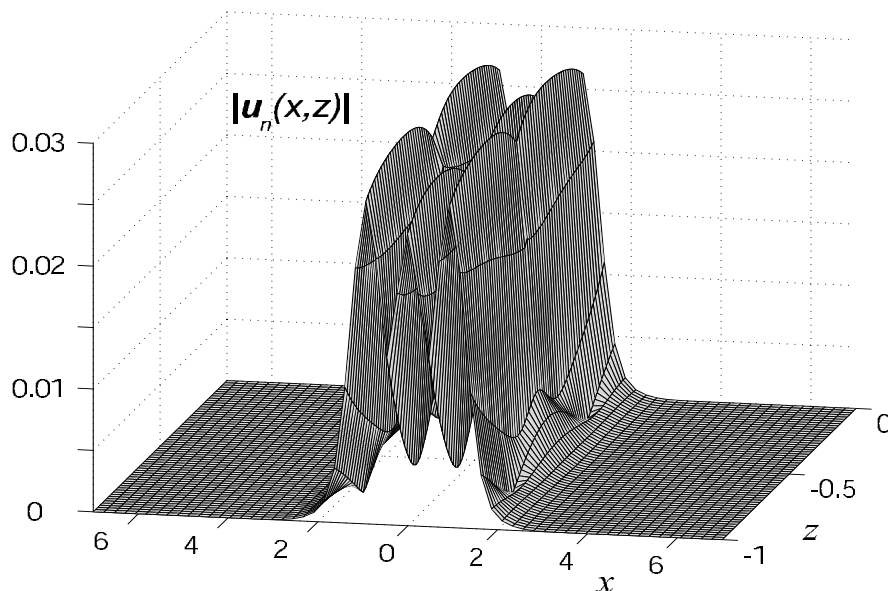
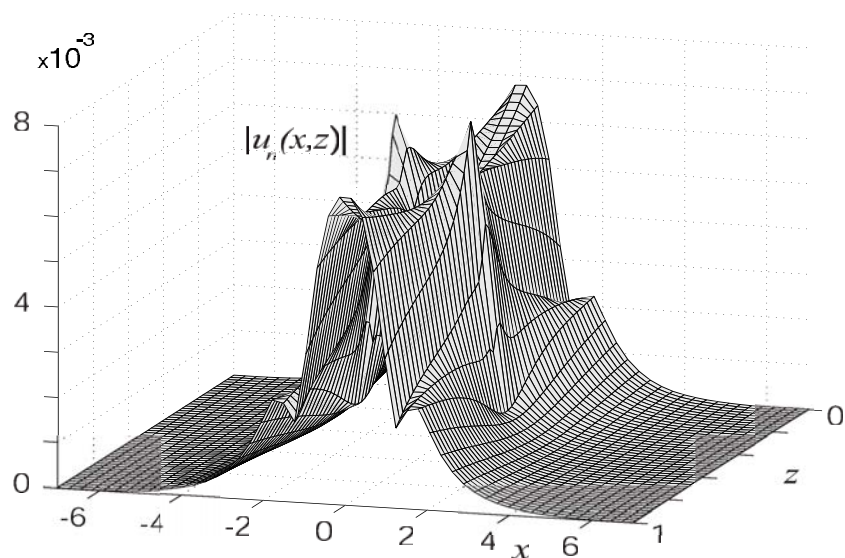


Рис. 1. Линии уровня $\mathfrak{A}^+(\omega, a)$ для набегающей первой антисимметричной нормальной моды с наложенными на них кривыми $\text{Re } \omega_n(a)$ и $\text{Im } \omega_n(a)$ при $d = 1/2$.

На резонансный характер блокирования на таких частотах указывает резкий рост перемещений поверхности слоя над трещиной и коэффициентов интенсивности напряжений на ее краях. Другим признаком резонансного блокирования является образование энергетических вихрей в окрестности трещины.

Параллельно рассматривалось изменение положения спектральных точек ω_n в комплексной плоскости частоты ω в зависимости от характеристик трещины a и d . Многочисленные примеры показывают, что каньоны в рельефе поверхности коэффициента прохождения \mathfrak{A}^+ возникают при подходе одного из полюсов ω_n к вещественной оси. Причем чем меньше $\text{Im } \omega_n$, тем они уже и глубже вплоть до $\mathfrak{A}^+ = 0$ при $\text{Im } \omega_n = 0$ (т.е. при выходе ω_n на вещественную ось $\text{Re } \omega$). В качестве иллюстрации на Рис. 1 приведены кривые $\text{Re } \omega_n(a)$ (пунктир), наложенные на поверхность $\mathfrak{A}^+(\omega, a)$, показанную линиями уровня и серой шкалой с предельными значениями $\mathfrak{A}^+ = 0$ (черный цвет) и $\mathfrak{A}^+ = 1$ (белый цвет); здесь $H = 1$, $d = 1/2$ (срединная трещина). Зависимости $\text{Im } \omega_n(a)$ даны сплошными линиями в нижней части Рис. 1 в увеличенном масштабе. Видно, что в отличие от полуплоскости [6] расстояние от полюсов ω_n до вещественной оси меняется немонотонно. С изменением a они то приближаются к ней, то удаляются, касаясь ее при некоторых значениях a . Детальный анализ показал, что полюса именно касаются оси $\text{Im } \omega = 0$, становясь в этих точках чисто вещественными. Для таких значений параметров (ω, a, d) , ($H = 1$) имеет место случай смешанного спектра с точкой дискретного, лежащей на непрерывном вещественном спектре, предсказанный И.И. Воровичем. Найденные пары (ω_n, a) вещественного дискретного спектра приведены в табл. 1.

n	3	5	7	8
ω_n	2.17	1.38	1.95	1.54
a	1.29	1.60	2.84	3.15

Табл. 1. Набор значений a , для которых одна из точек спектра ω_n с номером n Рис. 2. Собственная форма колебаний слоя с горизонтальной срединной трещиной полуширины $a = 1.29$ на частоте $\omega = 2.169$.Рис. 3. Собственная форма колебаний слоя с горизонтальной срединной трещиной полуширины $a = 1.6$ на частоте $\omega = 1.38$.

При включении гармонического осциллятора на такой частоте $\omega = \omega_n$ нестационарное решение $|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. При прохождении же нестационарного

импульса происходит захват части его энергии и локализация волнового процесса вокруг трещины резонансного размера с частотой колебаний ω_n . Пространственное распределение локализованного волнового поля характеризуется собственными решениями $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$, которые выражаются через собственные векторы с матриц $A(\omega_n)$ (см. п. 2).

В качестве примера на Рис. 2 - 3 приведены поверхности распределения амплитуд собственных форм $\mathbf{u}_n(x, z)$ для двух спектральных точек из табл. 1, показывающие характер локализации для этих случаев. Собственные векторы нормированы условием $|\mathbf{c}| = 1$.

Работа поддержана грантами РФФИ № 03-01-00520, № 03-01-96618.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // ДАН СССР. 1979. Т. 245. №5. С. 1076-1079.
- [2] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979, 320 с.
- [3] Бабешко В.А. "Вирусы" вибропрочности // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. 1994. Спец. выпуск. С. 90-91.
- [4] Linton C.M., Evans D.V. Trapped modes above a submerged horizontal plate // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1991. V. 44(3). P. 487-506.
- [5] Абрамян А.К., Алексеев В.В., Индейцев Д.А. Совместные колебания двухслойной жидкости и массивного штампа в бесконечном волноводе // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 3. С. 15.19.
- [6] Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Шапарь Е.М. О блокировании рэлеевской волны приповерхностной трещиной // Доклады РАН. 2004. Т. 398. N 6. С. 764-770.

Glushkov E.V., Glushkova N.V., Golub M.V. *Eigenforms and localization of wave motion in an elastic layer with a horizontal crack.* The developed semi-analytical methods for evaluating elastodynamic diffraction by a horizontal crack in a layer are used to analyze the mechanisms of normal modes transmission, reflection and blocking. Resonance blocking is accompanied by energy localization near the crack. The dependence of transmission and reflection coefficients on frequency and crack's size, depth and spectral points are analyzed. There have been found examples of pure real spectral points. The associated eigenforms exhibit strong localization of oscillation near the crack at the resonance frequencies.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗГИБА ЛОКАЛЬНО-ОПЕРТОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Гольдштейн Р. В., Попов А. Л.

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Получено и проанализировано аналитическое решение задачи об осесимметричном изгибе весомой круглой пластины, установленной на круговую опору. Определены положения опоры, обеспечивающие минимальные искривленность пластины и уровни изгибных напряжений от весовой нагрузки.

Создание сверхбольших интегральных схем микро-и субмикрорэлектроники предполагает использование кремниевых пластин-подложек диаметром 300 мм и более. При больших диаметрах пластин в ходе термообработки становится существенным учет вклада гравитационных сил, обусловленных собственным весом, в формирование поля внутренних упругих напряжений в пластинах, а также – минимизации искривленности их поверхности. Термообработка пластин предусматривает их установку на локальные опоры, которые располагают обычно в трех, или четырех точках, находящихся на одной окружности, либо используют кольцевую опору [1,2].

Рассмотрим простейший для математического анализа вариант подкрепления свободной весомой круглой пластины радиуса a и постоянной толщины h по окружности радиуса b ($b < a$) (Рис. 1).

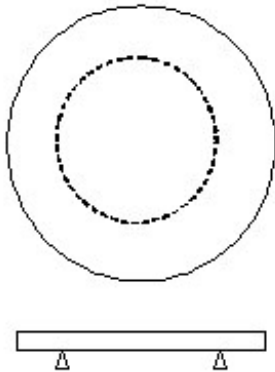


Рис. 1.

В этом случае имеет место осесимметричная задача изгиба пластины [3] под собственным весом:

1) уравнение изгиба:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

где через $w = w(r)$ обозначена функция прогиба пластины, $q = \rho h$ – распределенная весовая нагрузка (ρ – плотность пластины), $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластины (E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины), 2) условия на линии подкрепления ($r = b$):

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{dw_1}{dr} = \frac{dw_2}{dr}, \quad M_r^{(1)} = M_r^{(2)} \quad (2)$$

$$M_r^{(1)} = -D \left(\frac{d^2 w_j}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_j}{dr} \right), \quad j = 1, 2$$

3) граничные условия при $r = a$:

$$M_r^{(2)} = 0, \quad Q_r^{(2)} = 0 \quad (3)$$

$$Q_r^{(j)} = D \left(\frac{d^3 w_j}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_j}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_j}{dr} \right), \quad j = 1, 2$$

В условиях (2) и (3) через w_j , $j = 1, 2$ обозначены решения уравнения (1) на участках внутри ($j = 1, 0 \leq r \leq b$) и снаружи ($j = 2, b \leq r \leq a$) кругового подкрепления. Для внутренней области:

$$w_1(r) = \frac{q}{64D}(r^4 + b_1 r^2 + b_2), \quad (4)$$

для внешней области ($(b \leq r \leq a)$)

$$w_2(r) = \frac{q}{64D}\left(r^4 + c_1 r^2 + c_2 + c_3 \ln \frac{r}{a} + c_4 r^2 \ln \frac{r}{a}\right) \quad (5)$$

Входящие в выражения (4) и (5) постоянные $b_1, b_2, c_1, \dots, c_4$, находятся при подстановке этих выражений в условия (2) и (3). В результате решения полученной системы шести уравнений выводятся достаточно компактные формулы для постоянных:

$$\begin{aligned} b_1 &= -2a^2 \left[4 \ln \beta + \frac{2(1-\nu)\beta^2 + 1 + 3\nu}{1+\nu} \right], & b_2 &= a^4 \beta^2 \left[8 \ln \beta + \frac{(3-5\nu)\beta^2 + 2(1+3\nu)}{1+\nu} \right], \\ c_1 &= \frac{2a^2}{1+\nu} [(3+\nu) - 2(1-\nu)\beta^2], & c_2 &= -8a^4 \beta^2, & c_3 &= -8a^4 \\ c_4 &= a^2 \beta^2 \left[16 \ln \beta + \frac{(3-5\nu)\beta^2 - 2(3+\nu)}{1+\nu} \right], & \beta &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

При различных расположениях кругового подкрепления естественным образом меняется и форма прогиба весомой пластины.

При этом, наибольшие отклонения от неизогнутого состояния будут в центре и (или) по краю пластины. Так, при совпадении опоры с граничной окружностью получаем в центре пластины значение прогиба, совпадающее с прогибом в случае шарнирно-опертой пластины [3]: $w_1(0) = W = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{64D}$. Если же опорная окружность сжимается в одну точку под центром пластины, то прогиба в центре не будет, а по краю пластина прогнется на величину $\frac{7+3\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{64D}$, т.е. примерно в полтора раза больше, чем в первом предельном случае.

Для ответа на вопрос о расположении кругового подкрепления, обеспечивающем минимальную искривленность пластины, построим графически зависимости прогибов центра и края пластины, обезразмеренных к W , от безразмерного радиуса подкрепляющей окружности β . Такие графики изображены на Рис. 2. Сплошной линией на нем показана зависимость для прогиба края, штриховой – центра пластины; коэффициент Пуассона принят равным 0,28 (материал пластины – кремний).

Из этих графиков видно, что наименьшая искривленность пластины будет в интервале значений $0,6 \leq \beta \leq 0,7$, который отмечается также как интервал, обеспечивающий наименьшие уровни напряжений в теле пластины, полученный методом конечного элемента в [2]. Если ввести критерий минимума среднеквадратичного отклонения от горизонтального положения, учитывающего обе эти зависимости: $\frac{1}{2} \sqrt{w_1(0, \beta)^2 + w_2(a, \beta)^2}$, то по этому критерию $\beta = \beta_1 = 0,676$, $\beta_1 = 0,0344W$, $\beta_1 = 0,0373W$. Если в качестве критерия минимума искривленности поверхности пластины взять равенство прогибов центра и края пластины, то здесь $\beta = 0,677$,

$w(0) = w(a) = 0,036W$. Другие критерии, исходящие из равенства весов внутренней и наружной частей пластины, либо задающие расположение опоры на $2/3$ расстояния от центра, приводят к большему разбросу в сочетаниях прогиба в центре и по краю пластины; в первом случае $\beta = 0,707$, $w(0) = 0,0882W$, $w(a) = -0,0055W$, во втором, $-\beta = 0,667$; $w(0) = 0,0201W$, $w(a) = 0,0511W$.

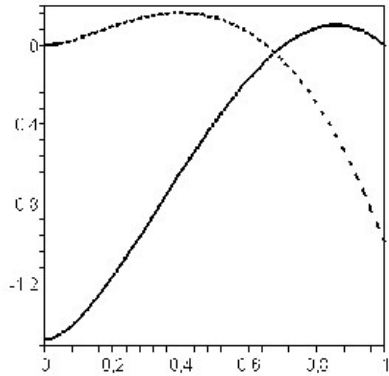


Рис. 2.

Распределение напряжений от изгибающих моментов, вызванных весовой нагрузкой, также может быть минимизировано варьированием расположения подкрепляющей опоры. Характерные эпюры радиального (сплошная линия) и тангенциального (штриховая линия) изгибающих моментов в зависимости от безразмерной радиальной координаты изображены на Рис. 3, а,б при значениях $\beta = 0,5$ (а) и $0,7$ (б). Видно, что здесь необходимо следить за изменениями значений радиального (M_r) и тангенциального ($M_t = -D\left(\nu \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right)$) изгибающих моментов на линии подкрепления и в центре пластины.

Принимая в качестве критерия минимальности напряжений минимум среднеквадратического отклонения $g_r = \sqrt{M_r^2(0) + M_r^2(b)}/2$ получим, что он достигается, когда $\beta = 0,679$. При этом значение g_r , отнесенное к $qa^2/32$, равно $0,56$. Аналогичный критерий (g_t) для тангенциального изгибающего момента дает $\beta = 0,66$ и $g_t = 0,29$. Объединяя эти критерии выражением $g_0 = \frac{1}{2} \sqrt{g_r^2 + g_t^2}$, получим, что его минимум достигается при $\beta = 0,669$, что практически совпадает с результатом, приведенным в [1], полученным на основе анализа баланса действующих сил. Отметим также, что эти результаты близки к резуль-

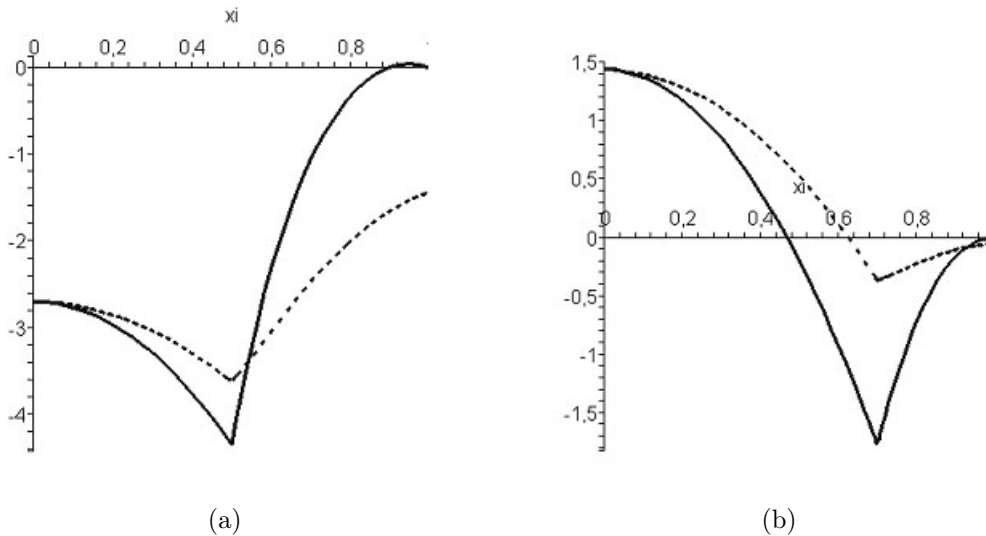


Рис. 3.

татам по оптимальному расположению опоры, полученным выше из критериев минимума искривленности пластины.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 03-01-00738 и 05-01-00191).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Fisher A., Richter H., Kurner W., Kucher P.* Slip-free processing of 300 mm silicon batch wafers// J. Appl. Phys., v. 87, № 3, p. 1543-1549.
- [2] *Меженный М.В., Мильвидский М.Г., Простомолотов А.И.* Моделирование напряженного состояния пластин кремния большого диаметра в процессе термического отжига// ФТТ, 2003, т. 45, вып. 10, с. 1794-1799.
- [3] *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966, 635 с.

К ВОССТАНОВЛЕНИЮ СТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА УПРУГОЕ ТЕЛО, ПО СМЕЩЕНИЯМ НА УЧАСТКЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Драгилев В. М.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Известно, что реконструкция распределенной нагрузки по данным о смещениях на свободной поверхности является некорректной задачей, сводящейся к интегральному уравнению первого рода. Примеры показывают, что основной вклад в граничное волновое поле смещений могут вносить всего лишь несколько доминирующих мод. При этом ядро интегрального уравнения приближается к вырожденному, и оценить адекватность решения можно лишь при наличии некоей априорной информации. В подобных случаях целесообразно заменить ядро его вырожденной аппроксимацией и строить решение методом проекций, который хорошо приспособлен для априорных оценок. В настоящей работе установлены некоторые условия, позволяющие использовать редуцированное интегральное уравнение с вырожденным ядром.

В работах [1-3] и др. для эллиптического оператора линейной теории упругости (ТУ) ставятся т.н. обратные граничные задачи (ОГЗ) следующего типа. Пусть упругое тело находится в состоянии вынужденных стационарных колебаний. Поверхность тела разбивается на три непересекающиеся части, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. На участке S_1 задаются все компоненты векторов граничных напряжений и смещений; на S_2 никакие краевые условия не известны. Область S_3 может состоять из нескольких подобластей, в каждой из которых заданы какие-либо однородные краевые условия. Область S_1 обычно представляет собой участок свободной поверхности. Тогда ОГЗ ТУ сводится к граничному интегральному уравнению (ИУ) 1-го рода относительно контактных напряжений, распределенных в области S_2 ; ядро этого ИУ в области $S_1 \times S_2$ является гладким и совпадает с матрицей-функцией Грина корректно поставленной прямой задачи.

Автором изучались ОГЗ для тел простой формы (упругий слой и бесконечный брус прямоугольного сечения), находящихся в условиях плоской деформации. В этих моделях нормальная нагрузка $q(x)$ восстанавливалась по данным о нормальных смещениях $u(x)$ на участке свободной поверхности. Функции $q(x)$, $u(x)$, зависящие только от одной пространственной координаты, связаны граничным ИУ

$$[\mathcal{A}\tilde{q}](x) \equiv \int_{x_1}^{x_2} G(x, x')\tilde{q}(x') = \tilde{u}(x), \quad x \in [x_3, x_4], \quad (1)$$

где $\tilde{u}(x) = u(x) + \delta u(x)$, $u(x) = [\mathcal{A}q](x)$ – точные исходные данные, порожденные функцией-оригиналом $q(x)$, $\delta u(x)$ – погрешность исходных данных (возникшая, например, в ходе измерений), символы $\tilde{q}(x)$ обозначают искомое решение, построенное тем или иным способом. Уравнение (1) может решаться методом Тихонова [4]. На примере упомянутых моделей выявляется, однако, следующая трудность.

В определенном диапазоне физических параметров (частот и относительных расстояний) функция Грина допускает представление

$$G(x, x') = K(x, x') + r(x, x'), \quad (2)$$

где $K(x, x') = \sum_{m=1}^M \phi_m(x)\psi_m(x')$ – вклады от доминирующих волновых мод, $r(x, x')$ – ничтожно малые по сравнению с $K(x, x')$ остаточные члены, которые, как правило, неразличимы на фоне случайных погрешностей и не влияют на решение обратной задачи. В случае упругого слоя смещения $u(x)$ могут быть заданы в дальней зоне, и тогда слагаемые в формуле (2) являются, соответственно, вкладом от однородных и неоднородных мод [3]. В случае «прямоугольного» тела доминировать могут слабо осциллирующие гармоники (при этом граница между ведущими и остаточными модами получается несколько расплывчатой, что делает разбиение (2) не вполне однозначным и вносит частичный произвол в определение числа M). Отметим, что на высоких частотах, на которых резонансный спектр квазинепрерывен, изложенная выше постановка ОГЗ вряд ли будет плодотворной из-за жестких требований к точности выбираемой математической модели. В данном отношении привлекательна область низких частот порядка 1-й резонансной. Но на таких частотах число наблюдаемых мод M невелико (скажем, порядка 10 и менее), и, как следствие, класс функций-оригиналов $q(x)$, допускающих успешную реконструкцию, оказывается весьма узким. При этом важно контролировать адекватность решения, используя априорные сведения о входных погрешностях и о самой функции $q(x)$. К сожалению, в методе Тихонова единственным средством подобного анализа служат численные эксперименты с имитацией случайных погрешностей и модельными функциями $q(x)$. Такие эксперименты не дают целостной картины, тем более, что для ИУ с ядром (2) качество реконструкции двух сходных по «степени гладкости» функций может значительно различаться [3].

Альтернативой является метод проекций [5,3,6], в котором решение ИУ раскладывается по какой-либо системе функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$, ортогональных в $L_2[x_1, x_2]$. Преимущество метода заключается в его «прозрачности», позволяющей оценивать погрешность решений на основе априорной информации, а также судить о возможностях реконструкции по значениям сингулярных чисел [3,6]. По ряду причин, метод может быть эффективно реализован только для ИУ с вырожденными ядрами. К таковым относится ИУ

$$[\mathcal{A}_M \tilde{q}](x) \equiv \int_{x_1}^{x_2} K(x, x') \tilde{q}(x') = \tilde{u}(x), \quad x \in [x_3, x_4], \quad (3)$$

получающееся из (1), (2) при отбрасывании членов $r(x, x')$. В связи с вышеизложенным интересно выяснить: при каких условиях допустима замена исходного ИУ (1) уравнением (3)?

Обозначим $u_M(x) = [\mathcal{A}_M q](x)$, тогда $\delta u_r(x) = u(x) - u_M(x)$ есть вклад в правую часть ИУ (1) от остаточных членов $r(x, x')$. Эвристически, этот вклад будет несущественным, если он мал по сравнению с погрешностью, т.е. $\|\delta u_r\| \ll \|\delta u\|$ (здесь и далее нормы всех функций, заданных на отрезке $[x_1, x_2]$ или $[x_3, x_4]$, берутся, соответственно, в пространстве $L_2[x_1, x_2]$ или $L_2[x_3, x_4]$). Высказанное утверждение приобретает строгий смысл в рамках априорных оценок, предложенных в работе

[6]. Действительно, рассмотрим воображаемую обратную задачу, непосредственно сводящуюся к ИУ с ядром $K(x, x')$:

$$[\mathcal{A}_M \tilde{q}](x) \equiv \int_{x_1}^{x_2} K(x, x') \tilde{q}(x') = u_M(x) + \delta u(x), \quad x \in [x_3, x_4], \quad (4)$$

где, как и прежде, $u_M(x) = [\mathcal{A}_M q](x)$, функция-оригинал $q(x)$ и погрешность $\delta u(x)$ – те же, что и в исходном ИУ (1). Если решение $\tilde{q}(x)$ ИУ (4) строится методом проекций, то для его погрешности $\eta = \|\tilde{q} - q\| / \|q\|$ существует априорная оценка $\eta \leq \bar{\eta}$, где $\bar{\eta}$ зависит от спектрального состава функции $q(x)$ и, линейным образом, от относительной входной погрешности $\Delta = \|\delta u\| / \|u_M\|$ [6]. В воображаемой задаче переход от ИУ (4) к ИУ (3) равносильно внесению в правую часть ИУ добавочной погрешности $\delta u_r(x)$. Эту погрешность можно учесть в оценке $\bar{\eta}$, заменив Δ на $\Delta + \Delta_r$, где $\Delta_r = \|\delta u_r\| / \|u_M\|$. В результате такой замены оценка $\bar{\eta}$ возрастает не более, чем в $1 + \Delta_r / \Delta$ раз. Отсюда следует, что редукция ИУ (1) к ИУ (3) будет оправдана при выполнении двух условий:

1. Требуется наличие априорной информации, гарантирующей приемлемую для практических целей точность решения $\bar{\eta} \ll 1$ в задаче (4) (такая информация задается в форме данных о погрешности Δ и ограничений на погрешность, с которой функция-оригинал приближается N -мерным отрезком своего обобщенного ряда Фурье [6]).

2. Кроме того, необходима некая оценка для параметра Δ_r , которая подтверждала бы его малость по сравнению с Δ (допустимо также, чтобы эти два параметра были сопоставимы по величине; тогда оценку для Δ_r следует учитывать в оценке погрешности решения $\bar{\eta}$, - см. выше).

Некоторую сложность вносит то обстоятельство, что в задаче (4) относительная погрешность определяется как $\Delta = \|\delta u\| / \|u_M\|$; в реальности же приходится оперировать с априорно заданной величиной $\Delta = \|\delta u\| / \|u\|$. Заметим, однако, что при значениях $\|\delta u\| / \|u_M\|$, больших или порядка единицы, успешная реконструкция заведомо исключается. Если же $\|\delta u\| / \|u_M\| \ll 1$ (в соответствии с условием 1), а величина $\|\delta u_r\|$ не велика по сравнению с $\|\delta u\|$ (в соответствии с условием 2), то тогда, очевидно, $\|u_M\| \approx \|u\|$, т.е. различие между нормами $\|u_M\|$ и $\|u\|$ можно игнорировать (что и предполагается в дальнейшем).

Укажем теперь подходящую априорную оценку для параметра Δ_r . Пусть $\tilde{q}_N(x)$ есть решение ИУ (4) с невозмущенной правой частью ($\delta u(x) = 0$), построенное методом проекций, в виде разложения по выбранной системе функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$ (размерность решения N не может превышать M). Введем обозначения: \mathcal{A}_M^* – эрмитово сопряженный оператор, $B_{(N)}$ – N -мерная матрица с элементами $B_{(N)km} = (f_k, \mathcal{A}_M^* \mathcal{A}_M f_m)_{L_2}$; σ_n^N – сингулярные числа матрицы $B_{(N)}$, упорядоченные по убыванию: $\sigma_1^N \geq \sigma_2^N \geq \dots \geq \sigma_N^N$, $C_N = \sigma_1^N / \sigma_N^N$ – число обусловленности. Применяя к решению $\tilde{q}_N(x)$ формализм сингулярных разложений (подобно тому, как, например, делалось в работе [3]), придем к неравенству $\sigma_N^N \|\tilde{q}_N\| \leq \|u_M\|$. Определим “остаточную часть” \mathcal{A}_r интегрального оператора \mathcal{A} как $\mathcal{A}_r = \mathcal{A} - \mathcal{A}_M$. Учитывая, что $\delta u_r = \mathcal{A}_r q$ и стандартным образом оценивая норму интегрального оператора \mathcal{A}_r , найдем, что $\|\delta u_r\| \leq \sqrt{h_1 h_2} \bar{r} \|q\|$, где $h_1 = |x_1 - x_2|$, $h_2 = |x_3 - x_4|$, $\bar{r} = \max_{x, x'} |r(x, x')|$. Комбинируя полученные два неравенства, получаем искомую

оценку

$$\Delta_r \leq \alpha \sqrt{h_1 h_2 \bar{r}} / \sigma_N^N, \quad (5)$$

где $\alpha = \|q\| / \|\tilde{q}_N\|$. Ясно, что при наличии априорной информации, указанной в условии 1, параметр α близок к единице (его легко оценить явным образом: $|\alpha - 1| \leq \bar{\eta} / (1 - \bar{\eta})$, где $\bar{\eta}$ – оценка для погрешности решения ИУ (4) при $\Delta = 0$). Тем самым, при выполнении условия 1 оценка (5) дает возможность сравнить параметры Δ и Δ_r , и при удачном их соотношении (скажем, при $\Delta_r < \Delta$) условие 2 также будет выполнено. Существенно, что для применения оценки (5) не требуется никакой дополнительной априорной информации.

Собственные значения матрицы $B_{(N)}$ одновременно выступают собственными значениями оператора $\mathcal{P}_N \mathcal{A}_M^* \mathcal{A}_M \mathcal{P}_N$, где \mathcal{P}_N – проектор из $L_2[x_1, x_2]$ в линейную оболочку функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$. Отсюда и из т.н. принципа промежуточности [7] следует, что при увеличении размерности N числа σ_1^N и $1/\sigma_N^N$, а также их произведение C_N монотонно возрастают. Неравенство $\sigma_1^N \geq \sigma_1^1$ позволяет записать ослабленный вариант оценки (5), $\Delta_r \leq \alpha \sqrt{h_1 h_2 \bar{r}} C_N / \sigma_1^1$. При $f_1(x) = \text{const.} = 1/\sqrt{h_1}$ (например, при разложении по многочленам Лежандра) последнюю оценку можно представить в наглядной форме $\Delta_r \leq \alpha C_N \bar{r} / \bar{K}$, где $\bar{K} = \sqrt{B_{(1)11} / (h_1 h_2)}$ есть среднее квадратическое значение функции $K(x, x')$, проинтегрированной по второму аргументу.

Из явного вида оценки $\bar{\eta}$ имеем: $\min_{q \in L_2} \bar{\eta} = C_N \Delta$ (минимум достигается на функциях $q(x)$, принадлежащих N -мерному подпространству). Таким образом, априорно гарантировать заданную точность решения можно только при достаточно малых Δ . В сочетании с условием 2 и оценкой (5) это определяет приблизительный допустимый диапазон погрешностей Δ : $\sqrt{h_1 h_2 \bar{r}} / \sigma_N^N < \Delta < 1/C_N$, где отброшен несущественный в данном контексте множитель α (разумеется, что границы диапазона являются несколько условными). С возрастанием размерности N указанный диапазон монотонно сужается, а при больших N он может сжаться до пустого множества. Если при максимальной размерности $N = M$ он остается конечным и включает в себя значения Δ , представляющие практический интерес, то редукция ИУ (3) к ИУ (5) может считаться вполне обоснованной. Наилучшие предпосылки для редукции создаются, если верхняя граница диапазона оказывается много больше нижней, что выражается соотношением

$$\sqrt{h_1 h_2 \bar{r}} / \sigma_M^M \ll \sigma_M^M / \sigma_1^M. \quad (6)$$

Условие (6) допускает простую интерпретацию в случае, когда базисом служат собственные функции оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$, причем $\mathcal{A}_M = \mathcal{A} \mathcal{P}_M$ и, как следствие, сингулярные числа σ_m^M совпадают с младшими сингулярными числами оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$. Обозначим через $\{\sigma_m\}_{m=1}^\infty$ множество всех сингулярных чисел этого оператора, упорядоченных по убыванию. Тогда $\|\mathcal{A}_r\| = \sigma_{M+1}$, а соотношение (6) означает, что $\sigma_{M+1} / \sigma_M \ll \sigma_M / \sigma_1$, т.е. в спектре сингулярных чисел имеется резкий "скачок".

Значение N в оценке (5) не обязано совпадать с той фактической размерностью, при которой строится решение ОГЗ. По сути дела при $N = 1, 2, \dots, M$ неравенство (5) дает M различных оценок, из которых, в зависимости от конкретной априорной информации, можно выбрать наиболее удачную.

Численные расчеты подтверждают работоспособность изложенной схемы; в частности, для тела прямоугольного сечения разумные априорные оценки удается получать при соотношении сторон прямоугольника порядка 2:1 и более.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бобровницкий Ю.И. Задача восстановления поля в структурной интенсивности: постановка, свойства, численные аспекты // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 3. С. 367–376.
- [2] Ватульян А.О., Ворович И.И., Соловьёв А.Н. Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // Прикл. матем. и мех. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 373–380.
- [3] Ватульян А.О., Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Восстановление динамических контактных напряжений в упругом слое по смещениям его свободной поверхности // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 829–834.
- [4] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
- [5] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
- [6] Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. О применении метода проекций в обратной граничной задаче для упругого слоя // Вестник ДГТУ. 2004. Т. 4. № 3. С. 282–289.
- [7] Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979. 381 с.

Dragilev V.M. *Towards the reconstruction of a stationary contact load acting on the elastic body from the displacements on a free surface area.* The reconstruction of a distributed load from the data on the free surface displacements is known to be the ill problem which can be reduced to the integral equation of the first kind. The examples shows that the main contribution to the boundary wave field of the displacements can be represented by only a few dominating modes. Then the kernel of the integral equation approaches to a degenerate one and some a priori information is necessary to estimate the adequacy of the solution. In such cases it is appropriate to exchange the kernel by its degenerate approximation and to construct the solution by the projective method which is well accomodated for the a priori estimations. In the present paper some conditions are established which allows to use the reduced integral equation with the degenerate kernel.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ СФЕРЫ ПРИ РАЗДУВАНИИ

Еремеев В. А.

Южный научный центр РАН & Ростовский госуниверситет

В рамках трехмерной нелинейной теории упругости изучена потеря устойчивости в малом толстостенной замкнутой сферической оболочке из высокоэластичного материала при ее раздувании. Определены критические значения внутреннего давления и соответствующие им формы потери устойчивости. Показано, что точки бифуркации лежат на падающем участке диаграммы деформирования оболочки.

Проблема устойчивости упругих тел и конструкций систем имеет большое прикладное и научное значение. Наиболее широко известны исследования устойчивости, проводимые в рамках теории одномерных и двумерных теорий типа стержней, пластин и оболочек. В гораздо меньшей степени разработана проблема неустойчивости трехмерных тел и, в частности, неустойчивость, происходящая при растяжении. Для исследования неустойчивости при растяжении прикладных теорий типа стержней и оболочек оказывается недостаточно и необходимо привлекать пространственную теорию упругости при конечных деформациях. Такого рода исследования проводились в работах [1]– [5]. В частности, исследования [1, 2] потери устойчивости упругого бруса при растяжении показали, что бифуркация равновесия наступает только в том случае, когда на диаграмме деформирования материала имеется падающий участок. Аналогичная ситуация имеется в случае раздувания нелинейно-упругого цилиндра [4, 5]. Различные вопросы механики материалов, имеющих падающий участок на диаграмме деформирования, обсуждались в [6]– [8]. Такого рода участок обычно трактуется как неустойчивость, разупрочнение материала, наличие фазового превращения.

В данной работе в точной постановке исследована потеря устойчивости в малом толстостенной сферической оболочке из несжимаемого высокоэластического материала, нагруженной внутренним гидростатическим давлением. Задача об устойчивости при раздувании упругой оболочки ранее решалась в [9], где также определены формы потери оболочки после выпучивания. Явление потери устойчивости при растяжении сферической оболочки обсуждалось также в [10].

Заметим, что задача об исследовании напряженно-деформированного состояния и потери устойчивости толстостенной сферической оболочки из высокоэластического материала интересна также как модель одного из этапов получения полых полимерных сфер субмикронного размера, которые находят значительное применение в современной технологии [11]. Одним из перспективных методов синтеза является использование частиц-предшественников с морфологией ядро–оболочка. Здесь раздув полимерной оболочки, находящейся в высокоэластическом состоянии происходит вследствие разбухания гидрофильного ядра, абсорбирующего воду при нейтрализации карбоксильных групп ядра.

1. Начальное состояние. Радиально симметричная деформация несжимаемого тела дается формулами [12]: $R = \sqrt[3]{r^3 - x}$, $\Phi = \varphi$, $\Theta = \theta$, $x = \text{const}$, где R , Φ , Θ и r , ϕ , θ – эйлеровы и лагранжевы сферические координаты.

Определяющее соотношение для высокоэластичного материала выберем в форме модели материала Бартенева-Хазановича [12]

$$\mathbf{D} = 2\mu\mathbf{A} - p\mathbf{C}^{-T}, \quad \mathbf{C} = \text{grad } \mathbf{R}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{U} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}, \quad \det \mathbf{C} = 1. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{C} – градиент деформации, \mathbf{R} – радиус-вектор точек тела в деформированном состоянии, p – неизвестная функция координат, не зависящая от деформации, μ – упругая постоянная, при малых деформациях играющая роль модуля сдвига.

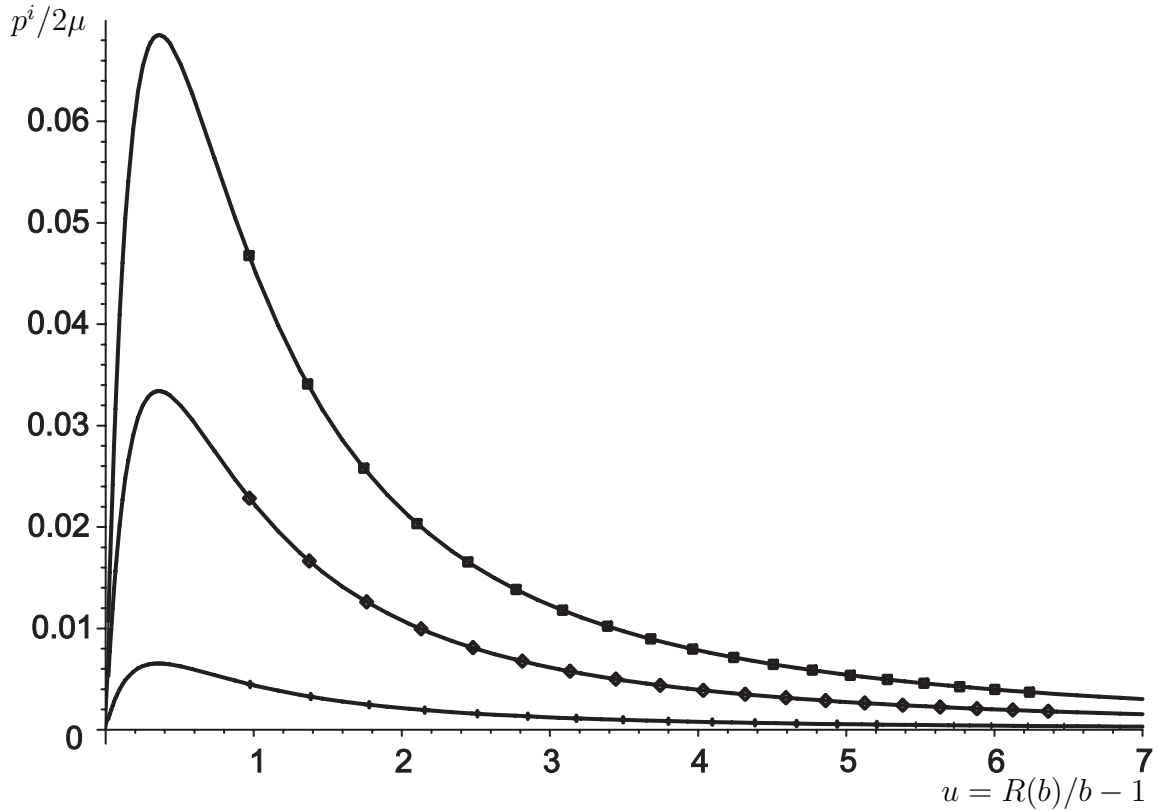


Рис. 1. Диаграммы растяжения при $h = 0.1; 0.05; 0.01$ и точки бифуркации

Уравнения равновесия и статические краевые условия сводятся к соотношениям

$$\frac{dD_{rr}}{dr} + 2\frac{D_{rr} - D_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad D_{rr}|_{r=b} = -p^e \frac{B^2}{b^2}, \quad D_{rr}|_{r=a} = -p^i \frac{A^2}{a^2},$$

$D_{rr} = 2\mu - pr^2/r^2$, $D_{\theta\theta} = D_{\varphi\varphi} = 2\mu - pr/R$ – диагональные компоненты тензора напряжений Пиолы в базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$, связанном с лагранжевыми сферическими координатами, $A = R(a)$, $B = R(b)$, a и b – внутренний и внешний радиусы оболочки до деформации, p^e, p^i – внешнее и внутреннее давления, действующие на оболочку. Отсюда следует, что $p = p^e - 2\mu \frac{b^2}{B^2} = p^i - 2\mu \frac{a^2}{A^2}$ и условия равновесия

сводятся нелинейному алгебраическому уравнению для определения параметра деформации x

$$p^e = p^i - 2\mu \left(\frac{b^2}{B^2} - \frac{a^2}{A^2} \right).$$

Далее положим p^e равным нулю.

Диаграмма деформирования (зависимость внутреннего давления от перемещения поверхности оболочки) показана на рис. 1 при различных значениях толщины оболочки h ($h = (b - a)/b$). Видно, что диаграмма имеет падающий участок, аналогичный [10]. Можно показать, что для сферической толстенной оболочки падающий участок имеется также для многих употребительных моделей резиноподобных материалов (материал Трелоара, Муни-Ривлина при некоторых значениях упругих постоянных, степенной зависимости и др.).

2. Потеря устойчивости. Устойчивость произвольного напряженно-деформированного состояния равновесия нелинейно упругого тела при консервативных внешних нагрузках исследуется статическим методом Эйлера, состоящим в рассмотрении положений равновесия, мало отличающихся от заданного, и определения тех значений параметров нагружения, при которых возможно существование нетривиальных решений линеаризованных в окрестности данного состояния уравнений равновесия и краевых условий.

Линеаризованная краевая задача в геометрии отсчетной конфигурации имеет вид [12, 13]

$$\text{Div } \mathbf{D}^\cdot + \rho_0 \mathbf{f}^\cdot = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^\cdot|_{\sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_0^\cdot, \quad \mathbf{w}|_{\sigma_2} = 0, \quad (2)$$

где точкой сверху обозначены линейные приращения соответствующих величин, обусловленные наложением малых добавочных перемещений \mathbf{w} , например, $\mathbf{D}^\cdot = \frac{d}{d\tau} \mathbf{D}(\mathbf{C}^\circ + \tau \text{grad } \mathbf{w}) \Big|_{\tau=0}$ верхний индекс "о" относится к величинам, вычисленным в начальном деформированном состоянии.

Рассмотрим осесимметричные возмущения

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta. \quad (3)$$

Линеаризованный тензор напряжений Пиолы для материала Бартенева-Хазановича (1) имеет вид [14]

$$\mathbf{D}^\cdot = 2\mu \mathbf{A}^\cdot - p^\cdot \mathbf{C}^{-T} + p \mathbf{C}^{-T} \cdot (\text{grad } \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{C}^{-T}, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}^\cdot = \chi (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r), \quad \chi = \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{R}{r} \right)^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \right).$$

Преобразование линеаризованных уравнений равновесия (2), краевых условий и линеаризованного условия несжимаемости с учетом (3), (4) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{R^2}{r^2} \frac{\partial p^\cdot}{\partial r} + 2\mu \frac{1}{r} \left(\chi \text{tg } \theta - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) &= 0, & -\frac{1}{R} \frac{\partial p^\cdot}{\partial \theta} + 2\mu \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\chi}{r} \right) &= 0, & (5) \\ \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - v \text{tg } \theta + 2u \right) &= 0, & \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) - \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{R}{r} \right) \chi &= 0, \end{aligned}$$

и краевых условий при $r = a$, $r = b$

$$-p' + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \chi + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) = 0. \quad (6)$$

Решение краевой задачи (5), (6) ищется в виде разложения по полиномам Лежандра

$$u = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(r) P_n(\sin \theta), \quad v = \sum_{n=2}^{\infty} v_n(r) P'_n(\sin \theta) \cos \theta, \quad p' = \sum_{n=2}^{\infty} p_n(r) P_n(\sin \theta). \quad (7)$$

Значение $n = 1$ соответствует движению шара как жесткого целого и в дальнейшем не рассматривается. Подставляя представление (7) в уравнения (5), (6), получим линейную однородную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u_n , v_n , p_n .

Критические значения внутреннего давления определялись численно из условия нетривиально разрешимости этой краевой задачи. Соответствующие значения отмечены на рис. 1 на диаграммах деформирования. Видно, что они лежат на падающем участке диаграммы, что соответствует результатам, полученным при растяжении бруса [1, 2] и раздувании цилиндра [4, 5]. При этом также вычислялось значение номера n моды выпучивания, соответствующего форме потери устойчивости, наступающей первой. Как оказалось, всегда $n = 2$. На рис. 1 видно, что первая точка бифуркации достаточно далеко отстоит от точки максимума на диаграмме. Это означает, что напряженно-деформированное состояние оболочки, соответствующее начальному участку на ниспадающей ветви диаграммы деформирования устойчиво в малом. Формы потери устойчивости показаны на рис. 2. Заметим, что такая форма высокоэластичных сфер наблюдалась при некоторых экспериментах [11]. Таким образом, несферическая форма первоначально сферических частиц может быть объяснена как следствие потери устойчивости при растяжении.

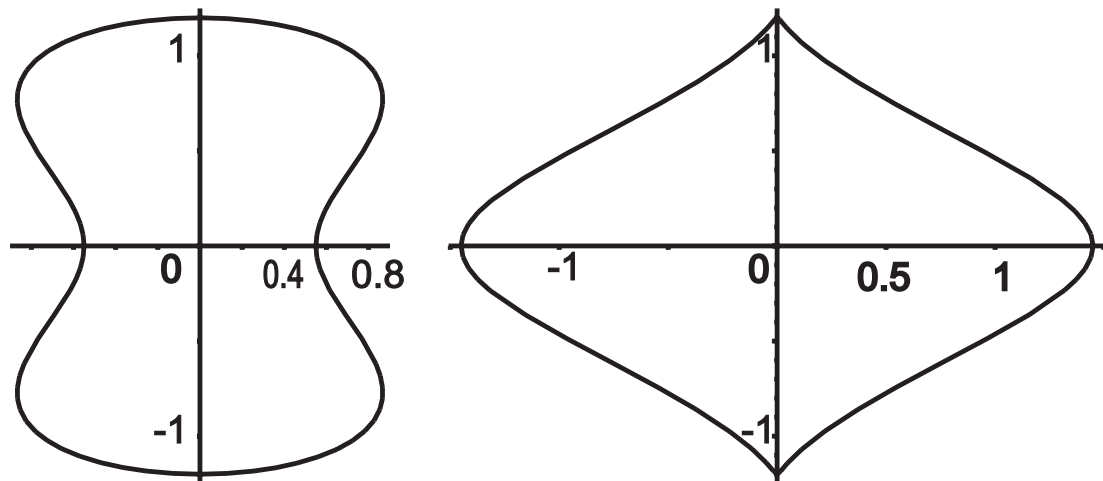


Рис. 2. Формы потери устойчивости при $n = 2$ (масштаб увеличен)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О формах потери устойчивости нелинейно-упругого бруса при растяжении // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 4. С. 482–485.
- [2] *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О неустойчивости растянутого нелинейно-упругого бруса// ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 786–798.
- [3] *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Некоторые проблемы устойчивости трехмерных нелинейно упругих тел// Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 1999. № 1. С. 42–46.
- [4] *Зубов Л.М., Ластенко М.С.* О неустойчивости равновесия при растяжении упругого цилиндра из упрочняющегося материала// Изв. РАН. МТТ. 2004. № 3. С. 135–143.
- [5] *Зубов Л.М., Шейдаков Д.Н.* О влиянии кручения на устойчивость упругого цилиндра при растяжении // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 1. С. 53–60.
- [6] *Ибрагимов В.А., Клошников В.Д.* Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 116–121.
- [7] *Никитин Л.В., Рыжак Е.И.* Об осуществимости состояний материала, соответствующих “падающему” участку диаграммы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. Т. 1986. № 2. С. 155–161.
- [8] *Никитин Л.В.* Закритическое поведение разупрочняющегося материала// Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 4. С. 487–490.
- [9] *Феодосьев В.И.* О формах равновесия резиновой сферической оболочки при внутреннем давлении// ПММ. 1968. Вып. 2. С. 339–344.
- [10] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
- [11] *Павлюченко В.Н.* Полые полимерные сферы субмикронного размера: свойства, применение, методы получения// Высокомолекулярные соединения. Серия С. 2004. Т. 46. № 12. С. 2140–2171.
- [12] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [13] *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
- [14] *Еремеев В.А.* Устойчивость двухслойной нелинейно-упругой сферической оболочки //Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1990. № 1. С. 55–58.

Eremeyev V. A. *On the instability of elastic sphere under swelling.* Within framework of the three-dimensional nonlinear elasticity, infinitesimal instability of a thick elastic spherical shell is investigated. The critical values of internal pressure are evaluated and the corresponding buckling modes are obtained.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ САМОПЛАВАЮЩИХ МИКРООРГАНИЗМОВ

Жуков М. Ю.

Ростовский госуниверситет

Предлагается феноменологическая модель для описания поведения самоплавающих организмов со смещенным центром тяжести. Показано, что воздействие вибраций на среду с микроорганизмами аналогично действию магнитного поля на жидкие кристаллы.

Обычно для описания поведения самоплавающих микроорганизмов со смещенным центром тяжести (гиротаксис) используется хорошо разработанная теория Кесслера–Педли [1], в которой предполагается, что индивидуальный микроорганизм имеет некоторую (случайную) ориентацию, определяемую единичным вектором \mathbf{p} , в направлении которого осуществляется движение микроорганизма. Поведение микроскопического вектора \mathbf{p} описывается уравнением (точка означает материальную производную, другие обозначения см. после (2)–(6)):

$$\mathbf{p} \wedge (\gamma_1 \mathbf{N} + \gamma_2 \mathbb{D} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{N} = \dot{\mathbf{p}} - 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{p}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{h} — сила, действующая на микроорганизм (при гиротаксисе: $\mathbf{h} = -\gamma \mathbf{g}$, момент сил: $\gamma \mathbf{p} \wedge \mathbf{g}$, где \mathbf{g} — ускорение силы тяжести, γ — смещение центра тяжести).

Направление самоплавания определяется путем осреднения $\langle \mathbf{p} \rangle = \int \mathbf{p} f(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$, где функция случайного распределения ориентации $f(\mathbf{p})$ подчиняется стационарному уравнению Фокера–Планка. Перенос микроорганизмов с концентрацией a и скоростью V за счет механизма самоплавания характеризуется членом $V \langle \mathbf{p} \rangle a$.

Один из ключевых результатов теории Кесслера–Педли — доказательство функциональной зависимости среднего направления самоплавания от вихря скорости: $\langle \mathbf{p} \rangle = F(\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))$. Именно это и позволяет считать, что $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle(\mathbf{x}, t)$, т. е. является функцией координат и времени, и описывать процессы переноса микроорганизмов уравнениями сплошной среды, а не дискретным набором уравнений для каждого микроорганизма в отдельности.

Сам факт использования стационарного уравнения Фокера–Планка показывает, что теория Кесслера–Педли строго применима лишь в случае, когда концентрация микроорганизмов в жидкости достаточно мала (по существу, это сильно разреженный газ ориентированных частиц) и их переориентация происходит достаточно медленно. При сильной концентрированности микроорганизмов модель Кесслера–Педли, фактически, превращается в *эвристическую* модель — зависимость вида $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle(\operatorname{rot} \mathbf{v})$ в таком случае является *феноменологической*.

Что можно предложить взамен или как можно модифицировать, имеющуюся теорию самоплавания, для того, чтобы, скажем, учесть такие эффекты, как сильную концентрированность, асимметрию микроорганизмов (хиральность), их механические деформации, инерционные эффекты? Наиболее простой и естественный путь, с нашей точки зрения, это отказ от микроскопического уровня описания.

Феноменологический, подход к построению модели самоплавающих организмов заключается в постулировании существования макроскопического континуального векторного поля $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ (директора) аналогично тому, как это делается в теории жидких кристаллов [2, 3]. Уравнениями для определения \mathbf{n} будут уравнения баланса момента импульса, формально совпадающие с (1) после замены *микроскопического* вектора \mathbf{p} на *макроскопический* вектор \mathbf{n} .

Обратим внимание на то, что уравнение (1) почти в точности совпадает с соответствующим уравнением Эриксона–Лесли–Пароди (величина \mathbf{h} в случае жидких кристаллов — молекулярное поле). Это позволяет надеяться, что многие эффекты, присущие жидкокристаллическим средам, будут проявляться и в случае самоплавающих организмов. Это следовало ожидать, так как с точки зрения механики сплошной среды (если не вдаваться в микроскопические подробности) и жидкие кристаллы, и жидкость с ориентированными микроорганизмами представляют собой анизотропную сплошную среду («живая жидкокристаллическая среда»).

В чем будет проявляться преимущество предлагаемой феноменологической модели? Во-первых, можно, используя хорошо развитый аппарат неравновесной термодинамики, конструировать самую общую модель, отказавшись от предположения о малости концентрации, учесть разнообразные эффекты, например, хиральность, связанную с асимметрией микроорганизмов, инерционные эффекты и т. п. Во-вторых, при феноменологическом подходе нет необходимости конкретизировать процедуру осреднения, которая требуется лишь для вычисления кинетических коэффициентов на основе микроскопических представлений. Заметим, что излишняя детализация микроскопических представлений, основанных, вообще говоря, на механических аналогиях, не менее опасна при изучении биологических объектов, чем феноменологические представления. В третьих, вместо функциональной зависимости $\langle \mathbf{p} \rangle(\mathbf{x}, t) = F(\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))$, обоснованной лишь для малых концентраций и в предположении квазистационарности, возникнет иная, возможно более общая, связь между полем направлений \mathbf{n} и вихрем скорости $\text{rot } \mathbf{v}$, вытекающая из макроскопического закона сохранения момента импульса.

Предлагаемая ниже феноменологическая модель, конечно, ни в коем случае не отвергает имеющуюся теорию Кесслера–Педли, ее всевозможные обобщения и вообще микроскопический подход к описанию процессов самоплавления, а является скорее разумным дополнением теории.

1. Простейшая феноменологическая модель. Примем следующие основные гипотезы: 1. жидкость + самоплавающие организмы представляет собой двухкомпонентную *гомогенную смесь* растворитель + примесь (т. е. раствор, а не суспензия); 2. анизотропные свойства смеси исчезают при отсутствии примеси («чистый» растворитель — изотропная жидкость).

Поведение самоплавающих микроорганизмов в жидкости характеризуем их концентрацией $a(\mathbf{x}, t)$ и направлением самоплавления $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ — векторным полем с векторами единичной длины (директором). В отличие от модели Педли–Кесслера $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ считается не случайной, а детерминированной величиной.

Если принять такую точку зрения, то жидкость с самоплавающими организмами представляет собой сплошную среду с анизотропными свойствами, характеризуемыми директором. Формально это означает, что для конструирования модели

может быть использован любой из вариантов уравнений для жидких анизотропных сред, например, уравнения Эриксона–Лесли–Пароди [2, 3].

Опуская подробный вывод, приведем уравнения феноменологической модели поведения самоплавающих организмов в жидкости в приближении Обербека–Буссинеска (в безразмерных переменных):

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \beta a \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$aI(\boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}) + a\mathbf{n} \wedge (\gamma_1 \mathbf{N} + \gamma_2 \mathbb{D} \cdot \mathbf{n} + \gamma \mathbf{g}) = 0, \quad (3)$$

$$a_t + \mathbf{v} \cdot \nabla a + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{i} = -D_1 \nabla a - D_2 \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \nabla a) + V \mathbf{n}, \quad (4)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{n} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \mathbb{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*), \quad \mathbb{D} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{n}. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость смеси, p — давление, \mathbf{i} — плотность потока массовой концентрации, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести ($\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, где \mathbf{k} — орт оси x_3), $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения директора, \mathbb{D} — тензор скоростей деформаций, μ — кинематическая вязкость жидкости, \mathbf{N} — коротационная производная директора, β — коэффициент концентрационного сжатия, γ_1, γ_2 — коэффициенты вращательной вязкости, D_{\parallel}, D_{\perp} — коэффициенты диффузии примеси в направлении параллельном и перпендикулярном директору ($D_1 = D_{\parallel}, D_2 = D_{\parallel} - D_{\perp}$), I — удельный момент инерции, γ — отклонение центра тяжести микроорганизма от его геометрического центра, V — скорость самоплавания.

Уравнения (2)–(6) отличаются от соответствующих уравнений Кесслера–Педли наличием макроскопического уравнения баланса момента импульса для примеси (3), а также членами, учитывающими инерционные эффекты.

Во избежание недоразумений, сразу же отметим, что множитель a (концентрация) в уравнениях (3) возникает как раз из предположения о том, что анизотропные свойства смеси должны исчезать при отсутствии примеси.

2. Вибрации слоя с микроорганизмами. Используя уравнения (2)–(6) покажем, что учет инерционных членов I при наличии вибрации приводит к возникновению дополнительных *виброгенных* моментов, действующих на смесь — эффект, который невозможно обнаружить для модели Кесслера–Педли.

Предполагаем, что слой жидкости совершает гармонические колебания с амплитудой b_0 и частотой ω_0 в направлении единичного вектора \mathbf{m} . Считаем, что величина амплитуды колебаний имеет порядок $b_0 = \mathcal{O}(1/\omega_0)$. В уравнениях (2)–(6) произведем формальную замену, добавив к ускорению силы тяжести \mathbf{g} вибрационное ускорение $b_0 \omega_0^2 \mathbf{m} \cos \omega_0 t$: $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g} + b \omega_0 \mathbf{m} \cos \omega t$, $\mathbf{m}^2 = 1$, $b = \mathcal{O}(1)$, $b = b_0 \omega_0$.

Главный член асимптотического разложения строим, следуя работам [4, 5]. Очевидно, что все результаты о вибрационной конвекции применительно к уравнениям (2), (4) автоматически переносятся из работы [5]. Подробно следует рассмотреть лишь процедуру осреднения уравнений эволюции директора (3), (5).

Введем быстрое время $\tau = \omega_0 t$ и малый параметр $\varepsilon = \omega_0^{-1} \ll 1$. Следуя [5], ищем решение уравнений (2)–(6) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \tau), & p &= \bar{p}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^{-1} \tilde{p}(\mathbf{x}, \tau), \\ a &= \bar{a}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \tilde{a}(\mathbf{x}, \tau), & \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{\mathbf{n}}$ — средние по быстрому времени, $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}, \tilde{a}, \tilde{\mathbf{n}}$ — вибрационные члены.

Заметим, что вектор \mathbf{n} является единичным вектором. В частности, это означает, что необходимо требовать (с точностью до членов порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$):

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = 0, \quad \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 1. \quad (8)$$

Уравнение эволюции директора (3), (5) запишем в виде:

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{Q} - \gamma \mathbf{n} \wedge (\mathbf{g} + \varepsilon^{-1} b \mathbf{m} \cos \tau) = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{Q} = \gamma_1 \mathbf{N} + \gamma_2 \mathbb{D} \cdot \mathbf{n}. \quad (9)$$

Вычисление производных $\dot{\mathbf{n}}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ с учетом (7) приводит к соотношениям:

$$\dot{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}_t + \tilde{\mathbf{n}}_\tau + (\bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla (\bar{\mathbf{n}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{n}}), \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_t + \varepsilon^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\tau + (\bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla (\bar{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}).$$

Применяя процедуру осреднения, описанную в [5], из (9) получим:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{n}} \wedge \tilde{\mathbf{n}}_\tau + \bar{\mathbf{n}} \wedge (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{n}}), \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{n}} \wedge \mathcal{D}_t \bar{\mathbf{n}}, \quad \mathcal{D}_t(\cdot) = (\cdot)_t + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\cdot), \quad (10)$$

$$I\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\tau = -\gamma b \bar{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{m} \cos \tau, \quad I\mathcal{D}_t \bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\mathbf{n}} \wedge \bar{\mathbf{Q}} + \gamma \bar{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{g} = \mathbf{M}, \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \gamma_1 \bar{\mathbf{N}} + \gamma_2 \mathbb{D} \cdot \bar{\mathbf{n}}, \quad \bar{\mathbf{N}} = \mathcal{D}_t \bar{\mathbf{n}} - \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \bar{\mathbf{n}}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = -\gamma b \overline{\tilde{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{m} \cos \tau} - I \overline{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}}. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{M} — виброгенный момент, возникающий в результате вибраций.

Для вычисления виброгенного момента, следуя [5], определим вибрационное перемещение $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ как решение задачи: $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau$, $\tilde{\mathbf{v}} = 0$. Тогда для $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ имеем:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{n}} \wedge \tilde{\mathbf{n}}_\tau + \bar{\mathbf{n}} \wedge (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau \cdot \nabla \bar{\mathbf{n}}), \quad I\tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\gamma b \bar{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{m} \sin \tau. \quad (14)$$

Исключая $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ и интегрируя с учетом условий $\bar{\boldsymbol{\omega}} = 0$, $\bar{\mathbf{n}} = 0$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = 0$, получим:

$$\gamma b I^{-1} \bar{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{m} \cos \tau = \bar{\mathbf{n}} \wedge \tilde{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} \wedge (\tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{n}}). \quad (15)$$

Умножая (15) векторно на $\bar{\mathbf{n}}$, принимая во внимание (8) и вытекающее из них соотношение $\bar{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{n}}) = 0$, для вибрационной добавки $\tilde{\mathbf{n}}$ выводим:

$$\tilde{\mathbf{n}} = -\gamma b I^{-1} (\bar{\mathbf{n}} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}) \cos \tau - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{n}}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13) и используя (14), для виброгенного момента имеем:

$$\mathbf{M} = \delta(\bar{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{m})(\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}), \quad \delta = \frac{\gamma^2 b^2}{2I}. \quad (17)$$

Здесь δ — вибрационный параметр.

Окончательно уравнения для медленных движений принимают вид:

$$I \mathcal{D}_t \bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\mathbf{n}} \wedge (\gamma_1 \bar{\mathbf{N}} + \gamma_2 \bar{\mathbb{D}} \cdot \bar{\mathbf{n}} + \gamma \mathbf{g} - \mathbf{M}) = 0, \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{n}} \wedge \mathcal{D}_t \bar{\mathbf{n}}.$$

Отметим, что эти уравнения можно получить из исходных формальной заменой всех величин на средние по быстрому времени и добавлением *виброгенного* ускорения к ускорению силы тяжести: $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g} - (\delta/\gamma)\mathbf{m}(\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m})$.

Сравнение осредненных уравнений с уравнениями теории жидких кристаллов показывает, что действие вибрации аналогично действию магнитного поля напряженности \mathbf{m} , а параметр δ соответствует магнитной анизотропии (см. (17)). Это, в частности, означает, что для самоплавающих организмов возможно возникновение вибрационных аналогов переходов Фридерикса [3] — переориентация микроорганизмов вибрацией и возникновение пространственных структур.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (04-01-96814-р2004юг-а) и (03-01-00802-а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.1768.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Pedley T. J., Kessler J. O.* A new continuum model for suspension of gyrotactic microorganisms // *J. Fluid Mech.* 1990. No 212. P. 155–182.
- [2] *Leslie F. M.* Some constitutive equations for anisotropic fluids // *Q. Jl. Mech. Math.* 1966. No 19. P. 357–370.
- [3] *De Gennes P. G., Prost J.* *The Physics of Liquid Crystals.* Clarendon Press. 1993. 760 p.
- [4] *Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.* Влияние высокочастотных вибраций на возникновение конвекции // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1966. No 5. С. 51–55.
- [5] *Yudovich V. I.* Vibrodynamics and vibrogeometry of mechanical systems with constraints. Part I, II // Preprint No 11. HIMSA, Hull University, UK. 2004. 56 p.

Zhukov M. Yu. *A phenomenological model for self-swimming microorganisms.*

The phenomenological model which describe self-swimming microorganisms with the displaced center of gravity is presented. It is shown, that the action of vibrations on the microorganisms is similar to that of magnetic field in liquid crystals.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Зеньковская С. М., Новосядлый В. А.

Ростовский госуниверситет

Исследуется устойчивость движения границы раздела в двухслойной системе вязких однородных несмешивающихся жидкостей. Сверху и снизу слои ограничены твердыми стенками. Система совершает вертикальные поступательные гармонические вибрации. Построено трансцендентное уравнение в цепных дробях для определения критических параметров системы и частоты и амплитуды вибрации. Приведены результаты расчета нейтральных кривых и обнаружено качественно новое поведение границы раздела при воздействии вибрации по сравнению со случаем мягких стенок.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из двух слоев несмешивающихся вязких несжимаемых однородных жидкостей с деформируемой границей раздела $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$. Начало координат возьмем на недеформированной поверхности раздела. Координаты будем обозначать (x_1, x_2, x_3) или (x, y, z) . Ось z направим вертикально вниз. Слой сверху и снизу ограничен твердыми стенками ($x_3 = H_1, x_3 = -H_2$) (стенка с индексом 2 — вверху, с индексом 1 — внизу). Уравнения движения жидкостей, записанные в декартовой системе координат, жестко связанной с колеблющейся системой, имеют вид:

$$\tilde{\rho}_k \left(\frac{\partial \vec{v}^k}{\partial t} + (\vec{v}^k, \nabla) \vec{v}^k \right) = -\nabla p^k + \tilde{\mu}_k \Delta \vec{v}^k + \tilde{\rho}_k g(t) \vec{\gamma}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь $\vec{v}^k = (v_1^k, v_2^k, v_3^k)$ — относительные скорости, p^k — давления, $\tilde{\rho}_k$ — плотности компонент, $\tilde{\mu}_k$ — коэффициенты динамических вязкостей, $\vec{\gamma}$ — единичный вектор оси x_3 . Функция $g(t) = g_0 - \tilde{a} \tilde{\omega}^2 f''(\tilde{\omega} t)$ — переменное ускорение силы тяжести, $\tilde{\omega}$ — частота, $\tilde{a} = \tilde{a}(\tilde{\omega})$ — амплитуда колебаний. Для того, чтобы поменять слои местами, нужно заменить $\vec{\gamma}$ на $-\vec{\gamma}$.

Краевые условия на поверхности раздела $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ возьмем в виде:

$$\vec{v}^1 = \vec{v}^2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \vec{v}^k \cdot \vec{\ell},$$

$$(\tau_{ij}^1 - \tau_{ij}^2) n_j - (p^1 - p^2) n_i = \tilde{C} n_i \varkappa. \quad (3)$$

$$\tau_{ij}^k = \tilde{\mu}_k \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^k}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \vec{\ell} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi}{\partial x_2}, 1 \right),$$

$$\varkappa = \frac{(1 + \xi_{x_1}^2) \xi_{x_1 x_2} + (1 + \xi_{x_2}^2) \xi_{x_1 x_2} - 2 \xi_{x_1} \xi_{x_2} \xi_{x_1 x_2}}{(1 + \xi_{x_1}^2 + \xi_{x_2}^2)^{3/2}}.$$

Здесь $\vec{\ell}$ — нормаль к поверхности раздела, направленная внутрь первой жидкости, $\vec{n} = \vec{\ell} / |\vec{\ell}|$ — ее орт, $\vec{\tau}^k$ — тензоры вязких напряжений.

На твердых стенках $x_3 = H_1, x_3 = -H_2$ – необходимо поставить условия:

$$\vec{v}^k = 0 \quad (4)$$

2. Квазиравновесное решение. Спектральная задача для возмущений. Задача (1)-(4) имеет решение, соответствующее относительному равновесию и плоской поверхности раздела:

$$\vec{v}^{k0} = 0, \quad p^{k0} = \tilde{\rho}_k g(t) z, \quad \xi^0 = 0. \quad (5)$$

Здесь функции p^{k0} определены с точностью до одной и той же произвольной функции $\varphi(t)$.

После линеаризации задачи для возмущений \vec{u}^k, P^k, η , обезразмеривания переменных, введения функций тока $\psi^k(x_1, x_3, t)$, исключения давлений P^k и отделения переменных x_1 и x_2 получим спектральную задачу для амплитуд ψ^k, η :

$$\rho_k \frac{\partial}{\partial t} (D^2 - \alpha^2) \psi^k = \delta_k (D^2 - \alpha^2)^2 \psi^k \quad (6)$$

$$z = 0 : \quad \psi^k = \frac{1}{\alpha^2} \eta_t \quad (7)$$

$$D\psi^1 = D\psi^2 \quad (8)$$

$$\psi^1 = \psi^2 \quad (9)$$

$$\delta_1 (D^2 + \alpha^2) \psi^1 = \delta_2 (D^2 + \alpha^2) \psi^2 \quad (10)$$

$$3\alpha^2 (\delta_1 D\psi^1 - \delta_2 D\psi^2) + (\rho_1 D\psi_t^1 - \rho_2 D\psi_t^2) - \\ - (\delta_1 D^3 \psi^1 - \delta_2 D^3 \psi^2) - Q(t) (\rho_1 - \rho_2) \eta - C\alpha^2 \eta = 0 \quad (11)$$

$$z = h_1, -h_2 : \quad \psi^k = 0 \quad D\psi^k = 0 \quad (12)$$

Здесь $D \equiv \partial/\partial z$, $()_t \equiv \partial/\partial t$. Безразмерные параметры введены следующим образом: масштабы длины – \mathcal{L} , времени – \mathcal{T} , скорости – \mathcal{L}/\mathcal{T} , давления – $(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2)\mathcal{L}^2/\mathcal{T}^2$ (масштабы \mathcal{L} и \mathcal{T} пока оставляем произвольными), безразмерные плотности $\rho_k = \frac{\tilde{\rho}_k}{\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2}$ и кинематические вязкости $\delta_k = \frac{\tilde{\mu}_k}{\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2} \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{L}^2}$ (заметим, что имеет место соотношение $\rho_1 + \rho_2 = 1$), $h_1 = H_1/\mathcal{L}$, $h_2 = H_2/\mathcal{L}$ – безразмерные толщины слоев, $C = \frac{\tilde{C}\mathcal{T}^2}{(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2)\mathcal{L}^3}$ – безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, $\omega = \tilde{\omega}\mathcal{T}$ – безразмерная частота модуляции, $Q(t) = Q_0 - a\omega^2 f''(\omega t)$ – эффективное безразмерное ускорение, $Q_0 = \frac{g_0\mathcal{T}^2}{\mathcal{L}}$ – его средняя часть (g_0 – ускорение силы тяжести), $-a\omega^2 f''(\omega t)$ – его модуляция с амплитудой $a\omega^2$ ($a = \tilde{a}/\mathcal{L}$ – безразмерная амплитуда скорости модуляции).

Из динамического краевого условия (11) видно, что влияние вибрации на границу раздела зависит от разности плотностей жидкостей. Если плотности одинаковые ($\rho_1 = \rho_2$), то вибрация не влияет на устойчивость квазиравновесия (5). Этот вывод получен также и в [1].

3. Метод цепных дробей для построения дисперсионного соотношения.

Далее рассмотрим случай, когда система совершает гармонические колебания $f(\omega t) = \cos \omega t$. Отделяем время и разыскиваем неизвестные в виде бесконечных рядов Фурье:

$$\psi^k(z, t) = e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^k(z) e^{in\omega t}, \quad (13)$$

$$\eta(t) = e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (14)$$

Здесь $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ — комплексное число — показатель устойчивости решения.

Подставляя выражения (13), (14) в задачу (6)–(12) получаем спектральную задачу для параметра σ :

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad & \rho_k \sigma_n (D^2 - \alpha^2) \psi_n^k = \delta_k (D^2 - \alpha^2)^2 \psi_n^k \\ & \psi_n^k = \frac{\sigma_n}{\alpha^2} c_n \\ & \psi_n^1 = \psi_n^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & D\psi_n^1 = D\psi_n^2 \\ & \delta_1 (D^2 + \alpha^2) \psi_n^1 = \delta_2 (D^2 + \alpha^2) \psi_n^2 \\ & 3\alpha^2 D\psi_n^1 (\delta_1 - \delta_2) + D\psi_n^1 \sigma_n (\rho_1 - \rho_2) - (\delta_1 D^3 \psi_n^1 - \delta_2 D^3 \psi_n^2) - \\ & - ((\rho_1 - \rho_2) Q_0 + C\alpha^2) c_n - a\omega^2 (\rho_1 - \rho_2) (c_{n-1} + c_{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$z = h_1, -h_2 : \quad \psi_n^k = 0, \quad D\psi_n^k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

Здесь введено обозначение $\sigma_n = \sigma + in\omega$, было использовано краевое условие (8) при выводе уравнения (16).

Решая задачу (15), (17), находим зависимость ψ_n^k от c_n . Подставляя в краевое условие (16) получаем бесконечную трехдиагональную систему для неизвестных c_n :

$$M_n(\sigma) c_n = -q(c_{n-1} + c_{n+1}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

где $q = (\rho_1 - \rho_2) a \omega^2 \alpha$, а выражение для M_n дается равенством:

$$\begin{aligned} M_n(\sigma) &= (3\alpha^2(\delta_1 - \delta_2) + \sigma_n(\rho_1 - \rho_2)) \bar{m}_1 - \bar{m}_2 - \bar{m}_3 + \Omega^2, \\ \bar{m}_1 &= \frac{\bar{\varkappa}_n}{s_1} (\alpha \sqrt{\delta_1} (b_1 + 2p_1) - p_1 d_1) - \frac{\sigma_n}{s_1} (b_1 + p_1), \\ \bar{m}_2 &= \frac{\bar{\varkappa}_n}{s_1} (\alpha^3 \delta_1^{3/2} (b_1 + p_1) + p_1^3 (\alpha \sqrt{\delta_1} - d_1)) - \frac{\sigma_n}{s_1} (\alpha^2 \delta_1 + p_1^3), \\ \bar{m}_3 &= \frac{\bar{\varkappa}_n \rho_1 \sqrt{\delta_1}}{s_2 \rho_2 \sqrt{\delta_2}} (\alpha^3 \delta_2^{3/2} (b_2 + p_2) + p_2^3 (\alpha \sqrt{\delta_2} - d_2)) + \\ &+ \frac{\delta_1 - \delta_2}{s_2 \rho_2} (2\alpha^4 \delta_2 (b_2 + 2p_2) + 2\alpha^2 p_2^3 (1 - \frac{d_2}{\alpha \sqrt{\delta_2}})) \end{aligned}$$

Более подробно вывод и вид коэффициентов приведен в [4].

В случае $\sigma_n = 0$ $M_n = \Omega^2$. Для трехдиагональных систем оказывается возможным записать дисперсионное соотношение для σ в явном виде с использованием

цепных дробей ([2]). Дисперсионное уравнение, полученное из (18), имеет вид:

$$-M_n + \frac{-q^2}{-M_{n+1} + \frac{-q^2}{-M_{n+2} + \dots}} = \frac{-q^2}{M_{n-1} + \frac{-q^2}{M_{n-2} + \dots}}, \quad (19)$$

При $\sigma = 0$ уравнение (19) принимает вид:

$$\operatorname{Re} \frac{q^2}{M_1 - \frac{q^2}{M_2 + \dots}} = \frac{M_0}{2} \quad (20)$$

Если $\sigma = \frac{i\omega}{2}$ оно приводится к следующей форме:

$$\left| M_0 - \frac{q^2}{M_1 - \frac{q^2}{M_2 - \frac{q^2}{M_3 - \dots}}} \right|^2 = q^2 \quad (21)$$

4. Численные результаты. Трансцендентные уравнения (20), (21) решались численно для нахождения критических параметров системы. Качественная картина влияния соотношения плотностей и вязкостей слоев полностью аналогична случаю мягких стенок, рассмотренного в [3]. Сохранилось чередование типов параметрического резонанса в зависимости от частоты возбуждающей силы. Это продемонстрировано на Рис. 1 ($a^* = \min_{\alpha} a(\alpha)$).

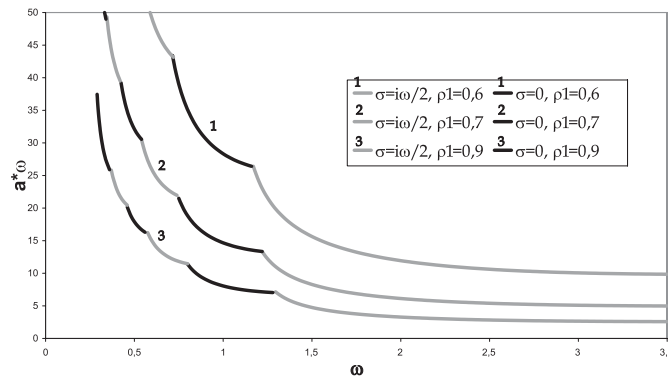


Рис. 1. Чем больше отношение плотностей слоев, тем восприимчивее система к параметрическому резонансу.

Сильное качественное влияние на поведение двухслойной системы с твердыми стенками оказывают глубины слоев h_1 и h_2 , что для мягких стенок не наблюдалось. Причем эти качественные изменения происходят, когда параметры h_1 и h_2 близки к крайним значениям – 0 или 1. Это показано на Рис. 2. Для значений $h_1 = 0,3; 0,5; 0,7$ поведение системы аналогично системе с мягкими стенками.

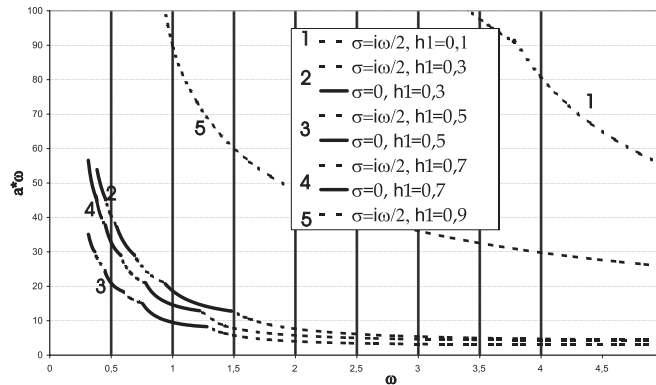


Рис. 2. При большой разнице глубин слоев (1 и 5) ответ системы на параметрическое возбуждение качественно меняется.

Однако для $h_1 = 0,1$ и $h_1 = 0,9$ мы видим, что теряется чередование типов параметрического резонанса и ведущим типом становится параметрический резонанс двойного периода. Система становится гораздо менее восприимчива к вибрациям. Причем способы, которыми это реализуется, отличаются для $h_1 = 0,1$ и $h_1 = 0,9$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00567-а, № 04-01-96802-р2004юг-а) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-1768.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М., 2003.
- [2] Зеньковская С. М., Юдович В. И. Метод интегро-дифференциальных уравнений и цепных дробей в задаче о параметрическом возбуждении волн // Журн. выч. матем. и матем. физ. 2004. № 4. С. 370–384.
- [3] Зеньковская С. М., Новосядлый В. А. Параметрическое возбуждение волн на границе раздела двухслойной системы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред.
- [4] Зеньковская С. М., Новосядлый В. А. Параметрическое возбуждение волн на границе раздела двухслойной системы. Деп. в ВИНТИ.

Zenkovskaya S.M., Novossiadliy V.A. *Parametric wave excitation on the interface of a two-layer system.* The stability of interface motion of a two-layer system of viscous homogenous immiscible fluids is studied. Layers are bounded by solid walls from up and below. System as a whole performs vertical translational harmonical vibrations. Transcendent equation in continuous fractions form for critical parameter values was derived. The results of calculation of neutral curves are presented, also a qualitatively new behaviour of interface under influence of vibration in comparison with the case of soft boundaries was discovered.

РАВНОВЕСИЕ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ С ДИСЛОКАЦИЯМИ И ДИСКЛИНАЦИЯМИ

Зубов Л. М.

Ростовский госуниверситет

Предложена модификация уравнений Кармана для гибких упругих пластинок, учитывающая наличие дислокаций и дисклинаций. Рассмотрены как изолированные, так и непрерывно распределенные дефекты. В случае весьма тонкой пластинки (мембраны), свободной от внешних нагрузок, исследована задача об ее изгибе вследствие релаксации внутренних напряжений, обусловленных дефектами. Эта задача сведена к уравнению Монжа-Ампера. Найдено несколько точных решений о форме поверхности мембраны, содержащей распределенные дефекты.

1. Исходные соотношения теории Кармана гибких упругих пластинок можно представить следующим образом [1-3]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T} \cdot \nabla w) + p = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \partial W / \partial \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = -\partial W / \partial \mathbf{x} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2}(\nabla w)(\nabla w), \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \mathbf{x} = \nabla \nabla w \quad (3)$$

Здесь ∇ – двумерный набла-оператор, \mathbf{T} – тензор мембранных усилий, \mathbf{M} – тензор изгибающих моментов, w – прогиб пластинки, \mathbf{u} – вектор перемещений в плоскости пластинки, p – поперечная нагрузка, \mathbf{E} – тензор деформаций, $\boldsymbol{\epsilon}$ – линейный двумерный тензор деформаций, \mathbf{x} – тензор изгиба-кручения. Для физически линейного изотропного материала удельная потенциальная энергия W и определяющие соотношения имеют вид

$$W = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} [(1-\nu) \operatorname{tr} \mathbf{E}^2 + \nu \operatorname{tr}^2 \mathbf{E}] + \frac{D}{2} [(1-\nu) \operatorname{tr} \mathbf{x}^2 + \nu \operatorname{tr}^2 \mathbf{x}], \quad (4)$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \mathbf{T} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\mathbf{E} + \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \mathbf{E}],$$
$$\mathbf{M} = -\mathbf{D} [(1-\nu)\mathbf{x} + \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \mathbf{x}]$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина пластинки, D – цилиндрическая жесткость, \mathbf{g} – двумерный единичный тензор. Все тензоры в (1)-(4) являются плоскими.

2. Выведем уравнения равновесия гибкой пластинки, содержащей в плоском состоянии поля непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций. Для этого сначала рассмотрим пластинку, занимающую многосвязную плоскую область σ , гомеоморфную кругу с круговыми отверстиями. Будем предполагать, что прогиб w и тензор деформаций \mathbf{E} , а следовательно, и тензор $\boldsymbol{\epsilon}$ –

однозначные функции координат. Вектор \mathbf{u} при этом может быть неоднозначным. Согласно (3) можно записать (\mathbf{e} – дискриминантный тензор на плоскости)

$$\nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{e}\omega, \quad \mathbf{e} = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{g}, \quad (5)$$

где ω – угол поворота частицы пластинки вокруг орта \mathbf{i}_3 , ортогонального плоскости пластинки. Предполагая ω однозначной функцией в области σ , из (5) найдем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}\omega) \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{r} = x_\alpha \mathbf{i}_\alpha, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) \quad (6)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки срединной плоскости пластинки, \mathbf{r}_0 – радиус-вектор начальной точки, x_α ($\alpha = 1, 2$) – декартовы координаты, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ – координатные орты. При выполнении уравнения $\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \nabla \omega$ криволинейный интеграл в (6) не зависит от пути интегрирования, если область σ односвязна. В случае многосвязной области выражение (6) дает, вообще говоря, многозначную функцию. Неоднозначность можно устранить, превратив область σ в односвязную путем проведения необходимого числа разрезов (перегородок). При этом значения функции \mathbf{u}_\pm на противоположных берегах каждого разреза могут отличаться на постоянную величину $\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = \mathbf{b}_k$. Постоянные плоские векторы \mathbf{b}_k не зависят от выбора системы разрезов, называются векторами Бюргерса и выражаются через поля $\boldsymbol{\epsilon}$ и ω по формуле

$$\mathbf{b}_k = \oint_{\Gamma_k} (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}\omega) \cdot d\mathbf{r}, \quad (7)$$

где контур Γ_k охватывает только одно k -тое отверстие. Суммарный вектор Бюргерса дискретного набора N изолированных дислокаций, содержащихся в некоторой подобласти $\sigma_* \subset \sigma$, согласно (7) определяется формулой

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^N \mathbf{b}_k = \oint_{\Gamma} (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{e}\omega) \cdot d\mathbf{r} \quad (8)$$

Здесь контур Γ охватывает оси всех изолированных дислокаций, содержащихся в подобласти σ_* . Переходя от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению, диаметры отверстий устремляем к нулю, подынтегральную функцию в (8) считаем непрерывно дифференцируемой и, преобразуя контурный интеграл в интеграл по площади, получим

$$\mathbf{B} = \iint_{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{e}\omega) d\sigma \quad (9)$$

Выражение (9) дает основание назвать подынтегральную вектор-функцию плотностью краевых дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma} - \nabla \omega, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (10)$$

Далее рассмотрим плоскую упругую среду с непрерывно распределенными дислокациями и поставим задачу об определении поля поворотов ω в многосвязной области по заданным непрерывно дифференцируемым и однозначным полям γ и α . Теперь мы отказываемся от требования однозначности поворотов. Неоднозначность поворотов означает существование в многосвязном теле изолированных клиновых дисклинаций, мощность которых определяется углами Франка θ_k и выражается формулой $\theta_k = \oint_{\Gamma_k} (\gamma - \alpha) \cdot dr$.

Рассуждая аналогично предыдущему, перейдем от дискретного набора дисклинаций к их непрерывному распределению со скалярной плотностью β , для которой получается следующее выражение

$$\beta = \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot (\gamma - \alpha) \quad (11)$$

Считая плотности дислокаций α и дисклинаций β заданными, из (11) приходим к следующему уравнению несовместности деформаций

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \epsilon) = \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \alpha + \beta \quad (12)$$

При $\alpha = \beta = 0$ уравнение (12) переходит в известное [4] уравнение совместности деформаций плоской линейной теории упругости.

Из (4) находим $\mathbf{E} = (Eh)^{-1}[(1 + \nu)\mathbf{T} - \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \mathbf{T}]$. Подставляя сюда представление тензора усилий через функцию напряжений Эри F , тождественно удовлетворяющее первому уравнению равновесия (1)

$$\mathbf{T} = -\mathbf{e} \cdot \nabla \nabla F \cdot \mathbf{e} \quad (13)$$

и внося в (12) вместо ϵ выражение $\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\nabla w)(\nabla w)$, а также подставляя во второе уравнение равновесия (1) определяющее соотношение для тензора \mathbf{M} из (4), получим систему уравнений относительно прогиба пластинки w и функции напряжений F , которая в декартовых координатах записывается так (Δ -двумерный оператор Лапласа, $F_{,\alpha} = \partial F / \partial x_\alpha$)

$$\Delta^2 F + Eh(w_{,11}^2 w_{,22}^2 - w_{,12}^2) = Eh(\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \alpha + \beta) \quad (14)$$

$$D\Delta^2 w + 2F_{,12} w_{,12} - F_{,22} w_{,11} - F_{,11} w_{,22} = p \quad (15)$$

Система (14),(15) отличается от классических уравнений Кармана [1-3] наличием правой части в (14), обусловленной учетом распределенных дислокаций и дисклинаций. Один из распространенных вариантов граничных условий в случае односвязной пластинки состоит в задании на ее краю $\partial\sigma$ значений w , $\partial w / \partial n$ и F , $\partial F / \partial n$

3. В этом разделе рассмотрим постановку задачи о равновесии многосвязной гибкой пластинки, содержащей дислокации Вольтерры. Решая задачу об определении поля перемещений \mathbf{u} в многосвязной области по заданному однозначному тензорному полю ϵ , получим, что поле перемещений, вообще говоря, неоднозначно. Неоднозначность устраняется после превращения области в односвязную путем проведения разрезов. При пересечении каждого разреза вектор \mathbf{u} испытывает скачок, описываемый формулой

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = \mathbf{b}_k + \mathbf{q}_k \times \mathbf{r} = \mathbf{b}_k + \theta_k \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$$

где \mathbf{b}_k – вектор Бюргерса, а $\mathbf{q}_k = \theta_k \mathbf{i}_3$ – вектор Франка для дислокации Вольтерры, отвечающей k -тому отверстию. Эти величины выражаются через поле деформаций $\boldsymbol{\epsilon}$ по формулам

$$\mathbf{b}_k = \oint_{\Gamma_k} (\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\gamma}) \cdot d\mathbf{r}, \quad \theta_k = \oint_{\Gamma_k} \boldsymbol{\gamma} \cdot d\mathbf{r} \quad (16)$$

Замкнутая кривая Γ_k , охватывающая только k -тое отверстие, может, в частности, совпадать с контуром этого отверстия γ_k .

Предположим, что контуры отверстий свободны от нагрузки, действующей в плоскости пластинки, т. е. на контуре каждого отверстия выполняется условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$, где \mathbf{n} – нормаль к контуру. Можно показать, что эти условия обеспечивают однозначность функции напряжений Эри в многосвязной области и приводят к следующим условиям на функцию F

$$F|_{\gamma_k} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{A}_k + C_k, \quad \partial F / \partial n|_{\gamma_k} = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{A}_k \quad (17)$$

В (17) $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$ – единичный вектор касательной к контуру γ_k , \mathbf{A}_k – постоянные плоские векторы, C_k – скалярные постоянные. Постоянные \mathbf{A}_k , C_k заранее неизвестны, дополнительными уравнениями для их определения служат интегральные соотношения (16), в которых вместо $\boldsymbol{\epsilon}$ следует подставить $\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\nabla w)(\nabla w)$, а величины \mathbf{b}_k , θ_k , считать заданными постоянными. Особенность постановки задачи для многосвязной пластинки, состоящая в необходимости учета интегральных соотношений (16), сохраняется и при отсутствии дислокаций Вольтерры, т.е. при $\mathbf{b}_k = \theta_k = 0$. В этом случае соотношения (16) выражают требование однозначности перемещений \mathbf{u} в многосвязной области. Кроме условий (17), на контурах отверстий γ_k должны быть поставлены условия на функцию прогиба w и ее производные. Это могут быть условия жесткого защемления, шарнирного опирания и т. д.

4. Для весьма тонкой пластинки (мембраны) в уравнении (15) можно отбросить первое слагаемое в левой части, т. е. положить $D = 0$. Это дает следующую систему уравнений

$$\Delta^2 F + Eh(w_{,11}^2 w_{,22}^2 - w_{,12}^2) = Eh(\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta) \quad (18)$$

$$2F_{,12} w_{,12} - F_{,22} w_{,11} - F_{,11} w_{,22} = p \quad (19)$$

Поскольку мембрана не сопротивляется изгибу, на ее краю $\partial\sigma$ задаются значения w , F и $\partial F / \partial n$, т. е. три условия вместо четырех. Рассмотрим случай, когда на односвязную мембрану не действуют внешние нагрузки. Это значит, что $p = 0$, а на границе области $F = \partial F / \partial n = 0$. Тогда краевая задача для уравнений (18), (19) имеет по меньшей мере два решения: 1) $w = 0$, а функция напряжений определяется из уравнения $\Delta^2 F = Eh(\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta)$; 2) $F = 0$, а прогиб мембраны находится из уравнения

$$w_{,11}^2 w_{,22}^2 - w_{,12}^2 = \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta \quad (20)$$

Второе решение с физической точки зрения более предпочтительно, так как ему отвечают нулевые напряжения, а следовательно, нулевая энергия мембраны.

Переходя в третье измерение, т. е. приобретая изогнутую форму, плоская мембрана освобождается от внутренних напряжений, обусловленных распределенными дислокациями и дисклинациями.

Уравнение (20) – это классическое уравнение Монжа-Ампера. В дальнейшем ограничимся случаем, когда краевые дислокации отсутствуют ($\alpha = 0$).

Из известной формулы для гауссовой кривизны, поверхности

$$K = (w_{,11}^2 w_{,22}^2 - w_{,12}^2)(1 + w_{,1}^2 + w_{,2}^2)^{-2}$$

вытекает, что знак плотности дисклинаций β в данной точке определяет знак гауссовой кривизны поверхности $w(x_1, x_2)$ в этой точке. Свойства уравнения Монжа-Ампера существенно зависят от знака правой части. При непрерывной и положительной правой части согласно теореме А.В. Погорелова [5] задача Дирихле для уравнения (20) в выпуклой области σ разрешима при любых непрерывных граничных значениях, если кривизна кривой, ограничивающей область σ , положительна. При заданном направлении выпуклости это решение единственно. (Указание на направление выпуклости здесь связано с тем, что уравнение (20), очевидно, определяет функцию w с точностью до знака.)

Приведем некоторые простые решения в форме изогнутой мембраны, содержащей распределенные дисклинации. Для эллиптической мембраны, ограниченной кривой $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, при $w|_{\partial\sigma} = 0$ и при $\beta = const > 0$ решение уравнения (20) имеет вид $2w = \pm ab\sqrt{\beta}(x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 - 1)$.

В полярных координатах (r, φ) уравнение (20) при $\alpha = 0$ записывается так

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \beta \quad (21)$$

Предполагая, что $\beta = \beta(r)$, решение ищем в виде $w = w(r)$. Для круглой мембраны $0 \leq r \leq r_0$, закрепленной на границе, получим при $\beta \geq 0$

$$w(r) = \pm \int_r^{r_0} \sqrt{2 \int_0^r \beta(\rho) \rho d\rho} dr \quad (22)$$

Если дисклинация мощности β_0 сосредоточена в точке $r = 0$, то $2\pi \int_0^r \beta(\rho) \rho d\rho = \beta_0$, и из (22) получаем, что $w'(r) = const$. Это означает, что положительная дисклинация, сосредоточенная в центре мембраны, превращает ее в поверхность кругового конуса. Данный результат был получен ранее [6] другим способом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00638) и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.:Физматгиз. 1963.
- [2] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.:Мир. 1987.
- [3] Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. М.: Мир. 1983.
- [4] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука. 1970.
- [5] Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.:Наука. 1969.
- [6] Карякин М.И. Равновесие и устойчивость нелинейно упругой пластинки с клиновой дисклинацией //ПМТФ. 1992. № 3. С. 157-163.

Zubov L.M. *The equilibrium of flexible plate with dislocations and disclinations.*

The modification of Karman's equations for flexible elastic plates with respect to the presence of dislocations and disclinations is proposed. Isolated and continuously distributed defects are considered. The bending problem in the case of free of external loads strictly thin plate (membrane) was investigated. The bending is caused by relaxation of internal stresses owing to defects. The problem was reduced to Monge-Ampere's equation. Several exact solutions on membrane surface form in the case of distributed defects were found.

ОСЕССИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ОСНОВАНИЯ С ТОНКИМ НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Казаков К. Е.

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Исследуется контактное взаимодействие вязкоупругого основания с тонким неоднородным покрытием и жесткого кольцевого штампа в осесимметричном случае. Толщина вязкоупругого однородного слоя произвольная. Нижняя грань слоя находится либо в состоянии гладкого контакта, либо в сцеплении с подстилающим жестким основанием. Между вязкоупругим слоем и покрытием осуществляется идеальный контакт. Предполагается, что покрытие тонкое по сравнению с зоной активного нагружения. В работе выводится смешанное интегральное уравнение контактной задачи, содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования [1].

Исследуем контактное взаимодействие вязкоупругого слоя с покрытием, лежащего на недеформируемом основании, жестким кольцевым штампом в осесимметричном случае (Рис. 1). Будем считать, что покрытие упругое и относительно тонкое ($h \ll (a - b)$), а его свойства зависят от радиальной координаты [2]. Вертикальное перемещение верхней грани такого слоя под действием нормальной нагрузки $q(r, t)$, действующей на участке $b \leq r \leq a$, можно записать в форме [3]:

$$\begin{aligned}
 u(r, t) = & \frac{q(r, t)h}{R(r)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H} \left[\int_b^a \frac{q(\rho, t)}{E_2(t)} k\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right) \rho d\rho - \right. \\
 & \left. - \int_{\tau_0}^t \int_b^a \frac{q(\rho, \tau)}{E_2(\tau)} k\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right) \rho d\rho K^{(2)}(t, \tau) d\tau \right], \\
 K^{(2)}(t, \tau) = & E_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_2(\tau)} + C^{(2)}(t, \tau) \right],
 \end{aligned} \tag{1}$$

где h — высота покрытия, $R(r)$ — коэффициент его жесткости, H — толщина слоя, ν_2 и $E_2(\tau)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга вязкоупругого слоя, $K^{(2)}(t, \tau)$ — его ядро ползучести при растяжении, $C^{(2)}(t, \tau)$ — мера ползучести, $k(r/H, \rho/H)$ — известное ядро плоской контактной задачи, вид которого зависит от краевых условий на нижней грани [3, 4]

$$k(r, \rho) = \int_0^{+\infty} L(u) I_0(ru) I_0(\rho u) du,$$

где в случае гладкого контакта

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u},$$

а в случае идеального контакта нижней грани с жестким основанием

$$L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu_2.$$

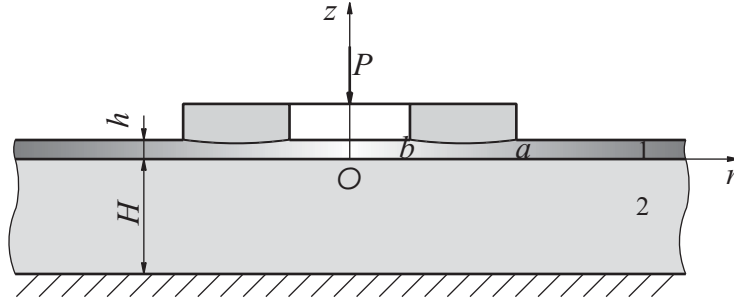


Рис. 1. Контактное взаимодействие

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани слоя, вызванные нагрузкой $p(r, t) = -q(r, t)$, перемещению штампа как жесткого целого, с учетом (1) получим разрешающее интегральное уравнение исследуемой контактной задачи в виде:

$$\frac{q(r, t)h}{R(r)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H} \left[\int_b^a \frac{q(\rho, t)}{E_2(t)} k\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right) \rho d\rho - \int_{\tau_0}^t \int_b^a \frac{q(\rho, \tau)}{E_2(\tau)} k\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right) \rho d\rho K^{(2)}(t, \tau) d\tau \right] = \delta(t) - g(r), \quad (b \leq r \leq a), \quad (2)$$

где $g(r)$ — функция, описывающая форму основания штампа, $\delta(t)$ — осадка штампа.

Уравнение (2) дополним условиями равновесия штампа на слое

$$2\pi \int_b^a q(\rho, t) \rho d\rho = P(t), \quad (3)$$

где $P(t)$ — сила вдавливания штампа.

Построим решение интегрального уравнения (2) при условии (3). Для этого сделаем в (2), (3) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} (r^*)^2 &= \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, & (\rho^*)^2 &= \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}, & t^* &= \frac{t}{\tau_0}, & \tau^* &= \frac{\tau}{\tau_0}, \\ \lambda &= \frac{H}{b-a}, & \eta &= \frac{a}{b-a}, & \xi^2 &= \frac{b+a}{b-a}, & \delta^*(t^*) &= \frac{\delta(t)}{b-a}, & g^*(r^*) &= \frac{g(r)}{b-a}, \\ q^*(r^*, t^*) &= \frac{2(1 - \nu_2^2)q(r, t)}{E_2(t)}, & m^*(r^*) &= \frac{E_0 h}{2(b-a)R(r)(1 - \nu_2^2)}, \\ c^*(t^*) &= \frac{E_2(t)}{E_0}, & P^*(t^*) &= \frac{2P(t)(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2(t)(b^2 - a^2)}, & K_2(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t, \tau)\tau_0, \\ k^*(r^*, \rho^*) &= \frac{\xi^2}{\lambda} k \left[\frac{\sqrt{(r^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}, \frac{\sqrt{(\rho^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda} \right] = \frac{b+a}{H} k \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Опуская звездочки, получим основное интегральное уравнение и дополнитель-

ные условия задачи в форме

$$c(t)m(r)q(r,t) + \int_0^1 q(\rho,t)k(r,\rho)\rho d\rho - \int_1^t \int_0^1 q(\rho,\tau)k(r,\rho)K_2(t,\tau)\rho d\rho d\tau = \delta(t) - g(r) \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (5)$$

$$\int_0^1 q(\rho,t)\rho d\rho = P(t). \quad (6)$$

Вводя обозначения

$$Q(r,t) = \sqrt{m(r)}q(r,t), \quad K(r,\rho) = \frac{k(r,\rho)}{\sqrt{m(r)}\sqrt{m(\rho)}}, \quad (7)$$

преобразуем интегральное уравнение (5) и дополнительное условие (6) к следующему, удобному для анализа виду:

$$c(t)Q(r,t) + \int_0^1 Q(\rho,t)K(r,\rho)\rho d\rho - \int_1^t \int_0^1 Q(\rho,\tau)K(r,\rho)K_2(t,\tau)\rho d\rho d\tau = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}} - \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}} \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (8)$$

$$\int_0^1 \frac{\rho Q(\rho,t)}{\sqrt{m(\rho)}} d\rho = P(t). \quad (9)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (8), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительное условие (9).

Будем искать решение уравнения (8) при условии (9) в классе функций непрерывных по времени в $L_2(0,1)$ (см., например [3, 5]). Для этого построим сначала ортонормированную в $L_2(0,1)$ систему функций такую, чтобы она содержала $\text{const}/\sqrt{m(r)}$, а остальные функции базиса можно было представить в виде произведения функций, зависящих от r и весовой функции $1/\sqrt{m(r)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена на основании [6]

$$\int_0^1 p_i(\rho)p_j(\rho)\rho d\rho = \delta_{ij}, \quad p_n(r) = \frac{P_n(r)}{\sqrt{m(r)}}, \quad J_n = \int_0^1 \frac{(1-2\rho^2)^n}{m(\rho)} d\rho, \quad P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{J_0}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-1} & J_n & \cdots & J_{2n-1} \\ 1 & 1-2r^2 & \cdots & (1-2r^2)^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что гильбертово пространство $L_2(0,1)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(0,1) = L_2^{(1)}(0,1) \oplus L_2^{(2)}(0,1)$. Функция $p_0(r)$ составляет базис $L_2^{(1)}(0,1)$, а последовательность функций $p_k(r)$

($k = 1, 2, \dots$) — базис $L_2^{(2)}(0, 1)$. Можно также заметить, что функция $Q(r, t)$ и правая часть интегрального уравнения (8), представимы в виде

$$Q(r, t) = z_0(t)p_0(r) + Q_1(r, t), \quad (10)$$

$$\frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}} - \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}} = [\sqrt{J_0}\delta(t) - g_0]p_0(r) - g_1(r), \quad (11)$$

$$g(r) = \sqrt{m(r)} [g_0p_0(r) + g_1(r)],$$

где $Q(r, t)$ — непрерывная по t в $L_2(0, 1)$ функция, причем первое слагаемое в ее представлении (10) есть непрерывная по времени функция в $L_2^{(1)}(0, 1)$, а второе слагаемое — непрерывная функция в $L_2^{(2)}(0, 1)$. Аналогичную структуру имеет и правая часть.

В представлении $Q(r, t)$ нам известно первое слагаемое, которое определяются дополнительным условием (9), а второе слагаемое требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить первое слагаемое, а второе задано функцией основания штампа. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как специфическую проекционную задачу, которую можно решить на основании [3, 7].

Не останавливаясь на технике решения задачи, приведем только окончательные результаты. Выражение для искомой функции $Q(r, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q(r, t) &= z_0(t)p_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(r), \\ \varphi_k(r) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^{(k)} p_i(r), \quad z_0(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_k(t) = f_k(t) + \int_1^t f_k(\tau)R_k(t, \tau) d\tau, \\ K(r, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn}p_m(r)p_n(\rho), \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}\varphi_n^{(k)} = \gamma_k\varphi_m^{(k)}, \quad m = 1, \dots, \infty, \\ f_k(t) &= -\frac{1}{c(t) + \gamma_k} \left\{ g_k + \left[z_0(t) - \int_1^t z_0(\tau)K_2(t, \tau) d\tau \right] K_k \right\}, \\ K_k &= \sum_{n=1}^{\infty} R_{0n}\varphi_n^{(k)}, \quad k = 1, \dots, \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где $R_k(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) — резольвенты ядер

$$K_k^*(t, \tau) = \frac{\gamma_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}, \quad (13)$$

Следует отметить, что полученное решение имеет следующую структуру:

$$q(r, t) = \frac{1}{m(r)} \left[z_0(t)P_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\Phi_k(r) \right], \quad (14)$$

т.е. удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(r)$, а значит и связанную с ней заменой (4) жесткость покрытия $R(r)$.

Выражения для осадки штампа имеет вид

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ g_0 + c(t)z_0(t) + \left[z_0(t) - \int_1^t z_0(\tau)K_2(t, \tau) d\tau \right] R_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[z_k(t) - \int_1^t z_k(\tau)K_2(t, \tau) d\tau \right] K_k \right\}, \quad (15)$$

Таким образом, построено точное решение (в рядах с любой наперед заданной точностью) плоской контактной задачи для вязкоупругого слоя с тонким неоднородным покрытием.

Автор благодарит А. В. Манжирова за постановку задачи и помощь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05–01–00693 и № 05–01–00002).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Манжиров А. В. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Труды V Российской конференции и международным участием, 22–24 августа 2005 г., г. Саратов, Россия. — Саратов, 2005.
- [2] Манжиров А. В. Износ поверхности неоднородного шероховатого упругого слоя кольцевым штампом // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием, 13–16 октября 2003 г., г. Ростов-на-Дону, г. Азов, Россия. — Ростов-на-Дону, 2003.
- [3] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
- [4] Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [5] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [6] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.
- [7] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.

Kazakov K. E. *Axisymmetric contact problem for a viscoelastic foundation with a thin inhomogeneous coating.* Annotation. Contact interaction of a viscoelastic layer with a thin inhomogeneous coating and a rigid annular punch is under consideration. The thickness of a viscoelastic layer is arbitrary. The lower border of the layer is in smooth or ideal contact with the underlying rigid surface. Ideal contact is achieved between the viscoelastic layer and the coating. We assume that the coating is thin as compared with a zone of active action. The mixed integral equation of a contact problem is obtained. It is solved by projective method proposed by A. V. Manzhirov.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Калашников В. В., Карякин М. И.

Ростовский государственный университет

Метод учета эффектов второго порядка, предложенный в [1], сравнивается с полуобратным методом на примере задачи кручения кругового нелинейно-упругого вала торцевыми моментами. Показано, что предположение о “мертвом” характере нагрузки приводит к нарушению симметричности тензора напряжений Коши в некоторой области. Дано уточнение формулировки принципа Сен-Венана применительно к задаче определения интегральных деформационных характеристик.

В работе [2] при анализе величин эффекта Пойнтинга для различных моделей сжимаемых нелинейно-упругих материалов было отмечено несовпадение осевого удлинения цилиндра, вычисляемого с точностью до слагаемых второго порядка малости, приведенного в монографии А. И. Лурье [1] и решения авторов, полученного на основе полуобратного метода нелинейной теории упругости. Проведенный в [3, 4] анализ показал, что причина различия состоит в том, что хотя интегральные характеристики (осевая сила и крутящий момент) внешней нагрузки в этих задачах совпадают, построенные решения соответствуют различным ее распределениям по торцевым поверхностям цилиндра. В настоящей работе анализируется количественное влияние этого различия на интегральную деформационную характеристику – удлинение цилиндра.

Описанный в [1] метод последовательных приближений состоит в замене решения задачи о равновесии нелинейно-упругого тела вида

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} do = \mathbf{f} dO \quad (2)$$

где \mathbf{D} – тензор напряжений Пиола, \mathbf{f} – отнесенная к деформированной поверхности внешняя нагрузка, которая предполагается “мертвой”, т.е.

$$\mathbf{f} dO = \mathbf{f}^0 do \quad (3)$$

последовательностью двух задач: линейной задачи

$$\begin{cases} \overset{0}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) + \rho_0 \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}^0 \end{cases} \quad (4)$$

и задачи об эффектах второго порядка

$$\begin{cases} \overset{0}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) + \rho_0 \mathbf{k}_* = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \mathbf{f}_* \end{cases} \quad (5)$$

где $\rho_0 \mathbf{k}_* = \overset{0}{\nabla} \cdot \left[\overset{0}{\nabla} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{v}) \right]$, $\mathbf{f}_* = -\mathbf{n} \cdot \left[\overset{0}{\nabla} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{v}) \right]$

основывающейся на уже известном решении предыдущей задачи.

Выражения, получаются из (1), (2) на основе разложения вектора перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, в котором \mathbf{v} – предполагаемое известным решение линейной задачи, а \mathbf{w} компенсирует слагаемые второго порядка, и соответствующего ему разложению тензора напряжений Пиола $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) + \overset{0}{\nabla} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{v})$. Здесь $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda \overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{u} \mathbf{E} + \mu (\overset{0}{\nabla} \mathbf{u} + \overset{0}{\nabla} \mathbf{u}^T)$ – тензор напряжений линейной теории упругости. Тензор $\boldsymbol{\sigma}'$, не выписываемый здесь вследствие громоздкости его представления, зависит от вида нелинейно-упругого потенциала.

В ряде случаев постановка (3) позволяет определить некоторые характеристики деформации без нахождения \mathbf{w} . Для задачи кручения такой характеристикой является осевое удлинение цилиндра. Возникновение этого удлинения при отсутствии осевой силы известно как эффект Пойнтинга.

Анализ задачи (1) полубратным методом основывается на преобразовании отсчетной (недеформированной) конфигурации в текущую (деформированную) вида

$$R = R(r), \Phi = \varphi + \psi z, Z = \lambda z. \quad (6)$$

Уравнения равновесия и граничные условия отсутствия напряжений на боковой поверхности при этом выполняются точно, а граничные условия на торцах – в интегральном смысле, обеспечивая отсутствие осевой растягивающей силы и совпадение суммарного момента действующих на торце напряжений с заданным крутящим моментом. При этом в частности определяются параметры ψ и λ , а следовательно, и осевое удлинение $\lambda - 1$.

Оказалось, что два описанных выше подхода приводят к существенно разным количественным выражениям для эффекта Пойнтинга. Построенное в частном случае упрощенной модели материала Блейтца и Ко точное решение нелинейной задачи позволило локализовать причину расхождения, состоящую в несовпадении полей напряжений на торцах. Это, однако, вызвало новые вопросы о причинах такого различия.

Для оценки количественного влияния различий в граничных условиях была рассмотрена задача, представляющая собой разность линейных задач об эффектах второго порядка, полученных при использовании двух описанных выше подходов. Оказалось, что у этой задачи имеется существенный недостаток: граничные условия противоречат условию симметричности тензора напряжений на окружностях, ограничивающих торцы цилиндра, а следовательно, приводят к несимметричности этого тензора в некоторой области, охватывающей эти окружности.

Выяснилось, что это нарушение симметричности имеет место в задаче (5), которая в случае кручения имеет вид

$$\begin{cases} \overset{0}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) + \rho_0 \mathbf{k}_* = 0 \\ \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = -2\mu\psi^2 z^2 \mathbf{e}_r - \mu r \psi^2 z \mathbf{e}_z, \text{ при } r=r_1 \\ \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \mu\psi^2 (r^2 - z^2) \mathbf{e}_z, \text{ при } z=\pm L \end{cases} \quad (7)$$

(r_1 – радиус, а L – длина цилиндра)

Таким образом, вдоль граничной окружности в силу граничных условий на торце $\tau_{rz} = -\mu r \psi^2 z$, а в силу граничных условий на боковой поверхности $\tau_{rz} \equiv 0$.

Заметим, что если в исходной нелинейной постановке вместо граничного условия типа (2), (3), означающего мертвый характер внешней нагрузки, при выводе краевой задачи об эффектах второго порядка взять достаточно естественное граничное условие

$$\mathbf{f} = \mu r \psi \mathbf{e}_\Phi \quad (8)$$

то после перехода от координат текущей конфигурации к координатам отсчетной конфигурации, принятым в задаче, постановка становится симметричной, и решение задачи в таком виде совпадает с решением задачи полуобратным методом.

В [3, 4] указывалось, что предположение о мертвом характере нагрузки не является физически оправданным для задачи кручения. Пример нагрузки (8) показывает и математическую неубедительность такого предположения, приводящего к нарушению симметричности тензора напряжений.

Действительно, в этом случае соотношение (3) приводит к граничному условию $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}^0$, или в явном виде $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mu r \psi \mathbf{e}_\Phi$.

Однако квадратичные слагаемые в выражении $\mathbf{f} \frac{dO}{do}$ имеют вид $-\mu r \psi^2 z \mathbf{e}_r + \mathbf{f}^0$, а, следовательно, граничные условия на торце записываются в виде

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) = \mathbf{f}_* - \mu r \psi^2 z \mathbf{e}_r$$

Потерянное второе слагаемое является как источником несимметричности, так и причиной расхождения в полученных значениях осевого удлинения.

Несмотря на некоторые проблемы корректности, задача о разности решений представляет самостоятельный интерес, как пример задачи линейной теории упругости, в которой нагрузки имеют нулевые результирующие, но, тем не менее, вызывают осевое удлинение цилиндра. Модифицируем задачу, заменив линейное представление касательных напряжений τ_{zr} (рис. 2а) кусочно-линейным (рис. 2б), которое уже согласовано с требованием симметричности $\boldsymbol{\sigma}$.

$$\tau_{zr} = \begin{cases} \alpha r, & r \in [0, r_1 - \varepsilon] \\ \frac{\alpha}{\varepsilon}(r_1 - r)(r_1 - \varepsilon), & r \in [r_1 - \varepsilon, r_1] \end{cases}, \quad \alpha = -\frac{L}{2} \psi^2 \mu$$

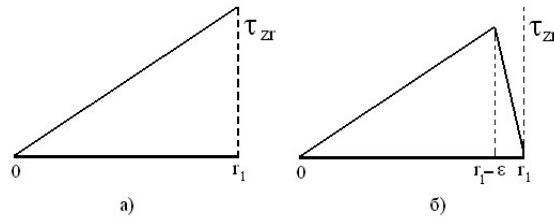


Рис. 1.

На рис. 3 представлено распределение нормальных напряжений σ_z по боковой поверхности стержня: а) построенное методом конечных элементов с применением пакета FlexPDE, б) построенное методом однородных решений [5] с использованием пакета Maple при следующих значениях параметров

$$\nu = 0.25, \quad \frac{L}{r_1} = 12, \quad \psi r_1 = 0.3.$$

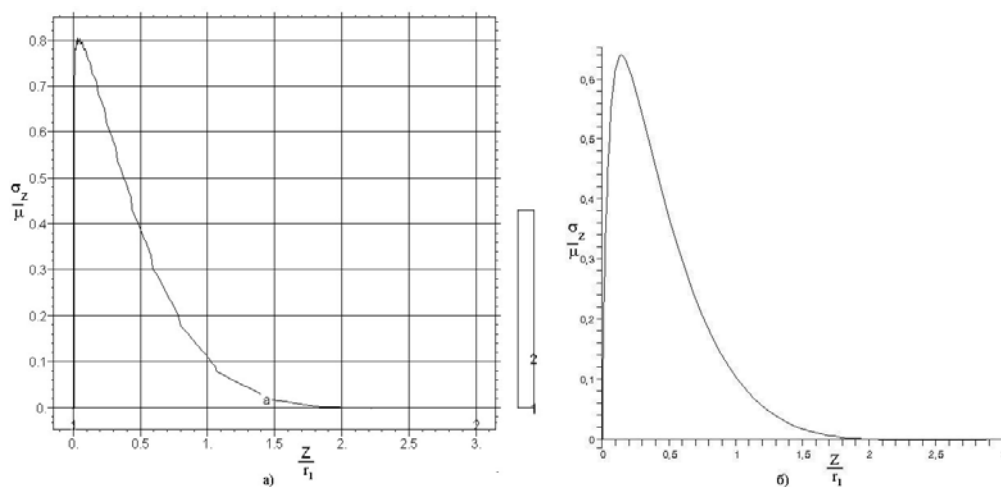


Рис. 2.

Напряжения быстро убывают при удалении от торца и практически обращаются в ноль на расстоянии, равном диаметру вала, что подтвердилось расчетами для цилиндров разной длины. Это означает, что принцип Сен-Венана применим к данной задаче.

Рассмотрим область стержня, удаленную на расстояние δ от его торцов. Строя зависимость относительного удлинения этой цилиндрической области от параметра δ (рис. 4), мы можем определить для данной задачи зону, удлинение которой пренебрежимо мало, и следовательно, для которой величина эффекта Пойнтинга не зависит от способа реализации интегральных граничных условий.

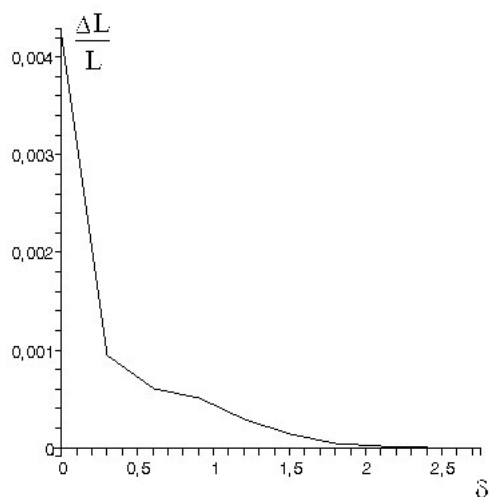


Рис. 3.

Полученные результаты означают, что принцип Сен-Венана можно применять и к интегральным деформационным характеристикам, только не для тела в целом, а для некоторой его части, достаточно далеко удаленной от областей приложения

нагрузок. С практической точки зрения, это, в частности, позволяет определять зону размещения датчиков для измерений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. С. 235–237.
- [2] Гавриляченко Т.В., Карякин М.И. Об особенностях нелинейно-упругого поведения сжимаемых тел цилиндрической формы при кручении // ПМТФ. 2000. 41(2). С. 188–193.
- [3] Калашников В.В. Анализ эффектов второго порядка в моделях кручения упругого вала // Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика. Труды III Школы-семинара. Ростов-на-Дону: Изд-во “ЦВВР”. 2004. С. 86–87.
- [4] Калашников В.В. Об определении характеристик нелинейно-упругих материалов // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Труды международной школы-семинара. Ростов-на-Дону: Издательство НПК “Гефест”. 2005. С. 14–15.
- [5] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. С. 331–365.

Kalashnikov V.V., Karyakin M.I. *On the semi-inverse method to the determination of integral characteristics of deformation.* A.I. Lurie method of second order effects studying was compared with semi-inverse method with the reference to the problem of torsion of circular nonlinearly elastic shaft. It was shown that assumption of dead character of loading lead to the symmetry breakdown of Cauchy stress tensor in some region. The revision of the formulation of St. Venant's principle applied to the problems of definition of integral deformation characteristics was given.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ ДВУХСЛОЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБКАХ

Кизилова Н.Н.

Харьковский национальный университет

Рассматривается задача о распространении волн малой амплитуды в двухслойных трубках из вязкоупругого материала, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью. Задача связана с распространением пульсовых волн в артериях, поэтому реологические параметры жидкости и материала слоев стенки соответствуют свойствам крови и артериальных сосудов. В предположении малости радиальных перемещений стенки по сравнению с внутренним радиусом трубки решение задачи получено в виде разложений по малому параметру с точностью до малых второго порядка. Проведены расчеты параметров течения: амплитуды и фазы объемной скорости движения крови, осцилляций внутреннего диаметра трубки, напряжения сдвига на внутренней поверхности трубки. Выделен ряд параметров, которые зависят от условий отражения волн, эластичности и толщины слоев трубки, вязкости жидкости и, таким образом, могут быть рекомендованы в качестве информативных параметров для медицинской диагностики. Результаты исследования могут также использоваться для подбора оптимальных параметров трубок технических устройств.

Линейная теория волн в заполненных жидкостью податливых трубках была заложена в работах Кортвега, Моенса, Лайтхилла [1]. В случае идеальной жидкости скорость распространения волн определяется формулой Моенса-Кортвега $c_0 = \sqrt{Eh/(2\rho_f R_0)}$, где h и R_0 – толщина стенки и внутренний радиус трубки, E – модуль упругости материала стенки, ρ_f – плотность жидкости. Приложения теории связаны, в первую очередь, с распространением волн давления, генерируемых при сокращениях сердца, по системам артерий [1]. Для случая вязкой жидкости обобщение теории предложено в работах Уомерсли [2]. При этом скорость волны определяется соотношением $c = c_0 \sqrt{(1 - F_{10})/(1 - \nu^2)}$, где ν – коэффициент Пуассона материала стенки, $F_{01} = 2J_1(z)/(zJ_0(z))$, $J_{0,1}$ – функции Бесселя первого рода, $z = \alpha i^{3/2}$, $\alpha = R\sqrt{\omega\rho_f/\mu_f}$, $i = \sqrt{-1}$, μ_f – вязкость жидкости. Здесь учтено затухание волны при ее распространении вдоль трубки и дисперсия скорости. Исследования дисперсионного уравнения показывают, что при разных реологических моделях материала стенки и условиях на внешней поверхности трубки существуют моды Юнга и Ламба, соответствующие волнам, которые распространяются с разными скоростями соответственно в жидкости и стенке [3]. Поскольку перемещения стенки трубки определяются взаимодействием на подвижной границе раздела жидкость-стенка, а параметры течения и устойчивость системы определяются распределением энергии между жидкостью и стенкой [4], детальный учет свойств стенки важен для получения воспроизводимых количественных оценок. В данной работе на основании результатов экспериментальных исследований механических свойств отдельных слоев артерий и вен в норме и при патологиях [5–7] исследуется распространение волн в сосудах как двухслойных трубках из вязкоупругого материала.

Рассмотрим осесимметричную задачу о распространении волны давления по толстостенной трубке кругового сечения. Стенка трубки образована двумя концентрическими слоями вязкоупругих материалов с разными реологическими параметрами. Внутренний радиус трубки R_0 , а толщины слоев в ненапряженном состоянии H_1, H_2 . Считается, что сечение трубки остается круговым при прохождении волны, а перемещение стенки в радиальном направлении u_r мало ($u_r \ll R_0$). В каждый момент времени положение границ раздела жидкости и слоев стенки есть

$$\begin{aligned} R_1(t, x) &= R_0 + u_r(t, R_0, x) \\ R_2(t, x) &= R_0 + H_1 + u_r(t, R_0 + H_1, x) \end{aligned} \quad (1)$$

а внешняя поверхность $R_3 = R_0 + H_1 + H_2$ жестко прикреплена к окружающим тканям. В качестве реологического соотношения для материала стенки примем обобщенную модель Кельвина-Фойхта:

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(j)} &= -p_s^{(j)} \hat{I} + \hat{\sigma}^{(j)} \\ \hat{\sigma}^{(j)} + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(j)} \frac{\delta^k \hat{\sigma}^{(j)}}{\delta t^k} &= 2G^{(j)} \left(\hat{e}^{(j)} + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(j)} \frac{\delta^k \hat{e}^{(j)}}{\delta t^k} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где $j = 1, 2$ – номер слоя, $\hat{P}^{(j)}, \hat{e}^{(j)}$ – тензоры напряжений и деформаций, $p_s^{(j)}$ – гидростатическое давление, $G^{(j)}$ – модуль сдвига, $\lambda_{1k}^{(j)}, \lambda_{2k}^{(j)}, m_{1,2}$ – реологические коэффициенты, $\delta/\delta t$ – производная по времени. Тогда уравнения движения жидкости и стенки в цилиндрической системе координат примут вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r^{(j)}) + \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(j)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left(\rho_s^{(j)} \frac{\partial^2 u_r^{(j)}}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s^{(j)}}{\partial r} \right) = \\ &= G^{(j)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(j)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left(\frac{\partial^2 u_r^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(j)}}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r^{(j)}}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(j)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left(\rho_s^{(j)} \frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s^{(j)}}{\partial x} \right) = \\ &= G^{(j)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(j)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_f \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \quad (8)$$

где $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$, p и ρ_f - скорость, гидростатическое давление и плотность жидкости, $\nu_f = \mu_f / \rho_f$, $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ - вектор перемещения, $\rho_s^{(j)}$ - плотность материала слоев стенки.

Граничные условия задачи (3)–(8) суть

$$r = 0 : |v_x| < \infty, v_r = 0; \quad r = R_1 : v_r = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial t}, v_x = \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(p_s^{(1)} - p + 2\mu_f \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = 2G^{(1)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \quad (10)$$

$$\mu_f \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = G^{(1)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r}\right) \quad (11)$$

$$r = R_2 : u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, u_x^{(1)} = u_x^{(2)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(2)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) (p_s^{(2)} - p_s^{(1)}) = \\ & = 2G^{(2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(2)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} - \\ & - 2G^{(1)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(2)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & G^{(1)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(2)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r}\right) = \\ & = G^{(2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^{(1)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^{(2)} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial r}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$r = R_3 : u_r^{(2)} = 0, u_x^{(2)} = 0 \quad (15)$$

В начальном сечении трубки задана входящая волна

$$x = 0 : \quad \langle p \rangle = p_0(t) \quad (16)$$

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает осреднение по сечению трубки. На конце трубки $x=L$ заданы условия отражения волны от нижележащего артериального русла, которое рассматривается как трубка или система трубок с заданной комплексной волновой проводимостью Y_t :

$$x = L : \quad Y_t = \pi R_1^2 \langle v_x \rangle / \langle p \rangle \quad (17)$$

Проводя оценки характерных значений величин, входящих в уравнения (3)-(8) используя значения, полученные для крови и артериальной стенки [4-7], получим, что $u_r^{(j)}/R_0 = R_0/L = \varepsilon$. Будем искать решение задачи в виде разложений $f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$, где $f = \{v_r, v_x, p, u_r^{(j)}, u_x^{(j)}, p_s^{(j)}\}$ – неизвестные задачи. Тогда из (3)-(17) получим для $f^{(0)}$ и $f^{(1)}$ задачи, решение которых можно выписать в аналитическом виде. В силу громоздкости окончательные выражения здесь не приводятся. По полученным формулам проводились расчеты поля скоростей в жидкости, перемещений и скоростей перемещений стенки, амплитуды и фазы объемного расхода жидкости через сечение трубки, напряжения трения на внутренней поверхности трубки. Исследовались зависимости всех величин от параметров материала трубки, толщин слоев, вязкости крови. Некоторые результаты приведены на Рис. 1.

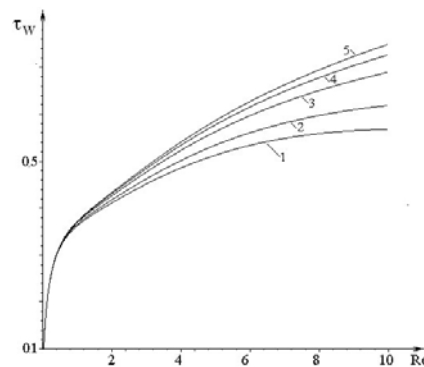


Рис. 1. Зависимость напряжения сдвига на внутренней поверхности трубки от числа Рейнольдса при разных значениях $g = 5; 10; 15; 20; 25$ (кривые 1–5).

Поле скоростей в жидкости и стенки существенно зависит от коэффициента отражения волн $\Gamma = (1 - Y_t)/(1 + Y_t)$ на конце трубки и безразмерного модуля упругости материала стенки g . При небольших коэффициентах отражения профиль скорости мало отличается от случая бесконечной трубки ($\Gamma = 0$), который соответствует также согласованию волновых проводимостей трубки и нижележащего русла. При наличии отражения волн профиль скорости в жидкости уплощается, а объемный расход Q падает. Расход убывает с ростом толщины стенки трубки и возрастает с увеличением жесткости материала стенки. Оценки распределения энергии в системе жидкость-стенка показывают, что в случае эластичной стенки часть энергии потока передается к стенке и идет на диссипацию и осцилляции стенки. В силу тех же причин напряжение сдвига на стенке растет с увеличением g (Рис. 1). Исследованы также резонансные явления в системе трубка-терминальное русло и исследован амплитудно-фазовый спектр волновой проводимости системы. Полученные зависимости обобщают результаты наших предыдущих работ [8-10]. На основании выполненных расчетов предложен ряд новых подходов к оценке диагностически информативных параметров пульсовых волн, регистрируемых в артериях. За счет подбора параметров реологических моделей слоев можно либо увеличить амплитуду колебаний стенки трубок технических устройств с целью интенсификации поверхностного тепло- и массообмена и скорости химических ре-

акций, либо увеличить устойчивость трубок к схлопыванию [4], обеспечивая постоянство объемного расхода жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.:Мир, 1981. 600 с.
- [2] *Womersley J.R.* An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries. Tech.Report TR-56-614, 1957.
- [3] *Cox R.H.* Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis. //J.Biomech. 1969. v.2,№ 3. P. 251-265.
- [4] *Hamadiche M., Kizilova N.N.* Temporal and Spatial Instabilities of the Flow in the Blood Vessels as Multi-Layered Compliant Tubes. //Int.J.Fluid.Dyn. 2005. v. 1,№ 1. P. 1-23.
- [5] *Nichols W.W., O'Rourke M.F.* McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental and Clinical Principles. Oxford: Oxford University Press. 1997. 564 p.
- [6] *Holzappel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W.* A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. //J.Elasticity. 2000. v. 61. P. 148.
- [7] *Stephanisa C.G., Mourmourasa D.E., Tsagadopoulos D.G.* On the elastic properties of arteries. //J.Biomech. 2003. v. 36. P. 1727–1731.
- [8] *Кизилова Н.Н.* Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел. //Известия РАН. Серия МЖГ. 2003. No 5. С. 127-137.
- [9] *Kizilova N.N.* Pulse wave reflections in branching arterial networks and pulse diagnosis methods. //J.Chinese Inst. of Engineers. 2003. V. 26, No 6. P. 869-880.
- [10] *Кизилова Н.Н.* Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел с анастомозами. //Мат.моделирование. 2003. т. 15, No 6. С. 65-71.

Kizilova N.N. *Pressure wave propagation in the two-layered liquid filled viscoelastic tubes.* Small-amplitude wave propagation in the two-layered viscoelastic tubes filled with a viscous incompressible liquid is considered. The problem is tightly connected with pulse wave propagation in the arteries, so the rheological parameters of the liquid and solid correspond to the properties of the blood and vessel wall. Small radial wall displacement as compared to the inner radius of the tube is supposed. The solution of the problem has been obtained as a series expansion in powers of the small parameter, correct to second order. Some parameters of the flow have been calculated: the amplitude and phase of the flow rate, oscillations of the inner diameter of the tube, shear stress at the wall. Some of the parameters depend on the wave reflection conditions, elasticity and thickness of the solid layers, liquid viscosity and, in that way may be recommended as diagnostic parameters. The results can also be used for optimal design of the tubes of the technical devices.

СМЕШАННАЯ КОСОСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ

Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н.
Сумский государственный университет

В работе исследуется электроупругое состояние неоднородного пьезокерамического слоя при скользящей заделке его торцов в случае изгиба. Граничная задача сведена к системе состоящей из $12k$ ($k=1,2,\dots$) интегро-дифференциальных уравнений. Получены выражения для напряжений, характеризующих напряженное состояние неоднородного слоя. Приводятся результаты расчетов характеристических напряжений.

В настоящее время наиболее эффективным материалом для широкой номенклатуры устройств, преобразующих механические воздействия в электрические сигналы и электрические сигналы в механические, является пьезокерамика. Она широко используется для ультразвуковой диагностики в медицине, авиационном и железнодорожном транспорте, энергетике, нефте-газовом комплексе; силовая пьезокерамика – в ультразвуковой сварке, чистке поверхностей, нанесении покрытий, сверлении и т.д.

Изучению напряженного состояния трансформного (изотропного) слоя, ослабленного сквозными туннельными отверстиями при скользящей заделке торцов (симметричный случай) посвящены работы [1, 2]. В них решения краевых задач строятся с помощью полуобратного метода И.И. Воровича. Изгиб изотропного слоя (полуслоя), ослабленного сквозным некруговым отверстием, был рассмотрен в [3]. Аналогичная задача для изотропного слоя с круговым отверстием иными методами решена в [4, 5]. В работе [6] рассмотрен ряд задач электроупругости для слоя при различных граничных условиях на его основаниях. Общий подход к решению смешанных задач теории упругости и электроупругости для слоя, ослабленного сквозными туннельными неоднородностями, отличный от [2], предложен в [7]. С использованием этого подхода в [8] была рассмотрена смешанная кососимметричная задача электроупругости для пьезокерамического слоя, ослабленного сквозным отверстием.

В данной работе продолжены исследования сопряженных электромеханических полей в пьезоактивном неоднородном слое, при скользящей заделке его торцов и отсутствии на них электростатического потенциала.

Рассмотрим неоднородный пьезокерамический слой $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, в который без предварительного натяжения вклеено или впаяно цилиндрическое включение из другого пьезокерамического материала, ослабленный сквозным отверстием. При этом направляющие цилиндрических поверхностей представляют собой достаточно гладкие замкнутые контуры L_j ($j=1,2$). Для определенности под контуром L_1 будем понимать направляющий контур цилиндрической поверхности, ограничивающей отверстие, а под контуром L_2 – направляющий контур поверхности спая пьезокерамического слоя и включения. Пусть на поверхности отверстия действует поверхностная нагрузка

(N, T, Z, D_n) , где N, T, Z – нормальная и касательные компоненты вектора напряжения; D_n – нормальная компонента вектора электрической индукции, а на бесконечности нагрузка отсутствует. Будем считать, что компоненты заданной нагрузки раскладываются в ряды Фурье по координате x_3 на $[-h, h]$.

Полная система уравнений, определяющая решение рассматриваемой задачи (при отсутствии в теле объемных сил и зарядов), состоит из: уравнений равновесия, уравнений электростатики, соотношений Коши и уравнений состояния предварительно поляризованной в направлении оси Ox_3 пьезокерамики [6, 9].

Граничные условия на торцах слоя $x_3 = \pm h$ имеют вид

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h) = \varphi(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad (1)$$

Будем разыскивать кососимметричное относительно срединной плоскости слоя $x_3=0$ решение. Представим компоненты вектора перемещения и потенциал в виде

$$\{u_1, u_2\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{u_{1k}, u_{2k}\} \sin \gamma_k x_3, \quad \{u_3, \varphi\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{u_{3k}, \varphi_k\} \cos \gamma_k x_3. \quad (2)$$

$$\text{Здесь } \gamma_k = \frac{2k+1}{2h}\pi.$$

Представления компонентов вектора перемещения (2) автоматически удовлетворяют условиям (1) на торцах слоя.

Выражения для механических и электрических величин, описывающие электроупругое состояние пьезокерамического слоя получены в [8]. Метатармонические функции, фигурирующие в этих представлениях, разыскиваются в виде

$$\begin{aligned} \Omega_{1k}^{(m)} &= \int_{L_1} p_{1k}^{(m)}(\zeta_1) K_0(\gamma_k \mu_1^{(m)} r_{11}) ds_1 + \int_{L_2} \tilde{p}_{1k}^{(m)}(\zeta_2) K_0(\gamma_k \mu_1^{(m)} r_{12}) ds_2, \\ \Omega_{2k}^{(m)} &= \int_{L_2} p_{2k}^{(m)}(\zeta_2) K_0(\gamma_k \mu_2^{(m)} r_{22}) ds_2, \quad (m = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3)$$

здесь $r_{11} = |\zeta_1 - z^{(1)}|$, $r_{12} = |\zeta_2 - z^{(1)}|$, $r_{22} = |\zeta_2 - z^{(2)}|$, $z^{(1)} = x_{11} + ix_{12}$, $z^{(2)} = x_{21} + ix_{22}$, $\zeta_1 = \xi_{11} + i\xi_{12} \in L_1$, $\zeta_2 = \xi_{21} + i\xi_{22} \in L_2$, $K_n(z)$ – функция Макдональда n -го порядка, ds_j – элемент дуги контура L_j , ($j=1,2$), $p_{1k}^{(m)}(\zeta_1)$, $\tilde{p}_{1k}^{(m)}(\zeta_2)$, $p_{2k}^{(m)}(\zeta_2)$ ($m = 0, 1, 2, 3$) – неизвестные плотности, $\mu_i^{(m)}$ ($i = 1, 2$) – определены в [8].

Граничные условия на L в комплексной форме имеют вид

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ \operatorname{Re} \{ e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23}) \} &= Z, \quad D_n = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где ψ – угол между внешней нормалью к поверхности отверстия и осью Ox_1 .

Граничная задача (4) с учетом (2), (3) предельным переходом на L_1 и L_2 сводится к системе, состоящей из двенадцати сингулярных интегродифференциальных уравнений (при каждом фиксированном k)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^3 \left[-q_{1k}^{(n)} g_{l1k}^{(n)} + \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{ljk}^{(n)} ds_j \right] = 0 \quad (l = 1, 2), \\
& \sum_{n=0}^3 \left[\sum_{j=1}^2 \left(-q_{j+1,k}^{(n)} g_{ljk}^{(n)} + \int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{ljk}^{(n)} ds_j \right) - \int_{L_2} q_{3k}^{(n)} G_{l3k}^{(n)} ds_2 \right] = 0 \quad (l = \overline{3, 6}), \\
& \sum_{n=0}^3 \left[-q_{1k}^{(n)} g_{7k}^{(n)} - \tilde{g}_{7k}^{(n)} \frac{dq_{1k}^{(n)}}{ds_{01}} + \sum_{j=1}^2 \left(\int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{7jk}^{(n)} ds_j + \int_{L_j} \frac{dq_{jk}^{(n)}}{ds_j} \tilde{G}_{7jk}^{(n)} ds_j \right) \right] = N_{1k} - iT_{1k}, \\
& \sum_{n=0}^3 \left[\sum_{j=1}^2 \left(-q_{j+1,k}^{(n)} g_{8jk}^{(n)} - \tilde{g}_{8jk}^{(n)} \frac{dq_{j+1,k}^{(n)}}{ds_{02}} + \int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{8jk}^{(n)} ds_j + \int_{L_j} \frac{dq_{jk}^{(n)}}{ds_j} \tilde{G}_{8jk}^{(n)} ds_j \right) - \right. \\
& \quad \left. - \int_{L_2} q_{3k}^{(n)} G_{83k}^{(n)} ds_2 - \int_{L_2} \frac{dq_{3k}^{(n)}}{ds_2} \tilde{G}_{83k}^{(n)} ds_2 \right] = 0, \\
& \sum_{n=1}^3 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{9jk}^{(n)} ds_j + \int_{L_2} q_{3k}^{(n)} G_{93k}^{(n)} ds_2 \right] = 0. \tag{5}
\end{aligned}$$

Ядра подынтегральных выражений и коэффициенты при неизвестных у внеинтегральных слагаемых здесь не приводим ввиду их громоздкости. Неизвестные плотности в (5) связаны с плотностями интегральных представлений (3), определенными соотношениями, которые здесь не приводим.

В качестве примера рассмотрим неоднородный пьезокерамический слой, изготовленный из материала PZT-4, включение которого изготовлено из материала PХЕ-5.

Направляющие цилиндрических поверхностей могут быть выбраны в виде эллипса (круга):

а) для сквозного отверстия

$$L_1 : \xi_{11} = R_{11} \cos \varphi_1 + d_{11}; \xi_{12} = R_{12} \cos \varphi_1 + d_{12}; 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$$

б) для включения

$$L_2 : \xi_{21} = R_{21} \cos \varphi_2 + d_{21}; \xi_{22} = R_{22} \cos \varphi_2 + d_{22}; 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$$

Пусть на поверхности отверстия действует нагрузка $N_1 = -Px_3$ ($P = \text{const}$).

При численной реализации алгоритма система интегродифференциальных уравнений методом механических квадратур сводилась к системе линейных алгебраических уравнений.

Для характеристики напряженного состояния на границе раздела материалов и на контуре отверстия производился расчет напряжения

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \quad (6)$$

$\theta = \psi - \pi$ - со стороны пьезокерамического слоя и $\theta = \psi$ - со стороны включения.

Последовательность вычислений такова: сначала численно решалась система интегро-дифференциальных уравнений (5), после чего определялись коэффициенты Фурье тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$, а затем по формулам (6) насчитывались искомые напряжения на границе раздела материалов со стороны включения и со стороны пьезокерамического слоя, а также на поверхности сквозного отверстия.

Пусть для определенности контур L_1 находится справа от оси Ox_1 , а контур L_2 - слева. Обозначим через l_x расстояние между центрами отверстия и включения в случае, когда их центры расположены на оси Ox_1 : $l_x = |d_{11}| + |d_{21}|$ ($d_{12} = d_{22} = 0$).

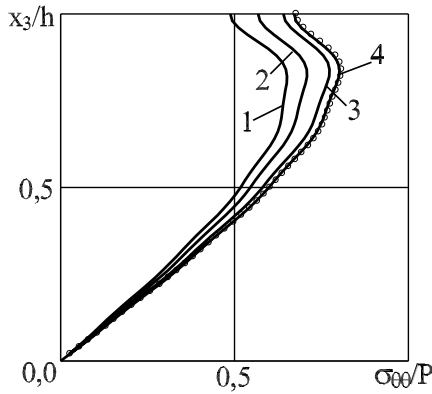


Рис. 1

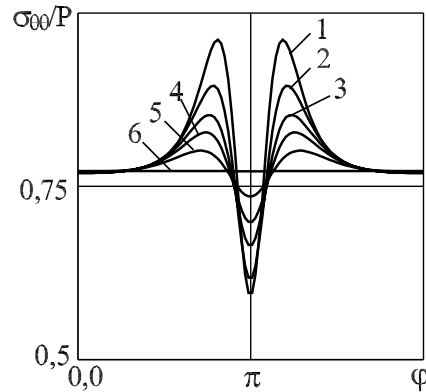


Рис. 2

На рис. 1-4 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta} / P$ в случае, когда радиусы сквозного отверстия и включения равны единице ($R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = R = 1$) при $h = 2$. На рис. 1 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta} / P$ вдоль “толщинной” координаты для отверстия в точке $\varphi_1 = \pi$. Кривые 1, 2, 3, 4 построены для значения $l_x/R = 2, 25; 2, 75; 3, 5; 5, 0$ соответственно. Точками вдоль кривой 4 нанесены результаты точного решения, полученного методом рядов для слоя ослабленного одним сквозным круговым отверстием.

На рис. 2 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta} / P$ по контуру, ограничивающему отверстие в плоскости $x_3 = 1, 8$. Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 построены при $l_x/R = 2, 25; 2, 5; 2, 75; 3, 0; 3, 5; 12, 0$ соответственно. На рис. 3 и рис. 4 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta} / P$ по контуру, ограничивающему включение в плоскости $x_3 = 1, 8$ со стороны включения (рис. 3) и со стороны среды (рис. 4). Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 3, 4) построены при $l_x/R = 2, 25; 2, 5; 2, 75; 3, 0; 3, 5; 17, 0$ соответственно.

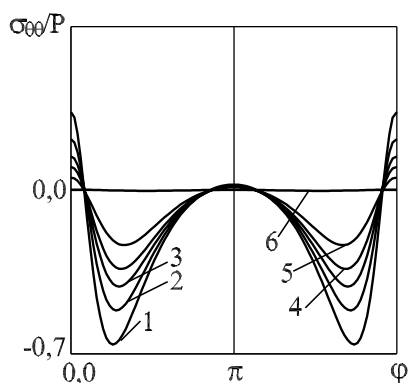


Рис. 3

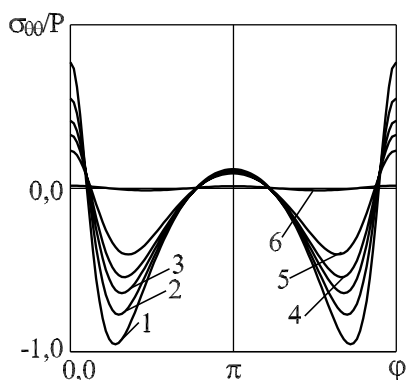


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буланов Г. С., Шалдырван В. А. Решение смешанной задачи о концентрации напряжений в толстой пластине // Теорет. и прикл. механика. 1984. Вып. 15. С. 5–9.
- [2] Жиров В.Е., Устинов Ю.А. Некоторые задачи теории плит из электроупругого материала // Тепл. напряж. в элементах констр. (Респ. межвед. научно-техн. сб.). Харьков: Вища школа. 1977. Вып. 17. С. 62-67.
- [3] Григолюк Э.И., Ковалев Ю.Д., Фильштинский Л.А. Изгиб полуслоя, ослабленного сквозным отверстием // Докл. РАН. 1995. 345, № 1. С. 54-56.
- [4] Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. К., 1978. 237 с.
- [5] Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 261 с.
- [6] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т.: Т.5).
- [7] Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в R^3 // Теорет. и прикл. механика. Харьков: Основа, 1990. Вып.21. С.13-20.
- [8] Фильштинский Л.А., Ковалев Ю.Д. Концентрация механических напряжений у отверстия в пьезокерамическом слое // МКМ, 2002. т.28, № 2, С. 183–188.
- [9] Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электрических тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

Kovalyov Yu.D., Stativka Ev.N. *The mixed antisymmetric electroelastic problem for inhomogeneous layer with sliding seal of its end faces.* The electroelasticity state of inhomogeneous piezoceramic layer with sliding seal of its end faces in the case of shear is researched in this work. The boundary problem reduced to system, which consists of $12k$ ($k=1,2,\dots$) integral and differential equations. The expressions for stress, which characterize the stress state of inhomogeneous layer are found in this work. The results of calculations of characteristic stresses are presented.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ РЕЗИН И ЕЕ ВОЗМОЖНОГО ВЛИЯНИЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Комар Л. А., Свистков А. Л., Морозов И. А.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

В основу модели положено представление о том, что частицы технического углерода диаметром от 10 до 30 нм, собранные в первичные агрегаты с размерами от 50 до 200 нм образуют жесткий каркас в материале, который разрушается при деформировании. Около частиц наполнителя существует слой стеклообразного полимера толщиной 2 нм. Около него формируется слой ориентированного полимера, находящегося в плоском ориентированном состоянии толщиной около 8 нм. Он обладает вязкопластическими свойствами. Именно этот слой и определяет появление в материале эффекта размягчения Маллинза, вязкоупругие свойства среды, существенное повышение прочности материала при введении в эластомер частиц активного наполнителя, имеющих наноразмеры.

Гипотеза о существовании двух слоев около частиц наполнителя

Многие особенности поведения резин может объяснить гипотеза о существовании двух слоев около частиц технического углерода, сформулированная в работе [1]. Первый слой имеет толщину около 2 нм. В нем полимер находится в стеклообразном состоянии. Около него располагается второй слой толщиной 8 нм. Он состоит из длинных незащитых цепей. Эти цепи способны скользить внутри этого слоя, сползать в зазор между агломератами при деформировании материала. Вторые (вязкие) слои около частиц наполнителя и формируют вязкоупругие и прочностные свойства резин. Расчеты показывают, что во вторые слои попадает значительная часть эластомерного материала. Объем полимера во вторых слоях сравним с объемом, занимаемым в материале техническим углеродом.

Для моделирования поведения полимерных цепей во втором слое могут использоваться как теория дальнего действия, так и теория ближнего действия. Теория дальнего действия объясняет происхождение второго слоя тем, что частицы наполнителя создают потенциальное поле, которое действует на значительном расстоянии от поверхности частиц (до 10 и более нанометров). Именно это поле по особому укладывает полимерные цепи и не дает проникнуть в окрестности частиц наполнителя компонентам реакции сшивания полимерных цепей в сетку.

Теория ближнего действия предполагает, что потенциальное поле от частиц наполнителя не может действовать на больших расстояниях. Но большую роль играют ориентационные явления. Звенья полимерных цепей ориентируются в касательной плоскости около частиц наполнителя. Эта ориентация частично передается соседним цепям. От них — следующим и т. д. пока не исчезнет полностью. Вариант такой теории предлагается в данной работе.

Энергия взаимодействия полимерных цепей

Используем для анализа возможного поведения полимера модель свободно-сочлененных цепей. Распределение Гиббса плотности вероятности состояния полимерной цепи

$$\psi = C e \left(- \frac{\sum_{i=1}^N U_i}{c_B \theta} + \frac{\mathbf{f} \cdot l \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i}{c_B \theta} \right)$$

позволяет получить возможную геометрию расположения полимерных цепей в окрестности частиц наполнителя. В выражении символами обозначены: C — нормировочная константа, \mathbf{f} — сила, растягивающая полимерную цепь, l — длина одного звена полимерной цепи, c_B — постоянная Больцмана, θ — температура, $U_i^{\text{orientation}}$ — энергия взаимодействия рассматриваемого звена полимерной цепи с другими звеньями цепей, $U_i^{\text{interaction}}$ — энергия взаимодействия рассматриваемого звена полимерной цепи с поверхностью наполнителя, $U_i = U_i^{\text{orientation}} + U_i^{\text{interaction}}$, N — количество звеньев в полимерной цепи,

$$U_i^{\text{orientation}} = U_0 \left(\frac{1}{3} - \boldsymbol{\tau}_i \otimes \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{O} \right), \quad U_i^{\text{interaction}} = \frac{A}{r_i^{12}} - \frac{B}{r_i^6}.$$

Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}_i$ определяет направление ориентации в пространстве рассматриваемого звена полимерной цепи, i — номер звена, r_i — расстояние от центра i -го звена полимерной цепи до поверхности наполнителя. Тензор ориентации \mathbf{O} представляет собой осредненное значение тензорного произведения вектора $\boldsymbol{\tau}_j$ на себя при условии, что осреднение осуществляется по множеству возможных ориентаций вектора $\boldsymbol{\tau}_j$ в пространстве с учетом вероятности такой ориентации в рассматриваемом состоянии

$$\mathbf{O} = \langle \boldsymbol{\tau}_j \otimes \boldsymbol{\tau}_j \rangle, \quad |\boldsymbol{\tau}_j| = 1.$$

Данная модель позволяет получить ответ на вопрос, почему формируются два слоя около частиц наполнителя. Полимер будет находиться в стеклообразном состоянии, когда его поведение полностью определяется поверхностью наполнителя. Это тот случай, когда выполняется неравенство $U_i^{\text{interaction}} \gg U_i^{\text{orientation}}$. Взаимодействие полимерных цепей с наполнителем очень велико и намного превышает все другие взаимодействия в системе. Именно это взаимодействие запрещает движение цепей в первом слое. Во втором слое выполняется условие $U_i^{\text{orientation}} \gg U_i^{\text{interaction}}$. Это означает, что поверхность наполнителя уже не определяет поведение полимерных цепей. Основную роль в данном случае играет ориентирующее действие звеньев цепей друг на друга (рис. 1).

На удалении от частиц наполнителя влияние поверхности технического углерода не сказывается. Отсутствует так же и ярко выраженная ориентация звеньев полимерных цепей. В этих условиях потенциалы взаимодействия практически равны нулю $U_i^{\text{orientation}} \approx 0$, $U_i^{\text{interaction}} \approx 0$. Это состояние обычного эластомера без наполнителя.

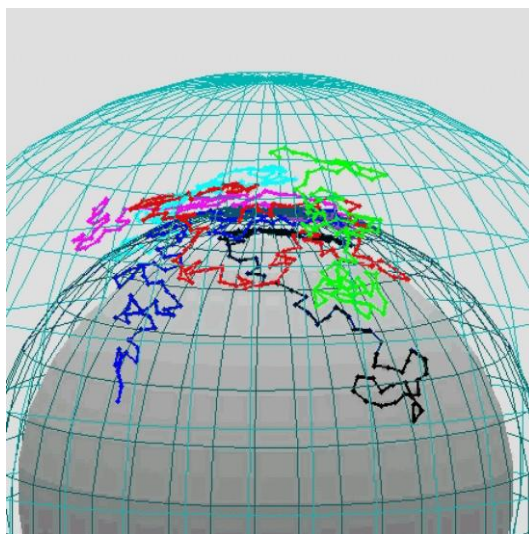


Рис. 1. Возможное положение полимерных цепей во втором слое около частиц активного наполнителя

Моделирование структуры материала

Средний радиус частиц технического углерода R_0 равен 15 нм. Следуя гипотезе Фукахори о существовании двух слоев около частиц технического углерода [1], мы будем различать вокруг частиц стеклообразный (толщиной $\delta_1=2$ нм) и вязкий слои (толщиной $\delta_2=8$ нм, в котором происходит движение полимерных цепей). При построении агрегата вокруг первой частицы, слой за слоем случайным образом помещаем частицы таким образом, чтобы все они касались частиц предыдущего слоя, и не допускалось пересечение частиц друг с другом. Толщина каждого слоя равна диаметру одной частицы наполнителя. Число частиц на M -ом слое вычисляем по формуле:

$$\Delta N_M \approx C \left(\frac{R_M}{R_0} \right)^D - N_{M-1},$$

где C – константа, зависящая от желаемой плотности частиц, во всех представленных здесь результатах принято $C=0,5$; $R_M = 2MR_0$; R_0 – радиус частицы; D – фрактальная размерность в соответствии с данными работы [2] принято $D=2$; N_{M-1} – число частиц на всех предыдущих слоях. При построении первичного агрегата используем значение радиуса частицы R_0 равное 10 нм. Далее считаем, что происходит дальнейший рост размера частиц во время обжига в печи и увеличиваем радиус частиц агрегата в 1,5 раза. Пример построенного агрегата представлен на рис. 2.

При создании агломерата в начало координат помещаем самый большой агрегат. Формирование агломерата частиц осуществляем пошагово путем присоединения на каждом шаге нового агрегата к уже построенной части агломерата.

Алгоритм объединения i -го агрегата с уже построенным фрагментом структуры состоит в следующем. Задаем начальное расстояние r следующего агрегата от центра: $r = r_0 + r_i$, где r_0 – радиус первого агрегата; r_i – радиус текущего

агрегата. Под радиусом агрегата подразумеваем расстояние от его центра до самой дальней его точки. Случайным образом задаем направляющие углы ϕ и θ в сферической системе координат по ним вычисляем координаты центра сферы, куда хотим поместить i -ый агрегат. Проверяем, не пересекает ли r_i , проведенный из центра полученной сферы уже размещенные агрегаты. Если он пересекает, то пытаемся еще раз (число попыток пропорционально r). По истечении числа попыток увеличиваем расстояние текущего агрегата от центра на величину, равную радиусу одной частицы R_0 и повторяем всё снова.

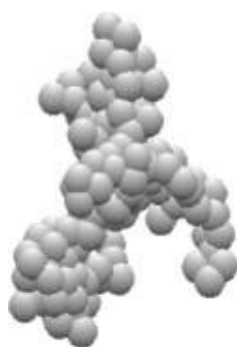


Рис. 2. Пример построенного агрегата

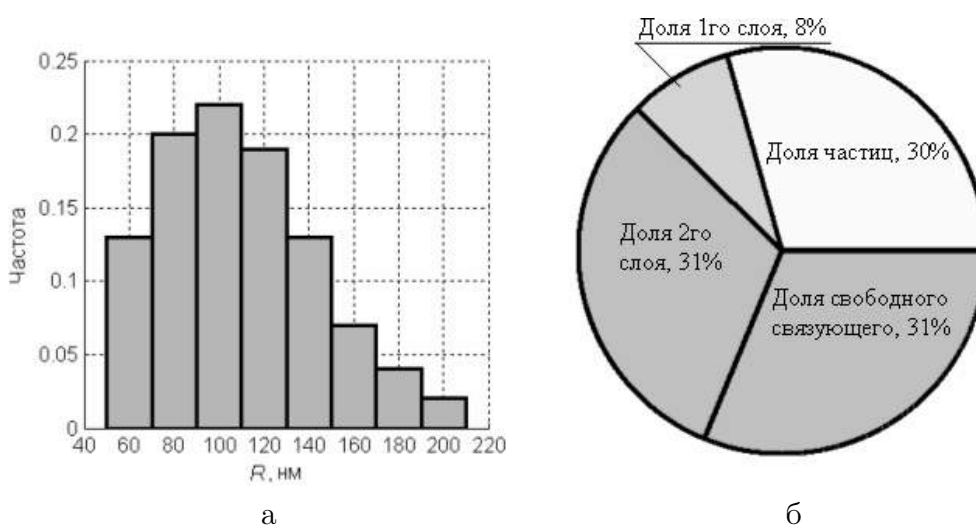


Рис. 3. Распределение размеров агрегатов в агломерате (а) и объемные доли различных состояний частиц и связующего в данном случае (б)

После того, как определена область вероятного нахождения агрегата, помещаем в нее агрегат и смещаем его по направлению к началу координат до момента касания с какой-либо из частиц уже построенного фрагмента структуры. Затем смещаем агрегат в противоположную сторону на расстояние порядка половины радиуса частицы вдоль прямой, соединяющей соприкоснувшиеся частицы агрегатов. Повторяем движение агрегата к центру и смещение в противоположную касанию сторону до тех пор, пока агрегат максимально не приблизится к началу координат. Таким образом, получаем одну точку касания текущего агрегата

с уже имеющимся. Поворачивая агрегат относительно центра частицы касания, находим вторую точку соприкосновения рассматриваемого агрегата с построенным фрагментом структуры. Вращая агрегат относительно прямой, соединяющей центры двух полученных частиц касания, находим третью точку касания данного агрегата с построенной частью агломерата.

В качестве примера представлен результат расчета агломерата из 100 агрегатов, распределение размеров которых дано на рис.3а. В данном случае был задан средний радиус в 100 нм и среднее квадратическое отклонение в 40 нм. На рис.3б представлена диаграмма объемных долей составляющих в данном агломерате. Видно, что объемная доля второго слоя около частиц наполнителя имеет большое численное значение. В данном примере вязкий слой (согласно терминологии Фукахори) занимает 31% от всего объема материала. Но именно этот слой, согласно гипотезе Фукахори, обладает необычными свойствами. Именно в нем располагаются длинные незащитные полимерные цепи, способные двигаться, формировать вязкоупругое поведение материала и повышенную прочность и деформативность у наполненного эластомера по сравнению с ненаполненным. Этот процесс предстоит исследовать в дальнейшем с использованием соответствующих математических моделей.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований и Департамента промышленности и науки Пермской области (гранты № 04-01-96058 и № 04-01-97505).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Fukahori Y.* The mechanics and mechanism of the carbon black reinforcement of elastomers // *Rub. Chem. Technol.* 2003., V. 76., P. 548—565.
- [2] *Kluppel M.* The role of disorder in filler reinforcement of elastomers on various length scales // *Adv. Polym. Sci.* 2003., V. 164., P. 1—86.

Komar L.A., Svistkov A.L., Morozov I.A. *Modeling of rubber structure and its possible influence on the formation of mechanical properties of material.* The model has been developed which takes into account the existence of two layers (glassy and viscous) around rigid active filler particles in the rubber. In the viscous layer, polymer molecular chains are in the state of two-dimensional orientation. After sliding into the gap between neighboring particles the chains change their orientation to one-dimensional case. This phenomenon causes the viscoelastic behavior of filler elastomer, Mullins effect, increasing the strength.

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ШАРА, НАГРУЖЕННОГО ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Краснов А. Ю.

Ростовский госуниверситет

Рассмотрена задача нелинейной теории упругости о раздувании изотропного и несжимаемого полого шара под действием равномерно распределенного внутреннего давления. Для ряда моделей высокоэластичных материалов определена зависимость внутреннего давления от радиуса полости в деформированном состоянии и поле напряжений в шаре при больших радиально симметричных деформациях. Устойчивость равновесия нагруженного шара относительно радиально симметричных возмущений исследована с использованием энергетического подхода. Решенная задача представляет интерес, например, в связи с моделированием роста эмбрионов в биомеханике [1]

1. Радиально симметричное равновесие шара. Пусть r, ϕ, θ , – лагранжевы, а R, Φ, Θ – эйлеровы сферические координаты. Ортонормированные векторные базисы, связанные с этими координатами, обозначим соответственно $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_\Theta$.

Упругие свойства изотропного несжимаемого материала задаются функцией удельной потенциальной энергии деформации W [1–3]

$$W = W(I_1, I_2), \quad I_1 = \text{tr} \mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{G} - \text{tr} \mathbf{G}^2), \quad \mathbf{C} = \nabla \mathbf{R}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T. \quad (1)$$

Здесь I_1, I_2 – первый и второй инварианты меры деформации Коши \mathbf{G} , \mathbf{C} – градиент деформации, \mathbf{R} – радиус-вектор точки деформированного тела, ∇ – набла-оператор в отсчетной конфигурации тела в сферических координатах. Третий инвариант $I_3 = \det \mathbf{G}$ равен единице в силу условия несжимаемости [3].

Радиально симметричная деформация полого шара $r_0 \leq r \leq r_1$ описывается соотношениями

$$R = R(r), \quad \Phi = \phi, \quad \Theta = \theta. \quad (2)$$

Используя (2), из (1) можно получить выражения для градиента деформации \mathbf{C} , меры деформации Коши \mathbf{G} , а также инвариантов I_1, I_2 .

Уравнения равновесия нелинейно-упругого тела в пренебрежении массовыми силами запишем при помощи тензора напряжений Пиолы \mathbf{D} [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (3)$$

Тензор \mathbf{D} связан с тензором напряжений Коши \mathbf{T} следующим образом

$$\mathbf{D} = \sqrt{I_3} \mathbf{C}^{-T} \cdot \mathbf{T}. \quad (4)$$

В случае несжимаемого материала тензор напряжений Коши выражается через деформацию не полностью, а с точностью до шарового тензора, что приводит к определяющему соотношению [2, 3]

$$\mathbf{T} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{g}^{-1} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{g} \right) - q \mathbf{E}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}^{-T}, \quad \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{g} – мера деформации Альманзи, \mathbf{g}^{-1} – мера деформации Фингера, q – неизвестная функция координат. Так как в несжимаемом теле $I_3 = 1$, из (4), (5) получаем

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* - q\mathbf{C}^{-T}, \quad \mathbf{D}^* = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{C} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{C}. \quad (6)$$

Можно показать, что при деформации вида (2) тензор Пиолы имеет представление

$$\mathbf{D} = \left[D_{rR}^*(r) - (R')^{-1} q \right] \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \left[D_{\phi\Phi}^*(r) - rR^{-1} q \right] (\mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\Theta), \quad (7)$$

где звездочкой отмечены компоненты тензора \mathbf{D}^* , которые выражаются через функцию $R(r)$ при помощи (6).

Функция $R(r)$, определяющая радиальные перемещения частиц шара, находится из условия несжимаемости $\det \mathbf{C} = 1$ и имеет вид

$$R = \sqrt[3]{r^3 + R_0^3 - r_0^3}, \quad R_0 = R(r_0), \quad (8)$$

Здесь R_0 – неизвестный радиус полости деформированного шара.

Предполагая, что внешняя поверхность шара ($r = r_1$) свободна от нагрузки, а на внутренней ($r = r_0$) действует равномерное гидростатическое давление p , получим следующие граничные условия

$$\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{D} + p\mathbf{C}^{-T})|_{r=r_0} = 0, \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}|_{r=r_1} = 0. \quad (9)$$

Подстановка представления (7) в (3) и (9) приводит к краевой задаче для функции $q(r)$

$$\frac{dq}{dr} = R' \left(\frac{dD_{rR}^*}{dr} + 2 \frac{D_{rR}^* - D_{\phi\Phi}^*}{r} \right), \quad \frac{\partial q}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0, \quad (10)$$

$$(q - R'D_{rR}^*)|_{r=r_0} = p, \quad (q - R'D_{rR}^*)|_{r=r_1} = 0. \quad (11)$$

Из (10) следует, что $q = q(r)$. Граничные условия (11) служат для определения постоянной R_0 , а также произвольной постоянной, возникающей при решении уравнения (10).

Введя новую функцию $\sigma(r) = R'D_{rR}^* - q$, из (8), (10), (11) имеем

$$\frac{d\sigma}{dr} = -2 \left(\frac{r^2}{R^2} D_{rR}^* - \frac{R}{r} D_{\phi\Phi}^* \right) \frac{r^2}{R^3}, \quad (12)$$

$$\sigma|_{r=r_0} = -p, \quad \sigma|_{r=r_1} = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (12), удовлетворяющее второму условию (13), имеет вид

$$\sigma(r) = 2 \int_r^{r_1} \left(\frac{r^2}{R^2} D_{rR}^* - \frac{R}{r} D_{\phi\Phi}^* \right) \frac{r^2}{R^3} dr. \quad (14)$$

При заданном давлении p первое условие в (13) служит уравнением для определения внутреннего радиуса деформированного шара R_0

$$p = -\sigma(r_0). \quad (15)$$

С учетом (8) выражение (15) можно рассматривать также как зависимость $p(R_0)$ величины давления от радиуса полости деформированного шара, которая однозначно определяется заданием функции удельной энергии материала $W(I_1, I_2)$.

На основании (6), (8), (14) легко определяется функция $q(r)$, напряжения Пиолы и тензор напряжений Коши в каждой точке шара

$$\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_R = R' D_{rR}^* - q, \quad \mathbf{e}_\Phi \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\Phi = \frac{R}{r} D_{\phi\Phi}^* - q, \quad \mathbf{e}_\Theta \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\Theta = \frac{R}{r} D_{\theta\Theta}^* - q.$$

2. Исследование устойчивости равновесия. В силу условия несжимаемости положение любой точки шара при радиальной деформации согласно (8) однозначно определяется радиусом внутренней поверхности R_0 . Поэтому потенциальная энергия деформации упругого шара U будет функцией одного параметра

$$U(R_0) = 4\pi \int_{r_0}^{r_1} W r^2 dr. \quad (16)$$

Для производной энергии деформации по параметру R_0 , используя (1), (6), (8), (16), получаем

$$\frac{dU}{dR_0} = 8\pi R_0^2 \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{R}{r} D_{\phi\Phi}^* - \frac{r^2}{R^2} D_{rR}^* \right) \frac{r^2}{R^3} dr. \quad (17)$$

Сравнивая (17) и (15) и принимая в качестве параметра вместо R_0 объем полости в актуальной конфигурации $V_0 = (4/3)\pi R_0^3$, имеем

$$p = \frac{dU}{dV_0}. \quad (18)$$

На основании (18) условие равновесия шара (15) можно представить как требование стационарности потенциальной энергии упругой системы Π

$$\delta\Pi = 0, \quad \Pi = U - p(V_0 - v_0), \quad (19)$$

где v_0 – объем полости в отсчетной конфигурации шара, δ – символ вариации, здесь величина давления p считается заданной и не варьируется.

Так как при радиальной деформации упругий шар из несжимаемого материала является системой с одной степенью свободы, условие равновесия $\delta\Pi = 0$ сводится к уравнению $d\Pi/dV_0 = 0$.

Из (18), (19) вытекает равенство

$$\frac{dp}{dV_0} = \frac{d^2U}{dV_0^2} = \frac{d^2\Pi}{dV_0^2}. \quad (20)$$

Случай $d^2\Pi/dV_0^2 > 0$ соответствует устойчивому положению равновесия консервативной системы, а случай $d^2\Pi/dV_0^2 < 0$ – неустойчивому [4]. Поэтому равенство (20) означает, что положения равновесия, отвечающие “падающему” участку диаграммы нагружения шара $p(V_0)$, на котором $dp/dV_0 < 0$, неустойчивы.

На основании (24) критерий устойчивости равновесия шара можно сформулировать как требование выпуклости энергии деформации, а также записать в форме постулата Друккера [5], выражающего положительность работы добавочных обобщенных сил на добавочных обобщенных перемещениях $dpdV_0 > 0$.

3. Численные результаты. В результате численного решения краевой задачи (10), (11) получены графические зависимости для $p(R_0)$ и распределений напряжений по радиальной координате r . Были рассмотрены модели высокоэластичных материалов: Муни, Бидермана, материала специального вида и частный случай обобщенного материала Муни. Указанным моделям соответствуют функциям удельной потенциальной энергии деформации W вида (21) – (24).

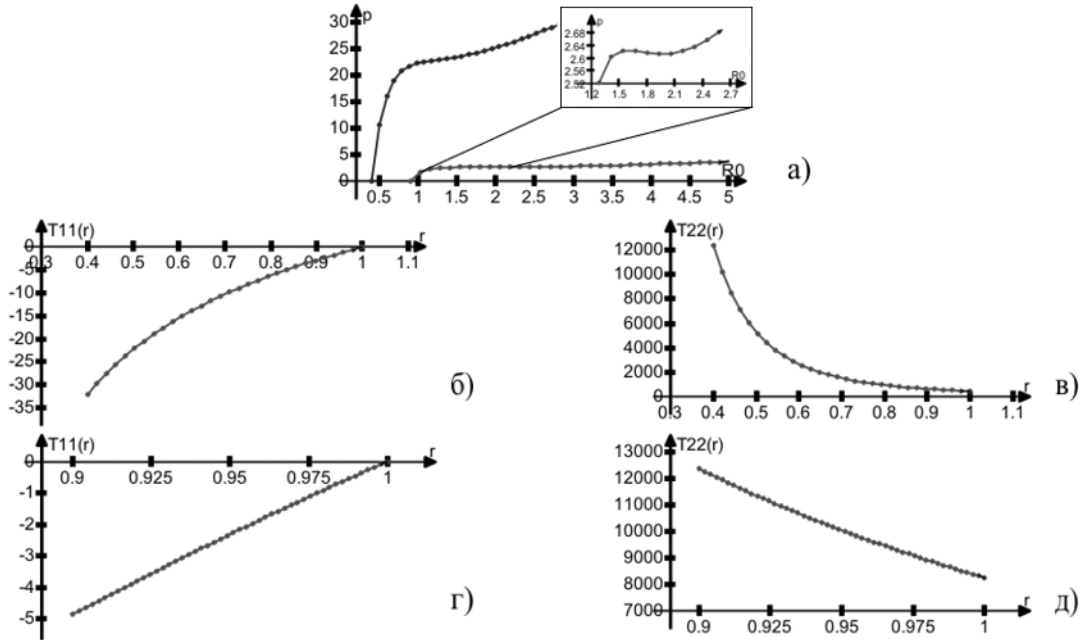


Рис. 1. Зависимости $p(R_0)$ и распределения напряжений в полем шаре

$$W(I_1, I_2) = d_1(I_1 - 3) + d_2(I_2 - 3), \quad d_1 \geq 0, \quad d_2 \geq 0, \quad d_1^2 + d_2^2 > 0, \quad (21)$$

$$W(I_1) = 27(I_1 - 3) - 60(I_1 - 3)^2 + 80(I_1 - 3)^3, \quad (22)$$

$$W(I_1, I_2) = d_0(I_1 - 2I_2 - 3), \quad d_0 > 0, \quad (23)$$

$$W(I_1, I_2) = d_0(I_1 - 3)^{\nu_0}, \quad d_0 > 0. \quad (24)$$

На рисунке 1 представлены зависимости $p(R_0)$ и распределения напряжений в полем шаре для материала Муни ($r_1 = 1$): 1. а) зависимости $p(R_0)$ для $r_0/r_1 = 0.4$ и $r_0/r_1 = 0.9$; 1. б) распределение напряжений $T_{RR}(r)$ ($r_0/r_1 = 0.4, R_0/r_0 = 8$); 1. в) распределение напряжений $T_{\Phi\Phi}(r)$ ($r_0/r_1 = 0.4, R_0/r_0 = 8$); 1. г) распределение напряжений $T_{RR}(r)$ ($r_0/r_1 = 0.9, R_0/r_0 = 8$); 1. д) распределение напряжений $T_{\Phi\Phi}(r)$ ($r_0/r_1 = 0.9, R_0/r_0 = 8$).

4. Заключение. Численное решение задачи для рассмотренных моделей высокоэластичных материалов позволило выявить три типа поведения $p(R_0)$ по мере роста R_0

1. Монотонный рост $p(R_0)$. Потеря устойчивости не происходит.
2. Монотонное возрастание вплоть до максимума с последующим монотонным убыванием $p(R_0)$. Равновесие упругой системы не является устойчивым относительно радиально симметричных возмущений при значениях R_0 , превышающих некоторую критическую величину $R_{кр}^*$.
3. Монотонное возрастание вплоть до локального максимума далее монотонное убывание вплоть до локального минимума с последующим монотонным ростом. В отличие от предыдущего типа, существует $R_{кр}^{**}$ при достижении которого, по мере роста R_0 , равновесие полого шара снова становится устойчивым.

Поведение первого типа $p(R_0)$ реализуется для материала специального вида (23) независимо от радиальной толщины полого шара. Для частного случая обобщенного материала Муни с W вида (24), для всех рассмотренных значений параметров, поведение $p(R_0)$ соответствует второму типу. В случае материалов Муни (21) и Бидермана (22), в зависимости от радиальной толщины, поведение $p(R_0)$ может быть различным. Так для достаточно толстостенного полого шара $p(R_0)$ принадлежит первому типу, а для достаточно тонкостенного – третьему.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00638).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Taber L. A.* Nonlinear Theory of Elasticity. Applications in Biomechanics. New Jersey. 2004.
- [2] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости, М.: Наука, 1980.
- [3] «Реология», под редакцией Ф. Эйриха, М., 1962.
- [4] *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем, М., 1967.
- [5] *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения, М., 1974.

Krasnov A. Yu. *The great deformations of non-linear elastic sphere loaded by inner pressure.* It is discussing nonlinear elasticity theory problem of hollow sphere inflate by inner pressure. For a series of high-elastic material models there is defined inner pressure dependency of body cavity radius in state of strain and is calculated sphere stress field under great radial symmetry strains. The stability of equilibrium of loaded sphere comparatively radial symmetry perturbation is analyzed by energy approach.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Курбатова Н. В., Романова Н. М.

Ростовский государственный университет

В данной работе предлагается технология построения трехмерного решения задачи изгиба естественно закрученного стержня, которая сводится к поиску конечно-элементного решения на сечении.

Основой данного исследования являются работы [1] и Устинова Ю. А., в том числе монография [1], в которой изложена теория построения полного решения задач Сен-Венана для естественно-закрученного стержня (ЕЗС). Главная трудность в реализации построения такого решения связана с решением двумерных задач на сечении ЕЗС. Устиновым Ю. А. и авторами данная проблема была разрешена для краевых задач, соответствующих случаям растяжения-сжатия и кручения ([3], [4]).

Для построения модели введем $x_1, x_2, x_3 = x$ — декартову систему координат. Естественно-закрученный стержень получается в результате винтового движения плоской фигуры S (в данном случае прямоугольной формы) параллельно плоскости x_1x_2 вдоль оси x .

Неподвижную систему координат свяжем с сопутствующей следующим образом: ось x совместим с осью ξ , а оси ξ_1, ξ_2 , проходящие через центр тяжести сечения, перпендикулярного ξ , направим по главным осям инерции. Будем считать, что оси ξ_α ($\alpha = 1, 2$) жестко связаны с фигурой S при ее движении. Полученная фигура занимает объем V , L — длина ЕЗС, $0 \leq x \leq L$; $\Gamma = \partial S \times [0, L]$ — боковая поверхность. В качестве параметра винта выбирается относительный угол закручивания τ ("крутка"); угол поворота φ сечения, находящегося на расстоянии x по оси от начала координат, равен $\varphi = \tau x$.

Механизм построения вариационной задачи на сечении для конкретного типа деформации соответствует подходу в [1], для этого ищется стационарное значение потенциальной энергии

$$\delta\Phi = \delta\left(\int_V \sigma \epsilon^* dV\right) = 0, \quad (1)$$

здесь компоненты тензора Коши ϵ для ЕЗС с введением оператора $D = \xi_2\partial_1 - \xi_1\partial_2$ имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \partial_1 u_1, & \epsilon_{12} &= \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2), & \epsilon_{22} &= \partial_2 u_2, \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{2}[\partial_1 u_3 + (\partial + \tau D)u_1 - \tau u_2], \\ \epsilon_{23} &= \frac{1}{2}[\partial_2 u_3 + (\partial + \tau D)u_2 + \tau u_1], & \epsilon_{33} &= (\partial + \tau D)u_3, \end{aligned} \quad (2)$$

при компонентах тензора напряжений σ

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= 2\mu[(1 + \kappa)\partial_1 u_1 + \kappa\partial_2 u_2 + \kappa(\partial + \tau D)u_3], \\
 \sigma_{12} &= \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \\
 \sigma_{22} &= 2\mu[(1 + \kappa)\partial_2 u_2 + \kappa\partial_1 u_1 + \kappa(\partial + \tau D)u_3], \\
 \sigma_{13} &= \mu(\partial_1 u_3 - \tau u_2 + (\partial + \tau D)u_1), \\
 \sigma_{23} &= \mu(\partial_2 u_3 + \tau u_1 + (\partial + \tau D)u_2), \\
 \sigma_{33} &= 2\mu[\kappa\partial_1 u_1 + \kappa\partial_2 u_2 + (1 + \kappa)(\partial + \tau D)u_3].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Известно [1], что элементарное решение Сен-Венана, соответствующее чистому изгибу, ищется в виде

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi) = e^{i\xi\tau}(\xi^2/2\mathbf{a}_1 + \xi\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)), \tag{4}$$

где $\mathbf{a}_1 = \{1, i, 0\}$, $\mathbf{a}_2 = \{0, 0, -\xi_1 - i\xi_2\}$, $\mathbf{a} = \text{Re}(\mathbf{a}) + i \text{Im}(\mathbf{a})$ –

собственный и присоединенный векторы соответственно, а \mathbf{a} – искомое комплекснозначное решение на сечении; в результате подстановки (4) в (1), с учетом (2) и (3) получается вариационное уравнение относительно в компонент вектор-функций $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)$.

Применение МКЭ позволяет проецировать данную задачу в конечномерное пространство. Для этого разобьем всю область на прямоугольные "конечные элементы" S^e таким образом, чтобы они соприкасались друг с другом и $S = \sum_e S^e$, здесь e – номер локального элемента. Для построения локальной системы с каждым узлом сетки свяжем шесть обобщенных перемещений, соответствующих вещественной и мнимой частям трех компонент вектора \mathbf{a} , при этом решение в любой точке (ξ_1, ξ_2) области S^e будем искать как линейную комбинацию неизвестных скаляров a_j^{ek} – обобщенных перемещений

$$a_j^{ek}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^4 a_j^{ek} N_k(\xi_1, \xi_2), \tag{5}$$

где a_j^{ek} ($k = 1, \dots, 4$) – узловые искомые скаляры в k -м узле, j -ой компоненты вектора узлового перемещения ($j = 1, \dots, 6$), аппроксимированного для e -го локального элемента N_k билинейными базисными функциями. Из условия независимости вариаций δa_j^{ek} строится локальная матрица \mathbf{K} , которая при таком введении неизвестных имеет порядок $n = 24$ и блочную структуру. Последняя позволяет существенно упростить получение аналитических выражений для элементов локальных матриц и ограничиться вычислением элементов блока \mathbf{B} шестого порядка с последующей репликацией и заполнением матрицы \mathbf{K} . Подынтегральные

элементы такой блочной матрицы представляются следующими выражениями.

$$\begin{aligned}
 b^{mk}(1, 1) &= 2\tau^2 N_m N_k + (4(\varkappa + 1) + \tau^2 \xi_2^2) N_{m,1} N_{k,1} + (1 + \tau^2 \xi_1^2) N_{m,2} N_{k,2} \\
 &\quad - \tau^2 \xi_1 N_{m,2} \xi_2 N_{k,1} - \tau^2 \xi_2 N_{m,1} \xi_1 N_{k,2}, \\
 b^{mk}(1, 2) &= \tau^2 \xi_1 N_{m,2} N_k + \tau^2 N_m \xi_2 N_{k,1} - \tau^2 \xi_2 N_{m,1} N_k - \tau^2 N_m \xi_1 N_{k,2}, \\
 b^{mk}(1, 3) &= -\tau^2 N_m \xi_1 N_{k,2} + \tau^2 \xi_1 N_{m,2} N_k - \tau^2 \xi_2 N_{m,1} N_k \\
 &\quad + \tau^2 N_m \xi_2 N_{k,1} + 4\varkappa N_{m,1} N_{k,2} + N_{m,2} N_{k,1}, \\
 b^{mk}(1, 4) &= -2\tau^2 N_m N_k, \\
 b^{mk}(1, 5) &= -4\tau \varkappa N_{m,1} \xi_1 N_{k,2} - \tau \xi_1 N_{m,2} N_{k,1} \\
 &\quad + \tau(4\varkappa + 1) \xi_2 N_{m,1} N_{k,1} + \tau N_m N_{k,2}, \\
 b^{mk}(1, 6) &= -4\tau \varkappa N_{m,1} N_k + \tau N_m N_{k,1}, \\
 b^{mk}(3, 1) &= N_{m,1} N_{k,2} + 4\varkappa N_{m,2} N_{k,1} + \\
 &\quad \tau^2 (\xi_2 (N_{m,1} N_k - N_{k,1} N_m)) - \xi_1 (N_{k,2} N_m - N_{m,2} N_k), \\
 b^{mk}(3, 3) &= (1 + \tau^2 \xi_2^2) N_{m,1} N_{k,1} + 2\tau^2 N_k N_m + (4(\varkappa + 1) + \tau^2 \xi_1^2) N_{m,2} N_{k,2} \\
 &\quad - \tau^2 \xi_2 N_{m,1} \xi_1 N_{k,2} - \tau^2 \xi_1 N_{m,2} \xi_2 N_{k,1}, \\
 b^{mk}(3, 5) &= \tau(-N_m N_{k,1} + 4\varkappa N_{m,2} \xi_2 N_{k,1} + \xi_2 N_{m,1} N_{k,2} - (4\varkappa + 1) \xi_1 N_{m,2} N_{k,2}), \\
 b^{mk}(3, 6) &= -4\tau \varkappa N_{m,2} N_k + \tau N_m N_{k,2}, \\
 b^{mk}(5, 1) &= \tau(N_{m,2} N_k + (4\varkappa + 1) \xi_2 N_{m,1} N_{k,1} - 4\varkappa \xi_1 N_{m,2} N_{k,1} - \xi_1 N_{m,1} N_{k,2}), \\
 b^{mk}(5, 2) &= 4\varkappa \tau N_m N_{k,1} - N_{m,1} \tau N_k, \\
 b^{mk}(5, 3) &= \tau(-N_{m,1} N_k + 4\varkappa \xi_2 N_{m,1} N_{k,2} + N_{m,2} \xi_2 N_{k,1} - (4\varkappa + 1) \xi_1 N_{m,2} N_{k,2}), \\
 b^{mk}(5, 4) &= 4\varkappa \tau N_m N_{k,2} - N_{m,2} \tau N_k, \\
 b^{mk}(5, 5) &= 4(\varkappa + 1) \tau^2 (\xi_1^2 N_{m,2} N_{k,2} + 4\xi_2^2 N_{m,1} N_{k,1} + N_m N_k \\
 &\quad - \xi_2 N_{m,1} \xi_1 N_{k,2} - \xi_1 N_{m,2} \xi_2 N_{k,1}) + N_{m,1} N_{k,1} + N_{m,2} N_{k,2}, \\
 b^{mk}(5, 6) &= 4(\varkappa + 1) \tau^2 (N_m \xi_2 N_{k,1} - \xi_2 N_{m,1} N_k - N_m \xi_1 N_{k,2} + \xi_1 N_{m,2} N_k).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Структура связей ее элементов отражена в матрице

$$\begin{pmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\
 -b_{21} & b_{11} & -b_{14} & b_{13} & -b_{16} & b_{15} \\
 b_{31} & -b_{14} & b_{33} & b_{12} & b_{35} & b_{36} \\
 b_{14} & b_{31} & -b_{12} & b_{33} & -b_{36} & b_{35} \\
 b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\
 -b_{52} & b_{51} & -b_{54} & b_{53} & -b_{56} & b_{55}
 \end{pmatrix}.$$

Аналитические представления элементов вектора \mathbf{P} , участвующего в построении столбца свободных членов имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
 p^m(1) &= -4\varkappa \xi_1 N_{m,1} \\
 p^m(2) &= -4\varkappa \xi_2 N_{m,1} \\
 p^m(3) &= -4\varkappa \xi_1 N_{m,2} \\
 p^m(4) &= -4\varkappa \xi_2 N_{m,2} \\
 p^m(5) &= 4\tau(1 + \varkappa)(\xi_1^2 N_{m,2} - \xi_1 \xi_2 N_{m,1} - \xi_2 N_m) \\
 p^m(6) &= 4\tau(1 + \varkappa)(\xi_1 \xi_2 N_{m,2} - \xi_2^2 N_{m,1} + \xi_1 N_m)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Сборка полной системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводится задача, осуществляется в соответствии со стандартными приемами МКЭ [5], хотя интегрирование элементов локальных матриц не инвариантно относительно переноса координат. Следует также отметить что полученная система, в отличие

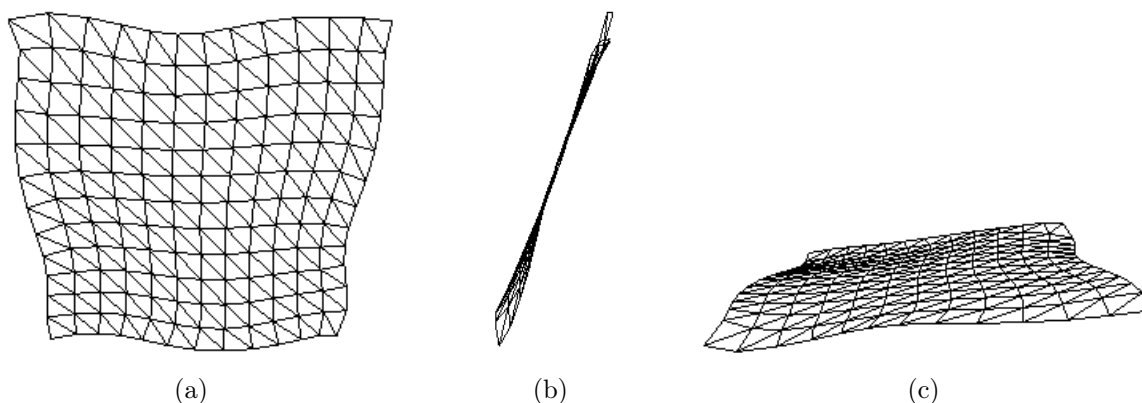


Рис. 1. МКЭ решение задачи изгиба на сечении

от случаев растяжения кручения, является симметричной ленточной, положительно определенной.

На рисунке представлено сечение ЕЗС для $\tau = 0.1, \nu = 0.3$; здесь (а) – фронтальная проекция; ракурсы (b) и (c) – позволяют передать пространственные свойства сечения; в качестве узловых перемещений выбираются вещественные части вектора \mathbf{u} .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00069).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А. Изгиб, растяжение и кручение естественно-закрученных стержней // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 978-991.
- [2] Устинов Ю.А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Наука. 2003. 128 с.
- [3] Устинов Ю.А., Курбатова Н.В. Задачи Сен-Венана с физической и геометрической анизотропией. // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказ. Регион. Мат. Моделирование. Естеств. науки. 2001 Спецвыпуск. С. 154-157.
- [4] Устинов Ю.А., Курбатова Н.В. Построение МКЭ-решений для псевдоцилиндров. // Современ. пробл. мех. спл. среды: Тр. IX Междунар. конф. Ростов н/Д, 2003. С.91-95.
- [5] Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов // М. Мир, 1981. 304 с.

Kurbatova N. V., Romanova N. M. *Finite element solution of the bending problem for naturally twisted rod.* The paper presents the technology of building of the tree-dimensional solution for the naturally twisted rod's bending problem, which is reduced to the finding of the finite element solution on a cross-section.

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КЛЕЕВОМ НАХЛЕСТОЧНОМ СОЕДИНЕНИИ

Куреннов С. С.

Национальный аэрокосмический университет, Харьков

В статье предложено аналитическое решение задачи по определению напряжений в клеевом соединении, вызванных внезапно приложенной нагрузкой. Граничные условия соответствуют одному из типов конструктивно-технологических решений (КТР).

Все искусственные и естественные конструкции имеют функциональные, технологические и эксплуатационные стыки и соединения. Это в значительной мере ставит надежность функционирования конструкции в зависимость от качества расчета напряженно-деформированного состояния (НДС), проектирования и реализации стыков и соединений. Внедрение в современные конструкции композиционных материалов (КМ), обладающих свойством селективной передачи нагрузок (что присуще тканым и однонаправленным КМ), а также низкой прочностью на смятие и межслойный сдвиг, привело к созданию широкого спектра конструктивных решений нахлесточных соединений.

Нахлесточное клеевое соединение, а также различные его модификации, такие как клеештифтовое или клееболтовое соединения, является одними из наиболее распространенных типов соединений деталей из КМ. Можно выделить три основных направления развития теории соединений. К первому относится направление, связанное с исследованием распределения напряжений по толщине соединения [1-2]. Вторым направлением исследования является разработанная А.Р. Ржаницыным теория составных балок и пластин [3] (базирующаяся на теории плоских сечений). Третье направление представляют исследования влияния на НДС поперечных деформаций деталей, обусловленных ненулевыми коэффициентами Пуассона [1], а также температуры, усадки связующего и т.д.

Вопросы же прочности, живучести, долговечности и проч. требуют изучения напряжений в соединении, которые возникают при различных динамических воздействиях на конструкцию. Данная проблема рассмотрена в монографии А.Р. Ржаницына [3]. Однако в приведенных задачах граничные условия предполагаются однородными, и вследствие этой неполноты автор ограничивается лишь нахождением частот собственных колебаний.

Постановка задачи. Рассмотрим составной стержень длиной L . Толщина первого, второго и соединительного (клеевого) слоев соответственно δ_1 , δ_2 и δ_c . Физический закон считаем линейным. Записав уравнения равновесия дифференциальных элементов слоев (см. [1]) с учетом инерционных сил получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} - (-1)^k \alpha_k (U_2 - U_1) = \gamma_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2$; U_k перемещение i -го слоя; α_i , γ_i коэффициенты, зависящие от упругих характеристик слоев, их толщины и плотности.

Граничные условия считаем следующими:

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} = F_1, \quad \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=L} = F_2, \quad (2)$$

где $F_i = \frac{F_0}{\delta_i E_i}$. В свою очередь F_0 — усилие, приложенное к слоям; E_i — модуль упругости соответствующего слоя.

Начальные условия

$$U_i|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_i}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Построение решения. Из системы (1) можно получить $L[U_1] = 0$, где

$$L[U_1] = \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\partial^4 U_1}{\partial t^2 \partial x^2} +$$

$$+ (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1) \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial t^4}.$$

Для исключения неоднородности в граничном условии (2) решение ищем в виде

$$U_1(x, t) = V(x, t) + V_1(x).$$

Где функция V удовлетворяет однородным граничным условиям, а для функции V_1 исходя из (2) граничные условия формулируются следующим образом

$$\left(\frac{dV_1}{dx} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{d^3 V_1}{dx^3} \right) \Big|_{x=0} = \frac{dV_1}{dx} \Big|_{x=L} = 0,$$

$$\frac{dV_1}{dx} \Big|_{x=0} = F_1, \quad \left(\frac{dV_1}{dx} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{d^3 V_1}{dx^3} \right) \Big|_{x=L} = F_2.$$

Функцию V_1 ищем в виде $V_1 = \sum_{i=1}^4 a_i x^i$. Из записанных выше соотношений находим

$$a_1 = F_1, \quad a_2 = \frac{\alpha_1 L}{12} (F_2 - 2F_1) - \frac{F_1}{2L}, \quad a_3 = \frac{F_1 \alpha_1}{6L}, \quad a_4 = -\frac{(F_1 + F_2) \alpha_1}{24L}.$$

При подстановке получаем неоднородное уравнение $L[V] = Ax^2 + Bx + C$, где $A = 12a_4(\alpha_1 + \alpha_2)$, $B = 6a_3(\alpha_1 + \alpha_2)$, $C = 2(\alpha_1 + \alpha_2)a_2 - 24a_4$. Решение данного уравнения ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного $V = W + Y$.

Общее решение однородного уравнения ищем в виде суперпозиции элементарных решений в виде синусоидальных волновых пакетов $W = Ae^{i(kx - \omega t)}$ (см. [4]). Величины k и ω связаны дисперсионным соотношением

$$a\omega^4 + b(k)\omega^2 + c(k) = 0,$$

где $a = \gamma_1 \gamma_2$, $b = -k^2 (\gamma_1 + \gamma_2) - \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1$, $c = k^4 + k^2 (\alpha_1 + \alpha_2)$. Можно показать, что корни дисперсионного соотношения действительны при любых k , и имеют вид $\pm \omega_1$ и $\pm \omega_2$. Элементарное решение имеет вид

$$W = (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) \sum_{m=1}^2 (A_{2m-1} \sin \omega_m t + A_{2m} \cos \omega_m t).$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем $C_1 = 0$, $k_n = \frac{\pi n}{L}$, где $n \in Z$. Для определенности примем $C_2 = 1$. Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)} \sin \omega_{1n} t + A_n^{(2)} \cos \omega_{1n} t + A_n^{(3)} \sin \omega_{2n} t + A_n^{(4)} \cos \omega_{2n} t) \cos k_n x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $Y = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(k_n x)$.

Разложив правую часть уравнения $L[Y] = Ax^2 + Bx + C$ в ряд Фурье и, обозначив $\beta_n^{(m)}$ n -ый член разложения в ряд Фурье по косинусам функции x^n , получаем

$$T_n = \frac{A\beta_n^{(2)} + B\beta_n^{(1)} + C\beta_n^{(0)}}{k^4 + k^2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Таким образом

$$U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(1)} \sin \omega_n^{(1)} t + A_n^{(2)} \cos \omega_n^{(1)} t + A_n^{(3)} \sin \omega_n^{(2)} t + A_n^{(4)} \cos \omega_n^{(2)} t + T_n \right] \cos k_n x + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Перемещения второго слоя находим из первого уравнения системы (1). Напряжения в соединительном слое равны $\tau = (U_2 - U_1)_c \xi$, где ξ коэффициент жесткости соединительного слоя [1, 3]. Коэффициенты $A_n^{(k)}$ находятся из начальных условий. В случае начальных условий (3) получаем $A_n^{(1)} = A_n^{(3)} = 0$ и системы

$$\begin{cases} A_n^{(2)} + A_n^{(4)} = -T_n - \sum_{k=1}^4 a_k \beta_n^{(k)}, \\ \chi_n^{(1)} A_n^{(2)} + \chi_n^{(2)} A_n^{(4)} = -\left(1 + \frac{k^2}{\alpha_1}\right) T_n - \sum_{k=0}^4 \bar{a}_k \beta_n^{(k)}, \end{cases}$$

где $\chi_n^{(m)} = 1 + \left(k_n^2 - \gamma_1 \left(\omega_n^{(m)}\right)^2\right) \alpha_1^{-1}$; $\bar{a}_4 = a_4$, $\bar{a}_3 = a_3$, $\bar{a}_2 = a_2 - 12a_4 \alpha_1^{-1}$, $\bar{a}_1 = a_1 - 6a_3 \alpha_1^{-1}$, $\bar{a}_0 = -2a_2 \alpha_1^{-1}$.

Результаты счета показывают, что динамические напряжения, вызванные мгновенно приложенной нагрузкой более чем в два раза превосходят аналогичные статические напряжения.

Надо, однако, отметить, что предложенная модель не учитывает затухание колебаний вследствие поглощения энергии, что для КМ играет значительную роль вследствие их высоких диссипативных свойств.

Кроме того, граничные условия (2) и гипотезы, лежащие в постановке задачи и дающие возможность получить решение в аналитической форме, имеют несколько искусственный характер и не отражают всего многообразия КТР соединений. Поэтому дальнейшие исследования могут проводиться в следующих направлениях:

- построение решений для других типов граничных условий, отражающих как другие КТР так и другие типы нагружения, например, взрыв внутри конструкции;
- построение решений для соединений типа "на ус";
- учет поперечных колебаний и работы поперечных связей;
- построение решения, учитывающего неравномерность напряжений по толщине соединения

Кроме того, дополнительного исследования, возможно экспериментального, требует изучение влияния на модуль упругости клея и деталей высокой скорости деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карпов Я.С. Проектирование и конструирование соединений деталей из композиционных материалов./ Карпов Я.С., Кривенда С.П., Рябков В.И. // Харьков, ХАИ, 1997. 200 с.
- [2] Кутыинов В.Ф. Расчет клеенных комбинированных конструкций из композиционных материалов // Проектирование, расчет и испытание конструкций из композиционных материалов. ЦАГИ. 1982. Вып. 9, С. 33-47.
- [3] Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.
- [4] Уизем Дэс. Линейные и нелинейные волны. М.: "Мир", 1977. 622 с.

Kurennov S.S. *Calculation of the dynamic stresses in glued joint..* Article is refer to solve problem of two-ply glued joint dynamic loading. Border conditions is corresponding to one type of the constructional solutions.

О КРУЧЕНИИ РАСТУЩИХ ТЕЛ

Манжиров А. В.* , Михин М. Н.**

* *Институт проблем механики Российской академии наук, Москва*

** *Московская государственная академия приборостроения и информатики,
Москва*

В работе решена задача кручения наращиваемых тел. Рассмотрены возникающие классические и неклассические начально-краевые задачи механики деформируемого твердого тела. Предложены методы решения таких задач, основанные на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с некоторым параметром и восстановлении истинных характеристик напряженно-деформированного состояния тел при помощи полученных формул расшифровки. Полученные результаты могут служить основой для решения многих важных прикладных задач механики наращиваемых тел.

Рассмотрим однородное вязкоупругое стареющее тело, изготовленное в нулевой момент времени, занимающее некоторую цилиндрическую область Π_0 . В момент приложения нагрузки τ_0 к торцам цилиндрического тела прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Боковая поверхность тела Π_0 свободна от напряжений. В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом новые наращиваемые элементы могут быть напряжены. Обозначим через $L(t)$ границу поперечного сечения $\Omega(t)$, которая изменяется с течением времени, при этом $L(\tau_0) = L_0$ и $\Omega(\tau_0) = \Omega_0$. Будем считать, что момент приложения нагрузки к наращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$. В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание тела прекращается, и с этого момента оно занимает область $\Pi_1 = \Pi(\tau_2)$ с поперечным сечением $\Omega_1 = \Omega_1(\tau_2)$, имеющим границу $L_1 = L(\tau_2)$. Не умаляя общности дальнейших рассуждений будем считать, что тело наращивается по всей его поверхности. Заметим, что всюду далее рассматриваются достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Имеем следующую краевую задачу (см., например, [1–6]):
уравнения равновесия

$$\sigma_{13,3} = 0, \sigma_{23,1} = 0, \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0; \quad (1)$$

соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_{1,1} = 0, \varepsilon_{22} = u_{2,2} = 0, \varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0, \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}), \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}); \end{aligned} \quad (2)$$

краевое условие на боковой поверхности

$$(x_1, x_2) \in L_0 : \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0; \quad (3)$$

уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))\varepsilon_{23}, \\ (\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))^{-1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)), \\ L(\tau_0, t)f(t) &= \int_{\tau_0}^t f(\tau)K_1(t, \tau)d\tau, \quad K_1(t, \tau) = G(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, должны выполняться условия равновесия торцевых сечений

$$M(t) = \iint_{\Omega} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})dx_1dx_2, \quad \iint_{\Omega} \sigma_{13}dx_1dx_2 = \iint_{\Omega} \sigma_{23}dx_1dx_2 = 0, \quad (5)$$

Преобразуем краевую задачу для основного тела. Для этого выражения (1)–(5), содержащие напряжения σ_{13} , σ_{23} , разделим на G и подействуем на них оператором $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t))$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{13,3}^0 &= 0, \quad \sigma_{23,1}^0 = 0, \quad \sigma_{13,1}^0 + \sigma_{23,2}^0 = 0, \\ \varepsilon_{11} &= u_{1,1} = 0, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} = 0, \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{1,2}) = 0, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}); \\ (x_1, x_2) \in L_0 &: \sigma_{13}^0 n_1 + \sigma_{23}^0 n_2 = 0, \quad \sigma_{13}^0 = 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^0 = 2\varepsilon_{23}, \end{aligned} \quad (6)$$

причем σ_{ij}^0 и σ_{ij} связаны соотношением

$$\sigma_{ij}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t))\sigma_{ij}G^{-1}, \quad (7)$$

В краевую задачу (6) в отличие от задачи (1)–(4) время входит параметрически, и она математически эквивалентна краевой задаче теории упругости с некоторым параметром t .

Для компонент перемещений положим [2, 3]:

$$u_1 = -\theta(t)x_2x_3, \quad u_2 = \theta(t)x_3x_1, \quad u_3 = \theta(t)\varphi(x_1, x_2, \tau_0), \quad (8)$$

где $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ — некоторая функция от переменных x_1 и x_2 , подлежащая определению. Она называется функцией кручения и характеризует искривление поперечных сечений. А $\theta(t)$ является углом закручивания (круткой). Таким образом, получим

$$\sigma_{13}^0 = \theta(\varphi_{,1} - x_2), \quad \sigma_{23}^0 = \theta(\varphi_{,2} + x_1). \quad (9)$$

Функция кручения $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ является гармонической функцией в области Ω_0 . Она должна удовлетворять краевому условию

$$(x_1, x_2) \in L_0 : \partial\varphi/\partial n = x_2n_1 - x_1n_2, \quad \vec{n} = \{n_1, n_2\}.$$

Таким образом, решение задачи кручения при помощи функции кручения $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ сведено к определению в области поперечного сечения Ω_0 гармонической функции $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ по заданному значению ее нормальной производной на контуре L_0 (задача Неймана).

Учитывая, что

$$x_1\sigma_{23}^0 - x_2\sigma_{13}^0 = \theta(t)(x_1^2 + x_2^2 + x_1\varphi_{,2} - x_2\varphi_{,1}),$$

соотношение (5), содержащее крутящий момент, примет вид:

$$M^0(t) = \theta(t)D, \quad D = \iint_{\Omega_0} (x_1^2 + x_2^2 + x_1\varphi_{,2} - x_2\varphi_{,1}) dx_1 dx_2, \quad (10)$$

где коэффициент пропорциональности D называется жесткостью при кручении. Он зависит только от формы сечения.

Рассмотрим два возможных варианта постановки задачи:

1. Задан момент $M(t)$, а требуется определить напряжения σ_{ij} , перемещения u_i и крутку $\theta(t)$.
2. Задана крутка $\theta(t)$, а требуется определить σ_{ij} , u_i и момент $M(t)$.

Решение для первого варианта постановки можно построить следующим образом: по формулам (10) найдем $\theta(t)$, по формулам (8) и (9) найдем u_i и σ_{ij}^0 , наконец, истинные напряжения σ_{ij} восстановим по формуле

$$\sigma_{ij}(x, t) = G(t) \left[\sigma_{ij}^0(x, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma_{ij}^0(x, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right], \quad (11)$$

где $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t, \tau)$.

Для второго варианта постановки определим $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$, найдем u_i и σ_{ij}^0 по формулам (8) и (9), восстановим σ_{ij} при помощи (11), определим $M(t)$ на основании (5).

Рассмотрим теперь непосредственно процесс непрерывного наращиваемого деформируемого тела $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Для растущего тела имеем [7–9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} &= 0, \quad D_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t, \quad v_i = \partial u_i / \partial t, \\ D_{13} &= \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}), \quad D_{23} = \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}), \\ \sigma_{13} &= 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(x_1, x_2), t))\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(x_1, x_2), t))\varepsilon_{23}, \\ (x_1, x_2) \in L(t) &: \sigma_{13} = \sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^* (t = \tau^*(x_1, x_2)), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tau_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_0, \\ \tau^*(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega(t) \setminus \Omega_0, \end{cases} \quad (13)$$

где оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(x_1, x_2), t))$ и обратный к нему $(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(x_1, x_2), t))$ определяется из (4) заменой τ_0 на $\tau_0(x_1, x_2)$; $\sigma_{13}^*(x_1, x_2) = \sigma_{13}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2))$ и $\sigma_{23}^*(x_1, x_2) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2))$ — компоненты задаваемого на $L(t)$ полного тензора напряжений, удовлетворяющих условию

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \sigma_{13}^*(x_1, x_2) n_1 + \sigma_{23}^*(x_1, x_2) n_2 = 0. \quad (14)$$

Заметим, что исследуемый процесс наращивания новыми элементами в общем случае приводит к определяющим соотношениям, содержащим разрывы на поверхности раздела основного и дополнительных тел. Поэтому применим подход, являющийся эффективным в задачах данного класса [7–9]. Для этого представим уравнение растущей границы $L(t)$ при $t = \tau_1$ в виде $\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1 = 0$, где $\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1 < 0$ при $(x_1, x_2) \in L_0$ и $\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1 \geq 0$ при $(x_1, x_2) \in L(t) \setminus L_0$. Будем считать, что $\tau^*(x_1, x_2)$ — достаточно гладкая функция,

такая, что $\nabla \tau^*(x_1, x_2) \neq 0$ при $\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1 = 0$. Введем характеристическую функцию $h(\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1)$, равную единице в случае, когда ее аргумент больше либо равен нулю, и равную нулю при отрицательном аргументе [7]. Теперь оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(x_1, x_2), t))$ запишем в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(x_1, x_2), t)) f(t) &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau^0(x_1, x_2), t)) f(t) - \\ &- [1 - h(\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1)] L^t(\tau_0, \tau_1) f(t), \\ L^t(\tau_0, \tau_1) f(t) &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \\ \tau^0(x_1, x_2) &= \tau_1 + h(\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1) (\tau^*(x_1, x_2) - \tau_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Подействуем оператором (15) на соотношения (12), содержащие напряжения σ_{13} и σ_{23} , предварительно разделив на G . Учитывая обозначения

$$\sigma^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) \sigma G^{-1},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{13,1}^0 + \sigma_{23,2}^0 &= 0, \\ D_{13} &= \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}), \quad D_{23} = \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}), \quad \sigma_{13}^0 = 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^0 = 2\varepsilon_{23}, \\ (x_1, x_2) \in L(t) : \sigma_{13}^{0*} &= \sigma_{13}^{0*} = \sigma_{13}^* G^{-1}, \quad \sigma_{23}^{0*} = \sigma_{23}^{0*} = \sigma_{23}^* G^{-1}, \quad \sigma_{13}^* n_1 + \sigma_{23}^* n_2 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Преобразуем начально-краевую задачу (16) к краевой задаче относительно скоростей деформации, скоростей перемещений и скоростей операторных напряжений. Для этого продифференцируем по t уравнение равновесия и уравнения состояния. Для вывода граничного условия на $L(t)$ подействуем оператором дивергенции на начально-краевое условие на поверхности роста.

В итоге получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} S_{13,1} + S_{23,2} &= 0, \quad S_{ij} = \partial \sigma_{ij} / \partial t, \\ D_{13} &= \frac{1}{2}(v_{3,1} + v_{1,3}), \quad D_{23} = \frac{1}{2}(v_{3,2} + v_{2,3}), \quad S_{13} = 2D_{13}, \quad S_{23} = 2D_{23}, \\ (x_1, x_2) \in L(t) : \quad n_1 S_{13} &+ n_2 S_{23} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

Для величин S_{ij} и v_i справедливы формулы, получаемые из (2.14) заменой аргумента τ_0 функции φ на t :

$$v_1 = -\dot{\theta}(t) x_2 x_3, \quad v_2 = \dot{\theta}(t) x_3 x_1, \quad v_3 = \dot{\theta}(t) \varphi(x_1, x_2, t), \quad (18)$$

$$S_{13} = \dot{\theta}(t) (\varphi_{,1} - x_2), \quad S_{23} = \dot{\theta}(t) (\varphi_{,2} + x_1).$$

Функция $\varphi(x_1, x_2, t)$ является гармонической в области $\Omega(t)$ и удовлетворяет краевому условию

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \quad \partial \varphi / \partial n = x_2 n_1 - x_1 n_2.$$

Крутящий момент для растущего тела выражается формулой

$$M(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2. \quad (19)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^0(t)}{\partial t} &= \iint_{\Omega(t)} (x_1 S_{23} - x_2 S_{13}) dx_1 dx_2 + \int_{L(t)} (x_1 \sigma_{23}^* - x_2 \sigma_{13}^*) dl, \\ \frac{\partial M^0(t)}{\partial t} &= \frac{\dot{M}(t)}{G(t)} + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \frac{\partial M(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} d\tau + M(\tau_0(x_1, x_2)) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(x_1, x_2))}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20)$$

где s_n — скорость движения поверхности по нормали.

Очевидно, что с учетом (18) и (20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^0(t)}{\partial t} &= \dot{\theta}(t) D(t) + \int_{L(t)} (x_1 \sigma_{23}^* - x_2 \sigma_{13}^*) dl, \\ D(t) &= \iint_{\Omega(t)} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \varphi_{,2} - x_2 \varphi_{,1}) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где $D(t)$ — переменная жесткость растущего тела при кручении, $\varphi(x_1, x_2, t)$ — искомая гармоническая функция (см. также (10)).

На этапе роста скручиваемого тела также возможны два указанных ранее варианта постановки задачи.

Для решения первого варианта постановки задачи (когда задан крутящий момент $M(t)$) следует по краевому условию найти $\varphi(x_1, x_2, t)$, по формулам (21) найти скорость крутки, затем найти величины v_i и S_{ij} по формулам (18) и восстановить истинные напряжения, перемещения и крутку по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) &= G(t) \left\{ \frac{\sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2))}{G(\tau_0(x_1, x_2))} \left[1 + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t R_1(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \left[S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \zeta) d\zeta R_1(t, \tau) \right] d\tau \right\}, \\ u_i(x_1, x_2, t) &= u_i(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2)) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t v_i(x_1, x_2, \tau) d\tau, \quad \theta(t) = \dot{\theta} + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Для решения второго варианта постановки задачи (когда задана крутка $\theta(t)$) необходимо найти $\varphi(x_1, x_2, t)$, определить v_i и S_{ij} по формулам (18), восстановить u_i и σ_{ij} по формулам (22) и найти величину момента по формуле (19).

Таким образом, задача кручения растущего тела на этапе его непрерывного наращивания исследована.

Рассмотрим теперь этап кручения тела после остановки роста. Пусть в момент времени τ_2 наращивание тела прекращается. В этот момент оно занимает область Π_1 с поперечным сечением Ω_1 , ограниченным контуром L_1 . В этом случае получаем задачу, аналогичную (17). В данном случае для величин v_i и S_{ij} применимы формулы (18), в которых необходимо заменить t на τ_2 . Напряжения, перемещения и крутка в этом случае отыскиваются по формулам (22).

В итоге неклассические краевые задачи, возникающие при исследовании кручения наращиваемых тел приведены к известным краевым задачам, содержащим некоторый параметр. По найденным решениям последних полностью восстанавливается напряженно-деформированное состояние тела при помощи представленных формул расшифровки (22).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00693).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: ГИФМЛ, 1961. 518 с.
- [2] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 647 с.
- [3] Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
- [4] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
- [5] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
- [6] Манжиров А.В. О кручении растущего цилиндра жестким штампом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842–850.
- [7] Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
- [8] Манжиров А.В., Михин М.Н. Плоская задача для растущего тела // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI международной конференции, 19–23 июня 2000 г. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. С. 106–109.
- [9] Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного в механике растущих тел // Вестник СамГУ. Естественная серия. 2004. № 4(34). С. 82–98.

Manzhirou A.V., Mikhin M.N. *On the torsion of accreted solids.* The torsion problem of the mechanics of accreted solids is solved. Arising classical and non-classical initial boundary-value problems of solid mechanics are considered. Methods for solving problems of accreted solids mechanics are developed. These methods are based on the reduction of non-classical problems of accretion of viscoelastic aging solids to the problems of elasticity with a parameter and reconstruction of true characteristics of stress-strain state by the aid of decoding formulas. The results of this work can be used for solving a number of important applied problems of growing solids mechanics.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНЕРГИЙ ПЛАВАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Марценюк М. А., Кислухин Н. М., Бекурин Д. Б.,
Ощепков А. Ю.

Пермский государственный университет

Для анализа биомеханики плавания при малых числах Рейнольдса построена многозвенная модель, учитывающая гидродинамическое взаимодействие звеньев. На этой основе построена компьютерная модель, позволяющая детально рассматривать модели плавательных движений различных живых организмов. Для интерпретации механики плавания используются понятия расслоенного пространства, связности, калибровочного потенциала. Для того чтобы приблизиться к пониманию реального поведения пловцов, рассматриваются кооперативные движения звеньев (синергии), позволяющие реализовать целостный двигательный акт. Синергии, рассматриваемые как локомоторные движения, позволяют устранить избыточные степени свободы, которыми изначально обладает пловец. Рассматриваются примеры синергий.

Одним из важных и интересных приложений биомеханики является гидродинамика плавания живых организмов, охватывающая большую область природных явлений. Как известно, существует более 300000 *видов* водных обитателей, которые демонстрируют огромный спектр механизмов локомоторного передвижения в жидкости [1]. Построение теории плавания было развито в ряде теоретических работ. Первоначально были рассмотрены простейшие двухзвенные модели плавающих организмов [2]. Значительное продвижение в понимании механизмов плавания достигнуто в работах Шапиро и Вильчека [3], в которых показано, что задачи плавания могут быть сведены к калибровочной теории. Для описания моделей введен геометрический язык, использующий понятия расслоенного пространства, связности, калибровочного потенциала.

В наших работах [4,5] была построена многозвенная модель плавания. Животное представляется как система механически связанных между собой твердых тел (звеньев). Внутренние силы организма позволяют управлять длинами и ориентациями связей между звеньев, а также их взаимной ориентацией. Компьютерная реализация модели позволила рассмотреть механизмы плавания, проанализировать возможные схемы управления. Как выяснилось, для перехода к моделированию плавания реальных обитателей водной среды эта модель нуждается в уточнениях. Во-первых, необходимо учесть гидродинамическое взаимодействие между звеньями, которым мы пренебрегали на первом этапе построения модели. Во-вторых, необходимо разработать алгоритм выделения кооперативных движений звеньев, называемых в литературе синергиями. Дело в том, что даже в рамках многозвенной модели возникает проблема «избыточных степеней свободы» [6]: система N звеньев имеет $6N - 6$ внутренних степеней свободы, а плавательные движения, как и всякие локомоции, представляют собой некие двигательные комплексы, в которые включают согласованные изменения многих степеней свободы. Как нам представляется алгоритм поиска синергий заключается в следующем. Будем считать, что звенья связаны между собой упругими связями. Такие связи могут моделировать мышечную ткань, которой они связаны между собой в природных объектах. Упругая система обладает набором нормальных колебательных мод, которые

представляют собой наиболее естественные согласованные движения звеньев данной модели. Некоторые из этих мод и представляют собой плавательные синергии. Целью данной работы является построение многозвенной модели с учетом гидродинамического взаимодействия между звеньями, а также описание поиска синергий и примеров их реализации.

Многозвенная модель. В рамках многозвенной модели плавающее животное представляется как система N твердых частей (звеньев), между которыми имеются связи (рис. 1). Без ограничения общности считаем, что связи прикреплены к центрам звеньев. Для определенности считаем звенья 3-осными эллипсоидами, хотя модель предполагает более общую постановку задачи, когда звенья представляют собой тела произвольной формы. Каждое звено может поворачиваться вокруг своего центра. Связи могут растягиваться и менять свою ориентацию. Представленная для примера на рис. 1 модель имеет шесть звеньев, пять связей и, следовательно, 33 управляемых параметра. Далее управляемые параметры будем обозначать символом q_k , где индекс k пробегает значения от 1 до M . Заметим, что параметры q_k определяют форму объекта. Поэтому далее используем для них название параметры формы.

Описания положения модели как целого задается шестью координатами x_α , $\alpha = 1, \dots, 6$, из которых первые три описывают поступательное смещение, а оставшиеся – ориентацию в пространстве. Такое описание годится только для твердого тела. Поскольку наша модель представляет собой деформирующееся тело (меняющаяся форма), то мы можем говорить о его положении в пространстве только в следующем смысле. Пусть в некоторый начальный момент времени $t = 0$ форма тела задана параметрами $q_k(0)$. Будем считать, что после завершения плавательного цикла движений, длительность которого считаем равной времени T , животное возвратится к той же форме, то есть $q_k(T) = q_k(0)$. Поскольку форма тела в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ одинакова, то мы можем подсчитать приращение координат x_α , сравнивая положение в пространстве этих двух твердых тел.

Укажем системы отсчета, которые используются для построения модели.

- 1) Лабораторная система отсчета, кратко Л-система, связанная с жидкостью, покоящейся на бесконечности.
- 2) Собственная система отсчета a -го звена, жестко с ним связанная и центрированная в центре приложения гидродинамических сил (для эллипсоида совпадает с его центром), кратко a -система.
- 3) система отсчета, связанная с моделью, по отношению к которой мы можем задать положение всех остальных тел. Эта система привязана к некоторому звену модели, которое мы считаем нулевым, а саму систему отсчета обозначаем как 0-систему (нуль-систему).

Гидродинамическое взаимодействие между звеньями. Пусть в некоторый момент времени заданы векторы линейной и угловой скорости всех звеньев модели в Л-системе, которые обозначим символами W^a , Ω^a , $a = 1, \dots, N$. С учетом гидродинамического взаимодействия между звеньями и линейности уравнений Стокса (движение звеньев считаем медленным) мы можем записать силу F^a и момент сил L^a (взятый относительно центра звена), действующие на звено a , в

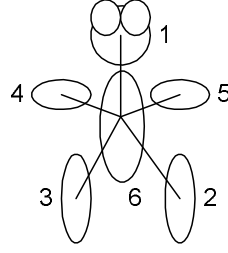


Рис. 1. Пример многозвенной модели плавающего объекта

виде, пропорциональном скоростям W^a , Ω^a :

$$F_i^a = \sum_{b=1}^N (K_{ij}^{ab} W_j^b + M_{ij}^{ab} \Omega_j^b); L_i^a = \sum_{b=1}^N (M_{ji}^{ab} W_j^b + N_{ij}^{ab} \Omega_j^b), \quad (1)$$

где введены тензорные коэффициенты трения K^{ab} , M^{ab} , N^{ab} .

Обозначим линейную и угловую скорости нулевого звена символами W , Ω и будем считать их за скорости всей модели. Введем, далее, скорости звеньев в 0-системе w^a , ω^a и обозначим символом r^a радиус вектор, проведенный из центра 0-системы в центр a -системы. Связь между скоростями представим в виде

$$W^a = W + \Omega \times r^a + w^a; \Omega^a = \Omega + \omega^a. \quad (2)$$

При отсутствии внешних воздействий (что мы предполагаем), сумма сил и сумма моментов (последние должны быть взяты теперь относительно общего центра 0-системы) должны быть равны нулю. Это условие, при учете равенств (1) и (2), позволяет установить линейную связь между величинами W , Ω и w^a , ω^a , которые, в свою очередь, могут быть выражены через производные по времени от переменных x_α и q_k . В итоге получим соотношение

$$dx_\alpha = \sum_k A_{\alpha,k} dq_k, \quad (3)$$

где введен калибровочные потенциал $A_{\alpha,k}$ известным образом зависящий от введенных выше тензорных коэффициентов трения и от формы модели.

Найденная связь между управляемыми «внутренними» координатами q_k , определяющими форму модели, и «внешними» координатами x_α , задающими ее положение в пространстве, может быть использована для описания плавательных движений. Допустим, что форма модели меняется таким образом, что точка q за время T совершает полный плавательный цикл, описывая в q -пространстве некоторую замкнутую кривую Γ . Интегрируя равенство (3) по кривой, находим смещение модели как целого в виде

$$\Delta x_\alpha = \oint \sum_k A_{\alpha,k} dq_k, \quad (4)$$

что и решает поставленную задачу. Из общих соображений ясно, что интеграл будет равен нулю, если площадь ограниченная кривой Γ равна нулю. Отсюда следует, в частности, что для возникновения плавательного смещения необходимо, чтобы q -пространство было, как минимум, двумерным ($M > 1$).

Отметим, что потенциал $A_{\alpha,k}$ зависит от выбора 0-системы отсчета, то есть не является калибровочно инвариантным. Однако, как можно показать, используя многомерную теорему Стокса, интеграл по замкнутой кривой (4) не зависит от выбора системы отсчета. Заметим также, что q -пространство можно считать базой, а x -пространство — слоем. Подробнее о геометрической интерпретации уравнения (3) см. в работах [4, 5].

Колебательные моды как синергии. Для практического применения уравнения (3) необходимо выбрать замкнутую траекторию Γ , которая описывает плавательное движение. Для того чтобы реализовать это движение, необходимо осуществить кооперативное (согласованное) изменение координат q_k , которое носит название синергии. По нашему мнению наиболее естественный выбор синергий должен следовать такому алгоритму. Будем считать, что начальная форма модели является равновесной, а всякое изменение координат q_k вызывает появление возвращающих упругих сил. Коэффициенты упругости связей между звеньями идентифицируются сравнением модели с оригиналом. В результате решения колебательной задачи может быть найдено $3N - 6$ колебательных мод (нормальных координат) Q_K . Переменные Q_K являются некоторыми известными линейными комбинациями координат формы q_k . Эти новые координаты должны быть проанализированы с точки зрения их эффективности для плавательных движений и могут быть выбраны как синергии.

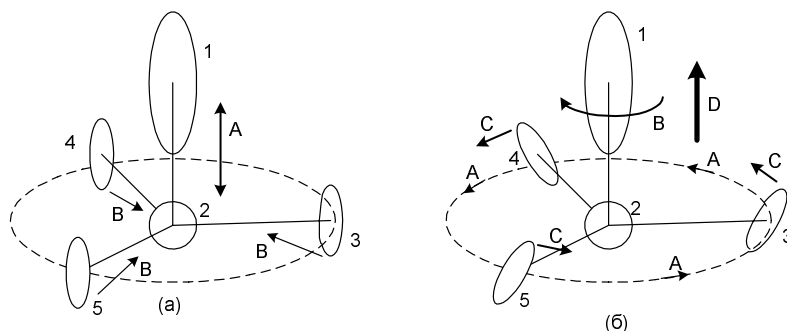


Рис. 2. Примеры синергий плавательных движений

Примеры синергий. Рассмотрим модель, представленную на рис. 2. Центры тел 3-4-5 лежат на окружности фиксированного радиуса. Модель имеет симметрию, описываемую группой преобразований C_{3v} , что облегчает выявление синергий, так как для классификации нормальных мод в данном случае можно использовать неприводимые представления группы. В первом случае (рис. 2, (а)) модель совершает полно симметричное колебание (неприводимое представление группы A_1), состоящее из двух мод. 1) Связь 1-2 растягивается и сжимается по стрелке A (первая мода Q_1); 2) эллипсоиды 3-4-5 согласованно колеблются около своих центров в направлении стрелок B в плоскостях 1-2-3, 1-2-4, 1-2-5 соответственно (мода Q_2). Будем считать, что в начальном положении длинные оси эллипсоидов 3-4-5 образуют некоторый угол (меньший $\pi/4$) с вертикалью. Нетрудно понять, что при определенных соотношениях между фазами колебаний Q_1 и Q_2 модель может совершать поступательное движение вверх или вниз (стрелка A).

Второй пример синергий, обеспечивающих движение той же модели, показан на рис. 2, (б). Здесь также рассматриваются две колебательных моды. 1) Вращательные качания, при которых тело 1 поворачивается в одну сторону (по стрелке *B*), а центры тяжести тел 3-4-5 и тело 2 – в противоположную сторону, в направлении стрелки *A*. 2) Тела 3-4-5 согласованно качаются в вертикальных касательных плоскостях, проведенных к показанной пунктиром окружности в точках расположения центров тел. Легко понять, что как и в предыдущем случае, в зависимости от разности фаз колебаний модель будет двигаться в направлении стрелки *D* или в противоположную сторону (а также в одном из промежуточных вариантов).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Pedley T.J., Kessler J.O.* Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms // *Ann. Rev./ Fluid Mech.* 1992. V.24. P. 507–541.
- [2] *Koiller J., Ehlers K., Montgomery R.* Problems and progress in microswimming // *J. Nonlinear Science.* 1996. V. 6, P. 507–541
- [3] *Shapere A., Wilczek F.* Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number // *Ibid.* P. 587–599.
- [4] *Бекурин Д.Б., Кислухин Н.М., Марценюк М.А.* Компьютерная модель плавания самодетформирующегося тела в вязкой жидкости // *Гидродинамика. Межвузовский сборник научных трудов.* Пермь, 2004. Издательство Пермского университета. Выпуск 14. С. 21–50.
- [5] *Кислухин Н.М., Марценюк М.А.* Синтез локомоторного управления в задаче плавания // *Вестн. Перм. ун-та. Вып. 4. Информационные системы и технологии.* 2005. С. 51–60.
- [6] *Смолянинов В.В.* Пространственно-временные задачи локомоторного управления // *Успехи физических наук.* 2000. Том 170, № 10. С. 1063–1128.

Martsenyuk M.A., Kislukhin N.M., Bekurin D.B., Oshepkov A.Y. *Modeling of natatory motions synergies.* For purposes of analysis of swimming biomechanics in the limit of small Reynolds numbers the swimmer is modeled as the system of many rigid segments. Model is taking into account hydrodynamic interaction between segments and it is meant that swimmer can control mutual dispositions of segments and their mutual orientations. Computer-based simulator of this model was developed and detail simulation of natatorial motions of different living creatures was performed. It was found that interpretation of swimming mechanics in terms of geometric notions like fiber bundle, holonomy, gauge potential and other are very informative. To understand the motions of real swimmers the cooperative segments displacements that are named by synergies have to be investigated. The synergies represent some highly automated integral act of swimmer's locomotion. They remove the superfluity of freedom degrees. Algorithm of synergies revelation is described and examples of synergies are given.

КОНТИНУАЛЬНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ НАНОГОФРИРОВАННЫХ СТРУКТУР

Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Товстик П. Е.

Санкт-Петербургский государственный университет

В настоящее время в современной оптике и физике твердого тела находят широкое применение периодические наноструктуры. Обычно такие структуры (квантовые точки) формируют, используя переход от двумерного роста к трехмерному (процесс Странского-Крастанова). Другим, и с термодинамической точки зрения более выгодным, является способ создания квантовых точек, основанный на выращивании однородных пленок с последующим их структурированием. Построению математических моделей последней задачи на основе как методов классической теории упругости, так и дискретного моделирования посвящена данная работа. Проведен анализ условий, при которых пластина теряет устойчивость, и исследована ее послекритическая форма равновесия.

1. Введение. При создании периодических наноструктур термодинамически более выгодным является способ, основанный на выращивании на подложке предварительно напряженных многослойных пленок с последующим их структурированием [1]. После отделения от подложки происходит деформирование пластины, простейшим видом которого исследован в работе [2]. Если начальные напряжения самоуравновешены по толщине пластины, то возможна потеря устойчивости плоской формы равновесия пластины. Именно эта задача рассматривается ниже в рамках как классической теории упругости, так и при дискретном моделировании пластины системой атомов с учетом их межатомного взаимодействия.

2. Континуальный подход. Рассмотрим трехслойную бесконечную пластину толщины h из трансверсально изотропных однородных материалов с одинаковыми по толщине и по упругим свойствам крайними слоями. Крайние слои пластины сжаты в своей плоскости начальным напряжением $\sigma_1^0 < 0$, а средний слой растянут напряжением $\sigma_2^0 > 0$, причем выполнено условие самоуравновешенности

$$2\sigma_1^0 h_1 + \sigma_2^0 h_2 = 0, \quad (1)$$

где h_1 и h_2 – толщины крайних слоев и среднего слоя ($h = 2h_1 + h_2$). Уравнения равновесия предварительно напряженной пластины имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma^0(z) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где $x_1, x_2, x_3 = z$ – декартовы координаты в тангенциальных и нормальном направлениях, u_i – соответствующие смещения, σ_{ij} – дополнительные напряжения при бифуркации, $\sigma^0(z)$ – кусочно постоянная функция со значениями σ_1^0 и σ_2^0 .

Для трансверсально изотропного материала

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33}, & e_{13} &= \frac{1}{G'}\sigma_{13}, & (1 \Leftrightarrow 2) \\ e_{33} &= -\frac{\nu'}{E'}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{E'}\sigma_{33}, & e_{12} &= \frac{1}{G}\sigma_{12}, & G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (3)$$

где упругие модули E, E', G', ν, ν' – кусочно постоянны и удовлетворяют соотношениям [3]

$$\nu < 1 - 2(\nu')^2(E/E'), \quad \nu' < (E'/E)^{1/2}. \quad (4)$$

Деформации равны

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j. \quad (5)$$

Поверхности пластины свободны от напряжений, что дает граничные условия

$$\sigma_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad z = 0, \quad z = -h. \quad (6)$$

Ищем двояко-периодическое решение системы (2) в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, z) &= u_1(z) \cos(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2), \\ u_2(x_1, x_2, z) &= u_2(z) \sin(r_1 x_1) \cos(r_2 x_2), \\ u_3(x_1, x_2, z) &= u_3(z) \sin(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2), \end{aligned} \quad (7)$$

с неизвестными волновыми числами r_1 и r_2 . Тогда система уравнений (2)-(5) может быть записана в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка относительно неизвестных функций $u_i(z), \sigma_{i3}(z)$, которые остаются непрерывными при переходе от одного слоя к другому. Ищем ненулевое решение этой системы, удовлетворяющее условиям (6).

Эта задача в общем случае не имеет решения, поэтому введем формальный параметр нагружения q , заменив в формулах (2) начальные напряжения на $q\sigma^0(z)$. Тогда задача становится самосопряженной краевой задачей на собственные значения, имеющей дискретный спектр. Пусть $q_0 = q_0(r_1, r_2)$ – наименьшее положительное собственное значение. Критическим значением параметра нагружения будет величина

$$q^* = \min_{r_1, r_2} q_0(r_1, r_2) = \min_r q_0(r). \quad (8)$$

Рассматриваемая система распадается на системы уравнений четвертого и второго порядков. Первая из них служит для определения критической нагрузки и имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= -r^2 u_3 + \frac{s}{G'}, & \frac{du_3}{dz} &= B_1 v + B_2 \sigma_{33}, \\ \frac{ds}{dz} &= (B_3 + q\sigma^0) r^2 v - B_1 r^2 \sigma_{33}, & \frac{d\sigma_{33}}{dz} &= s + q\sigma^0 u_3, \end{aligned} \quad (9)$$

где $v = u_1 r_1 + u_2 r_2$, $s = \sigma_{13} r_1 + \sigma_{23} r_2$, а коэффициенты для трансверсально изотропной оболочки равны

$$B_1 = \frac{E\nu'}{E'(1-\nu)}, \quad B_2 = \frac{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}{E'(1-\nu)}, \quad B_3 = \frac{E}{1-\nu^2}. \quad (10)$$

и для изотропной оболочки равны

$$G' = G, \quad B_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad B_2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}, \quad B_3 = \frac{E}{1-\nu^2}. \quad (11)$$

Исходная задача в силу симметрии может быть заменена двумя задачами с половинной длиной промежутка интегрирования – для четной и для нечетной относительно середины пластины функции $u_3(z)$. Для обеих задач ставим условия

$s(0) = \sigma_{33}(0) = 0$. Для четной задачи при $z = -h/2$ берем условия $v = \sigma_{33} = 0$ и для нечетной – условия $u_3 = s = 0$.

При используемом здесь линейном приближении критической деформации соответствует множество форм потери устойчивости при $r = const$. Нелинейный анализ в закритической стадии [4] показывает, что форме потери устойчивости при $r_1 = r_2$ соответствует минимум потенциальной энергии деформации.

3. Некоторые численные результаты. Для первого слоя (при $-h_1 \leq z \leq 0$) упругие модули снабжаем нижним индексом 1, а для второй – индексом 2. Не нарушая общности считаем $E_1 = 1$, $h_1 = 1$. Нас интересуют лишь случаи, когда докритические деформации пластины существенно меньше единицы (скажем, $|e| \leq 0.1$). Удобно выражать результат через начальную деформацию $e < 0$ первого слоя. Считая параметром нагружения в (9) величину $q = -e$, получим

$$\sigma_1^0 = -\frac{1}{1 - \nu_1}, \quad \sigma_2^0 = \frac{2}{h_2(1 - \nu_1)}. \quad (12)$$

Для слоев из изотропного материала приемлемые результаты (т.е. $q \ll 1$) получаются лишь в случае, когда средний слой является толстым и мягким (т.е. $h_2 \gg 1$, $E_2 \leq 0.1$), что совпадает с результатами [4], [5]. При численном интегрировании системы (9) обнаружено, что при значениях E_2 порядка единицы критические нагрузки, соответствующие четной и нечетной формам потери устойчивости, практически не различаются, а сами формы локализуются в окрестности свободной поверхности пластины. Поэтому ниже в упрощенной постановке рассматриваются такие формы. Для изотропной пластины эта задача решена в [4].

4. Формы потери устойчивости, локализованные вблизи свободной поверхности. Рассмотрим трансверсально изотропное полупространство, равномерно сжатое в горизонтальной плоскости напряжением σ^0 . Для исследования его устойчивости используем систему (9) при тех же условиях на свободной поверхности и при условиях затухания при $z \rightarrow -\infty$. Общее решение системы (9), затухающее при $z \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$v = C_1 e(r\lambda_1 z) + C_2 e(r\lambda_2 z), \quad Re \lambda_1 > 0, \quad Re \lambda_2 > 0 \quad (13)$$

где λ_1 , λ_2 – корни характеристического уравнения системы (9) при $r = 1$. Для остальных неизвестных функций в (9) формулы аналогичны.

Введем коэффициент ортотропии по формуле $\delta = E'/E$ и рассмотрим материал с параметрами $\nu' = \delta \nu$, $G' = \delta G$. Критические значения q^* для различных значений δ и ν приведены в Таблице 1. От параметра волнообразования r критическая деформация $e^* = -q^*$ не зависит, ибо в случае полупространства в системе (9) нет характерного линейного масштаба, с которым можно было бы сравнивать характерную длину волны деформации $L = 2\pi/r$. В случае трехслойной пластины с мягким средним слоем такой масштаб появляется в виде толщины верхнего слоя. Растянутый средний слой препятствует потере устойчивости, поэтому потеря устойчивости происходит при $r \gg 1$ (т.е. при весьма коротких волнах на поверхности), ибо в этом случае затухание прогиба в силу формулы (13) при приближении к среднему слою происходит быстрее. Критическая же деформация оказывается близкой к критической деформации для полупространства (см. Таблицу 1).

Таблица 1. Критические деформации для ортотропной пластины.

$\delta = E'/E$	1.0	0.7	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$\nu = 0.15$	0.3008	0.2302	0.1675	0.1368	0.1046	0.0712	0.0353
$\nu = 0.30$	0.2316	0.1703	0.1255	0.1019	0.0775	0.0524	0.0265
$\nu = 0.45$	0.1708	0.1236	0.0904	0.0730	0.0553	0.0372	0.0188

Приведенные здесь результаты относятся к случаю полупространства, равномерно сжатого в обоих горизонтальных направлениях. Если же оно сжато лишь в одном направлении, то критическая деформация увеличивается в $1/(1 - \nu)$ раз.

Отметим, что критические деформации q^* при потере устойчивости вблизи свободной поверхности лишь немногим меньше критических деформаций q^{**} , при которых теряет устойчивость материал как неограниченная сплошная среда (появляются волны деформации, нарушается условие Адамара). Например, при $\delta = 0.5$, $\nu = 0.3$ будет $q^* = 0.1255$, $q^{**} = 0.1346$.

5. Дискретный подход. При формировании наноластин верхний слой может приобретать естественную деформацию сжатия, связанную с различием характерных межатомных расстояний у верхнего и нижележащего слоев. Здесь верхний слой моделируется простейшей плоской решеткой из правильных треугольников и рассматривается устойчивость его сжатого состояния. Силы межатомного взаимодействия берутся соответствующими потенциалом Леннарда—Джонса [6]

$$\Pi(r) = D \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r}\right)^6 \right], \quad (14)$$

где D – энергия связи, a – равновесное межатомное расстояние.

Пусть решетке сообщена деформация сжатия $e = -q < 0$ в направлении оси x и верхний край решетки свободен. Рассмотрим устойчивость решетки. Предположим сначала, что второй слой атомов неподвижен, а атомы первого слоя могут перемещаться. Предположим, что атомы первого слоя периодически перемещаются в направлении оси z на расстояния z_1 и z_2 .

В деформированном положении потенциальная энергия ячейки периодичности будет функцией трех аргументов $f(z_1, z_2, q)$. Условием бифуркации прямолинейной формы равновесия будет нарушение положительной определенности квадратичной формы

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} Z_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z_2} Z_1 Z_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} Z_2^2, \quad (15)$$

где производные вычисляются при $z_1 = z_2 = 0$.

Критическое значение равно $q = 0.107$. Если же подвижными считать два верхних слоя, то критическое значение незначительно уменьшается: $q = 0.1064$ (при этом задача сводится к квадратичной форме с четырьмя аргументами).

Рассмотрим сплошную среду, получающуюся при осреднении решетки [6]. При $e = 0$ среда изотропна с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$. При $q = 0.107$ анизотропия упругих модулей оказывается весьма сильной

$$E = 440.96 \frac{D}{a^3}, \quad E' = 91.12 \frac{D}{a^3}. \quad (16)$$

Как следует из п.4, анизотропия сильно влияет на критическую деформацию. Следовательно, необходимо учитывать нелинейную упругость материала, ибо различие модулей в (16) связано с сильной нелинейностью функции $\partial\Pi/\partial r$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 03.01.00721, 04.01.00257

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Lu W., Schmidt W.G., Bernhole J.* Cycloaddition reaction versus dimmer cleavage at the $Si(001) : C_5H_8$ interface. // *Phys.Rev.B*, 2003, 68, p. 115327.
- [2] *Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Товстик П.Е.* Моделирование методами механики сплошных сред процесса формирования нанообъектов // *Физическая наномеханика*, 2002. Т.5. Вып. 3. С. .
- [3] *Родионова В.А., Тутаев Б.Ф., Черных К.Ф., Сидоров В.И.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд. СПбГУ. 1996. – 280 с.
- [4] *Н.Ф.Морозов, М.В.Паужито, П.Е.Товстик.* Устойчивость поверхностного слоя при термонагружении // *Изв. РАН МТТ.* – 1998. № 1. С. 130-139.
- [5] *Товстик П.Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // *Изв. РАН МТТ.* 2005. N1. С. 147-160.
- [6] *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсов А.Д.* Теоретическая механика. Определение эквивалентных упругих характеристик дискретных систем. СПб.: Изд. СПбГТУ. 2004. 32 с.

Morozov N.F., Semenov B.N., Tovstik P.E. *Continuum and discrete models of nanocorrugated structures formation.*

Now in modern optics and physics of solids find wide application periodic nanostructures. Usually such structures (quantum dots) are formed, using transition from bidimensional growth to three-dimensional (process Stransky-Krastanov). Another and from the thermodynamic point of view more favourable is the way of creation of the quantum dots, based on cultivation homogeneous films with their subsequent structurization. On a basis as methods of the classical theory of elasticity, and discrete modelling the given work is devoted to construction of mathematical models of last problem. The analysis of conditions at which the plate loses stability is carried out, and the form of its after-critical balance is investigated.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С ВЫРАБОТКАМИ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

Нескородев Н. М., Нескородев Р. Н.

Донецкий национальный университет

Предложена модель процесса деформирования, учитывающая свойства ползучести анизотропного массива горных пород около выработок, при действии сил гравитации. Уравнения состояния среды предложено выбрать в виде обобщения вязко-упругой модели Кельвина на трехмерные анизотропные среды. Решение вязко-упругой задачи проводится методом разделения переменных.

1. Постановка задачи. Массив горных пород представляется как упругое однородное анизотропное тело, заполняющее нижнее полупространство, ограниченное горизонтальной плоскостью. Отнесем его к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Начало системы поместим на глубине H , ось Ox_2 направим вертикально вверх, а плоскость Ox_1x_3 совместим с горизонтальной плоскостью. Массив ослаблен выработками. Требуется определить компоненты напряжений и перемещений около выработок под действием сил гравитации с учетом ползучести.

Полагаем, что в нетронutom массиве проявления свойств ползучести пород отсутствуют. Решение задачи о состоянии горного массива представляем состоящим из двух составляющих: 1. упругое решение; 2. вязко-упругое решение.

2. Упругое решение. Основные соотношения. Упругое решение включает в себя нахождение:

1. полей смещений и напряжений, которые существуют в нетронutom массиве;
2. полей смещений и напряжений, которые формируются за счет выработок в момент их создания (время $t = 0$).

Для описания поведения свойств горных пород используем модель упругого анизотропного тела с линейной связью между напряжениями и деформациями, выраженную обобщенным законом Гука [1]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{A} матрицы размером 6×6 коэффициентов деформации и модулей упругости, а векторы напряжений и деформаций представлены компонентами:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6); \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6).$$

Объемные силы в принятой системе координат принимают вид [2]: $Y = -\rho g$, $X = Z = 0$; а уравнения равновесия запишутся так

$$\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 + \partial_3\sigma_5 = 0, \quad \partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 + \partial_3\sigma_4 = \rho g, \quad \partial_1\sigma_5 + \partial_2\sigma_4 + \partial_3\sigma_3 = 0, \quad (2.2)$$

где g – ускорение силы тяжести, $\rho = \text{const}$ – плотность пород, $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

Описанную модель горных пород будем рассматривать как тяжелое упругое анизотропное полупространство свободное от внешних усилий при $x_2 = H$.

Перемещения и напряжения в нетронутом массиве находятся как частное решение неоднородных уравнений равновесия (2.2) и первой формы уравнений закона Гука (2.1) при нулевых условиях на границе полупространства [3]:

$$u_k^0 = -\alpha_k \rho g H \left(x_2 - \frac{x_2^2}{2H} \right) + \nu_k, \quad \sigma_i^0 = -\tau_i \rho g H \left(1 - \frac{x_2}{H} \right). \quad (2.3)$$

В массиве на большой глубине H в направлении оси Ox_3 пройдены протяженные горизонтальные выработки, и он находится в условиях обобщенной плоской деформации (перемещения и напряжения не зависят от x_3). Общее решение однородных уравнений равновесия и напряжения запишутся через три функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$ [3]:

$$u_k^* = 2Re \sum_{j=1}^3 R_{kj} \Phi_j(z_j), \quad \sigma_i^* = 2Re \sum_{j=1}^3 P_{ij} \Phi_j'(z_j). \quad (2.4)$$

Функции $\Phi_j(z_j)$ определяются из граничных условий на контурах выработок.

3. Вязко-упругое решение. В момент образования выработок (время $t = 0$) упругие постоянные нетронутого горных пород характеризуются матрицей \mathbf{A} – модулей упругости или $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}$ – коэффициентов деформации.

Для описания процесса деформирования после образования выработок (время $t > 0$) используем модель, учитывающую свойство пород деформироваться во времени. Уравнения состояния среды выберем в виде обобщения вязко-упругой модели Кельвина [4,5] на трехмерные анизотропные среды, когда напряжения \mathbf{s} и их скорости $\dot{\mathbf{s}}$ зависят от деформаций \mathbf{e} и их скоростей $\dot{\mathbf{e}}$:

$$\mathbf{s} + \eta \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}\mathbf{e} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{e}} \quad \text{или} \quad \mathbf{e} + \eta \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{P}\mathbf{s} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{s}}. \quad (3.1)$$

Считаем, что матрицы вязкоупругих постоянных $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ пропорциональны матрицам упругих постоянных $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$, то есть

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}\eta, \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}\eta, \quad (3.2)$$

где η – коэффициент пропорциональности; матрицы \mathbf{R} и \mathbf{P} , характеризующие механические свойства материала, назовем функциями релаксации и ползучести.

Представим компоненты векторов и матриц, входящих в (3.1) как произведения функций, зависящих от пространственных и временных переменных

$$s_n = \sigma_n(x_1, x_2) \varphi_n(t), \quad e_n = \varepsilon_n(x_1, x_2) \psi_n(t), \quad (3.3)$$

$$R_{mn} = A_{mn} r_{mn}(t), \quad P_{mn} = a_{mn} p_{mn}(t). \quad (3.4)$$

В начальный момент времени имеем упругое решение

$$e_n(0) = \varepsilon_n, \quad s_n(0) = \sigma_n, \quad P_{mn}(0) = a_{mn}, \quad R_{mn}(0) = A_{mn}, \quad (3.5)$$

то есть функции времени наделяются начальными значениями

$$r_{mn}(0) = p_{mn}(0) = \varphi_n(0) = \psi_n(0) = 1. \quad (3.6)$$

Таким образом, мгновенные значения функций релаксации $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A}$, ползучести $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a}$, напряжений $\mathbf{s}(0) = \boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\mathbf{e}(0) = \boldsymbol{\varepsilon}$ соответствуют значениям модулей упругости, коэффициентам деформации, напряжениям и деформациям в нетронутом массиве.

Будем рассматривать затухающую ползучесть, которая протекает со стремящейся к нулю скоростью деформаций $\dot{\mathbf{e}}$ и напряжений $\dot{\mathbf{s}}$ при $t \rightarrow \infty$. Установлено [4,5,6], что функции ползучести являются монотонно возрастающими, а функции релаксации – монотонно убывающими при $t \rightarrow \infty$. Это дает возможность, полагая величины функций ползучести равными их максимальному значению, а функции релаксации – минимальному, представить соотношения (3.3) и (3.4) в форме

$$s_n = \sigma_n r_1(t), \quad e_n = \varepsilon_n p_1(t), \quad R_{mn} = A_{mn} r(t), \quad P_{mn} = a_{mn} p(t), \quad (3.7)$$

где

$$r_1(t) = \min_{(n,t)} \varphi_n(t), \quad p_1(t) = \max_{(n,t)} \psi_n(t), \quad r(t) = \min_{(m,n,t)} r_{mn}(t), \quad p(t) = \max_{(m,n,t)} p_{mn}(t). \quad (3.8)$$

Представления (3.7) дают завышенные значения некоторых компонент вектора деформаций и заниженные для этих же компонент вектора напряжений. Подстановка представлений (3.7) в уравнения (3.1) приводит к разделению их на уравнения закона Гука (2.1) и дифференциальные уравнения относительно временных функций

$$r_1 + \eta \dot{r}_1 = r(p_1 + \eta \dot{p}_1), \quad r_1(0) = p_1(0) = r(0) = 1; \quad (3.9)$$

$$p_1 + \eta \dot{p}_1 = p(r_1 + \eta \dot{r}_1), \quad p_1(0) = r_1(0) = p(0) = 1. \quad (3.10)$$

Для описания свойств материала уравнения (3.1) равноценны. Поэтому

$$r(t) = 1/p(t). \quad (3.11)$$

При этом, функция $p(t)$ или $r(t)$ определяется из эксперимента.

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом их ползучести приводится к решению упругой задачи в момент времени $t = 0$, что соответствует началу образования выработки, и далее, к решению дифференциального уравнения (3.9) или (3.10).

Незакрепленная выработка. После образования выработки, она некоторое время может оставаться незакрепленной под действием сил тяжести. В этом случае напряжения $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} r_1(t)$ от времени не зависят, а $r_1(t) \equiv 1$. Тогда уравнение (3.10) для определения функции $p_1(t)$ примет вид:

$$p_1 + \eta \dot{p}_1 = p, \quad p_1(0) = p(0) = 1. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.12), удовлетворяющее начальным условиям имеет вид

$$p_1(t) = p - \eta(\dot{p} - e(-t/\eta)\dot{p}_0) + \eta^2(\ddot{p} - e(-t/\eta)\ddot{p}_0) - \eta^3(\dddot{p} - e(-t/\eta)\dddot{p}_0) + \dots \quad (3.13)$$

Здесь $\dot{p}_0, \ddot{p}_0, \dots$, значения производных функции $p(t)$ в момент времени $t = 0$.

Функцию ползучести $p(t)$ представим в форме

$$p(t) = 1 + \alpha(1 - e(-t/\eta)) + \alpha_1(e(-t/\eta) - e(-\beta_1 t)) + \alpha_2(e(-\beta_1 t) - e(-\beta_2 t)) + \dots, \quad (3.14)$$

где α, η, β_n – положительные величины, а α_n – коэффициенты разложения.

С учетом представлений (3.7), (3.13) и (3.14) находим:

$$e(0) = \varepsilon, \quad e(\infty) = \varepsilon_\infty = \varepsilon(1 + \alpha). \quad (3.15)$$

Введем максимальные значения мгновенной ε_0 и длительной ε_∞ деформаций

$$\varepsilon_0 = \max_n \{\varepsilon_n\}, \quad \varepsilon_\infty = \varepsilon_0(1 + \alpha). \quad (3.16)$$

С учетом соотношений (3.15) найдем величину α :

$$\alpha = (\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)/\varepsilon_0. \quad (3.17)$$

Для определения значений величин $\alpha, \eta, \beta_n, \alpha_n$ – необходимо воспользоваться представлением функции ползучести в виде экспериментальной кривой $e(t) \text{ div } t$ для конкретного вида горной породы. Для алевролита такая кривая приведена в работе [6]. По этой кривой устанавливаем данные таблицы.

Время $t_i (i = \overline{1, 9})$ в сутках	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$e(t_i)10^4 = \max_k \{e_k(t_i)\}10^4$	1.8	4.2	6.7	8	8.5	8.8	8.9	8.98	9

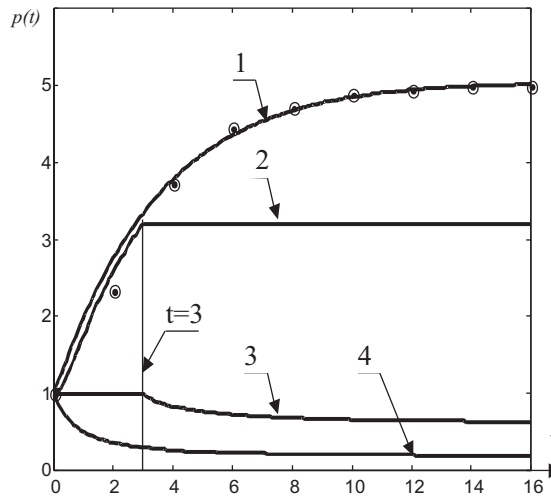


Рис. 1. Кривые ползучести и релаксации

Из формулы (3.17) и данных таблицы находим: $\alpha = 4$. Величины η, β_n, α_n найдем методом наименьших квадратов, аппроксимируя кривую, заданную таблицей, функцией $p(t)$. Минимизация функционала

$$w = \sum_{i=1}^9 [e(t_i)10^4 - p(t_i)]^2, \quad (3.18)$$

дает значения искомым постоянных. Функция $p(t)$ определена. Функция $p_1(t)$ до момента закрепления выработок находится из (3.13). Это дает возможность построить конфигурацию незакрепленных выработок в любой момент времени.

Результат аппроксимации приведен на рис. 1. Как следует из рисунка, теоретическая кривая ползучести, помеченная номером 1, хорошо описывает эксперимент, данные которого помечены кружочками. Функция $p_1(t)$ помечена номером 2. На этом же рисунке под номером 4 приведена кривая релаксации материала (3.11).

Жестко подкрепленная выработка. Сразу после образования, или по истечении некоторого времени, выработка может быть подкреплена. Наличие абсолютно жесткой крепи приводит к фиксации деформаций и релаксации напряжений. Пусть в момент времени $t = \bar{t}$ выработка жестко подкреплена (на рис. 1 величина \bar{t} принята равной 3). Величина $p_1(t)$, определяющая деформации в этот и последующие моменты времени, равна постоянному значению $\bar{p} = p_1(\bar{t})$. Состояние массива, начиная с момента времени \bar{t} , описывается уравнением (3.9).

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$r_1(t) = f + \bar{p} \left[(r - \bar{r}f) - \eta(\dot{r} - \bar{r}\dot{f}) + \eta^2(\ddot{r} - \bar{r}\ddot{f}) - \eta^3(\dddot{r} - \bar{r}\dddot{f}) \dots \right]. \quad (3.19)$$

Здесь $f = e^{-(t-\bar{t})/\eta}$; а $\bar{r} = r(\bar{t})$, $\bar{r} = \dot{r}(\bar{t})$, $\bar{r} = \ddot{r}(\bar{t})$,

Кривая релаксации напряжений $r_1(t)$ для времени $t > \bar{t}$, определенная соотношением (3.19), на рис. 1 обозначена номером 3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
- [2] *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
- [3] *Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н.* Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве. Донецк: ДонНУ, 2003. 148 с.
- [4] *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [5] *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
- [6] *Булычев Н.С.* Механика подземных сооружений в примерах и задачах. М.: Недра, 1988. 270 с.

Neskorodev N.M., Neskorodev R.N. *Deformation of the anisotropic massif of rocks with excavation taking into account of creep.* For the description of process of deformation of an anisotropic massif of rocks about excavation at action of forces of gravitation the model which is taking into account property of creep of breeds, that is, their ability to be deformed in time is offered. The equations of a condition of medium are offered for choosing as viscous - Calvin elastic model. The example of numerical research of change of curve creep for loose excavation and a curve relaxation of pressure is resulted in case of a rigid reinforcement.

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНЫХ КРИВЫХ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА – ТЕЙЛОРА ПРИ ВРАЩЕНИИ ЦИЛИНДРОВ В ОДНУ СТОРОНУ

Овчинникова С. Н.
Ростовский госуниверситет

Проблема Куэтта – Тейлора является одной из эталонных задач для экспериментального и теоретического исследования гидродинамической устойчивости и переходов в течениях жидкости. Начиная с работы Дж. Тейлора [1], большое число исследований (см., например, обзор [2]) посвящено изучению потери устойчивости течением Куэтта между соосными цилиндрами радиусов r_1 и r_2 , вращающимися с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 .

В работе рассматриваются $2\pi/\alpha$ – периодические вдоль оси цилиндров течения (осевое волновое число α фиксировано). Задача обладает цилиндрической симметрией $SO(2) \times O(2)$ и зависит от четырех параметров: отношения радиусов $\eta = r_2/r_1$, отношения угловых скоростей $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$, осевого волнового числа α и числа Рейнольдса $R_1 = \Omega_1(r_2 - r_1)^2/\nu$ (ν – кинематический коэффициент вязкости). Уравнения движения при любых значениях параметров имеют точное стационарное решение – течение Куэтта.

Разыскиваются критические числа Рейнольдса R_{1*} для фиксированных значений η , α и Ω , при которых спектр устойчивости течения Куэтта содержит собственные значения на мнимой оси. Разыскиваются также такие значения R_{1*} и Ω_* (точки пересечения), при которых в спектре устойчивости находится нулевое и пара чисто мнимых сопряженных собственных значений или две пары сопряженных чисто мнимых собственных чисел. В окрестности таких точек пересечения возможно сильное взаимодействие всех отвечающих им нейтральных мод (точнее почти-нейтральных мод), которое можно исследовать посредством нелинейных систем амплитудных уравнений, впервые построенных в [3] и [4]. В зависимости от соотношений (резонансных соотношений) между азимутальными, осевыми квантовыми числами и фазовыми частотами нейтральных мод получаются различные амплитудные системы, отличающиеся друг от друга некоторыми резонансными слагаемыми [5].

Некоторые из таких резонансных соотношений выполняются только при вращении цилиндров в одну сторону ($\Omega = \Omega_2/\Omega_1 \geq 0$). В работе приводятся результаты расчета при $\Omega \geq 0$ нейтральных кривых и их точек пересечения.

Постановка задачи. Безразмерные уравнения движения жидкости в зазоре между вращающимися цилиндрами (уравнения Навье – Стокса), запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \Delta \mathbf{v} - \nabla p - R_1(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ – скорость течения, p – давление, r, θ, z – цилиндрические координаты, ось z направлена вдоль оси цилиндров, $R_1 = \frac{\Omega_1 r_1^2}{\nu}(\eta - 1)^2$ – число Рейнольдса, $\eta = r_2/r_1$ – отношение радиусов цилиндров, ν – коэффициент кинематической вязкости. Изучаются $2\pi/\alpha$ – периодические вдоль оси цилиндров решения (1) (осевое волновое число α считается фиксированным)

При любых значениях параметров R_1 , η и $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$ уравнения (1) имеют точное стационарное решение, удовлетворяющее условиям прилипания на стенках цилиндров, — течение Куэтта с вектором скорости $\mathbf{v}_0(r) = (0, v_{0\theta}(r), 0)$ и давлением $p_0(r)$

$$v_{0\theta} = ar + b/r, \quad p_0 = \int \frac{v_{0\theta}^2}{r} dr, \quad a = \frac{\Omega\eta^2 - 1}{\eta^2 - 1}, \quad b = -\frac{(\Omega - 1)\eta^2}{\eta^2 - 1}.$$

Устойчивость течения Куэтта относительно малых возмущений скорости \mathbf{u} и давления q исследуется с помощью линейной задачи устойчивости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \Delta \mathbf{u} - \nabla q - R_1((\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{v}_0), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{при } r = 0, \quad r = \eta.$$

В четырехмерном пространстве параметров Π при фиксированных α , Ω и η существуют такие критические значения числа Рейнольдса R_{1*} , что задача (2) имеет $2\pi/\alpha$ периодические по z , 2π периодические по θ ненулевые решения с вектором скорости

$$\mathbf{u}(t, r, \theta, z) = e^{i(\omega_m t - m\theta - k\alpha_m z)} \mathbf{u}_{0m}(r),$$

где m — азимутальное, k — осевое квантовые волновые числа (m, k — целые), ω_m — (вещественная) частота.

В силу инвариантности задачи (2) относительно группы симметрии $SO(2) \times O(2)$ критическому числу R_{1*} отвечают две нейтральные комплексно сопряженные вращательно симметричные стационарные моды при $m = 0$, и в малой окрестности числа Рейнольдса R_{1*} от течения Куэтта ответвляются стационарные вихри Тейлора. Если же $m \neq 0$, то R_{1*} соответствуют две пары комплексно сопряженных невращательно симметричных независимых нейтральных мод, и от течения Куэтта ответвляются вихри Тейлора с бегущей по ним азимутальной волной [6].

Нейтральные кривые. Критические числа Рейнольдса $R_{1*}(m, k, \alpha, \eta, \Omega)$ образуют упорядоченную по возрастанию последовательность

$$R_{1*}^1 < R_{1*}^2 < R_{1*}^3 < \dots$$

Если зафиксировать два параметра из четырех: R_{1*}^p , α , η , Ω (например, η и Ω), то на плоскости остальных двух параметров (в примере R_{1*}^p и α) определяются нейтральные кривые, состоящие из критических точек.

Хорошо известно, что при вращении цилиндров в одну сторону ($\Omega \geq 0$) первому (наименьшему) числу R_{1*}^1 отвечают вращательно симметричные возмущения ($m = 0$). Рассчитанные нейтральные кривые $R_{1*}^p(\alpha)$ для $m = 0$ выпуклые. Если $\Omega \rightarrow 1/\eta^2$ (граница Синга [7]), эти кривые сближаются между собой и приближаются к границе Синга. На Рис. 1 изображены нейтральные кривые $R_{1*}^p(\Omega)$, $p = 1, 2, 3$ для первых трех критических чисел Рейнольдса при $m = 0$, $k = 1$, $\alpha = 3.25$, $\eta = 1.44$.

В случае невращательно симметричных возмущений ($m \neq 0$) нейтральные кривые перестают быть выпуклыми, а вблизи границы Синга становятся замкнутыми. На Рис. 2 видно, как изменяются нейтральные кривые $R_{1*}^p(\alpha)$ при приближении к

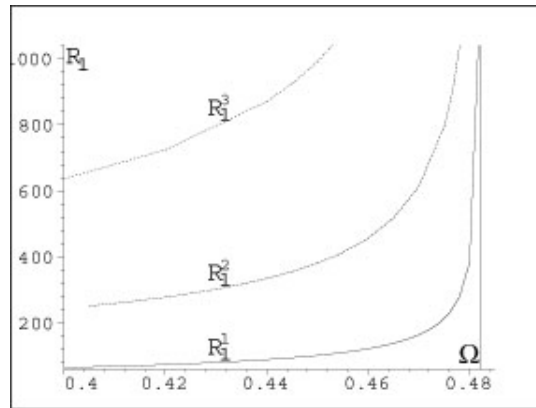


Рис. 1. Нейтральные кривые $R_{1*}^p(\Omega)$, $p = 1, 2, 3$ при $m = 0$, $k = 1$, $\alpha = 3.25$, $\eta = 1.44$.

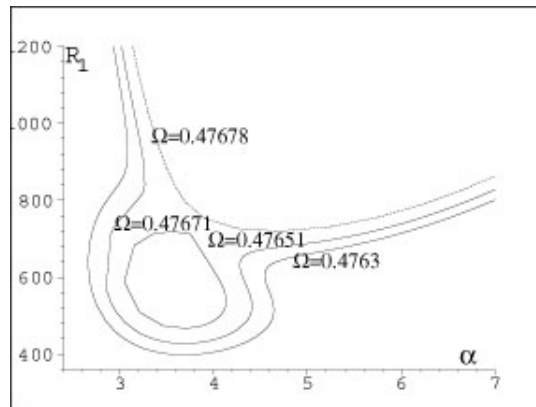


Рис. 2. Сплошные линии соответствуют $R_{1*}^{(1)}(\alpha)$ при $m = 1$, $k = 1$, $\eta = 1.44$ для различных значений Ω (граница Синга для выбранных параметров $\Omega = 0.48225$). Штриховой линией изображена кривая $R_{1*}^{(2)}(\alpha)$ для $\Omega = 0.47678$.

$\Omega = 1/\eta^2$. В малой окрестности каждой точки нейтральной кривой происходит бифуркация, от течения Куэтта ответвляется устойчивый или неустойчивый вторичный режим движения. При $m = 0$ это стационарные вращательно симметричные вихри Тейлора, при $m \neq 0$ — вихри Тейлора с бегущей по ним азимутальной волной.

Пересечение нейтральных кривых. В пространстве параметров существуют точки (R_{1*}, Ω_*) при фиксированных α и η , в которых пересекаются нейтральные кривые, соответствующие различным квантовым числам (m, k) и (n, l) .

На Рис. 3 представлены результаты расчета зависимости критических чисел Рейнольдса $R_{1*}^p(\alpha)$ для $\alpha = 3.25$, $\eta = 1.144$, различных азимутальных чисел m и угловых скоростей вращения цилиндров Ω . На рисунке видно как происходит пересечение нейтральных кривых, соответствующих различным азимутальным квантовым числам. Когда параметры системы изменяются в малой окрестности такой точки пересечения, становится возможным сильное взаимодействие всех отвечающих ей нейтральных (точнее, слегка измененных) мод, которое описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на нейтральном многообразии. Впервые амплитудные системы были построены в [3]– [4] для основного резонанса Res 1.

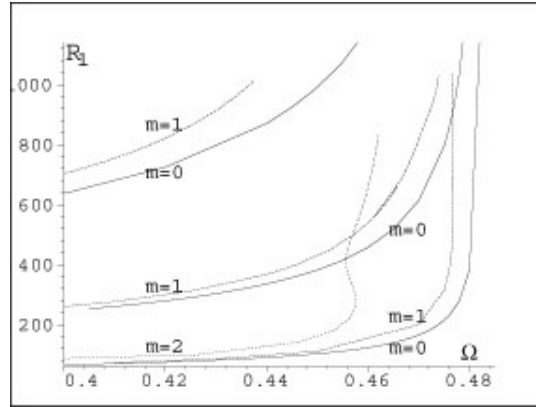


Рис. 3. Сплошные линии — первые три нейтральные кривые $R_{1*}^p(\alpha)$, $p = 1, 2, 3$ для $m = 0$, штриховые линии первые три нейтральные для $m = 1$ и штрих пунктирная — $R_{1*}^1(\alpha)$ для $m = 2$ при $k = 1$, $\alpha = 3.25$, $\eta = 1.44$.

В [5] указаны ещё шесть резонансных соотношений между квантовыми числами (m, k) , (n, l) и частотами ω_m , ω_n , которым отвечают амплитудные системы, отличающихся друг от друга резонансными слагаемыми. Один из таких резонансов (Res 3) существует только при вращении цилиндров в одну сторону ($\Omega \geq 0$).

Наиболее опасным вращательно симметричным возмущением при $\Omega \geq 0$ отвечает нейтральная кривая $R_{1*}(\alpha_*) = \min_{\alpha} R_{1*}(\alpha)$ (кривая первого перехода). Точки пересечения нейтральных кривых находятся выше кривой первого перехода.

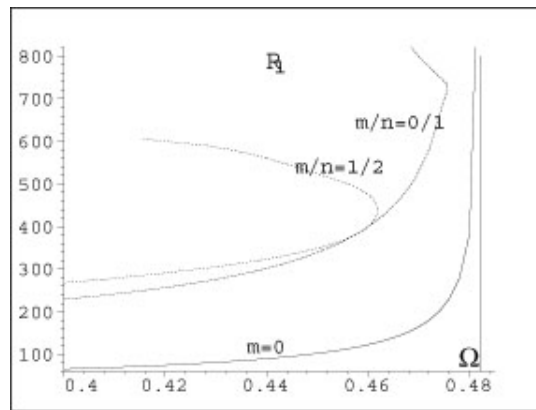


Рис. 4. Сплошная линия — кривая первого перехода ($m = 0$), вертикальная прямая — граница Синга, штриховая линия состоит из точек пересечения первого собственного числа для $m = 1$ и второго для $m = 0$, штрих пунктирная из точек пересечения второго собственного числа для $m = 1$ и первого для $m = 2$.

На Рис. 4 сплошной линией изображена нейтральная кривая, соответствующая вращательно симметричным возмущениям, вертикальная прямая — граница Синга, штриховая линия состоит из точек пересечения первого собственного числа для $m = 1$ и второго для $m = 0$, штрих пунктирная из точек пересечения второго собственного числа для $m = 1$ и первого для $m = 2$. Вблизи границы Синга точки пересечения приближаются к кривой первого перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00567-а, № 04-01-96802-р2004юг-а) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-1768.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1923. V. A223. P. 289–343.
- [2] *Prima R. C. Di, Stuart J. T.* Hydrodynamic Stability. *Trans ASME, Ser. E, J. Appl. Math.* 1983. V. 50, № 4b, P. 983–991.
- [3] Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Шестой все-союзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Аннотации докладов. С. 661.
- [4] Chossat P., Demay P. and Iooss G. Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette–Taylor // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1987. V. 99. P. 213–248.
- [5] Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Резонансные режимы течения Куэтта-Тейлора при пересечении бифуркаций // Труды межд. Школы-семинара “Применение симметрии и косимметрии в теории бифуркаций и фазовых переходов”. SCDS-II, г. Сочи. 2001. С. 148–153.
- [6] Coles D. Transition in circular Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 21. № 3. P. 336–368.
- [7] Synge J. I. On stability of viscous liquid between two rotating coaxial cylinders // *Proc. Roy. Soc.* 1938. V. A167. P. 250.

S.N. Ovchinnikova. *Intersecting neutral curves in the Couette–Taylor problems for corotating cylinders.* Critical values of Reynold’s number for linearised $2\pi/\alpha$ z -periodic and 2π θ -periodic Couette problem are monotonic sequence

$$R_{1*}^1 < R_{1*}^2 < R_{1*}^3 < \dots$$

It is well-known that in the case of corotating cylinder R_{1*}^1 corresponds to the symmetric flows, all earlier calculated neutral curves of critical Reynolds number are convex. The neutral curves $R_{1*}^p(\alpha)$ for nonaxisymmetric regimes cease to be convex. For magnitudes $\Omega \geq 0$ (Ω is the ratio of angular velocities of cylinders) the neutral curves become the closed. The results of calculation of neutral curves for fixed period along the axis of cylinders and of the neutral curves intersection are presented.

НАРАЩИВАНИЕ ГРАВИТИРУЮЩЕГО УПРУГОГО ШАРА

Паршин Д. А.

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Исследуется задача о квазистатическом деформировании упругого шара во время его непрерывного роста в собственном гравитационном поле вследствие равномерного по площади притока нового материала к поверхности. Дается замкнутое аналитическое решение задачи. Выявляются и количественно анализируются некоторые неклассические особенности напряженно-деформированного состояния гравитирующего шара: разрыв перемещения и окружного напряжения и излом радиального напряжения на первоначальной поверхности роста, своеобразное поведение максимального касательного напряжения и интенсивности касательных напряжений внутри тела.

Рассмотрим однородный изотропный линейно упругий шар радиуса a_0 , находящийся под действием сил собственного гравитационного поля. Пусть в некоторый момент времени $t = t_1$ начинается равномерный по площади непрерывный приток ненапряженного вещества к поверхности шара, вследствие чего радиус последней увеличивается во времени по закону $a(t)$, $t \in (t_1, t_2]$. По своим механическим характеристикам присоединяемый материал считается идентичным материалу исходного шара. В момент $t = t_2 > t_1$ приток вещества прекращается, радиус сформировавшегося к этому моменту шара равен $a_1 = a(t_2)$.

Будем изучать процесс формирования напряженно-деформированного состояния растущего шара в квазистатическом приближении при малых деформациях.

1. До начала наращивания напряженно-деформированное состояние шара описывается классической краевой задачей линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= c \mathbf{r}, \quad 0 < r < a_0; \\ \mathbf{T} &= 2G \left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{11} \cdot \mathbf{E} \right); \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top); \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad r = a_0; \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В ней

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) r, \quad c = \frac{4}{3} \pi \gamma_0 d^2,$$

γ_0 — гравитационная постоянная, d — плотность массы, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) u(r)$ — вектор перемещения, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \sigma_r(r) + [\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) + \mathbf{e}_\varphi(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi(\vartheta, \varphi)] \sigma_\vartheta(r)$$

— тензоры малой деформации и напряжения.

Решая эту задачу [1], получаем

$$u(r) = \frac{c(1-2\nu)}{20(1-\nu)G} \left(r^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu} a_0^2 \right) r,$$

$$\sigma_r(r) = \frac{c(3-\nu)}{10(1-\nu)} (r^2 - a_0^2), \quad \sigma_\vartheta(r) = \frac{c}{10(1-\nu)} [(1+3\nu)r^2 - (3-\nu)a_0^2].$$

Поскольку для реализуемого в гравитирующем шаре напряженного состояния максимальное касательное напряжение и интенсивность касательных напряжений равны соответственно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{2}, \quad T = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{dev} \mathbf{T} \cdot \operatorname{dev} \mathbf{T}} = \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{\sqrt{3}}, \quad (1)$$

то после нахождения поля напряжений можем записать:

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} T = \frac{c(1-2\nu)}{10(1-\nu)} r^2.$$

Как видим, τ_{\max} и T квадратично возрастают при удалении от центра шара и, соответственно, достигают своих максимальных значений на его поверхности.

2. В процессе непрерывного роста шара характеристики его напряженно-деформированного состояния будут уже, очевидно, зависеть от времени t :

$$u = u(r, t), \quad \sigma_r = \sigma_r(r, t), \quad \sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta(r, t).$$

При этом вследствие того, что приток материала осуществляется к уже деформированному телу, непрерывными во всей занимаемой растущим шаром области будут лишь скорости изменения записанных величин, но не сами эти величины. Поэтому после начала роста следует иметь дело с уравнением равновесия и определяющим соотношением для материала, записанными в скоростях [2–4]:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}, \quad 0 < r < a(t), \quad \dot{\mathbf{T}} = 2G \left(\mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{11} \cdot \mathbf{D} \right),$$

где

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \nabla \dot{\mathbf{u}}^\top)$$

— тензор скоростей деформации.

Что касается граничных условий, то в центре шара должно выполняться требование

$$\dot{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0,$$

вытекающее из центральной симметрии задачи, а на поверхности шара, которая на данном этапе в каждый момент времени является поверхностью роста, необходимо потребовать равенства нулю всех компонент тензора напряжения:

$$\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad r = a(t), \quad (2)$$

что представляет собой специфическое и нетрадиционное в механике граничное условие, отражающее факт ненапряженности присоединяемого материала.

Если обозначить за $\tau_*(r)$ момент присоединения к шару слоя радиуса r , то семейство условий (2) для всех моментов в течение времени роста можно будет переписать в виде:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)|_{t=\tau_*(r)} = \mathbf{0}, \quad a_0 < r \leq a_1.$$

Сворачивая записанное равенство с оператором Гамильтона, будем иметь

$$[\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)]|_{t=\tau_*(r)} + \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)|_{t=\tau_*(r)} = \mathbf{0}, \quad a_0 < r \leq a_1.$$

Отсюда в силу уравнения равновесия и с учетом тождеств

$$a(\tau_*(r)) \equiv r, \quad \nabla \tau_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \tau'_*(r) = \frac{\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)}{a'(\tau_*(r))}$$

получим соотношение [2–4]

$$\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = -\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) c r a'(\tau_*(r)), \quad a_0 < r \leq a_1.$$

Рассматривая его при $r = a(t)$, придем к граничному условию на поверхности роста, сформулированному для тензора $\dot{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{T}} = -\mathbf{e}_r q, \quad r = a(t); \quad q(t) = c a(t) a'(t).$$

Теперь можем сформулировать замкнутую начально-краевую задачу для растущего гравитирующего упругого шара:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} &= \mathbf{0}, \quad 0 < r < a(t), \quad t_1 < t \leq t_2; \\ \dot{\mathbf{T}} &= 2G \left(\mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{11} \cdot \mathbf{D} \right); \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \nabla \dot{\mathbf{u}}^\top); \\ \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{T}} &= -\mathbf{e}_r q, \quad r = a(t); \quad \dot{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0; \\ \mathbf{T}|_{t=\tau_1(r)} &= \begin{cases} \mathbf{T}_1, & 0 < r \leq a_0, \\ \mathbf{0}, & a_0 < r \leq a_1; \end{cases} \quad \mathbf{u}|_{t=\tau_1(r)} = \begin{cases} \mathbf{u}_1, & 0 < r \leq a_0, \\ \mathbf{0}, & a_0 < r \leq a_1; \end{cases} \end{aligned}$$

здесь

$$\tau_1(r) = \begin{cases} t_1, & 0 < r \leq a_0, \\ \tau_*(r), & a_0 < r \leq a_1, \end{cases}$$

$\mathbf{T}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ — тензор напряжения и вектор перемещения, соответствующие выписанному в п. 1 решению упругой задачи для исходного (нерастущего) шара, и для присоединяющихся частиц материала принят отсчет их перемещения от мест присоединения.

Записанная задача без учета начальных условий аналогична по форме классической краевой задаче линейной теории упругости при отсутствии объемных сил для переменных во времени области и давления на граничную поверхность.

В этой аналогии роль тензоров напряжения и деформации выполняют соответственно тензоры скоростей напряжения и деформации $\dot{\mathbf{T}}$ и \mathbf{D} , а в качестве вектора перемещения выступает вектор скорости $\dot{\mathbf{u}}$.

Воспользовавшись указанной аналогией, можем написать [5]:

$$\dot{u}(r, t) = -\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)G} r q(t), \quad \dot{\sigma}_r(r, t) \equiv \dot{\sigma}_\vartheta(r, t) = -q(t).$$

В результате будем иметь для первоначально существующего шара ($0 < r \leq a_0$):

$$u(r, t) = \frac{c(1-2\nu)}{20(1-\nu^2)G} [(1+\nu)r^2 - l^2(t)] r, \\ \sigma_r(r, t) = \frac{c}{10(1-\nu)} [(3-\nu)r^2 - l^2(t)], \quad \sigma_\vartheta(r, t) = \frac{c}{10(1-\nu)} [(1+3\nu)r^2 - l^2(t)],$$

где обозначено

$$l^2(t) = 5(1-\nu)a^2(t) - 2(1-2\nu)a_0^2,$$

для присоединившегося к моменту времени t шарового слоя ($a_0 < r \leq a(t)$):

$$u(r, t) = \frac{c(1-2\nu)}{4(1+\nu)G} [r^2 - a^2(t)] r, \quad \sigma_r(r, t) \equiv \sigma_\vartheta(r, t) = \frac{c}{2} [r^2 - a^2(t)].$$

Вычислив по формулам (1) величину максимального касательного напряжения и интенсивности касательных напряжений в исходной и дополнительной частях —

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} T = \begin{cases} \frac{c(1-2\nu)}{10(1-\nu)} r^2, & 0 < r \leq a_0, \\ 0, & a_0 < r \leq a(t), \end{cases}$$

— видим, что τ_{\max} и T не изменяются в точках исходного шара за счет притока к его поверхности нового материала, а в любой точке этого последнего они остаются равными нулю на протяжении всего процесса роста. Это, в частности, означает, что, во-первых, присоединившийся материал загружается подобно жидкости, и, во-вторых, максимум рассматриваемых величин остается локализованным на границе раздела двух составных частей тела и его значение постоянно.

Также можем заметить, что перемещение и окружное напряжение терпят разрыв при переходе через базовую поверхность роста $r = a_0$. Величины соответствующих скачков равны

$$\Delta u(t) = u(a_0 + 0, t) - u(a_0 - 0, t) \equiv \frac{c(1-2\nu)}{10(1+\nu)G} a_0^3, \\ \Delta \sigma_\vartheta(t) = \sigma_\vartheta(a_0 + 0, t) - \sigma_\vartheta(a_0 - 0, t) \equiv \frac{c(1-2\nu)}{5(1-\nu)} a_0^2$$

и, как следовало ожидать, не зависят от времени. Радиальное же напряжение непрерывно всюду в растущем теле, однако имеет излом на базовой поверхности:

$$\frac{\partial \sigma_r(a_0 + 0, t)}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_r(a_0 - 0, t)}{\partial r} \equiv \frac{2c(1-2\nu)}{5(1-\nu)} a_0.$$

3. Для проверки полученных результатов рассмотрим произвольный элемент растущего шара, ограниченный координатными поверхностями $r = r_{1,2}$, $\vartheta = \vartheta_{1,2}$, $\varphi = \varphi_{1,2}$. Нетрудно убедиться, что в нашем случае интегральное условие равновесия этого элемента для любых $r_1 < r_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$ таких, что $\sin \vartheta_1 \neq \sin \vartheta_2$ при $|\varphi_2 - \varphi_1| = 2\pi$, может быть записано в виде:

$$\sigma_r(r_2, t) r_2^2 - \sigma_r(r_1, t) r_1^2 - 2 \int_{r_1}^{r_2} \sigma_\vartheta(r, t) r dr = \frac{c}{4} (r_2^4 - r_1^4), \quad t \geq \tau_*(r_2). \quad (3)$$

Рассмотрим наиболее содержательный случай, когда граница выделенного элемента охватывает часть базовой поверхности роста, то есть $r_1 < a_0 < r_2$. Тогда, разбивая интеграл в (3) на две части, найдем:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_2, t) r_2^2 - \sigma_r(r_1, t) r_1^2 &= \frac{c}{2} \left[r_2^4 - \frac{3 - \nu}{5(1 - \nu)} r_1^4 - \frac{2(1 - 2\nu)}{5(1 - \nu)} a_0^2 r_1^2 - a^2(t) (r_2^2 - r_1^2) \right], \\ 2 \int_{r_1}^{r_2} \sigma_\vartheta(r, t) r dr &= \frac{c}{2} \left[\frac{r_2^4}{2} - \frac{1 + 3\nu}{10(1 - \nu)} r_1^4 - \frac{2(1 - 2\nu)}{5(1 - \nu)} a_0^2 r_1^2 - a^2(t) (r_2^2 - r_1^2) \right]. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений обращает условие (3) в тождество.

Автор благодарит А.В. Манжирова за постановку задачи и помощь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00693).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [2] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
- [3] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
- [4] Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
- [5] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Parshin D. A. *Accretion of a Gravitating Elastic Globe.* A quasistatic problem of the deformation of a growing elastic globe in a self-gravitational field under uniform surface inflow of a material is studied. The closed-form solution is obtained. Some non-classical features of the gravitating globe stress-strain state — the discontinuity of displacement and hoop stress and the break of radial stress at the initial growth surface and specific behavior of maximum shear stress and shear stress intensity inside the solid — are described.

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ-СИМВОЛОВ ГРИНА ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СРЕД С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Пряхина О. Д., Смирнова А. В.
Кубанский госуниверситет, Краснодар

Предложен метод построения матриц-символов ядер систем ИУ и их определителей, основанный на постановке и решении краевых задач для “вирусов” вибропрочности определенного строения.

Многие научно-технические проблемы связаны с изучением закономерностей динамических процессов в средах, обладающих как сложными физико-механическими свойствами, так и неоднородной структурой. В частности, определение критериев оценки прочностных свойств новых конструкционных материалов, фундаментальные проблемы оценки сейсмичности литосферных плит и прогноза землетрясений приводят к необходимости создания методов анализа напряженно-деформированного состояния с позиции механики разрушения с учетом связности механических, электромагнитных и тепловых факторов, а также с учетом наиболее распространенных видов неоднородностей или дефектов – включений и трещин, присущих слоистым структурам.

Динамические задачи для полуограниченных сред, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, являются на сегодняшний день малоизученными. Сложность их исследования обусловлена тем, что вследствие зависимости напряженно-деформированного состояния системы от многих параметров традиционные аналитические и численные методы анализа становятся неэффективными даже при небольшом количестве дефектов, а с ростом частоты колебаний и в областях больших размеров многие из них неприменимы. Кроме того, неединственность решений динамических задач для сред с совокупностью неоднородностей при некоторых значениях параметров, делает эти задачи еще более сложными. В связи с этим актуальными становятся как исследования рассматриваемого класса задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения.

В.А. Бабешко создана новая теория – теория “вирусов” вибропрочности, изучающая специальные сочетания неоднородностей и их влияние на динамические, в том числе и прочностные свойства деформируемых слоистых сред [1]. Теория, являясь математически и механически строгой, способствует отходу от понятия идеальной сплошности, уводит от традиционных постановок задач и стратегии исследования. Она нацелена на выделение, классификацию и изучение свойств специальных механических объектов, находящихся в деформируемой среде, способных в условиях вибрации локализовать волновой процесс и вызвать резонансы.

Свойство совокупности неоднородностей при определенных условиях локализовать волновой процесс в своей окрестности является основой научного открытия

В.А. Бабешко, И.И. Воровича, И.Ф. Образцова “Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями” [2]. Таким свойством обладают не только множественные, но и отдельные неоднородности. Способность локализовать волновой процесс присуща средам, проводящим волны различной физической природы – упругие, электромагнитные, звуковые, что имеет подтверждение в теоретических и экспериментальных исследованиях.

Проблеме моделирования динамических процессов в упругих ограниченных и полуограниченных телах, содержащих неоднородности, посвящено большое количество работ. Исследования проводятся в широком диапазоне постановок задач. Изучаются механизмы образования и распространения дефектов, процессы, приводящие к концентрации напряжений и разрушению. Значительное количество публикаций посвящено вопросам дифракции волн на трещине или включении.

Как правило, рассматриваются дефекты, расположенные в однородных или двухслойных изотропных средах и реже – в средах со сложными физико-механическими свойствами (анизотропных, пьезоэлектриках и т.п.). При этом наиболее часто дефекты предполагаются имеющими каноническую форму (круговой или эллиптический цилиндр, сфера, эллипсоид) или моделируется конечным либо полубесконечным математическим разрезом, на котором перемещения (для трещин) или напряжения (для включений) терпят разрыв.

Многообразны как постановки, так и подходы к решению задач для сред, содержащих неоднородности. Особенно интенсивно за последние годы развиваются исследования, основанные на использовании прямых численных методов решения соответствующих краевых задач. Одним из наиболее эффективных является общий метод граничных интегральных уравнений и основанный на нем при численной реализации метод граничных элементов [3]. Этот подход позволяет изучать динамические характеристики в средах при наличии дефектов в плоскостях, не параллельных свободной поверхности. Однако вследствие отмеченной выше неединственности решения, их применение должно контролироваться аналитическими методами повышенной точности. В большинстве публикаций изучается динамика отдельной трещины или включения, что не приводит к установлению закономерностей, свойственных их совокупности.

В настоящей работе, не охватывая всех возможных типов неоднородностей (например, пространственных трещин-полостей, упругих или гибких включений и т.д.) и их ориентации относительно элементов многослойной структуры, основное внимание уделено тому факту, что количество неоднородностей носит множественный характер. Рассматривается совокупность простейших типов дефектов – плоских трещин и жестких включений, расположенных в плоскостях, параллельных плоскостям раздела слоев в N -слойном пакете с жестко заземленной нижней гранью. Гармонические колебания вызваны вибрацией границ включений, занимающих области Ω_k и берегов трещин, расположенных в областях $\tilde{\Omega}_k$ ($k = 1, 2, \dots, L$) в плоскостях $z = -z_k$ (общий множитель $e^{-i\omega t}$ опущен). Поверхность пакета слоев, занимающего объем $(-\infty < x, y < +\infty; -H \leq z \leq 0)$, может быть как свободной от внешнего воздействия, так и подвергаться усилиям либо заданным, либо определяемым из решения контактной задачи в области Ω_0 .

Исследование динамических процессов в слоистых полуограниченных средах,

содержащих совокупность неоднородностей, приводит к необходимости решения системы интегральных уравнений I рода, которую можно записать в операторном виде

$$KQ(\alpha, \beta) = \int_{\delta_1} \int_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) \mathbf{Q}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = \mathbf{f}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

где $\mathbf{f}(x, y) = \{\mathbf{w}_0^0, \mathbf{w}_1^0, \mathbf{w}_2^0, \dots, \mathbf{w}_L^0, \mathbf{t}_1^0, \mathbf{t}_2^0, \dots, \mathbf{t}_L^0\}$ – многомерный вектор, компонентами которого являются векторы перемещений $\mathbf{w}_0^0, \mathbf{w}_k^0$, заданные в области контакта Ω_0 и на границах включений Ω_k и векторы усилий \mathbf{t}_k^0 , заданные на берегах трещин в области $\tilde{\Omega}_k$ ($k = 1, 2, \dots, L$); $\Omega = \{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L, \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \dots, \tilde{\Omega}_L\}$; $\mathbf{Q} = \{\mathbf{T}_0, \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_L\}$ – многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье векторов поверхностных контактных напряжений $\mathbf{t}_0(x, y)$, скачков напряжений на границах включений $\Delta \mathbf{t}_k(x, y)$ и скачков перемещений $\Delta \mathbf{w}_k(x, y)$ на берегах трещин. Носителем каждой из вектор-функций $\mathbf{t}_0(x, y), \Delta \mathbf{t}_k(x, y), \Delta \mathbf{w}_k(x, y)$ является соответствующая область из Ω .

Матрица-символ ядра системы интегральных уравнений (ИУ) является $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ блочной, размерность матриц \mathbf{K}_{ij} , являющихся ее элементами, определяется физико-механическими свойствами среды. Для упругих материалов это матрицы размерности 3×3 , а в общем случае для термоэластопругих сред – 5×5 .

$$\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{L+1}.$$

Таким образом, размерность системы ИУ равна $5(2L+1) \times 5(2L+1)$ в общем случае и $3(2L+1) \times 3(2L+1)$ для упругих сред, что требует создания специальных методов их исследования. Ключевыми вопросами здесь являются разработка методов построения матриц-символов Грина и на их основе матриц-символов ядер для систем ИУ большой размерности, аналитическое представление определителей этих матриц, позволяющее эффективно реализовать алгоритмы их численного анализа, а также создание специальных методов решения систем интегральных уравнений I рода, учитывающих характерные для подобного рода задач свойства ядер.

Предлагаемый в работе метод построения матриц-символов ядер систем ИУ и их определителей основан на постановке и решении краевых задач для “вирусов” вибропрочности определенного строения. Введение специальных матриц, связанных с типом дефекта и его положением в слоистой среде, позволило преобразовать блочные матрицы-символы ядер систем ИУ большой размерности к блочным треугольным матрицам [4, 5]. В общем случае термоэластопругой среды получено представление определителя матрицы $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ в виде произведения определителей указанных матриц. Между определенными классами “вирусов” вибропрочности и функциями, описывающими особые множества определителей их матриц-символов Грина установлено взаимнооднозначное соответствие. Для определителей матриц-символов ядер систем ИУ, соответствующих произвольному количеству и различным сочетаниям неоднородностей, расположенных в параллельных плоскостях пакета изотропных слоев на жестком основании, получено представление в виде отношения целых функций. Числителем является

произведение функций, каждая из которых зависит только от геометрических и механических параметров среды, заключенной между указанными плоскостями. Знаменателем является знаменатель определителя матрицы-символа Грина многослойной среды, не содержащей неоднородности, связанные с нарушением ее сплошности. Достоинством такого представления является исключение корневых и полярных множеств, имеющих пересечения при произвольных значениях параметров механической системы, на стадии аналитического построения, что является важным при определении условий локализации вибрационного процесса системой дефектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00811), РФФИ р2003юг(03-01-96645), ФЦНТП (РИ-112/001/301).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Известия РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
- [2] *Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полугораниченных телах с неоднородностями // Известия АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 71–83.
- [3] *Ватульян А.О., Ворович И.И., Соловьев А.Н.* Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // ПММ. 2000. Т.64. Вып. 3. С. 373–380.
- [4] *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Интегральные уравнения динамических задач для многослойных сред, содержащих систему трещин // ПММ. 2005. Т.69. Вып. 2. С. 345–351.
- [5] *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.

Pryakhina O.D., Smirnova A.V. *A new method for constructing Green's matrix-symbols of dynamic mixed problems for media with inhomogeneities of different nature.* The work offers a new method aimed at constructing matrix-symbols of the kernels of integral equations systems and their determinants. The method is based on the statement and solution of boundary-value problems for viruses of vibration strength with definite structure.

ГРУППЫ СИММЕТРИЙ И СИСТЕМА ОДНОМЕРНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБР ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Радаев Ю. Н., Гудков В. А.

Самарский государственный университет

В работе дан групповой анализ нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, представляющей интерес с точки зрения анализа пространственного напряженного состояния идеально пластического тела. Предполагается, что текучесть описывается критерием Треска и соответствует ребру призмы Треска. Система уравнений сформулирована относительно изостатической координатной сетки. Вычислены группы симметрий этой системы дифференциальных уравнений, естественная конечномерная алгебра симметрий и найдены одномерные оптимальные подалгебры указанной алгебры симметрий.

1. Для ребра призмы Треска, определяемого условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные нормальные напряжения; k — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия, полученные Д.Д. Ивлевым в 1959 г., можно представить в форме одного векторного уравнения (см. [1]– [3])

$$\text{grad}\sigma_3 \mp 2k\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где \mathbf{n} — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Векторное уравнение (1) является квазилинейным и принадлежит к гиперболическому типу.

Ключевым для анализа уравнения (1) выступает условие расслоенности векторного поля \mathbf{n} в зоне пластического течения. Для разрешимости уравнения (1) необходима расслоенность векторного поля \mathbf{n} , т.е. выполнение условия $\mathbf{n} \cdot \text{rot}\mathbf{n} = 0$, а с расслоенным полем естественным образом связано каноническое преобразование координат (см. [3])

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где x_i — пространственные декартовы координаты, ω^j — канонические изостатические координаты, причем поверхности $\omega^3 = \text{const}$ являются слоями векторного поля \mathbf{n} .

Отображающие функции f_i должны удовлетворять следующей существенно нелинейной системе уравнений в частных производных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = 0, \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \\ + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Левые части системы дифференциальных уравнений в частных производных (3) обозначим соответственно через E_1 , E_2 и E_3 .

Поставим задачу об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (3) будет инвариантной. Такие группы будут являться также группами симметрий этой системы. Полная группа симметрий данной системы дифференциальных уравнений — наибольшая группа преобразований, действующая на зависимые и независимые переменные и обладающая свойством переводить решения системы в другие ее решения. Группы симметрий уравнений осесимметричной задачи, представленных в сетке линий главных нормальных напряжений, исследовались в [4], [5].

2. Для решения поставленной задачи (основополагающие понятия и методы приводятся в монографиях [6], [7]) рассмотрим непрерывную однопараметрическую группу (группу Ли) преобразования зависимых и независимых переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 &= \tilde{\omega}^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = \omega^1 + \varepsilon \Xi^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\ \tilde{\omega}^2 &= \tilde{\omega}^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = \omega^2 + \varepsilon \Xi^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\ \tilde{\omega}^3 &= \tilde{\omega}^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = \omega^3 + \varepsilon \Xi^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\ \tilde{f}_1 &= \tilde{f}_1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = f_1 + \varepsilon H^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\ \tilde{f}_2 &= \tilde{f}_2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = f_2 + \varepsilon H^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\ \tilde{f}_3 &= \tilde{f}_3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = f_3 + \varepsilon H^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где ε — параметр группы преобразований.

Составим инфинитезимальный оператор группы преобразований (4)

$$\zeta \cdot \partial = \Xi^1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} + \Xi^2 \frac{\partial}{\partial \omega^2} + \Xi^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + H^1 \frac{\partial}{\partial f_1} + H^2 \frac{\partial}{\partial f_2} + H^3 \frac{\partial}{\partial f_3}, \quad (5)$$

где функции $\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, H^1, H^2, H^3$ зависят от переменных $\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3$.

Рассмотрим далее один раз продолженную группу. Инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta_1 \cdot \partial &= \Xi^1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} + \Xi^2 \frac{\partial}{\partial \omega^2} + \Xi^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + H^1 \frac{\partial}{\partial f_1} + H^2 \frac{\partial}{\partial f_2} + H^3 \frac{\partial}{\partial f_3} + \\ &+ H^1_1 \frac{\partial}{\partial p^1_1} + H^2_2 \frac{\partial}{\partial p^2_2} + H^3_3 \frac{\partial}{\partial p^3_3} + H^2_1 \frac{\partial}{\partial p^2_1} + H^2_2 \frac{\partial}{\partial p^2_2} + \\ &+ H^3_2 \frac{\partial}{\partial p^3_2} + H^3_3 \frac{\partial}{\partial p^3_3} + H^3_1 \frac{\partial}{\partial p^3_1} + H^3_2 \frac{\partial}{\partial p^3_2} + H^3_3 \frac{\partial}{\partial p^3_3}, \end{aligned} \quad (6)$$

где через p^i_j обозначены частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial \omega^j}$, а H^l_j выражаются согласно формулам первого продолжения [6, с. 58]

$$H^l_j = \frac{\partial H^l}{\partial \omega^j} + \frac{\partial f_s}{\partial \omega^j} \frac{\partial H^l}{\partial f_s} - \frac{\partial f_i}{\partial \omega^s} \left(\frac{\partial \Xi^s}{\partial \omega^j} + \frac{\partial f_r}{\partial \omega^j} \frac{\partial \Xi^s}{\partial f_r} \right) \quad (l, j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы, относительно которой уравнения (3) инвариантны, обладает тем свойством, что если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия, что сами

уравнения выполняются (т.е. $E_i = 0$), то должны получаться тождественно нулевые выражения (т.е. должны тождественно выполняться равенства $(\zeta \cdot \partial)E_i = 0$). Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального оператора и группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных, а, следовательно, и ее группы симметрий.

Можно показать, что инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \zeta \cdot \partial = & C_1(3\omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + f_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial f_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial f_3}) + C_2(\omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} - \frac{\omega^1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial \omega^2}) + \\ & + C_3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + B_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial f_2} + B_3 \frac{\partial}{\partial f_3} + A_1(f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} - f_2 \frac{\partial}{\partial f_3}) + \\ & + A_2(f_1 \frac{\partial}{\partial f_3} - f_3 \frac{\partial}{\partial f_1}) + A_3(f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} - f_1 \frac{\partial}{\partial f_2}) + \\ & + \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1} \frac{\partial}{\partial \omega^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (3) зависит от девяти произвольных постоянных и одной произвольной функции $L = L(\omega^1, \omega^2)$.

Инфинитезимальный оператор, соответствующий “конечномерной” части (8), получающейся при $L(\omega^1, \omega^2) = 0$, симметричен по переменным f_i , а по переменным ω^j нет. Более симметричная “конечномерная” форма получается, если положить $L(\omega^1, \omega^2) = C_5\omega^2 - C_6\omega^1 + C_7\omega^1\omega^2$.

Рассмотрим инфинитезимальные операторы

$$\begin{aligned} (\zeta_1 \cdot \partial) &= 3\omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + f_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial f_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial f_3}, \\ (\zeta_2 \cdot \partial) &= \omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} - \frac{\omega^1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial \omega^2}, \\ (\zeta_3 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial \omega^3}, \quad (\zeta_4 \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial f_1}, \quad (\zeta_5 \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial f_2}, \quad (\zeta_6 \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial f_3}, \\ (\zeta_7 \cdot \partial) &= f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} - f_2 \frac{\partial}{\partial f_3}, \quad (\zeta_8 \cdot \partial) = f_1 \frac{\partial}{\partial f_3} - f_3 \frac{\partial}{\partial f_1}, \\ (\zeta_9 \cdot \partial) &= f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} - f_1 \frac{\partial}{\partial f_2}, \quad (\zeta_{10} \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial \omega^1}, \quad (\zeta_{11} \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial \omega^2}, \\ (\zeta_{12} \cdot \partial) &= \omega^1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

которые, как нетрудно видеть, линейно независимы, а их линейная оболочка образует конечномерную алгебру Ли, которую мы будем называть естественной конечномерной алгеброй симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (3).

В этом списке инфинитезимальные операторы $(\zeta_4 \cdot \partial)$, $(\zeta_5 \cdot \partial)$, $(\zeta_6 \cdot \partial)$ соответствуют группам переносов вдоль декартовых осей x_1 , x_2 , x_3 ; инфинитезимальные операторы $(\zeta_7 \cdot \partial)$, $(\zeta_8 \cdot \partial)$, $(\zeta_9 \cdot \partial)$ соответствуют группам поворотов вокруг координатных осей x_1 , x_2 , x_3 ; инфинитезимальные операторы $(\zeta_3 \cdot \partial)$, $(\zeta_{10} \cdot \partial)$, $(\zeta_{11} \cdot \partial)$ соответствуют группам трансляций изостатических координат ω_1 , ω_2 , ω_3 ; инфинитезимальный оператор $(\zeta_{12} \cdot \partial)$ соответствует группе поворотов в плоскости $\omega_3 = \text{const}$;

инфинитезимальный оператор $(\varsigma_1 \cdot \partial)$ соответствует группе совместных растяжений координат ω_3, x_1, x_2, x_3 в подходящих пропорциях; инфинитезимальный оператор $(\varsigma_2 \cdot \partial)$ соответствует группе совместных растяжений–сжатий изостатических координат $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в подходящих пропорциях.

3. Оптимальная система одномерных подалгебр естественной конечномерной алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (3) есть:

$$\begin{aligned}
 & (\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_3(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_2 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) - \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
 & (\varsigma_3 \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial).
 \end{aligned} \tag{10}$$

В этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо. В каждом элементе списка один из базисных операторов $(\varsigma_j \cdot \partial)$ может быть заменен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии системы дифференциальных уравнений (3). В списке присутствуют

один инфинитезимальный оператор, зависящий от трех произвольных постоянных; 9 инфинитезимальных операторов, зависящих от двух произвольных постоянных; 41 инфинитезимальный оператор, зависящий от одной произвольной постоянной; 95 индивидуальных инфинитезимальных операторов. Все это указывает на высокую степень симметрии системы (3).

Оптимальная система (10) используется для редукции системы дифференциальных уравнений в частных производных (3) к системам, содержащим лишь две независимые переменные, которые, в свою очередь, могут быть также подвергнуты групповому анализу с целью их дальнейшей редукции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.
- [2] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102-120.
- [3] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [4] Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2004. №4(34). С. 99-111.
- [5] Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2004. С. 65-84.
- [6] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [7] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. 639 с.

Radayev Y.N., Gudkov V.A. *The symmetry groups and an optimal system of subalgebras of three-dimensional equations of the mathematical plasticity.* Group analysis of the system of partial differential equations of three-dimensional plastic equilibrium is given. The Tresca yielding criterion is employed to formulate the system to be analysed. Stress state is presumed correspond to an edge of the Tresca prism thus allowing formally consider the static equations independently on the flow rule. The system of static equilibrium equations is represented in the stress principal lines co-ordinate net (isostatic net). The symmetry groups of this system are obtained. The Lie algebra and a first order optimal system of subalgebras of the symmetry group of partial differential equations of the three-dimensional mathematical theory of plasticity are studied.

ТЕРМОУПРУГОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Саркисян С. О., Варданян С. А.

Гюмрийский государственный педагогический институт. Армения

В работе [1] на основе асимптотического подхода построена прикладная-двумерная теория микрополярных пластин и теория микрополярного погранслоя.

В данной работе на основе асимптотического метода интегрирования трехмерных взаимосвязанных уравнений несимметричной теории упругости и теплопроводности в трехмерной тонкой области пластинки построена прикладная-двумерная теория термоупругости микрополярных пластин и теория микрополярного термоупругого погранслоя. Рассматриваются две известные варианты несимметричной теории упругости: а) с независимыми полями перемещений и вращений; б) со стесненным вращением.

1. Рассмотрим изотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, как тонкое трехмерное тело (цилиндр малой высоты). Оси x_1, x_2 декартовой прямоугольной системы координат $(x_i, i = 1, 2, 3)$ отнесем к срединной плоскости пластинки. Будем исходить из основных уравнений трехмерной несимметричной теории термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений [2]:

Уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \quad (1)$$

Физические соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{jk} = (\mu + \alpha) \cdot \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \cdot \gamma_{ij} + (\lambda \cdot \gamma_{kk} - (3\lambda + 2\mu) \cdot \alpha_t \cdot \Theta) \cdot \delta_{ij}, \\ \mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \cdot \chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \cdot \chi_{ij} + \beta \cdot \chi_{kk} \cdot \delta_{ij}; \end{cases} \quad (2)$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{kij} \cdot \omega_k, \quad \chi_{ij} = \omega_{j,i}; \quad (3)$$

Уравнение стационарной теплопроводности

$$\Delta\Theta = 0. \quad (4)$$

Здесь σ_{ij} , μ_{ij} — компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{ij} , χ_{ij} — компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиб-кручения; \vec{u} — вектор перемещения; $\vec{\omega}$ — вектор независимого поворота точек тела-пластинки; Θ — функция температуры точек трехмерного тела пластинки; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — упругие константы материала пластинки; α_t — коэффициент теплового расширения материала пластинки.

На лицевых плоскостях $x_3 = \pm h$ пластинки считаются заданными силовые и моментные напряжения и температура:

$$\sigma_{3i} = p_i^\pm, \quad \mu_{3i} = m_i^\pm \quad (i = 1, 2, 3), \quad \Theta = T^\pm \quad \text{при } x_3 = \pm h \quad (5)$$

где p_i^\pm, m_i^\pm ($i = 1, 2, 3$) — компоненты внешних заданных усилий и моментов, а T^\pm — значения температуры на лицевых плоскостях пластинки.

На боковой поверхности пластинки Σ могут быть заданными граничные условия несимметричной теории упругости:

$$\text{при первой граничной задаче: } \sigma_{ji}n_j = p_i^*, \mu_{ji}n_j = m_i^*, \text{ на } \Sigma(i, j = 1, 2, 3); \quad (6)$$

Для температурного поля может быть задана либо температура, либо граничное условие второго рода, либо граничное условие типа теплообмена (для определенности далее примем, что на Σ также, задана температура). Решение поставленной задачи складывается из суммы решений симметричной по x_3 (плоское напряженное состояние) и обратно-симметричной (изгиб) задач. Для решения поставленной задачи будем применять асимптотический метод [1] интегрирования сингулярно-возмущенной системы трехмерных уравнений и граничных условий несимметричной теории термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений.

В уравнениях (1)-(4), выполняя следующую замену переменных

$$x_1 = a\xi, \quad x_2 = a\eta, \quad x_3 = h\zeta \quad (7)$$

где a — характерный размер в плане пластинки ($2h \ll a$, $\delta = h/a$ — малый геометрический параметр) вместо системы уравнений (1)-(2), получим систему уравнений с малым параметром δ . Решение такой системы уравнений складывается из проникающего (внутреннего) решения и решения типа погранслоя. Рассмотрим задачу изгиба.

Решение внутренней задачи ищем в виде асимптотического разложения

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^S \delta^s Q^{(s)}, \quad (8)$$

где Q — любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений, поворотов, а также, температура; q -натуральное число, которое различно для различных указанных величин и определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений. В случае задачи изгиба (обратно-симметричная по ζ задача) будем иметь:

$$\begin{cases} q = 2 \text{ для } \sigma_{11}^t, \sigma_{22}^t, \Theta; & q = 0 \text{ для } \sigma_{11}^c, \sigma_{22}^c, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, u_i (i = 1, 2), \omega_3; \\ q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, u_3, \omega_1, \omega_2, \mu_{mn} (mn : 11, 22, 33, 12, 21). \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\sigma_{11}^c, \sigma_{22}^c$ — чисто силовые составляющие, $\sigma_{11}^t, \sigma_{22}^t$ — чисто температурные составляющие указанных силовых напряжений. При этом для безразмерных упругих моментных констант приняты следующие асимптотические соотношения:

$$\frac{\gamma}{a^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{a^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\mu}{\alpha} \sim 1. \quad (10)$$

Подставляя (7) в сингулярно-возмущенную малым параметром δ систему уравнений (1)-(2), с учетом (8) и (9), и приравнявая в каждом уравнении к нулю коэффициенты при всех степенях δ , начиная с самого низкого, получим систему

уравнений, которая в асимптотических приближениях “ s ” допускает интегрирование по ζ , поэтому в описании напряженно-деформированного состояния внутренней задачи остается выяснить роль переменных (ξ, η) , задающих положение точки на срединной плоскости пластинки. С этой точки зрения целесообразно введение вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия и моменты [1].

Приведем определяющую систему уравнений исходного асимптотического приближения, т.е. общей прикладной-двумерной теории изгиба микрополярных термоупругих тонких пластин по несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -(p_3^+ + p_3^-) + \frac{1}{2}\nabla^2 M_T, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + N_{23} - N_{32} = -(m_1^+ + m_1^-), \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + N_{31} - N_{13} = -(m_2^+ + m_2^-); \end{cases} \quad (11)$$

Соотношения упругости

$$\begin{cases} N_{i3} = 2h((\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}) & (i = 1, 2; i \leftrightarrow 3), \\ L_{ii} = 2h(2\gamma k_{ii} + \beta(k_{11} + k_{22} + k_{33})) & (i = 1, 2, 3), \\ L_{12} = 2h((\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}) & (1 \leftrightarrow 2); \end{cases} \quad (12)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \quad k_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} N_{31} &= h(p_1^+ - p_1^-) + \frac{3}{2} \frac{\partial M_T}{\partial x_1} \quad (1 \rightarrow 2); \\ M_T &= -\frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t (T^+ - T^-), \quad L_{33} = h(m_3^+ - m_3^-). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь, N_{13}, N_{23} — перерезывающие усилия; $L_{11}, L_{22}, L_{21}, L_{12}$ — осредненные по толщине моменты моментного происхождения; Γ_{13}, Γ_{23} — сдвиговые деформации в точках срединной плоскости пластинки; $k_{11}, k_{22}, k_{21}, k_{12}$ — изгибно-крутильные деформации в точках срединной плоскости пластинки; w — прогиб в точках срединной плоскости пластинки; Ω_1, Ω_2 — независимые повороты точек срединной плоскости пластинки вокруг осей x_1, x_2 . Отметим, что в исходном асимптотическом приближении температура по толщине пластинки распределена линейным образом. Вблизи боковой цилиндрической поверхности пластинки возникает напряженное состояние погранслоя [1] по несимметричной теории термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений, которое резко затухает при удалении от нее вглубь тела трехмерной пластинки. В случае рассматриваемой задачи показывается, что существуют силовые (плоское и антиплоское), моментные (плоское и антиплоское) и температурное погранслои. Метод сращивания внутренней задачи и погранслоев дает возможность удовлетворить трехмерным граничным условиям на боковой поверхности пластинки Σ — (4) и установить граничные

условия как для внутренней задачи, так и для каждой из микрополярных пограничных. Когда на боковой поверхности пластинки заданы граничные условия первой граничной задачи несимметричной теории термоупругости (4), тогда граничные условия для прикладной-двумерной теории получаются в виде

$$N_{13}|_{\Sigma} = \int_{-h}^h p_3^* dx_3, \quad L_{11}|_{\Sigma} = \int_{-h}^h m_1^* dx_3, \quad L_{12}|_{\Sigma} = \int_{-h}^h m_2^* dx_3 - M_T|_{\Sigma}, \quad (15)$$

2. Рассмотрим теперь пластинку на основе несимметричной теории термоупругости со стесненным вращением. Будем исходить из основных уравнений пространственной задачи несимметричной теории термоупругости со стесненным вращением [2]:

Уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0; \quad (16)$$

Соотношения термоупругости

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) = 2\mu\gamma_{ij} + (\lambda\gamma_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_t\Theta)\delta_{ij}, \quad \mu_{ji} = (\gamma + \epsilon)\chi_{ji} + (\gamma - \epsilon)\chi_{ij}; \quad (17)$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \chi_{ij} = \omega_{j,i}, \quad \omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}u_{k,j}; \quad (18)$$

а также, уравнение стационарной теплопроводности — (4).

К уравнениям будем присоединять граничные условия несимметричной теории упругости со стесненным вращением на лицевых плоскостях и на боковой цилиндрической поверхности пластинки [2].

Рассмотрим задачу изгиба. Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения (7). Получим рекуррентную систему уравнений в асимптотических приближениях, если асимптотика поставленной задачи будет:

$$\begin{cases} q = 3 \text{ для } u_3, \omega_1, \omega_2, & q = 2 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, u_1, u_2, \omega_3, \Theta, \\ q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \mu_{mn} (mn : 11, 22, 33, 12, 21), & q = 0 \text{ для } \sigma_{33}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, \end{cases} \quad (19)$$

При этом, на этот раз, для безразмерных упругих моментных констант приняты следующие асимптотические соотношения

$$\frac{\gamma}{a^2\mu} \sim \delta^2\bar{\gamma}, \quad \frac{\epsilon}{a^2\mu} \sim \delta^2\bar{\epsilon}, \quad \text{где } \bar{\gamma} \sim 1, \quad \bar{\epsilon} \sim 1 \quad (20)$$

Переходя к интегральным характеристикам можем разрешающую систему уравнений исходного асимптотического приближения представить в следующем виде:

Уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -(p_3^+ + p_3^-), \\ \frac{\partial(L_{11}-M_{12})}{\partial x_1} + \frac{\partial(L_{21}-M_{22})}{\partial x_2} + N_{23} = -(m_1^+ + m_1^-) + h(p_2^+ + p_2^-), \\ \frac{\partial(L_{12}-M_{11})}{\partial x_1} + \frac{\partial(L_{22}-M_{21})}{\partial x_2} - N_{13} = -(m_2^+ + m_2^-) - h(p_1^+ + p_1^-); \end{cases} \quad (21)$$

Физико-геометрические соотношения

$$\begin{cases} M_{11} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t (T^+ - T^-) \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ H = -\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L_{11} = -L_{22} = 4h\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ L_{12} = (-1)^1 (2h(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2h(\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}) \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{cases} \quad (22)$$

Отметим, что из уравнений (21) и (22) приходим к следующему разрешающему уравнению относительно w :

$$\begin{aligned} D^* \nabla^2 \nabla^2 w = 2(p_3^+ + p_3^-) + 2h \left(\frac{\partial(p_1^+ - p_1^-)}{\partial x_1} + \frac{\partial(p_2^+ - p_2^-)}{\partial x_2} \right) + \\ + 2 \left(\frac{\partial(m_1^+ + m_1^-)}{\partial x_1} - \frac{\partial(m_2^+ - m_2^-)}{\partial x_2} \right) + \nabla^2 M_T, \quad \text{где } D^* = 2h(\gamma + \varepsilon) + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для первой граничной задачи несимметричной теории термоупругости со стесненным вращением граничные условия внутренней задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} (N_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} (H - L_{11}))|_{\Sigma} = \int_{-h}^h (p_3^* +) \frac{\partial}{\partial x_2} (x_3 p_2^* - m_1^*) dx_3, \\ (L_{12} + M_{11})|_{\Sigma} = \int_{-h}^h (x_3 p_1^* + m_2^*) dx_3; \end{aligned} \quad (24)$$

Система уравнений (21), (22) (или уравнение (23)) и граничные условия (24) представляют собой математическую модель термоупругого изгиба тонких пластин, когда в основе имеем трехмерную несимметричную теорию термоупругости со стесненным вращением.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Sargsyan S.H.* On Some Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity// Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol. 16./ Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Springer. 2004. P.201-210.
- [2] *Nowacki W.* Couple Stress in the Theory of Thermoelasticity. Bull. Acad. Polon. Sci. Serie. Sci. Techn.3, 14 (1966)97.

Sargsyan S.H., Vardanyan S.A. *Thermoelasticity of Micropolar Thin Plates.* In the present work the applied two-dimensional theory of thermoelasticity of micropolar plates and the theory of micropolar thermoelastic boundary layer are constructed on the basis of an asymptotic method of integration of three-dimensional interconnected equations of the asymmetric theory of elasticity and thermoelasticity in three-dimensional thin sphere of a plate. Two well-known variants of asymmetric theory of elasticity are considered: a) with the independent fields of displacements and rotations; b) with the constraint rotation.

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Сафроненко В. Г., Трифонов В. В., Шутько В. М.

*Ростовский госуниверситет,
НИИ механики и прикладной математики*

Исследованы несимметричные вынужденные колебания составной конусоцилиндрической оболочки из полимерного композитного материала. Численно определены амплитудно-частотные характеристики, формы колебаний и координаты точек поверхности, в которых поперечные прогибы имеют максимальные значения.

Современные оболочечные конструкции имеют, как правило, геометрически сложный характер и могут быть составлены из секций, представляющих собой различные оболочки вращения. В дальнейшем для исследования процесса распространения стационарных колебаний в волокнисто-слоистой оболочке вращения используем теорию типа Тимошенко, в соответствии с которой кинематические и деформационные соотношения имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}U(\alpha_1, \alpha_2, z) &= u(\alpha_1, \alpha_2) + z\phi_1(\alpha_1, \alpha_2); & V(\alpha_1, \alpha_2, z) &= v(\alpha_1, \alpha_2) + z\phi_2(\alpha_1, \alpha_2); \\W(\alpha_1, \alpha_2, z) &= w(\alpha_1, \alpha_2); \\ \varepsilon_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= E_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{ij}(\alpha_1, \alpha_2); & \varepsilon_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= E_{i3}(\alpha_1, \alpha_2); \\ \varepsilon_{33}(\alpha_1, \alpha_2, z) &= 0; & (i, j = 1, 2).\end{aligned}\tag{1}$$

Где E_{ii} , E_{12} , E_{i3} , K_{ii} , K_{12} - соответственно деформации растяжения-сжатия, тангенциального и поперечного сдвига, изменения кривизн и кручения.

$$\begin{aligned}E_{11} &= u' + k_1w; & E_{22} &= v^\bullet + u\psi + k_2w; & E_{12} &= u' + u^\bullet - v\psi; \\K_{11} &= \phi_1'; & K_{22} &= \phi_2 + \phi_1\psi; & K_{12} &= \phi_2' - \phi_2\psi + \phi_1^\bullet; \\E_{13} &= \phi_1 - \theta_1; & E_{23} &= \phi_2 - \theta_2; & \theta_1 &= -w' + uk_1; & \theta_2 &= -w^\bullet + vk_2; \\ \varepsilon_1 &= h_*/R_*, & \psi &= A_2'/A_2, & (..)' &= (..)_{,\alpha_1}/A_1, & (..)^\bullet &= (..)_{,\alpha_2}/A_2.\end{aligned}\tag{2}$$

Уравнения гармонических колебаний, полученные из вариационного принципа Гамильтона для оболочки вращения, в общепринятых обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned}T'_{11} + \psi(T_{11} - T_{22}) + S^\bullet + k_1Q_{11} + \omega^2(bu + c\phi_1) + p_1 &= 0; \\S' + 2\psi S + T_{22}^\bullet + k_2Q_{22} + \omega^2(bv + c\phi_2) + p_2 &= 0; \\Q'_{11} + \psi Q_{11} + Q_{22}^\bullet - k_1T_{11} - k_2T_{22} + \omega^2bw + p_3 &= 0; \\M'_{11} + \psi(M_{11} - M_{22}) + H^\bullet - Q_{11} + \omega^2(cu + d\phi_1) &= 0; \\H' + 2\psi H + M_{22}^\bullet - Q_{22} + \omega^2(cv + d\phi_2) &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Для составных оболочек вращения должны выполняться условия сопряжения соседних секций, [2].

$$\begin{aligned}
T_{11}^+ &= Q_1^- \cos \gamma^+ + T_3^- \sin \gamma^+; & S^+ &= S^-; & M_{11}^+ &= M_{11}^-; \\
Q_{11}^+ &= Q_1^- \sin \gamma^+ - T_3^- \cos \gamma^+; & H^+ &= H^- \sin \gamma^- / \sin \gamma^+; \\
u^+ &= u_1^- \cos \gamma^- + u_3^- \sin \gamma^-; & v^+ &= v^-; & \phi_1^+ &= \phi_1^-; \\
w^+ &= u_1^- \sin \gamma^- - u_3^- \cos \gamma^-; & \phi_2^+ &= \psi_2^- \sin \gamma^- - \psi_1^- \cos \gamma^-; \\
u_1^- &= u^- \cos \gamma^- + w^- \sin \gamma^-; & u_3^- &= u^- \sin \gamma^- - w^- \cos \gamma^-; \\
Q_1^- &= T_{11}^- \cos \gamma^- + Q_{11}^- \sin \gamma^-; & T_3^- &= T_{11}^- \sin \gamma^- - Q_{11}^- \cos \gamma^-; \\
\psi_1 &= \phi_2^- \cos \gamma^-; & \psi_2 &= \phi_2^- \sin \gamma^-.
\end{aligned} \tag{4}$$

Эффективные физико-механические характеристики композита определяются по свойствам составляющих его изотропных компонент, в данном случае упругого высокомодульного волокна (E_f, ν_{12f}, G_f, V_f) и полимерной матрицы, термовязкоупругие свойства которой для случая малых колебаний определяются через вязкоупругие аналоги модуля Юнга, коэффициент Пуассона и модуля сдвига ($E_m, \nu_{12m}, G_m, V_m = 1 - V_f$). Для слоя композита с укладкой волокон вдоль оси симметрии (угол намотки $\beta = 0$) эффективные характеристики представлены в работе [3,4]:

Продольный модуль: $E_1^k = E_f V_f + E_m V_m$;

Поперечный модуль: $E_2^k = \frac{e E_1^k}{(V_f + e V_m)(V_m + e V_f) - (e \nu_f - \nu_m)^2 V_f V_m}$;

Модуль сдвига: $G_{12}^k = \frac{g(1+V_f)+V_m}{g V_m + 1 + V_f} G_f$; Модуль изгиба: $G_{23}^k = \frac{g G_m}{g V_m + V_f}$;

Коэффициент Пуассона: $\nu_1^k = \nu_f V_f + \nu_m V_m$; где $e = \frac{E_f}{E_m}$, $g = \frac{G_f}{G_m}$.

Определяющие соотношения для усилий и моментов, записываются в виде:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= B_{11} E_{11} + B_{12} E_{22} + A_{11} K_{11} + A_{12} K_{22} + 2L_{16} E_{12} + 2N_{16} K_{12}; \\
T_{22} &= B_{12} E_{11} + B_{22} E_{22} + A_{12} K_{11} + A_{22} K_{22} + 2L_{26} E_{12} + 2N_{26} K_{12}; \\
S &= B_{33} E_{12} + 2A_{33} K_{12} + L_{16} E_{11} + N_{16} K_{11} + L_{26} E_{22} + N_{26} K_{22}; \\
M_{11} &= A_{11} E_{11} + A_{12} E_{22} + D_{11} K_{11} + D_{12} K_{22} + 2N_{16} E_{12} + 2R_{16} K_{12}; \\
M_{22} &= A_{12} E_{11} + A_{22} E_{22} + D_{12} K_{11} + D_{22} K_{22} + 2N_{26} E_{12} + 2R_{26} K_{12}; \\
H &= A_{33} E_{12} + 2D_{33} K_{12} + N_{16} E_{11} + R_{16} K_{11} + N_{26} E_{22} + R_{26} K_{22}; \\
Q_{11} &= J_{13} E_{13} + J_{45} E_{23}; & Q_{22} &= J_{23} E_{23} + J_{45} E_{13}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} – комплекснозначные жесткости определяемые по формулам:

$$B_{ij} = h \sum_{k=1}^m C_{ij}^k, \quad A_{ij} = h \sum_{k=1}^m C_{ij}^k z_k, \quad D_{ij} = h \sum_{k=1}^m C_{ij}^k z_k^2; \quad i, j = 1, 2$$

$$B_{33} = h \sum_{k=1}^m C_{66}^k, \quad A_{33} = h \sum_{k=1}^m C_{66}^k z_k, \quad D_{33} = h \sum_{k=1}^m C_{66}^k z_k^2;$$

$$G_{13} = h \sum_{k=1}^m C_{55}^k; \quad G_{23} = h \sum_{k=1}^m C_{44}^k;$$

где m – кол-во слоев в композитном материале; z_k – координата центра тяжести сечения слоя.

Уравнения состояния материала полимерной матрицы соответствуют модели термовязкоупругого тела. Компоненты комплексной податливости при сдвиге I' , I'' при отсутствии объемной релаксации, в обозначениях [5] имеют вид:

$$I'(\omega, T) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)}{G(r, \nu, T)} \left[1 - H(r) \frac{\omega^2}{\varphi(r, \nu, T)^2 + \omega^2} \right] dr$$

$$I''(\omega, T) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)H(r)}{G(r, \nu, T)} \frac{\varphi(r, \nu, T)\omega}{\varphi(r, \nu, T)^2 + \omega^2} dr \quad (6)$$

Граничные условия на торцах оболочки соответствуют жесткому закреплению.

Для численного исследования используется подход связанный с модальным представлением искомых функций в виде разложения по окружной координате в виде рядов Фурье:

$$X(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=0}^N (X_{+n}(\alpha_1) \cos(n\alpha_2) + X_{-n}(\alpha_1) \sin(n\alpha_2)) \quad (7)$$

После отделения окружной координаты и приведения всех соотношений к безразмерному виду, формируется комплекснозначная система нормального вида 20-го порядка, решаемая методом ортогональной прогонки.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания композитной оболочки, состоящей из двух секций. Первая секция имеет цилиндрическую форму, а вторая секция, сопряженная с ней – коническую. Условия закрепления между секциями и на торцах конструкции будет считать жесткими. Нагрузка на поверхности оболочки расположена несимметрично, по схеме представленной на рис. 1.

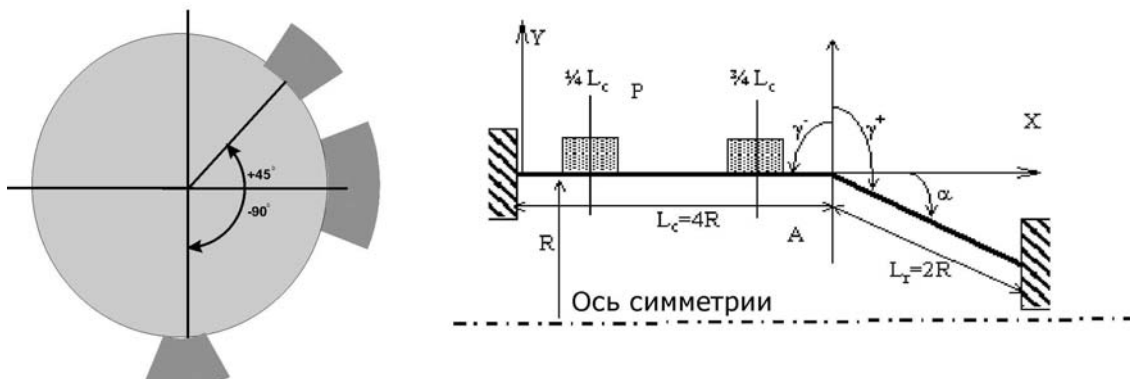


Рис. 1. Схемы нагружения составной оболочки

Геометрические параметры цилиндрической секции: $A_1 = 1$, $A_2 = R$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$, $\psi = 0$, $L_c = 4R$. Сопряженная конусная секция: $A_1 = 1$, $A_2 = 1 - (X - L_c) \sin \alpha$, $k_1 = 0$, $k_2 = \cos \alpha / A_2$, $\psi = \sin \alpha / A_2$, $L_k = 2R$, $\alpha = 25^\circ$.

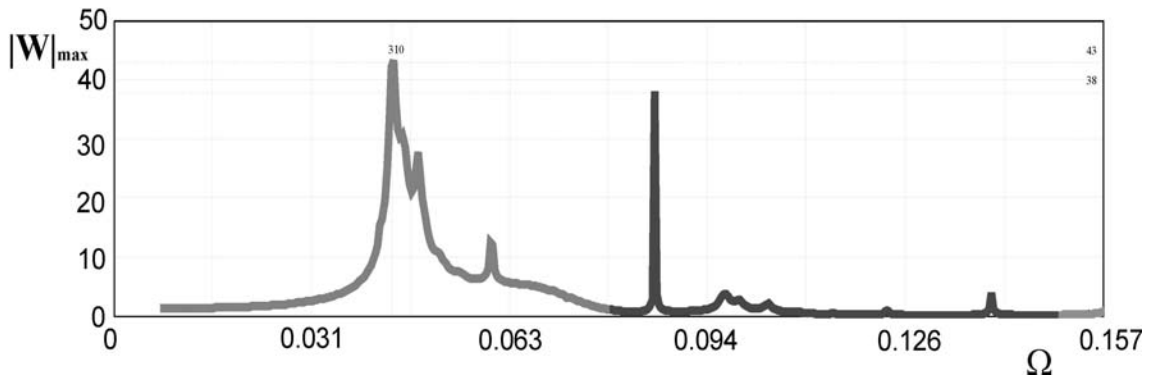


Рис. 2. АЧХ составной оболочки

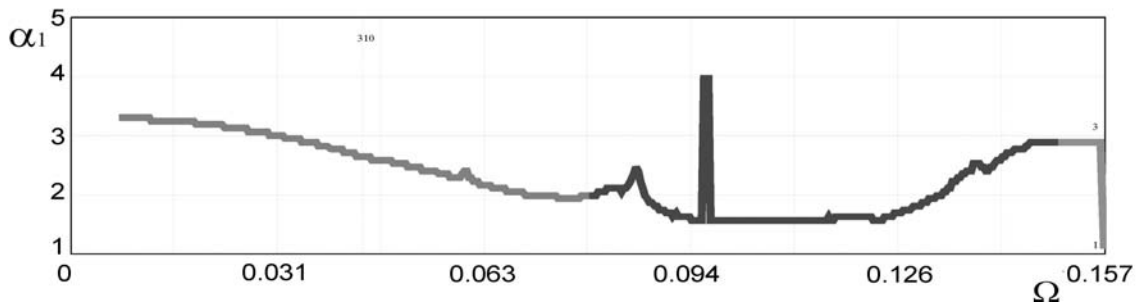


Рис. 3. Координата α_2 для $|W|_{max}$

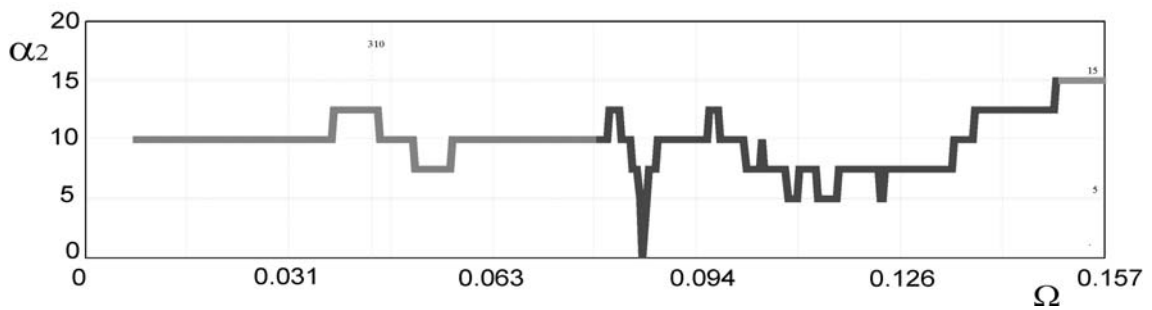


Рис. 4. Координата α_1 для $|W|_{max}$

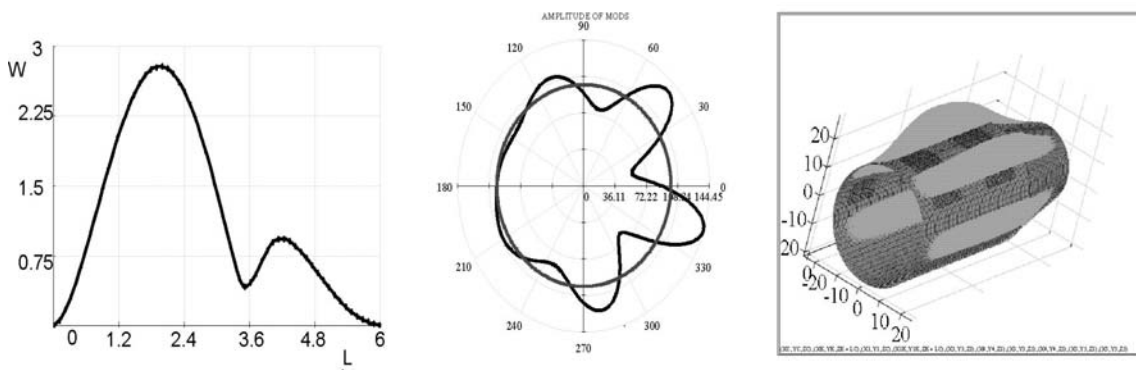


Рис. 5. Эпюры составной оболочки

Рассмотрен вариант 5-слоеного композита с укладкой волокон вдоль образующей ($\beta = 0^0$) и с объемным содержанием волокна $V_f = 0.8$. Задача решена при комнатной температуре $T=290$ К и амплитудой нагружения $P = 10$ КПа. При численном решении задачи был реализован алгоритм нахождения на каждой частоте точек с наибольшим поперечным прогибом $|W|_{max}$. На рис. 2 представлена суммарная амплитудно-частотная характеристика $|W|_{max}$. На рис. 3,4 даются координаты точек наибольшего прогиба (α_1, α_2). Формы вынужденных колебаний конструкции рассчитанные на первой резонансной частоте $\Omega = 0,044$ в продольном и поперечном сечениях, проходящих через точку наибольшего прогиба, а также трехмерное изображение деформированной конструкции представлены на рис. 5. Для визуализации результатов расчетов использовался пакет Matcad 2000 Professional.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №04-01-96806р 2004юг и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. // Москва: Машиностроение, 1988. С. 79–90.
- [2] Сафроненко В.Г., Юдин А.С. Модальные уравнения вибродинамики композитных структурно-неоднородных оболочек // Тр. IV Междунар. конф., г. Ростов-на-Дону. 27-28 окт. Изд-во СКНЦ ВШ. 1999.
- [3] Малмайстер А.К., Таммуэ В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. // Рига: Зинатне, 1980. 573 с.
- [4] Ван Фо Фы Г.А. Теория армированных материалов. // Киев: Наукова думка, 1971. 232 с.
- [5] Степаненко Ю.П., Исаева К.В., Азаров А.Д. Моделирование термомеханического поведения полимерных материалов // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. II Международной конференции г. Ростов-на-Дону, 19-20 сентября 1996г. Ростов-на-Дону: МП "Книга 1997. Т. 1. С. 118–123.

Safronenko V.G., Trifonov V.V., Shutko V.M. *Nonsymmetric forced oscillations of a combined composite shell of rotation.*

Nonsymmetric forced oscillations of a combined conus-cylindrical polymeric composite shell is studied. Amplitude-frequency characteristics, forms of vibration and coordinates of points on the surface at which transverse displacements have their maximum values are numerically defined.

РАСЧЕТ ДВУМЕРНОГО ПОЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ КЕРАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

Скалиух А. С.

Ростовский госуниверситет, Ростов-на-Дону

С использованием пакета ACELAN решена осесимметричная задача определения остаточной поляризации пьезокерамических образцов на основе квазистатического подхода и одной вспомогательной модели диэлектрического отклика.

Введение. В рамках квазистатического подхода на основе теории приращений решается задача определения поля неоднородной остаточной поляризации в пьезокерамическом образце произвольной формы в осесимметричной постановке. В отличие от положений математической теории пластического течения [1], предложен подход, описывающий приращения проекций вектора остаточной поляризации в локальных осях с использованием вспомогательной модели одномерного диэлектрического отклика. Численная реализация осуществляется с помощью конечно-элементного комплекса ACELAN.

Постановка задачи.

Физическая постановка. Пусть область Ω заполнена "чистой" или поляризованной по известному закону керамикой. На поверхности $S = S_\sigma \cup S_u = S_D \cup S_\phi$ задаются механические и электрические граничные условия: на S_σ – вектор механических напряжений $\mathbf{p}_*(t)$, на S_u – вектор перемещений $\mathbf{u}_*(t)$, на S_D – нормальная составляющая электрической индукции $D_*(t)$ и на S_ϕ – электрический потенциал $\phi_*(t)$. Требуется после снятия электрических и механических нагрузок определить поле остаточной поляризации и деформации внутри образца.

Математическая постановка включает в себя

- представление процесса во времени последовательностью равновесных состояний $C^{(i)}$ (квазистатический подход, эквивалентный применению разностной схемы по времени);

- принцип возможной работы для каждого $C^{(i)}$

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E}) d\Omega - \int_{S_\sigma} \mathbf{P}_* \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_{S_D} D_* \delta \phi dS = 0;$$

- уравнения Максвелла для диэлектриков для каждого $C^{(i)}$

$$\nabla \mathbf{E} = 0, \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P};$$

- геометрические соотношения "деформации-перемещения" и "электрическое поле - электрический потенциал" для каждого $C^{(i)}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \mathbf{E} = -\nabla \phi;$$

– определяющие соотношения, которые формально можно записать в операторном виде для каждого $C^{(i)}$

$$\sigma = f_{\sigma}(\varepsilon, \mathbf{E}), \mathbf{P} = f_p(\varepsilon, \mathbf{E}).$$

Здесь $\sigma, \varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{p}_*, D_*, \phi, \mathbf{P}, \varepsilon_0$ – тензор механических напряжений, тензор деформаций, вектор объемных сил, вектор перемещений, вектор электрической индукции, вектор электрического поля, вектор напряжений внешних механических воздействий, нормальная составляющая электрической индукции, электрический потенциал, вектор поляризации и диэлектрическая проницаемость соответственно. Интегральное равенство рассматривается в классе функций один раз непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих главным граничным условиям. Задача заключается в определении неизвестных векторных и тензорных полей, удовлетворяющих этим уравнениям.

Метод решения. Общий алгоритм решения задачи был изложен в работе [2]. В основе метода лежат следующие положения: а) используется инкрементальная теория (дискретизация по времени, пошаговое определение приращений переменных); б) проводится разделение вектора поляризации и тензора деформации на обратимые и необратимые части; в) используется принцип возможной работы при переходе от одного состояния к другому (метод конечных элементов, дискретизация по пространственным координатам); отдельно формулируются определяющие соотношения как для приращений обратимых, так и необратимых составляющих. Формально определяющие соотношения для приращений обратимых составляющих получаются из разложения термодинамической функции электрического потенциала Гиббса в окрестности $C^{(i)}$ состояния и вводятся дополнительные предположения о локальной анизотропии материала (все материальные константы определяются с помощью вектора остаточной поляризации на $C^{(i)}$ состоянии). Для построения определяющих соотношений приращений необратимых составляющих вектора поляризации использован прямой подход, опирающийся на вспомогательную модель, описывающую одноосные эксперименты диэлектрического отклика при изменении электрического поля. Приращения остаточных деформаций находятся из условия растяжения вдоль направления вектора поляризации и сужения в перпендикулярных направлениях, с использованием условия несжимаемости. Отметим отличительные особенности этого подхода от теории пластичности. В теории пластичности невозможно исследовать зависимость каждой компоненты тензора приращений пластических деформаций от компонент тензора напряжений. Поэтому вводится одна или несколько поверхностей нагружения; используется постулат Друккера и постулируется зависимость интенсивности напряжений от интенсивности приращений пластических деформаций (все это позволяет сформулировать ассоциированный закон течения, связывающий тензор напряжений с тензором приращений пластических деформаций с помощью одного скаляра и использовать данные одноосных экспериментов). В теории поляризации, если рассматривать ее для малых внешних механических нагрузок (не зажатые образцы), можно, опираясь на экспериментальные данные, непосредственно построить зависимости приращений компонент остаточной поляризации от компонент электрического поля. Для этого вводится следующая гипотеза: *если работа внешних сил электрического поля превалирует над работой внешних механических нагрузок,*

то необратимый процесс поляризации электрическим полем в каждой точке эквивалентен процессу поляризации одномерного образца однородным электрическим полем. Эта гипотеза позволяет для осесимметричных и плоских задач в каждом конкретном состоянии в любой точке области ввести локальные оси, одна из которых направлена по электрическому полю, а другая ему перпендикулярна, и рассмотреть приращение остаточного вектора поляризации по каждой из осей, используя для этого экспериментальные данные одноосного отклика поляризации на действие электрического поля. Основная трудность этого подхода кроется в том, что надо знать приращения поляризации по приращению электрического поля, для любых начальных значений поляризации и электрического поля. Эту трудность удается обойти, если воспользоваться вспомогательной аналитической моделью для описания зависимости приращения полной, индуцированной и остаточной поляризации. При одноосных испытаниях, например, на дисковых образцах найдено [3], что в общем случае имеется три зоны изменения поля и поляризации, где диэлектрический отклик достаточно хорошо исследован, но имеет принципиально различный характер поведения: 1) зона малых значений поля и малой поляризации – линейная зависимость; 2) зона средних значений поля и поляризации – квадратичная нелинейная зависимость Рэлея (малая петля гистерезиса); 3) зона больших значений поля и поляризации насыщения – зависимость развернутой петли гистерезиса.

В настоящей работе на основе результатов работы [4] была использована единая модель, которая с определенной степенью точности дает зависимость приращения поляризации от приращения электрического поля в любой из перечисленных зон. Эта модель описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dE} = c \frac{dP_{an}}{dE} + \tilde{\delta} \frac{P_{an} - P}{\delta k - \frac{a}{1-c}(P_{an} - P)},$$

где

$$P_{an} = P_S \left[\operatorname{cth} \frac{E_e}{a} - \frac{a}{E_e} \right], \quad E_e = E + \alpha P.$$

$$P = P_e + P_0, \quad P_e = \frac{c}{c-1}(P_{an} - P_0), \quad \frac{dP_0}{dE} = \frac{1}{k\delta}(P_{an} - P_0).$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & dE > 0 \\ 0, & dE < 0 \end{cases}, \quad \tilde{\delta} = \begin{cases} 0, & dE > 0 \cap P > P_{an} \cup dE < 0 \cap P < P_{an} \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Данная модель имеет пять параметров a, c, k, α, P_S , которые выбираются из условия, чтобы расчетная петля совпадала с экспериментальной. Каждый из параметров отвечает за определенное поведение петли, например, ее расширение, наклон, удлинение и т.д. Подбор этих параметров производится на основе метода наименьших квадратов, когда в качестве целевой функции выбирается квадратичные отклонения в нескольких точках значений петли, полученных из решения уравнения, и снятых экспериментально. Расчеты показали, что эта модель прекрасно аппроксимирует насыщенную петлю гистерезиса (т.е. в третьей зоне), но во второй зоне, когда параметры уже выбраны, эта аппроксимация все же имеет значительные отклонения от экспериментальных данных.

Покажем, как используется эта модель при решении исходной задачи о поляризации. Ее применение необходимо только при построении приращений компонент вектора остаточной поляризации на $C^{(i)}$ состоянии. На каждом конечном элементе известен вектор остаточной поляризации из предыдущего состояния и известно значение электрического поля этого и предыдущего состояний. Вводим локальную систему, одна из осей которой совпадает с направлением поля на $C^{(i)}$ состоянии. И далее работаем в локальных осях. Для подсчета приращения продольной составляющей поляризации вдоль электрического поля непосредственно интегрируем уравнение при известных начальных значениях до конечного значения электрического поля. Поперечная составляющая поляризации должна уменьшаться в силу того, что суммарная поляризация в представительном объеме не изменяется. Но из экспериментов известно, что если керамика имеет начальную поляризацию перпендикулярно прикладываемому полю, то диэлектрический отклик почти полностью совпадает с начальной кривой неполяризованной керамики (за счет поворотов 90 градусных доменов). Это позволяет вновь использовать вышеизложенную модель, но только уменьшающуюся часть поляризации находить из решения дифференциального уравнения, если в качестве начального значения поля взять нулевое его значение.

Интегрирование уравнения осуществляется численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Теперь соответствующие приращения записываются в виде:

$$\Delta P_{E_{\parallel}}^{(i-1)} = \int_{E^{(i-1)}}^{E^{(i)}} F(E^{(i-1)}, P_{E_{\parallel}}^{(i-1)}) dE,$$

$$\Delta P_{E_{\perp}}^{(i-1)} = \int_0^{E^{(i)}} F(E^{(i-1)}, P_{E_{\perp}}^{(i-1)}) dE.$$

Далее осуществляется переход к глобальным осям. Остаточные деформации по найденному вектору поляризации на каждом элементе находятся по формулам

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(i)} = \frac{\varepsilon_S P^{(i)}}{3} (-\mathbf{e}_1^{(i)} \otimes \mathbf{e}_1^{(i)} - \mathbf{e}_2^{(i)} \otimes \mathbf{e}_2^{(i)} + 2\mathbf{e}_3^{(i)} \otimes \mathbf{e}_3^{(i)}),$$

где ε_S – остаточная деформация насыщения, определяемая экспериментально, направление $\mathbf{e}_3^{(i)}$ совпадает с направлением вектора остаточной поляризации на элементе, вдоль него остаточная деформация будет растягивающей. Тогда приращение остаточных деформаций определяется простой разностью

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(i-1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(i-1)}$$

Найденные приращения остаточных параметров дают поправки правой части получаемой из метода конечных элементов системы линейных алгебраических уравнений. После ее решения осуществляется переход к новому состоянию. Только после достижения конечного состояния можно найти окончательные значения остаточного вектора поляризации и тензора деформации. Ниже, на рисунке, изображено поле остаточной поляризации одного из типов осесимметричных датчиков

неразрушающего контроля (показана половина сечения). Найденное поле остаточной поляризации позволяет рассчитать характеристики локально анизотропного материала и провести, например, модальный или гармонический анализ пьезокерамического элемента.

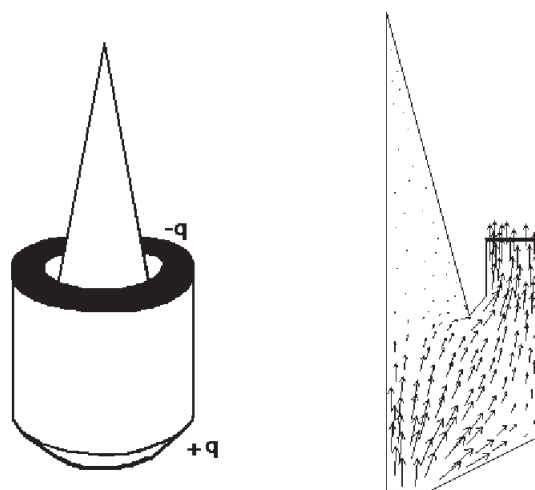


Рис. 1. Общий вид преобразователя и распределение в нем (показана половина сечения) поля остаточной поляризации

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант 05-01-00752-а и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев: Наук. Думка, 1981. 496 с.
- [2] Скалмух А.С. Об одном алгоритме процесса поляризации сегнетоэлектрических керамик // Теор. и прикл. Мех., 2003, вып. 38, С. 20-28.
- [3] Hall D.A. Review. Nonlinearity in piezoelectric ceramics // Journal of materials science. 2001. Vol. 36, pp. 4575-4601.
- [4] Smith R.C., Hom C.L. A domain wall model for ferroelectric hysteresis // Conference on Mathematics and Control in Smart Structures, SPIE, V. 3667, Newport Beach, CA, March 1-4, 1999, pp. 150-161.

Skaliukh A.S. *The account of two-dimensional field of preliminary polarization of ceramics with use of one-dimensional model dielectrics response.* With the use of package ACELAN the task of definition of residual polarization piezoceramics samples is solved on the basis quazistatics approach with use of auxiliary model dielectric response in osesymmetric case.

ДИАБАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСШИРЕНИЯ ГАЗОВОГО ОБЛАКА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ РАДИАЦИОННОГО ПРИТОКА ТЕПЛА

Снопов А. И.

Ростовский госуниверситет

Предложена одномерная диабатическая модель расширения газового облака под воздействием определенного вида радиационного притока тепла, в основе которой лежит точное решение системы уравнений Навье–Стокса, неразрывности и баланса энергии для совершенного газа с постоянными значениями коэффициентов вязкости μ и λ и удельных теплоемкостей c_p и c_v . Решение включает две произвольные постоянные, которые могут быть определены по начальному и конечному значениям давления на границе облака. Существенным является учет начальных геометрических и термодинамических параметров газового облака. Проведено сравнение с экспериментальными данными и с соответствующим теоретическим автомодельным решением Л. И. Седова [1], свидетельствующее о том, что представленное решение лучше, чем автомодельное, описывает процесс расширения газового облака на начальной его стадии.

Ниже представлены формулы, полученные на основе компьютерной технологии аналитических вычислений. Исходные уравнения были записаны в обобщенных ортогональных криволинейных координатах [2]. Поиск точного решения основывался на интуитивных предположениях о его виде и непосредственной проверке выполнимости исходных уравнений.

В результате было установлено, что возможны такие термодинамические процессы внутри газового облака, при которых скорости всех частиц газа определяются по формуле

$$u = \frac{\xi b}{\sqrt{1 + 2bt}}$$

где b — термодинамический параметр газового облака, ξ — лагранжева координата частицы, численно равная её удалению от «центра» облака в начальный момент времени $t = 0$ (в случае сферического облака его «центр» совпадает с центром сферы, в случае цилиндрического облака «центром» является ось симметрии облака, а в случае облака, расширяющегося в прямой трубе в обе стороны, «центром» является плоскость симметрии облака). При этом каждая частица газа удаляется от «центра» по закону

$$r = \xi \sqrt{1 + 2bt},$$

а подвижная граница облака перемещается по закону

$$r = r_0 \sqrt{1 + 2bt}$$

со скоростью

$$u = \frac{r_0 b}{\sqrt{1 + 2bt}}$$

где r_0 — начальный радиус облака.

Такое расширение облака возможно, если к каждой его частице в единицу времени поступает радиационная энергия соответственно равная

$$Q = \frac{\rho_0 \xi^2 b^3 (-2 + n\alpha - n)}{2(\alpha - 1)(1 + 2bt)^{2+n/2}} + \frac{b^3 \rho_0 r_0^2 n \alpha B}{2(\alpha - 1)(1 + 2bt)}$$

где $n = 1$ соответствует облаку в прямой трубе, $n = 2$ соответствует цилиндрическому облаку, $n = 3$ — сферическому облаку, B — постоянная, подлежащая определению, ρ_0 — начальная плотность облака, $\alpha = c_p/c_v$ — показатель адиабаты Пуассона.

При рассматриваемом процессе плотность газа в облаке со временем уменьшается по единому для всех его частиц закону

$$\rho = \rho_0(1 + 2bt)^{-n/2}$$

а давление в газовом облаке распределяется по закону

$$p = \frac{\rho_0 \xi^2 b^2}{2(1 + 2bt)^{1+n/2}} + \frac{\ell A}{(1 + 2bt)^{\alpha n/2}} + \ell B + \frac{n\ell(\mu(\alpha - 2 \operatorname{Pr}(\alpha - 1)) + \lambda n \operatorname{Pr}(\alpha - 1))}{\rho_0 b r_0^2 \operatorname{Pr}(\alpha n/2 - 1)(1 + 2bt)}$$

где

$$\ell = \frac{1}{2} b^2 \rho_0 r_0^2$$

Постоянные A и B могут быть определены по начальному и конечному значениям давления в «центре» облака.

Температура газа в облаке при его расширении распределяется по закону

$$T = \frac{\ell B(1 + 2bt)^{n/2}}{R\rho_0} + \frac{\xi^2 b^2}{2R(1 + 2bt)} + \frac{\ell A}{R\rho_0(1 + 2bt)^{(\alpha-1)n/2}} + \frac{n\ell(\mu(\alpha - 2 \operatorname{Pr}(\alpha - 1)) + \lambda n \operatorname{Pr}(\alpha - 1))}{R\rho_0^2 b r_0^2 \operatorname{Pr}(\alpha n/2 - 1)(1 + 2bt)^{1-n/2}}$$

Как следует из представленных формул, расширение газового облака происходит при наличии непрерывного во времени притока тепла к каждой частице газа, который со временем убывает. При этом со временем плотность газа и давление в облаке убывают, а температура растет и имеет место неравномерное распределение давления и температуры внутри облака, которые монотонно возрастают от «центра» к границе облака.

Представленные формулы можно использовать для моделирования случаев одностороннего расширения материальных газовых объемов с учетом того факта, что все энергетические процессы, порождающие эти явления, какими бы кратковременными они ни были, происходят не мгновенно, а растянуты во времени, и на конечной своей стадии носят убывающий характер.

В частности, в нашей работе [3] предложена модель динамики стримера линейной молнии, которая следует из представленных формул при $n = 2$, $\alpha = 1.4$, $A = \mu = \lambda = 0$ и которая вполне удовлетворительно описывает процессы многократного его расширения при разрядах молнии и сжатия в периоды между разрядами.

Ниже на рисунке представлено сравнение с экспериментальными данными [1] результатов расчета динамики шарового газового облака ($n = 3$), образовавшегося при взрыве атомной бомбы. На основе этих данных принято $r_0 = 0.6$ м, $b = 0.175 \cdot 10^7 c^{-1}$. (В работе [1] аналогичный параметр определялся фактически по величине энергии взрыва). Нижняя кривая соответствует диабатической модели, верхняя — адиабатической модели [1]. Параметры кривых выбирались так, чтобы они обе проходили через четырнадцатую экспериментальную точку, причем диабатическая кривая начиналась бы в точке $(0, r_0)$, адиабатическая — в точке $(0, 0)$.

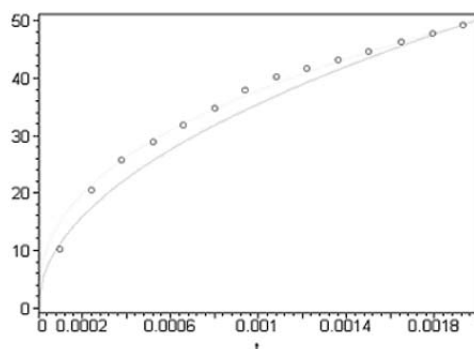


Рис. 1.

Из рисунка видно, что первая экспериментальная точка расположена значительно ближе к кривой, отвечающей диабатическому процессу расширения облака взрыва, чем к адиабатической кривой [1], что свидетельствует о том, что процесс выделения тепла за счет цепной реакции расщепления внутри облака взрыва к этому моменту времени не закончился.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1961. 428 с.
- [2] Гинзбург И. П. Теория сопротивления и теплопередачи. Ленинград: ЛГУ, 1970. 376 с.
- [3] Снопов А. И. Газотермодинамическая модель стримера линейной молнии // XIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». III Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения», 9 мая–5 июня 2005 г., Ростов–на–Дону. Тезисы докладов. 2005. С. 122–123.

Snopov A. I. *The diabatic model of an expansion of the gas cloud by the influence of the thermal radiation.* The one-dimensional diabatic model of an expansion of the gas cloud based on one new exact solution of Navier–Stokes and thermodynamic equations is suggested.

К РАСЧЕТУ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ОДНОРОДНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Сумбатян М. А., Мацуга В. В.

Ростовский госуниверситет

В рамках плоской задачи применяется линеаризация уравнений Навье – Стокса течения вязкой несжимаемой жидкости в канале, в котором турбулентные осцилляции поля скоростей являются малыми на фоне основного осредненного потока. Распределение скорости осредненного потока по сечению заранее неизвестно, однако известна ее интегральная характеристика посредством задания расхода жидкости. Решение рассматриваемой линеаризованной краевой задачи строится асимптотически при больших числах Рейнольдса. Устанавливаются режимы, при которых могут появляться осциллирующие и незатухающие во времени решения. Полученное решение подставляется в осредненные уравнения Рейнольдса, что позволяет найти величину пограничного слоя.

Пусть в узком канале $|y| \leq h$ шириной $2h$ движется поток вязкой несжимаемой жидкости. Тогда течение жидкости описывается следующим уравнением [1,2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi - \nu \Delta \Delta \psi = 0. \quad (1)$$

где ν – кинематическая вязкость, а функция тока ψ вводится соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

где $\bar{v} = \{v_x, v_y\}$ – вектор мгновенной скорости частиц жидкости.

Граничные условия прилипания частиц к стенкам эквивалентны условиям:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = \pm h. \quad (3)$$

Предполагается, что мгновенное поле скоростей в произвольный момент времени имеет вид:

$$v_x(x, y, t) = U(y) + v'_x(x, y, t), \quad v_y(x, y, t) = v'_y(x, y, t), \quad (4)$$

где $U(y)$ – основной поток, а $\{v'_x, v'_y\}$ – малые на фоне основного потока возмущения [1-3]. Поэтому для функции тока ψ имеем:

$$\psi(x, y, t) = \Psi(y) + \psi'(x, y, t), \quad U(y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad v'_x = \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v'_y = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}. \quad (5)$$

Тогда из (1) для функции $\psi'(x, y, t)$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial y} - \\ - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial(\Delta \psi')}{\partial y} - \nu \Delta \Delta \Psi - \nu \Delta \Delta \psi' = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем рассматривать это уравнение, считая заданным расход жидкости по сечению:

$$\int_{-h}^h U(y) dy = D. \quad (7)$$

В рамках рассматриваемого подхода предпоследним членом, а также нелинейными слагаемыми можно пренебречь. С учетом сделанных допущений уравнение (6) переписется в виде:

$$\frac{\partial(\Delta\psi')}{\partial t} + U(y) \frac{\partial(\Delta\psi')}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial\psi'}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi' = 0. \quad (8)$$

Очевидно, при таком подходе сама функция $U(y)$ пока остается неизвестной. В силу того, что в основном потоке удовлетворяются условия прилипания на стенках канала, то такие же условия должны быть и для возмущенного потока.

Ввиду предположения о том, что турбулентный поток достаточно устойчив к малым возмущениям осциллирующей части вектора скорости, зададим начальное условие в виде:

$$v'_x(x, y, 0) = \varepsilon \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \cos(x/L), \quad v'_y(x, y, 0) = 0, \quad (9)$$

где L – некоторый характерный размер вдоль оси канала.

Приближим функцию распределения продольной скорости осредненного потока ломаной. Также ограничимся рассмотрением задачи, симметричной относительно оси канала $y = 0$.

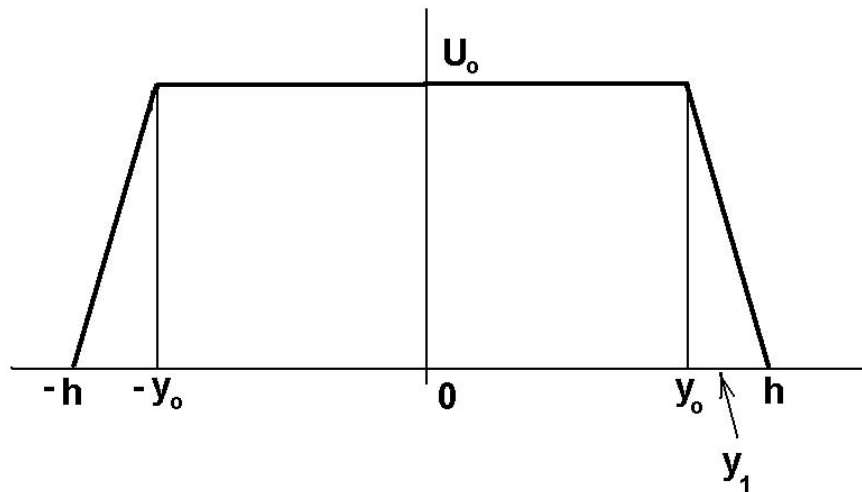


Рис. 1. Профиль средней продольной скорости

Обозначим через y_1 ширину пограничного слоя ($y_1 \ll h$). Тогда величина $y_0 = h - y_1$ обозначает половину ширины центральной зоны канала. При этом значение скорости в центральной зоне канала $|y| \leq y_0$ асимптотически равно средней скорости потока U_0 .

Поскольку $U''(y) = 0$ и в погранслоевой и во внешней зоне, то уравнение (8) эквивалентно:

$$\frac{\partial(\Delta\psi')}{\partial t} + U(y) \frac{\partial(\Delta\psi')}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi' = 0. \quad (10)$$

После применения к уравнению (10) преобразование Лапласа по t получим:

$$p \Delta\widehat{\psi}' + U(y) \frac{\partial(\Delta\widehat{\psi}')}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\widehat{\psi}' = -\frac{\varepsilon}{h^2} y (e^{ix/L} + e^{-ix/L}). \quad (11)$$

Теперь легко видеть, что в силу линейности уравнения (11):

$$\widehat{\psi}'(x, y, p) = \widehat{\psi}'_L(y, p) e^{ix/L} + \widehat{\psi}'_{-L}(y, p) e^{-ix/L}, \quad (12)$$

причем p пока будем считать параметром и опустим. После введения вспомогательной функции $g_{\pm L}$ получим:

$$p g_{\pm L}(y) \pm \frac{iU(y)}{L} g_{\pm L}(y) - \nu \left[\frac{d^2 g_{\pm L}(y)}{dy^2} - \frac{g_{\pm L}(y)}{L^2} \right] = -\frac{2\varepsilon}{h^2} y, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \widehat{\psi}'_{\pm L}(y)}{dy^2} - \frac{\widehat{\psi}'_{\pm L}(y)}{L^2} = g_{\pm L}(y).$$

Все преобразования достаточно провести для случая $e^{ix/L}$. В силу симметрии можно ограничиться лишь рассмотрением зоны $y \geq 0$. Тогда общее решение первого уравнения (13) в симметричном случае в центральной части канала есть:

$$g(y) = C_5 \frac{\text{sh}(\gamma_0 y)}{\sqrt{\gamma_0}} - \frac{\varepsilon y}{h^2 \nu \gamma_0^2}, \quad \gamma_0 = \sqrt{\frac{p}{\nu} + \frac{iU_0}{L\nu} + \frac{1}{L^2}}, \quad 0 \leq y \leq y_0. \quad (14)$$

Тогда в центральной части канала решение принимает вид:

$$\widehat{\psi}'_1(y) = L \int_0^y \text{sh} \frac{y-\eta}{L} g(\eta) d\eta + C_6 L \text{sh} \frac{y}{L}, \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (15)$$

где функция $g(y)$ дается выражением (14).

Общее решение однородного уравнения в погранслоев строится методом WKБ [4]. При построении частного решения параметр ν считается предельно малым. Тогда общее решение первого уравнения (13) в погранслоевой части канала имеет вид:

$$g(\tilde{y}) = C_1 \frac{e^{\xi(\tilde{y})}}{\sqrt{\gamma(\tilde{y})}} + C_2 \frac{e^{-\xi(\tilde{y})}}{\sqrt{\gamma(\tilde{y})}} - \frac{\varepsilon}{h^2 \nu} \frac{h - \tilde{y}}{\gamma^2(\tilde{y})}, \quad 0 \leq \tilde{y} \leq y_1, \quad (16)$$

$$\xi(\tilde{y}) = \int_0^{\tilde{y}} \gamma(\eta) d\eta, \quad \gamma(\tilde{y}) = \sqrt{\frac{p}{\nu} + \frac{iU_0 \tilde{y}}{L\nu y_1} + \frac{1}{L^2}}, \quad (\tilde{y} = h - y \quad y_0 \leq y \leq h).$$

Общее решение задачи в погранслое принимает вид:

$$\widehat{\psi}'_2(\tilde{y}) = L \int_0^{\tilde{y}} \text{sh} \frac{\tilde{y} - \eta}{L} g(\eta) d\eta + C_3 \text{sh} \frac{\tilde{y}}{L} + C_4 \text{ch} \frac{\tilde{y}}{L}, \quad 0 \leq \tilde{y} \leq y_1. \quad (17)$$

Из граничных условий следует: $C_3 = C_4 = 0$. Используя для асимптотической оценки некоторых интегралов метод Лапласа [5], из условия сопряжения внешнего и внутреннего решений для вектора неизвестных (C_1, C_2, C_5, C_6) получаем линейную алгебраическую систему порядка 4×4 :

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{\xi_1}}{\gamma_0^{5/2} L} & \frac{\text{sh}(y_1/L)}{\left(\frac{p}{\nu} + \frac{1}{L^2}\right)^{3/4}} & -a_s & -\text{sh} \frac{y_0}{L} & \left| \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ f_3 \end{array} \right. \\ \frac{e^{\xi_1}}{\gamma_0^{3/2}} & \frac{\text{ch}(y_1/L)}{\left(\frac{p}{\nu} + \frac{1}{L^2}\right)^{3/4}} & b_s & \text{ch} \frac{y_0}{L} & \\ e^{\xi_1} & e^{-\xi_1} & -\text{sh}(\gamma_0 y_0) & 0 & \\ e^{\xi_1} \left(1 - \frac{iU_0}{4\nu y_1 L \gamma_0^3}\right) & -e^{-\xi_1} \left(1 + \frac{iU_0}{4\nu y_1 L \gamma_0^3}\right) & \text{ch}(\gamma_0 y_0) & 0 & \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} \int_0^{y_0} \text{sh} \frac{y_0 - \eta}{L} \text{sh}(\gamma_0 \eta) d\eta, \quad b_s = \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} \int_0^{y_0} \text{ch} \frac{y_0 - \eta}{L} \text{sh}(\gamma_0 \eta) d\eta, \\ f_1 &= \frac{\varepsilon}{h^2 \nu} \int_0^{y_1} \text{sh} \frac{y_1 - \eta}{L} \frac{h - \eta}{\gamma^2(\eta)} d\eta - \frac{\varepsilon}{h^2 \nu \gamma_0^2} \int_0^{y_0} \text{sh} \frac{y_0 - \eta}{L} \eta d\eta, \quad \xi_1 = \xi(y_1), \\ f_2 &= \frac{\varepsilon}{h^2 \nu} \int_0^{y_1} \text{ch} \frac{y_1 - \eta}{L} \frac{h - \eta}{\gamma^2(\eta)} d\eta + \frac{\varepsilon}{h^2 \nu \gamma_0^2} \int_0^{y_0} \text{ch} \frac{y_0 - \eta}{L} \eta d\eta, \quad f_3 = -\frac{\varepsilon i U_0 y_0}{h^2 \nu^2 \gamma_0^{9/2} L y_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Главный определитель этой системы равен:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\gamma_0^{3/2}} \left[\text{sh} \frac{y_0}{L} + \frac{1}{\gamma_0 L} \text{ch} \frac{y_0}{L} \right] \left[\text{ch}(\gamma_0 y_0) - \left(1 + \frac{iU_0}{4\nu y_1 L \gamma_0^3}\right) \text{sh}(\gamma_0 y_0) \right] - \\ &\quad - \frac{e^{\xi_1} \text{sh}(h/L)}{\left(\frac{p}{\nu} + \frac{1}{L^2}\right)^{3/4}} \left[\text{ch}(\gamma_0 y_0) + \left(1 - \frac{iU_0}{4\nu y_1 L \gamma_0^3}\right) \text{sh}(\gamma_0 y_0) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} \left[\frac{\text{sh}[y_0(\gamma_0 + 1/L)]}{\gamma_0 + 1/L} - \frac{\text{sh}[y_0(\gamma_0 - 1/L)]}{\gamma_0 - 1/L} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение системы может быть построено по правилу Крамера. Это позволяет выразить решение в основной и пограничной зонах.

Обращение преобразования Лапласа показывает, что решение с течением времени не будет затухать, если главный определитель (20) не имеет нулей на мнимой. Уравнение $\Delta(p) = 0$ порождает счетный набор соответствующий незатухающему во времени решению длин $L = L_k$ и частот $\omega = \omega_k$, где ω_k — вещественно и $\Delta(i\omega_k) = 0$, которые при асимптотически малых значениях вязкости могут быть выражены в виде:

$$\left(\frac{U_0}{L}\right)_n = \frac{18\pi^2 n^2 (1 - e^{-8\pi n/3})^3 \nu}{(1 - e^{-4\pi n})^2 y_1^2}, \quad (21)$$

$$\omega_n = -\left(\frac{U_0}{L}\right)_n \frac{1}{(1 - e^{-8\pi n/3})} = \frac{18\pi^2 n^2 (1 - e^{-8\pi n/3})^2 \nu}{(1 - e^{-4\pi n})^2 y_1^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для полученных значений выписывается асимптотическое приближение решения в центральной части канала и в пограничном слое. Осреднение точных нелинейных уравнений (6) в средней зоне канала, позволяет получить выражение для ширины пограничного слоя y_1 . По вычисленным осциллирующим составляющим скорости звуковое поле рассчитывается по классической теории Лайтхилла.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS/AIRBUS Grant - 04-80-7043 и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
- [2] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
- [3] Суинни Х., Голлаб Дж. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. 344 с.
- [4] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
- [5] Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

Sumbatyan M.A., Matsuga V.V. *On calculation of sound field in a homogeneous turbulent stream.* In frames of plane problem we apply a linearization of the Navier-Stokes equations for a flow of viscous incompressible fluid in the channel, when turbulent oscillations of the velocity field are small when compared with the mean stream. The cross-distribution of the mean flow is not known *a priori*, but there is known its integral value through the given fluid consumption. The solution to this linearized problem is constructed asymptotically for large Reynolds numbers. We emphasize regimes, for which there can arise decaying and non-decaying, in time, solutions. The obtained solution is substituted into the averaged equations that allows us to determine the width of the boundary layer.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Устинов Ю. А.

Ростовский государственный университет

В статье дается краткий обзор результатов, полученных автором для упругих тел, обладающих винтовой анизотропией. В силу ограничения на объем указываются в основном литературные источники, в которых приводятся основные соотношения теории упругости в винтовой системе координат, решение Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией, основные соотношения теории Кирхгоффа-Лява для цилиндрической оболочки и некоторые результаты исследования на ее основе винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах, новые методы расчета НДС и жесткостей канатов.

Первоначально интерес к проблеме у автора возник на основе исследований особенностей НДС естественно закрученного стержня (ЕЗС). Например, растяжение ЕЗС сопровождается кручением и, на оборот, кручение – растяжением или сжатием. Этот эффект достигается при условии, что граница поперечного сечения ЕЗС отлична от окружности, т.е. за счет геометрической формы боковой поверхности. Как известно степень связности продольных и крутильных деформаций зависит от относительного угла закручивания (крутки) и при малых его значениях от разности $B - J_p$, где B – геометрическая жесткость поперечного сечения, J_p – его полярный момент инерции. Возникла мысль, что подобного эффекта можно добиться за счет механических свойств, создав цилиндр с винтовой анизотропией. Такой цилиндр можно создать на основе композита, получаемого путем намотки жестких нитей на цилиндрическую поверхность с одновременным покрытием слоев нитей полимерным связующим. Винтовой анизотропией обладают канаты и стенки кровеносных сосудов.

По предложению академика Н.Ф. Морозова в 2003 г. для журнала “Успехи механики” автором была подготовлена статья, в которой приводится обзор результатов по исследованным задачам для тел с винтовой анизотропией. Однако эта работа вышла в свет только в этом году [1]. В статью включены результаты исследований по построению основных соотношений теории упругости для сред с винтовой анизотропией и решений Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией, опубликованные в [2–5], а также новые результаты, включающие в себя уравнения цилиндрической оболочки и результаты исследований на их основе особенностей волновых процессов в ней и результаты исследований винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах. По последней проблеме некоторые результаты ранее были опубликованы в [6–8]. В указанную обзорную статью не вошли материалы работы [9], в которой предлагаются новые методы исследования НДС и жесткостей канатов.

Ниже дается краткое изложение этих результатов исследований для каната, полученных совместно с И.П. Гетманом.

Известны два подхода к построению теории каната. Один из них опирается на методы механики сплошной среды [10], второй - на методы строительной механики [11]. Прежде всего следует отметить, что при растяжении каната одинарной свивки продольным усилием P в нем помимо продольной деформации ε возникает крутильная деформация с относительным углом закручивания φ , если условия закрепления допускают взаимный поворот сечений, или возникает крутящий момент M , если отсутствует взаимный поворот его концевых сечений. Иными словами связь между деформациями и усилиями имеет вид

$$d_{11}\varepsilon + d_{12}\varphi = P, \quad d_{12}\varepsilon + d_{22}\varphi = M \quad (1)$$

где d_{kl} – элементы матрицы жесткостей (ЭМЖ).

Различные подходы к построению теории каната приводят к различным выражениям для ЭМЖ. Для иллюстрации приведем выражения для d_{11} , полученные различными авторами.

Геугафф [10] (1907, методами теории упругости).

$$d_{11} = ES_0 \cos^2 \alpha$$

где E – модуль Юнга, S_0 – эффективная площадь поперечного сечения, α – угол между касательной к крайнему волокну и осью каната.

Динник А.Н. [11] (1957, методами строительной механики)

$$d_{11} = ES_0 \cos^4 \alpha$$

Есть и другие, более сложные формулы [11].

В [9] предложен новый подход к построению теории каната, который опирается на теорию волокнистых композитов и решение Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией. В рамках этого подхода на основе асимптотического метода строится предельное решение Сен-Венана задачи растяжения-кручения [1-4], когда отношение $m = E_2/E_1 \rightarrow 0$, где E_1, E_2 – модули Юнга несущих волокон и заполнителя соответственно. В результате проведенного анализа для ЭМЖ получаются следующие выражения:

$$d_{11} = \pi k_1 a^2 E_1 D_{11}, \quad d_{12} = \pi k_1 a^3 E_1 D_{12}, \quad d_{22} = \pi k_1 a^4 E_1 D_{22} \quad (2)$$

$$D_{11} = i_0 - s i_1, \quad D_{12} = i_1 - s i_2, \quad D_{22} = i_2 - s i_3$$

$$i_0 = \cos^2 \alpha, \quad s = \nu \sin^2 \alpha$$

$$i_1 = -\cos^2 \alpha \tan^{-4} \alpha [\tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha] \ln(\cos^2 \alpha)$$

$$i_2 = \cos^2 \alpha \tan^{-6} \alpha [2 \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha] \ln(\cos^2 \alpha)$$

$$i_3 = -\cos^2 \alpha \tan^{-8} \alpha [6 \tan^2 \alpha + 3 \tan^4 \alpha - \tan^6 \alpha + 2 \cos^2 \alpha] \ln(\cos^2 \alpha)$$

Здесь a – радиус каната, k_1 – концентрация по поперечному сечению несущих волокон.

Для стальных канатов, у которых $\alpha = 10^\circ - 18^\circ$, достаточную точность обеспечивают следующие упрощенные формулы

$$d_{11} = \pi k_1 a^2 E_1 [1 - (1 + \nu/2) \sin^2 \alpha],$$

Таблица

–	<i>I</i>	<i>II</i>
$m = 10^{-2}$	$3.349 \cdot 10^6$ Па	$3.326 \cdot 10^6$ Па
$m = 10^{-3}$	$3.175 \cdot 10^6$ Па	$3.106 \cdot 10^6$ Па
$m = 10^{-5}$	$1.107 \cdot 10^6$ Па	$0.774 \cdot 10^6$ Па
$m = 10^{-7}$	$0.341 \cdot 10^6$ Па	–
$m = 0$	$0.308 \cdot 10^6$ Па	–

$$d_{12} = \pi k_1 a^3 E_1 \tan \alpha [1 - (4/3 + \nu) \sin^2 \alpha] / 2$$

$$d_{22} = \pi k_1 a^4 E_1 \tan^2 \alpha [1 - (3/2 + 3\nu/4) \sin^2 \alpha] / 2$$

Процесс предельного перехода от цилиндра к канату был проанализирован двумя сериями расчетов. В качестве объекта исследования был выбран стальной двухслойный канат со следующими значениями параметров:

$N = 1 + 6 + 12 = 19$ – количество волокон, $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па $\nu = 0.3$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона несущих элементов, $2a = 0.0059$ м, $h = 0.0072$ м – шаг винтовой спирали, $\alpha = 14.44^\circ$, $k_1 = 0.66$, $d = 0.0011$ – диаметр волокна.

Для выбранных значений параметров по формуле (2) $d_{11} = 3.353 \cdot 10^6$ Па.

Первая серия расчетов проводилась И.П. Гетманом на основе решения трехмерной задачи для неоднородного цилиндра методом конечных элементов.

Во второй серии для цилиндров с различными значениями параметра m построение решения Сен-Венана осуществлялось путем численного интегрирования двух дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной.

В таблице приводятся значения элемента d_{11} , при этом колонка I соответствует первой серии, колонка II – второй.

Отсутствие значений в некоторых ячейках колонки II указывает, на то, что для $m < 10^{-4}$ численное интегрирование становилось не устойчивым из-за малой величины коэффициента при старшей производной. Следует также обратить внимание на то, что величины d_{11} подсчитанные на основе МКЭ и формулы (2) при $m = 0$ отличаются на порядок. Это связано с тем, что в предельном варианте при расчетах МКЭ отсутствовало контактное взаимодействие между отдельными волокнами, что естественно приводит к резкому уменьшению жесткостей. Учет контактных взаимодействий возможен, но приводит к неоправданно сложной задаче.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ “Государственной поддержки ведущих научных школ” (НШ-2113.2003.1), Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00069), Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ–112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Устинов Ю.А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики 2003 № 4. С. 3-29
- [2] Устинов Ю.А., Курбатова Н.В. Задачи Сен-Венана с физической и геометрической анизотропией. // Изв. ВУЗов.Северо-Кавказ. Регион. Мат. Моделирование. Естеств. науки. 2001 Спецвыпуск. С. 154-157.
- [3] Устинов Ю.А. Задачи Сен-Венана для стержня с винтовой анизотропией. // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 6. С. 770-773.
- [4] Устинов Ю.А. Решения задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // Прикл. мат и мех., 2003, т .67. Вып. 1. С. 89-98.
- [5] Устинов Ю.А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндра. М.: Наука. 2003. 128 с.
- [6] Устинов Ю.А., Богаченко С.Е. Об одной модели, объясняющей причину пульсирующего винтового движения в кровеносных сосудах.Тр. III Всероссийской конф. по теор. упругости. Ростов н/Д-Азов.13-16.10.2003. Изд. "Новая книга". Ростов-на-Дону. 2003. С. 376-378.
- [7] Устинов Ю.А. О винтовом пульсовом движении крови в артериальных сосудах // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказ. регион. Математика и механика сплошной среды. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 220-223.
- [8] Устинов Ю.А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Докл. РАН, 2004, т. 398, № 3. С. 344-348.
- [9] Устинов Ю.А. Построение элементарной теории троса на основе теории композитов и Решений Сен-Венана // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказ. регион.. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 117-121.
- [10] Мусалимов В.М., Мокряк С.Я. О некоторых задачах для спирально-изотропной среды. В сб. "Механика сплошных сред". Изд. Томского университета. Томск. 1983. С. 88-96.
- [11] Глушко М.Ф. Стальные подъемные канаты. Киев. Техника. 1966. 323 с.

Ustinov Yu. A. *Some problems of the theory of elasticity for bodies with spiral anisotropy.* In this article the brief review of the author's scientific results for elastic bodies with spiral anisotropy are proposed.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Фильштинский Л. А., Кобзарь В. Н.
Сумский государственный университет

Предложен метод решения двумерных внутренних и внешних граничных задач связанной термоупругости, основывающийся на построенных фундаментальных решениях соответствующих уравнений.

В данном докладе предлагается подход к решению граничных задач, опирающийся на построенную ниже матрицу фундаментальных решений двумерных уравнений связанной задачи термоупругости с последующим применением техники сингулярных интегральных уравнений. Приводятся результаты расчетов, характеризующие связанность термоупругих полей для различных материалов.

Система уравнений связанной термоупругости. Дифференциальные уравнения связанной термоупругости имеют вид [1, 2]:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{u} + \sigma \operatorname{grad} e - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda_T} \alpha_T \operatorname{grad} \theta + \frac{1}{a^2} \vec{F} = \frac{\rho}{\lambda_T} \ddot{\vec{u}}, \\ \nabla^2 \theta - \frac{1}{a^2} \dot{\theta} - m \dot{e} = -\frac{\mu}{\lambda_T} W, \quad m = \frac{(3\lambda + 2\mu) T_0 \alpha_T}{\lambda_T}, \end{cases} \quad (1)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа, $\vec{u} = \{u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t)\}$ — вектор перемещений (x_1, x_2 — прямоугольные декартовы координаты, t — время), $\theta = T - T_0$ — приращение температуры (T_0 — температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии, T — абсолютная температура точек тела), $e = \operatorname{div} \vec{u}$ — объемное расширение, $\sigma = (1 - 2\nu)^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона, λ, μ — постоянные Ламе, α_T — температурный коэффициент линейного расширения изотропного тела, \vec{F} — интенсивность объемной нагрузки, ρ — плотность, $a^2 = \lambda_T / c_\varepsilon \rho$ — коэффициент температуропроводности, λ_T — теплопроводность материала, c_ε — объемная теплоемкость при постоянной деформации, W — функция плотности тепловых источников.

Матрица фундаментальных решений системы. Пусть в точке (x_{10}, x_{20}) действует гармонически изменяющаяся во времени сосредоточенная сила $\vec{P} = (P_1, P_2)$ или сосредоточенный тепловой источник P_3 . Имея в виду гармонический характер изменения во времени полевых величин, положим:

$$\begin{aligned} u_j &= \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} U_j), & \sigma_{kj} &= \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} S_{kj}) \quad (k, j = 1, 2), \\ \theta &= \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} U_3), & e &= \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} e_*), \\ \vec{F} &= \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \vec{X}), & W &= \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} Q), \end{aligned} \quad (2)$$

где σ_{kj} — компоненты тензора напряжения, $U_j, S_{ij}, U_3, e_*, \vec{X}, Q$ — амплитуды соответствующих величин, ω — круговая частота.

Исключая время в системе (1) в соответствии с представлениями (2) приходим к уравнениям термоупругости в амплитудах:

$$\begin{cases} l_{11}e_* - l_{12}U_3 = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)}(\partial_1P_1 + \partial_2P_2)\delta(x), \\ l_{21}e_* + l_{22}U_3 = -\frac{1}{\lambda}P_3\delta(x), \end{cases} \quad (3)$$

$$l_{11} = \nabla^2 + \gamma_1^2, \quad l_{12} = \frac{\alpha_0}{1+\sigma}\nabla^2, \quad l_{21} = im\omega, \quad l_{22} = \nabla^2 + i\gamma^2,$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{a^2}}, \quad \alpha_0 = 2(1+\nu)\sigma\alpha_T.$$

Интегрируя уравнения (3) в пространстве обобщенных функций D' [3], получаем выражения для амплитуд перемещений и температуры в виде:

$$U_n^{(k)} = \frac{P_k}{4i\mu}g_n^{(k)} \quad (n, k = 1, 2, 3),$$

$$g_1^{(1)} = -H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0 \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j b_j \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_2^{(1)} = g_1^{(2)} = a_0 \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j b_j \partial_1 \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_3^{(1)} = i\omega m a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_2^{(2)} = -H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0 \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j b_j \partial_2^2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_3^{(2)} = i\omega m a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_1^{(3)} = \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta \alpha_T \sum_{j=1}^2 (-1)^j \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_2^{(3)} = \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta \alpha_T \sum_{j=1}^2 (-1)^j \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_3^{(3)} = \mu \beta \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_1^2 - \mu_j^2) H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\sigma(1-\nu)(\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad b_j = \frac{1}{\gamma_1^2 - \mu_j^2} \quad (j = 1, 2), \quad b_0 = -\frac{1}{a_0 \gamma_2^2},$$

$$d_j = (\sigma + 1)a - \gamma_2^2 - i\gamma_2 - \sigma \mu_j^2 \quad (j = 1, 2), \quad d_0 = 1, \quad a = \gamma_1^2 + i\gamma^2 + \frac{i\mu\alpha_0\beta_0}{1+\sigma},$$

$$b = i\gamma_1^2 \gamma^2, \quad \beta_0 = \alpha_0 \frac{T_0}{\lambda_T} \omega, \quad \beta = -\frac{1}{\lambda_T (\mu_1^2 - \mu_2^2)},$$

где $H_p^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода, порядка p . μ_j — корни уравнения $\mu^4 - a\mu^2 + b = 0$, причём $Im\mu_j > 0$ ($j = 1, 2$).

Граничная задача. Величины $g_n^{(k)}$ — определяют матрицу фундаментальных решений. Рассмотрим неограниченную пластинку, ослабленную отверстием, ограниченным достаточно гладким контуром Γ . Пусть на контуре отверстия заданы механические усилия и тепловой поток.

Условия на контуре отверстия представим в виде комплексных граничных равенств:

$$\begin{aligned} S_1 - e^{2i\psi} S_2 &= 2e^{i\psi} (X_{1n} - iX_{2n}), \\ S_1 - e^{-2i\psi} \tilde{S}_2 &= 2e^{-i\psi} (X_{1n} + iX_{2n}), \\ -\lambda_T \frac{\partial U_3}{\partial n} &= \Phi, \\ S_1 &= S_{11} + S_{22}, \quad S_2 = S_{22} - S_{11} + 2iS_{12}, \quad \tilde{S}_2 = S_{22} - S_{11} - 2iS_{12}, \end{aligned}$$

где X_{1n}, X_{2n} — компоненты вектора внешней нагрузки, действующей на граничной площадке с нормалью \vec{n} , ψ — угол между внешней нормалью к контуру Γ и осью Ox_1 , Φ — тепловой поток.

Для определения волновых полей напряжений в пластинке, введем интегральные представления полевых величин в виде сверток:

$$U_k(z) = \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^3 Z_m(\zeta) g_k^{(m)}(\zeta, z) ds \quad (k = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где $g_k^{(m)}$ — компоненты матрицы фундаментальных решений, $Z_m(\zeta)$ — неизвестная “плотность”.

На основании представлений (4) граничная задача после преобразований сводится к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned} \pm 4iW_p(\zeta_0) + \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^3 W_m(\zeta) K_{pm}(\zeta, \zeta_0) ds &= F_p(\zeta_0) \quad (p = 1, 2, 3), \\ F_1(\zeta_0) &= \frac{1}{\mu} (N + iT)(\zeta_0), \quad F_2(\zeta_0) = \frac{1}{\mu} (N - iT)(\zeta_0), \quad F_3(\zeta_0) = -2\alpha_T \Phi(\zeta_0), \\ Z_1 &= W_1 e^{i\psi} + W_2 e^{-i\psi}, \quad iZ_2 = W_1 e^{i\psi} - W_2 e^{-i\psi}, \quad \mu\alpha_T Z_3 = W_3. \end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует внутренней задаче (конечная односвязная пластинка), нижний — внешней задаче (неограниченная среда с отверстием). Ядра интегральных уравнений в силу их громоздкости здесь не выписаны.

Результаты расчетов. Для численной реализации построенного алгоритма был привлечен метод механических квадратур. Расчеты производились для кругового, эллиптического и квадратного контуров, параметрические уравнения которых $\zeta = Re^{i\varphi}$, $\zeta = R_1 \cos \varphi + iR_2 \sin \varphi$, $\zeta = R(e^{i\varphi} + 0, 14036 e^{-3i\varphi})$ соответственно, где $R = R_2 = 10^{-4}$ м, $R_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

На Рис. 1 приведен график распределения амплитуды окружного нормального напряжения $|S_{\theta\theta}|$ в зависимости от относительного волнового числа $\gamma_2 r$ для пластинки с круговым отверстием. Сплошная линия соответствует случаю связанности полей деформации и температуры ($\delta > 0$), штриховая — отсутствию связанности ($\delta = 0$). В качестве материала пластинки взят поливинилбутираль [2]. На контуре отверстия задано нормальное усилие $N = 1$ Н/м².

На Рис. 2 представлен график изменения $|S_{\theta\theta}|$ по $\gamma_2 r$ для пластинки из алюминия. Сплошная линия соответствует круговому отверстию, штриховая — эллиптическому, а пунктирная — “квадратному”. На контуре отверстия заданы нормальное усилие $N = 1$ Н/м² и тепловой поток $\Phi = 1$ Вт/м².

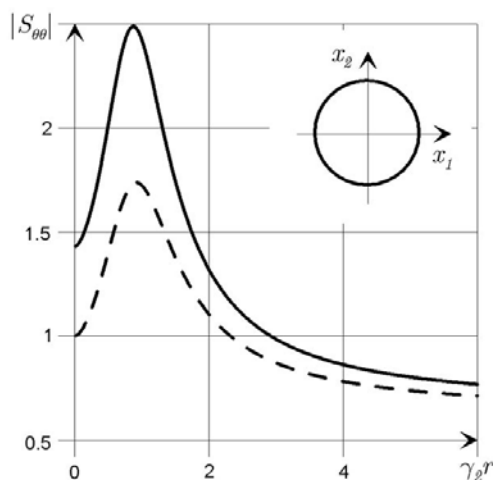


Рис. 1. Поливинилбутираль ($\delta = 0,431$)

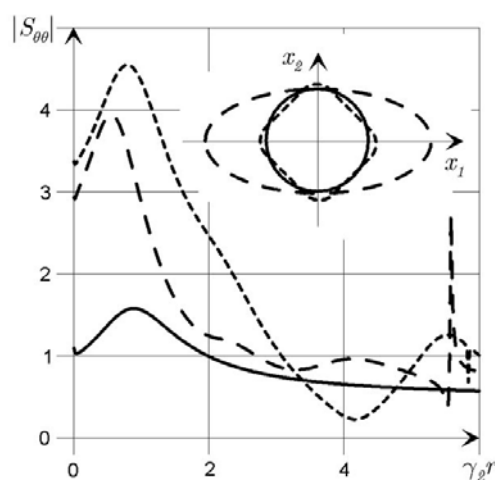


Рис. 2. Алюминий ($\delta = 0,038$),
 $N = 1 \text{ H/м}^2$, $\Phi = 0 \text{ Вт/м}^2$,
 $N = 1 \text{ H/м}^2$, $\Phi = 1 \text{ Вт/м}^2$.

Взаимное влияние полей перемещений и температуры обычно мало (полистирол, алюминий). Однако подобное положение не сохраняется для ряда новых полимерных материалов (например, поливинилацетали, в частности поливинилбутирала), которые обладают большим параметром связности δ , отражающим взаимодействие термоупругих полей. На примере поливинилбутирала (Рис. 1) видно влияние взаимодействия полей деформаций и температур, приводящее к существенным их изменениям.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / Пер. с польск. М.: Мир, 1970. 256 с.
- [2] *Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г.* Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1981. 184 с.
- [3] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

Fil'shtinskii L.A., Kobzar V.N. *Boundary problem of coupled thermoelasticity for two-dimensional domains.* The method of solution of two-dimensional inner and exterior boundary problems of coupled thermoelasticity is proposed. It is based on the constructed fundamental solutions of the corresponding equations.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

Хапилова Н. С., Залетов В. В., Алтухова М. Л.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

На основе математической модели численно исследована зависимость геометрических размеров вертикальной трещины, образованной путем нагнетания жидкости в газодобывающую скважину, от технологических параметров и физико-механических свойств горного массива.

В работах [1, 2] рассмотрены задачи об образовании трещины гидроразрыва в нефтеносных пластах. Ниже исследован механизм образования трещины в газонасыщенных породах с помощью жидкости, фильтрующейся в массив.

Рассмотрим вертикальную трещину. Ее сечение в плане изображено на рис. 1. Начало системы координат xOy совместим со скважиной. Координаты концов трещины обозначим через $\pm l$

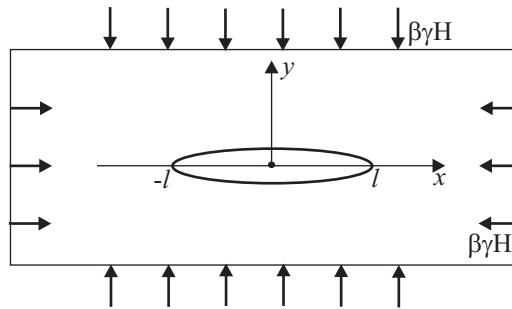


Рис. 1. Горизонтальное сечение трещины.

Система уравнений, описывающая движение жидкости в пористой среде, состоит из уравнения неразрывности и закона Дарси

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \vec{v} = -\frac{k}{\mu_g} \text{grad}P. \quad (1)$$

Здесь ρ, μ_g – плотность и вязкость жидкости, P – давление, m – пористость, k – проницаемость среды, \vec{v} – скорость фильтрации жидкости. При исследуемых перепадах давления сжимаемостью жидкости можно пренебречь, поэтому полагаем $\rho = \text{const}$. Считая $\frac{\partial m}{\partial t} = 0, k = \text{const}$, из соотношений (1) получим $\Delta P = 0$.

В случае плоской задачи напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, действующие в массиве, удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (2)$$

и уравнению совместности

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right), \quad (3)$$

где λ, μ – постоянные Ламе, X, Y – массовые силы.

При образовании трещины в породном массиве на твердый скелет действуют массовые силы, являющиеся градиентами давления фильтрующей жидкости [1],

$$X = -\frac{\partial P}{\partial x}, Y = -\frac{\partial P}{\partial y}. \quad (4)$$

Подставим равенства (4) в уравнение (3), будем иметь

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta P. \quad (5)$$

Систему, состоящую из уравнений (2), (4), (5) и соотношений закона Гука, преобразуем известным методом Н.И. Мусхелишвили [3]. В результате получим следующее комплексное представление напряжений и смещений:

$$\begin{aligned} 2\mu(u_1 + iu_2) &= \alpha\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ \sigma_x + \sigma_y - 2P &= 2[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha = 3 - 4\nu$, ν – коэффициент Пуассона.

Часть поступающей из скважины жидкости при движении на участке $0 \leq |x| < l$ фильтруется в пористую среду, прилегающую к трещине. Обозначим давление на скважине через P . При движении жидкости по трещине давление уменьшается от P_c до некоторой величины P_0 в концевой области.

Граничные условия для напряжений на контуре щели таковы:

$$\tau_{xy}^{\pm} = 0, \sigma_y^{\pm} = P(x), 0 \leq x \leq |l|, y = 0. \quad (7)$$

На бесконечности пласт сжимается усилиями

$$\sigma_y = \sigma_x = \beta\gamma H, \tau_{xy} = 0, \quad (8)$$

где β – коэффициент бокового распора, H – расстояние от дневной поверхности до трещины, γ – средний удельный вес горных пород.

Введем в рассмотрение комплексные функции $\Omega(z), \omega(z)$ по формулам

$$\Omega(z) = \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \omega(z) = \int \Omega(z) dz, \quad (9)$$

где $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$, $\overline{\Psi}(z) = \overline{\Psi(\bar{z})}$, $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$.

С помощью (9) представим напряжения и смещения через функции $\Phi(z), \Omega(z), \omega(z)$. В частности, из (6) получим

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \alpha\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} + const \quad (10)$$

В случае одной трещины комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеют вид [3]

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{P_1(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}, \quad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{P_1(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-l}^l \frac{X(t)p(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{q(t)dt}{t-z} \\ \Omega_0(z) &= \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-l}^l \frac{X(t)p(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{q(t)dt}{t-z} \\ X(z) &= \sqrt{z^2 - l^2}, P_1(z) = C_0 z + C_1.\end{aligned}$$

В силу граничных условий (7)-(8) $q(t) = 0$, коэффициенты полинома $C_0 = \frac{1}{2}\beta\gamma H$, $C_1 = 0$; постоянная $\Gamma' = 0$. В результате комплексные потенциалы $\Phi(z), \Omega(z)$ записываются следующим образом:

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{P(t)\sqrt{t^2 - l^2}dt}{t-z} + \frac{\beta\gamma H}{2\sqrt{z^2 - l^2}}. \quad (12)$$

Ширину трещины w определим из формул (10), (9), (12)

$$\begin{aligned}w(x) = 2u_2(x, 0) &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l P(t) \ln \frac{l^2 - tx + \sqrt{(l^2 - t^2)(l^2 - x^2)}}{l|t-x|} dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta\gamma H}{4} \sqrt{l^2 - x^2} \right\} \frac{4(1 - \nu^2)}{E}, \quad |x| < l.\end{aligned} \quad (13)$$

При $x = 0$ из соотношения (13) имеем

$$w(0) = \frac{4(1 - \nu^2)}{E} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^l P(t) \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + t^2}}{|t|} dt + \frac{\beta\gamma H}{4} \right\}. \quad (14)$$

Найдем неизвестную функцию $P(x)$, характеризующую распределение давления жидкости в трещине. Пусть расход жидкости, нагнетаемой в скважину, равен Q . Обозначим через ν_x^*, ν_y^* компоненты скорости жидкости в точках контура щели. Тогда расход жидкости $q(x)$ через сечение трещины с координатой x выражается соотношением

$$q(x) = \frac{Q}{2} - 2 \int_0^x \nu_y^* dx. \quad (15)$$

С другой стороны, при движении жидкости по щели имеем [1]

$$q(x) = -\frac{w^3(x)}{12\mu_g} \frac{dP}{dx}. \quad (16)$$

Поэтому

$$\frac{Q}{2} - 2 \int_0^x \nu_y^* dx = -\frac{w^3(x)}{12\mu_g} \frac{dP}{dx}. \quad (17)$$

Отобразим внешность трещины на единичный круг в комплексной плоскости $\zeta = \rho_1 e^{i\theta}$. В плоскости ζ запишем фильтрационный потенциал в виде [4]:

$F = -\frac{Q}{2\pi} \ln \zeta - \frac{A_n - iB_n}{\zeta^n}$, где A_n, B_n – вещественные постоянные, и вычислим скорости фильтрации на контуре щели ($\rho_1 = 1$)

$$\nu_x^* = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin \theta} (A_n \sin n\theta - B_n \cos n\theta), \quad (18)$$

$$\nu_y^* = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin \theta} (A_n \cos n\theta - B_n \sin n\theta). \quad (19)$$

Для обеспечения симметрии в формулах (18)–(19) следует положить $B_n = 0$ и $n = 2m$. Подставим (19) в (17), получим условие

$$\frac{2\pi}{Q} \sin \theta \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin n\theta + \frac{\pi w^3}{12Qkl} \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin n\theta - \theta \sin \theta = 0, \quad (20)$$

которое выполняется во всех точках контура щели при $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Используя закон Дарси и формулу (18), найдем распределение давления

$$P = P_c - \frac{\mu g}{k} \int_0^x n A_n \sin n\theta d\theta, \quad (21)$$

при этом на контуре щели $\rho_1 = 1, x = \cos \theta$.

При $x = 0$ равенство (17) принимает вид

$$Q = -\frac{w^3(0)}{6\mu g} \frac{dP}{dx} \Big|_{x=0}. \quad (22)$$

С учетом равенств (14), (21) из формулы (22) получим соотношение для определения длины трещины

$$\frac{\beta\gamma H}{4} l + \frac{1}{\pi} \int_0^l P(t) \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + t^2}}{|t|} dt = \frac{E}{4(1 - \nu^2)} \left[\frac{6Qk}{\sum_{n=2}^{\infty} n A_n \cos n\frac{\pi}{2}} \right]^{1/3}. \quad (23)$$

Для численного решения системы уравнений (13), (20), (21), (23) предложен следующий алгоритм. В нулевом приближении считаем, что давление в трещине распределено по параболическому закону $\tilde{P}(\bar{x}) = P_c - (P_c - P_0)\bar{x}^2, \bar{x} = x/l = \cos \theta$. Полагая в равенстве (21) давление $P(\bar{x})$ равным $\tilde{P}(\bar{x})$, найдем из него численные значения коэффициентов A_n в нулевом приближении. При $A_n = A_n^0$ из трансцендентного уравнения (23) определим длину трещины l^0 . Далее из соотношения (13) найдем в нулевом приближении ширину трещины w^0 , предварительно приравняв длину l величине l^0 . Полагая в равенстве (20) $w = \tilde{w}^0$ и $l = l^0$, определим значения коэффициентов A_n^1 в первом приближении. Подставив в соотношение (21) $A_n = A_n^1$, найдем распределение давления в первом приближении. Далее процедура расчета повторяется до тех пор, пока разности $l^{n+1} - l^n$ и $w^{n+1} - w^n$ не станут пренебрежимо малыми по сравнению с l^n и w^n . Численные исследования показали, что решения во втором и третьем приближениях, как правило, практически совпадают, что свидетельствует о достаточно хорошей сходимости метода.

В таблице приведены результаты расчетов длины трещины l при следующих значениях параметров: $\gamma H = 10$ МПа, $P_c = 11$ МПа, $\beta = 0.96$, $\mu_g = 10^{-7}$ МПа·с, $k = 10^{-13}$ м².

$E = 5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.2$, $P_0 = 5$ МПа				
$Q, \text{м}^3/\text{сут}$		3000	4000	5000
$l, \text{м}$		58.67	64.57	69.56
$E = 5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.2$, $Q = 3000$ м ³ /сут				
$P_0, \text{МПа}$		3	4	5
$l, \text{м}$		322	95.66	58.67
$Q = 3000$ м ³ /сут, $P_0 = 5$ МПа				
$E, \text{МПа}$		$1 \cdot 10^4$		$5 \cdot 10^4$
ν		0.2	0.3	0.2
$l, \text{м}$		64.54	68.08	322.71
				339.68

Таб. 1: Влияние параметров на длину трещины.

Для выбранных вариантов максимальная ширина трещины изменяется от 0.8 см до 4 см. Численно исследовано влияние погрешностей задания исходных данных, содержащихся в уравнениях, на решение задачи. Установлена устойчивость расчетной схемы при вариациях коэффициента Пуассона, модуля упругости и проницаемости среды вблизи выбранных фиксированных значений. Показано, что незначительные отклонения в задании параметров, характеризующих горное давление, боковой распор массива и давление на скважине, могут привести к существенному изменению численного решения задачи, поэтому при расчетах необходимо обращать внимание на точность задания величин $P_0, \beta, \gamma H$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Известия АН СССР. ОТН. 1995. № 5. С. 3–41.
- [2] Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 4.
- [3] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Гостехиздат, 1966. 707 с.
- [4] Чарный И.А. Подземная гидромеханика. М.: Гостехиздат, 1948. 196 с.

Khapilova N.S., Zalyotov V.V., Altukhova M. L. *Numerically-analytical method of research of creating of a crack of hydrorupture.* The dependence of geometrical sizes of vertical crack, formed by liquid injection in degasation hole, from technological parametr and physico-mechanical properties of a rock has been investigated on the basis of mathamatical model.

ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ

Чебаков М. И.

*НИИ механики и прикладной математики им. И.И.Воровича
Ростовский госуниверситет*

Рассмотрены плоские задачи теории упругости о взаимодействии штампа с основанием, образованным двумя упругими слоями с различными механическими свойствами, жестко соединенными между собой и с недеформируемой подложкой. Подошва штампа имеет форму параболы или прямолинейную форму, в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны между собой законом Кулона, а на штамп действуют нормальные и касательные усилия. При этом предполагается, что система штамп-слой находится в условиях предельного равновесия и штамп в процессе деформации слоя не поворачивается. Построены интегральные уравнения, для решения которых используется метод больших λ (см. [1, 2] и др.).

Исследовано влияние геометрических и механических параметров задач на положение области контакта, форму деформированной поверхности слоя вне области контакта, эпюру контактных напряжений и их момента при учете сил трения в области контакта.

Постановка задачи. Рассмотрим область $-h_2 \leq y \leq h_1$, $-\infty < x < \infty$ состоящую из двух слоев $0 \leq y \leq h_1$, $-\infty < x < \infty$ (слой 1) и $-h_2 \leq y \leq 0$, $-\infty < x < \infty$ (слой 2) соответственно, где (x, y) декартовы координаты. Пусть слой 1 и слой 2, имеющие разные упругие постоянные, жестко соединены между собой по границе $y = 0$, граница $y = -h_2$ слоя 2 жестко соединена с недеформируемым основанием, а грань $y = h_1$ слоя 1 взаимодействует со штампом, находящимся под действием нормальной силы P и горизонтальной силы $T = \mu P$. Пусть в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона $\tau_{xy} = \mu \sigma_y$ (μ — коэффициент трения). Будем рассматривать два случая: штамп имеет подошву в виде параболы с радиусом кривизны R в вершине — задача 1 и штамп имеет форму прямоугольника — задача 2. В задаче 1 зона контакта переменна, а в задаче 2 фиксированна. Рассматривается случай предельного равновесия, сила P приложена к штампу с некоторым эксцентриситетом таким образом, что он не поворачивается в процессе деформирования слоя.

В случае плоской деформации с помощью преобразования Фурье поставленные контактные задачи сводятся относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом $q(x)$ к следующему интегральному уравнению (ИУ)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) k \left(\frac{\tau - t}{\lambda} \right) d\tau = \pi g(t) \quad |x| \leq 1, \quad (1)$$

$$\varphi(t) = q(\eta(t)), \quad g(t) = \frac{2\theta}{a+b} \delta(\eta(t)), \quad \lambda = \frac{2h}{a+b}, \quad \eta(t) = \frac{a+b}{2}t - \frac{a-b}{2}, \quad (2)$$

ядро которого представимо в виде двух слагаемых

$$k(t) = k_1(t) - \varepsilon k_2(t), \quad \varepsilon = \frac{(1 - 2\nu_1)\mu}{2(1 - \nu_1)},$$

$$k_1(t) = \int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u} \cos ut du, \quad k_2(t) = \int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u} \sin ut du, \quad (3)$$

$$\delta(x) = \delta - \beta x^2 \text{ (задача 1), } (\beta = \frac{1}{2R}), \quad \delta(x) = \delta \text{ (задача 2),} \quad (4)$$

где δ - перемещение штампа в вертикальном направлении. Для задачи 2 естественно считать, что $b = a$.

Символы ядер могут быть представлены соотношениями

$$L_1(u) = -\frac{n_{01}(u)G^2 + n_{11}G + n_{21}}{d_0(u)G^2 + d_1G + d_2},$$

$$L_2(u) = \frac{n_{02}(u)G^2 + n_{12}G + n_{22}}{d_0(u)G^2 + d_1G + d_2}. \quad (5)$$

Здесь $G = G_2/G_1$, а G_i, ν_i - модули сдвига и коэффициенты Пуассона для слоя 1 ($i = 1$) и слоя 2 ($i = 2$), функции $n_{ij}(u)$ и $d_i(u)$ - известны и зависят только от параметров $H = h_2/h_1, \nu_1$ и ν_2 .

Асимптотическое решение интегрального уравнения. Решение ИУ (1) с ядрами (3), (5) получим асимптотическим методом больших λ , воспользовавшись результатами работы [2], в виде разложения

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \varphi_n(x), \quad (6)$$

$$\varphi_n(x) = X^{-1}(x) \sum_{k=0}^n \beta_{nk} x^k \quad (n \geq 1), \quad (7)$$

$$X(x) = (1+x)^{1/2+\gamma} (1-x)^{1/2-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \arctg \varepsilon, \quad (8)$$

коэффициенты β_{nk} находятся из рекуррентных соотношений. Рекуррентные соотношения для β_{nk} содержат только арифметические операции, что позволяет их легко программировать и с помощью программ, выполняющих аналитические преобразования (типа Maple), получать в аналитическом виде любое конечное число членов в разложениях (6)–(7). Это позволяет находить решение ИУ с любой степенью точности в области сходимости ряда (6).

Зависимость перемещения штампа δ от действующей на штамп вертикальной силы P и величина момента контактных напряжений M может быть без труда найдена.

Для для задачи 2 во всех вышеприведенных формулах необходимо положить $b = a$ и контактные напряжения $q(x) = \varphi(x/a)$ будут иметь особенность, соответствующую особенности функции $X(x)$. Для задачи 1 контактные напряжения под

подошвой штампа найдем по формуле $q(x) = \varphi((2x + a - b)/(a + b))$, предварительно определив границы области контакта из условия равенства нулю контактных напряжений при $x = -a$ и $x = b$. В результате получим следующую систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными a и b

$$\varphi(-1) = 0, \varphi(1) = 0. \tag{9}$$

Отметим, что с учетом (9) функция $\varphi(t)$ представима в виде

$$\varphi(t) = X(-t)\varphi_*(t), \tag{10}$$

где $\varphi_*(t)$ – непрерывная и ограниченная при $|t| \leq 1$ функция.

Если же решение ИУ (1) находить с точностью до членов порядка $O(\lambda^{-2})$, то решение системы (9) может быть выписано явно в виде несложных соотношений. При больших значениях h_1 ($h_1 \gg (a + b)/2$) асимптотически формулы для определения зоны контакта примут вид

$$a = a_s - \frac{d}{h_1} + O\left(\frac{1}{h_1^2}\right), \quad b = b_s + \frac{d}{h_1} + O\left(\frac{1}{h_1^2}\right), \quad d = -\frac{P\mu c_1(1 - 2\nu_1)}{4\pi\beta G_1}, \tag{11}$$

$$a_s = \sqrt{\frac{P(1 - \nu_1)(1 + 2\gamma)}{\pi G_1\beta(1 - 2\gamma)}}, \quad b_s = \sqrt{\frac{P(1 - \nu_1)(1 - 2\gamma)}{\pi G_1\beta(1 + 2\gamma)}}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}.$$

В формулах (11) интервал $(-a_s, b_s)$ – зона контакта при взаимодействии штампа с полупространством [3], при этом всегда $a_s > b_s$, за исключением случая $\nu = 0.5$ ($\gamma = 0$), когда $a_s = b_s$.

Числовые расчеты и выводы. Величина c_1 в формуле (11), так же как и величина d , может менять свой знак в зависимости от значения параметров G и H и коэффициентов Пуассона ν_i ($i = 1, 2$). В табл. 1 приведены значения величины $d^* = G_1d/P$ при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ и некоторых значениях параметров G и H . Из таблицы 1 и формул (11) видно, что величина d возрастает с увеличением любого из параметров: G – относительной жесткости слоев, H – относительной толщины слоев, ν_1, μ или h_1 , что соответственно влияет на положение области контакта. В последней колонке табл. 1 указано значение $G = G^*$, когда $d^* = 0$ при значении H из соответствующей строки.

Таблица 1.

G	0.1	0.25	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	G^*
$H = 0.25$	-0.00536	0.0138	0.0231	0.0290	0.0324	0.0336	0.0342	0.124
$H = 0.5$	-0.0250	0.00123	0.0150	0.0241	0.0297	0.0317	0.0328	0.237
$H = 1.0$	-0.0479	-0.0136	0.00514	0.0181	0.0262	0.0293	0.0309	0.404
$H = 2.0$	-0.0711	-0.0281	-0.0444	0.0121	0.0226	0.0267	0.0289	0.600
$H = 4.0$	-0.0902	-0.0395	-0.0120	0.00724	0.0197	0.0246	0.0272	0.745

На основе полученных выше формул были для задачи 1 проведены расчеты параметров зоны контакта a и b , распределения напряжений под штампом $q(x) = G_1q^*(x)$, перемещения штампа δ и момента контактных напряжений

$M = G_1 M^*$. В табл. 2 приведены результаты расчетов величин a , b , $x_0 = (b - a)/2$ (координата середины зоны контакта), δ , x^* (координата максимальных контактных напряжений), $q^*(x^*)$ (приведенная величина максимальных контактных напряжений) и M^* при $P/G_1 = 0.001$, $\mu = 0.5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $H = h_2/h_1 = 1$ и некоторых значениях параметров $G = G_2/G_1$ и h_1 . В табл. 3 приведены те же величины при $G = 0.25$, $h_1 = 0.05$ и некоторых значениях H .

Таблица 2.

G	h_1	$a \cdot 10$	$b \cdot 10$	$x_0 \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^3$	$x^* \cdot 10^2$	$q^*(x^*)$	$M^* \cdot 10^5$
4	0.4	0.230	0.194	-0.177	0.848	-0.368	0.0301	-0.241
4	0.2	0.228	0.195	-0.164	0.694	-0.355	0.0302	-0.228
4	0.1	0.224	0.195	-0.145	0.542	-0.332	0.0305	-0.208
4	0.05	0.216	0.190	-0.129	0.397	-0.300	0.0315	-0.188
1	0.05	0.223	0.195	-0.139	0.502	-0.325	0.0306	-0.201
0.5	0.05	0.230	0.200	-0.149	0.627	-0.350	0.0297	-0.215
0.25	0.05	0.240	0.207	-0.164	0.848	-0.389	0.0284	-0.235

Таблица 3.

H	a	b	$x_0 \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^2$	$x^* \cdot 10^2$	$q^*(x^*)$	$M^* \cdot 10^5$
1	0.0240	0.0207	-0.164	0.848	-0.389	0.0284	-0.235
2	0.0248	0.0210	-0.189	1.160	-0.426	0.0277	-0.263
4	0.0254	0.0211	-0.216	1.578	-0.459	0.0273	-0.291

На основании формул (11), результатов многочисленных расчетов, в том числе приведенных в табл. 1, 2, 3, а также результатов, полученных в [2], можно сделать ряд выводов о характере зависимости области контакта от некоторых параметров: 1) середина зоны контакта смещается вправо (по направлению действия сдвигающего усилия T) при уменьшении толщины слоёв, при увеличении коэффициента Пуассона верхнего слоя, при увеличении относительной жесткости G нижнего слоя, при увеличении силы P и при увеличении коэффициента трения μ ; 2) возможно такое сочетание параметров, когда: а) положение зоны контакта будет такое же, как и для полупространства, имеющего упругие постоянные верхнего слоя; б) зона контакта будет симметрична относительно первоначальной точки касания; в) момент контактных напряжений будет отрицательным, равным нулю или положительным, г) точка максимальных контактных напряжений будет находиться слева, справа или на оси симметрии штампа; 3) вертикальное перемещение штампа почти не зависит от коэффициента трения.

Для задачи 2 также были проведены расчеты перемещения штампа δ , контактных напряжений $q(x)$, момента M контактных напряжений и формы свободной поверхности вне штампа. В табл. 4 приведены некоторые результаты расчетов перемещения штампа δ , координаты минимальных контактных напряжений x_* , приведенных контактных напряжений $q^*(x)$ в точках $x = -0.9$, $x = 0.9$ и $x = x_*$, приведенного момента M^* контактных напряжений и величины $w(x)$ смещения точек деформированной поверхности $y = h_1$ вне зоны контакта в точках $x = -1.1$

Таблица 4.

G	h_1	$\delta \cdot 10$	$x_* \cdot 10$	$q^*(-0.9)$	$q^*(x_*)$	$q^*(0.9)$	$M^* \cdot 10^2$	$w(-1.1)$	$w(1.1)$
4	4	0.396	0.543	0.0781	0.0327	0.0647	-0.671	0.0285	0.0314
4	2	0.259	0.986	0.0745	0.0353	0.0611	-0.661	0.0167	0.0177
0.25	4	0.865	0.761	0.0843	0.0301	0.0650	-0.908	0.0731	0.0785
0.25	2	0.688	0.130	0.0845	0.0277	0.0720	-0.662	0.0540	0.0605

Таблица 5.

H	$\delta \cdot 10$	$x_* \cdot 10$	$q^*(-0.9)$	$q^*(x_*)$	$q^*(0.9)$	$M^* \cdot 10^2$	$w(-1.1)$	$w(1.1)$
1	0.688	0.130	0.0845	0.0277	0.0720	-0.662	0.0540	0.0605
2	0.994	0.167	0.0882	0.0257	0.0734	-0.758	0.0831	0.0913
4	1.410	0.234	0.0911	0.0245	0.0736	-0.867	0.124	0.133

и $x = 1.1$ при $P/G_1 = 0.1$, $H = 1$, $a = 1$ и некоторых значениях G и h_1 . В табл. 5 приведены те же величины при $h_1 = 2$, $G = 0.25$ и некоторых значениях H .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-01-00002, 05-01-00306)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления и трения// ПММ. 1970. Т.34. Вып.2. С. 246-257.
- [2] Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории. М.: Физматлит, 2004. 304 с.
- [3] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука. 1966. с.

Chebakov M.I. *The plane contact problems for the two-layer basis.* Two plane problems of the elasticity theory about interaction of a stamp with the basis consisting two elastic layers are investigated. The layers joint hardly among themselves and with not deformable basis. The stamp has the form of a parabola or rectangle.

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОМ ЛУРЬЕ-ВОРОВИЧА ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ КОРОТКОГО КОЛЬЦЕВОГО ЦИЛИНДРА

Шалдырван В. А., Васильев Т. А.

Донецкий Национальный университет

Рассмотрено несколько постановок смешанных задач теории упругости об осесимметричном деформировании короткого кольцевого цилиндра. Исследовано влияние типа закрепления боковых поверхностей и расстояния между ними, а также, относительной толщины тела на его напряжённо-деформированное состояние. За счёт специальной нормировки коэффициентов система приводится к виду, позволяющему без выделения особенности получить приемлемую точность решения

Начало исследованию осесимметричного деформирования короткого кольцевого цилиндра положено в работах С.Г Лехницкого, В. Новацкого, Чакраворти, А.А. Баблюяна, и др. [1].

Изучение напряженно-деформированного состояния изотропного кольцевого цилиндра конечных размеров при заданных силовых условиях на поверхности осуществлено методом суперпозиции [2]. При этом достоверные численные результаты получены за счёт анализа бесконечных линейных систем. Аналогичная задача для трансформного материала осуществлена в [3] с использованием метода Лурье-Воровича [4]. В данной работе таким же путём исследуется смешанная задача теории упругости сжатия короткого изотропного кольцевого цилиндра: его боковые поверхности закреплены, а на торцах действуют нормальные нагрузки.

§1 Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическое тело

$$V = \left\{ x_1, x_2, x_3 \mid R_1 \leq R \leq R_2, |x_3| \leq H, R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}. \quad (1)$$

Предположим, что оно деформируется нормальными усилиями, приложенными к торцевым плоскостям

$$\sigma_{zz}(r, \pm 1) = p/2G_{st} = const, \sigma_{rz}(r, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

При этом закрепление боковых поверхностей может быть осуществлено одним из следующих вариантов

$$u(\rho, z) = w(\rho, z) = 0; u(1, z) = w(1, z) = 0; \quad (3)$$

$$w(\rho, z) = \sigma_{\rho\rho}(\rho, z) = 0; u(1, z) = w(1, z) = 0; \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}(\rho, z) = \sigma_{rz}(\rho, z) = 0; u(1, z) = w(1, z) = 0. \quad (5)$$

Функции перемещений (в отсутствии массовых сил) должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (k+1) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{k}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} &= 0, \\ \frac{k+1}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{k}{h} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В соотношениях (2) – (6) и в дальнейшем используются безразмерные величины

$$\begin{aligned} z &= x_3/H, r = R/R_2, \rho = R_1/R_2, h = H/R_2, \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{RR}/2G_{st}, \sigma_{rz} = \sigma_{Rx_3}/2G_{st}, \sigma_{zz} = \sigma_{x_3x_3}/2G_{st}. \end{aligned}$$

§2 Построение решения. Частное решение системы (6) вида

$$u^c(r, z) = 0, w^c(r, z) = 2hz/\mu_2 \quad (7)$$

снимает нагрузку с торцов. Однородное решение задачи, удовлетворяющее уравнениям равновесия и однородным граничным условиям на основаниях цилиндрического тела, построено методом Лурье-Воровича [4,5]

$$\begin{aligned} u^o(r, z) &= 2arz + 2Re \sum_p n_p A_p P_0^+(\gamma_p^* r) \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)} + 2Re \sum_p n_p B_p P_0^-(\gamma_p^* r) \frac{K_0(\gamma_p^* r)}{K_0(\gamma_p^* \rho)}, \\ w^o(r, z) &= -\frac{ar^2}{h} + 4hak_1 \left(1 - \frac{\nu z^2}{2} \right) - 2Re \sum_p q_p A_p \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)} - 2Re \sum_p q_p B_p \frac{K_0(\gamma_p^* r)}{K_0(\gamma_p^* \rho)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Произвол коэффициентов разложений в однородном решении позволяет приближённо удовлетворить граничным условиям (3) (или (4), или(5)).

С помощью идеи метода Бубнова-Галёркина [5] задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которую структурно можно представить в виде

$$\begin{aligned} \alpha_m^i a + \sum_p Re U_{mp}^i Re A_p + \sum_p Im U_{mp}^i Im A_p + \\ + \sum_p Re V_{mp}^i Re B_p + \sum_p Im V_{mp}^i Im B_p = u_m^i, \quad i = \overline{1..4}, m = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $a, Re A_p, Im A_p, Re B_p, Im B_p$ – искомые коэффициенты, а $\alpha_m^i, Re U_{mp}^i, Im U_{mp}^i, Re V_{mp}^i, Im V_{mp}^i$ – заданные выражения.

§3 Численный анализ системы. Для получения достоверных результатов необходимо рассматривать редуцированные системы больших порядков. Использование метода Гаусса с выбором главного элемента приводит к большим затратам машинного времени и потери точности решения. Прямое применение к системе (10) более быстрых итерационных методов оказалось безрезультатным. Поэтому была

проведена нормировка функций $n_p(z)$ и $q_p(z)$, входящих в представление решения (8). Так как указанные функции определены с точностью до произвольных множителей, то в качестве нормирующих коэффициентов использовались числа $\frac{1}{\gamma_p^\alpha}$, где α – вещественный показатель, величина которого должна быть заключена в интервале $0 < \alpha < 1$. Количество оставляемых при этом неизвестных в системе определяется в результате численного эксперимента.

Качество решения можно наблюдать по степени удовлетворения граничным условиям (3) ((4), (5)), поскольку уравнения равновесия (6) и граничные условия на торцах (1) выполняются точно. Для случая жесткой заделки обоих болковых поверхностей было установлено, что для материала с $\nu = 0.3$, $h = 0.25$, $r = 0.5$ при количестве $n = 100$ слагаемых в рядах (8) максимальная невязка составляет $1 * 10^{-2}$; при количестве $n = 200 - 6 * 10^{-3}$; при количестве $n = 400 - 3 * 10^{-3}$... и, наконец, при $n = 5000 - 6 * 10^{-4}$.

§4 Анализ результатов. Влияние геометрических параметров на НДС короткого кольцевого цилиндра с жестко заделанными криволинейными поверхностями можно наблюдать из данных таблиц 1 и 2. В табл.1 представлено распределение $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль внутренней граничной поверхности (материал – кадмий $\nu = 0.3$, $G = 50$ ГПа). В табл.2 – распределение $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль внешней граничной поверхности. При этом, параметр нагрузки p в (2) мы каждый раз выбирали так, чтобы главный вектор усилий был одинаковым для всех размеров цилиндра.

h	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.5	0.3	0.181	0.187	0.201	0.214	0.177
	0.5	0.138	0.147	0.175	0.216	0.223
	0.7	0.064	0.076	0.115	0.194	0.309
1.0	0.3	0.055	0.062	0.087	0.135	0.193
	0.5	0.024	0.031	0.053	0.104	0.200
	0.7	0.004	0.006	0.018	0.058	0.190

Таблица 6. Характер распределения напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль внешней криволинейной поверхности при разных значениях геометрических параметров

h	ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.5	0.3	0.174	0.178	0.187	0.195	0.165
	0.5	0.138	0.146	0.170	0.203	0.207
	0.7	0.065	0.077	0.115	0.191	0.296
1.0	0.3	0.057	0.064	0.086	0.126	0.166
	0.5	0.025	0.031	0.054	0.103	0.185
	0.7	0.004	0.006	0.018	0.059	0.186

Таблица 7. Характер распределения напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль внутренней криволинейной поверхности при разных значениях геометрических параметров

Из данных таблиц следует, что: с увеличением толщины тела напряжения уве-

личиваются только вблизи его торцевых поверхностей, тогда как внутри цилиндра их значения существенно уменьшаются; сближение цилиндрических поверхностей приводит к перераспределению напряжений так, что напряжения вблизи срединной поверхности уменьшаются, а у торцов увеличиваются; на внешней и на внутренней граничной поверхности существует область приблизительно равных напряжений, которая с ростом толщины или сближением криволинейных граничных поверхностей расширяется к торцам цилиндра.

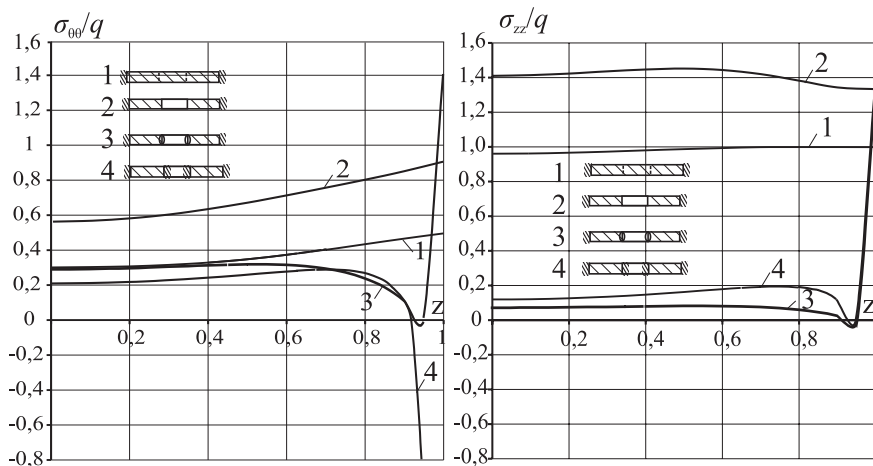


Рис. 1. Распределение напряжений вдоль внутренней криволинейной поверхности

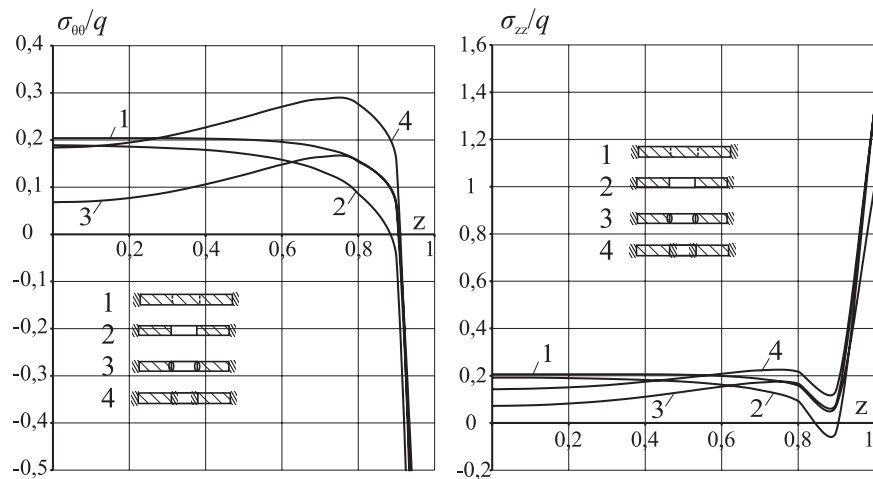


Рис. 2. Распределение напряжений вдоль внешней криволинейной поверхности

В кольцевом цилиндре происходит перераспределение напряжений. На рис.1 и рис.2 представлены напряжения вдоль цилиндрических граничных поверхностей при разных способах закрепления отверстия, при этом для сплошной плиты напряжения вычислялись вдоль мысленно выделенной полости. Из рисунков видно, что: при свободном отверстии наблюдается эффект разгрузки, т. е. на внешней границе напряжения уменьшаются, в то время как у внутренней увеличиваются;

вблизи угловых окружностей напряжения во всех случаях возрастают; в случае шарнирного закрепления напряжения наименьшие.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баблюян А.А. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала // Известия АН СССР, серия физ.мат. науке. 1961. № 1. С. 61–70.
- [2] Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Киев : Наук. думка, 1985. 280 с.
- [3] Шалдырван В.А., Сумцов А.А., Сорока В.А. Исследование концентрации напряжений в полых коротких цилиндрах из трансверсально-изотропных материалов // Прикл. механика. 1999. 35, № 7. С. 43–48.
- [4] Шалдырван В.А. Метод однородных решений Лурье-Воровича – оценки бигармонической проблемы, обобщения, приложения // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости смежд. участием. Ростов н/Д: Книга, 2004, С. 401–403.
- [5] Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. Киев : Наук. думка, 1978. 240 с.

Shaldyrvan V.A., Vasiliev T.A. *Some numerical features in Lur'e-Vorovitch procedure applied for problem of deformation in short ring cylinder.* Some statements of the mixed problems in the theory of elasticity about axissymmetric deformation of the short ring cylinder are considered. The influence fastening lateral surfaces and distance between them, and also, relative thickness of a body on its strain-state is investigated. At the expense of special norm of factors the system is resulted allowing without allocation feature to receive acceptable accuracy of the decision.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАСТЯНУТОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ КРУЧЕНИИ И ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ

Шейдаков Д. Н.

Ростовский госуниверситет

В настоящей работе на основе трехмерных уравнений нелинейной теории упругости изучается вопрос устойчивости растянутой цилиндрической трубы при кручении и внутреннем давлении. При исследовании данной проблемы рассматривается полый цилиндр бесконечной длины. Для двух конкретных моделей несжимаемых материалов определены критические поверхности и область неустойчивости в пространстве параметров нагружения. Проанализировано влияние толщины стенки полого цилиндра на его выпучивание. На основе полученных результатов сформулирован простой и эффективный практический критерий устойчивости при растяжении, который может быть представлен в форме постулата Друкера, сформулированного в терминах внешних нагрузок.

Проблема устойчивости механических систем имеет большое научное и прикладное значение, так как исчерпание несущей способности и разрушение строительных и инженерных конструкций часто наступает вследствие потери устойчивости под действием внешних нагрузок. При этом в подавляющем большинстве опубликованных работ по упругой устойчивости как тонких, так и массивных тел рассматривается бифуркация равновесия при сжимающих нагрузках. Однако упругая неустойчивость может проявиться и при растягивающих напряжениях. Настоящая работа посвящена анализу устойчивости растянутого полого цилиндра бесконечной длины при кручении и внутреннем давлении.

Система уравнений эластостатики изотропного несжимаемого тела [1] при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (1)$$

и уравнений состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \alpha_1(I_1, I_2) \mathbf{F} - \alpha_2(I_1, I_2) \mathbf{g} - p_0 \mathbf{E} \\ \alpha_1(I_1, I_2) &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \alpha_2(I_1, I_2) = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{T} — тензор напряжений Коши, \mathbf{g} — мера деформации Альманзи, \mathbf{F} — мера деформации Фингера, I_1, I_2 — первый и второй инварианты тензора \mathbf{F} , \mathbf{E} — единичный тензор, p_0 — составляющая напряжения в несжимаемом теле, не выражаемая через деформацию, $W(I_1, I_2)$ — удельная потенциальная энергия деформации упругого материала, ∇ — набла-оператор в координатах деформированного тела (эйлеровых координатах).

Деформация растяжения (сжатия) и раздувания полого цилиндра [1] в случае несжимаемого материала задается соотношениями

$$R = \sqrt{\omega + \alpha^{-1}(r^2 - r_1^2)}, \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \alpha z, \quad \alpha, \psi, \omega = \text{const} \quad (3)$$

В этих формулах r, φ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации тела (лагранжевы координаты), R, Φ, Z — цилиндрические координаты в деформированной конфигурации, α — коэффициент растяжения по оси цилиндра, ψ — угол закручивания на единицу длины, $\pi\omega$ — площадь просвета деформированного полого цилиндра, r_1 — внутренний радиус цилиндра в ненапряженном состоянии. Соответствующие (3) выражения мер деформации имеют вид

$$\mathbf{F} = f_2(R) \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + f_1(R) f_2^{-1}(R) \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \alpha\psi R (\mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_\Phi) + \alpha^2 \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_Z \quad (4)$$

$$\mathbf{g} = f_2^{-1}(R) \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R + \alpha^2 f_2(R) \mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_\Phi - \alpha\psi R f_2(R) (\mathbf{e}_\Phi \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_\Phi) + f_1(R) \mathbf{e}_Z \mathbf{e}_Z$$

$$f_1(R) = \alpha^{-2} (r_1^2 \psi^2 + \alpha \psi^2 [R^2 - \omega] + 1), \quad f_2(R) = (\alpha R)^{-2} (r_1^2 + \alpha [R^2 - \omega])$$

Здесь $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$ — ортонормированный векторный базис эйлеровых цилиндрических координат.

Из уравнений (1), (2) и соотношений (4) находятся выражения для компонент тензора напряжений Коши в базисе эйлеровых координат в случае, когда внешняя поверхность полого цилиндра свободна от нагрузок

$$\sigma_{RR} = \int_R^{R_0} [(f_2(\rho) - f_1(\rho) f_2^{-1}(\rho)) \varkappa_1(\rho) + (\alpha^2 f_2(\rho) - f_2^{-1}(\rho)) \varkappa_2(\rho)] \frac{d\rho}{\rho}$$

$$p_1 = f_2(R) \varkappa_1(R) - f_2^{-1}(R) \varkappa_2(R) - \sigma_{RR}, \quad R_0 = \sqrt{\omega + \alpha^{-1} (r_0^2 - r_1^2)}$$

$$\sigma_{\Phi\Phi} = f_1(R) f_2^{-1}(R) \varkappa_1(R) - \alpha^2 f_2(R) \varkappa_2(R) - p_1, \quad \tau_{RZ} = \tau_{R\Phi} = 0$$

$$\sigma_{ZZ} = \alpha^2 \varkappa_1(R) - f_1(R) \varkappa_2(R) - p_1, \quad \tau_{\Phi Z} = \alpha\psi R [\varkappa_1(R) + f_2(R) \varkappa_2(R)]$$

В этих формулах r_0 и R_0 — внешние радиусы цилиндра до и после деформации.

Продольная сила P и крутящий момент M , действующие в любом поперечном сечении полого цилиндра, а также давление p , приложенное к его внутренней поверхности, являются функциями параметров нагружения α, ψ, ω

$$P(\alpha, \psi, \omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_0} \sigma_Z(\rho) \rho d\rho, \quad M(\alpha, \psi, \omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_0} \tau_{Z\Phi}(\rho) \rho^2 d\rho$$

$$p(\alpha, \psi, \omega) = -\sigma_{RR}(R_1)$$

Здесь $R_1 = \sqrt{\omega}$ — внутренний радиус цилиндра после деформации.

Исследование устойчивости проводится с помощью бифуркационного критерия. Рассматривается возмущенное состояние равновесия, бесконечно близкое к докритическому и существующее при тех же внешних условиях. Линеаризованные уравнения равновесия несжимаемого тела, описывающие возмущенное состояние, имеют вид [1–3]

$$\nabla \cdot \Theta = 0, \quad \Theta = \mathbf{T}^\bullet - (\nabla \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T}^\bullet = \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{T}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}) \right]_{\eta=0} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = u \mathbf{e}_R + v \mathbf{e}_\Phi + w \mathbf{e}_Z$$

В этих формулах Θ — линейризованный тензор напряжений Пиолы, \mathbf{R} — радиус-вектор в невозмущенном состоянии, \mathbf{w} — вектор возмущений.

Линейризованные граничные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R \cdot \Theta &= 0 \quad \text{при} \quad R = R_0 \\ \mathbf{e}_R \cdot \Theta &= p \mathbf{e}_R \cdot (\nabla \mathbf{w})^T \quad \text{при} \quad R = R_1 \end{aligned} \quad (6)$$

выражают отсутствие в возмущенном состоянии нагрузки на внешней боковой поверхности цилиндра и следящий характер гидростатической нагрузки, действующей на внутренней поверхности.

Компоненты вектора возмущений u, v, w и линейризованная функция гидростатического давления $q = -p_0^\bullet$ разыскиваются в виде

$$\begin{aligned} u &= U(R) \cos(n\Phi + \lambda Z), & v &= V(R) \sin(n\Phi + \lambda Z) \\ w &= W(R) \sin(n\Phi + \lambda Z), & q &= Q(R) \cos(n\Phi + \lambda Z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

что позволяет отделить переменные Φ, Z в уравнениях нейтрального равновесия (5) и граничных условиях (6) и свести исследование устойчивости к решению линейной однородной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная однородная краевая задача решается с использованием численного метода, предложенного в [3]. Расчеты устойчивости проводились для двух моделей несжимаемых материалов - материала Бидермана [4], удельная потенциальная энергия деформации которого задается соотношением

$$W(I_1, I_2) = d_0(I_2 - 3) + d_1(I_1 - 3) + d_2(I_1 - 3)^2 + d_3(I_1 - 3)^3$$

$$d_0 \geq 0, \quad d_1 \geq 0, \quad d_3 \geq 0, \quad d_1 + d_3 \geq 0, \quad 3d_2 + \sqrt{15d_1d_3} \geq 0$$

и степенного материала [5], с потенциалом вида

$$W(I_1, I_2) = d(I_1 - 3)^\beta, \quad d > 0, \quad \beta \geq 1/2$$

Путем решения линейризованных уравнений равновесия, в пространстве параметров нагружения α, ψ, ω построены критические поверхности, соответствующие различным значениям параметров λ и n . В результате анализа полученных поверхностей найдена область устойчивости. Как показало исследование, область, в которой возможно неосесимметричное выпучивание ($n > 0$), вложена в область существования осесимметричных решений ($n = 0$) линейризованной краевой задачи (5) — (7). Поэтому для построения области устойчивости при растягивающей осевой нагрузке достаточно рассмотреть проблему устойчивости только относительно осесимметричных возмущений. Также установлено, что для тонких полых цилиндров (толщина стенки составляет менее 5% от диаметра в недеформированном состоянии) область устойчивости в пространстве параметров α, ψ, ω почти не зависит от толщины стенки цилиндра.

На рис. 1 для материала Бидермана с набором констант $d_0 = 0, d_1 = 27, d_2 = -60, d_3 = 80$ приведены сечения области устойчивости поверхностями на

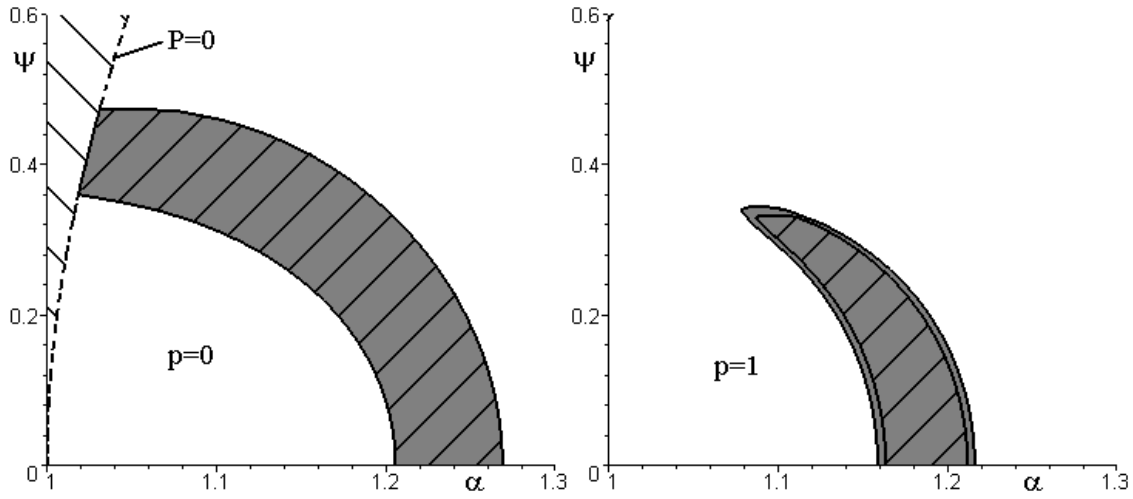


Рис. 1. Сечения области устойчивости

которых внутреннее давление постоянно. Толщина стенки полого цилиндра составляет 5% от диаметра. Закрашена область неустойчивости. Область, лежащая слева от кривой $P = 0$, соответствует случаю сжимающей осевой нагрузки, который не представляет интереса в рамках данного исследования.

Помимо проведенного анализа выпучивания, сформулирован достаточно эффективный критерий устойчивости при растяжении, который записывается в виде условия выпуклости погонной потенциальной энергии

$$\Pi(\alpha, \psi, \omega) = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} \rho W(I_1(\rho), I_2(\rho)) d\rho$$

как функции параметров нагружения. Данный критерий имеет простую физическую интерпретацию. Именно, используя энергетические соотношения

$$\begin{aligned} P(\alpha, \psi, \omega) &= \frac{\partial \Pi(\alpha, \psi, \omega)}{\partial \alpha}, & M(\alpha, \psi, \omega) &= \frac{\partial \Pi(\alpha, \psi, \omega)}{\partial \psi} \\ p_1(\alpha, \psi, \omega) &= \frac{\partial \Pi(\alpha, \psi, \omega)}{\partial \omega}, & p_1(\alpha, \psi, \omega) &= \alpha \pi r(\alpha, \psi, \omega) \end{aligned} \quad (8)$$

условие выпуклости потенциала Π может быть записано в форме постулата Друкера [6], т.е. требования положительности работы приращений обобщенных сил на малых приращениях обобщенных перемещений

$$dP d\alpha + dM d\psi + dp_1 d\omega > 0$$

Данный критерий выбран не случайно. Существует строгая теорема, доказанная [7] для цилиндра произвольного сечения из сжимаемого материала и кругового цилиндра из несжимаемого материала [8], согласно которой при простом растяжении отсутствует бифуркация равновесия цилиндра на возрастающем участке

диаграммы растяжения $P(\alpha)$. Так как при одноосном растяжении погонная энергия Π является функцией только параметра α , то, согласно (8), требование ее выпуклости, является достаточным условием устойчивости равновесия цилиндра при осевом растяжении и это строгий результат.

Результат сравнения области строгой выпуклости погонной энергии Π с областью устойчивости для скрученного и растянутого полого цилиндра при внутреннем давлении представлен на рис. 1. На графиках заштрихована область, в которой потенциальная энергия перестает быть выпуклой. При отсутствии внутреннего давления эти области малоразличимы, причем потеря устойчивости в области выпуклости не происходит. При внутреннем давлении не равном нулю, бифуркация равновесия цилиндра при выпуклой погонной энергии возможна, но в тоже время различия между областью устойчивости и областью выпуклости не очень велики. Данный результат не зависит от модели материала и толщины стенки полого цилиндра.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00638).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 848–852.
- [3] *Зубов Л.М., Моисеенко С.И.* Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 78–84.
- [4] *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О признаках выполнимости условия Адамара для высокоэластичных материалов // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 21–31.
- [5] *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Об особенностях потери устойчивости нелинейно-упругого прямоугольного бруса // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 65–83.
- [6] *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [7] *Spector S.J.* On the absence of bifurcation for elastic bars in uniaxial tension // Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1984. V. 85. No. 2. P. 171–199.
- [8] *Зубов Л.М., Шейдаков Д.Н.* О влиянии кручения на устойчивость упругого цилиндра при растяжении // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 1. С. 53–60.

Sheidakov D.N. *Buckling of a stretched hollow cylinder under torsion and inflation.* In this paper in the framework of the three-dimensional nonlinear theory of elasticity problem of stability for a stretched hollow cylinder under torsion and inflation is considered. For two particular models of incompressible material critical surfaces and instability region are plotted in the space of deformation parameters. Influence of the wall thickness on buckling is analyzed. Based on obtained facts simple approximate criterion of stability under tension stresses is formulated. This criterion can be represented in the form of Drucker postulate.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ ГРАНИЦЫ

Шишкина О. В., Келлер И. Э., Трусов П. В.

Пермский государственный технический университет

С целью установления определяющих соотношений, описывающих явление сверхпластичности, теоретически исследована устойчивость одноосного растяжения образца из нелинейно вязкого материала с переменной чувствительностью к скорости деформации к малым возмущениям его боковых границ. Выяснено, что возмущения в виде периодически повторяющихся шеек начинают расти при определенном удлинении, зависящем от текущего значения чувствительности к скорости деформации и периода возмущения.

Данное исследование имеет отношение к проблеме феноменологического описания состояния материала, обеспечивающего необыкновенно большие удлинения образцов в опытах на одноосное растяжение. Неограниченному удлинению образца мешает развитие несовершенств его боковой поверхности, приводящее к образованию шейки и последующему разрушению. В исследуемом же состоянии в силу неизвестных механизмов развитие таких несовершенств тормозится или они вообще сглаживаются, причем может наблюдаться множественное возникновение и замораживание шеек. В последнем случае идентификация определяющих соотношений (по данным неоднородно деформируемых образцов) представляет собой некорректную задачу. Для ее решения следует искать такие типы определяющих уравнений среды, чтобы записанные для нее уравнения равновесия в кинематических переменных имели решения с развивающимися и замораживающимися “шейками”. Для этого, в общем, необходимо выполнить групповой анализ оператора равновесия, но в данной работе некоторые жесткие ограничения на вид определяющих уравнений мы получаем, исследуя устойчивость деформирования образца к малым возмущениям его боковых границ.

Сказанное выше интересует нас применительно к поликристаллам в узких структурных, температурных и скоростных условиях “сверхпластического” течения [1–3] (хотя явление наблюдается также в полимерах и эластомерах). Экспериментальные данные позволяют принять гипотезу о нелинейно-вязкой реологии сверхпластичной среды, которая дополняется нами допущением о тензорно-линейном характере связи тензора напряжений Коши с тензором деформации скорости и о несжимаемости среды. Тогда для плоского случая уравнения равновесия в скоростях перемещений в ортобазисе имеют вид

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} = 0, \quad \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0, \quad v_{x,x} + v_{y,y} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{xx} + p = -\sigma_{yy} - p = \tau(\xi) \frac{v_{x,x} - v_{y,y}}{\xi}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau(\xi) \frac{v_{x,y} + v_{y,x}}{2\xi} \quad (2)$$

В записанных уравнениях $\sigma_{\alpha\beta}$ — компоненты девиатора тензора напряжений Коши, p — гидростатическое давление, v_α — компоненты вектора скорости перемещения, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(v_{x,x} - v_{y,y})^2 + (v_{x,y} + v_{y,x})^2}$ — интенсивность девиатора тензора

деформации скорости, $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{x,x} - \sigma_{y,y})^2 + (\sigma_{x,y} + \sigma_{y,x})^2}$ — интенсивность девиатора тензора напряжений Коши. Предполагается, что вид функции $\tau(\xi)$ обеспечивает устойчивость течения образца к возмущениям его боковых границ. При растяжении прямоугольного образца с фиксированной скоростью удлинения v_0 скорость деформации $\xi = v_0/l$ уменьшается по мере увеличения длины образца l . В подобных экспериментах величина $m = \frac{\partial \ln \tau}{\partial \ln \xi}$, называемая “чувствительностью к скорости деформации”, довольно резко растет от умеренных величин $0 < m < 1$ до $m \geq 1$, а затем спадает и даже может принимать отрицательные значения (“скоростное разупрочнение”) [1, 2] (рис. 1).

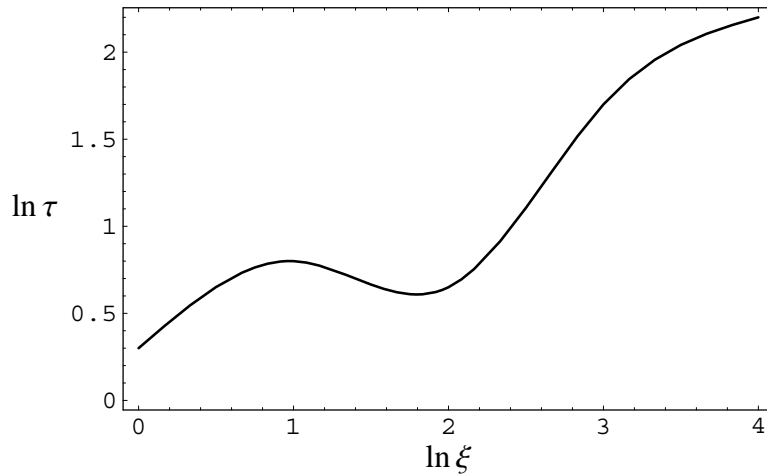


Рис. 1. Качественный вид зависимости $\ln \tau(\ln \xi)$ у сверхпластичных материалов

Система уравнений (1), (2) дополняется граничными условиями на торцах прямоугольного образца:

$$v_x(x=0) = 0, \quad v_x(x=l) = v_0 > 0, \quad \sigma_{xy}(x=0) = \sigma_{xy}(x=l) = 0 \quad (3)$$

и на его боковых границах:

$$\sigma_{yy}(y=-b) = \sigma_{yy}(y=b) = 0, \quad \sigma_{yx}(y=-b) = \sigma_{yx}(y=b) = 0 \quad (4)$$

где l и $2b$ — длина и ширина образца в текущий момент времени.

Задача (1)-(4) имеет решение, соответствующее однородному полю деформаций скорости

$$v_x = \frac{x}{l} v_0, \quad v_y = -\frac{y}{l} v_0, \quad \xi_0 = \frac{v_0}{l}, \quad \sigma_{xx} = 2\tau(\xi_0), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (5)$$

Пусть в рассматриваемый момент времени боковые границы образца $y = \pm b$ возмущаются симметрично или антисимметрично относительно оси x ,

$$y = \pm b \pm \eta \quad \text{или} \quad y = \pm b + \eta, \quad \eta = \delta \cos ax \quad (6)$$

где δ — мало. Данные формы возмущений опаснее комбинированных. Возмущение границ приводит к возникновению возмущений полей (5), удовлетворяющих линеаризованным вблизи (5) уравнениям равновесия (1), (2)

$$\sigma'_{xx,x} + \sigma'_{yx,y} = 0, \quad \sigma'_{xy,x} + \sigma'_{yy,y} = 0, \quad v'_{x,x} + v'_{y,y} = 0 \quad (7)$$

$$\sigma'_{xx} + p' = -\sigma'_{yy} - p' = \frac{\partial \tau}{\partial \xi}(\xi_0)(v'_{x,x} - v'_{y,y}), \quad \sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = \frac{\tau(\xi_0)}{2\xi_0}(v'_{x,y} + v'_{y,x}) \quad (8)$$

и граничным условиям

$$v'_x(x=0) = v'_x(x=l) = 0, \quad \sigma'_{xy}(x=0) = \sigma'_{xy}(x=l) = 0 \quad (9)$$

$$\pm 2\tau(\xi_0)a\delta \sin ax + \sigma'_{yx}(y = \pm b) = 0, \quad \sigma'_{yy}(y = \pm b) = 0 \quad (10)$$

Плюс и минус перед 2τ соответствуют симметричному и антисимметричному возмущениям (6).

Из (7), (8) нетрудно получить уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\nu \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (11)$$

где φ — функция тока возмущений поля скорости перемещений, $v'_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $v'_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, а $\nu = 2m - 1$. Коэффициент ν зависит только от чувствительности к скорости деформации; экспериментальные данные не позволяют наложить на него какие-либо ограничения. При $m > 0$ ($\nu > -1$) уравнение (11) имеет эллиптический тип, а при $m \leq 0$ ($\nu \leq -1$) — гиперболический.

Аналогичная задача для вязко-пластической среды с линейной вязкостью решена А.А. Ильюшиным и А.Ю. Ишлинским [4]. Несмотря на то, что она соответствует случаю $-1 < \nu < 1$, выполненное в цитируемой работе решение может быть формально использовано и для остальных случаев. Опуская поэтому процедуру его получения, обратимся к результатам.

Возмущение имеет тенденцию расти, если вертикальная составляющая возмущения скорости перемещения v'_y на боковой границе имеет тот же знак, что и само возмущение η , то есть

$$\frac{v'_y}{\eta} \left(\frac{v_0}{l} \right)^{-1} = \frac{2 \sin 2\alpha z}{\beta(\beta \sin 2\alpha z \pm \alpha \sinh 2\beta z)} > 0 \quad (12)$$

для $-1 < \nu < 1$, где $\alpha = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{1+\nu}{2}}$,

$$\frac{v'_y}{\eta} \left(\frac{v_0}{l} \right)^{-1} = \frac{2 \sinh 2\alpha z}{\beta(\beta \sinh 2\alpha z \pm \alpha \sinh 2\beta z)} > 0 \quad (13)$$

для $\nu \geq 1$, где $\alpha = \sqrt{\frac{\nu-1}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{1+\nu}{2}}$, и

$$\frac{v'_y}{\eta} \left(\frac{v_0}{l} \right)^{-1} = -\frac{2 \sin 2\alpha z}{\beta(\beta \sin 2\alpha z \pm \alpha \sin 2\beta z)} > 0 \quad (14)$$

для $\nu \leq -1$, где $\alpha = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{-\nu-1}{2}}$. В (12)-(14) знаки плюс и минус соответствуют симметричным и антисимметричным возмущениям, а величина $z = \pi k \frac{b}{l}$ представляет собой кратность числа полуволин k к отношению длины образца к его полуширине.

Зависимости $\frac{v'_y}{\eta} \left(\frac{v_0}{l}\right)^{-1}$ от z (12) и (13) показаны на рис. 2. Представим себе, что мы пробегаем непрерывный ряд однородных конфигураций удлиняющегося образца, независимо возмущаем каждую из них и изучаем реакцию. В начале процесса, когда чувствительность к скорости деформации m располагается в пределах от 0 до 1, симметричная или антисимметричная мода возмущения с k полуволнами проходит чередующиеся фазы роста и сглаживания, пока при $\frac{l}{b} = 2\alpha k$ симметричная мода окончательно не станет постоянно расти, а антисимметричная — исчезать. Как только параметр m превысит 1, любая симметричная мода будет расти, а антисимметричная — затухать. При $m > 0$ скорость роста или затухания повышается с уменьшением k . Наконец, при уменьшении m ниже нуля симметричные моды претерпевают чередующиеся фазы взрывоподобного роста и разрыва скорости от $+\infty$ до $-\infty$, а с антисимметричными модами все происходит в противофазе (графики не приведены).

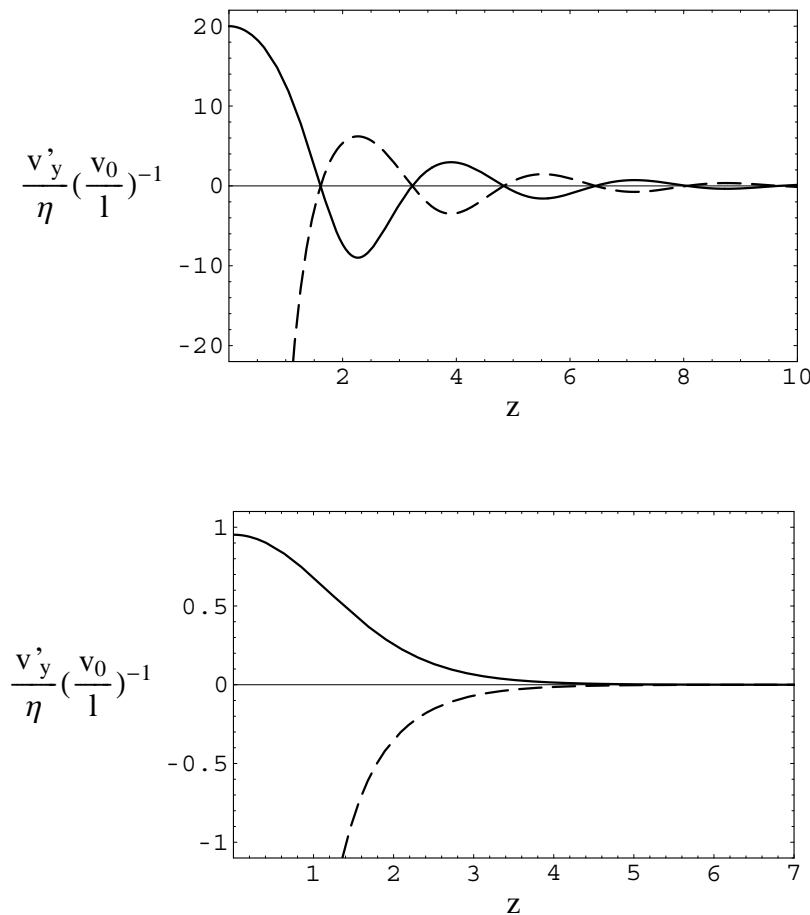


Рис. 2. Скорость роста в зависимости от z для $0 < m < 1$ (вверху) и $m \geq 1$ (внизу), сплошная линия соответствует симметричному возмущению, пунктирная — антисимметричному

Таким образом, выяснено:

- а) способность неограниченно расти имеют лишь симметричные несовершенства (шейки), в отличие от антисимметричных (волн);
- б) обнаруженное чередование фаз роста и затухания любой моды несовершенств боковой поверхности образца при его удлинении в сочетании со случайным характером их распределения в реальности может иметь отношение к экспериментально наблюдаемому сложному процессу развития, замораживания и взаимодействия множества шеек [1];
- в) при любом $m > 0$ произвольное волновое симметричное возмущение *растет*, начиная с некоторой степени удлинения, в отличие от того, что утверждают фигурирующие в литературе по сверхпластичности критерии устойчивости Россара, Кэмпбелла и Харта [3], содержащие гораздо больше произвола, чем взято в настоящем исследовании;
- г) результат для $m \leq 0$, трудный для интерпретации, вероятно, вызван навязанной задачей диффузным “ответом” на возмущение, хотя гиперболический режим допускает развитие локализованных решений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-Урал (N 04-01-96053).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пресняков А.А., Аубакирова Р. Сверхпластичность металлических материалов. Алма-Ата: Наука, 1982. 320 с.
- [2] Рудаев Я.И. Введение в механику динамической сверхпластичности. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2003. 134 с.
- [3] Пуарье Ж.П. Высокотемпературная пластичность кристаллических тел. М.: Металлургия, 1982. 272 с.
- [4] Ишминский А.Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // Прикладная математика и механика. 1943. № 2. С. 109–130.

Shishkina O.V., Keller I.E., Trusov P.V. *On stability of superplastic flow to small boundary perturbations.* For the establishment of superplasticity constitutive equations the stability of variable strain rate sensitivity nonlinear-viscous body uniaxial tension to its boundaries small perturbations was theoretically studied. It has been clear that perturbations in form of periodically repeated necks were begun growing under the certain elongation depending on strain rate sensitivity current value and of perturbations period.

АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕЖФАЗНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

Шкутин Л. И.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Металлические сплавы, испытывающие фазовые превращения при термоциклировании, применяются, в основном, для изготовления термочувствительных конструктивных элементов. В тонкостенных элементах такие сплавы наиболее ярко проявляют эффект памяти формы. Уникальные механические свойства сплава с памятью формы связаны с его термоупругими фазовыми превращениями. Охлаждение нагруженного образца в интервале фазового превращения порождает фазовую деформацию, девиатор которой при фиксированной температуре пропорционален девиатору внутреннего напряжения. При последующем нагревании образца через интервал обратного превращения ранее приобретенная фазовая деформация частично или полностью исчезает (эффект памяти формы). К настоящему времени достигнуты определенные успехи в построении математических уравнений, моделирующих эффекты фазовых превращений и памяти формы. В данной работе используются микромеханические определяющие соотношения, предложенные и обоснованные в публикациях Мовчана А.А. [1, 2]. Решения рассмотренных задач получены в рамках кинематической модели стержня с независимыми поворотами поперечных сечений [3].

Системы координат. Пусть $x_J (\forall J = 1, 2, 3)$ — декартова система координат, относительно которой происходит движение материальных точек деформируемого стержня, \mathbf{i}_J — ортонормированный базис этой системы. Локальная система координат t_J с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_J^\circ(t_3)$ связывается с базовой линией стержня так, что t_3 — внутренний параметр линии, t_1 и t_2 — поперечные координаты.

Рассмотрим стержень с плоской базовой линией, которую зададим до деформации параметрическими уравнениями $\mathbf{x} = x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$, $x_2 = x_2(t_3)$, $x_3 = x_3(t_3) \forall t_3 \in [0, l]$, где $\mathbf{x}(t_3)$ — позиционный вектор произвольной точки, l — длина линии. Координаты произвольной точки стержня задает вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t_i\mathbf{e}_i^\circ (\forall i = 1, 2)$. Ортонормальные базисы \mathbf{i}_J и \mathbf{e}_J° могут быть связаны друг с другом ортогональным преобразованием $\mathbf{e}_1^\circ = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_2^\circ = \mathbf{i}_2 \cos \theta_0 + \mathbf{i}_3 \sin \theta_0$, $\mathbf{e}_3^\circ = -\mathbf{i}_2 \sin \theta_0 + \mathbf{i}_3 \cos \theta_0$, где $\theta_0(t_3)$ — угол поворота базиса \mathbf{e}_J° относительно вектора \mathbf{i}_1 .

При плоской деформации базовая линия стержня остается плоской и представляется позиционным вектором $\mathbf{a} = a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$, где $a_2(t_3)$, $a_3(t_3)$ — искомые декартовы координаты точки t_3 . Ортогональным преобразованием $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 \cos \theta + \mathbf{i}_3 \sin \theta$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{i}_2 \sin \theta + \mathbf{i}_3 \cos \theta$ вводится локальный ортонормированный базис $\mathbf{e}_J(t_3)$, вращающийся в процессе деформации. Здесь $\theta(t_3)$ — угол поворота базиса относительно \mathbf{i}_1 . Положение произвольной точки стержня в процессе деформации определяется вектором $\mathbf{g} = \mathbf{a} + t_i\mathbf{e}_i$. Эта основная кинематическая аппроксимация задает движение каждого поперечного сечения как твердого тела с двумя трансляционными ($a_2(t_3)$, $a_3(t_3)$) и одной ротационной ($\theta(t_3)$) степенями свободы [3].

Определяющие соотношения. Для связи деформаций с напряжениями в интервале прямого фазового превращения используется система микромеханических определяющих соотношений [1]

$$\begin{aligned} w_{32} &= \phi_{32} + S_{32}/G, & w_{33} &= \phi_{33} + S_{33}/E, \\ d\phi_{32} &= (\varkappa_0 \phi_{32} + S_{32}/\sigma_0) dq, & d\phi_{33} &= (\varkappa_0 \phi_{33} + 2S_{33}/(3\sigma_0)) dq, \end{aligned} \quad (1)$$

$$q = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{T_+ - T}{T_+ - T_-} \right), \quad T_- \leq T \leq T_+, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Здесь w_{33} , w_{32} — полные деформации растяжения–сжатия и поперечного сдвига; S_{33} , S_{32} — внутренние напряжения; ϕ_{33} , ϕ_{32} — фазовые деформации; E , G — модули упругости сплава; \varkappa_0 , σ_0 — экспериментальные константы сплава в интервале прямого превращения; q — внутренний параметр состояния, трактуемый как объемная доля мартенситной фазы; T_+ , T_- — температуры начала и завершения прямого превращения; T — текущая температура. Дополнительно полагаем, что фазовое превращение — это изотермический процесс с равномерным распределением температуры по объему образца и поэтому параметр q не зависит от координат.

Как видно из (1), фазовые деформации определяются дифференциальными (по параметру q) уравнениями. Фигурирующие в (1) модули упругости сплава не остаются постоянными в интервале фазового превращения, а изменяются от их значений в аустените до значений в мартенсите. Учитывая смысл параметра q , можно представить эти модули в интервале фазового превращения осредненными по Фойгту зависимостями [2]

$$E = q E_- + (1 - q) E_+, \quad G = q G_- + (1 - q) G_+,$$

в которых нижние индексы (\mp) относятся к мартенситной и аустенитной фазам.

Полагая, что напряжения зависят от параметра q гораздо слабее, чем фазовые деформации, найдем приближенное решение дифференциальных уравнений (1):

$$\phi_{32} \simeq \frac{S_{32}}{\sigma_0 \varkappa_0} (e(\varkappa_0 q) - 1), \quad \phi_{33} \simeq \frac{2}{3} \frac{S_{33}}{\sigma_0 \varkappa_0} (e(\varkappa_0 q) - 1). \quad (2)$$

Подстановка функций (2) в уравнения (1) приводит к приближенным определяющим соотношениям для полных межфазных деформаций стержня:

$$w_{32} \simeq \gamma_2 S_{32} / E_+, \quad w_{33} \simeq \gamma_3 S_{33} / E_+, \quad (3)$$

$$\gamma_2(q) \equiv \frac{E_+}{G} + \frac{E_+}{\sigma_0 \varkappa_0} (e(\varkappa_0 q) - 1), \quad \gamma_3(q) \equiv \frac{E_+}{E} + \frac{2}{3} \frac{E_+}{\sigma_0 \varkappa_0} (e(\varkappa_0 q) - 1).$$

Уравнения (3) представляют фазовое превращение как термоупругую деформацию с неявной зависимостью от температуры — через параметр q .

В случае плоской деформации [3] $w_{32} = u_{32}$, $w_{33} = u_{33} + t_2(\theta - \theta_0)_{,3}$, где $u_{33}(t_3)$, $u_{32}(t_3)$ — метрические деформации в точках базовой линии. Подставляя эти зависимости в (3) и интегрируя по поперечному сечению стержня, получаем моментные определяющие соотношения

$$u_{32} \simeq \gamma_2 T_{32} / (A E_+), \quad u_{33} \simeq \gamma_3 T_{33} / (A E_+), \quad \theta_{,3} - \theta_{0,3} \simeq \gamma_3 M_{31} / (I E_+), \quad (4)$$

где T_{33} , T_{32} , M_{31} , — физические компоненты вектора усилий и вектора моментов в повернутом базисе, A — площадь поперечного сечения, I — его момент инерции относительно вектора \mathbf{i}_1 .

Безразмерная формулировка системы уравнений. Введем независимый аргумент $t = t_3/l$, геометрический параметр $\varepsilon^2 = I/(A l^2)$, параметры внешних сил $p_2 = P_2 l^3 / (I E_+)$, $p_3 = P_3 l^3 / (I E_+)$ и неизвестные функции [4]

$$y_0 = \theta, \quad y_1 = M_{31} l / (I E_+), \quad y_2 = a_2 / l, \quad y_3 = a_3 / l, \quad y_4 = T_2 l^2 / (I E_+), \quad y_5 = T_3 l^2 / (I E_+)$$

(T_2 , T_3 , — компоненты вектора усилий в декартовом базисе). Тогда полная система уравнений плоской деформации стержня в интервале фазового превращения может быть представлена в безразмерной форме

$$y'_0 = \gamma_3 y_1 + \theta'_0, \quad y'_1 = f_2 + (\gamma_3 - \gamma_2) \varepsilon^2 f_2 f_3, \quad y'_2 = -\sin y_0 + \varepsilon^2 (\gamma_2 f_2 \cos y_0 - \gamma_3 f_3 \sin y_0),$$

$$y'_3 = \cos y_0 + \varepsilon^2(\gamma_2 f_2 \sin y_0 + \gamma_3 f_3 \cos y_0), \quad y'_4 = -p_2, \quad y'_5 = -p_3, \quad (5)$$

$$f_2 \equiv y_4 \cos y_0 + y_5 \sin y_0, \quad f_3 \equiv -y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0.$$

Здесь γ_2, γ_3 — параметры состояния сплава (3), верхний штрих обозначает производную по аргументу t .

Уравнения (5) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой зависят от параметра q . При численном интегрировании системы ее решения отыскиваются для дискретных значений параметра q из интервала $0 \leq q \leq 1$. Последнее из равенств (1) устанавливает связь параметра q с температурой сплава. Граничные условия формулируются в конкретных задачах.

Система (5) моделирует также плоскую деформацию пластин и панелей, испытывающих термоупругие фазовые превращения.

Представленные ниже решения краевых задач получены для стержней и пластин, изготовленных из сплава NiTi (никелид титана) со следующими экспериментальными значениями параметров термоупругого мартенситного превращения [2]: $T_- = 25^\circ C$, $T_+ = 50^\circ C$, $E_- = 28$ ГПа, $E_+ = 84$ ГПа, $\sigma_0 = 0,049E_+$, $\alpha_0 = 0,718$, $\nu_- = 0,48$, $\nu_+ = 0,33$ (ν_-, ν_+ — коэффициенты Пуассона в мартенситной и аустенитной фазах).

Изгиб прямого стержня и пластины торцевым моментом. В принятой нами системе ориентации прямой стержень следует располагать в направлении координаты x_3 а пластину — в плоскости (x_3, x_1) , при этом $\theta_0 = 0$. При плоском изгибе консольного стержня (пластины) торцевым моментом M отсутствуют распределенные внешние нагрузки, так что $p_2 = p_3 = 0$. Условия жесткой заделки в торце $x_3 = 0$ и отсутствия кинематических ограничений в торце $x_3 = l$ выражаются равенствами

$$y_0(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_1(l) = -\mu, \quad y_4(l) = 0, \quad y_5(l) = 0, \quad (6)$$

где $\mu = Ml/IE_+$ — числовой параметр заданного торцевого момента.

Краевая задача (5), (6) имеет точное решение

$$y_5 = y_4 = 0, \quad y_1 = -\mu, \quad y_0 = \theta = -\mu\gamma_3 t, \quad y_2 = \frac{1}{\mu\gamma_3} [1 - \cos(\mu\gamma_3 t)], \quad y_3 = \frac{1}{\mu\gamma_3} \sin(\mu\gamma_3 t),$$

согласно которому стержень (пластина) изгибается по дуге окружности, при этом внутренний изгибающий момент $M_{31} = -M = -\mu E_+ I/l$ остается постоянным по дуге. В окружность дуга превратится при условии $\mu = 2\pi/\gamma_3$. Это значение параметра μ зависит от q и от других внутренних параметров материала. Наименьшим по q оно становится при $q = 1$: $\mu_- = 2\pi/\gamma_3(1) \simeq 0,274$.

Рис. 1 демонстрирует эволюцию изгибных форм стержня (пластины) в зависимости от параметра q при $\mu = 0,274$. Изгиб стержня в кольцо, а пластины в трубу радиуса $l/(2\pi)$ происходит в конце фазового превращения ($q = 1$).

Необходимая для этого физическая величина изгибающего момента вычисляется по формуле

$$M = 0,274 E_+ I/l,$$

где I — момент инерции поперечного сечения стержня или пластины.

Для того же, чтобы получить кольцо или трубу вне интервала фазового превращения, потребуется приложить момент величиной $M = 2\pi E_+ I/l$ в аустенитной фазе и величиной $M = 2\pi E_- I/l$ в мартенситной.

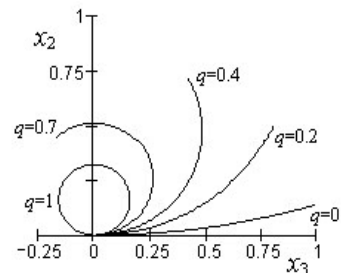


Рис. 1.

Выпучивание стержня и пластины при продольном сжатии. Рассматрива-

ется прямой двухшарнирный стержень, закрепленный от перемещений в торце $t = 0$ и нагруженный в аустенитной фазе сжимающей силой $T_3 = -P$, приложенной к торцу $t = 1$. Как и в предыдущей задаче, отсутствуют распределенные внешние нагрузки ($p_2 = p_3 = 0$) и $\theta_0 = 0$. Граничные условия для системы (5) выражаются отличными от (6) равенствами

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \quad y_4(1) = 0, \quad y_5(1) = -p, \quad (7)$$

где $p = Pl^3/(IE_+)$ — числовой параметр заданной торцевой силы.

Численный анализ нелинейной краевой задачи (5), (7) был выполнен методом стрельбы с привлечением пакета Mathcad [4]. В зависимости от параметра нагрузки p и фазового параметра q исследовалось ветвление решений краевой задачи.

Для стержня с геометрическим параметром $\varepsilon = 0,02$ рис. 2 демонстрирует ветвление зависимостей параметров состояния u и w от параметра нагрузки вне интервала фазового превращения. Здесь u (сплошная линия) — процентное отношение продольного перемещения свободного торца к длине стержня, w (линия с маркерами) — максимальный прогиб в процентном отношении к длине. Если величина силы меньше эйлеровой критической и фазовые деформации в стержне отсутствуют, то стержень остается прямолинейным в деформированном состоянии ($w = 0$). Ветвление показано в окрестности эйлерового критического значения параметра нагрузки — $p \simeq 9,80$. При $p < 9,80$ имеются только прямолинейные формы равновесия стержня, а значения параметра u настолько малы, что соответствующая им линия не отличима в масштабе рисунка от оси абсцисс. В окрестности критической точки начинается интенсивное выпучивание стержня со стремительным ростом обоих параметров состояния.

Результаты анализа картины ветвления в интервале фазового превращения представлены на рис. 3. В зависимости от фазового параметра q даны ветви выпучивания при трех значениях параметра нагрузки: $p = 1; 0,6; 0,5$. При $p = 1$ выпучивание начинается в точке $q \simeq 0,507$, при $p = 0,6$ — в точке $q \simeq 0,784$, при $p = 0,5$ — в точке $q \simeq 0,899$. В окрестностях критических точек наблюдается стремительное нарастание прогибов. Наименьшее значение параметра нагрузки, при котором возможно выпучивание стержня за счет фазового превращения, — $p \simeq 0,43$.

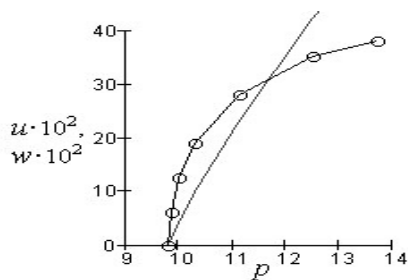


Рис. 2.

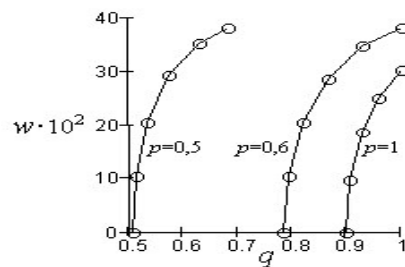


Рис. 3.

Заключение. Теоретический анализ убеждает, что эффект фазового превращения можно варьировать в весьма широком диапазоне значений внешней нагрузки и тем самым находить оптимальные технологические варианты. Автор отдает себе отчет в том, что полученные теоретические результаты нуждаются в экспериментальной проверке. Можно выделить две наиболее вероятные причины несоответствия теоретических и экспериментальных данных. Первая причина состоит в том, что физические свойства любого сплава варьируются в довольно широких пределах. Вторая причина — это неадекватность математической модели фазового превращения. В первом случае теоретический анализ может быть использован для корректировки физических констант реального сплава посредством сближения теоретических результатов с экспериментальными.

Во втором, более принципиальном случае необходима корректировка математической модели фазового превращения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мовчан А. А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №. 6. С. 47–53.
- [2] Мовчан А. А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. АН. МТТ. 1998. №. 1. С. 79–90.
- [3] Шкутин Л.И. Инкрементальная модель деформации стержня // ПМТФ. 1999. Т.40, №. 4. С. 228–234.
- [4] Шкутин Л.И. Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // ПМТФ. 2001. Т. 42, №. 2. С. 141–147.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00267).

Shkutin L.I. *Analysis of plane interphase strains in rods and plates.* Problem on plane deformation of rods and plates within interval of phase transformation is formulated like a nonlinear boundary-value problem on thermoelasticity with implicit dependence on temperature. The analytic solution of the problem on thermoelastic bending of a straight rod into ring and a plate into tube is obtained and numerical analysis of the problem on buckling of a straight rod and a plate compressed within interval of phase transformation is fulfilled.

АНАЛИЗ РЕЗЕРВОВ ПРОЧНОСТИ СОСТАВНОЙ ОБОЛОЧКИ

Юдин А. С.*, Гончар Г. В.*, Щитов Д. В.**

* НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
г. Ростов-на-Дону

** Пятигорский государственный технологический университет

На основе общей теории оболочек выполнен анализ напряженно-деформированного состояния и прочности составных оболочек вращения, моделирующих емкость для сжиженного газа (баллоны автомобильные газовые - БАГ). Оценена применимость упрощенных математических моделей. Выявлены рациональные варианты конструкции по критерию снижения массы.

1. Конструкция. Требования к конструкции, правилам расчета и технологии производства БАГ определяются техническими условиями (ТУ) и ГОСТами. По ТУ рабочее давление БАГ равно 1.6 МПа. Разрушающее давление для баллона должно быть не менее 5 МПа. Пробное давление при испытаниях – 2.5 МПа. Полный объем баллонов может быть от 45 до 100 литров.

Форма и основные параметры баллонов представлены на рисунке. В расчетной схеме модель представляет составную оболочку вращения, включающую круговую цилиндрическую часть (обечайка) и две эллипсоидальные оболочки (днища) на торцах цилиндра. Сопряжение обечайки с днищами выполнено плавно, без излома. На стыке имеется подкладное кольцо. Толщины элементов могут варьироваться независимо, так что модель представляет собой оболочку ступенчато-переменной толщины. Материал деталей баллона (обечайки, днищ и подкладных колец) – листовая углеродистая сталь с пределом текучести не менее 250 МПа.

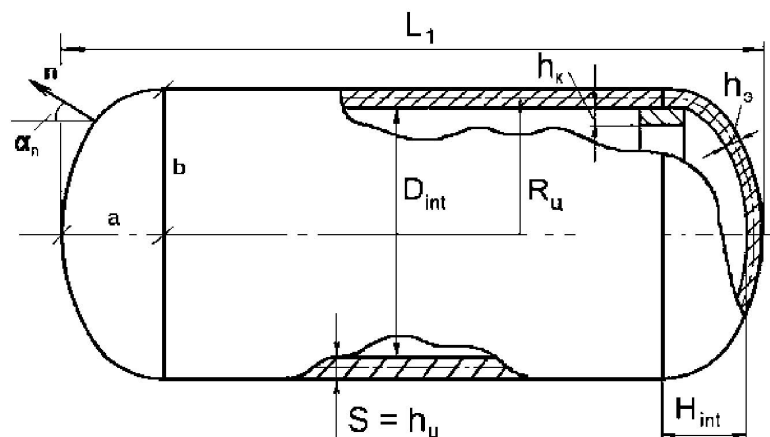


Рис. 1.

В качестве оболочки-прототипа рассматривается конструкция со следующими параметрами (размеры в миллиметрах). Внутренние размеры и толщины:

$D_{int} = 293$, $R_{int} = 146.5$, $H_{int} = 65$, $h_{\Pi} = h_{\Xi} = h_{\text{К}} = h = S = 3$. Длина $L_1 = 796$, длина цилиндрической части $L_{\Pi} = L_1 - h - 2H = 660$. Половина длины цилиндрической части $L = L_{\Pi}/2 = 330$. Радиус срединной поверхности цилиндра $R_{\Pi} = R_{int} + h/2 = 148$, высота срединной поверхности эллипсоидального днища $H = H_{int} + h/2 = 66.5$. Относительный подъем (выпуклость) днищ: $H_{int}/R_{int} = 0.444$; $H/R_{\Pi} = 0.449 \approx 0.45$. Относительное удлинение обечайки $L_{\Pi}/R = 2.679$. Свойства материала: $E = 0.21 \times 10^6$ МПа, $\nu = 0.3$. Допускаемая интенсивность напряжений $\sigma_{\text{доП}} = 138$ при рабочем давлении $p = 1.6$ МПа; предел текучести $\sigma_T = 250$ для пробного давления $p_{\Pi} = 2.5$ МПа.

В силу симметрии относительно середины можно рассматривать половину конструкции. Тогда на разрезе ставятся условия скользящего защемления с разрешенным нормальным перемещением w .

2. Уравнения. Исходные уравнения общей теории соответствуют квадратично-нелинейному варианту осесимметричного НДС для радиальных деформаций. Схема построения разрешающей системы аналогична работам [1, 2] Кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, z) &= u(\alpha_1) + z\Theta_1(\alpha_1), \quad W(\alpha_1, z) = w(\alpha_1); \\ \varepsilon_{11}(\alpha_1, z) &= E_{11}(\alpha_1) + zK_{11}(\alpha_1), \quad \varepsilon_{22}(\alpha_1, z) = E_{22}(\alpha_1) + zK_{22}(\alpha_1); \\ E_{11} &= u' + k_1w + \Theta_1^2/2, \quad E_{22} = \psi u + k_2w, \\ \Theta_1 &= -w' + k_1u, \quad K_{11} = -\Theta_1', \quad K_{22} = \psi\Theta_1; \\ (\dots)' &= (\dots)_{,\alpha_1}/A_1 = d(\dots)/(A_1 d\alpha_1), \quad \psi = A_2'/A_2 \end{aligned}$$

Уравнения равновесия в усилиях и моментах:

$$\begin{aligned} T_{11}' + \psi(T_{11} - T_{22}) + k_1Q_{11} + q_1 &= 0, \\ Q_{11}' + \psi Q_{11} - k_1T_{11} - k_2T_{22} + q_3 &= 0, \\ M_{11}' + \psi(M_{11} - M_{22}) - Q_{11} - T_{11}\Theta_{11} &= 0, \end{aligned}$$

Закон Гука:

$$\sigma_{11} = [E/(1 - \nu^2)](\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = [E/(1 - \nu^2)](\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}).$$

Интенсивность напряжений:

$$\sigma = [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22}]^{1/2}. \quad (1)$$

Соотношения упругости для изотропных оболочек:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B(E_{11} + \nu E_{22}), \quad T_{22} = B(E_{22} + \nu E_{11}), \\ M_{11} &= D(K_{11} + \nu K_{22}), \quad M_{22} = D(K_{22} + \nu K_{11}); \\ B &= Eh/(1 - \nu^2), \quad D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)], \end{aligned}$$

Краевые условия:

$$(u - u_{\text{Л}})(1 - \nu\gamma_1) + \gamma_1(T_{11} - \nu T_{11\text{Л}}) = 0, \quad (w - w_{\text{Л}})(1 - \nu\gamma_2) + \gamma_2(Q_{11} - \nu Q_{11\text{Л}}) = 0,$$

$$(\Theta_1 - \Theta_{1Л})(1 \check{\gamma}_3) + \gamma_3(M_{11} \check{\gamma} M_{11Л}) = 0; \quad (2)$$

$$(u - u_{II})(1 \check{\gamma}_4) + \gamma_4(T_{11} \check{\gamma} T_{11II}) = 0; \quad (w - w_{II})(1 \check{\gamma}_5) + \gamma_5(Q_{11} \check{\gamma} Q_{11II}) = 0, \\ (\Theta_1 \check{\gamma} \Theta_{1II})(1 \check{\gamma}_6) + \gamma_6(M_{11} \check{\gamma} M_{11II}) = 0, \quad \gamma_j = 0 \text{ или } 1. \quad (3)$$

Основные функции:

$$y_1 = T_{11}, \quad y_2 = Q_{11}, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = u, \quad y_5 = w, \quad y_6 = \Theta_1.$$

Система разрешающих уравнений:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\alpha_1, \mathbf{y}) + \mathbf{p}(\alpha_1),$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_6), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_6), \quad \mathbf{p} = (\check{q}_1, \check{q}_3, 0, 0, 0, 0),$$

$$f_1 = \psi(T_{22} \check{\gamma} y_1) \check{\gamma} k_1 y_2, \quad f_2 = \check{\gamma} \psi y_2 + k_1 y_1 + k_2 T_{22},$$

$$f_3 = \psi(M_{22} \check{\gamma} y_3) + y_2 + y_1 y_6, \quad f_4 = E_{11} \check{\gamma} y_1 \check{\gamma} k_1 y_5 \check{\gamma} 0.5 y_6^2,$$

$$F_5 = k_1 y_4 \check{\gamma} y_6, \quad f_6 = K_{11},$$

$$E_{22} = \psi y_4 + k_2 y_5, \quad K_{22} = \psi y_6,$$

$$K_{11} = y_3 / D \check{\gamma} \nu K_{22}, \quad E_{11} = y_1 / B \check{\gamma} \nu E_{22},$$

$$T_{22} = B(E_{22} + \nu E_{11}), \quad M_{22} = D(K_{22} + \nu K_{11}).$$

Краевые условия (2), (3) записываются относительно y_i . В уравнениях осуществляется переход к безразмерной форме [1] и полностью к основным функциям. В результате система разрешающих уравнений в нормальной (канонической) форме получает вид:

$$dy_1/d\alpha_1 = A_1 \{ \psi(1 - \nu)[B(1 + \nu)(\psi y_4 + k_2 y_5) - (1 - \nu)y_1] - k_1 y_2 - q_1 \},$$

$$dy_2/d\alpha_1 = A_1 \{ -\psi y_2 + (k_1 + \nu k_2)y_1 + k_2 B(1 - \nu^2)(\psi y_4 + k_2 y_5) - q_3 \},$$

$$dy_3/d\alpha_1 = A_1 \{ \psi(1 - \nu)[D(1 + \nu)\varepsilon_* \psi y_6 - y_3] + y_2/\varepsilon_* + y_1 y_6 \},$$

$$dy_4/d\alpha_1 = A_1 \{ y_1/B - \nu \psi y_4 - (k_1 + \nu k_2)y_5 - \varepsilon_*(y_6)^2 \},$$

$$dy_5/d\alpha_1 = A_1 \{ k_1 y_4 \check{\gamma} y_6 \},$$

$$dy_6/d\alpha_1 = A_1 \{ y_3/(\varepsilon_* D) - \nu \psi y_6 \}. \quad (4)$$

Здесь введен коэффициент k_N , значение 0 которого соответствует линейной задаче, 1 – нелинейной. Сравнительные численные расчеты показали, что в данной задаче вполне применима линейная теория ($k_N = 0$). Форма уравнений (4) соответствует требованиям методов, сводящих краевые задачи к процедурам решения задач Коши. В работе применялись методы двусторонней пристрелки и дифференциальной прогонки с ортогонализацией.

Входящие в уравнения геометрические параметры (коэффициенты Лямэ, главные кривизны, параметр ψ) определяются формулами:

б): круговой цилиндр:

$$\alpha_1 = x, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = R, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1/R, \quad \psi = 0;$$

е): эллипсоид вращения:

$$\alpha_1 = \alpha_n, A_1 = a^2 b^2 / c^3, A_2 = d + a^2 / c \sin \alpha_n, k_1 = 1 / A_1,$$

$$k_2 = \sin \alpha_n / A_2, \psi = \cos \alpha_n / A_2, c^2 = a^2 \sin^2 \alpha_n + b^2 \cos^2 \alpha_n.$$

На эллипсоиде независимой координатой является угол наклона нормали к оси вращения.

В техническом проектировании для расчетов прочности элементов используется безмоментная теория. При этом считается, что максимум интенсивности напряжений на днище достигается в полюсе эллипсоида. Как выяснено в [3], что это возможно только при условии достаточной выпуклости днища ($H/R_{\text{Ц}} > 0.6$), которым исходная конструкция не удовлетворяет.

Анализ ограничений на расчет по безмоментной теории и ее сравнение с моментной для эллиптических днищ выполнено в [3]. Было также выяснено, что наиболее значительно влияет на напряженное состояние днища изменения его стрелы подъема. На модели составной оболочки такое изменение геометрии рассматривалось в сочетании с толщинами 3 мм и (или) 2 мм на цилиндре и днище. Толщина подкладного кольца полагалась равной толщине обечайки, ширина кольца 24 мм. Результаты для максимумов интенсивности (1) напряжений сведены в таблице.

№№ п/п	H_{int}	$h_{\text{ЭЛЛ}}$	$h_{\text{ЦИЛ}}$	σ_{max}	$\sigma_{\text{max,ЭЛЛ}}$	$\sigma_{\text{max,ЦИЛ}}$
1	65	3	2	154.5	154.5	103.6
2	65	3	3	146.7	146.7	78.9
3	70	3	2	134.8	134.8	107
4	75	2	2	164	164	105
5	75	3	2	118.3	118.3	106.6
6	75	3	3	111.2	111.2	74.6
7	80	3	2	106.2	104.5	106.2
8	85	2	2	125.2	125.2	106.3
9	85	3	2	106.1	93.1	106.1

Здесь вариантам 5–9 соответствуют значения параметров, с запасом вписывающиеся в норму. Вариант 3 также вписывается в норму, но близок к допустимой границе 138 МПа по напряжениям. Варианты 1, 2, 4 выходят за границу допустимых рабочих напряжений, причем вариант 4 – существенно.

5. Выводы. 1). При относительно небольшом увеличении выпуклости днищ с 65 до 70 можно уменьшить толщину обечайки с 3 мм до 2 мм, (вариант 3).

2) Переход к толщине 2 мм на всей конструкции возможен при высоте подъема днищ 85 мм и выше (вариант 8).

3) В силу линейности задачи работает принцип суперпозиции. Поэтому оценку напряженного состояния для пробного давления 2.5 МПа можно сделать, если умножить в представленных выше таблицах значения интенсивности на коэффициент $k_p = 2.5/1.6 = 1.563$ и сравнить полученные числа с пределом текучести 250 МПа.

4) Результаты и выводы, полученные для баллона диаметром $D = 300$ мм, полностью переносятся на баллоны других размеров (диаметров), если сохраняется геометрическое подобие конструкции и свойства материала. При этом длину

обечайки можно варьировать независимо в силу вида реализуемого в ней напряженного состояния (практически однородного и безмоментного). За счет длины обечайки легко подбирается объем баллона.

5) Для варианта 3 экономия собственной массы баллона составляет около 20%, а в варианте 8 – около 30%.

Работа выполнена поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428) и гранта 04-01-96806

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдин А.С. Эффективные модели для составных оболочек вращения // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2000. № 3. С. 184–188.
- [2] Юдин А.С., Сафроненко В.Г., Щитов Д.В. Напряженно-деформированное состояние осесимметричных оболочек составной геометрии // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. VI Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 19-23 июня 2000г. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ. 2001. С. 158–161.
- [3] Юдин А.С., Щитов Д.В. О расчете оболочек вращения, нагруженных внутренним давлением // Изв вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Приложение. 2004. № 3. С. 29–36.
- [4] Новожиллов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Ленинград: «Политехника», 1991. 656 с.

Yudin A.S., Gonchar G.V., Schitov D.V. *Analysis of solidity reserves of the compound shell.* Analysis of stress-strain states and solidity of the shells of revolution modelling capacity for liquefied gas (automobile gas balloons) are executed on base of the general shells theory. Applicability of the simplified mathematical models is appreciated. Rational variants of a design by criterion of decrease of weight are revealed.

ДВУСТОРОННИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА

Юдович В.И.

Ростовский государственный университет

В работе представлены двусторонние оценки сверху и снизу интеграла Дирихле от решения смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана. Эти двусторонние оценки дают возможность построить эффективные методы вычисления присоединенных масс и моментов инерции в задаче гидродинамического удара.

Введение. В работе даны оценки сверху и снизу (обобщенного) интеграла Дирихле для решения смешанной задачи Дирихле-Неймана для уравнения эллиптического типа $\operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \varphi = 0$, возникающего в теории удара твердого тела о неоднородную несжимаемую жидкость [1, 2]. В частности, эти двусторонние оценки представляют собой основу весьма эффективных численных методов вычисления присоединенных масс и моментов инерции. Жидкость предполагается идеальной, однако, это не является ограничением, поскольку в задаче удара вязкость не влияет на ведущее асимптотическое приближение скорости течения [4]. Область течения здесь предполагается ограниченной, однако, результаты непринужденно распространяются и на многие задачи для неограниченных областей.

В § 1 дана постановка задачи и выведены две оценки интеграла Дирихле снизу. В § 2 при помощи обобщенного принципа Томсона выведена оценка интеграла Дирихле сверху. В § 3 рассмотрен тот случай, когда пробные функции в предыдущих оценках удовлетворяют основному уравнению задачи — являются ρ -гармоническими.

Метод двусторонних оценок был применен в работах Полия и Сеге [5] для решения различных изопериметрических задач о таких величинах как электрическая емкость, крутильная жесткость стержня, присоединенная масса и т. д. Вместе с тем, на основе двусторонних вариационных оценок строятся мощные вычислительные методы. Нужно лишь подбирать надлежащие пробные функции и векторные поля. Изложенные здесь вариационные оценки точны в том смысле, что превращаются в равенства лишь в том случае, когда пробная функция совпадает с точным решением. Поэтому их можно применять, решая тем или иным приближенным методом смешанную краевую задачу. При этом хорошая точность вычисления интеграла Дирихле достигается при довольно малом числе координатных функций в методе Ритца, когда само решение, возможно, аппроксимируется еще неудовлетворительно. Существенно, что знание присоединенных масс необходимо не только в задачах удара, но также и при исследовании высокочастотных вибраций твердых тел в жидкости [1–8].

Достоинством метода двусторонних оценок является и то, что нет необходимости в дополнительных обоснованиях и оценках погрешности. Метод хорошо работает также при выводе различных асимптотик по малым или большим геометрическим параметрам задачи. Даже в докомпьютерные времена удавалось вычислять

этим методом присоединенные массы в задаче удара пластины о горизонтальную свободную границу жидкости в цилиндре или параллелепипеде. Такие расчеты были проделаны в дипломной работе Ю. П. Подладчикова, 1958г., выполненной под моим руководством; к сожалению, результаты не были опубликованы.

В настоящее время вычисление присоединенных масс и моментов инерции при помощи метода двусторонних оценок проводится моими сотрудниками С. М. Зеньковской, В. А. Новосядлым и И. В. Островской. Результаты мы надеемся сообщить в других публикациях.

§ 1. Постановка задачи. Оценка интеграла Дирихле снизу. Речь пойдет о смешанной краевой задаче Дирихле–Неймана, возникающей в теории гидродинамического удара твердого тела, граница которого или ее часть соприкасается с несжимаемой жидкостью

$$\Delta_\rho \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\varphi|_{S_f} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{S_b} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{S_r} = -\rho V_n. \quad (2)$$

Неизвестная функция φ — потенциал течения жидкости, создаваемого ударом и имеющего поле скорости $\mathbf{v} = -\text{grad } \varphi$. Функция φ имеет смысл импульсного давления, она определена в области $D \subset R^3$, занятой жидкостью. Пока будем считать, что область D ограничена. Обобщенный лапласиан Δ_ρ определяется равенством $\Delta_\rho(\cdot) = \text{div } \frac{1}{\rho} \text{grad}(\cdot)$.

Здесь $\rho(x)$, $x \in \bar{D}$, — плотность жидкости. Предполагается, что ρ — гладкая, всюду положительная функция: существует константа $\rho_0 > 0$ такая, что $\rho(x) \geq \rho_0$ для всех $x \in \bar{D}$. Через S_f , S_b , S_r обозначены соответственно свободная граница и смоченная часть границы твердого тела. Свободная граница S_f может и отсутствовать. Тогда получается задача Неймана, в этом случае предполагается, что выполнено необходимое условие ее разрешимости — поток поля \mathbf{V} через границу S_r равен нулю. V_n — компонента скорости точки твердого тела вдоль внешней нормали к S_r . Скорость \mathbf{V} точки x твердого тела определяется равенством

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times x, \quad (3)$$

где \mathbf{U} — поступательная скорость, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость. Впрочем, конкретный вид правой части в уравнении (2) в изложенной дальше общей теории значения не имеет.

Мы переходим к оценке (обобщенного) интеграла Дирихле

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi) = \int_D \frac{1}{\rho} (\nabla \varphi)^2 dx. \quad (4)$$

сверху и снизу. Как известно [1], кинетическая энергия жидкости, а также присоединенные массы и моменты инерции выражаются интегралом Дирихле (4) при надлежащем выборе поля \mathbf{V} . Замечу еще, что в задаче удара при наличии свободной границы присоединенные массы и моменты инерции имеют адекватный смысл лишь в случае, когда $\varphi(x) \geq 0$ всюду. Это условие отпадает, когда вся граница области течения D твердая.

Первая оценка интеграла Дирихле снизу. Имеется два вариационных принципа для задачи (1)–(2), приводящих к нижней оценке интеграла Дирихле. Я приведу оба. Оказывается, однако, что один из них (второй в нашем изложении) всегда дает лучшую оценку.

Дальше мы систематически используем две формулы Грина для оператора Δ_ρ :

$$\int_D \Delta_\rho \varphi \cdot \theta dx = - \int_D \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx + \int_{\partial D} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \theta dS, \quad (5)$$

$$\int_D (\theta \Delta_\rho \varphi - \varphi \Delta_\rho \theta) dx = \int_{\partial D} \left(\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) dS. \quad (6)$$

Обе формулы применимы при известных условиях регулярности функций φ и θ , а также границы ∂D .

Рассмотрим функционал

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\rho} (\nabla \varphi)^2 dx + \int_{S_r} \varphi V_n ds, \quad (7)$$

определенный на функциях φ из $W_2^{(1)}(D)$, удовлетворяющих условию на свободной границе S_f . Такие функции образуют гильбертово пространство H со скалярным произведением

$$(\varphi, \theta)_H = \int_D \frac{1}{\rho} \nabla \varphi \cdot \nabla \theta dx. \quad (8)$$

На решении φ_* краевой задачи (1)–(2) функционал $I(\varphi)$ достигает строгого минимума, что приводит к теоремам существования и единственности решения [1]. Применяя первую формулу Грина (5), интегрируя по частям и, учитывая, что функция $\eta \in H$ удовлетворяет условию $\eta|_{S_f} = 0$, приходим к равенству

$$I(\varphi_* + \eta) = I(\varphi_*) + \frac{1}{2} \|\eta\|_H^2, \quad (9)$$

которое справедливо для любой функции $\varphi = \varphi_* + \eta$ из H . Это и есть *вариационный принцип*:

$$I(\varphi) \geq I(\varphi_*), \quad (10)$$

причем равенство достигается лишь при $\varphi = \varphi_*$.

Из формулы (5), полагая в ней $\varphi = \theta = \varphi_*$, выводим

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) = - \int_{S_r} \varphi_* V_n dS. \quad (11)$$

Подстановка в выражение (7) для $I(\varphi)$ дает равенство

$$I(\varphi_*) = \frac{1}{2} \int_{S_r} \varphi_* V_n dS = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \quad (12)$$

Подставим это выражение в (10). В результате получается *первая оценка интеграла Дирихле* $\mathcal{D}_\rho(\varphi_*)$ снизу:

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \geq -2I(\varphi) \quad (13)$$

для любой функции $\varphi \in H$, причем равенство достигается лишь при $\varphi = \varphi_*$.

Вторая оценка снизу. Теперь рассмотрим скалярное произведение (φ_*, φ) в H . Для любой функции $\varphi \in H$ его можно вычислить, не зная решения φ_* :

$$(\varphi_*, \varphi) = \int_D \frac{1}{\rho} \nabla \varphi_* \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\partial D} \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} dS = - \int_{S_r} \varphi V_n dS. \quad (14)$$

С другой стороны, неравенство Коши–Буняковского для данного скалярного произведения имеет вид

$$(\varphi_*, \varphi)^2 \leq \mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \mathcal{D}_\rho(\varphi). \quad (15)$$

И здесь равенство имеет место в том и только в том случае, когда $\varphi \parallel \varphi_*$. Из (14) и (15) вытекает *вторая оценка* интеграла Дирихле снизу:

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \geq \frac{(\int_{S_r} \varphi V_n dS)^2}{\mathcal{D}_\rho(\varphi)}, \quad (16)$$

которая тоже точна — превращается в равенство при $\varphi \parallel \varphi_*$, и только в этом случае. Фактически мы пришли к новому вариационному принципу — функционал в правой части (16) достигает максимума (на пространстве H с выброшенной точкой нуль) на прямой $\varphi = \gamma \varphi_*$. При этом, ввиду однородности, его значение от постоянной γ не зависит.

Заметим, что для любой ненулевой функции $\varphi \in H$ оценка (16) лучше, чем оценка (13). Действительно, вводя обозначения

$$\int_{S_r} \varphi V_n dS = a, \quad \mathcal{D}_\rho(\varphi) = b, \quad (17)$$

замечаем, что правая часть в (16) есть $\frac{a^2}{b}$, а правая часть в (13) есть $-b - 2a$. Но при $b > 0$ всегда

$$\frac{a^2}{b} \geq -b - 2a. \quad (18)$$

Равенство здесь имеет место лишь при $a = -b$, то есть при $\varphi = \varphi_*$.

Использовать вариационный принцип, выраженный неравенством (16), для разыскания потенциала φ_* , представляется излишне сложным. Поэтому практически можно рекомендовать строить приближенное решение методом Ритца–Галеркина, основанным на вариационном принципе для функционала $I(\varphi)$, но для оценки интеграла Дирихле подставлять приближенное решение φ в неравенство (16). Замечу, что оценка (16) как раз и получается, если действовать методом Ритца с одной координатной функцией φ . В [3] этот результат обобщается на случай нескольких координатных функций, а заодно и на общее операторное уравнение с положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве.

§ 2. Обобщенный принцип Томсона (Кельвина). Оценка интеграла Дирихле сверху. Теперь займемся оценкой интеграла Дирихле сверху. Она основывается на некотором обобщении вариационного принципа Томсона. На сей раз пробные функции должны удовлетворять условиям Неймана как на неподвижном дне, так и на границе подвижного тела. При этом условие на свободной границе может быть нарушено.

При заданных поле плотности ρ и поле скорости v кинетическая энергия определяется равенством

$$T(v) = \int_D \frac{\rho v^2}{2} dx. \tag{19}$$

Следующее утверждение обобщает принцип Томсона (см. [9, гл. 3, § 45]) на случай, когда жидкость неоднородна, и имеется свободная граница.

Предложение 1. Среди всех течений жидкости, которые соленоидальны ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) и удовлетворяют условию на твердых стенках, подвижных и неподвижных, наименьшую кинетическую энергию имеет ρ -потенциальное течение с полем скорости

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla \varphi_*, \tag{20}$$

причем потенциал φ_* является решением краевой задачи (1)–(2).

Доказательство этого предложения приведено в [3].

Из него следует точная оценка сверху обобщенного интеграла Дирихле

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \leq 2T(v) \tag{21}$$

для произвольного поля v , удовлетворяющего условиям $v_n|_{S_b} = 0$, $v_n|_{S_r} = V_n$.

Равенство здесь, очевидно, имеет место при $v = -\frac{1}{\rho} \nabla \varphi_*$, и лишь в этом случае.

§ 3. Оценка сверху с ρ -гармоническим пробным полем. При использовании вариационного метода нередко возникает дилемма — использовать ли координатные функции, удовлетворяющие лишь минимально необходимым условиям или стараться построить наилучшие возможные координатные функции. Понятно, что в последнем случае само это построение усложняется, но зато можно ожидать, что ответ с нужной точностью будет получен при небольшом числе координатных функций. Вряд ли здесь можно выдать рекомендацию, пригодную на все случаи жизни, так что дилемма разрешается по-разному в различных конкретных случаях. Нередко лучшим оказывается некоторый компромиссный вариант. Разумно рассматривать различные варианты координатных и пробных функций и векторных полей.

В работе [3] описан способ построения лучших возможных пробных функций для использования принципа Кельвина.

Пусть, например, $v = -\frac{1}{\rho} \nabla \varphi$, причем функция φ — решение краевой задачи Неймана

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \varphi \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_b} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_r} = -\rho V_n, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_f} = -\rho g(x), \tag{22}$$

где функция $g(x)$ есть некоторое приближение неизвестной заранее нормальной скорости на границе.

В предположении, что выполнено неравенство $\int_{S_r} V_n dS \neq 0$, справедлива оценка

$$D_\rho(\varphi_*) \leq D_\rho(\varphi_0) = \frac{\int_{S_r} V_n dS}{\int_{S_f} g_1 dS} \int_{S_f} \varphi_0 g_1 dS - \int_{S_r} \varphi_0 V_n dS, \quad (23)$$

где

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \right|_{S_b} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \right|_{S_r} = -\rho V_n, \quad \left. \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \right|_{S_f} = -\beta_1 \rho g_1, \quad (24)$$

и

$$\beta_1 = -\frac{\int_{S_r} V_n dS}{\int_{S_f} g_1 dS}. \quad (25)$$

При этом решение φ_0 определяется с точностью до аддитивной постоянной, которую можно выбрать произвольно, так как $D_\rho(\varphi_0)$ от нее не зависит. Более общая ситуация рассмотрена в [3].

Приложение к задаче удара. Кинетическая энергия, приобретенная жидкостью в результате удара, выражается через интеграл Дирихле от потенциала скорости жидкости φ_* . Она представляет собой квадратичную форму от линейной скорости \mathbf{U} твердого тела и его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Если имеется несколько твердых тел, то соответственно возникает квадратичная форма от их линейных и угловых скоростей. Коэффициенты квадратичной формы $2T$ суть элементы тензора инерции. В частности, коэффициент m_{jj} при U_j^2 есть присоединенная масса, соответствующая поступательному движению в направлении j -й оси. Коэффициент J_{jj} при ω_j^2 есть присоединенный момент инерции данного тела, отвечающий вращению вокруг j -ой оси.

Приведенные выше общие оценки интеграла Дирихле приводят, в частности, к оценкам присоединенных масс m_{jj} и моментов инерции I_{jj} , для чего достаточно рассмотреть случай чисто поступательного движения вдоль j -й оси и случай чистого вращения вокруг j -й оси.

Разумеется, можно также получать и оценки различных инвариантов кинетической энергии относительно ортогональных преобразований, например, средней присоединенной массы $\mathbf{m} = \frac{1}{3}(m_{11} + m_{22} + m_{33})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00567), гранта поддержки ведущих научных школ (ПИ 112/001/273), гранта EPSRC GR/S96616/01 и гранта INTAS Ref. no. 04-80-7297.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Юдович В. И.* Гидродинамический удар в неоднородной несжимаемой жидкости // Ростовский гос. университет. Ростов-на-Дону. 51 с. Деп. в ВИНТИ, 13.07.2004, № 1208-B2004.
- [2] *Yudovich V. I.* Hydrodynamical Impact in Nonhomogeneous Incompressible Fluid // Preprint HIMSA, University of Hull. 2005. № 15.
- [3] *Юдович В. И.* О двусторонних вариационных оценках присоединенных масс и моментов инерции // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического Сообщества. 2005.
- [4] *Юдович В. И.* Об асимптотическом интегрировании системы Навье-Стокса при ударных воздействиях на жидкость // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 126–132.
- [5] *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
- [6] *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Деп. в ВИНТИ, 17.07.2003, № 1407-B2003.
- [7] *Arnold V. I.* Sur la géométry différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Annales de l'Institut Fourier, 1966, T. 16, № 1, P. 319–361.
- [8] *Vladimirov V. A.* On vibrodynamics of pendulum and submerged solid // Preprint HIMSA, University of Hull. 2005. № 14.
- [9] *Ламб Г.* Гидродинамика, М., Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1947 г., 928 с.

Yudovich V. I. *Two-sided variational estimates of virtual masses and moments of inertia.*

We present the estimates from above and from below for the Dirichlet integral of solution of the mixed Dirichlet–Neumann boundary value problem. These two-sided estimates enable us to construct powerful methods for calculation of virtual masses and moments of inertia in the hydrodynamic impact problem.

Научное издание
Современные проблемы механики сплошной среды.

**Труды IX Международной конференции,
посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН**

И.И. ВОРОВИЧА

г. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г. Т. 1.

Материалы сборника даны в авторской редакции