

Содержание

Абросимов Н.А., Куликова Н.А. Идентификация параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных цилиндрических оболочек при ударном нагружении	6
Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Гранично-элементное моделирование распространения волн в среде Био	9
Асотова Е.А. Напряженное состояние призматических стержней при конечных деформациях кручения	13
Белов А.А., Васильев А.А., Пазин В.П. Расчет динамики составных вязкоупругих тел на основе прямой формулировки метода граничного элемента	18
Беляк О.А., Ватульян А.О. Асимптотический подход при анализе волновых полей в слое с полостью малого размера	22
Боев Н.В., Сумбатьян М.А. Оценка точности физической теории дифракции Кирхгофа	27
Буйло С.И., Орлов С.В. Метод инвариантов акустической эмиссии в диагностике предразрушающего состояния и его аппаратная реализация	32
Ватульян А.О. Вариационные подходы в задачах идентификации неоднородностей в упругих телах	37
Галабурдин М.В. Поведение замкнутой сферической оболочки, нагруженной внутренним давлением, после потери устойчивости.	42
Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Еремин А.А. Возникновение резонансных полос пропускания в диапазоне запирания для упругого волновода с системой жестких включений	47
Говорухин В.Н., Хволес Р., Кизнер З. Расчет динамики мультипольных конфигураций в идеальной жидкости.	52
Гришин С.А. К постановке задачи о флаттере цилиндрической и конической консольных оболочек под действием сверхзвукового потока газа	57
Елаева М.С. Эволюция компонент смеси под действием электрического поля	61
Жорник А.И., Прокопенко Ю.А. Нестационарное термонапряженное состояние двухслойного цилиндра	66
Жорник В.А., Савочка П.А. Оценка влияния энергии разрушения на развитие кольцевой трещины в цилиндре при его охлаждении	71
Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Пленочный двигатель — электрогидродинамическое течение в тонкой жидкой пленке	76
Залётов В.В., Сторожев В.И., Хапилова Н.С. Решение смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства в цилиндрической системе координат	81
Зенченков А.В. Смешанная задача теории упругости для ортотропной полуплоскости, лежащей на упругом перфорированном основании	86
Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние примеси и термодиффузии на вибрационную конвекцию Марангони	90

Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Маркин И.П. Методы квадратур сверток, Дурбина и граничного элемента в динамических задачах упругих тел	95
Илюхин А.А., Тимошенко Д.В. Основные уравнения теории упругих стержней с вращательным взаимодействием частиц	99
Кадомцев И.Г., Лапин А.Г. Упругопластический удар массивного тела по круглой пластине, лежащей на основании	104
Карапетьян Г.Я., Днепровский В.Г., Багдасарян А.С., Багдасарян С.А. Датчик дистанционного контроля физических величин на основе блока узкополосных фильтров и линий задержки на поверхностных акустических волнах с различными рабочими частотами	109
Карнаух А.Ю. Вынужденные колебания плоского упругого дна и идеальной жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде	114
Качко Д.Л., Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Математическое моделирование свойств материалов и конструкций	119
Кириллова Е.В., Сыромятников П.В., Кармазин А.В. Моделирование упругих колебаний многослойных анизотропных композитов	122
Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Об одной новой форме трехмерных уравнений равновесия идеально пластического тела	127
Кононов Ю.Н. Об устойчивости движения твердого тела с упругими отсеками, содержащими жидкость	132
Куракин Л.Г. О критериях устойчивости в критическом случае двукратного нулевого корня	136
Ляпин А.А., Селезнев Н.М. К построению фундаментальных решений в пространственных задачах для многослойных сред с цилиндрическими полостями	141
Манжиров А.В., Паршин Д.А. О новых результатах в классических проблемах гео- и горных наук	145
Марчевский И.К., Токарева С.А. Параллельный алгоритм RKDG-метода для решения задач газовой динамики	150
Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Трофимчук А.Н. Прямоугольный упругий волновод: история и современность	155
Моршнева И.В., Овчинникова С.Н. Численный анализ резонансных режимов в окрестности точки бифуркации коразмерности 2 в задаче Куэтта-Тейлора (случай $Res\ 0$).	160
Наседкин А.В. Моделирование упругих тел с дислокациями и конечно-элементные аппроксимации	165
Павлова А.В., Рубцов С.Е., Колесников М.Н. Исследование дисперсионных характеристик упругого полупространства с дефектами при наличии покрытия	170
Петровская Н.В. Компьютерное моделирование двумерной конвекции в прямоугольной области в предельном случае невязкой теплопроводной жидкости	174
Прозоров О.А., Шлейкель А.Л. О возникновении вибрационной конвекции в слое неоднородной жидкости	179

Ревина С.В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости трехмерных пространственно-периодических сдвиговых течений	184
Сазонов Л.И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена	189
Суворова Т.В., Усошина Е.А. Построение матрицы Грина для пористоупругого слоя, колеблющегося на слое жидкости	194
Сумбатян М.А. Применение быстрого преобразования Фурье в коротковолновой дифракции на плоском твердом экране	199
Тодоров Н.Ф. Математические модели и алгоритмы аурализации в акустике помещений	203
Труфанов В.Н., Труфанов И.В., Устинов Ю.А. Математическая модель состояния системы «уголь-флюид» в выбросоопасной зоне угольного пласта	208
Цибулин В.Г., Шевченко С.В. Исследование конвекции в двухслойной системе в прямоугольнике	213
Шалдырван В.А., Васильев Т.А. К анализу термонапряженного состояния цилиндра	218
Юдин А.С., Юдин С.А. Определяющие соотношения в задачах осесимметричного формоизменения оболочек вращения	223

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Абросимов Н.А., Куликова Н.А.

*Научно-исследовательский институт механики Нижегородского
государственного университета им. Н.И.Лобачевского*

Классические экспериментальные методы исследования динамических характеристик композитных материалов [1], основанные на испытаниях представительских образцов, имеют ряд недостатков, обусловленных существенным влиянием на результаты измерений условий закрепления, способа нагружения, неоднородности напряженно-деформированного состояния и технологических трудностей изготовления образцов. Одним из альтернативных методов определения деформационных характеристик и параметров моделей деформирования является использование экспериментальной информации о поведении элементов конструкции, изготовленных из исследуемых материалов, и ее интерпретации (обработки) с использованием методов идентификации на основе компьютерного моделирования. До настоящего времени подобные методы идентификации применялись в основном для определения эффективных упругих характеристик композитных материалов на основе статических экспериментов [2-6]. Из работ, посвященных определению параметров моделей деформирования при нестационарных нагружениях, можно отметить лишь исследования [7-9]. В докладе рассматривается развитие метода определения вязкоупругих параметров моделей деформирования композитных и изотропных материалов по результатам расчетно-экспериментального анализа динамического поведения цилиндрических оболочек при ударном нагружении. Построение разрешающей системы уравнений динамики цилиндрической оболочки базируется на неклассической теории оболочек [10, 11]. Для этого компоненты вектора перемещения представляются в виде разложений по ортонормированным полиномам Лежандра. Геометрические соотношения определяются на основе простейшего квадратичного варианта нелинейной теории оболочек [11]. Определяющие соотношения композитного материала оболочки устанавливаются на основе линейной теории вязкоупругости [11, 12]. Вывод уравнений движения цилиндрической оболочки при торцевом ударе жестким телом базируется на принципе возможных перемещений [13]. Задача параметрической идентификации материальных констант и функций моделей вязкоупругого поведения композитных и изотропных материалов ставится следующим образом. Требуется найти набор параметров (вектор) определяющих соотношений, при которых математическая модель, описывающая динамическое поведение композитных вязкоупругих цилиндрических оболочек при ударном нагружении, наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными. Здесь под параметрами понимаются мгновенные и длительные модули упругости и сдвига, коэффициенты Пуассона и времена релаксации. В результате задача сводится к нахождению вектора коэффициентов физических уравнений, обеспечивающего минимальное значение целевой функции, представляющей сумму среднеквадратичных отклонений характерных значений расчетных и экспериментальных перемещений и деформаций и их скоростей. Численный метод решения сформулированной задачи идентификации состоит из трех самостоятельных этапов: решения начально-краевой задачи нелинейного деформирования изотропных и композитных цилиндрических оболочек при ударном

нагружении, анализа чувствительности целевой функции по искомым параметрам (проектным переменным) и поиска глобального минимума целевой функции. Первый этап решения задачи идентификации основывается на явной вариационно-разностной схеме [11]. На втором этапе решения задачи идентификации осуществляется анализ чувствительности целевой функции по переменным проектирования с целью оценки возможности определения искомых параметров определяющих соотношений в данной задаче. Это исследование базируется на теории глобальных показателей чувствительности для изучения нелинейных математических моделей [14]. На третьем этапе решается задача поиска глобального минимума целевой функции. Для решения задачи глобальной оптимизации не существует универсального по эффективности алгоритма. Поэтому при разработке методов глобальной оптимизации в первую очередь следует учитывать свойства целевой функции и допустимого множества решений рассматриваемых задач. Рассматриваемая целевая функция имеет многоэкстремальный характер и большую размерность, поэтому для нахождения глобального минимума был разработан подход, основанный на использовании глобального анализа чувствительности и детерминированных прямых методов оптимизации. Вначале проводится оценка чувствительности целевой функции по искомым параметрам. В результате параметры, к которым выявлена малая чувствительность заменяются их средними значениями и полагаются неизменными. Параметры, оказывающие существенное влияние на целевую функцию, определяются в результате решения задачи оптимизации методами прямого поиска (Хука-Дживса, Нелдера-Мида, Бокса и др.). При этом в качестве начального приближения используются значения искомых переменных, полученных при анализе чувствительности целевой функции. Это позволяет повысить скорость сходимости метода и избежать попадания в локальные минимумы, что бывает при абсолютно случайном начальном приближении. Предлагаемые алгоритмы вычисления глобальных показателей чувствительности и поиска глобального минимума целевой функции ориентированы на использование в многопроцессорных вычислительных системах и кластерных архитектурах. Параллелизм алгоритма реализуется через распределение независимых вычислений значений целевой функции для каждого случайного набора искомых параметров. Для распараллеливания алгоритма между процессорами используется стандартный интерфейс обмена данными MPI (Message Passing Interface). Параллельная версия программного кода решения задач идентификации позволяет сократить время счета более чем в сто пятьдесят раз по сравнению с последовательной. Проведено тестирование развиваемого подхода и показана его работоспособность на задачах определения жесткостных и реологических характеристик изотропных и композитных материалов по результатам расчетно-экспериментального анализа нестационарного деформирования цилиндрических оболочек при ударе абсолютно жестким телом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00500-а) и по программе поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ - 6391.2006.8).

Список литературы

- [1] *Пелех Б.Л., Салык Б.И.* Экспериментальные методы исследования динамических свойств композиционных структур. Киев: Наукова думка, 1990. 136 с.
- [2] *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таурова Л.П.* Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных ком-

- позитов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1989. Т.30. С. 16–31.
- [3] Суворова Ю.В., Добрынин В.С. Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации // Механика композитных материалов. 1989. № 1. С. 150–157.
- [4] Воронцов Г.В., Плющев Б.И., Резниченко А.И. Определение приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов методами обратных задач тензометрирования // Механика композит. материалов. 1990. № 4. С. 733–736.
- [5] Матвеевко В.П., Юрлова Н.А. Идентификация упругих постоянных композитных оболочек на основе статических и динамических экспериментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 3. С. 12–20.
- [6] Каюмов Р.А. Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 2. С. 94–103.
- [7] Федоренко А.Г., Цыпкин В.И., Иванов А.Г., Русак В.Н., Заикин С.Н. Особенности динамического деформирования и разрушения цилиндрических стеклопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении // Механика композит. материалов. 1983. № 1. С. 90–94.
- [8] Демешкин А.Г., Козеко М.Е., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Демпфирующие характеристики композитных материалов, изготовленных намоткой. // Прикл. механика и техн. физика. 2001. Т. 42. № 1 С. 190–195.
- [9] Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Куликова Н.А. Идентификация вязкоупругих характеристик композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа динамического поведения полусферических оболочек // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 47. № 13. С. 126–133.
- [10] Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассических теорий пластин. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 2. С. 158–167.
- [11] Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2002. 400 с.
- [12] Колтунов М.А. О расчете гибких пологих ортотропных оболочек с линейной наследственностью // Вестник Московского ун-та. Сер. матем. и мех. 1963. № 6. С. 64–70.
- [13] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
- [14] Соболев И.М. Глобальные показатели чувствительности для изучения нелинейных математических моделей // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 9. С. 43–52.

Abrosimov N.A., Kulikova N.A. *Identification of viscoelastic strain model for composite cylindrical shells under impact loading.* A method of material constants and functions analysis defining isotropic and composite materials relations based on minimization of computer and experimental results is considered. The program realization of the method is fulfilled within the bounds of parallel computation technology. It is shown for the problems of isotropical and composite materials with rigid and rheological characteristics using the results of numerical-experimental analysis for nonstationary deformation of cylindrical shells impacted by rigid body.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СРЕДЕ БИО

Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С.

НИИ механики Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается модель пористой среды с двухфазной внутренней структурой, предложенная Био. Представлены соответствующие граничные интегральные уравнения и гранично-элементная методика их решения. Приведен численный пример.

Введение

Для решения проблемы распространения волн в пористых средах разработана модель среды Био [1, 2, 3, 4]. Теоретические исследования свойств двух типов продольных волн в двухфазной среде далеки от завершения [5, 6]. Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метод граничных элементов (МГЭ) привлекаются к подобным исследованиям [6, 7]. На основе ГИУ из [7, 8] в работе применена суперэлементная МГЭ-схема в отличие от изопараметрической из [7, 8]. Приведен численный пример.

Математическая модель и метод решения

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения \hat{u}_i и порового давления \hat{p} имеет следующий вид [7]:

$$G\hat{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\hat{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\hat{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\hat{u}_i = -\hat{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\hat{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\hat{p} - (\alpha - \beta)s\hat{u}_{i,i} = -\hat{a},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

где G, K - константы упругости, ϕ - пористость, k - проницаемость, α - эффективный коэффициент напряжений, ρ, ρ_a, ρ_f - плотности пористостого скелета, присоединенной массы и жидкой среды, \hat{F}_i, \hat{a} - плотности источников.

Интегральное представление прямого подхода имеет следующий вид [7]:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^s & -\hat{P}_j^s \\ \hat{U}_i^f & -\hat{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ \hat{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^s & -\hat{Q}_j^s \\ \hat{T}_i^f & -\hat{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p} \end{bmatrix} d\Gamma,$$

где выражения для $\hat{U}_{ij}^s, \hat{P}_j^s, \hat{U}_i^f, \hat{P}^f, \hat{T}_{ij}^s, \hat{T}_i^f, \hat{Q}_j^s, \hat{T}_i^f$ можно взять в [7].

Рассматриваем регуляризованное уравнение. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности на граничные элементы совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваем как вырожденные четырехугольные

элементы, каждый из которых отображается на контрольный элемент. Аппроксимация обобщенных граничных перемещений осуществляется билинейным элементом, а обобщенных поверхностных сил - постоянным элементом. Для получения дискретного аналога ГИУ применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации выберем узлы аппроксимации исходных граничных функций.

Численные результаты

Рассмотрим задачу, изображенную на рис. 1, со следующими параметрами: $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0,19$, $R = 4,7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\alpha = 0,86$, $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/\text{Нс}$, $t = -1 \text{ Н/м}^2$. Граничные условия в изображениях по Лапласу имеют вид: $\hat{u}_y(y=0) = 0$, $\hat{q}_y(y=0) = 0$, $\hat{\sigma}_y(y=l) = -1/s$, $\hat{p}(y=l) = 0$, $l = 3 \text{ м}$.

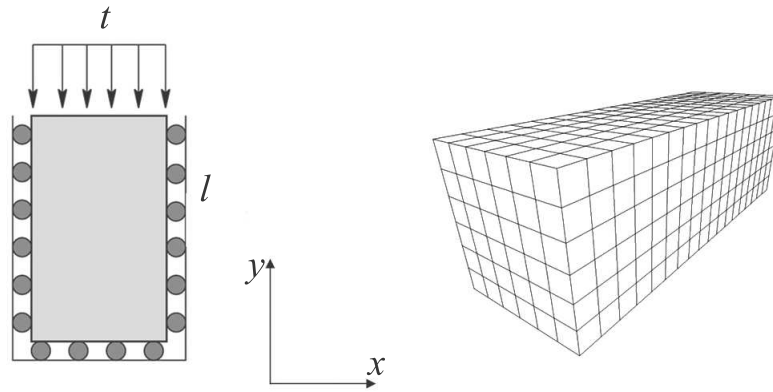


Рис. 1.

Гранично-элементная сетка, изображенная на рис. 1, состоит из 504 элементов. Результаты расчетов перемещений и напряжений приведены на рис. 2, 3 соответственно.

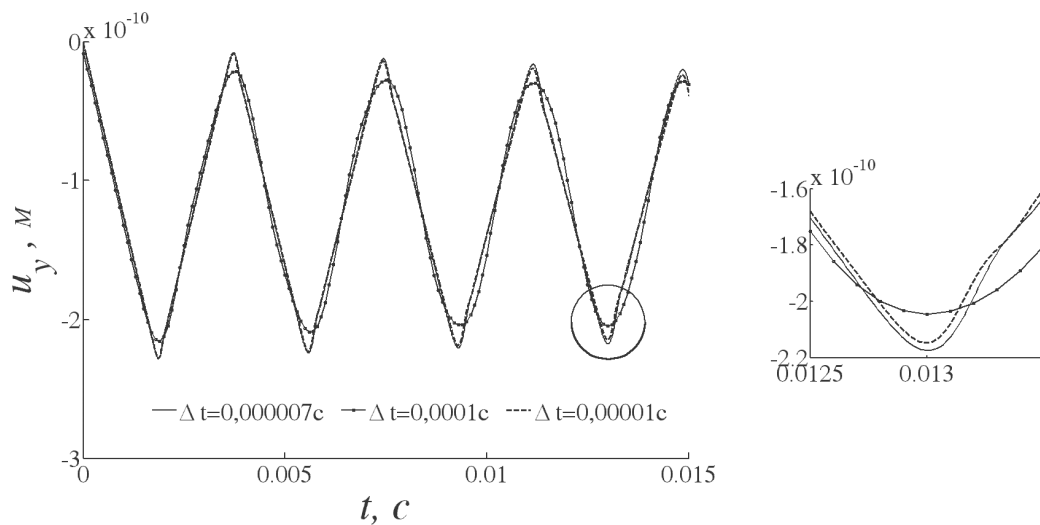


Рис. 2.

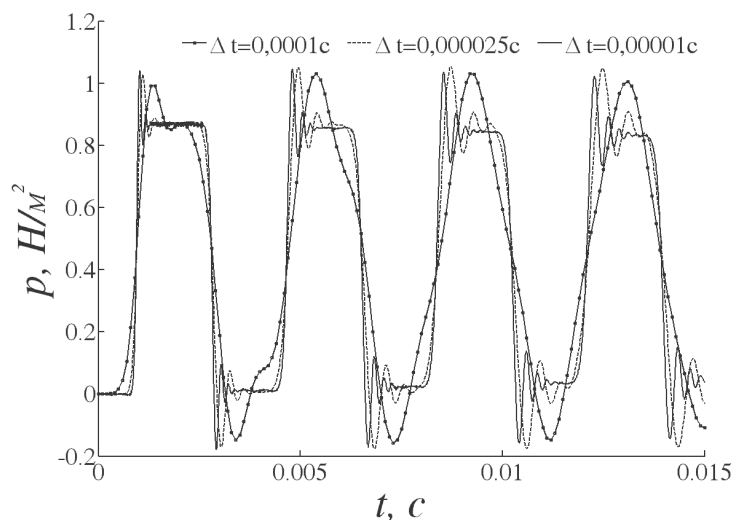


Рис. 3.

Рассмотрим ту же задачу со следующими параметрами: $K = 2,1 \cdot 10^8 \text{ H/м}^2$, $G = 9,8 \cdot 10^7 \text{ H/м}^2$, $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0,48$, $R = 1,2 \cdot 10^9 \text{ H/м}^2$, $\alpha = 0,981$, $k = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/\text{Hс}$, $t_y = -1 \text{ H/м}^2$, $l = 10 \text{ м}$. Результаты расчетов перемещений и напряжений приведены на рис. 4, 5 соответственно.

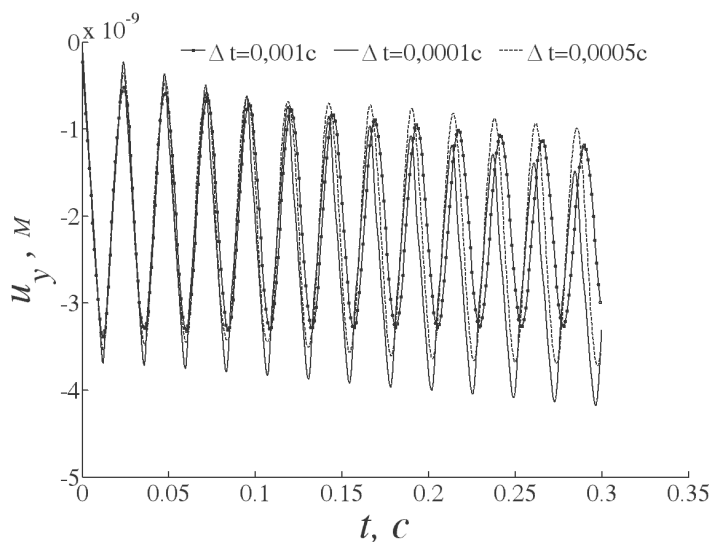


Рис. 4.

Продемонстрирована возможность решения начально-краевых задач поропругости методом граничных элементов. Численно показано влияние пористости на отклик граничных полей.

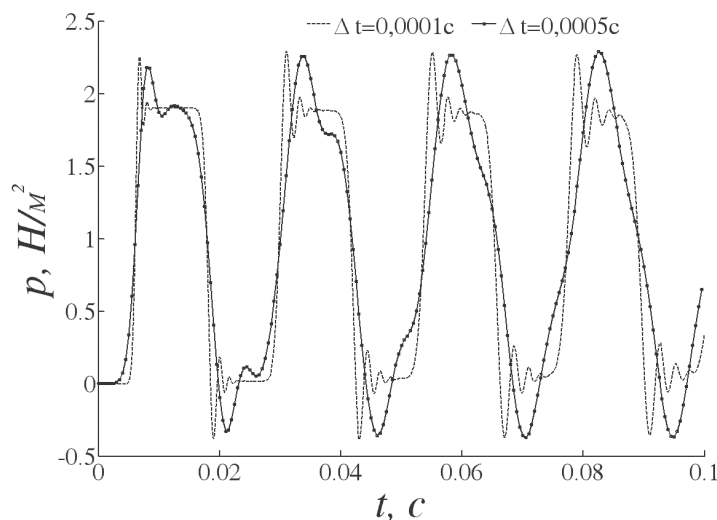


Рис. 5.

Список литературы

- [1] Френкель, Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геоф. - 1944. - Т. 8., № 4. - С. 65-78.
- [2] Biot, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. - 1956. V. 28, № 2. - P. 168-178.
- [3] Biot, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. - 1956. V. 28, № 2. - P. 179-191.
- [4] Николаевский, В.Н. Геомеханика и флюидодинамика с приложениями к проблемам газовых и нефтяных пластов М.: Недра, 1996. - 447 с.
- [5] Михайлов, Д.Н. Различие продольных волн Френкеля-Био в водонасыщенной и газонасыщенной пористых средах // МЖГ - 2006. - № 1. - С. 121-130.
- [6] Дунин, С.З., Михайлов, Д.Н., Николаевский, В.Н. Продольные волны в частично насыщенных пористых средах. Влияние газовых пузырьков // ПММ - 2006. - Т. 70. - Вып. 2. - С. 282-294.
- [7] Schanz, M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua - Berlin Springer, 2001. - 170 p.
- [8] Schanz, M., Struckmeier V. Wave propagation in a simplified modelled poroelastic continuum: Fundamental solutions and a time domain boundary element formulation // Int. J. Numer. Meth. Engng. - 2005. - V. 64. - P. 1816-1839.

Amenitsky A.V., Igumnov L.A., Karelin I.S. *Boundary element simulation of wave propagation in Bio-medium.* A model of a porous medium with a two-phase internal structure introduced by Bio is discussed. The related integral equations and a boundary element method for analyzing them are described. A numerical example is given.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ КРУЧЕНИЯ

Асотова Е.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается нелинейная задача кручения призматических упругих тел при малых, но конечных углах закручивания. Полуобратным методом трехмерная задача сведена к нелинейной краевой задаче на сечении стержня. Последняя решается методом возмущений Синьорини, с применением пакета Flex PDE. В рамках теории второго порядка найдено напряженное состояние стержней прямоугольного, эллиптического сечения из сжимаемого полулинейного материала. В случае кругового цилиндра получено аналитическое решение задачи, которое сравнивается с численным расчетом. Обнаружено появление напряжений, отсутствующих в линейной теории кручения. Проанализирован эффект Пойнтинга при кручении и влияние формы поперечного сечения на его величину.

1. Уравнения равновесия упругой среды при отсутствии массовых сил запишем при помощи несимметричного тензора напряжений Пиолы [1]

$$\operatorname{div} \underline{\underline{D}} = 0, \quad (1)$$

Предположим, что в отсчетной конфигурации упругое тело имеет форму цилиндра (призмы) произвольного поперечного сечения. Образующие цилиндра параллельны оси x_3 , а координаты x_1, x_2 отсчитываются в плоскости поперечного сечения, занимающего область σ . Координатные орты обозначим $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3$. Согласно [2] конечная деформация кручения и растяжения-сжатия призматического тела задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{R}(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2 + (\lambda x_3 + w(x_1, x_2))\underline{i}_3, \\ \underline{e}_1 &= \underline{i}_1 \cos \psi x_3 + \underline{i}_2 \sin \psi x_3, \\ \underline{e}_2 &= -\underline{i}_1 \sin \psi x_3 + \underline{i}_2 \cos \psi x_3, \\ \underline{e}_3 &= \underline{i}_3, \quad (\lambda, \psi = \text{const}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \underline{R} – радиус-вектор точек деформации среды, $(\lambda - 1)$ – относительное осевое удлинение, ψ – угол закручивания

2. Подстановка (2) обеспечивает сведение исходной трехмерной задачи нелинейной теории упругости к двумерной краевой задаче для области σ . Решение проблемы кручения сводится к определению функций $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$ из системы уравнений равновесия (1) и граничных условий $n_1 D_{1k} + n_2 D_{2k} = 0$, ($k = 1, 2, 3$). Эта двумерная краевая задача зависит от параметров λ, ψ . Считая угол закручивания ψ малым, будем искать решение в виде отрезка степенного ряда по ψ :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \beta x_1 + \psi^2 u(x_1, x_2) + \dots \\
u_2 &= \beta x_2 + \psi^2 v(x_1, x_2) + \dots \\
w &= \psi w_0(x_1, x_2) + \dots
\end{aligned} \tag{3}$$

где члены третьего и более высокого порядка относительно ψ отброшены.

Для полуматериала, имеем [1]:

$$\underline{\underline{D}} = 2\mu \left[\left(\frac{\nu S_1}{1 - 2\nu} - 1 \right) \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}} \right], \quad S_1 = \text{tr} \underline{\underline{U}} - 3, \quad \underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^T)^{1/2}, \tag{4}$$

где $\underline{\underline{C}}$ – градиент деформации, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Кратность удлинения λ считается заданной постоянной, а величина β находится из условия $D_{11} = D_{22} = 0$ при $\psi = 0$, и на основании (2) и (4), имеет вид: $\beta = 1 - \nu(\lambda - 1)$.

3. Используя (3), можно найти разложение тензора растяжения $\underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^T)^{1/2}$ и обратного тензора $\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{V}}$. С учетом (4) вычислим компоненты тензора $\underline{\underline{D}}$, для случая когда $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= 2\mu\psi^2 \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \frac{1}{8}x_2^2 \right) \right), \\
D_{22} &= 2\mu\psi^2 \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{4}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{8}x_1^2 \right) \right), \\
D_{33} &= 2\mu\psi^2 \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{1}{8} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{4}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{4}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \frac{1}{8}x_2^2 \right) \right), \\
D_{12} &= 2\mu\psi^2 \left(\frac{\partial v}{2\partial x_1} + \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{3}{8}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \frac{1}{8}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right), \\
D_{21} &= 2\mu\psi^2 \left(\frac{\partial v}{2\partial x_1} + \frac{\partial u}{2\partial x_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8}x_1x_2 - \frac{3}{8}x_2 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} - \frac{1}{8}x_1 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right), \\
D_{31} &= D_{13} = \mu\psi \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad D_{32} = D_{23} = \mu\psi \left(\frac{\partial w_0}{\partial x_2} + x_1 \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

4. Функции $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ и $w(x_1, x_2)$ находятся путем численного решения, при помощи пакета Flex PDE, линейной неоднородной краевой задачи, сформулированной ранее в [3] и использующей известные результаты линейной теории кручения [4]. После этого по формулам (5) подсчитывается поле напряжений в сечении призматического тела. Численные результаты были получены для прямоугольного и эллиптического сечений с различными отношениями сторон и эксцентриситетами, включая квадрат и круг, при $\psi = 0.1; 0.2; 0.3$ и $\lambda = 0.91 \dots 1.1$.

Анализ полученных данных показывает, что величина продольной силы

$$\iint_{\sigma} D_{32} d\sigma = F_3 \quad (6)$$

существенно зависит от отношения сторон прямоугольного сечения или полуосей эллипса. Данный интеграл имеет максимальное (положительное) значение в случае квадрата или круга и уменьшается до отрицательных значений при убывании величины отношения b/a (здесь a и b – полуоси эллипса или стороны прямоугольника), принимая при определенном отношении сторон или эксцентриситете нулевое значение. Например, для эллиптического сечения, при $\psi = 0$, $\lambda = 1$ $F_3 = 0$, при $b/a = 0.818$. Это означает, что при указанных значениях параметров эффект Пойнтинга отсутствует. При дальнейшем уменьшении отношения b/a , знак эффекта Пойнтинга меняется на обратный. Из сказанного следует, что если стержень из полулинейного материала скручивается, при отсутствии продольной силы, то его длина уменьшается в случае кругового сечения и увеличивается для эллиптического сечения, заметно отличающегося от кругового.

5. Рассмотрим кручение кругового цилиндра из сжимаемого материала. В этом случае представление (2) сводится к следующему:

$$\begin{cases} R = R(r) \\ \Phi = \varphi + \psi z \\ Z = \lambda z \end{cases} \quad (7)$$

r, φ, z – цилиндрические координаты отсчетной конфигурации.
 R, Φ, Z – цилиндрические координаты после деформации.

$$\begin{aligned} R &= \overset{0}{\nabla} \underline{R} = R'(r) \underline{e}_r \underline{e}_R + \frac{R}{r} \underline{e}_\varphi \underline{e}_\Phi + \psi R \underline{e}_z \underline{e}_\Phi + \lambda \underline{e}_z \underline{e}_z \\ \underline{e}_r &= \underline{i}_1 \cos \varphi + \underline{i}_2 \sin \varphi, \\ \underline{e}_\varphi &= -\underline{i}_1 \sin \varphi + \underline{i}_2 \cos \varphi, \quad \underline{e}_z = \underline{i}_3, \\ \underline{e}_R &= \underline{i}_1 \cos \Phi + \underline{i}_2 \sin \Phi, \\ \underline{e}_\Phi &= -\underline{i}_1 \sin \Phi + \underline{i}_2 \cos \Phi, \quad \underline{e}_Z = \underline{e}_z = \underline{i}_3, \end{aligned} \quad (8)$$

Для полулинейного материала, имеем:

$$\underline{\underline{D}} = 2\mu \underline{\underline{C}} + 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr} \underline{\underline{U}} - 3) - 1 \right] \cdot \underline{\underline{A}}, \quad (9)$$

здесь $\underline{\underline{A}}$ – тензор поворота $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}$

Уравнение равновесия $\overset{0}{\nabla} \cdot \underline{\underline{D}} = 0$ сводится к одному уравнению:

$$\frac{dD_{rR}}{dr} + \frac{D_{zR} - D_{\varphi\Phi}}{r} - \psi D_{z\Phi} = 0 \quad (10)$$

(10) – это уравнение для функции $R(r)$, которое приводится к виду:

$$(R' + \frac{R}{r})' + \frac{1 + \nu + \nu\lambda}{(1 - \nu)r} \left[\frac{\lambda + \frac{R}{r}}{\Delta} - 1 \right] + \psi^2 R \left[\frac{1 + \nu + \frac{\nu R}{r}}{(1 - \nu)\Delta} - 1 \right] = 0 \quad (11)$$

где $0 \leq r \leq 1$, $\Delta = \sqrt{(\lambda + \frac{R}{r})^2 + \psi^2 R^2}$

Уравнение (10) надо решать с граничными условиями $R(0) = 0$, $D_r R(1) = 0$ или

$$(1 - \nu)R' + \nu\Delta = 1 + \nu, \quad (12)$$

при $r = 1$

При $\psi = 0$, $R = R_0$, $R = \alpha r$, следовательно $\alpha = 1 + \nu - \nu\lambda$

$$R = \alpha r + \psi^2 U_0(r) \dots \quad (13)$$

Подставим (13) в (11) и решим преобразованное дифференциальное уравнение, получим:

$$U_0(r) = -0.117857r + 0.017857r^3$$

6. Для случая кручения кругового цилиндра сравним результаты, полученные аналитически в п.5, с результатами п.4, которые найдены численными методами с использованием формул (5). В данном случае рассматривается кручение кругового цилиндра из несжимаемого материала, при $\lambda = 1$

Следуя [5] имеем:

$$X_1 = U_1(x_1, x_2) \cos \psi x_3 - U_2(x_1, x_2) \sin \psi x_3,$$

$$X_2 = U_2(x_1, x_2) \cos \psi x_3 + U_1(x_1, x_2) \sin \psi x_3,$$

$$X_3 = 0$$

$$U_1 = \beta x_1 + \psi^2 U(x_1, x_2), \quad U_2 = \beta x_2 + \psi^2 V(x_1, x_2)$$

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{(\beta x_1 + \psi^2 U)^2 + (\beta x_2 + \psi^2 V)^2} = \\ = \beta r + \psi^2 \frac{(Ux_1 + Vx_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

где $\beta = 1 + \nu - \nu\lambda = \alpha$

$$0 \leq r \leq 1, \quad -1 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad \lambda = 1, \quad \nu = 0.3$$

Таким образом случай кругового цилиндра служит примером, тестирующим результаты численного процесса в пакете Flex PDE. Результаты п.4 и 5 совпадают при совпадении значений функций $U_0(r)$ и $F(x_1, x_2)$

$$F(x_1, x_2) = \frac{Ux_1 + Vx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Ниже приведена таблица сравнения значений функций $U_0(r)$ и $F(x_1, x_2)$

$r/x_1, x_2$	$F(x_1, x_2)$	$U_0(r)$
0	0	0
0.1	-0.0011	-0.0011
0.5	-0.057	-0.0578
0.9	-0.0943	-0.0943
1	-0.1	-0.1

Список литературы

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [2] Zubov L.M. Теория кручения призматических стержней при конечных деформациях// Доклады АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 827–831.
- [3] Asotova E. A., Zubov L. M. Эффекты второго порядка в теории кручения призматических упругих тел.// Труды X международной конференции современные проблемы механики сплошной среды. 2006. С. 21-25
- [4] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
- [5] Zubov L. M., Guba A. B. нелинейная теория кручения призматических упругих тел, содержащих дислокации// Известия вузов. 2003. С. 191-201

Asotova E.A. *The stressed state of prismatic bars under finite torsion deformations.* The nonlinear problem of torsion for prismatic elastic bodies under small, but finite, angles of twist is examined. The three-dimensional problem is reduced to the nonlinear boundary value problem at the cross-section of a bar. The last problem is solved by Signorini disturbance method with help of Flex PDE package. The stressed state for the bar of compressible half-linear material with rectangular or elliptic cross-section is found in limited of the second-order theory. The analytical solution of the problem in case of circular cylinder is obtained for the comparison with the numerical results. The appearance of the stress, those are absent at the linear theory of torsion, is revealed. The Pointing effect in torsion and the influence of the cross-section form on it are analysed.

РАСЧЕТ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ПРЯМОЙ ФОРМУЛИРОВКИ МЕТОДА ГРАНИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Белов А.А., Васильев А.А., Пазин В.П.

НИИ механики Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского

Представлены результаты расчетов динамического состояния вязкоупругих тел на основе метода граничных элементов в сочетании с методами квадратур сверток [1] и Дурбина. Решение вязкоупругих краевых задач в трехмерной постановке во времени организовано без использования шаговых процедур.

1. Гранично-элементное моделирование

Детали редукции исходной начально-краевой задачи трехмерной теории вязкоупругости к эквивалентной системе разрешающих граничных интегральных уравнений (ГИУ) можно найти в [2, 3]. Для численного обращения решения ГИУ, записанных в изображениях по Лапласу, использован алгоритм, предложенный Дурбином [4, 5]. Для решения гранично-временных интегральных уравнений (ГВИУ) применен метод квадратур сверток [6, 7].

2. Гранично-элементные расчеты

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $P(t) = 1000H/m^2$ по площади $1m \times 1m$ поверхности полупространства. Исследуемая точка находится на расстоянии $15m$ от источника воздействия силы. Параметры материала полупространства: $E = 2,5 \cdot 10^8 H/m^2$, $\nu = 0,298$, $\rho = 1884 кг/м^3$. Четверть дискретной модели состоит из 864 элементов и 913 точек. На рис. 1 представлены расчеты по двум методам и дано сравнение с решением, приведенным в [1]. Цифрой 1 отмечены кривые, полученные методом Дурбина и методом квадратур сверток, цифрой 2 - решение из [1].

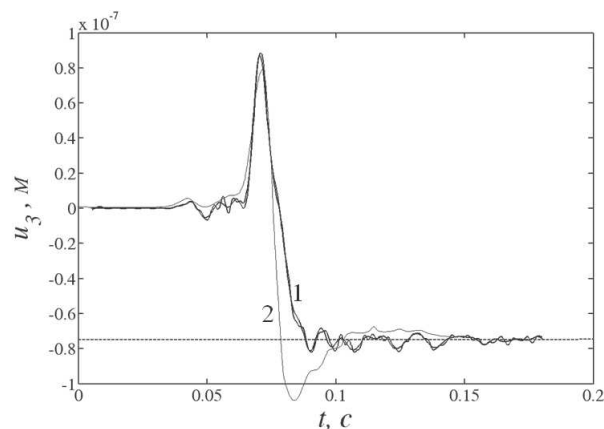


Рис. 1.

Рассмотрим задачу о действии силы $P = (H(t) - H(t - 0,0085с))H/m^2$ на поверхность вязкоупругого штампа $2m \times 2m \times 1m$, расположенного на вязкоупругом

полупространстве. Четверть равномерной сетки штампа содержит 96 ГЭ, а четверть ГЭ-сетки дневной поверхности полупространства - 432 четырехугольных элемента.

Параметры материалов: штамп - $E = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, полупространство - $E = 1,38 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,35$, $\rho = 1966 \text{ кг/м}^3$.

В качестве координат исследуемой точки взяли значения (2,33; 2,33; 0). За начало координат выбран центр контактной грани штампа. На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов, когда и штамп и полупространство рассчитываются на основе одной вязкоупругой модели. На рис. 2 представлены кривые для модели стандартного вязкоупругого тела: цифрой 1 отмечено упругое решение, цифрами 2, 3 и 4 - решение для $\gamma = 100 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$ и $\gamma = 0,01 \text{ с}^{-1}$ соответственно. На рис. 3 изображены кривые для степенной модели: цифрой 1 отмечено упругое решение, цифрами 2, 3, 4, 5 и 6 - решение для $k = 1, \alpha = 0,5$, $k = 1, \alpha = 0,75$, $k = 1, \alpha = 0,95$, $k = 5, \alpha = 0,95$, $k = 10, \alpha = 0,95$ соответственно.

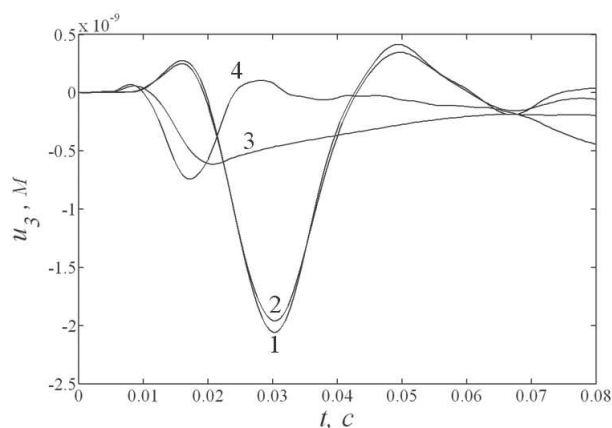


Рис. 2.

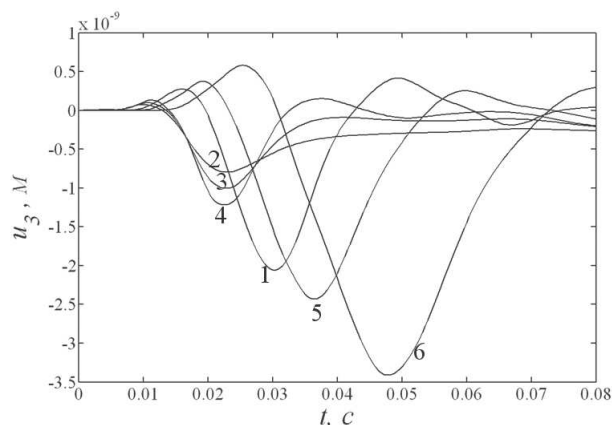


Рис. 3.

Рассмотрим задачу о действии нагрузки на корпус атомной станции теплоснабжения (АСТ), изображенной на рис. 4. Геометрическая модель корпуса взята из

[2]. Нагрузка действует в окрестности точки А по следующему закону:

$$P(t) = \begin{cases} p_0 t/2, & 0 < t < 0,012c \\ p_0/2, & 0,012c < t < 0,037c \\ p_0(t - 0,025)/2, & 0,037c < t < 0,049c \\ p_0, & 0,049c < t < 0,061c \\ p_0(-t + 0,086)/2, & 0,061c < t < 0,086c \\ 0, & t > 0,086c \end{cases}$$

где $p_0 = 4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

Половина дискретной модели корпуса атомной станции описывается 226 ГЭ и 257 точками, полупространство содержит 940 элементов и 982 точки. Исследуются вертикальные перемещения в точке В.

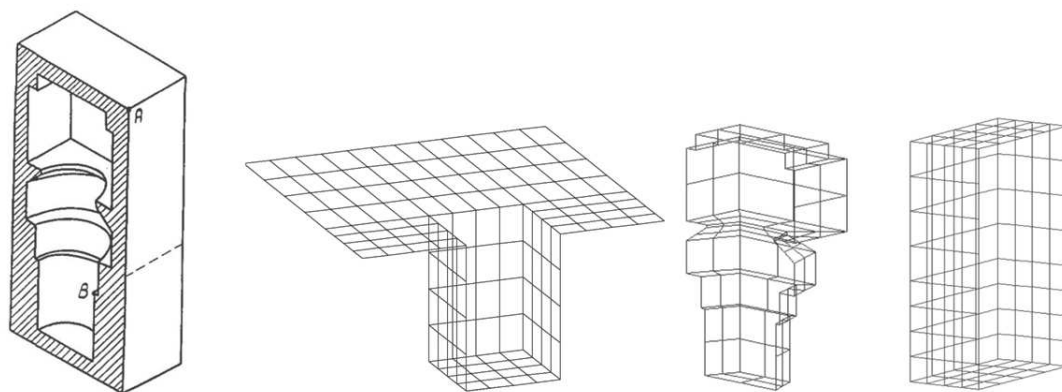


Рис. 4.

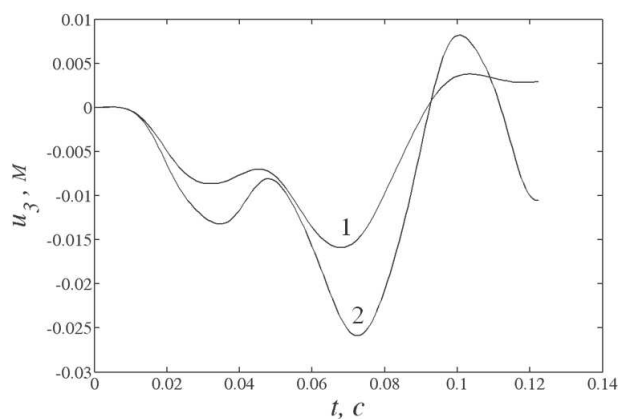


Рис. 5.

Параметры материалов: АСТ - $E = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, полупространство - $E = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$.

На рис. 5 цифрой 1 отмечено решение, полученное с полупространством, цифрой 2 - решение, полученное на основе моделирования полупространства амортизаторами на поверхности станции [2].

Список литературы

- [1] *Schanz, M.* Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2000. № 3. С. 184–188.
- [2] *Баженов, В.Г., Игумнов, Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями М.: Физматлит, 2008. - 352с.
- [3] *Белов, А.А., Игумнов, Л.А., Литвинчук, С.Ю.* Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости // Изд. ННГУ. - 2007. - вып. 69. - С. 125-136.
- [4] *Durbin, F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. 1974. V. 17. №4. P. 371-376.
- [5] *Zhao, X.* An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate // Int.J. of Solids and Structures. 2004. V. 41. P. 3653-3674.
- [6] *Lubich, C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I // Numerische Mathematik. - 1988. - № 52. - P. 129-145.
- [7] *Lubich, C.* Convolution quadrature and discretized operational Calculus. II // Numerische Mathematik. - 1988. - V. 52. - P. 413-425.

Belov A.A., Vasiljev A.A., Pazin V.P. *Calculation of composite visco-elastic bodies dynamics based on direct statement of boundary element method.* The calculation results of a dynamic state of visco-elastic bodies are presented based on a boundary element method in combination with the convolution quadrature method [1] and Durbin's method. The solution of visco-elastic boundary problems explicitly in a 3-dimensional statement is performed without using step procedures.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ АНАЛИЗЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОЕ С ПОЛОСТЬЮ МАЛОГО РАЗМЕРА

Беляк О.А., Ватульяна О. А.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Проблемы распространения волн в слоистых средах с дефектами типа трещин, полостей, включений различной формы имеют важные приложения в акустике, сейсмологии, технической диагностике. Формирование полей в средах с дефектами является сложным процессом в результате многократных переотражений от границ дефектов и среды. В настоящей работе рассматриваются установившиеся антиплоские и плоские колебания слоя с цилиндрической полостью, не выходящей на границы слоя. Помимо традиционного метода сведения исходной проблемы к системам граничных интегральных уравнения на основе теории потенциала предложен асимптотический подход при решении поставленной задачи. Приведены результаты численных экспериментов.

Задачи динамической теории упругости о колебаниях полуограниченных упругих тел с дефектами различной природы (полости, включения, трещины) имеют важные приложения в сейсмологии, акустике, технической диагностике. Одним из наиболее эффективных методов решения задач теории упругости для областей с дефектами является сведение исходных задач к системам граничных интегральных уравнений на основе идей теории потенциалов. При таком подходе требуется построение функций Грина [1] – [3], [7], что позволяет снизить размерность исследуемой задачи на единицу.

Рассмотрим установившиеся плоские колебания с частотой ω ортотропного упругого слоя толщины h с цилиндрической полостью, не выходящей на границы слоя, направляющая которой есть гладкая замкнутая кривая l_0 . Нижняя грань слоя жестко закреплена и совпадает с осью Ox_1 , а ось Ox_3 направлена перпендикулярно вверх. Оси упругой симметрии ортотропного материала совпадают с осями системы координат. Колебания в слое вызваны нагрузкой p_i , приложенной к верхней части границы слоя. Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} u_{k,l}, \\ u_i|_{x_3=0} &= 0, \sigma_{i3}|_{x_3=h} = p_i(x_1), \\ \sigma_{ij} n_j|_{l_0} &= 0, \quad i, j = 1, 3, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ – плотность среды, C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных материала, n_j – компоненты единичного вектора нормали к гладкой кривой l_0 , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкают постановку задачи (1) условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [4]. В случае плоских колебаний слоя ненулевыми компонентами являются u_1 , u_3 , колебания вызваны нагрузкой,

расположенной в плоскости Ox_1x_3 . Далее, на основании теоремы взаимности [5] получено представление полей смещений всюду в области занятой упругой средой под действием поверхностной нагрузки с носителем на отрезке $[a, b]$

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{im}(x, \xi) (u_i(x) - u_i(\xi)) dl_x - \\ &\quad - \rho\omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(x, \xi) dS_x \cdot u_i(\xi), \\ u_m^*(\xi) &= - \int_a^b p_i(x_1) U_i^{(m)}(0, h, \xi), \quad i, j, m = 1, 3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$K_{im}(x, \xi) = \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j(x), \quad x = (x_1, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_3),$$

где S_0 – плоская область, ограниченная гладкой кривой l_0 .

Выражение для смещений (2) представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых $u_m^*(\xi)$ – эталонные поля смещений в среде без дефекта, второе слагаемое обусловлено наличием полости в слое. Представление (2) позволяет рассчитывать поля смещений всюду внутри области, занятой упругой средой, если известны поля смещений на контуре дефекта.

Для определения полей смещений на контуре полости сформулирована система ГИУ с регулярными ядрами на основании соотношения (2) только лишь по границе дефекта l_0 и в случае плоских колебаний слоя имеет вид

$$\begin{aligned} u_m(y) &= u_m^*(y) - \int_{l_0} K_{im}(x, y) (u_i(x) - u_i(y)) dl_x - \\ &\quad - \rho\omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(x, y) dS_x \cdot u_i(y), \quad i, j, m = 1, 3, \quad y \in l_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Интеграл по контуру дефекта в системе ГИУ (3) существует как несобственный, что позволяет при дискретизации избежать вычисления сингулярных интегралов [2], [3]. К системе ГИУ (3) может быть применен метод граничных элементов на основе стандартных схем [5].

Рассмотрим асимптотический подход к решению задачи (1) о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью, поперечное сечение которой представляет собой окружность малого относительного радиуса r . В области изменения безразмерных параметров:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\ll 1, \quad \varepsilon_* < \varepsilon_2 < 1, \\ \varepsilon_1 &= r/h, \quad \varepsilon_2 = \omega r \sqrt{\rho/C_{33}}, \end{aligned}$$

произведен асимптотический анализ системы ГИУ (3). Заметим, что решение обратной задачи идентификации строится при $\varepsilon_2 > \varepsilon_*$, что соответствует случаю малого дефекта, когда в слое имеются бегущие волны. Пусть параметрические уравнения полости имеют вид

$$x = x_0 + r\eta, \quad y = x_0 + r\zeta, \quad \eta = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad \zeta = \{\cos \psi, \sin \psi\},$$

$$x_0 = (x_{10}, x_{30}), \quad \theta, \psi \in [0, 2\pi].$$

Представим подынтегральное выражение интеграла по контуру дефекта (3) в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует статическому случаю ($\varepsilon_2 = 0$) и некоторой добавки:

$$K_{im}(x, y) = K_{im}^0(x, y) + K_{im}^1(x, y), \quad i, m = 1, 3 \quad (4)$$

Исследование структуры функций в (4) позволило сделать следующие оценки [2],[3].

$$K_{im}^1(x, y) = O(\varepsilon_2^2), \quad K_{im}^0(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_1} F_{im}(x, y) + O(\varepsilon_1), \quad \text{при } i, m = 1, 3, \quad x, y \in l_0.$$

Выражение для $F_{im}(x, y)$ не приводится в виду его громоздкости. Осуществляя разложение в ряд полей смещений

$$u_m(x_0 + r\eta) = u_m^0(x_0) + \varepsilon_1 (u_{m,1}(x_0) \cos \theta + u_{m,3}(x_0) \sin \theta) + O(\varepsilon_2^2), \quad m = 1, 3. \quad (5)$$

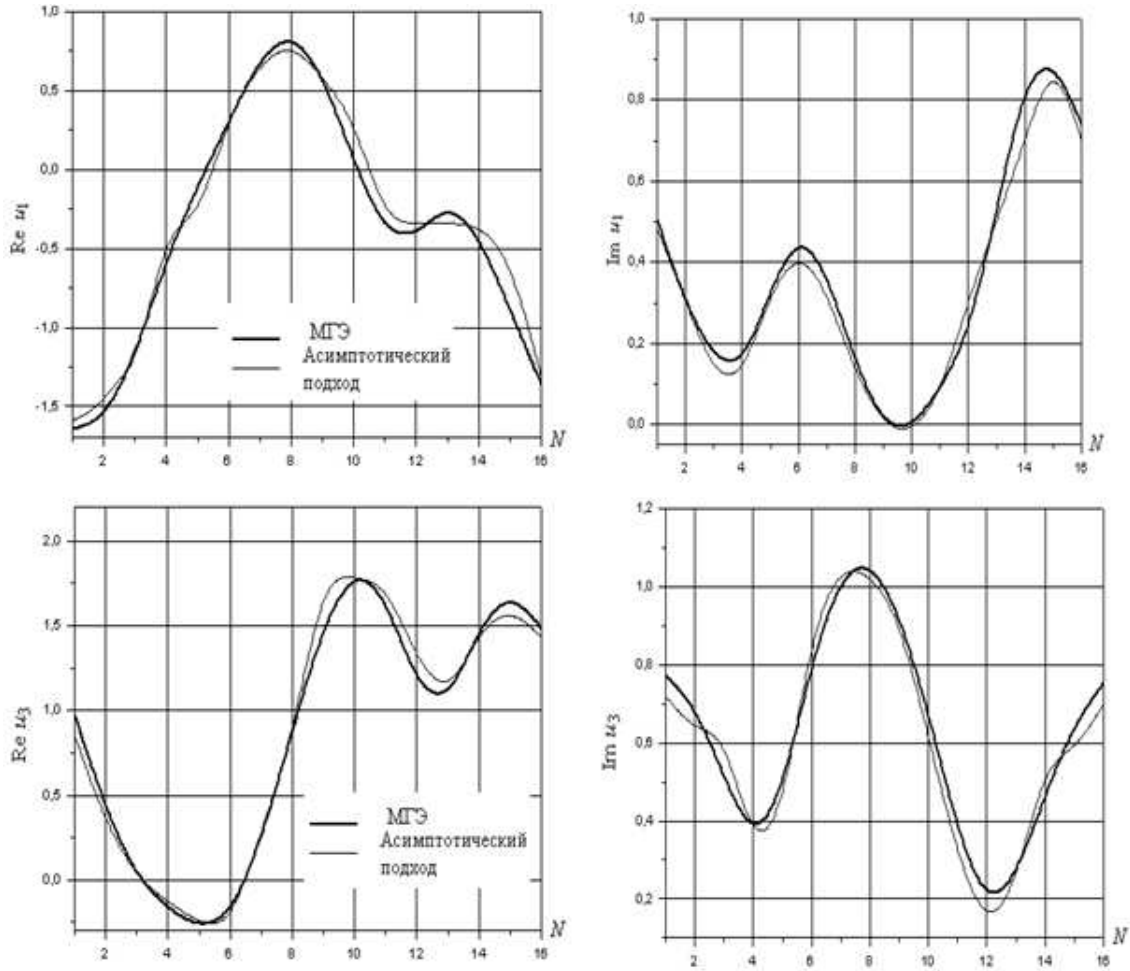
Далее, подставляя в систему ГИУ (3) разложение (5) и вычисляя криволинейный интеграл по контуру дефекта собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε_1 окончательно получим представление полей смещений на направляющей цилиндрической полости l_0 .

$$\begin{aligned} u_m^0(x_0) &= u_m^*(x_0), \\ u_{1,1}(x_0) &= \frac{I_2(a_2^{(2)}, b_2^{(1)})u_{3,3}^*(x_0) + (2\pi - I_1(a_3^{(1)}, b_3^{(1)}))u_{3,1}^*(x_0)}{\Delta_1}, \\ u_{1,3}(x_0) &= \frac{I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})u_{3,1}^*(x_0) + (2\pi - I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)}))u_{1,3}^*(x_0)}{\Delta_2}, \\ u_{3,1}(x_0) &= \frac{(2\pi - I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)}))u_{3,1}^*(x_0) + I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)})u_{1,3}^*(x_0)}{\Delta_2}, \\ u_{3,3}(x_0) &= \frac{(2\pi - I_2(a_1^{(2)}, b_1^{(2)}))u_{3,3}^*(x_0) + I_1(a_2^{(1)}, b_2^{(1)})u_{1,1}^*(x_0)}{\Delta_1}, \\ \Delta_1 &= (2\pi - I_2(a_1^{(2)}, b_1^{(2)}))((2\pi - I_1(a_3^{(1)}, b_3^{(1)})) - I_2(a_2^{(2)}, b_2^{(2)})I_1(a_2^{(1)}, b_2^{(1)})), \\ \Delta_2 &= (2\pi - I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)}))((2\pi - I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)})) - I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)})), \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения для $I_1(a, b)$, $I_2(a, b)$ не приводятся в виду их громоздкости и выражаются через упругие постоянные материала. Таким образом, получены явные представления полей смещений на контуре дефекта l_0 через эталонные поля минуя процедуру дискретизации систем ГИУ (3) на основе метода граничных элементов [2], [3], [5], что значительно упрощает анализ рассеянных волновых полей.

Проведен ряд численных экспериментов при расчете волновых полей на основе асимптотического подхода и метода граничных элементов, которые позволили установить область корректной работы асимптотического подхода: $\varepsilon_1 = 0.001 \div 0.15$ при $\varepsilon_2 < 1$.

На рисунке 1 представлены графики полей смещений на контуре полости l_0 , рассчитанные на основе метода граничных элементов и при помощи асимптотического подхода.

Рис. 1. Поля смещений на контуре полости l_0

При расчетах принято, что слой толщины $h = 1$ (аустенитная сталь), нагружался нормальной сосредоточенной нагрузкой в точке $(0, h)$ на верхней границе слоя. Цилиндрическая полость задана следующими значениями параметров: $r = 0.003h$, $x_{10} = h$, $x_{30} = h/2$. Число граничных элементов $N = 16$. В слое распространяются две бегущие волны.

Серия численных экспериментов показала, что в области корректной работы асимптотического подхода относительная разница между волновыми полями, рассчитанными на основе асимптотического подхода и метода граничных элементов отличались не более, чем на 4 %, что значительно упрощает расчет рассеянных полей в слое при наличии малого дефекта. Полученные соотношения (6) могут быть использованы в качестве базовых при построении операторных соотношений в обратных задачах реконструкции полости в слое.

Список литературы

- [1] Ватульян А.О. Обратные задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007, 223 с.
- [2] Ватульян А.О., Беляк О.А. Асимптотический подход к решению обратной задачи о реконструкции полости в упругом слое // Вестник Донец. ун-та. Сер. А. Природн. науки. 2006. Вып. 1. С. 73 – 79.
- [3] Ватульян А.О., Беляк О.А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. 2006. № 10. С. 33-39.
- [4] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1976. 319 с.
- [5] Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир. 1987. 524 с.
- [6] Ватульян А. О., Гусева И.А., Сюнякова И.М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применение. // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81 – 85.
- [7] Ватульян А.О., Суворова О. А. Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестник научных центров черноморского сотрудничества (ЧЭС). 2005, № 1. С. 10 – 16.

Belyak O.A., Vatulyan A.O. *The asymptotical approach at the analysis of wave fields in a layer with a cavity of the small size* . Problems of distribution of waves in layered environments with defects such as cracks, cavities, inclusions of the various form have the important appendices in acoustics, seismologies, technical diagnostics. Formation of fields in environments with defects is complexdifficult process as a result of repeated reverberation from borders of defects and environment. In the presenttrue work the established antiplane and plane fluctuations of a layer with the cylindrical cavity which is not leaving on borders of a layer are consideredexamined. Besides a traditional method of data of an initial problem to systems boundary integrated the equations on the basis of the theory of potential it is offered asymptotical the approach at the decision of a task in view. Results of numerical experiments are resulted.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ КИРХГОФА В СЛУЧАЕ ПЕРЕОТРАЖЕНИЯ ВОЛН

Боев Н.В., Сумбатян М.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе дан сравнительный анализ результатов прямого вычисления дифракционного интеграла с главным членом его асимптотики для двукратно отраженной высокочастотной акустической волны вдоль траектории, представляющей собой пространственную ломаную линию.

Исследование коротковолновой дифракции акустических волн на поверхностях скопления препятствий с учетом многократных переотражений возможно на основе геометрической теории дифракции (ГТД) Келлера, основанной на вычислениях коэффициентов расходимости лучей. Вместе с тем, при многократном переотражении лучей от поверхностей скопления препятствий вдоль пространственной ломаной линии, исследование дифракционной картины весьма затруднительно. На наш взгляд в этом случае удобнее исходить из физической теории дифракции Кирхгофа и ее модификации [3].

Авторами работы асимптотической оценкой методом стационарной фазы дифракционных интегралов Кирхгофа получены в [1] аналитические выражения главного члена асимптотики давления в однократно и многократно отраженной волне. В случае переотражения высокочастотной волны в одной плоскости аналитически доказано [2], что главный член асимптотики дифракционного интеграла совпадает с расчетом по ГТД. В случае распространения переотраженного луча вдоль пространственной ломаной линии аналитически доказать такое совпадение не удалось. В работе подробно обсуждается численное исследование четырехкратного дифракционного интеграла и его сравнение со значением главного члена асимптотики давления в двукратно отраженной волне от плоских граней двугранного угла вдоль пространственной ломаной линии. При этом угол поворота плоскости падающего луча во второй точке зеркального отражения равен 60 градусов, что представляет собой значительную величину. Такая задача является важной в численных алгоритмах расчета звуковых полей в архитектурной акустике залов с плоскими отражающими поверхностями.

Если любой луч вида $x_0 - y - x$ отражается от поверхности S ($y \in S$) только один раз, тогда, согласно физической теории дифракции Кирхгофа, давление $p(x)$ в отраженной волне определяется следующим интегралом [5]:

$$p(x) = \iint_S 2p^{inc}(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} dS \quad (1)$$

если граница S препятствия является акустически твердой $\partial p / \partial n|_S = 0$. Здесь $p^{inc}(y)$ - значение давления в падающей волне на границе S , Φ - потенциал фундаментального решения (функция Грина), n_y - внешняя нормаль к поверхности S в точке y , k - волновое число.

$$\begin{aligned} p^{inc}(y) &= |x_0 - y|^{-1} e^{ik|x_0 - y|}, \\ \Phi &= (4\pi)^{-1} |x - y|^{-1} e^{ik|x - y|}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{При } k \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = ik \cos(\gamma) (4\pi)^{-1} |x - y|^{-1} e^{ik|x - y|} \left[1 + O\left(\frac{1}{k|x - y|}\right) \right], \quad (3)$$

где γ - угол между нормалью n_y и направлением падения луча $x_0 - y$, $|x_0 - y|$ и $|x - y|$ - расстояния между точками пространства x_0 и $y \in S$, x и y соответственно.

Для решения задачи о двукратном переотражении будем исходить из модификации приближения Кирхгофа [3]. Прямое использование приближения Кирхгофа (1) в этом случае невозможно [3], так как оно не описывает многократно отраженных волн.

Рассмотрим повторное отражение луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$, излучающегося из точки x_0 и принимающегося в точке x_3 . При этом точки y_1^* и y_2^* могут принадлежать как одной поверхности, так и разным двум. Давление в точке приема $p(x_3)$ дается следующей формулой:

$$p(x_3) = \iint_{S_2^*} 2p(y_2) \frac{\partial \Phi(y_2; x_3)}{\partial n_2} dS_2. \quad (4)$$

Здесь $p(y_2)$ - давление в падающей волне в точке $y_2 \in S_2^*$ окрестности точки y_2^* , которое определяется после первого отражения на окрестности S_1^* точки y_1^* .

В то же время давление $p(y_2)$ само выражается подобной формулой:

$$p(y_2) = \iint_{S_1^*} 2p^{inc}(y_1) \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} dS_1. \quad (5)$$

Принимая во внимание, что $p^{inc}(y_1) = |x_0 - y_1|^{-1} e^{ik|x_0 - y_1|}$ определяет падающее поле, соответствующее точечному источнику, можно выписать следующее основное представление:

$$p(x_3) = - \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \frac{\cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2)}{L_0 L_1 L_2} \iint_{S_2^*} \iint_{S_1^*} e^{ik\varphi} dS_1 dS_2, \quad (6)$$

$$\varphi = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2 - x_3|, \quad (7)$$

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, \quad L_1 = |y_1^* - y_2^*|, \quad L_2 = |y_2^* - x_3|.$$

Такая модификация означает, что при нахождении главного члена асимптотики четырехкратного дифракционного интеграла мы будем находиться в рамках расчета амплитуды давления в двукратно отраженной волне по ГТД.

Главный член асимптотики (8) дифракционного интеграла (6) получен применением метода стационарной фазы [4].

$$p(x_3) = \cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) \frac{\exp \left\{ i \left[k(L_0 + L_1 + L_2) + \frac{\pi}{4}(\delta_4 + 4) \right] \right\}}{L_0 L_1 L_2 \sqrt{|\det(D_4)|}}, \quad (8)$$

где $D_4 = (d_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ - матрица Гессе симметричной структуры и явный вид его элементов $d_{ij}, i \leq j$ выписан в [2]. Здесь $\delta_4 = \text{sign}(D)_4$ - разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы .

Полученное явное выражение (8) устанавливает зависимость давления $p(x_3)$ в двукратно переотраженной акустической волне от геометрических параметров задачи и волнового числа. Главный член асимптотики давления $p(x_3)$ в отраженной волне определяется главными, гауссовыми и средними кривизнами, кривизнами нормальных сечений поверхностей полостей плоскостями падающих лучей в точках зеркального отражения, расстояниями между точками зеркального отражения, их удалением от источника волн и точки приема отраженной волны, направлениями падающих волн, а также углом между плоскостями падения лучей в точках зеркального отражения y_1^* и y_2^* . Разработанный метод является асимптотическим. Формула для расчета амплитуды двукратно переотраженной волны (8) справедлива при $kd \gg 1$, $kR_1^{(m)} \gg 1$, $kR_2^{(m)} \gg 1$, где d - характерный размер рассеивателя, $R_1^{(m)}$, $R_2^{(m)}$ ($m = 1, 2$) - главные радиусы кривизны поверхности в точках зеркального отражения y_1^* и y_2^* .

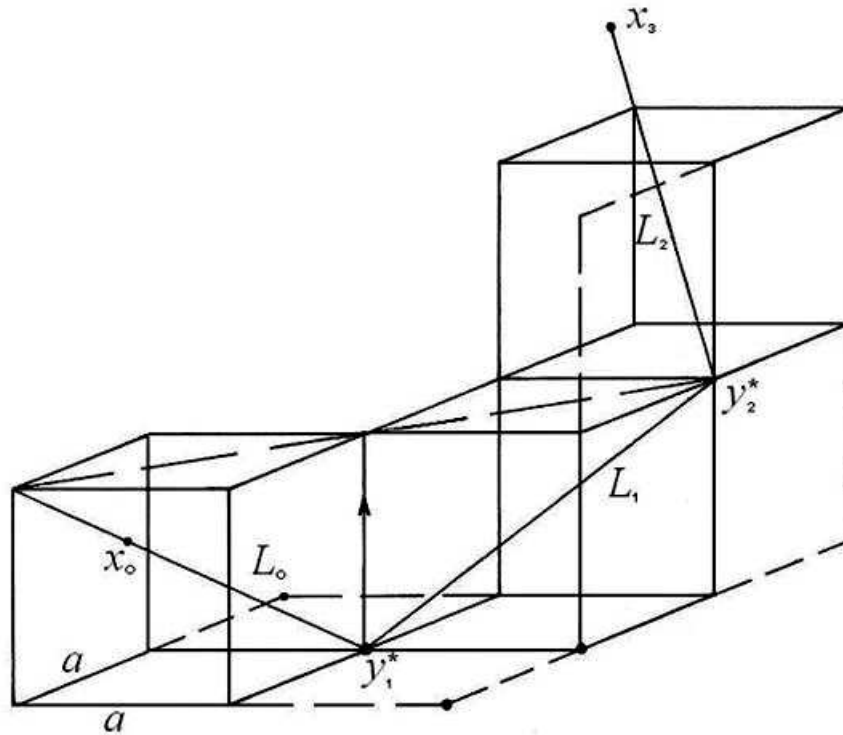


Рис. 1. Двукратное отражение высокочастотной акустической волны от системы плоских отражателей вдоль пространственной ломаной линии

Для оценки точности физической теории дифракции Кирхгофа в случае переотражения луча по траектории, представляющей собой пространственную ломаную линию было детально исследовано двукратное переотражение луча от пары квадратов (рис. 1) со сторонами $2a$ и с центрами в точках зеркального отражения, расположенных в различных плоскостях прямого двугранного угла. Для нагляд-

ности траектории луча на рис. 1 изображены равные кубы со стороной равной a , на диагоналях которых расположены источник и приемник волны, а также точки зеркального отражения. При этом угол поворота луча во второй точке зеркального отражения составляет 60 градусов. Геометрические параметры задачи выбраны следующими:

$$L_0 = L_1 = L_2 = a\sqrt{3}.$$

Численный предельный переход в вещественной амплитуде давления, вычисленной исходя из формулы (8) дает значение, соответствующее простым оптическим представлениям: $p(x_3) = 1/(L_0 + L_1 + L_2)$.

При численном расчете давления $p(x_3)$ не будем учитывать постоянного множителя перед дифракционным интегралом

$$p(x_3) \sim \iint_{S_2} e^{ik|y_2-x_3|} \left[\iint_{S_1} e^{ik(|x_0-y_1|+|y_1-y_2|)} dS_1 \right] dS_2,$$

Элемент площади на плоскости $dS = dx dy$. Для обоих квадратов берется равномерная сетка по обоим координатам с одинаковым шагом. Для первого квадрата узловые значения снабжаются индексами i_1 и j_1 , а для второго квадрата - индексами i_2 и j_2 . Интегрирование ведется по областям S_1 (первый квадрат) и S_2 (второй квадрат). Области S_1 и S_2 содержат точки зеркальных отражений: y_1^* - от первого квадрата, y_2^* - от второго квадрата.

Шаг сетки по всем четырем направлениям должен выбираться из соображений, что максимальное значение безразмерного частотного параметра ka , до которого были проведены расчеты, равно $(ka)_{max} = 550$. Очевидно, при этом $a/\lambda = ka/2\pi = 88$, где λ - длина волны. Если на длину волны брать хотя бы 8 узлов сетки, то получаем $N = 8a/\lambda \approx 700$ узлов вдоль каждого из индексов i_1, j_1, i_2, j_2 . В итоге имеем всего $N^4 = 700^4$ узлов сетки.

Приближенная формула для давления имеет вид:

$$\begin{aligned} p(x_3) = p_1 + ip_2 = \sum_{i_2=1}^N \sum_{j_2=1}^N \left[\cos(k|x_3 - y_{i_2,j_2}|) + i \sin(k|x_3 - y_{i_2,j_2}|) \right] \times \\ \times \sum_{i_2=1}^N \sum_{j_2=1}^N \left\{ \left[\cos(k|x_0 - (y_1)_{i_1,j_1}| + |(y_1)_{i_1,j_1} - (y_2)_{i_2,j_2}|) \right] + \right. \\ \left. + i \sin(k|x_0 - (y_1)_{i_1,j_1}| + |(y_1)_{i_1,j_1} - (y_2)_{i_2,j_2}|) \right\}, \quad A(p(x_3)) = |p_1 + ip_2|. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычислялась вещественная амплитуда давления $p(x_3)$ в высокочастотной области. Были взяты целочисленные значения в промежутке $100 \leq ka \leq 550$. Зависимость модуля амплитуды A от параметра ka в диапазоне с шагом 1 приведены на рис. 2, где численный расчет сравнивается с лучевым решением.

Сравнительный анализ расчетов подтверждает, что и в случае распространения переотраженного луча вдоль пространственной ломаной линии главный член асимптотики дифракционного интеграла совпадает с расчетами по ГТД.

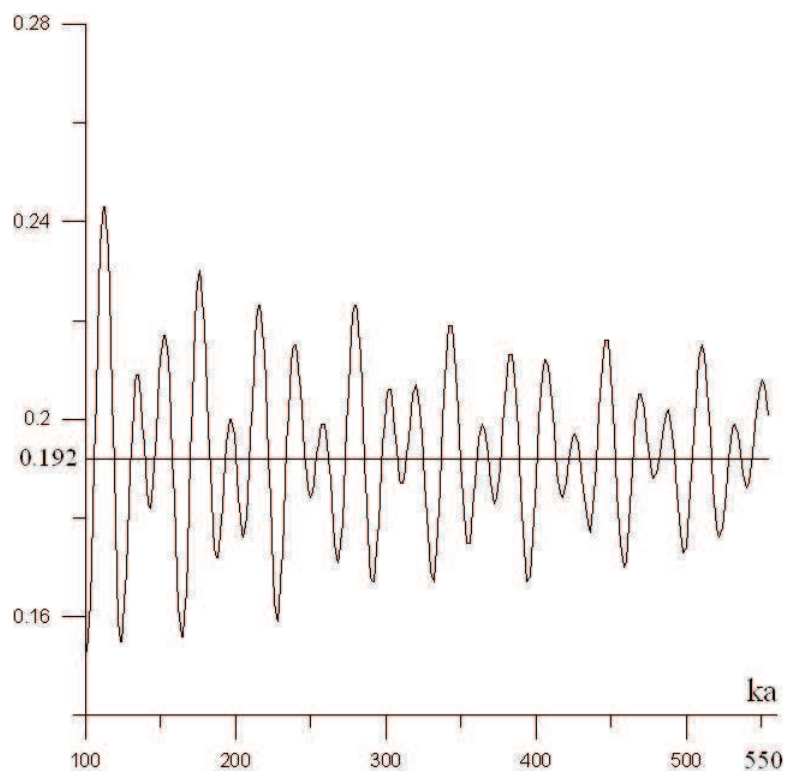


Рис. 2. Сравнение между лучевым приближением (горизонтальная линия) и приближением по теории Кирхгофа в задаче с двукратным переотражением

Список литературы

- [1] Боев Н. В., Сумбатян М. А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // Доклады РАН. 2003. Т. 392. № 5. С. 614 - 617.
- [2] Боев Н. В. Рассеяние высокочастотных волн на произвольной невыпуклой граничной поверхности упругого тела с учетом переотражений // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 65 - 80.
- [3] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теории дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [4] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
- [5] Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. - Л.: Судостроение. - 1972. - 352 с.

Boev N.V., Sumbatyan M.A. *On the accuracy of Kirchoff's physical diffraction theory in the case of re-reflected waves.* We give a comparative analysis for direct numerical treatment of diffraction integral for a doubly reflected high-frequency acoustic wave along the trajectory, which is a broken straight line.

МЕТОД ИНВАРИАНТОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ В ДИАГНОСТИКЕ ПРЕДРАЗРУШАЮЩЕГО СОСТОЯНИЯ И ЕГО АППАРАТУРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Буйло С. И.*, Орлов С. В.**

* *НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Южного
федерального университета, Ростов-на-Дону*

** *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Описан метод диагностики предразрушающего состояния материалов основанный на отклонении амплитудных и временных инвариантных соотношений потока импульсов сопутствующей акустической эмиссии (АЭ) от их устойчивых значений. Предложена аппаратная реализация метода инвариантов АЭ на основе микроконтроллеров серии PIC16.

Суть метода акустической эмиссии (АЭ) состоит в анализе параметров чрезвычайно слабого ультразвукового излучения, сопровождающего любое изменение, либо повреждение структуры металлов, их сплавов, композиционных материалов.

Нами предложен и развивается метод инвариантов АЭ, состоящий в следующем: В силу ряда предельных теорем и случайного характера потока микроповреждений, на некоторых стадиях деформации и разрушения твердых тел можно найти устойчивые (инвариантные) соотношения между временными и амплитудными параметрами сигналов АЭ. Тогда, появление отклонений регистрируемых значений этих соотношений от их инвариантных значений может служить критерием близости предразрушающего состояния. Эти отклонения могут быть достаточно малыми, однако во многих случаях их все же удается заметить и оценить, например, вычтя устойчивые (инвариантные) значения из регистрируемых [1-6].

Отношение стандартного отклонения $s_{\Delta t}$ (корень квадратный из дисперсии временных интервалов между событиями АЭ) к их среднему значению $\overline{\Delta t}$ (первый временной инвариант $I_{1\Delta t}$) для пуассоновского потока актов АЭ имеет устойчивое (инвариантное) значение равное единице, а информационный параметр временных интервалов следования $i_{1\Delta t}$ равен нулю:

$$I_{1\Delta t} = s_{\Delta t}/(\overline{\Delta t}) = I_{1\Delta t}^* = 1; \quad i_{1\Delta t} = |(\overline{\Delta t} - s_{\Delta t})|/(\overline{\Delta t}) = 0. \quad (1)$$

Аналогично можно предложить первый амплитудный инвариант u_{1u} и амплитудный информационный параметр i_{1u} :

$$I_{1u} = s_u/(\overline{u}) = I_{1u}^*; \quad i_{1u} = |(I_{1u} - I_{1u}^*)|/I_{1u}^* = 0. \quad (2)$$

где s_u и \overline{u} - соответственно стандартное отклонение и среднее значение амплитуды, а I_{1u}^* - устойчивое значение первого амплитудного инварианта, часто близкое к 0,8 на ранних стадиях нагружения многих материалов [1,3-6]. Нарушение соотношений (1) и (2) можно рассматривать в качестве АЭ диагностического признака наступления момента локализации и упорядочения процесса дефектообразования.

Ниже приведены некоторые результаты практического применения предлагаемого подхода на примере диагностики предразрушающего состояния угля.

Нагружение образцов осуществлялось в условиях, близких к одноосному сжатию. Образцы в форме куба или параллелепипеда длиной порядка 10 см выпилены из угольного пласта. Датчик АЭ через слой контактной жидкости прижимался к одной из боковых поверхностей образца [6].

Для оценки возможного отклонения потока актов АЭ от пуассоновского вида, в процессе нагружения производилось измерение первого временного инварианта АЭ. Результаты эксперимента приведены на рис. 1. Видно, что значения этого инвариантного соотношения действительно близки к 1 на большей части кривой нагружения и падают перед разрушением до значений, меньших 0,7. Интересно, что помимо спада перед разрушением, это соотношение имело еще и 2 локальных минимума (при деформациях в 0,4% и 0,7%), в точности совпадающих с небольшими сбросами нагрузки, интерпретированных нами, как "проскоки" двух локальных трещин через слои образца. Эти результаты позволяют говорить о принципиальной возможности диагностики стадий процесса роста локализованной трещины по факту отклонения параметров потока АЭ от пуассоновского вида.

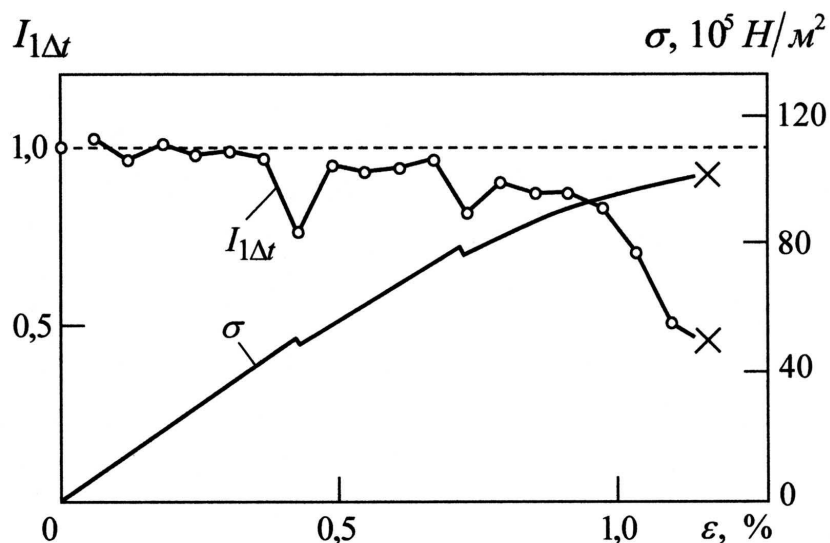


Рис. 1. Зависимость первого временного инварианта АЭ от деформации угля. Напряжение σ приложено перпендикулярно слоям. Крестики - момент разрушения.

Метод инвариантов АЭ хорошо согласуется с выводами синергетики, согласно которым твердое тело обладает устойчивыми комплексами механических свойств, связанных с диссипативными свойствами материалов в точках бифуркации, соответствующих, например, сменам стадий (и механизмов) деформации.

Практическая возможность аппаратной реализации описанных подходов исследована на макете портативного прибора для диагностики предразрушающего состояния по инвариантам АЭ с использованием линейки микроконтроллеров PIC16, PIC18 и dsPIC [7]. Микроконтроллеры осуществляют измерение амплитуд, временных интервалов между импульсами АЭ и обеспечивают предварительную обработку данных по соответствующим алгоритмам. Для повышения быстродей-

ствия и точности вычислений средних значений и стандартных отклонений временных интервалов и амплитуд АЭ использовался известный в программировании метод определения статистических характеристик по предварительно вычисленным суммам регистрируемых параметров: $\Sigma\Delta t$, $\Sigma(\Delta t)^2$, Σu , Σu^2 , $\Sigma u\Delta t$.

$$\overline{\Delta t} = \Sigma\Delta t/n; \quad s_{\Delta t} = \sqrt{[\Sigma(\Delta t)^2 - (\Sigma\Delta t)^2/n]/(n-1)}. \quad (3)$$

$$\bar{u} = \Sigma u/n; \quad s_u = \sqrt{[\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2/n]/(n-1)}. \quad (4)$$

Для вывода информации применен LCD дисплей с контроллером HD44780. Для сопряжения с ПК используется интерфейс USB. С целью расширения динамического диапазона измеряемых амплитуд использован логарифмический усилитель AD8307 фирмы "Analog Devices".

На рис. 2 приведена упрощенная принципиальная схема устройства, осуществляющего обработку сигналов АЭ. Сигнал с приемного датчика АЭ поступает на логарифмический усилитель AD8307, который обеспечивает детектирование и сжатие динамического диапазона сигналов. Сигнал на выходе микросхемы остается в пределах от 0,4 до 2,5 В при изменении амплитуды входного сигнала на 80 дБ. С выхода микросхемы сигнал поступает на вход АЦП микроконтроллера, реализующего измерение амплитуды импульса АЭ. Использованный микроконтроллер 16F877 семейства PIC 16 имеет встроенный 8 канальный 10 разрядный АЦП. Вход микроконтроллера RA3 использован для формирования опорного напряжения АЦП. Микроконтроллер работает на тактовой частоте 20 МГц. Время выполнения команд составляет всего 200 нс, за исключением команд перехода, которые выполняются за 400 нс.

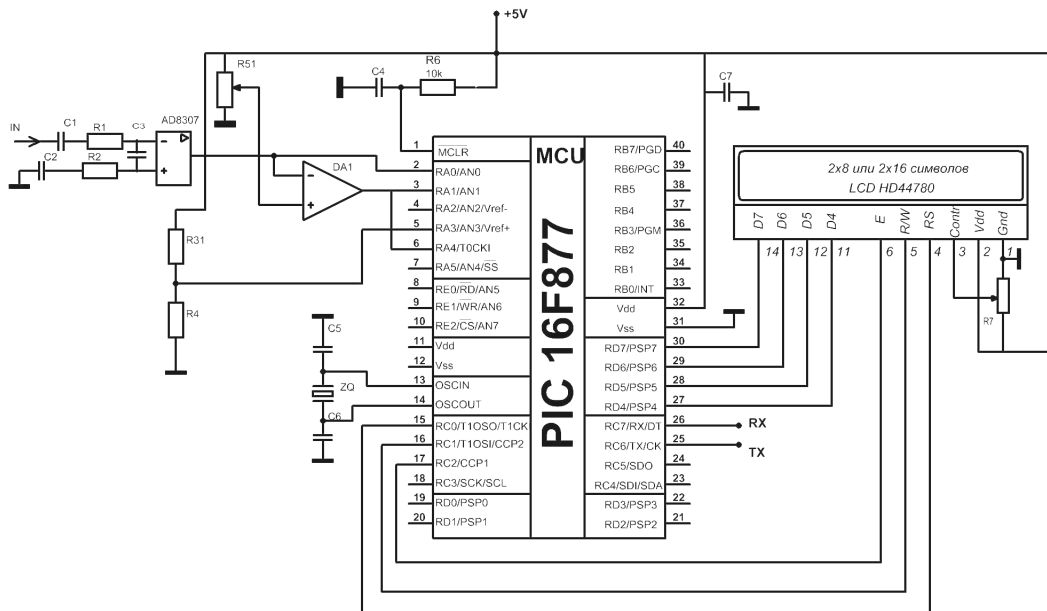


Рис. 2. Упрощенная принципиальная схема устройства обработки сигналов АЭ.

Рассмотрим более подробно процедуру измерения временного интервала между импульсами АЭ. С выхода логарифмического усилителя сигнал поступает на

вход аналогового компаратора. Напряжение на другом входе задает регулируемый порог срабатывания. В дальнейшем предполагается использовать ШИМ микроконтроллера для программного изменения величины порога. На выходе компаратора формируется двоичный сигнал, временные параметры которого измеряются. Программа микроконтроллера анализирует напряжение на входе RA1/AN1 и подсчитывает длительность интервалов между импульсами АЭ, накапливает их количество, суммарную длительность интервалов и сумму квадратов интервалов между импульсами АЭ согласно (3), а также время измерения. С помощью встроенного в микроконтроллер таймера осуществляется подсчет количества импульсов за определенный интервал времени. Поскольку программа должна иметь высокое быстродействие, критичные по времени фрагменты программы написаны на ассемблере.

Отсчитав количество импульсов АЭ за определенное время (например, 1с) программа выводит средние значения накопленных величин на индикатор. Индикатор подключен по 4-х проводной схеме по шине данных. Возможность подключения по 8 проводной схеме зарезервирована.

Параллельно с выводом на индикатор данные поступают в последовательный порт микроконтроллера. К выходу TX и входу RX подключен преобразователь СОМ-USB (на схеме не показан). В результате контроллер может быть подключен к ПК, не имеющему последовательного СОМ интерфейса (например, к ноутбуку).

При реализации первичной обработки данных в реальном времени с использованием в микроконтроллерах обычных алгоритмов программного умножения была достигнута максимальная частота поступления импульсов порядка 10-20 КГц, что реально позволило обрабатывать даже высокоинтенсивные (с пиковой интенсивностью в 10000 актов повреждения в секунду!) потоки актов АЭ. Нами также установлено, что метод инвариантов достаточно хорошо работает и при малом количестве регистрируемых сигналов АЭ. Его применение позволяет заметно повысить достоверность результатов диагностики ранних стадий разрушения материалов, в том числе и с низким уровнем АЭ излучения.

В дальнейшем планируется создание на основе полученных результатов портативных АЭ приборов диагностики предразрушающего состояния не только по инвариантам АЭ, но и с использованием плотностей распределений амплитудных и временных параметров АЭ, а также корреляционных связей между ними.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 06-08-01039а).

Список литературы

- [1] *Буйло С.И.* Физико-механические и статистические аспекты повышения достоверности результатов акустико-эмиссионного контроля и диагностики. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. 192 с.
- [2] *Builo S.I.* Use of Invariant Combinations of Parameters Characterizing Acoustic Emission in Diagnostics of Prefracture States of Solid. // Rus. J. of Nondestructive Testing, 2002. Vol. 38. № 2. pp 116–120.

- [3] Буйло С.И. К вопросу об использовании инвариантных соотношений параметров акустической эмиссии при диагностике ранних стадий разрушения материалов в конструкциях реакторных установок // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 7-ой Междунар. конф., Ростов-на-Дону. 2002. Т. 2. С. 79–83.
- [4] Builo S.I. Diagnostics of the Predestruction State Based on Amplitude and Time Invariants of the Flow of Acoustic-Emission Acts. // Rus. J. of Nondestructive Testing. 2004. Vol. 40. № 8. pp 561–564.
- [5] Буйло С.И. Физико-механические и статистические аспекты акустико-эмиссионного исследования дефектов в твердых телах // Труды 11-го Междунар. Симпозиума "Упорядочение в минералах и сплавах" ОМА-11, Сочи (Лоо), 10-15 сентября 2008 г., Ростов-на-Дону, СКНЦ ВШ ЮФУ АПСН, 2008, С. 102–105.
- [6] Буйло С.И. Диагностика предразрушающего состояния по инвариантным соотношениям потока актов акустической эмиссии // Современные методы и средства неразрушающего контроля и технической диагностики: Материалы 16-ой Междунар. конф. г.Ялта, 1-5 октября 2008, Киев: УИЦ НТТ 2008. С. 84–86.
- [7] Уилмсхерст Т. Разработка встроенных систем с помощью микроконтроллеров PIC. Принципы и практические примеры: Пер. с англ. СПб: "КОРОНА-ВЕК 2008. 544 с.

Builo S.I., Orlov S.V. *Acoustic Emission Invariants Method in Diagnostics of Predestructive State and Its Hardware Realization* .The method of diagnostics of the predestruction state based on deviations of the amplitude and time invariant relationships between the parameters of the flow of accompanying acoustic emission (AE) pulses and their stable values is described. Hardware realization of the acoustic emission invariants method based on Pic16 microcontrollers is offered.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Ватульян А. О.
ИПМИ ВНЦ РАН, Владикавказ
ЮФУ, Ростов-на-Дону

В рамках модели линейной неоднородной теории упругости сформулировано основное тождество, связывающее возможные состояния, где варьируются не только компоненты полей смещений и напряжений, но и компоненты модулей упругости и плотность. На основе вариационного уравнения представлены примеры построения операторных уравнений и итерационных процессов в задачах восстановления модулей упругости и плотности при установившихся колебаниях конечных тел, а также при идентификации распределения пористости в моделях адаптивной теории упругости

Расчет компонент физических полей в сплошных средах на современном этапе базируется на нескольких вычислительных технологиях, причем для осуществления полномасштабного вычислительного эксперимента в режиме динамического воздействия требуется знать макрохарактеристики среды (плотность, модули упругости, коэффициенты затухания и т.д.). В случае использования традиционной для большинства моделей гипотезы однородности эти параметры определяются обычно из простых экспериментов на растяжение и кручение образцов. Использование моделей, не использующих гипотезу однородности, наиболее адекватно при описании деформирования и распространения упругих волн в геофизике, биомеханике и механике микро- и наноразмерных объектов. Для таких моделей характеристики исследуемого тела являются функциями координат и не могут быть определены из простых макроэкспериментов. Восстановление этих функций по откликам на динамическое воздействие требует решения обратных задач о восстановлении коэффициентов дифференциальных операторов, описывающих исследуемый процесс. При этом с помощью измерения (задания) граничных полей смещений или ускорений на части границы возможно формулировать дополнительные операторные соотношения для их нахождения. Формулировка дополнительных граничных условий при изменении способа приложения нагрузки и частотного диапазона позволяет формулировать обратные коэффициентные задачи [2-4]. Такие постановки для простейших моделей представлены в [5,6,7], где на основе итерационных процессов представлены результаты вычислительных экспериментов в одномерных задачах. Настоящая работа посвящена вариационным постановкам при исследовании обратных коэффициентных задач в теории упругости.

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной области V с кусочно-гладкой границей S . В этом случае компоненты вектора смещений и тензора напряжений удовлетворяют следующей краевой задаче

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{mj} = C_{mjkl}u_{k,l} \quad (2)$$

$$u_i |_{S_u} = 0, \sigma_{ij}n_j |_{S_\sigma} = p_i \quad (3)$$

Здесь C_{ijkl} - компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат; они могут быть кусочно- постоянными в случае включения или равны нулю в случае полости на некоторых подмножествах V и удовлетворяют обычным условиям симметрии и положительной определенности, ρ - плотность, n_j - компоненты единичного вектора внешней нормали к S .

Постановка (1)- (3) при известных модулях и плотности есть классическая смешанная задача теории упругости в случае установившихся колебаний и достаточно подробно изучена в литературе [1,2] в рамках общих постановок для эллиптических операторов. Для таких краевых задач подробно исследованы вопросы разрешимости, разработаны эффективные численные методы построения решений, опирающиеся, как правило, на конечноэлементные технологии. В обратной задаче требуется определить законы изменения модулей упругости и плотности по некоторым следам решений на граничных поверхностях. При этом поля смещений выступают в качестве дополнительных неизвестных функций, которые требуется определять попутно при построении решения. Дополнительная информация, по которой осуществляется реконструкция неизвестных физических характеристик как функций координат, имеет вид

$$u_i |_{S_\sigma} = f_i, \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (4)$$

и характеризует амплитудно-частотные характеристики граничных полей смещений. Совместное исследование переопределенной краевой задачи (1)-(4) приводит к обратной коэффициентной проблеме, в которой требуется определить поле смещений, поле компонент тензора модулей упругости и плотность, которые удовлетворяют (1-4).

Отметим, что такая постановка является достаточно общей; требуется восстановить (в простейшем изотропном случае) три функции трех переменных по трем компонентам вектора смещений, также зависящих от трех переменных. Построение такого обратного отображения представляет собой достаточно трудную нелинейную некорректную задачу [3,4]. Возможные упрощения постановок состоят в сужении множества поиска. Так, для одномерных обратных задач, где искомые функции априори зависят от одной координаты, разработаны методы исследования и построения приближенных решений, основанные на некотором итерационном процессе [5]. Соотношение взаимности, полученное в общем виде в [6] и связывающие различные состояния (или обобщенные формулы Грина), позволяет достаточно просто строить операторные уравнения с компактными операторами для нахождения поправок на каждой итерации и исключать промежуточные неизвестные функции смещений.

Для формулировки основного результата введем понятие возможного поля. Возможным полем назовем любое непрерывное в V поле смещений, кусочно-непрерывные поля компонент тензора модулей упругости и плотности, которые удовлетворяют уравнениям (1)-(2) и граничным условиям (1-3). Имеет место Свойство 1. Для любого возможного поля выполняется равенство

$$\int_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) dV + \int_{S_\sigma} p_i v_i dS = 0, \quad (5)$$

где $2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) = \rho\omega^2 u_i v_i - C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j}$. Отметим, что введенная функция $2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho)$ есть аналог удвоенного лагранжиана для деформируемого тела. Для доказательства свойства 1 умножим уравнение (1) на некоторое возможное поле v_i и проинтегрируем по объему V . Тогда, используя теорему Гаусса-Остроградского и преобразуя объемный интеграл в поверхностный, получим (5).

Заметим, что равенство (5) по сути представляет собой принцип виртуальных работ. Если $v_i = u_i$ – есть истинное поле, то при $\omega = 0$ из (5) следует известная теорема Клайперона [1]. При выполнении дополнительного граничного условия (4) возможное поле становится истинным, работа внешних сил, характеризуемая поверхностным интегралом по S_σ в (5), известна и тогда имеем следующее равенство, которое может быть истолковано, как некоторое нелинейное операторное уравнение типа Урысона относительно функций C_{ijkl}, ρ (если считать, что u_i есть некоторые ограниченные операторы от C_{ijkl}, ρ , что можно утверждать на основе теорем существования [2]) :

$$\int_V (\rho\omega^2 u_i u_i - C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}) dV + \int_{S_\sigma} p_i u_i dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (6)$$

В ряде работ, в частности в (6,7), это уравнение служит основой для построения итерационных процессов в коэффициентных и геометрических обратных задачах. На основе равенства (6) может быть также получено некоторое вариационное уравнение, если его проварьировать по всем переменным u_i, C_{ijkl}, ρ в соответствии с подходом, описанным в [8].

Свойство 2. Для возможных полей имеет место следующее соотношение

$$\int_V 2L(u_i, u_i, \delta C_{ijkl}, \delta \rho) dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0, \quad (7)$$

где $\delta C_{ijkl}, \delta \rho$ есть вариации компонент тензора упругих постоянных и плотности соответственно. Пусть u_i, C_{ijkl}, ρ – есть решение обратной задачи (1)–(4). Тогда для этого решения выполнено соотношение (6); варьируя (6) по всем переменным и учитывая симметрию тензора упругих постоянных, имеем

$$\int_V \omega^2 (\delta \rho u_i u_i + 2\rho u_i \delta u_i) - \delta C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} - 2C_{ijkl} u_{k,l} \delta u_{i,j} dV + \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0, \quad (8)$$

Преобразуя объемные интегралы, содержащие вариации смещений, получим окончательно

$$\int_V (\delta \rho \omega^2 u_i u_i - \delta C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}) dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0,$$

Вариационная постановка может быть использована для осуществления слабой постановки [2]. Построенное интегральное уравнение (6) является нелинейным

, однако использование соотношения (7) позволяет сразу строить итерационную процедуру построения решения (6), на каждом этапе которой требуется обращать линейный компактный оператор. Так, например, в задаче об одновременном определении модулей упругости и плотности, последовательность решений $u_i^{(n)}$, $C_{ijkl}^{(n)}$, $\rho^{(n)}$ строится следующим образом. Выбирается некоторое начальное распределение модулей и плотности $C_{ijkl}^{(0)}$ и $\rho^{(0)}$ (оно может быть выбрано в некотором простейшем классе функций – линейных или кусочно-постоянных из условия минимума функционала невязки, как это реализовано в [7]). Далее строится последовательность искомых функций следующим образом. Пусть $u_i^{(n-1)}$ есть решение краевой задачи (1)–(3) с известными $C_{ijkl}^{(n-1)}$ и $\rho^{(n-1)}$, тогда элементы последовательности должны удовлетворять следующему линейному операторному уравнению

$$\int_V 2L(u_i^{(n-1)}, u_i^{(n-1)}, C_{ijkl}^{(n)}, \rho^{(n)})dV - \int_{S_\sigma} p_i(f_i - u_i^{(n-1)})dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (9)$$

которое является следствием (7), причем интегральный оператор в(9) порождает операторы Фредгольма 1-го рода с суммируемыми ядрами, при обращении которых обычно используется метод регуляризации А.Н. Тихонова [2,9].

Отметим важные частные случаи. Например, если функции $C_{ijkl}(x)$ и $\rho(x)$ есть однозначные функции от одной функции $\gamma(x)$, например, пористости среды, либо функции $C_{ijkl}(x)$ – известны, и необходимо определить лишь $\rho(x)$. Тогда соответствующее (9) уравнение примет вид ($\delta C_{ijkl} = 0$)

$$\omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV - \int_{S_\sigma} p_i(f_i - u_i^{(n-1)})dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (10)$$

в частности, для стержня $V = [0, l] \times F$, при продольных колебаниях $p_1 = -p$, $p_2 = p_3 = 0$, $u_1 = u(x, \omega)$, $u_2 = u_3 = 0$ уравнение (10) примет вид

$$\omega^2 \int_0^l \rho^{(n)}(x)(u^{(n-1)}(x, \omega))^2 dx + p(f(\omega) - u^{(n-1)}(l, \omega)) = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (11)$$

что совпадает с полученным в [5,7] на основе метода линеаризации.

Отметим также, что в случае, когда требуется определить 3 функции (функции Ляме $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и плотность $\rho(x)$), для получения дополнительных независимых интегральных соотношений необходимо изменение условий нагружения. Так, например, в одномерном случае для стержня, когда требуется определить 3 функции (обычно это $E(x)$ – модуль Юнга, $G(x)$ – модуль сдвига и $\rho(x)$ – плотность), система операторных уравнений с вполне непрерывными операторами, позволяющая строить итерационный процесс, составляется при совместном изучении продольных, изгибных и крутильных колебаний. На первом этапе из рассмотрения изгибных и продольных колебаний определяются модуль Юнга и плотность на основе следующего итерационного процесса

$$\int_0^l E^{(n)}(x)(u'^{(n-1)}(x, \omega))^2 dx - \omega^2 \int_0^l \rho^{(n)}(x)(u^{(n-1)}(x, \omega))^2 dx - p_1(f_1(\omega) - u^{(n-1)}(l, \omega)) = 0, \quad (12)$$

$$\int_0^l E^{(n)}(x)(w^{(n-1)}(x, \omega))^2 dx - c\omega^2 \int_0^l \rho^{(n)}(x)(w^{(n-1)}(x, \omega))^2 dx - p_2(f_2(\omega) - w^{(n-1)}(l, \omega)) = 0,$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (13)$$

а затем, при известной плотности определяется модуль сдвига.

Список литературы

- [1] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [2] *Э Санчес-Паленсия.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
- [3] *Isakov V.* Inverse problems for PDE. Springer-Verlag. 2005. 284 p.
- [4] *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
- [5] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
- [6] *Ватульян А. О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестник Самарского государственного университета, естественные науки. 2007. № 4 (54). С. 93–103.
- [7] *Бочарова О. В., Ватульян А. О.* Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Известия вузов, Сев. кавк. рег. Естеств. н. 2008, № 3. С. 33–37.
- [8] *Ватульян А. О.* О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Доклады РАН. 2008. т. 422. № 2. С. 182–184.
- [9] *Самарский А.А., Вабшцевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.

Vatulyan A. O. Variational methods in problems of identification nonhomogeneities in elastic bodies. Within the bounds of model of the linear nonhomogeneous theory of elasticity the basic identity linking possible states in which not only components of fields of displacement and stresses but also components of modules of elasticity and density vary is formulated.

On the basis of the variation equation examples of build-up of the operator equations and iterative processes in problems of restoration of modules of elasticity and a density at the steady-state vibrations of finite bodies, and also at identification of allocation of porosity in models of the adaptive theory of elasticity are presented.

ПОВЕДЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ, ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ.

Галабурдин М.В.

НИИМ и ПМ им. И.И. Воровича. ЮФУ. Ростов-на-Дону.

Рассмотрена задача о неустойчивости при растягивающих напряжениях тонкой замкнутой сферической оболочки. Радиально симметричное докритическое состояние обусловлено равномерным внутренним давлением. В рамках нелинейной безмоментной теории выведены уравнения равновесия при осесимметричной конечной деформации оболочки. Методом линеаризации для ряда употребительных моделей высокоэластичных, несжимаемых материалов найден спектр критических давлений. Закритическое поведение исследовано методом Ритца на основе вариационного принципа Лагранжа.

Постановка задачи.

Рассматривается замкнутая сферическая оболочка. Применяется сферическая система координат. Деформация поверхности считается конечной. В силу осесимметричности деформированного состояния оболочки рассматривается двухмерная задача:

$$R = R(\theta), \Theta = \Theta(\theta) \quad (1)$$

Начальный радиус оболочки полагается равным единице, т.е. рассматривается безразмерный радиус оболочки после деформации.

Для исследования явления потери устойчивости, (т.е. для нахождения спектра критических давлений) используется метод Эйлера. Для построения новой формы равновесия применяется энергетический метод. Упругие свойства описываются при помощи употребительных моделей высокоэластичных несжимаемых материалов.

Поставленная выше задача рассматривается в рамках нелинейной безмоментной теории оболочек. Это означает, что напряжения и деформации равномерно распределены по толщине оболочки. На величину перемещений, поворотов, удлинений и сдвигов не накладывается никаких ограничений.

Основные соотношения.

Потенциальная энергия упругого тела имеет вид: $\Pi = u - A$, где u - энергия деформации, A - потенциал внешних сил.

$$u = \int_V W^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) dV, \quad A = P(V - v). \quad (2)$$

где $W^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ - удельная энергия деформации трехмерного тела, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - главные кратности удлинения, равные квадратным корням из собственных значений меры деформации Коши.

Так как рассматриваются модели несжимаемых материалов, то

$$W^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = hW(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}) \quad (3)$$

где h - толщина оболочки до деформации, W - плотность энергии деформации на единицу площади поверхности.

Главные кратности удлинения выражаются формулами:

$$\lambda_1 = \frac{R(\theta) \cos(\Theta(\theta))}{\cos(\theta)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{R'(\theta)^2 + R(\theta)^2 \Theta'(\theta)^2} \quad (4)$$

Окончательно функционал потенциальной энергии имеет вид:

$$\Pi = 2\pi \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos(\theta) W[\lambda_1, \lambda_2] d\theta - \frac{2\pi P}{3h} \left(\int_{\pi/2}^{-\pi/2} R^3 \Theta' \cos(\Theta) d\theta - 2 \right) \quad (5)$$

Для проверки правильности полученного функционала потенциальной энергии рассмотрим случай поступательного смещения оболочки вдоль оси x_3 . При помощи (4) и (5) легко проверить, что энергия Π тождественно обращается в нуль при жестком смещении сферы. Это подтверждает правильность выражения функционала потенциальной энергии.

Далее на основании вариационного принципа Лагранжа, согласно которому стационарное значение потенциальной энергии достигается на истинных перемещениях, выводим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \cos(\Theta) + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \frac{R(\Theta')^2 \cos(\theta)}{\sqrt{(R')^2 + R^2(\Theta')^2}} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{R' \cos(\theta)}{\sqrt{(R')^2 + R^2(\Theta')^2}} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right) - \frac{P}{h} R^2 \Theta' \cos(\Theta) &= 0 \\ R \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \sin(\Theta) + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{R^2 \Theta' \cos(\theta)}{\sqrt{(R')^2 + R^2(\Theta')^2}} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right) - \frac{P}{h} R^2 R' \cos(\Theta) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для этой системы следуют из осевой симметрии задачи:

$$\Theta \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm \frac{\pi}{2}, \quad R' \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (7)$$

Спектр критических давлений.

Задача определения критических давлений решается методом Эйлера. Для нахождения спектра критических значений линеаризуем систему (6), для следующих моделей высокоэластичных несжимаемых материалов: Бартенева-Хазановича, Бидермана, Огдена, логарифмического, степенного. Проводим замену:

$$\begin{cases} R = R_0 + \epsilon \rho(\theta) \\ \Theta = \theta + \epsilon \phi(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

здесь R_0 - решение, полученное для основной формы равновесия, ϵ - малый формальный параметр, ρ, ϕ - функции, характеризующие малое отклонение от невозмущенного положения равновесия.

Производя замену, вычисляя производную по параметру ϵ и полагая $\epsilon = 0$, получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений, нетривиальное решение которой соответствует новой форме равновесия. Решение полученной системы будем представлять в виде полиномов Лежандра:

$$\rho = AP_n(\sin(\theta)), \quad \phi = BP'_n(\sin(\theta)) \cos(\theta) \quad (9)$$

Подставляя представление (9) в систему линейных однородных дифференциальных уравнений и проводя преобразования, получим систему линейных алгебраических уравнений. Приравнявая определитель этой системы к нулю, получим уравнение для нахождения спектра критических давлений:

$$(D - n(n+1)F)(J - Gn(n+1)) - C^2n(n+1) = 0 \quad (10)$$

где D, F, J, G, C коэффициенты зависящие от R_0 и P . Они различны для разных материалов.

В уравнении (10) P не является независимой величиной, а зависит от радиуса R_0 . Зависимость $P(R_0)$ найдем из решения радиально симметричной задачи о раздувании тонкой замкнутой сферической оболочки равномерным внутренним давлением. Подставляя найденную зависимость в уравнение (10), получаем уравнение следующего вида:

$$f(R_0, n) = 0 \quad (11)$$

которое служит для нахождения спектра критических радиусов.

Таким образом, решая уравнение (11) и используя установленную зависимость $P(R_0)$, получим спектр критических давлений.

Проверим полученное уравнение для случая жесткого смещения оболочки. Согласно (9) ему соответствует значение $n = 1$. Можно проверить, что при $n = 1$ уравнение (11) обращается в тождество. Таким образом, доказана возможность жесткого смещения при любой величине давления, что подтверждает правильность уравнения (11).

Рассматривая уравнение (11) при $n = 2, 3, \dots$, получаем спектр критических радиусов и критических давлений.

В результате произведенных расчетов получены следующие результаты:

1. Получены спектры критических давлений для всех материалов.
2. Все полученные критические значения расположены на падающем участке диаграммы нагружения.
3. Для трех материалов: Бартенева-Хазановича, Огдена и логарифмического материала получено аналитическое представление для критических радиусов.

4. Для материалов: Бартенева-Хазановича, Огдена, Бидермана и логарифмического установлено, что критические значения имеют точку сгущения.
5. Для степенного материала получено конечное число критических значений.

В качестве примера на рис 1 приводится диаграмма нагружения для материала Огдена с нанесенным на нее спектром критических давлений (по оси абсцисс откладывается радиус, а по оси ординат откладывается величина давления).

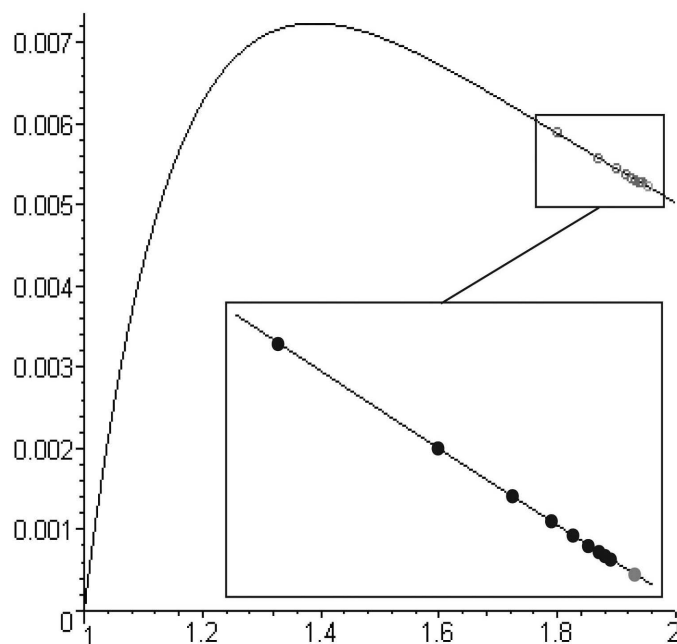


Рис. 1. Диаграмма нагружения с нанесенным спектром критических значений

Закритическое поведение.

Для изучения послекритического поведения оболочки используется метод Ритца. Форма новой моды равновесия принимается в виде:

$$R = R_k^* + cB \frac{1}{2} (3 \sin^2(\theta) - 1), \quad \Theta = \theta + 3B \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (12)$$

здесь R_k^* радиус между первым и вторым критическим, c - константа связывающая амплитуды A и B .

Для нахождения неизвестной амплитуды B подставим представление (12) в (5), найдем производные потенциальной энергии по неизвестным константам приравняем их к нулю. Получим нелинейное алгебраическое уравнение, решение которого не единственно. Для выбора интересующего нас решения воспользуемся физическим смыслом задачи. Новая форма оболочки не должна содержать особых точек и точек самопересечения. Этому требованию удовлетворяет два решения, что означает существование двух новых формы равновесия.

В качестве примера на рис 2, представлены графики новой формы равновесия для материала Огдена.

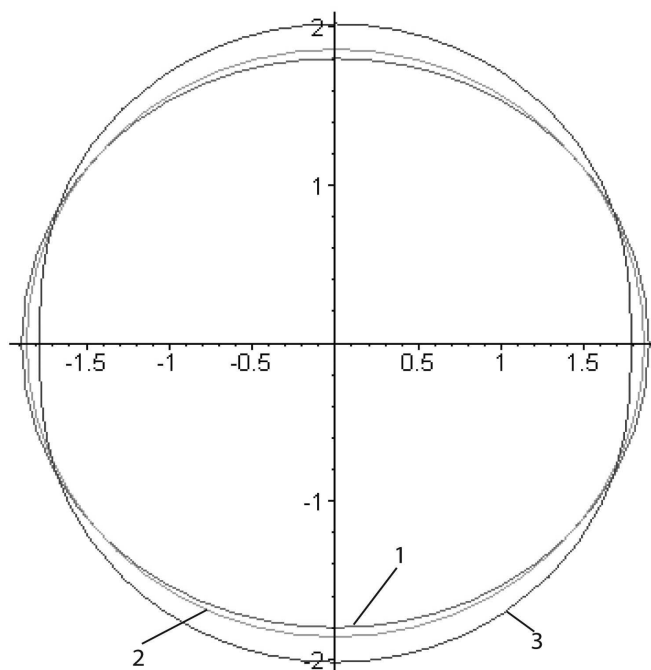


Рис. 2. 1 - основная форма равновесия, 2, 3 - новые формы равновесия

Список литературы

- [1] *Зубов Л. М. Краснов А. Ю.* Особенности поведения нелинейно упругого шара, нагруженного внутренним давлением // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2006. №1. С. 30-34.
- [2] *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов-на-Дону.: Изд-во РГУ. 1982.
- [3] *Колтак Е. П.* Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях. С.Петербург.: СПбГУ. 2000.
- [4] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980.
- [5] *Пановко Я. Г. Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука. 1987.
- [6] *Muller I. Struchtrup H.* Inflating a Rubber Balloon. // Mathematics and Mechanics of Solids. 2002. 7. 569-577.

Galaburdin M.V. *The behaviour of an closed spherical shell loaded internal pressure, after loss of stability.* The problem of instability of a thin closed spherical shell under a stretched strain was investigated. The spectrum of critical pressures was found by method of linerization for row ordinary hyperelastic incompressible models of materials. Postbuckling behavior was studied by Ritza's method on basis variant Lagrandge's principle.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ПОЛОС ПРОПУСКАНИЯ В ДИАПАЗОНЕ ЗАПИРАНИЯ ДЛЯ УПРУГОГО ВОЛНОВОДА С СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Еремин А.А.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Рассматривается дифракция бегущих волн на системе бесконечно тонких или эллиптических абсолютно жестких включений, расположенных в упругом слое. Для бесконечно тонких включений моделирование рассеянного поля осуществляется с использованием гранично-интегрального подхода, а в случае эллиптических включений применяется метод слоистых элементов. Для системы жестких включений обнаруживается эффект появления резонансных полос пропускания в широком частотном диапазоне сильного, почти полного, блокирования. Расположение полос пропускания непосредственно связано с собственными частотами колебаний волновода с системой дефектов. Показано, что резонансное пропускание возникает в тех ситуациях, когда при варьировании размера и расположением препятствий спектральный полюс, расположенный в комплексной плоскости частоты, приближается к вещественной оси.

1. Необходимость решения динамических задач для слоистых упругих тел и волноводов с множественными локализованными неоднородностями возникает как в инженерной практике (например, при расчете элементов конструкций, выполненных из современных композитных материалов), так и в геофизике, физической акустике, дефектоскопии, материаловедении, медицинской томографии и т.п. Наряду с разработкой методов обнаружения неоднородностей и изучением разрушения исследуемых материалов вследствие резонансных явлений, возникающих при взаимодействии набегающих волн с неоднородностями, самостоятельный интерес представляет изучение возможности работы систем неоднородностей как частотных фильтров, запирающих волновод на определенных фиксированных частотах или же в широких частотных диапазонах (виброгашение).

2. В плоской постановке рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u} = (u_x, u_z)$) упругого слоя, занимающего область $\Omega = \{|x| < \infty, -H \leq z \leq 0\}$, с системой Ω_m , $m = 1..M$ бесконечно тонких (задача А) или эллиптических (задача Б) абсолютно жестких включений. Иначе говоря, в задаче А дефекты имеют нулевую площадь и представляют собой разрез $\Omega_m = \{|x - x_{c,m}| < l_m, z = z_{c,m}\}$, а в случае задачи Б: эллипсы $\Omega_m = \{(x - x_{c,m})^2/a_m^2 + (z - z_{c,m})^2/b_m^2 = 1\}$ с площадью $\pi a_m b_m$ (см. Рис. 1). Перемещения $\mathbf{u} = \{u_x, u_z\}$ удовлетворяют уравнениям Ламе [1] и граничным условиям отсутствия нормальных и касательных напряжений на внешних поверхностях волновода: $\boldsymbol{\tau}|_{z=0,-H} = 0$ ($\boldsymbol{\tau} = \{\sigma_{xz}, \sigma_{zz}\}$), и равенства нулю перемещений на поверхности включений: $\mathbf{u}|_{\Omega_m} = 0$. Волновое поле \mathbf{u} отыскивается в виде суммы исходного поля \mathbf{u}_0 и рассеянного включениями Ω_m поля \mathbf{u}_{sc} : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{sc}$. В качестве исходного поля \mathbf{u}_0 рассматривается одна из бегущих волн

$$\mathbf{u}_0(x) = \mathbf{a}_{0,k}(z)e^{i\zeta_k x}, \quad \mathbf{a}_{0,k} = -i \operatorname{res} K_0(\alpha, z)|_{\alpha=-\zeta_k} \mathbf{Q}_0(-\zeta_k).$$

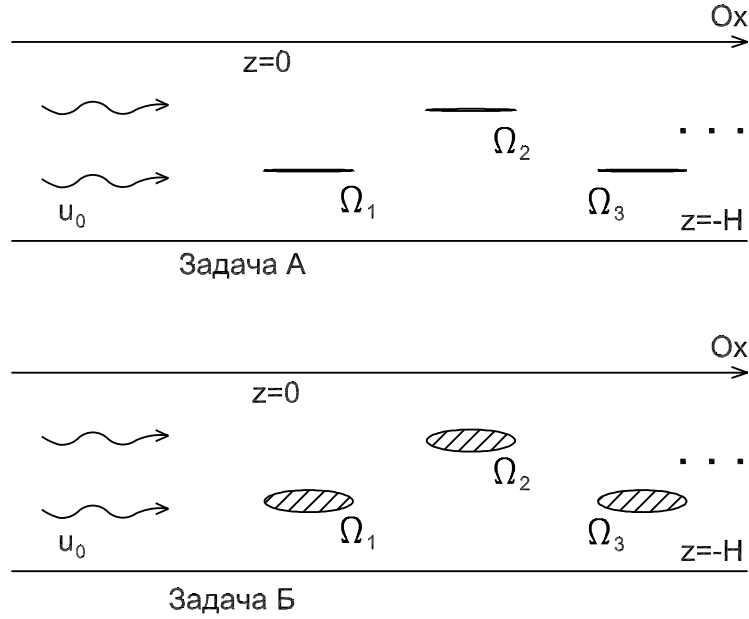


Рис. 1. Постановка задачи

Здесь $K(\alpha, z)$, $\mathbf{Q}_0(\alpha)$ - Фурье-символы матрицы Грина для полосы и заданной нагрузки, приложенной слева от места локализации включений на достаточном расстоянии.

В случае бесконечно тонких включений, аналогично случаю волновода с системой трещин [3], вводится скачок напряжений на берегах включения

$$\mathbf{q}_m(x) = \boldsymbol{\tau}(x, -d_m - 0) - \boldsymbol{\tau}(x, -d_m + 0), \quad |x - x_{c,m}| < l_m, \quad m = 1..M,$$

и, следовательно, для отраженного поля \mathbf{u}_{sc} справедливо представление в виде суммы полей, рассеянных каждым из дефектов

$$\mathbf{u}_{sc} = \sum_{m=1}^M \mathbf{u}_m, \quad \mathbf{u}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} P_m(\alpha, z) \mathbf{Q}_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{Q}_m(\alpha)$ - Фурье-символ неизвестного скачка напряжений на включении с номером m , $P_m(\alpha, z)$ - Фурье-символ матрицы Грина для волновода, состоящего из двух одинаковых слоев с заданными на границе раздела перемещениями. Подстановка интегрального представления (1) в условия отсутствия перемещений на границах включений приводит к системе интегральных уравнений Винера-Хопфа относительно неизвестной вектор-функции, составленной из скачков напряжений на включениях $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M\}$

$$\mathcal{L}_m \mathbf{q}_m + \sum_{j=1, j \neq m}^M \mathcal{R}_{mj} \mathbf{q}_j = \mathbf{f}_m, \quad (x, z) \in \Omega_m, \quad m = 1..M, \quad (2)$$

где \mathcal{L}_m - интегральный оператор с логарифмической особенностью, описывающий поле перемещений на отрезке Ω_m в случае отсутствия остальных включений; \mathcal{R}_{mj}

- регулярный оператор, определяющий поле перемещений на отрезке Ω_m , вызванное скачками напряжений \mathbf{q}_j на включениях Ω_j , $j \neq m$; $\mathbf{f}_m = -\mathbf{u}_0(x, -d_m)$. Для решения системы интегральных уравнений (2) применяется метод Галеркина.

Решение задачи Б строится путем аппроксимации отраженного поля \mathbf{u}_{sc} посредством использования слоистых элементов [4], которые располагаются внутри Ω_m на некотором расстоянии от их границ:

$$\mathbf{u}_{sc} = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} l_j \mathbf{e}_j^m.$$

Здесь l_j - слоистые элементы; $\mathbf{e}_j^m = \{c_j^{(1)}, c_j^{(2)}\}$ - неизвестные коэффициенты разложения; N_m - число узлов s_j^m , попадающих в область Ω_m (т.е. число элементов l_j , аппроксимирующих поле, отраженное m -тым включением).

Важными для анализа прохождения нормальных мод через участки волновода, содержащие неоднородности, характеристиками являются коэффициенты отражения и прохождения $\kappa^\pm = E^\pm/E_0$. Последние определяются как отношение энергии E^+ , перенесенной через зону с включениями, и волновой энергии отраженного волнового поля E^- к энергии E_0 , переносимой исходным волновым полем \mathbf{u}_0 .

3. Для иллюстрации представляющих интерес волновых эффектов, рассмотрим дифракцию нулевой антисимметричной моды a_0 на системе трех бесконечно тонких и эллиптических включений. Далее полагается $l_m = a_m = 0.3, b_m = 0.1, m = 1..M, \Delta x_m = |x_{c,m+1} - x_{c,m}| = 4, z_{c,2p-1} = -0.7, z_{c,2p} = -0.3$. Результаты, приведенные ниже получены при следующих безразмерных параметрах: плотность $\rho = 1$, модуль сдвига $\mu = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$ и толщина волновода $H = 1$.

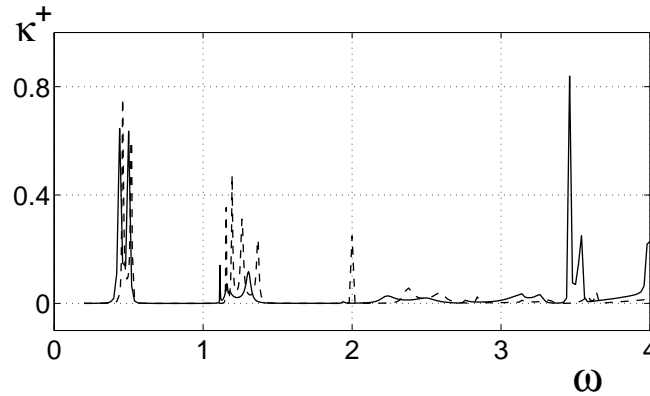


Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения κ^+ от частоты ω для $M = 3$ эллиптических включений (пунктирная линия) и бесконечно тонких включений (сплошная линия).

Зависимость коэффициента прохождения κ^+ от безразмерной круговой частоты $\omega = 2\pi f H \sqrt{\rho/\mu}$ (f - размерная частота) для $M = 3$ бесконечно тонких (сплошная линия) и эллиптических (пунктирная линия) включений приводится на рис. 2. На рис. 2 можно наблюдать появление, так называемых полос пропускания,

внутри широкого частотного диапазона сильного, почти полного, блокирования, имеющем место для частот $\omega < \pi$.

Для подтверждения резонансной природы полос пропускания для системы тонких включений необходимо исследование собственных частот ω_n гармонической задачи $\mathbf{u}(x, z, \omega)$. Однако в случае эллиптических или, например, прямоугольных включений численный поиск собственных частот с использованием метода слоистых элементов является численно неустойчивым и требует существенных временных затрат. В то же время методика определения собственных частот на основе схемы Галеркина, использованная в [3] для случая системы трещин, может быть эффективно использована и для системы бесконечно тонких включений.

ω^*	ω_n	ω_n^{FEM}	$\omega^*(el)$	$\omega_n^{FEM}(el)$
1.114	1.114-0.0007i	1.130	1.155	1.146
1.162	1.165-0.018i	1.137	1.195	1.178
1.178	1.167-0.006i	1.152	1.260	1.231
1.305	1.307-0.019i	1.287	1.365	1.345

Таблица 1

Остается вопрос согласования между собственными частотами упругого слоя с протяженным эллиптическим включением и слоя с бесконечно тонким включением. Для анализа этого вопроса может быть использована таблица 1. В первом столбце таблицы 1 приведены значения частот ω^* , на которых κ^+ для бесконечно тонких включений достигает своего локального максимума во второй полосе пропускания ($1 < \omega < 1.5$). Во втором столбце находятся значения для собственных частот ω_n из того же диапазона частот. В третьем столбце записаны частоты ω_n^{FEM} для конечного прямоугольного образца, вырезанного из изучаемого волновода и содержащего систему бесконечно тонких включений, вычисленные с помощью пакета конечноэлементного моделирования FEMLAB (www.comsol.com). Кроме того, соответственно в четвертом и пятом столбцах приведены локальные максимумы $\omega_n^*(el)$ и собственные частоты бруска, содержащего включения вычисленные FEMLAB, $\omega_n^{FEM}(el)$ для эллиптических включений с параметрами указанными выше.

Результаты расчетов показывают, что как коэффициенты прохождения в целом, так и их локальные максимумы (см. Таблицу 1) для слоя с эллиптическими и бесконечно тонкими включениями имеют некоторый сдвиг друг относительно друга. Малость такого сдвига говорит лишь о достаточно незначительном влиянии формы включения даже с достаточно большой площадью ($b_m = 0.1$) на спектр системы. При этом механизм формирования полос пропускания, имеющий, безусловно, резонансную природу (на что указывают результаты, приведенные в первом и втором столбце таблицы 1), существенно не меняется.

Работа поддержана грантами INTAS № 05-1000008-7979 и РФФИ № 07-01-00307.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука. 1987.

- [2] *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [3] *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Голуб М.В., Жанг Ч.* Резонансное блокирование бегущих волн системой трещин в упругом слое. Акустический журнал. 2009. Т. 55. Вып. 1. с. 11-20.
- [4] *E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, D. V. Timofeev* A layered element method for simulation elastodynamic behaviour of laminate structures with defects. In monograph: *Advances in the Meshless Method* /edited by: J. Sladek, V. Sladek, and S.N. Atluri, Tech Science Press, USA, 2006.
- [5] *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир. 1988. 352 с.

Glushkov E.V., Glushkova N.V., Golub M.V., Eremin A.A. *Existence of resonant transmission zones in wide blocking range for an elastic waveguide with a system of rigid inclusions.* Elastodynamic diffraction of traveling waves by a system of infinitesimally small or elliptic absolutely rigid inclusions in an elastic layer is investigated. For infinitesimally small inclusions scattered wavefield is modeled using a boundary integral equations (BIE) approach, while for elliptic inclusions a layered elements method (LEM) is used. For a system of rigid inclusions zones of resonance transmission in a wide blocking range are obtained. Location of such transmission zones depends on resonance frequencies of an elastic waveguide with a system of obstacles. It is shown that resonance transmission occurs when changing of sizes and positions of obstacles causes complex spectral pole to approach real axis.

РАСЧЕТ ДИНАМИКИ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Говорухин В. Н.* , Хволес Р.** , Кизнер З.**

* Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

** Университет Бар-Илан, Рамат-Ган, Израиль

Предложена схема расчета двумерной динамики мультипольных структур в идеальной жидкости. Для симуляции эволюции поля завихренности разработан подход, представляющий собой вариант метода вихрей в ячейках. Поле функции тока определяется из уравнения Пуассона, решаемого спектральным методом, при этом рассматриваются и сравниваются два вида граничных условий. Предложенная схема применяется для расчета динамики триполей, квадруполей и пентаполей на больших временах под действием малых возмущений, вызываемых ошибками счета.

Стационарные и нестационарные вихревые конфигурации идеальной жидкости являются предметом активных исследований уже многие годы. Интерес к ним обусловлен изучением динамики атмосферы, океана, магнетизированной плазмы, в которых они наблюдаются. Вращающиеся плоские мультипольные конфигурации с нулевой циркуляцией наблюдались в океане и в многочисленных лабораторных экспериментах. Впервые в лабораторном эксперименте [5] был обнаружен триполь, состоящий из центрального вихря, и двух спутников, а в [9] – квадруполь.

В [6] дана строгая постановка задачи об определении течения во вращающемся триполе, базирующаяся на анализе лабораторных наблюдений. Там же предложена процедура аналитико-численного построения вращающегося триполя. Граница триполя и течение вне границы определялись аналитически, а внутри ее – численно. В [7, 8] этот подход был развит для построения мультиполей с N спутниками.

Уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости в терминах завихренности течения ω и функции тока ψ записываются в виде

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0; \quad (1)$$

$$-\Delta \psi = \omega; \quad (2)$$

функция ψ связана со скоростью $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ равенствами $v_1 = \psi_y$, $v_2 = -\psi_x$.

Задача (1)-(2) может рассматриваться в различных областях и при различных условиях на границе. В работах [6, 7, 8] вращающиеся с единичной угловой скоростью мультипольные решения находились на плоскости при затухающей на бесконечности функции ψ . Функция тока таких решений определяется двумя функциями ψ^{int} (соответствует внутренней части мультиполя – области течения с ненулевой завихренностью, и находится численно) и

$$\psi^{ext} = A_{m,1} \frac{1}{r} \cos(m\theta) + A_{m,2} \frac{1}{r^2} \cos(2m\theta), \quad (3)$$

которая отвечает внешней области с нулевой завихренностью и удовлетворяет условию затухания на бесконечности. В (3) r, θ – полярные координаты на плоскости, а коэффициенты $A_{m,1}, A_{m,2}$ определяются из условий существования двух

симметричных угловых точек на границе триполя (см. [8]). Еще один свободный параметр - расстояние угловой точки границы от начала координат - находится из условий склейки внутреннего и внешнего решений.

В [1, 4] был предложен метод решения задачи (1)-(2) в прямоугольном канале при условии протекания жидкости через него. В этом случае областью течения являлся прямоугольник:

$$D = \{(x, y) : -a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b\}, \quad (4)$$

при граничных условиях:

$$\psi|_{\partial D} = \psi^{\partial D}, \quad \omega|_{\partial D} = \omega^{\partial D}. \quad (5)$$

Причем функция $\psi^{\partial D}$ задана на всей границе D , а $\omega^{\partial D}$ определяется только на тех участках, где жидкость втекает в канал. Кроме того, для завихренности необходимо задать условие в начальный момент времени:

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y) \quad (6)$$

Анализ мультиполей будем также проводить в прямоугольнике (4), но при этом будем задавать граничные условия по-другому. Рассмотрим два их варианта:

1. Считаем, что размер прямоугольника (4) такой, что функция (3) на границе практически равна нулю. В этом случае функция $\psi^{\partial D} = 0$, а функцию $\omega^{\partial D}$ можно не задавать.
2. На границе функция тока определяется выражением (3), то есть $\psi^{\partial D} = \psi^{ext}$. При этом возникает необходимость задания $\omega^{\partial D}$. В данной работе мы считаем $\omega^{\partial D} = 0$. Для краткости, такие граничные условия будем называть "вращающимися" (что хорошо выражает их смысл).

Для задания начального условия (6) будем использовать распределение завихренности, получаемое для мультиполей в [8].

Как и в [1, 4], для численного решения задачи (1)-(2) будем использовать вариант метода вихрей. Функция $\omega(x, y)$ в каждый момент t аппроксимируется ее значениями в частицах с координатами $(x_i(t), y_i(t))$. Это справедливо т.к. заданное в начальный момент значение завихренности в частице жидкости сохраняется. Из (2) находится функция тока, а динамика частиц описывается системой уравнений:

$$\dot{x}_i = \psi_y(x_i, y_i) = v_1, \quad \dot{y}_i = -\psi_x(x_i, y_i) = v_2. \quad (7)$$

Подробно о методе и его вариантах см., например, [3].

Для вычислений удобно сделать замену переменных $\psi = \Psi + \psi^{\partial D}$. Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$-(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) = \omega + \psi_{xx}^{\partial D} + \psi_{yy}^{\partial D}, \quad (8)$$

а граничные условия для функции Ψ станут следующими:

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=a} = \Psi|_{y=0} = \Psi|_{y=b} = 0. \quad (9)$$

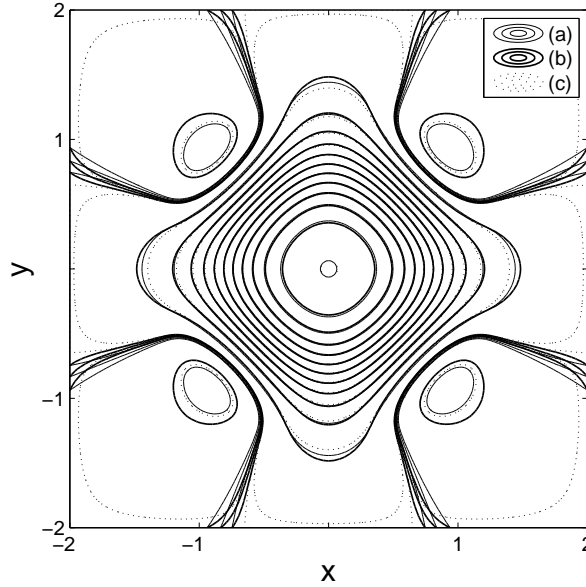


Рис. 1. Линии уровня функции тока для пентаполя в начальный момент времени: (a) – аналитически-численное решение уравнения (2); (b) – численное решение уравнения (8) с 'вращающимися' граничными условиями; (c) – решение уравнения (2) с нулевой функцией тока на границе.

В каждый момент времени t решение задачи (8)–(9) будем разыскивать в виде отрезка ряда Фурье:

$$\Psi \approx \tilde{\Psi} = \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \Psi_{i,j} g_{i,j}(x, y), \quad g_{i,j}(x, y) = \sin\left(\frac{i\pi(x-a)}{2a}\right) \sin\left(\frac{j\pi(y-b)}{2b}\right) \quad (10)$$

После подстановки (10) в (8), и проектирования на функции $g_{i,j}$, получим следующее выражение для неизвестных коэффициентов $\Psi_{i,j}$:

$$\Psi_{i,j} = C_{i,j} \int_{-b}^b \int_{-a}^a [\omega(x, y) + \psi_{xx}^{\partial D} + \psi_{yy}^{\partial D}] g_{i,j}(x, y) dx dy \quad (11)$$

Для аппроксимации $\omega(x, y)$ вводится разбиение области D на $N_{box} = n_x \times n_y$ ячеек прямоугольной формы. В каждой ячейке с номером k функция $\omega(x, y)$ приближается многочленом третьей степени $\phi_k(x, y)$ от двух переменных:

$$\omega(x, y) \approx \sum_{k=1}^{N_{box}} \phi_k(x, y) = \sum_{k=1}^{N_{box}} \sum_{i,j=0, i+j \leq 3}^3 a_{k,i,j} x^i y^j. \quad (12)$$

Вне k -ой ячейки коэффициенты $a_{k,i,j}$ равны нулю, а внутри ее находятся из условия минимизации выражения:

$$S_k = \sum_m \left(\sum_{i,j=0, i+j \leq 3}^3 a_{k,i,j} x^i y^j - \omega(x_m, y_m) \right)^2 \quad (13)$$

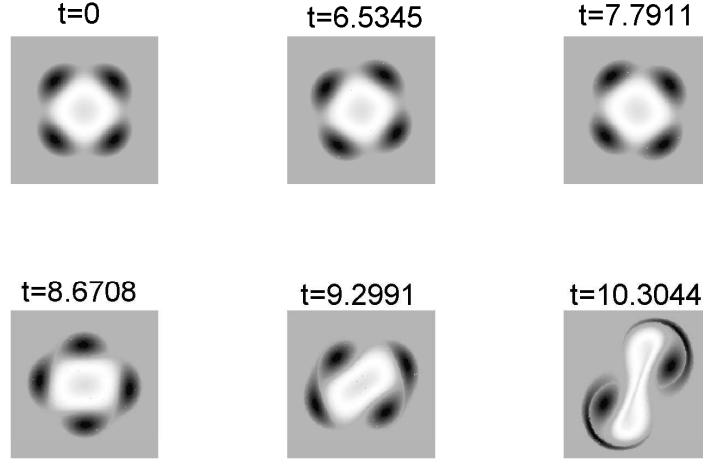


Рис. 2. Расчитанное поле завихренности в различные моменты t для пентаполя. Картины аналогичны для обоих видов граничных условий.

Здесь суммирование идет по номерам тех частиц, которые принадлежат данной ячейке с номером k , а $\omega(x_m, y_m)$ – значение завихренности в частице с номером m .

После вычисления коэффициентов $\Psi_{i,j}$, в соответствии с (7), дискретизованное поле скорости $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ будет иметь вид:

$$\tilde{v}_1 = \dot{x}_l = \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \Psi_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y} + \psi_y^{\partial D}, \quad \tilde{v}_2 = \dot{y}_l = - \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \Psi_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} - \psi_x^{\partial D} \quad (14)$$

В каждой ячейке с номером k в начальный момент времени задается $N_p(k)$ частиц. Значение завихренности в частице определяется начальным условием (6). Общее количество частиц $N_p = \sum_k N_p(k)$. В процессе вычислений частица может покинуть D . При уходе частицы из D , на входе задается новая частица, завихренность в которой определяется граничным условием (5). Для решения задач Коши (7) для частиц применялся псевдосимплектический интегратор PS36 [2]. Подробно метод в применении к задаче протекания изложен в [4].

С помощью описанной численной схемы была рассчитана динамика триполя (вихревой конфигурации, состоящей из ядра и двух спутников), квадруполя и пентаполя (ядро с четырьмя спутниками). В качестве начального распределения вихря (6) бралось аналитически-численное распределение завихренности из [8]. При вычислениях использовались оба вида граничных условий. Сравнение результатов показало, что при $a = b \geq 2$ и при характерном радиусе мультиполя порядка 1 два предложенных вида граничных условий приводят к практически одинаковой динамике. На Рис.1 приведены линии тока пентаполя для точного решения, и двух вариантов граничных условий в начальный момент при $a = b = 2$. Видно, что центральная часть пентаполя, определяющая динамику в начальный момент, хорошо приближается в обоих случаях, и только на границе, где движе-

ние в начальный момент не значительно, линии уровня отличаются. Аналогичная ситуация имеет место и для других мультиполей.

Изменение граничных условий и влияние погрешности вычислительной схемы, можно интерпретировать как возмущение мультипольной конфигурации, и расчет динамики мультиполей без специального введения начального возмущения может дать информацию об их устойчивости. Такие вычисления были проведены, и оказалось, что триполи и квадруполь сохраняются на больших временах (порядка 20 оборотов вокруг оси), а пентаполь разрушается довольно быстро, см. Рис.2.

Работа выполнена в рамках Европейской исследовательской лаборатории "Регулярная и хаотическая гидродинамика" при поддержке РФФИ гранты № 08-01-00895 и № 07-01-92213, а также фонда CRDF грант RUM1-2842-RO-06. Авторы благодарят за поддержку также Израильский Научный Фонд (ISF) грант 628/06.

Список литературы

- [1] Говорухин В.Н., Моргулис А.Б., Юдович В.И. Расчет двумерных режимов протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал // Доклады Академии Наук, 2007, т. 412, №4, С.1-5.
- [2] Aubry A., Chartier P. Pseudo-symplectic Runge-Kutta methods // BIT, 1998, 38(3), pp. 439–461.
- [3] Cottet G., Koumoutsakos P. Vortex methods: Theory and practice. Cambridge University Press, 1999, xiii, 310 p.
- [4] Govorukhin V.N., Ilin K.I. Numerical study of an inviscid incompressible fluid through a channel of finite length // Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2008, DOI: 10.1002/fld.1932.
- [5] van Heijst G. J. F. , Kloosterziel R. C. Tripolar vortices in a rotating fluid // Nature(London) 1989, №338, pp. 569 - 571.
- [6] Kizner Z., Khvoles R. The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions // Physical Review E 70, 2004, 016307.
- [7] Kizner Z., Khvoles R. Two variations on the theme of Lamb–Chaplygin: Supersmooth dipole and rotating multipoles. // Reg. Chaotic Dynamics, 2004, 9 (4) pp. 509-518
- [8] Kizner Z., Khvoles R., McWilliams J.C. Rotating multipoles on the f - and γ -planes // Physics of Fluids, 2007, 016603.
- [9] Kloosterziel R. C. , van Heijst G. J. F. An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid // J . Fluid Mech. 1991, V.223, pp. 1-24.

Govorukhin V.N., Khvoles R., Kizner Z. *A numerical scheme is suggested for the computation of the 2D dynamics of multipolar vortical structures in an ideal fluid. To simulate the evolution of the vorticity field, a version of the vortex-in-cell approach is suggested. The stream function field is computed by solving the Poisson equation with a spectral method, two types of boundary conditions being tested and compared. The scheme is applied to compute long-term dynamics of tripoles, quadrupoles and pentapoles subjected to small perturbations caused by the computational errors.*

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И КОНИЧЕСКОЙ КОНСОЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА

Гришин С.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского РАН, Москва

Рассмотрены задачи о колебаниях тонких упругих однородных изотропных консольно закрепленных замкнутых конической и цилиндрической оболочек под действием внутреннего сверхзвукового потока газа, движущегося вдоль образующей в направлении от закрепленного края к свободному. Оболочки описываются уравнениями технической теории оболочек в смешанной форме. Особое внимание уделено выводу краевых условий, обеспечивающих консервативность рассматриваемых механических систем в отсутствие взаимодействия с потоком.

В обозначениях и терминологии мы всюду следуем книге [1]. Подробные выкладки для случаев цилиндра и конуса опубликованы в статьях [2], [3].

Уравнения технической теории оболочек в смешанной форме представляют собой пару скалярных уравнений относительно нормального прогиба срединной поверхности и потенциала мембранных усилий. Старшим оператором в каждом из уравнений является билапласиан, в систему они завязаны через оператор Власова, имеющий второй порядок, и билинейный оператор Кармана:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w - \nabla_k^2 F - L(F, w) &= q \\ \nabla^4 F + Eh\nabla_k^2 w + \frac{1}{2}EhL(w, w) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Привлекательные изяществом формы, уравнения легли в основу множества исследований, хотя строгость их обоснования до сих пор остается под вопросом. Основной областью приложения выписанных уравнений является классическая постановка задач об устойчивости равновесия оболочки под действием тех или иных факторов. В этом случае уравнения стандартно линеаризуются по малому возмущению и дело сводится к поиску условий существования нетривиального решения линейной алгебраической системы.

В частности, сверхзвуковой поток газа, истекающего из консольно закрепленного замкнутого цилиндрического или конического патрубка, при неудачном стечении обстоятельств способен вызвать потерю устойчивости его стенок по дивергентному или флаттерному типу. Оставляя в стороне сложный вопрос об описании взаимодействия потока с деформируемой стенкой, заметим, что в подобных задачах исключительно важно выставить аккуратные краевые условия на краях самой оболочки. Так, если левый край оболочки–патрубка жестко защемлен, а правый — свободен, то в отсутствие взаимодействия с потоком по лицевой должна получаться консервативная механическая система.

Поскольку основные уравнения сформулированы в терминах только нормального прогиба и потенциала мембранных усилий, краевые условия также должны

быть выражены в терминах этих функций и их производных по координатам. Всего их должно быть восемь — по четыре на левом и правом срезах патрубка. Некоторые из них очевидны: например, на левом (защемленном) контуре оболочки должны быть приравнены нулю сам прогиб и его производная по нормали, однако другие — совсем нет.

Общий путь к получению краевых условий для уравнений технической теории оболочек в смешанной форме состоит в рассмотрении следующего интеграла по всей срединной поверхности оболочки

$$\int \int (z \ \Phi) \begin{pmatrix} D\nabla^4 & -\nabla_k^2 \\ \nabla_k^2 & (Eh)^{-1}\nabla^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ F \end{pmatrix} d\Omega \quad (2)$$

Такой интеграл трактуется как билинейная форма пары векторов двумерного арифметического пространства с соответствующими правилами перемножения матриц и сводится к сумме четырех скаляров:

$$D(z, \nabla^4 w) - (z, \nabla_k^2 F) + (\Phi, \nabla_k^2 w) + (Eh)^{-1}(\Phi, \nabla^4 F) \quad (3)$$

где скобки обозначают то же интегрирование, что и выше. Первое и последнее слагаемые обрабатываются аналогичным образом по отдельности, сумма второго и третьего — вместе. Для патрубков (цилиндра или конуса, срезанных по нормали к оси симметрии) двойной интеграл сводится к повторному с внутренней по образующей и внешним по окружности. Прогиб и потенциал суть периодические функции окружной координаты. С учетом этой периодичности внутренний интеграл преобразуется интегрированием по частям к сумме контурного и повторного.

Для цилиндра

$$\begin{aligned} (z, \nabla^4 w) &= \\ &= \int_0^{2\pi} \left(z \left[(\nabla^2 w)_\xi + \frac{(1-\nu)}{R^2} w_{\varphi\varphi\xi} \right] - z_\xi \left[\nabla^2 w - \frac{(1-\nu)}{R^2} w_{\varphi\varphi} \right] \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} d\varphi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\nabla^2 z \nabla^2 w + \frac{1-\nu}{R^4} (z_\varphi w_\varphi)_{\xi\xi} \right] R^2 d\xi d\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

где R — радиус, ξ — безразмерная (в радиусах) координата вдоль образующей, ξ_0 отвечает защемленному контуру, ξ_1 — свободному, φ — угловая координата, имя координаты в индексе означает дифференцирование по ней.

Для конуса

$$\begin{aligned} (z, \nabla^4 w) &= \\ &= \int_0^{2\pi \sin \gamma} \left(sz \left[(\nabla^2 w)_s + \frac{1-\nu}{s} \left(\frac{1}{s} w_{\psi\psi} \right)_s \right] - sz_s \left[\nabla^2 w - \frac{1-\nu}{s} \left(w_s + \frac{1}{s} w_{\psi\psi} \right) \right] \right) \Big|_{s_0}^{s_1} d\psi + \\ &+ \int_0^{2\pi \sin \gamma} \int_{s_0}^{s_1} \left[\nabla^2 z \nabla^2 w + \frac{1-\nu}{s} \left(\left(\frac{1}{s} z_\psi w_\psi \right)_{ss} - (z_s w_s)_s \right) \right] s ds d\psi \end{aligned} \quad (5)$$

где s — координата вдоль образующей с началом в вершине конуса, s_0 отвечает заземленному, s_1 — свободному краю, γ — угол между осью конуса и его образующей, $\psi = \varphi \sin \gamma$, φ — полярный угол, имя координаты в индексе означает дифференцирование по ней.

Сравнивая выражения в квадратных скобках контурных интегралов с выражениями моментов и перерезывающих усилий через производные от прогиба в соответствующих координатах, видим, что первое из них (домножаемое на прогиб) представляет собой обобщенную перерезывающую силу, а второе (домножаемое на нормальную производную прогиба) — истинный (не обобщенный!) изгибающий момент на контуре. Поэтому разумно обозначить эти выражения через \tilde{Q}_w и M_w соответственно. И если очевидно, что прогиб и его нормальная производная равны нулю при заземлении, то необходимо потребовать равенства нулю \tilde{Q}_w и M_w на свободном краю, чтобы контурный интеграл обратился в нуль. В результате этих действий мы получили четыре краевых условия из восьми.

Обработав аналогично билинейную форму $(\Phi, \nabla^4 F)$, получим ее представление суммой контурного и поверхностного интегралов, отличающееся от выписанных выше только заменой функций z, w на Φ, F и множителя $1 - \nu$ на $1 + \nu$. Линейные дифференциальные выражения в контурных интегралах обозначим соответственно \tilde{Q}_F и M_F .

Интегрирование по частям суммы $-(z, \nabla_k^2 F) + (\Phi, \nabla_k^2 w)$ приводит в контурном интеграле к разности произведений прогиба на нормальную производную потенциала и самого потенциала на нормальную производную прогиба. Чтобы такой интеграл обратился в нуль, потенциал и его нормальная производная должны быть взяты равными нулю на свободном контуре. Тогда на заземленном контуре остается положить равными нулю \tilde{Q}_F и M_F . Тем самым оказываются сформулированными оставшиеся четыре условия. Их можно трактовать как равенство нулю на свободном контуре нормального и сдвигового мембранных усилий.

Подводя итог сказанному, запишем условия на заземленном крае:

$$w = w' = M_F = \tilde{Q}_F = 0 \quad (6)$$

и на свободном крае:

$$F = F' = M_w = \tilde{Q}_w = 0 \quad (7)$$

где штрихом обозначена производная по нормали к контуру на срединной поверхности. При их выполнении все встречавшиеся контурные интегралы обращаются в нуль, а сумма оставшихся кратных представляют собой билинейную форму, симметричная часть которой положительна на ненулевых значениях аргументов (при известных ограничениях на коэффициент Пуассона ν).

Выписанные условия не идентичны условиям общей теории оболочек [4], что и понятно, поскольку переход к технической теории потребовал более решительных преобразований и допущений.

Список литературы

- [1] Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.

- [2] Гришин С.А. О динамической задаче для уравнений технической теории оболочек в смешанной форме // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Механика. 2007. № 4(54). С. 84–92.
- [3] Гришин С.А. О постановке задачи для технической теории оболочек в смешанной форме // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Механика. 2008. № 3(62). С. 227–234.
- [4] Новожиллов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

Grishin S.A. *On the flutter problem formulation for cylindrical and conical clamped-free shells under supersonic gas flow.* We studied the flutter problem for a cylindrical and conical clamped-free shell under influence of the supersonic gas flow ejected from it. The shell was assumed to be elastic isotropic and homogeneous, modelled with the equations of the technical theory of shells in the mixed form. For such a model we have to find two scalar functions on the shell middle surface: the normal deflexion and the membrane-stress potential. The boundary conditions therefore also must be formulated in terms of these functions and their derivatives. It is extremely important for the flutter problem formulation that the mechanical system would be conservative when no flow interacts with it.

ЭВОЛЮЦИЯ КОМПОНЕНТ СМЕСИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Елаева М.С.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена математическая модель, описывающая разделение двухкомпонентной смеси веществ электрическим полем в случае, когда проводимость смеси зависит от концентрации компонент. Бездиффузионное приближение данной модели записано в инвариантах Римана. Для заданного начального распределения веществ решена задача о распаде начального разрыва. Изучено взаимодействие двух ударных волн, а также ударной волны и волны разрежения. Построены решения для каждой стадии процесса разделения двухкомпонентной смеси.

1. Постановка задачи.

В некоторую область электрофоретической камеры, представляющую собой бесконечно длинную цилиндрическую трубку, заполненную фоновым электролитом, помещаем смесь веществ. Через трубку вдоль оси цилиндра пропускаем электрический ток. В этом случае процесс разделения смеси в бездиффузионном приближении описывается системой уравнений (см., например, [1, 2, 3])

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_i c_i}{\sigma} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sigma = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i, \quad (1)$$

где $c_i = c_i(x, t)$ — концентрация i -ой компоненты, μ_i — электрофоретическая подвижность i -ой компоненты, σ — проводимость смеси.

Преобразуем указанную систему уравнений (1), введя «эффективные» концентрации $u_i = \alpha_i c_i$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_i u_i}{1 + s} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = \sum_{i=1}^n u_i > -1. \quad (2)$$

Отметим, что коэффициенты α_i могут быть как положительными, так и отрицательными: $u_i \leq 0$ при $\alpha_i < 0$ или $u_i \geq 0$ при $\alpha_i > 0$. Это означает, что проводимость добавленного в раствор вещества соответственно выше или ниже проводимости фонового электролита.

Систему уравнений (2) дополним условиями Рэнкина-Гюгоньо на линиях разрыва $x = x(t)$ (см., например, [4])

$$D [u_i] = \left[\frac{\mu_i u_i}{1 + s} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad D = \frac{dx(t)}{dt}, \quad [f] = f^+ - f^-, \quad (3)$$

где D — скорость движения линии разрыва, а $f^+ = f(x(t)+0, t)$, $f^- = f(x(t)-0, t)$.

Кроме того, на линиях разрыва $x = x(t)$ должны выполняться условия устойчивости Лакса, которые для линии разрыва k -ого типа имеют вид (см., например, [5])

$$\begin{aligned} \lambda_k^- &\geq D_k \geq \lambda_k^+, & k = 1, \dots, n, \\ \lambda_{k-1}^- &\leq D_k \leq \lambda_{k+1}^+, & k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\lambda_k^- = \lambda_k(u(x(t) - 0, t))$, $\lambda_k^+ = \lambda_k(u(x(t) + 0, t))$, λ_k — собственные значения матрицы $A_{ij} = \partial_j(\mu_i u_i / (1 + s))$, где $\partial_j = \partial / \partial_j$.

Начальные условия возьмем в следующем виде

$$u_i|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ u_i^0, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x > x_1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Построим аналитическое решение этой задачи (2)–(5) для определенного начального распределения веществ и исследуем взаимодействие волн разрежения и ударных волн в процессе эволюции.

2. Переход к инвариантам Римана. Используя приемы, предлагаемые в [2], запишем систему (2)–(5) в инвариантах Римана R_i , считая, что смесь состоит из двух веществ

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{R_1^2 R_2}{\mu_1 \mu_2} \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{R_1 R_2^2}{\mu_1 \mu_2} \frac{\partial R_2}{\partial x} = 0; \quad (6)$$

$$D \left[\frac{\mu_2}{R_1 R_2} (\mu_1 - R_1)(\mu_1 - R_2) \right] = [(\mu_1 - R_1)(\mu_1 - R_2)],$$

$$D \left[\frac{\mu_1}{R_1 R_2} (\mu_2 - R_1)(\mu_2 - R_2) \right] = [(\mu_2 - R_1)(\mu_2 - R_2)];$$

$$\frac{(R_1^-)^2 R_2^-}{\mu_1 \mu_2} \geq D_1 \geq \frac{(R_1^+)^2 R_2^+}{\mu_1 \mu_2}, \quad D_1 \leq \frac{R_1^+ (R_2^+)^2}{\mu_1 \mu_2},$$

$$\frac{R_1^- (R_2^-)^2}{\mu_1 \mu_2} \geq D_2 \geq \frac{R_1^+ (R_2^+)^2}{\mu_1 \mu_2}, \quad \frac{(R_1^-)^2 R_2^-}{\mu_1 \mu_2} \leq D_2;$$

$$R_1|_{t=0} = \begin{cases} \mu_1, & x < x_0 \\ R_1^-, & x_0 < x < x_1 \\ \mu_1, & x > x_1 \end{cases}, \quad R_2|_{t=0} = \begin{cases} \mu_2, & x < x_0 \\ R_2^-, & x_0 < x < x_1 \\ \mu_2, & x > x_1 \end{cases}$$

Зависимость $u = u(R)$ определяется соотношениями

$$u_1 = \frac{\mu_2 (R_1 - \mu_1)(R_2 - \mu_1)}{R_1 R_2 (\mu_1 - \mu_2)}, \quad u_2 = \frac{\mu_1 (R_1 - \mu_2)(R_2 - \mu_2)}{R_1 R_2 (\mu_2 - \mu_1)}.$$

Инварианты Римана $R = R(u)$ являются корнями уравнения

$$(1 + u_1 + u_2)R^2 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_1 u_2 + \mu_2 u_1)R + \mu_1 \mu_2 = 0.$$

Тип системы (2) определяется знаком функции

$$F(u_1, u_2) = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_1 u_2 + \mu_2 u_1)^2 - 4(1 + u_1 + u_2)\mu_1 \mu_2.$$

В области $F(u_1, u_2) > 0$, $1 + s > 0$ инварианты Римана вещественные и система (2) является гиперболической, а в области $F(u_1, u_2) < 0$ инварианты Римана комплексные и тип системы (2) — эллиптический (см. рис. 1). В данной работе рассматривается случай вещественных инвариантов Римана.

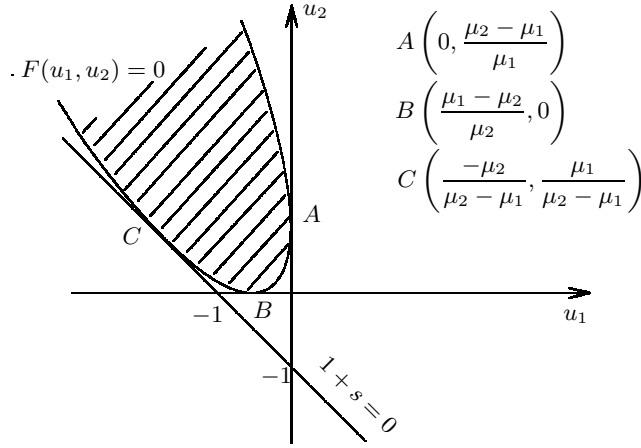


Рис. 1. Области эллиптичности и гиперболичности.

3. Эволюция разделения двухкомпонентной смеси.

Пусть $u_1^0 \leq 0$, $u_2^0 \geq 0$. Начальное распределение в терминах концентраций и инвариантов Римана представлено на рис. 2а. В результате эволюции начальных разрывов в точках x_1 и x_2 возникает распределение, показанное на рис. 2б.

Ударные волны (x_s) движутся со скоростями D_1 , D_2 по следующим законам

$$x_s^1 = x_2 + D_1 t, \quad D_1 = \frac{R_1^- R_2^-}{\mu_2}; \quad x_s^2 = x_1 + D_2 t, \quad D_2 = \frac{R_1^- R_2^-}{\mu_1}.$$

Помимо кусочно-постоянных решений, система (6) допускает автомодельные решения (волны разрежения) следующего вида

$$R_i(z) = \sqrt{\mu_i z}, \quad z = \frac{(x - x_i)}{t}, \quad i = 1, 2.$$

Уравнения движения левого (x_l) и правого (x_r) фронтов волн разрежения имеют вид

$$x_l^1 = x_1 + \mu_1 t, \quad x_r^1 = x_1 + \frac{(R_1^-)^2}{\mu_1} t, \quad x_l^2 = x_2 + \frac{(R_2^-)^2}{\mu_2} t, \quad x_r^2 = x_2 + \mu_2 t.$$

В точке (T_1, X_1) , где

$$T_1 = \frac{\mu_1 \mu_2 (x_2 - x_1)}{R_1^- R_2^- (\mu_2 - \mu_1)}, \quad X_1 = x_1 + \frac{R_1^- R_2^-}{\mu_1} T_1,$$

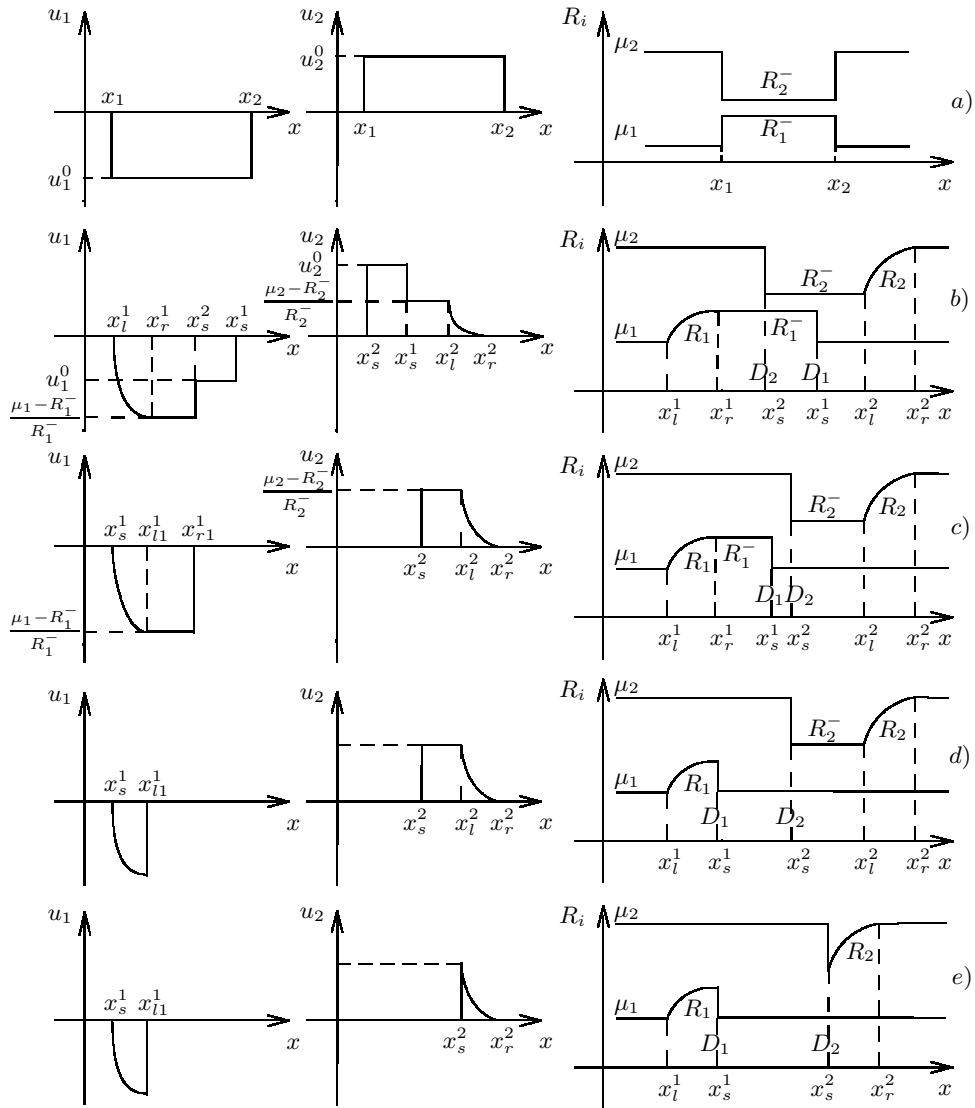


Рис. 2. Разделение двухкомпонентной смеси.

ударная волна $x = x_s^2$ догонит ударную волну $x = x_s^1$. Результат взаимодействия двух ударных волн показан на рис. 2с. Уравнения движения ударных волн имеют вид

$$x_s^i = X_i + D_i(t - T_i), \quad D_i = R_i^- \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что в момент времени $t = T_1$ произошло разделение смеси (см. рис. 2с). Далее, если выполнено неравенство $\mu_2 - R_2^- \leq R_1^- - \mu_1$, то в точке (T_2, X_2) правый фронт волны разрежения $x = x_r^1$ догонит ударную волну $x = x_s^1$ (см. рис. 2d), а затем в точке (T_3, X_3) ударная волна $x = x_s^2$ догонит левый фронт

волны разрежения $x = x_1^2$ (см. рис. 2e). Здесь

$$T_2 = \frac{\mu_1 \mu_2 (x_2 - x_1) (R_2^- - \mu_1)}{R_1^- R_2^- (\mu_2 - \mu_1) (R_1^- - \mu_1)}, \quad X_2 = x_1 + \frac{(R_1^-)^2}{\mu_1} T_2,$$

$$T_3 = \frac{\mu_1 \mu_2 (x_2 - x_1) (\mu_2 - R_1^-)}{R_1^- R_2^- (\mu_2 - \mu_1) (\mu_2 - R_2^-)}, \quad X_3 = x_2 + \frac{(R_2^-)^2}{\mu_2} T_3.$$

Ниже приведены скорости и уравнения движения ударной волны. Для рис. 2d – $k = 1$. Для рис. 2e – $k = 2$.

$$D_k = \mu_k + \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\sqrt{\mu_k (X_{k+1} - x_k)} - \mu_k \sqrt{T_{k+1}} \right),$$

$$x_s^k = x_k + \left(\sqrt{\mu_k t} + \sqrt{X_{k+1} - x_k} - \sqrt{\mu_k T_{k+1}} \right)^2.$$

Полученное распределение концентраций и инвариантов Римана является финальной стадией процесса разделения и показывает, что при указанных условиях возможно разделение смеси на отдельные компоненты при помощи электрического поля.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00389, РФФИ 07-01-92213-НЦНИЛ.

Список литературы

- [1] Жуков М.Ю., Юдович В.И. Математическая модель изотахофореза. // Доклады АНН СССР. 1982. Т.267, №2. С.334-338.
- [2] Жуков М.Ю. Нестационарная модель изотахофореза. // ЖВМ и МФ, 1984. Т.24, №4. С.549-565.
- [3] Жуков М.Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского Университета, 2005. 215 с.
- [4] Рождественский Б.Л., Яценко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 668 с.
- [5] Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation law II. // Comm. Pure Appl. Math. 1957. № 10. P. 537-566.

Elaeva M.S. *Evolution of mixture component under action of an electric field.* Separation of two-component mixture under action of an electric field is investigated. We assume that conductivity is depended on concentration components of mixture. Diffusionless approximation of the model is transformed to Riemann invariants is analyzed by the method of characteristics. We consider interaction between two shock waves and between shock wave and rarefaction wave. Solutions for each stage of separation process is obtained.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

Жорник А.И. *, Прокопенко Ю.А. *

** Таганрогский государственный педагогический институт*

Рассматривается нестационарная задача термоупругости для двухслойного относительно длинного цилиндра. Показано, что в цилиндре возникают напряжения двух видов. Первые определяются градиентами температур в каждом из цилиндров, а вторые — различием физико-механических постоянных материалов цилиндров и особенно коэффициентов термического расширения. Решения для напряжений получены в двух видах удобных для расчёта при больших или малых временах.

Антикоррозийные покрытия получили широкое распространение в промышленности, в частности цилиндрические поверхности с внутренней обработкой. Примером могут послужить металлические трубы с внутренней оболочкой из неорганического стекла. Получение таких труб заключается в следующем [1]: расплав стекла подают по желобу в предварительно разогретую, вращающуюся вокруг собственной оси, металлическую трубу; стекломасса равномерно распределяется по внутренней поверхности трубы под действием центробежных сил. При эксперименте использовали трубы из стали марка Ст. 10 и стекла состава №1. Стекло наносилось при температуре $T_n > T_g$, где T_g — температура стеклования неорганического стекла. При охлаждении изделия в нем возникают температурные напряжения.

При расчете напряжений предполагалось, что выше T_g стекло обладает нулевой вязкостью, а ниже T_g — бесконечно большой, т. е. является идеально упругим изотропным телом. Кроме того вводится коэффициент χ на контакте, если $\chi = 0$ — составные трубы, $\chi = 1$ — спай.

При расчете предполагалось, что постоянные обоих цилиндров не зависят от температуры.

В процессе эксплуатации таких труб происходят резкие термические удары, которые могут привести к разрушению внутренней стеклянной трубы. В связи с этим термостойкость стеклянной трубы является одним из важнейших факторов, от которого зависит надёжная работа остеклованных труб. В [2] было опробовано три метода испытания остеклованных труб на термостойкость: внутреннее, внешнее и двухстороннее охлаждение. За величину термостойкости изделия принимали максимальный температурный перепад $(T_0 - \theta)$, который выдерживала стеклянная труба без разрушения. Здесь T_0 — температура, до которой медленно прогревали образец, а θ — температура охлаждающей среды, в которую происходит резкое погружение стеклометаллического цилиндра. Для большего соответствия теоретической модели, во время эксперимента торцы изделия теплоизолировались.

В работе [3] теплопроводность внешнего цилиндра полагалась бесконечно большой, что упростило решение задачи. С физической точки зрения это допущение означает отсутствие градиента температуры во внешнем цилиндре, т. е. температура на внешней границе изделия мгновенно оказывается равной температуре на

контакте. Обозначив $T_1(r, t)$ температурное поле внутреннего цилиндра, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial T_1(r, t)}{\partial t} = a_1 \left(\frac{\partial^2 T_1(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} \right) \quad r_0 < r < r_c, t > 0 \quad (1)$$

при начальном условии

$$T_1(r, t) = T_0, \quad r_0 < r < r_c, t = 0. \quad (2)$$

В реальности металлическая труба обладает конечной теплопроводностью, что учитывается в данной работе. Нелинейное распределение температуры во внешнем тонкостенном цилиндре можно аппроксимировать линейным благодаря введению в граничное условие коэффициента, учитывающего теплоёмкие $\omega^* = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{1 + \alpha_2 d / 2 \lambda_{T_2}}{1 + \alpha_2 d / \lambda_{T_2}}$ и теплопроводные $h_2 = \frac{\alpha_2}{2 \lambda_{T_1}} \frac{1}{1 + \alpha_2 d / \lambda_{T_2}}$ свойства внешней трубы.

$$\frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} = h_1 [T_1(r, t) - \theta_1], \quad r = r_0, t > 0,$$

$$\frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} = -\omega^* \frac{d(1 + 1/2k)}{a_1} \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial t} - h_3 [T_1(r, t) - \theta_2], \quad r = r_c, t > 0. \quad (3)$$

Здесь $h_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda_{T_1}}$ – относительный коэффициент теплообмена на внутренней поверхности внутренней трубы; $h_3 = h_2(1 + k)$ – относительный коэффициент теплообмена на внешней поверхности внешней трубы с учётом её теплопроводных свойств; d – толщина покрытия; $\lambda_{T_1}, \lambda_{T_2}$ – коэффициенты теплопроводности; ρ_1, ρ_2 – плотности; c_1, c_2 – удельные теплоемкости внутреннего и внешнего цилиндра соответственно; $a_1 = \lambda_{T_1} / \rho_1 c_1$ – температуропроводность внутреннего цилиндра; $k = \frac{d}{r_c}$; $\rho = \frac{r}{r_c}$ – относительный радиус.

Применяя интегральное преобразование Лапласа к температурному полю внутреннего цилиндра и к граничным условиям (3) $\bar{T}(r, s) = \int_0^\infty T_1(r, t) e^{-st} dt$ с учётом начального условия (2), решение в изображении получим в виде

$$\frac{\bar{T}_1(r, s) - T_0}{T_0 - \theta} = \frac{(h_1 a + h_3 b) I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{a_1 r}} \right) + (h_1 c + h_3 d) K_0 \left(\sqrt{\frac{s}{a_1 r}} \right)}{s \{ [q I_1(q r_0) - h_1 I_0(q r_0)] [q K_1(q r_c) - (C s + h_3) K_0(q r_c)] - c [q K_1(q r_0) + h_1 K_0(q r_0)] \}} \quad (4)$$

$$c = q I_1(q r_0) + (C s + h_3) I_0(q r_c); \quad C = \omega^* (1 + 0.5k) \frac{d}{a_1}; \quad q = \sqrt{\frac{s}{a_1}}.$$

Температурные напряжения в достаточно длинном двухслойном цилиндре вдали от торцов в случае обобщённого плоскодеформированного состояния (торцы свободны от нагрузок) получены в [4]. Рассмотрим осевое напряжение во внутреннем цилиндре, так как оно является самым опасным:

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r, t) = \frac{\alpha_{T_1} E_1}{1 - \nu_1} \left[\frac{2}{r_c^2 - r_0^2} \int_{r_0}^{r_c} T_1(\rho, t) \rho d\rho - T_1(r, t) \right] + \frac{\beta + 2\gamma}{\eta\beta - 2\gamma^2} \delta\mu\chi, \quad (5)$$

$$\delta = \alpha_{T_1} \frac{2}{R^2 - r_c^2} \int_{r_c}^R [T_2(\rho, t) - T_g] \rho d\rho - \alpha_{T_1} \frac{2}{r_c^2 - r_0^2} \int_{r_0}^{r_c} [T_1(\rho, t) - T_g] \rho d\rho$$

$\gamma = \mu \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}$; $\mu = \frac{r_c^2 - R^2}{r_c^2 - r_0^2}$; $\beta = \mu \left(1 + \frac{r_0^2}{r_c^2}\right) \frac{1}{E_1} + \left(1 - \frac{R^2}{r_c^2}\right) \left(\frac{\nu_2}{E_2} - \frac{\nu_1}{E_1}\right) - \left(1 + \frac{R^2}{r_c^2}\right) \frac{1}{E_2}$; $R = r_c + d$; α_{T_1} , α_{T_2} – коэффициенты термического расширения; E_1 , E_2 – модули Юнга; ν_1 , ν_2 – коэффициенты Пуассона материалов внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Применяя интегральное преобразование Лапласа к выражению (5) с учётом (4), получим изображение по Лапласу для осевого температурного напряжения $\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}(r, s)$. Применяя теорию вычетов переходим от изображения к оригиналу:

$$\sigma_{zz}^* = \frac{\left\{ \sigma_{zz}^{(1)}(r, t) + \chi(\beta + 2\gamma) \mu (\alpha_{T_2} - \alpha_{T_1}) \frac{T_g - \theta}{\eta\beta - 2\gamma^2} \right\} (1 - \nu_1)}{\alpha_{T_1} E_1 (T_0 - \theta)} = \pi Bi_2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-y_n^2 Fo} A'_n B_n \quad (6)$$

где

$$A'_n = \frac{c_n \left[c_n \frac{Bi_1}{Bi_2} + a_n (1 + k) \right]}{(Bi_1^2 + m^2 y_n^2) c_n^2 - \left\{ [Bi_2 (1 + k) - \omega^* k (1 + \frac{k}{2})] y_n^2 + y_n^2 [1 + 2\omega^* k (1 + \frac{k}{2})] \right\} a_n^2},$$

$$B_n = b_n \left[\frac{2}{(1 - m^2) y_n^2} e_n - J_0(\rho y_n) \right] - a_n \left[\frac{2}{(1 - m^2) y_n^2} f_n - Y_0(\rho y_n) \right] - \frac{1 - \nu_1}{E_1} \times \\ \times \frac{\beta + 2\gamma}{\eta\beta - 2\gamma^2} \mu \chi \left[b_n \left\{ \frac{2}{(1 - m^2) y_n^2} e_n - \alpha J_0(y_n) \right\} - a_n \left\{ \frac{2}{(1 - m^2) y_n^2} f_n - \alpha Y_0(y_n) \right\} \right],$$

$$\alpha = \frac{\alpha_{T_1}}{\alpha_{T_2}}; e_n = y_n J_1(y_n) - m y_n J_1(m y_n); f_n = y_n Y_1(y_n) - m y_n Y_1(m y_n);$$

$$a_n = m y_n J_1(m y_n) + Bi_1 J_0(m y_n); b_n = m y_n Y_1(m y_n) + Bi_1 Y_0(m y_n);$$

$$c_n = y_n J_1(y_n) - [Bi_2 (1 + k) - \omega^* k (1 + \frac{1}{2}k) y_n^2] J_0(y_n);$$

$$d_n = y_n Y_1(y_n) - [Bi_2 (1 + k) - \omega^* k (1 + \frac{1}{2}k) y_n^2] Y_0(y_n);$$

$$Bi_1 = h_1 r_0; C = \frac{\omega^*}{a_1} d \left(1 + \frac{1}{2}k\right); Bi_2 = h_2 r_c;$$

$J_0(y)$, $J_1(y)$, $Y_0(y)$, $Y_1(y)$ – функции Бесселя от действительного аргумента нулевого и первого порядка, первого и второго рода соответственно.

Через y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) обозначены расположенные в порядке возрастания неотрицательные корни, которые всегда будут простыми, уравнения

$$a_n d_n - b_n c_n = 0. \quad (7)$$

Это решение удобно для численной реализации при больших временах.

Получим решение более удобное для численной реализации при малых временах. В изображении по Лапласу $\bar{\sigma}_{zz}^{(1)}(r, s) = \int_0^{\infty} \sigma_{zz}^{(1)}(r, t) e^{-st} dt$ в показателе экспоненты стоит произведение st , и поэтому при малых временах t параметр s – велик.

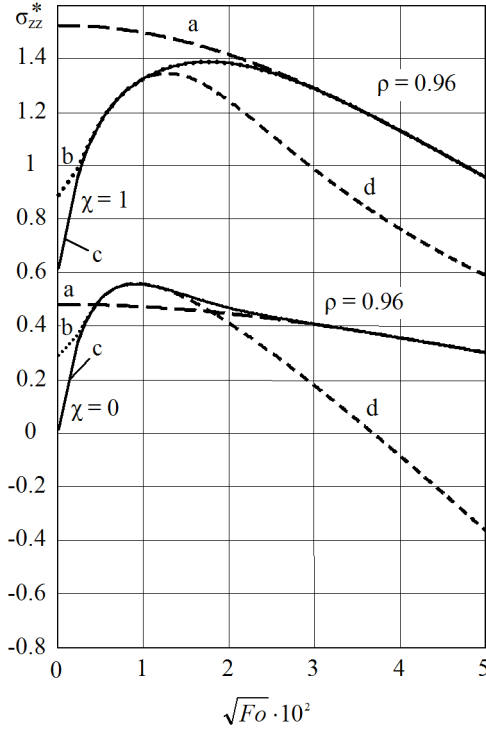


Рис. 1: Зависимость от времени осевого напряжения на внутренней стенке изделия (двустороннее охлаждение). a,b,c – решение для больших времён, d – решение для малых времён

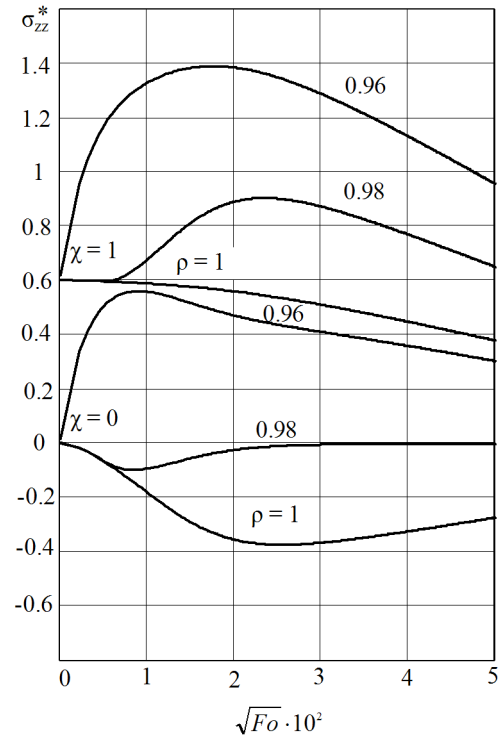


Рис. 2: Зависимость от времени осевого напряжения в различных точках цилиндра (двустороннее охлаждение).

Следовательно, в разложениях модифицированных функций Бесселя $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ можно ограничиться одним членом ряда. Переходя в этом случае от изображения к оригиналу, получим решение для малых времён:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* = & -B_5 \frac{2m}{1-m^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo} + B_5 \frac{2m^2}{Bi_1(1-m^2)} \left[1 - e^{\left(\frac{Bi_1}{m} \sqrt{Fo}\right)^2} \Phi^* \left(\frac{Bi_1}{m} \sqrt{Fo} \right) \right] - \\ & - 2Bi_2(1+k) \frac{z_1 r_c / z_2 r_c}{(z_1 r_c)^2 + (z_2 r_c)^2} \left\{ B_5 \frac{2}{1-m^2} z_2 r_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo} - \left[B_5 \frac{2}{1-m^2} \frac{2z_1 r_c z_2 r_c}{(z_1 r_c)^2 + (z_2 r_c)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{B_4 \alpha_{T_2} (1-\nu_1)}{\alpha_{T_1} E_1} z_2 r_c \right] \left(1 - u \left(z_2 r_c \sqrt{Fo}, z_1 r_c \sqrt{Fo} \right) \right) - z_2 r_c \sqrt{\frac{1}{\rho}} e^{-\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}}\right)^2} \times \\ & \times \left(e^{\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}}\right)^2} \Phi^* \left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}} \right) - u \left(z_2 r_c \sqrt{Fo}, \frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}} + z_1 r_c \sqrt{Fo} \right) \right) + \\ & + \left[B_5 \frac{2}{1-m^2} \frac{(z_1 r_c)^2 - (z_2 r_c)^2}{(z_1 r_c)^2 + (z_2 r_c)^2} - \frac{B_4 \alpha_{T_2} (1-\nu_1)}{\alpha_{T_1} E_1} z_1 r_c \right] v \left(z_2 r_c \sqrt{Fo}, z_1 r_c \sqrt{Fo} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1 r_c \sqrt{\frac{1}{\rho}} e^{-\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}}\right)^2} v \left(z_2 r_c \sqrt{Fo}, \frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}} + z_1 r_c \sqrt{Fo} \right) \left. \vphantom{\frac{1}{\rho}} \right\} + \sqrt{\frac{m}{\rho}} e^{-\left(\frac{\rho-m}{2\sqrt{Fo}}\right)^2} \times \\
& \times v \left(z_2 r_c \sqrt{Fo}, z_1 r_c \sqrt{Fo} \right) + z_1 r_c \sqrt{\frac{1}{\rho}} e^{-\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}}\right)^2} v \left(z_2 r_c \sqrt{Fo}, \frac{1-\rho}{2\sqrt{Fo}} + z_1 r_c \sqrt{Fo} \right) \left. \vphantom{\frac{1}{\rho}} \right\} + \\
& + \sqrt{\frac{m}{\rho}} e^{-\left(\frac{\rho-m}{2\sqrt{Fo}}\right)^2} \left[e^{\left(\frac{1-m}{2\sqrt{Fo}}\right)^2} \Phi^* \left(\frac{1-m}{2\sqrt{Fo}} \right) - e^{\left(\frac{1-m}{2\sqrt{Fo}} + Bi_1 \sqrt{Fo}\right)^2} \Phi^* \left(\frac{1-m}{2\sqrt{Fo}} + Bi_1 \sqrt{Fo} \right) \right] + \\
& \quad + \frac{B_4 (\alpha_{T_2} - \alpha_{T_1}) (1 - \nu_1)}{\alpha_{T_1} E_1} \tag{8}
\end{aligned}$$

где $B_4 = \frac{\beta+2\gamma}{\eta\beta-2\gamma^2} \mu \chi$; $u(x, u), v(x, y)$ – действительная и мнимая части дополнительной функции ошибок Гаусса от комплексного аргумента; $\Phi^*(x)$ – дополнительная функция ошибок Гаусса.

На рис. 1 в случае двустороннего охлаждения приведены графики зависимости осевого напряжения σ_{zz}^* от времени Fo , возникающего на внутренней поверхности внутреннего цилиндра для $\alpha_1 = \alpha_2 = 25000 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$, $m = 0.96$, рассчитанных по формуле (6) (большие времена), а – 1 член ряда, б – 2 члена ряда, с – 100 членов ряда и по формуле (8) (малые времена) кривая д. Из рисунка видно, что при средних временах кривые, рассчитанные по (6) и (8) совпадают. На рис. 2, для этого же случая охлаждения, приведён график зависимости осевого напряжения, в различных точках цилиндра. Кривые, демонстрируют развитие осевых напряжений в стеклянном цилиндре с течением времени для случаев полного сцепления ($\chi = 1$) и его отсутствия ($\chi = 0$). $\rho = 1$, $\rho = 0.98$, $\rho = 0.96$ – это точки контакта цилиндров, середины и внутренней стенки стеклянного цилиндра соответственно.

Список литературы

- [1] Шапиро И.Е., Фролова Е.Г., Маневич В.Е., Кулямина Л.Л., Гончаревский М.С., Ерёмченко Н.Г. Некоторые свойства стеклянного покрытия на внутренней поверхности стальных труб. // Стекло. 1966. №2. С. 42-53.
- [2] Кулямина Л.Л., Жорник А.И. Термическая устойчивость внутреннего стеклянного покрытия на стальных трубах // Стекло. 1968. №3. С. 15-21.
- [3] Бартенев Г.М., Жорник А.И. Температурные напряжения в стеклянном покрытии на металлических трубах // Физика и химия обработки материалов. 1972. №3. С.100-108.
- [4] Жорник А.И. Термоупругие процессы, происходящие в твердых телах с трещиноподобными дефектами. Таганрог: ТГПИ. 2002. 259 с.

Zhornik A. I., Prokopenko Yu. A. *Nonstationary thermoelastic state of two-layered cylinder.* Nonstationary problem of thermoelasticity for a two-layered relatively long cylinder is considered. It is shown that stresses of two types arise. The first ones are caused by temperature gradients in each of the cylinders, the second – by physical and mathematical difference of the material constants of the cylinders, thermal extension coefficients especially. Solutions for stresses are obtained in two forms suitable for large and short time periods.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЭНЕРГИИ РАЗРУШЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕЩИНЫ В ЦИЛИНДРЕ ПРИ ЕГО ОХЛАЖДЕНИИ

Жорник В.А.* , Савочка П.А.**

* *Таганрогский государственный педагогический институт*

** *Таганрогский технологический институт Южного Федерального
университета*

Проводится оценка влияния энергии разрушения на развитие поверхностной соосной кольцевой трещины в цилиндре при его охлаждении. Показано, что влияние энергии разрушения на температурные напряжения, вызванные охлаждением цилиндра средой, ничтожно мало. Однако действием источников теплоты, вызванных другими причинами, пренебрегать в общем случае нельзя. В этом случае следует воспользоваться результатами, полученными в данной работе.

В данной работе рассматривается нестационарная задача термоупругости для сплошного цилиндра радиуса r_c , длины ℓ со свободными торцами и со свободной от нагрузки соосной поперечной поверхностной кольцевой трещиной радиуса r_b , расположенной в середине по длине цилиндра. Цилиндр постоянной начальной температуры T_0 имеет на цилиндрической поверхности тонкую оболочку толщины d , свободную от внешних нагрузок, охлаждаемую по всей поверхности путем теплообмена со средой нулевой температуры, а в плоскости трещины в пределах $r_a < r < r_b < r_c$, $z = \ell/2$ в момент времени $Fo' > 0$ возникает мгновенный источник теплоты q – количество теплоты, выделяемое мгновенно единицей площади

$$q(r, z, t) = q [\chi(r - r_a) - \chi(r - r_b)] \delta\left(z - \frac{\ell}{2}\right) \delta(Fo - Fo'), \quad (1)$$

где $\delta(x)$ – δ – функция; $\chi(r)$ – функция Хевисайда.

В этом случае тепловые потоки симметричны относительно трещины и она не оказывает никакого влияния на процесс распространения тепла в цилиндре.

Предполагается, что температурное поле внутри тонкостенной оболочки линейная функция радиуса, поэтому граничное условие на цилиндрической поверхности сплошного цилиндра принимает приближенный вид [1]:

$$\frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} = -\frac{\alpha_S}{1 + \frac{\alpha_S d}{\lambda_S}} \frac{1}{\lambda} T(r, z, t), r = r_c, z > 0, t > 0, \quad (2)$$

где α_S – коэффициент теплообмена между средой и внешней поверхностью оболочки; λ_S, λ – теплопроводности материалов оболочки и цилиндра соответственно.

Решение для температурного поля в этом случае имеет вид:

$$\frac{T(r, z, t)}{T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} e^{-\left(y_n^2 + x_k^2 \frac{r_c^2}{\ell^2}\right) Fo} J_0\left(y_n \frac{r}{r_c}\right) \left(\frac{x_k}{Bi_0} \cos x_k \frac{z}{\ell} + \sin x_k \frac{z}{\ell}\right), \quad (3)$$

$$\text{где } A_{nk} = 4Bi^2 \left\{ \left(\frac{x_k}{Bi_0} \sin x_k - \cos x_k + 1 \right) - \frac{q\chi(Fo-Fo')}{\ell T_0 \rho_V c_V} \frac{x_k}{J_1(y_n)} e^{\left(y_n^2 + x_k^2 \frac{r_c^2}{\ell^2} \right) Fo'} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{x_k}{Bi_0} \cos \frac{x_k}{2} + \sin \frac{x_k}{2} \right) \left[\frac{r_b}{r_c} J_1 \left(y_n \frac{r_b}{r_c} \right) - \frac{r_a}{r_c} J_1 \left(y_n \frac{r_a}{r_c} \right) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ (y_n^2 + Bi^2) y_n J_1(y_n) \left[\left(1 + \frac{x_k^2}{Bi_0^2} \right) - \left(1 - \frac{x_k^2}{Bi_0^2} \right) \frac{\sin 2x_k}{2x_k} + \frac{2}{Bi_0} \sin^2 x_k \right] x_k \right\}^{-1},$$

где x_k – корни уравнения

$$ctg x = \frac{x^2 - Bi_0^2}{2x Bi_0}; \quad (4)$$

y_n – корни уравнения

$$y J_1(y) = Bi J_0(y); \quad (5)$$

$J_{0,1}(r)$ – функции Бесселя от действительного аргумента, первого рода нулевого и первого порядка соответственно; ρ_V – массовая плотность; c_V – удельная теплоемкость; Fo – критерий Фурье; $Bi = \frac{\alpha}{\lambda} r_c$ – критерий Био; $\alpha = \frac{\alpha_s}{1 + \frac{\alpha_s d}{\lambda_s}}$; $Bi_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda} \ell$ – критерий Био; α_0 – коэффициент теплообмена между средой и торцами цилиндра.

При рассмотрении задачи термоупругости предполагается, что относительно длинный цилиндр и оболочка имеют скользящую заделку, т.е. поверхности цилиндра и оболочки свободно проскальзывают относительно друг друга в осевом направлении (касательные напряжения на контакте равны нулю). Поэтому цилиндр уравнивается в осевом направлении без влияния оболочки.

Решение задачи термоупругости представляется в виде суммы двух решений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^T + \sigma_{ij}^P, \quad (6)$$

$$u_i = u_i^T + u_i^P. \quad (7)$$

Первое решение в (6), (7), рассматриваемое в предположении отсутствия трещины, удовлетворяет уравнениям термоупругости и условиям симметрии. В частности, в плоскости расположения трещины ($z = \ell/2$) касательное напряжение $\sigma_{rz}^T(r, \ell/2, Fo)$ и осевое перемещение $u_z^T(r, \ell/2, Fo)$ оказались равными нулю, что соответствует симметрии относительно этого сечения. Это решение удовлетворяет всем граничным условиям за исключением граничного условия на свободной от нагрузок берегах трещины, которые оказались нагруженными нормальной нагрузкой σ_{zz}^T . Это напряжение имеет вид:

$$\sigma_{zz}^* \left(r, \frac{\ell}{2}, t \right) = \frac{\sigma_{zz}^T(r, \ell/2, t) (1 - \nu)}{\alpha_T E T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{nk} y_n e^{-\left(y_n^2 + x_k^2 \frac{r_c^2}{\ell^2} \right) Fo}}{\left(y_n^2 + x_k^2 \frac{r_c^2}{\ell^2} \right)} \left\{ y_n J_0 \left(y_n \frac{r}{r_c} \right) - \right. \\ \left. - J_1(y_n) \frac{\frac{x_k}{\ell} r_c I_0 \left(x_k \frac{r}{\ell} \right)}{I_1 \left(x_k \frac{r_c}{\ell} \right)} \right\} \left(\frac{x_k}{Bi_0} \cos \frac{x_k}{2} + \sin \frac{x_k}{2} \right), \quad (8)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного температурного расширения материала цилиндра.

Численный расчет производился для цилиндра из неорганического стекла ($\lambda = 0,8$ Дж/м·с·К, $\rho_V = 2550$ кг/м³, $c_V = 833$ Дж/кг·К, $E = 69,58 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0,23$, $\alpha_T = 90 \cdot 10^{-7}$ 1/К) радиуса $r_c = 2 \cdot 10^{-3}$ м длиной $\ell = 5 \cdot 10^{-2}$ м в бронзовой оболочке ($\lambda_S = 50$ Дж/м·с·К) толщиной $d = 2 \cdot 10^{-4}$ м с коэффициентом теплообмена $\alpha_S \sim 4000$ Вт/м²К. Теплообмен с торцов был значительно более интенсивным и поэтому был положен неограниченным. Расчеты температурного поля и температурных напряжений показали, что даже при таком интенсивном теплообмене с торцов на расстояниях порядка диаметра цилиндра температурное поле и напряжения не зависят от теплообмена с торцов, а определяются лишь теплообменом на цилиндрической поверхности. В связи с этим рассматривается напряженное состояние вдали от торцов, т.е. там, где расположена трещина. Этот случай рассматривался в работе авторов [2]. На рис. 1 представлены результаты расчета по соотношению (8) осевых напряжений σ_{zz}^* в плоскости расположения трещины ($z = \ell/2$) в зависимости от времени Fo для различных точек поперечного сечения цилиндра $\rho = \frac{r}{r_c}$, для случая $Bi = 10$; $Bi_0 \rightarrow \infty$, $\frac{r_c}{\ell} = 0,04$, $q = 0$.

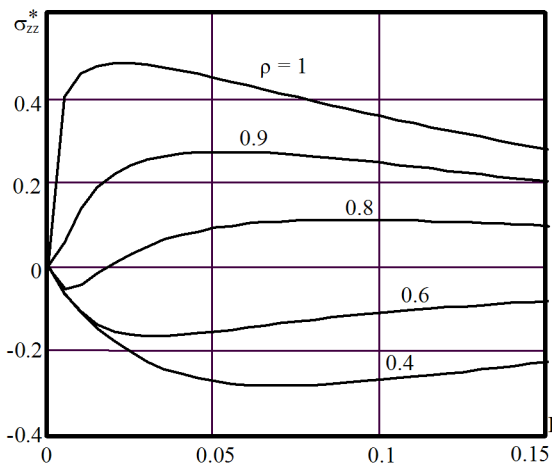


Рис. 1: Распределение осевых напряжений по сечению цилиндра в плоскости расположения трещины в зависимости от времени.

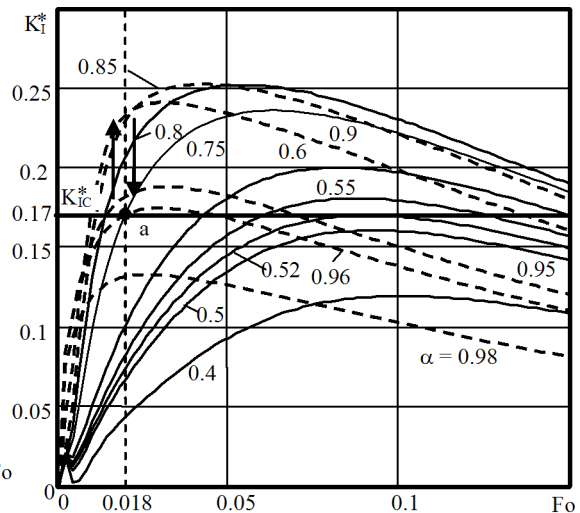


Рис 2: Зависимость коэффициента интенсивности напряжений (КИН) K_I^* от времени Fo при различных размерах трещины

Второе решение в (6) и (7) изотермической теории упругости в сумме с первым удовлетворяет всем граничным условиям, в том числе и на берегах трещины. Оно получено в работе авторов [2] и свелось к нахождению решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно коэффициента интенсивности напряжений (КИН) $K_I(\alpha, Fo)$, управляющего ростом кольцевой трещины, который в безразмерной форме $K_I^*(\alpha, Fo)$ записывается в виде:

$$K_I^*(\alpha, Fo) = \frac{K_I(\alpha, Fo) (1 - \nu) \pi}{\sqrt{2r_c E \alpha_T T_0}}. \quad (9)$$

На рис. 2 приведены зависимости $K_I^*(\alpha, Fo)$ от времени Fo при различных относительных размерах трещины $\alpha = r/r_c$ в цилиндре, соответствующие напряжениям, изображенным на рис. 1.

Проанализируем результаты расчета $K_I^*(\alpha, Fo)$, приведенные на этом рисунке, задав постоянную материала цилиндра трещиностойкость $K_{IC}^* = 0,17$. Тогда кольцевая трещина, например относительного размера $\alpha = r_b/r_c = 0,96$ покоится до времени $Fo' \sim 0,018$ (точка а на рис. 2), далее в этот момент времени она растет скачком (см. вертикальные стрелки в точке а) до размера $\alpha = r_a/r_c = 0,75$ (цилиндр лопнул).

При этом часть энергии разрушения выделилась в виде теплоты. Указанное выделение теплоты можно моделировать плоским источником теплоты в виде кольца с внешним радиусом r_b , равным начальному радиусу трещины, и внутренним r_a , равным ее конечному радиусу ($0,75 \leq r/r_c \leq 0,96$), выделившему мгновенно теплоту в момент времени $Fo' = 0,018$. По формуле (3) для случаев $Q = \frac{q}{\ell\rho_V c_V} \frac{1}{T_0} = 5 \cdot 10^{-3}$ (сплошные линии) и $Q = 0$ (штриховые линии) на рис. 3 изображены распределения температуры в плоскости расположения трещины ($z/\ell = 0,5$) по сечению цилиндра $\rho = r/r_c$ в различные моменты времени Fo .

Из рисунка видно влияние мгновенного источника на температурное поле цилиндра.

На рис. 4 (сплошные линии) показано распределение осевых напряжений при тех же самых параметрах.

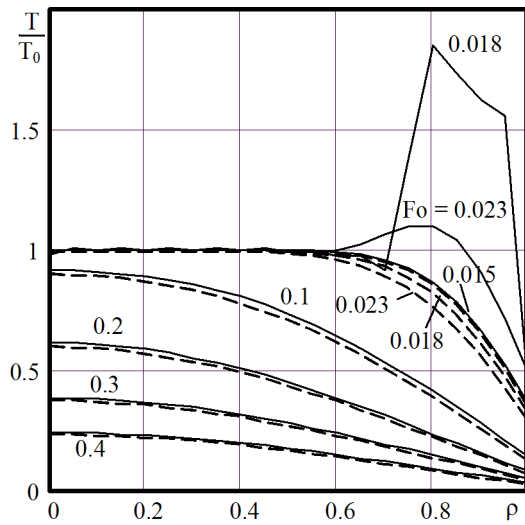


Рис. 3: Распределение температурного поля по сечению цилиндра в плоскости расположения трещины в различные моменты времени Fo (сплошные линии $Q = 5 \cdot 10^{-3}$, штриховые – $Q = 0$).

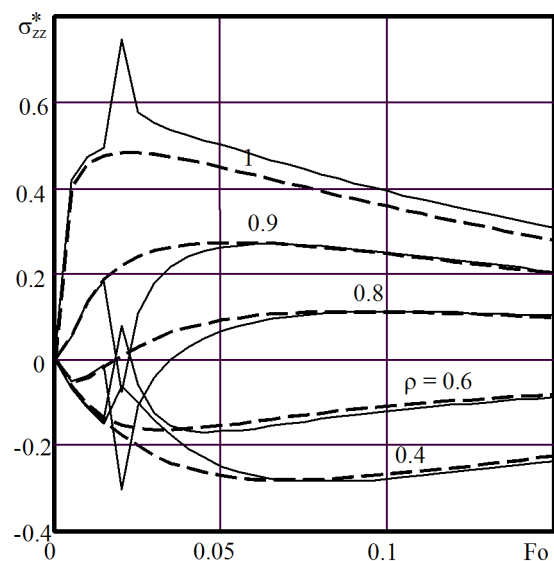


Рис. 4: Распределение осевых напряжений по сечению цилиндра в плоскости расположения трещины в зависимости от времени Fo (сплошные линии $Q = 5 \cdot 10^{-3}$, штриховые – $Q = 2,8 \cdot 10^{-7}$)

Согласно данным [3] максимальная энергия разрушения для неорганического стекла равна $q = 7,5$ Дж/м². Считая, что вся энергия разрушения превращается в теплоту, найдем интенсивность источника $Q = \frac{q}{\ell\rho_V c_V} \frac{1}{T_0}$ с учетом физико-механических постоянных для цилиндра, приведенных выше. Тогда получим $Q = 7,06 \cdot 10^{-5} 1/T_0$.

Величину T_0 оценим из следующих соображений. Согласно [4] трещиностойкость неорганического стекла $K_{IC} \sim 7 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^{3/2}$. Тогда согласно (9) с учетом, что $K_{IC}^* = 0,17$, получим $T_0 = 251 \text{ К}$. И, следовательно, $Q \sim 2,8 \cdot 10^{-7}$. Распределение осевых напряжений по сечению цилиндра в плоскости расположения трещины в зависимости от времени Fo при $Q = 5 \cdot 10^{-3}$ (сплошные линии) и при $Q = 2,8 \cdot 10^{-7}$ (штриховые линии) показано на рис. 4. Сравнение распределения осевых напряжений, приведенных на рис. 4 при $Q = 2,8 \cdot 10^{-7}$, с распределением осевых напряжений, приведенных на рис. 1 при $Q = 0$, показывает, что влияние энергии разрушения на температурные напряжения, вызванные охлаждением средой, ничтожно мало. Однако действием источников тепла, вызванных другими причинами (выделение тепла в атомных реакторах, прохождение по проводникам токов высокой частоты и т.д.) пренебречь в общем случае нельзя. В этом случае следует использовать результаты, полученные в данной работе.

Работа Жорник В.А. выполнена при поддержке гранта “Фундаментальные исследования и высшее образование” (BRHE) Министерства образования и науки Российской Федерации и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) (код проекта Р.Н.П. 2.22.3.10012).

Список литературы

- [1] Жорник В.А., Карташов Э.М. Рост осесимметричных трещин при механических и тепловых воздействиях. Таганрог: ТГПИ, 2003. 143 с.
- [2] Жорник В.А., Прокопенко Ю.А., Рыбинская А.А., Савочка П.А. Нестационарная задача термоупругости для цилиндра с осесимметричной трещиной // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X Международной конференции, Ростов-на-Дону. 2006. Т.1. С. 115-119.
- [3] Shand E.J. / Amer. Cer. Soc. 1961. Vol. 44. P21.
- [4] Вязкость разрушения многокомпонентных фосфатных стекол/ Л.Г. Байкова, Ю.К. Федоров, М.Н. Толстой и др// Физика и химия стекла. 1991. Т.17. № 2. С. 261-267.

Zhornik V.A., Savochka P.A. *Fracture energy influence estimate on ring-shaped propagation in a cylinder under cooling.*

Fracture energy influence on ring-shaped propagation in a cylinder under cooling is estimated. It is shown that fracture energy influence on temperature stresses caused by cylinder cooling is negligibly small. However, heat sources caused by other reasons shouldn't be neglected. In this case results obtained in the present work may be used.

ПЛЕНОЧНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ — ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТОНКОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.

*Южный федеральный университет, факультет математики, механики
и компьютерных наук, Ростов-на-Дону*

Построена и численно исследована математическая модель, описывающая вращательное течение в тонкой подвешенной жидкой пленке под действием внешнего электрического поля, приложенного к ее боковым границам. Подобное течение впервые экспериментально наблюдалось в [1], где обнаруженный эффект назван «жидкостным пленочным мотором». Предлагаемая нами модель описывает вращательное ЭГД течение в рамках классических представлений. Процедура осреднения исходных трехмерных уравнений по толщине пленки позволяет получить двумерную модель и показать, что основной вклад в величину касательной скорости на границе, индуцирующей стационарное вращательное течение во всей жидкой пленке, вносят средние напряжения Рейнольдса.

Введение. Авторы работы [1], наблюдая вращательное течение в пленочной водной электролизной ячейке, помещенной в поле плоского конденсатора, объяснили обнаруженное явление переориентацией дипольных моментов молекул воды под действием электрического поля и отвергли возможность возникновения течения за счет электрокинетических эффектов на боковой границе пленки. Однако, ниже предложена математическая модель, объясняющая вращение жидкости в постоянном электрическом поле наличием касательной скорости на границе, возникающей в результате скачка напряженности электрического поля на границе раздела двух сред с различной диэлектрической проницаемостью. При построении модели использовались результаты [2], в которой, в частности, приведена схема пространственного осреднения в сочетании с разложением по малому параметру.

Основные уравнения. Уравнения в безразмерных переменных, описывающие ЭГД процессы для многокомпонентной жидкости с постоянной диэлектрической проницаемостью, в случае потенциального электрического поля, отсутствия поля тяжести и поверхностного натяжения, имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\delta^2 \mathbf{u}, \delta^4 w) = (-\delta^2 \nabla_0 p + \mu \delta^2 \Delta_0 \mathbf{u} + \mu \partial_{zz} \mathbf{u} - q \nabla_0 \varphi, -\delta^2 \partial_z p + \mu \delta^4 \Delta_0 w + \mu \delta^2 \partial_{zz} w - q \partial_z \varphi),$$
$$\operatorname{div}_0 \mathbf{u} + \partial_z w = 0, \quad \varepsilon (\delta^2 \Delta_0 \varphi + \partial_{zz} \varphi) = -\delta^2 q, \quad q = \sum_k z_k c_k, \quad (1)$$

$$\delta^2 \frac{dc_k}{dt} + \delta^2 \operatorname{div}_0 \mathbf{i}_k + \partial_z I_k = 0, \quad (\mathbf{i}_k, I_k) = -D_k (\nabla_0 c_k + z_k \gamma c_k \nabla_0 \varphi, \partial_z c_k + z_k \gamma c_k \partial_z \varphi).$$

Здесь $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, w)$ — скорость, \mathbf{u} — скорость течения в плоскости пленки, p — давление, q — плотность заряда, φ — электрический потенциал, c_k — концентрации, \mathbf{i}_k, I_k — поток концентрации в плоскости пленки и поперек пленки, μ — вязкость, D_k, z_k — коэффициенты диффузии и зарядности, ε — диэлектрическая проницаемость смеси, γ — параметр, характеризующий отношение интенсивности переноса

концентрации электрическим полем к переносу за счет диффузии, δ — относительная полутолщина пленки, $d/dt = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 + w \partial_z$, $\nabla_0 = (\partial_x, \partial_y)$, $\Delta_0 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$.

Предполагаем, что к прямоугольной тонкой жидкой пленке с плоскими свободными границами $z = \mp h$ в направлении x приложена постоянная разность потенциалов φ_0 , а в плоскости $z = \text{const}$ действует постоянное внешнее электрическое поле с напряженностью \mathbf{E}_{out} (см. рис. 2). На границах пленки $z = \mp 1$ задаем условия непротекания, отсутствия касательных напряжений, непроницаемости границ для концентраций и отсутствия нормальных компонент электрического поля

$$w|_{z=\mp 1} = 0, \quad \mu(\partial_z \mathbf{u} + \delta^2 \nabla_0 w)|_{z=\mp 1} = 0, \quad I_k|_{z=\mp 1} = 0, \quad \partial_z \varphi|_{z=\mp 1} = 0. \quad (2)$$

Исходная система уравнений (1) используется при получении осредненной модели и для этого вполне достаточно краевых условий (2). Остальные краевые условия, уже для осредненных уравнений, заданы ниже (см. (5)–(7)).

Размерная вязкость μ^* , коэффициенты диффузии D_k^* и диэлектрической проницаемости ε^* связаны с безразмерными параметрами соотношениями

$$\mu = \frac{\mu^* \mathcal{T}}{a^2}, \quad D_k = \frac{D_k^* \mathcal{T}}{a^2}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^* \mathcal{E}}{a F \mathcal{C}}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{a^2} \ll 1, \quad \mathcal{T} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\rho a}{F \mathcal{C} \mathcal{E}}}, \quad \gamma = \frac{F \mathcal{E} a}{RT}. \quad (3)$$

Характерные размерные величины выбирались следующими: $[x, y] = a$, $[z] = h$, $[t] = \mathcal{T}$, $[u, v] = a/\mathcal{T}$, $[w] = h/\mathcal{T}$, $[c_k] = \mathcal{C}$, $[E] = \mathcal{E}$, $[\varphi] = \mathcal{E}a$, $[q] = F \mathcal{C}$, $[p] = F \mathcal{C} \mathcal{E} a \delta^2$, где a, h — характерный размер в плоскости пленки и ее полутолщина; ρ — плотность жидкости; $\mathcal{T}, \mathcal{C}, F \mathcal{C}$ — характерные время, концентрация и заряд; F — число Фарадея; R — универсальная газовая константа; T — абсолютная температура; $a \mathcal{E}$ — характерная разность потенциалов в направлении x .

Осреднение по толщине пленки. Следуя работе [2], вводим осреднение $\bar{f}(x, y, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x, y, z, t) dz$, $\tilde{f} = f - \bar{f}$ и решение (1), (2) разыскиваем в виде рядов $\{\mathbf{u}, w, p, q, c_k, \varphi\} = \sum (\{\bar{\mathbf{u}}^m, \bar{w}^m, \bar{p}^m, \bar{q}^m, \bar{c}_k^m, \bar{\varphi}^m\} + \{\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{w}^m, \tilde{p}^m, \tilde{q}^m, \tilde{c}_k^m, \tilde{\varphi}^m\}) \delta^{2m}$.

Осреднение общих уравнений (1) с учетом краевых условий (2) в сочетании с разложением по параметру δ^2 позволяет сначала определить: $\bar{q} = \bar{q}^0 + O(\delta^2)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^0 + O(\delta^2)$, $\bar{c}_k = \bar{c}_k^0 + O(\delta^2)$, $\tilde{\varphi}^0 = 0$, $\tilde{c}_k^0 = 0$, $\tilde{q}^0 = 0$, а затем получить выражения для $\tilde{\mathbf{u}}^0$, \tilde{w}^0 и \tilde{c}_k^1 . Двумерные уравнения для осредненных переменных, описывающие процессы в тонкой пленке, с сохранением членов порядка $O(\delta^2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{d_0 \bar{\mathbf{u}}}{dt} + \beta \nabla_0 (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) &= -\delta^2 \nabla_0 \bar{p} + \delta^2 \mu \Delta_0 \bar{\mathbf{u}} - \mu \mathbf{U}, \quad \text{div}_0 \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad \mu \mathbf{U} = \bar{q} \nabla_0 \bar{\varphi}, \\ \varepsilon \Delta_0 \bar{\varphi} &= -\bar{q}, \quad \bar{q} = \sum_k z_k \bar{c}_k, \quad \frac{d_0}{dt} = \partial_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_0, \quad \beta = \frac{\delta^2}{45}, \quad \alpha_k = \frac{4}{945 D_k}, \\ \frac{d_0 \bar{c}_k}{dt} - \alpha_k \delta^2 \text{div}_0 (\mathbf{U} (\mathbf{U} \cdot \nabla_0 \bar{c}_k)) &+ \text{div}_0 \bar{\mathbf{i}}_k = 0, \quad \bar{\mathbf{i}}_k = -D_k (\nabla_0 \bar{c}_k + z_k \gamma \bar{c}_k \nabla_0 \bar{\varphi}). \end{aligned} \quad (4)$$

Подчеркнем, что после проведения процедуры осреднения и сохранения членов порядка $O(\delta^2)$, параметр δ становится обычным независимым параметром задачи, таким же, как $\mu, \varepsilon, D_k, \dots$, и его не следует вновь устремлять к нулю.

Для уравнений (4) задаем краевые условия на боковых границах пленки (см. рис. 2). Считаем, что $y = 0$ и $y = Y$ являются границами между двумя диэлектрическими средами — пленкой с диэлектрической проницаемостью ε и внешней

областью с диэлектрической проницаемостью ε_{out} . С учетом, что поле действует в плоскости $z = \text{const}$ имеем (см. рис. 2)

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \bar{\varphi})|_{y=0, Y} = \mp E_0, \quad \varepsilon E_0 = \varepsilon_{\text{out}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\text{out}}). \quad (5)$$

Для боковых границ пленки $x = 0, X$ и $y = 0, Y$ требуем выполнения условий непротекания, отсутствия потока концентрации через границы $y = 0, Y$, а на границах $x = 0, X$ задаем разность потенциалов φ_0

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}|_{x=0, X} = 0, \quad \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}|_{y=0, Y} = 0, \quad \bar{\mathbf{i}}_k \cdot \mathbf{n}|_{y=0, Y} = 0, \quad \bar{\varphi}|_{x=0} = 0, \quad \bar{\varphi}|_{x=X} = \varphi_0. \quad (6)$$

Кроме этого, на границах задаем касательные скорости (аналог электроосмоса)

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{y=0, Y} = -\mathcal{R}_3 \nabla_0 \bar{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{y=0, Y}, \quad \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{x=0, X} = -\mathcal{R}_3 \nabla_0 \bar{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{x=0, X}, \quad (7)$$

где \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — нормальный и касательный векторы к границе, \mathcal{R}_3 — коэффициент, определяемый ниже (см. (9)).

Строго говоря, задание касательной скорости на границах в виде (7) является некоторым *эвристическим* требованием. Коэффициент \mathcal{R}_3 удастся определить, считая жидкость почти всюду электронейтральной, за исключением малой окрестности границ $y = 0, Y$, и строя стационарные пограничные решения задачи (4)–(6) в виде $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(y), 0)$, $\bar{c}_k = \bar{c}_k(y) = c_{Bk} e^{-z_k \gamma \Phi(y)}$, $\bar{\varphi} = \Phi(y) + Ex$, где E — постоянная касательная компонента электрического поля в окрестности границы, c_{Bk} — концентрации при равновесном бoльцмановском распределении.

В случае, когда для равновесного бoльцмановского распределения смесь электронейтральна и имеется лишь два сорта ионов (например, H^+ и OH^- для воды, $c_{B1} = c_{B2} = c_B$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$) удалось показать, что $\mathcal{R}_3 \sim E_0^3$ и получить оценку величины \mathcal{R}_3 (см. формулу (9)). Отметим, что наиболее существенный вклад в скорость на границе вносят средние напряжения Рейнольдса $\beta \nabla_0 (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U})$.

Течение в тонкой пленке. Для описания течения в пленке используем упрощенный вариант уравнений (4), считая жидкость электронейтральной ($\bar{q} = 0$) всюду, за исключением окрестности границ. Это позволяет отбросить из уравнений все члены пропорциональные \mathbf{U} (их вклад учтен в краевых условиях).

Для определения средней скорости $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ и среднего потенциала $\bar{\varphi}$ в прямоугольной области $D = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$ имеем задачу

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_0 \bar{\mathbf{u}} = -\nabla_0 \bar{p} + \mu \Delta_0 \bar{\mathbf{u}}, \quad \text{div}_0 \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad \Delta_0 \bar{\varphi} = 0, \quad (8)$$

$$(\bar{u}, \bar{v})|_{x=0, X} = 0, \quad (\bar{u} + \mathcal{R}_3 \bar{\varphi}_x, \bar{v})|_{y=0, Y} = 0, \quad \bar{\varphi}|_{x=0} = 0, \quad \bar{\varphi}|_{x=X} = \varphi_0, \quad \bar{\varphi}_y|_{y=0, Y} = E_0.$$

Выражение для \mathcal{R}_3 дается соотношением (9) и величина $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_3(E_0) \sim E_0^3$.

Задача для определения $\bar{\varphi}$ имеет аналитическое решение, анализ которого показывает, что знак $\bar{\varphi}_x|_{y=0, Y}$, а, следовательно, и касательной скорости $\bar{u}|_{y=0, Y}$, зависит от параметров φ_0, E_0, X, Y . При этом на границах $y = 0, Y$ имеются точки, в которых скорость \bar{u} изменяет знак. Таким образом, в пленке следует ожидать возникновения вращательного ЭГД течения, индуцируемого касательной скоростью на границе, и появления дополнительных вихрей в областях, где скорость изменяет знак (см. схему прогнозируемого течения на рис. 2). Также как и в [1],

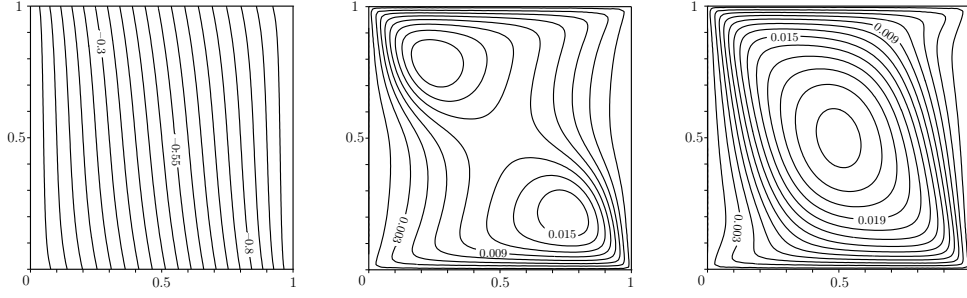


Рис. 1. Потенциал $\bar{\varphi}(x, y, t)$ и функция тока $\bar{\psi}(x, y, t)$ при $t = 10$ ($0.78 c$), 30 ($2.34 c$)

подчеркнем, что вращательное течение возникает в результате действия *постоянного* поля E_{out} и *постоянной* приложенной разности потенциалов φ_0 .

Численные результаты. Для решения задачи (8) применялся обычный проекционный алгоритм и метод конечных элементов. Численная реализация осуществлялась при помощи пакета FreeFem++ [3] с использованием адаптивных сеток. Аналитическая формула в виде бесконечных рядов для $\bar{\varphi}$ мало эффективна и задача для $\bar{\varphi}$ также решалась численно.

При выборе параметров расчета использовались данные из [1], в которых описан жидкий пленочный мотор: $\varphi_0^* = 20 \text{ В}$, $a = 10^{-2} \text{ м}$, $E_{\text{out}}^* = 30000 \text{ В/м}$, $\mu^* = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\varepsilon_0^* = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}/(\text{В} \cdot \text{м})$, $\varepsilon^* = 78.3 \varepsilon_0^*$, $\varepsilon_{\text{out}}^* = 1.0 \varepsilon_0^*$, $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, $C = c_B^* = 10^{-4} \text{ моль}/\text{м}^3$, $F = 9.65 \cdot 10^4 \text{ Кл}/\text{моль}$, $R = 8.3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, $T = 293 \text{ К}$. Выбирая полутолщину пленки $h = 0.29 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и характерную напряженность поля $\mathcal{E} = 2000 \text{ В/м}$, получим характерное время $\mathcal{T} = 7.8 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, скорость течения жидкости $a/\mathcal{T} = 0.128 \text{ м/с}$ и касательную скорость на границе, $\mathcal{R}_3(a/\mathcal{T}) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$.

Параметры для задачи (8), рассчитываемые по формулам (см. также (3))

$$\frac{a}{\mathcal{T}} \mathcal{R}_3 \approx \frac{F c_B^* \varepsilon^* \mathcal{E}^3}{135 \rho^2 \mu^{*3}} \left(\frac{2 \varepsilon^* \mathcal{E}^2}{R T c_B^*} \right)^{1/2} E_0^3 h^4, \quad E_0 = \frac{\varepsilon_{\text{out}}^* E_{\text{out}}^*}{\varepsilon^* \mathcal{E}}, \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_0^*}{a \mathcal{E}}, \quad (9)$$

будут $E_0 = 0.19$, $\varphi_0 = -1.0$, $\delta = 0.29$, $\mu = 7.8 \cdot 10^{-4}$, $\mathcal{R}_3 = 0.235$, $X = 1.0$, $Y = 1.0$. Параметр $\delta^2 \approx 0.09$ достаточно мал, что, скорее всего, достаточно для использования уравнений (4). Обратим внимание, что характерная величина касательной скорости $a \mathcal{R}_3 / \mathcal{T} \sim h^4$, т. е. интенсивное ЭГД течение возникает лишь для пленок умеренной толщины и невозможно для бесконечно тонких пленок.

Рис. 1 демонстрирует на начальных этапах развития ЭГД течения возникновение двух вихрей, вращающихся в одинаковом направлении. Эти вихри затем сливаются в один вихрь и в области возникает почти стационарное вращательное течение. Для рассматриваемых параметров выход на стационарный режим осуществляется за достаточно короткий интервал времени порядка ($2.5 c$).

Напомним, что знак касательной скорости на границе определяется соотношением между параметрами φ_0 , E_0 , X , Y и в пленке может возникать течение, показанное на рис. 2 при $\varphi_0 = -0.1$; $E_0 = 0.19$; $X = 1$; $Y = 1$. Стационарный режим достигается при $t \approx 200$. Обратим внимание на различие в распределении потенциала на рис. 1, 2 и на то, что течение отличается от прогнозируемой схемы — имеются вихри как в угловых точках, так и в середине области.

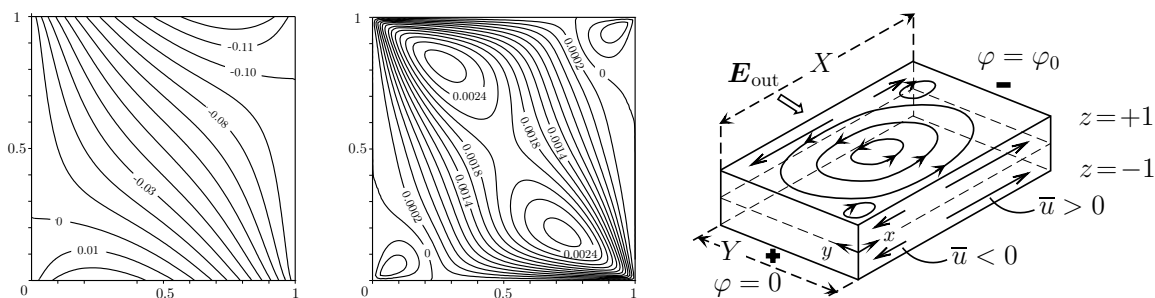


Рис. 2. Потенциал $\bar{\varphi}(x, y)$ (слева) и функция тока $\bar{\psi}(x, y, t)$ при $t = 200$ (15.6 с)

Визуальное сравнение результатов расчета (см. рис.1) с картиной течения, представленной в [1], демонстрирует хорошее совпадение. В экспериментах и расчетах наблюдается возникновение вращательного течения, которое быстро выходит на стационарный режим за время порядка 2 с. Порядки скорости вращения жидкости в экспериментах и численных расчетах совпадают (около 3 см/с), по крайней мере, в окрестности границ. К сожалению, нет возможности проверить многие из полученных соотношений, например (9), и провести другие более детальные сравнения, так как в [1] отсутствует упоминание о некоторых параметрах, в частности, о толщине пленки.

Наконец, скажем, что предложенная модель вращательного течения, на наш взгляд, выглядит более реалистично, чем гипотеза авторов работы [1] о переориентации дипольных моментов молекул под действием электрического поля.

Работа выполнена, благодаря поддержке грантов РФФИ 07-01-00389, 07-01-92213-НЦНИЛ, INTAS 04-80-7297 и CRDF RUM1-2842-RO-06.

Список литературы

- [1] Amjadi A., Shirsavar R., Radja N.H., Ejtehadi M.R. A Liquid Film Motor // arXiv:cond-mat/0805.0490v2. 2008. 9 p.
- [2] Oddy M. H., Santiago J. G. Multiple-species model for electrokinetic instability // Phys. Fluids. 2005. 17. P.064108.1–064108.17.
- [3] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

Zhukov M. Yu., Shiryaeva E. V. EHD Flow in a Thin Liquid Film. A Liquid Film Motor. The mathematical model describing a rotation EHD flow in a thin suspended liquid film under action of an external electric field is constructed and investigated by numerical methods. For the first time similar flow was experimentally observed in [1] where detected effect is named «A Liquid Film Motor». The model presented by us describes EHD flow within the classical framework. The depth-average procedure allows to obtain 2D model and to show, that the main contribution in the tangent velocity make the Reynolds average stress.

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Залётов В.В.* , Сторожев В.И. **, Хапилова Н.С. *

* *Институт прикладной математики и механики НАНУ, Донецк*

** *Донецкий национальный университет*

Получено аналитическое решение смешанной задачи о деформации изотропного полупространства, на границе которого касательные напряжения отсутствуют, в конечной области граничной плоскости действует распределенная нагрузка, вне её нормальные напряжения и перемещения пропорциональны. Задача решена в цилиндрической системе координат. Исследован частный случай, когда приложенная в круговой области распределённая нагрузка не зависит от угловой координаты.

В работах [1, 2] приведено аналитическое решение следующей смешанной задачи теории упругости для верхнего полупространства $z \geq 0$. В области V_1 , принадлежащей координатной плоскости xOy , ограничивающей полупространство, действует распределённая нагрузка $q(x, y)$. В области V_2 , дополняющей область V_1 до полной плоскости $z = 0$, выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и перемещений. Касательные напряжения на границе отсутствуют. Напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

Обозначим компоненты напряжений через $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$, компоненты перемещений через u, v, w . Граничные условия запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0) = q(x, y), (x, y) \in V_1; \sigma_z(x, y, 0) = kw(x, y, 0), (x, y) \in V_2; \\ \tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = 0, (x, y) \in V_1 + V_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение смешанной задачи (1) имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{V_1} \beta(\xi, \eta) \left\{ -\frac{3z(x-\xi)^2}{\rho_1^5} + \frac{1-2\nu}{\rho^2 \rho_1} \left[\frac{z(y-\eta)^2}{\rho_1^2} + \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{\rho_1 + z} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\chi}{2} \int_0^\infty [(1+2\nu-tz)J_0(\rho t) - \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{\rho^2} (1-2\nu-zt)J_2(\rho t)] e^{-tz} \frac{tdt}{t+\chi} \right\} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$\sigma_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{V_1} \beta(\xi, \eta) \left\{ -\frac{3z^3}{\rho_1^5} + \chi \int_0^\infty (1+tz)J_0(\rho t) e^{-tz} \frac{tdt}{t+\chi} \right\} d\xi d\eta,$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{V_1} \beta(\xi, \eta) (y-\eta) \left\{ -\frac{3z}{\rho_1^5} + \frac{\chi z}{\rho} \int_0^\infty J_1(\rho t) e^{-tz} \frac{t^2 dt}{t+\chi} \right\} d\xi d\eta \quad (2)$$

для напряжений и, соответственно, для перемещений

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x, y, z) &= -\frac{1+\nu}{2\pi E} \int \int_{V_1} \beta(\xi, \eta)(x-\xi) * \\
&* \left\{ \frac{1-2\nu}{\rho_1(\rho_1+z)} - \frac{z}{\rho_1^3} - \frac{\chi}{\rho} \int_0^\infty (1-2\nu-tz) J_1(\rho t) e^{-tz} \frac{dt}{t+\chi} \right\} d\xi d\eta, \\
\hat{v}(x, y, z) &= -\frac{1+\nu}{2\pi E} \int \int_{V_1} \beta(\xi, \eta)(y-\eta) * \\
&* \left\{ \frac{1-2\nu}{\rho_1(\rho_1+z)} - \frac{z}{\rho_1^3} - \frac{\chi}{\rho} \int_0^\infty (1-2\nu-tz) J_1(\rho t) e^{-tz} \frac{dt}{t+\chi} \right\} d\xi d\eta, \\
\hat{w}(x, y, z) &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \int \int_{V_1} \beta(\xi, \eta) * \\
&* \left\{ \frac{2(1-\nu)}{\rho_1} + \frac{z^2}{\rho_1^3} - \chi \int_0^\infty (2-2\nu+tz) J_0(\rho t) e^{-tz} \frac{dt}{t+\chi} \right\} d\xi d\eta. \tag{3}
\end{aligned}$$

В соотношениях (2)-(3) величины ρ, ρ_1 определяются равенствами

$$\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \rho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}.$$

Функция β находится из решения интегрального уравнения [3]

$$\beta(x, y) = q(x, y) + \int \int_{V_1} \beta(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, (x, y) \in V_1, \tag{4}$$

где

$$G(x, y) = \frac{\chi}{2\pi} \int_0^\infty J_0(rt) \frac{tdt}{t+\chi}, r^2 = x^2 + y^2. \tag{5}$$

Выбор системы координат при решении задач теории упругости зависит от геометрической формы упругого тела и области приложения нагрузки, а также от закона её распределения. Найдём решение краевой задачи (1) в цилиндрической системе координат R, φ, z . Будем считать, что оси z прямоугольной и цилиндрической систем координат совпадают, нормальная нагрузка, распределённая по области V_1 , зависит от координат R, φ , то есть $q = q(R, \varphi)$. Граничные условия для полупространства запишем в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_z(R, \varphi, 0) &= q(R, \varphi), (R, \varphi) \in V_1; \sigma_z(R, \varphi, 0) = kw(R, \varphi), (R, \varphi) \in V_2; \\
\tau_{Rz}(R, \varphi, 0) &= \tau_{\varphi z}(R, \varphi, 0) = 0, (R, \varphi) \in V_1 + V_2. \tag{6}
\end{aligned}$$

Декартовы координаты с цилиндрическими связаны соотношениями

$$x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z. \tag{7}$$

Формулы для напряжений в цилиндрической системе координат запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_R &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi, \\
 \sigma_\varphi &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi, \sigma_z = \sigma_z, \\
 \tau_{R\varphi} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\
 \tau_{Rz} &= \tau_{xz} \cos \varphi + \tau_{yz} \sin \varphi, \tau_{\varphi z} = -\tau_{xz} \sin \varphi + \tau_{yz} \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Здесь компоненты напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$ определяются формулами (2) при замене в них величин x, y цилиндрическими координатами R, φ в соответствии с соотношениями (7), а переменных ξ, η в соответствии с равенствами

$$\xi = R_1 \cos \varphi_1, \eta = R_1 \sin \varphi_1, (R_1, \varphi_1) \in V_1
 \tag{9}$$

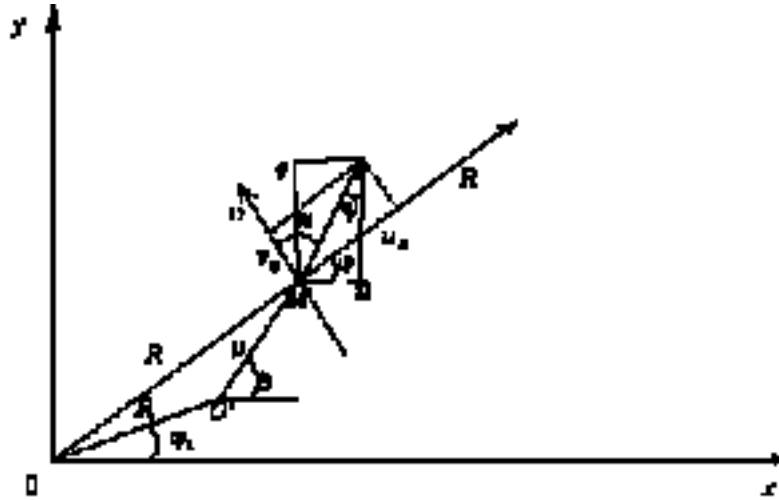


Рис. 1. Схема к расчёту окружных и радиальных перемещений

Осуществив такую же замену в формуле (3), найдём вертикальные перемещения $w(R, \varphi, z)$ в цилиндрической системе координат. Что касается окружных и радиальных перемещений, то для их определения необходимы дополнительные вычисления. Проектируя вектор перемещения в горизонтальной плоскости на ось φ (рис. 1), получим

$$\nu_\varphi = |\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}| \cos \alpha,
 \tag{10}$$

где угол α равен сумме $\varphi + \psi$, если перемещения \hat{u} и \hat{v} имеют одинаковый знак, и разности $\varphi - \psi$, если \hat{u} и \hat{v} в точке имеют разные знаки. Угол ψ определяется из равенства

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\hat{u}}{\hat{v}}.
 \tag{11}$$

Таким образом, формулу (10) можно записать в виде

$$\nu_\varphi = |\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}| \cos(\varphi \pm \psi)
 \tag{12}$$

Для вычисления радиального перемещения в правой части равенства (10) достаточно заменить сомножитель $\cos \alpha$ на $\sin \alpha$. При подстановке выражений (3) для \hat{u} и \hat{v} в формулы (10)-(12) координаты x, y, ξ, η заменяются цилиндрическими с помощью равенств (7),(9).

Эти равенства используются и при вычислении напряжений, по формулам (8). Явный вид компонент напряжений, определённых соотношениями (8), не будем приводить из-за громоздкости аналитических выражений, а перейдем к исследованию частного случая пространственной задачи, а именно: к задаче о симметричной деформации упругого полупространства.

Условия на границе полупространства запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_z(R, 0) &= q_0(R), R \leq a; \sigma_z(R, 0) = kw(R), R \geq a; \\ \tau_{Rz}(R, 0) &= 0, 0 \leq R \leq \infty.\end{aligned}\quad (13)$$

При симметричной деформации компонента перемещения v_φ обращается в нуль, а радиальные и вертикальные перемещения u_R и w не зависят от угловой координаты φ . После преобразований найдём радиальные перемещения

$$u_R = -\frac{1+\nu}{E} \int_0^a \beta(R_1) T_1(R-R_1, z) (R-R_1) R_1 dR_1 \quad (14)$$

Функция T_1 , входящая в равенство (14), имеет вид

$$\begin{aligned}T_1(R, z) &= \frac{1-2\nu}{\sqrt{(R-R_1)^2+z^2}(\sqrt{(R-R_1)^2+z^2}+z)} - \frac{z}{((R-R_1)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \\ &- \frac{\chi}{|R-R_1|} \int_0^\infty (1-2\nu-tz)e^{-tz} J_1(|R-R_1|t) \frac{dt}{t+\chi}.\end{aligned}\quad (15)$$

В случае осесимметричной задачи величины ρ, ρ_1 определяются равенствами

$$\rho = |R-R_1|, \rho_1 = \sqrt{(R-R_1)^2+z^2}. \quad (16)$$

Из формулы (3) с учётом соотношений (16) найдём вертикальные перемещения

$$\begin{aligned}w &= -\frac{1+\nu}{E} \int_0^\infty \beta(R_1) \left\{ \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{(R-R_1)^2+z^2}} + \frac{z^2}{((R-R_1)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ &\left. + \chi \int_0^\infty (2\nu-2-tz)e^{-tz} J_1(|R-R_1|t) \frac{dt}{t+\chi} \right\} R_1 dR_1.\end{aligned}\quad (17)$$

Если перемещения известны, то, воспользовавшись законом Гука и соотношениями Коши, записанными в цилиндрической системе координат, можно определить компоненты напряжений. Однако в случае осевой симметрии их проще найти непосредственно из соотношений (8).

После преобразований формулы для напряжений принимают вид:

$$\sigma_R(R, z) = \int_0^a \beta(R_1) \left\{ -\frac{3z(R-R_1)^2}{\rho_1^5} + \frac{1-2\nu}{\rho_1(\rho_1+z)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\chi}{2} \int_0^\infty \left\{ (1 + 2\nu - tz) J_0(|R - R_1|t) - (1 - 2\nu - zt) J_2(|R - R_1|t) \right\} e^{-tz} \frac{tdt}{t + \chi} \Big\} R_1 dR_1, \\
 \sigma_\varphi(R, z) = & \int_0^a \beta(R_1) \left\{ \frac{1 - 2\nu}{\rho_1} \left\{ \frac{z}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_1 + z} \right\} + \frac{\chi}{2} \int_0^\infty \left\{ (1 + 2\nu - tz) J_0(|R - R_1|t) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1 - 2\nu - zt) J_2(|R - R_1|t) \right\} e^{-tz} \frac{tdt}{t + \chi} \right\} R_1 dR_1, \\
 \sigma_z(R, z) = & \int_0^a \beta(R_1) \left\{ -\frac{3z^3}{\rho_1^5} + \chi \int_0^\infty \left\{ (1 + tz) J_0(|R - R_1|t) e^{-tz} \frac{tdt}{t + \chi} \right\} R_1 dR_1, \right. \\
 \tau_{Rz}(R, z) = & \int_0^a \beta(R_1) |R - R_1| z \left\{ -\frac{3z}{\rho_1^5} + \frac{\chi}{|R - R_1|} \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-tz}}{t + \chi} \right\} J_1(|R - R_1|t) dt \Big\} R_1 dR_1.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Функция $\beta(R)$ определяется из уравнения

$$\beta(R) = q_0(R) + \int_0^a \beta(R_1) G(|R - R_1|) R_1 dR_1, \quad R < a, \tag{19}$$

где

$$G(R) = \chi \int_0^\infty J_0(Rt) \frac{tdt}{t + \chi}.$$

Список литературы

- [1] Залётов В.В. Аналитическое решение смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства // Труды ИПММ НАН Украины. Т.14. 2007. С. 74–82.
- [2] Залётов В.В., Сторожев В.И., Хапилова Н.С. Смешанная задача теории упругости для изотропного полупространства при действии на границе сосредоточенной силы // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X Международной конференции. - Ростов-на-Дону, Россия: ООО "ЦВВР 2006. - С. 120–124.
- [3] Кавлакан М.В., Михайлов А.М. Решение смешанной задачи теории упругости для полупространства на упругом основании // ДАН СССР. - 1980. - Т.251. № 6. - С. 1338–1341.

Zaletov V.V., Storoshev V.I., Hapilova N.S. *Solution of the mixed problem of elasticity theory for isotropic half-space in cylindrical coordinate system.* The analytical solution of the mixed problem about the deformation of isotropic half-space is received in the case, when on the boundary tangent stresses are absent, in finite domain of the border plane the distributed load acts, outside of its normal stresses and displacements are proportionately. The problem is solved in cylindrical coordinate system. The private case is investigated when in circular domain distributed load does not depend on angular coordinate.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПЕРФОРИРОВАННОМ ОСНОВАНИИ

Зенченко А.В.
ИПММ НАН Украины, Донецк

С помощью интегрального преобразования Фурье решена смешанная задача теории упругости для ортотропной полуплоскости, лежащей на перфорированном упругом основании, в случае, когда на участке границы приложена нормальная нагрузка. Получены аналитические формулы для компонент напряжений и перемещений, действующих в упругой полуплоскости.

Рассмотрим смешанную краевую задачу теории упругости для верхней полуплоскости $y > 0$, $|x| < \infty$, ось x направлена вдоль границы упругой полуплоскости. В конечной области V , принадлежащей оси x , действует нормальная нагрузка $\sigma_y = p(x)$. В остальных точках границы ставится условие пропорциональности нормальных напряжений и смещений. Касательные напряжения на границе отсутствуют. В бесконечно удаленных точках напряжения обращаются в нуль.

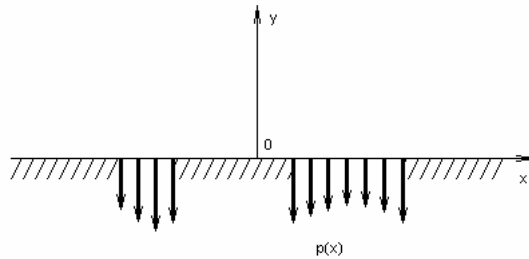


Рис. 1. Постановка задачи

В случае отсутствия массовых сил уравнения плоской теории упругости записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ - компоненты напряжений, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ - компоненты упругих деформаций.

Обозначим через u и v перемещения вдоль осей x и y соответственно. Граничные условия для полуплоскости запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= p(x), & x &\in V; \\ \sigma_y(x, 0) &= kv(x, 0), & x &\notin V; \\ \tau_{xy}(x, 0) &= 0, & x &\in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Где постоянный коэффициент k характеризует деформационные свойства упругого основания.

В упругой ортотропной полуплоскости перемещения с компонентами напряжения связаны законом Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y, \\ \varepsilon_y &= \beta_{12}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y, \\ \gamma_{xy} &= \beta_{66}\tau_{xy}.\end{aligned}\tag{3}$$

Коэффициенты деформации β_{ij} выражаются формулами

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}, \quad \beta_{22} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2} = \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{13}\nu_{31}}{E_1}, \\ \beta_{12} &= -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}}{E_1} = -\frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32}}{E_2}, \quad \beta_{66} = \frac{1}{G_3}.\end{aligned}\tag{4}$$

Система дифференциальных уравнений (1),(3) сводится к уравнению [2]:

$$\beta_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + (2\beta_{12} + \beta_{66})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \beta_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0,\tag{5}$$

причем компоненты напряжения выражаются через функцию Φ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.\tag{6}$$

Согласно [1,4], используя преобразование Фурье можно получить решение краевой задачи (1),(2),(3) в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \int_V G_x(x - \eta, y)\beta(\eta)d\eta, \\ \sigma_y(x, y) &= \int_V G_y(x - \eta, y)\beta(\eta)d\eta, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \int_V G_{xy}(x - \eta, y)\beta(\eta)d\eta, \\ u(x, y) &= \int_V G_u(x - \eta, y)\beta(\eta)d\eta, \\ v(x, y) &= \int_V G_v(x - \eta, y)\beta(\eta)d\eta.\end{aligned}\tag{7}$$

Функция $\beta(x)$ является решением интегрального уравнения

$$\beta(x) = p(x) + \int_V \beta(\eta)G(x - \eta)d\eta,\tag{8}$$

При этом

$$\begin{aligned}
G_x(x, y) &= \frac{1}{\pi} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \left[\frac{r_1^2 y}{x^2 + r_1^2 y^2} - \frac{r_2^2 y}{x^2 + r_2^2 y^2} + \right. \\
&\quad \left. + \kappa \Re \left(-r_1 \widehat{Ei}(\kappa r_1 y - i \kappa x) + r_2 \widehat{Ei}(\kappa r_2 y - i \kappa x) \right) \right], \\
G_y(x, y) &= \frac{1}{\pi} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \left[\frac{y}{x^2 + r_1^2 y^2} - \frac{y}{x^2 + r_2^2 y^2} + \right. \\
&\quad \left. + \kappa \Re \left(\frac{1}{r_1} \widehat{Ei}(\kappa r_1 y - i \kappa x) - \frac{1}{r_2} \widehat{Ei}(\kappa r_2 y - i \kappa x) \right) \right], \quad (9) \\
G_{xy}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \left[-\frac{x}{x^2 + r_1^2 y^2} - \frac{x}{x^2 + r_2^2 y^2} + \right. \\
&\quad \left. + \kappa \Im \left(\widehat{Ei}(\kappa r_1 y - i \kappa x) + \widehat{Ei}(\kappa r_2 y - i \kappa x) \right) \right], \\
G_u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \Im \left[-\left(\beta_{11} r_1 - \frac{\beta_{12}}{r_1} \right) \widehat{Ei}(\kappa r_1 y - i \kappa x) \right. \\
&\quad \left. + \left(\beta_{11} r_2 - \frac{\beta_{12}}{r_2} \right) \widehat{Ei}(\kappa r_2 y - i \kappa x) \right], \\
G_v(x, y) &= \frac{1}{\pi} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \Re \left[-\left(\beta_{12} r_1 - \frac{\beta_{22}}{r_1^2} \right) \widehat{Ei}(\kappa r_1 y - i \kappa x) \right. \\
&\quad \left. + \left(\beta_{12} r_2 - \frac{\beta_{22}}{r_2^2} \right) \widehat{Ei}(\kappa r_2 y - i \kappa x) \right], \\
G(x) &= \frac{\kappa}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \sin(\kappa x) - Si(\kappa x) \sin(\kappa x) - Ci(\kappa x) \cos(\kappa x) \right).
\end{aligned}$$

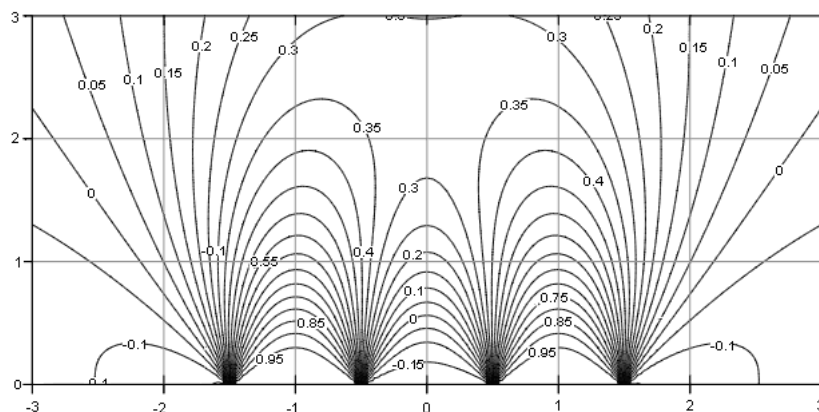
Здесь $Si(x)$ - интегральный синус, $Ci(x)$ - интегральный косинус,

$$\kappa = k \beta_{22} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}, \quad \widehat{Ei}(x) = Ei(x) e^x, \quad Ei(x) = \int_0^x \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

$$r_1, r_2 = \sqrt{\frac{(2\beta_{12} + \beta_{66}) \pm \sqrt{(2\beta_{12} + \beta_{66})^2 - 4\beta_{11}\beta_{22}}}{2\beta_{11}}}.$$

На рис.2 показано распределение напряжения $\sigma_y(x, y)$ в упругой полуплоскости. Изолинии построены для случая, когда нагрузка на границе равномерно распределена по двум отрезкам единичной длины. $E_1 = 1 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0,5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{31} = 0,2$, $\nu_{21} = 0,1$, $G_3 = 0,1 \cdot 10^4$ МПа, $k = 0,05 \cdot 10^4$ МПа/л, $p(x) = P_0$.

Решение (7)-(9) имеет практическое приложение в механике горных пород. В частности, оно может быть использовано при исследовании задач, связанных с подземной разработкой угольных пластов лавами. При этом упругая полуплоскость моделирует массив горных пород, а перфорированное основание - разрабатываемый пласт полезного ископаемого с очистной выработкой.

Рис. 2. Изолинии $\sigma_y(x, y)/P_0 = const$

Список литературы

- [1] Хапилова Н.С., Зенченко А.В. Смешанная задача теории упругости для полуплоскости // Труды ИПММ НАН Украины. 2000. № 5. С. 165–172.
- [2] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
- [3] Хапилова Н.С./ Теория внезапного отжима угольного пласта. Киев: Наук. думка, 1992. 232 с.
- [4] Зенченко А.В. Распределение напряжений в трансверсально-изотропной полуплоскости, лежащей на упругом основании, при действии на границе сосредоточенной силы // Труды ИПММ НАН Украины. 2004. № 9. С. 76–80.
- [5] Зенченко А.В. Смешанная задача для трансверсально-изотропной полуплоскости, лежащей на упругом перфорированном основании с пластическими зонами, при действии на участке границы линейной нормальной нагрузки // Труды ИПММ НАН Украины. 2008. № 16. С. 88–92.
- [6] Кавлакан М.В., Михайлов А.М. О распределении давления на пласт при горизонтальной выработке. // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 1977. № 5. С. 48–53.

Zenchenkov A. V. *The mixed problem of the theory of elasticity for an isotropic half-plane lying on the elastic foundation, by action on boundary of distributed load.*

With the help of an integral Fourier transformation the mixed problem of the theory of elasticity for the orthotropic half-plane lying on the punched elastic foundation is solved in a case when on a final segment of boundary the normal load is applied. The analytical formulas for components of stresses, which act in an elastic half-plane, are received.

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСИ И ТЕРМОДИФФУЗИИ НА ВИБРАЦИОННУЮ КОНВЕКЦИЮ МАРАНГОНИ

Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

На основе анализа осредненной задачи исследована двухдиффузионная конвекция Марангони в слое бинарной смеси при действии высокочастотной вибрации. Рассмотрен также случай, когда учитывается термодиффузия. Численно и асимптотически изучены спектральные задачи устойчивости, построены нейтральные кривые.

Рассматривается действие высокочастотной поступательной вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном слое бинарной смеси, ограниченном свободной деформирующейся поверхностью и твердой или “мягкой” стенкой. Основное внимание уделяется анализу влияния примеси. Случай однокомпонентной жидкости рассмотрен в [1], где были выведены осредненные уравнения и изучена устойчивость квазиравновесия. В данной работе также, как и в [1], исследования проводятся на основе анализа осредненной задачи, при этом в качестве модели берутся уравнения конвекции в форме Обербека–Буссинеска. К исходной задаче применяется метод осреднения, который позволяет разыскивать решение в виде суммы плавных и быстрый составляющих, получить задачу для плавных компонент и выражения для быстрых через плавные. Основное ограничение метода осреднения состоит в том, что скорость вибрации ω должна быть велика, а амплитуда скорости конечна, так что закон колебаний имеет вид $x_3 = b/\omega f(\omega t)$, где f – 2π -периодическая функция с нулевым средним, ω – частота, b – амплитуда скорости вибрации. Колебания происходят вдоль вектора $\mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$. В результате осреднения в случае однородной жидкости приходим к задаче

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla q + \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{dT}{dt} &= Pr^{-1} \Delta T, \quad \frac{dC}{dt} = Sc^{-1} (\Delta C - \varepsilon \Delta T), \\ \mathbf{w} &= -\nabla \Phi + \mathbf{s}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Краевые условия на осредненной свободной поверхности $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \boldsymbol{\ell}) &= \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \boldsymbol{\ell} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi}{\partial x_2}, 1 \right), \\ \tau_{ik} n_k - \left(q + Ga\xi - Re^2 \left(\frac{\mathbf{w}^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\ell}) \right) \right) n_i &= \\ = 2K \left(C_p - \frac{Ma_1}{Pr} T - \frac{Ma_2}{Sc} C \right) n_i + \frac{Ma_1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{Ma_2}{Sc} \frac{\partial C}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} - Bi_1 T = \delta_{11}, \quad \frac{\partial C}{\partial n} - Bi_2 C = \delta_{12}, \quad \Phi = 0.$$

На твердой стенке $x_3 = 1$ условия следующие

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} + B_{01}T = \delta_{21}, \quad \frac{\partial C}{\partial x_3} + B_{02}T = \delta_{22}, \quad \mathbf{w}_n = 0. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{v}' , q , T , C — скорость, давление, температура, концентрация примеси соответственно. Задача содержит безразмерные параметры: Pr , Sc , Ga , Ma_1 , Ma_2 , Bi_1 , Bi_2 , C_p , — числа Прандтля, Шмидта, Галилея, Марангони тепловое и концентрационное, два числа Био, безразмерный коэффициент поверхностного натяжения и вибрационный параметр $Re^2 = \frac{b^2 h^2}{\nu^2} \langle f^2 \rangle$. В результате осреднения в динамическом краевом условии появились виброгенные напряжения. Осредненная задача (1)–(3) имеет решение

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 = 0, \quad T_0 = z, \quad C_0 = z, \quad q_0 = \frac{Re^2}{2} \cos^2 \varphi, \\ \mathbf{w}_0 = (\cos \varphi, 0, 0), \quad \Phi_0 = x_3 \sin \varphi, \quad \xi_0 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При исследовании устойчивости решения (4) методом линеаризации были построены нейтральные кривые $Ma_1(\alpha, Ma_2)$ колебательной неустойчивости при следующих значениях параметров: $Cr = (PrC)^{-1} = 0.01$, $Pr = 0.01$, $Sc = 10$, $Bi_1 = Bi_2 = 0$, $B_{01} = B_{02} = 0$, $Ga = 0$, $\mu \equiv (Re \sin \varphi)^2 / C = 1$. Сравнение со случаем однокомпонентной жидкости показывает, что наличие примеси имеет дестабилизирующий характер при $Ma_2 < 0$ и стабилизирующий, если $Ma_2 > 0$ (см. Рис.1, Рис.2). Действие же вибрации сводится к сглаживанию свободной поверхности.

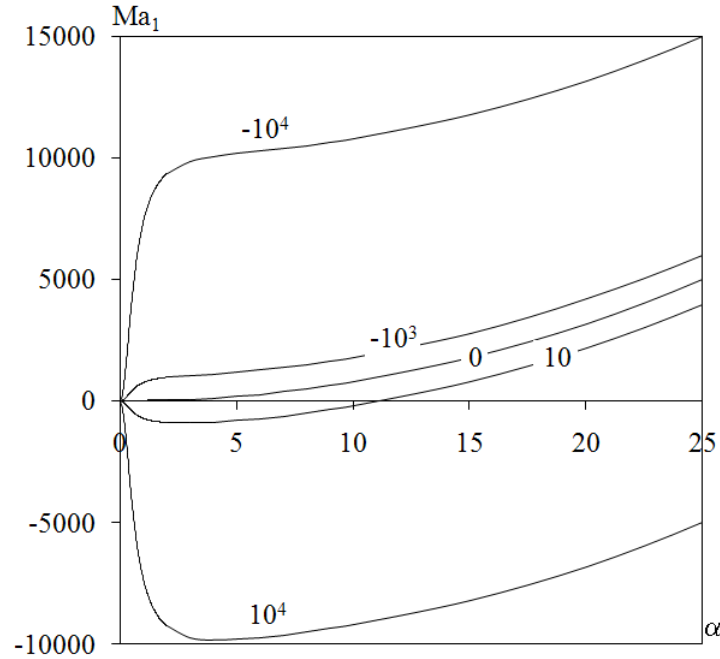


Рис.1

Теперь рассмотрим влияние вибрации на термодиффузионную конвекцию Марангони. Известно, что термодиффузия в растворах называется эффектом Соре

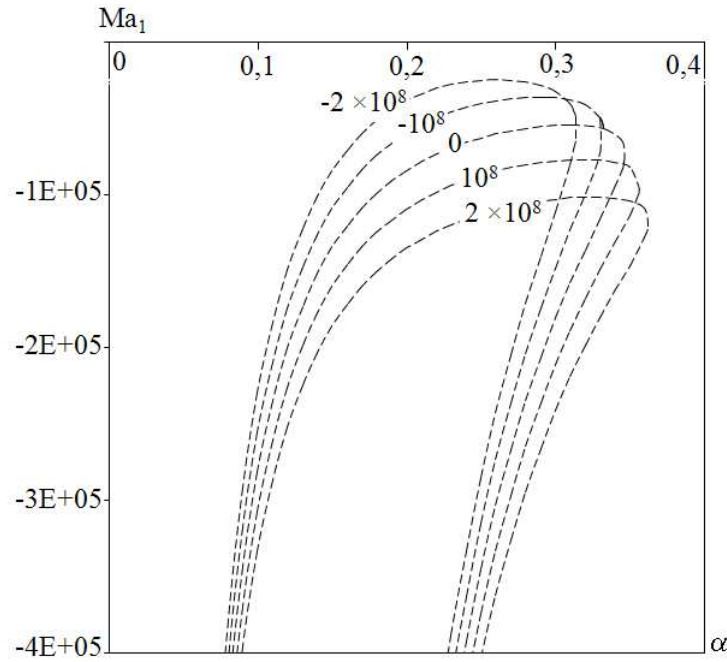


Рис.2

[2]. Исследования термодиффузии и термокапиллярной конвекции начаты в [3]. Наша задача – рассмотреть, как влияет вибрация на результаты, полученные в [2], а также в [4]. Рассмотрим случай, когда условия для концентрации получаются из обращения в ноль нормальной составляющей потока вещества на границе. В этом случае градиент концентрации создается не внешними условиями, а является следствием эффекта термодиффузии Соре. Вибрационная конвекция Рэлея–Бенара в слое с твердыми стенками с учетом термодиффузии изучалась в [5]. В данной работе рассматривается слой со свободной деформирующейся границей. В этом случае спектральная задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 \lambda Lv &= L^2 v, \quad \lambda Pr \theta = L \theta - v, \quad \lambda Sc C = L(C - Sr T) - Sr Le^{-1} v, \\
 z = 0 : \quad v &= \lambda Pr \delta, \quad D^2 v + \alpha^2 v = \frac{Ma^2}{\alpha} (\theta + C + \delta(1 + Sr)), \\
 Cr((3\alpha^2 + \lambda)Dv - D^3 v) &= \alpha^2 (\alpha^2 + \frac{\alpha}{Bo} + \mu \alpha \operatorname{th} \alpha) \delta, \\
 D\theta - Bi(\theta + \delta) &= 0, \quad DC - Sr DT = 0, \\
 z = 1 : v = Dv = 0, \quad D\theta + B_0 \theta &= 0, \quad DC - Sr DT = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены новые безразмерные параметры $Sr = -\frac{\alpha \sigma_2}{\sigma_1}$ – число Соре, $Le = \frac{Pr}{Sc}$ – число Льюиса. Спектральная задача (5) решалась численно в случае монотонной неустойчивости. Получено, что с ростом параметра $Sr > 0$ устойчивость понижается, а с увеличением вибрационного параметра μ – повышается. Это создает возможность управлять конвективным процессом. Можно, например, при заданном параметре Sr так подобрать параметр μ , чтобы критические числа Марангони были такими же, как и при $\mu = 0$, $Sr = 0$. Таблица и график, соответствующие монотонной неустойчивости для $Cr = 0.033$, $Pr = 0.01$, $Sc = 10$, $Bi_1 = 0, 1$, $Bi_2 = 0$, $B_{01} = B_{02} = 0$, $Ga = 14.848$, приведены в табл.1 и на Рис.3.

α	Ma				
	$Sr = 0$ $\mu = 0$	$Sr = 0.01$ $\mu = 0$	$Sr = 0.01$ $\mu = 2.247$	$Sr = 0.015$ $\mu = 0$	$Sr = 0.015$ $\mu = 24.023$
5,00	206,71	18,54	18,55	12,74	12,75
4,00	137,72	12,50	12,51	8,60	8,61
3,00	86,66	8,28	8,31	5,70	5,73
2,00	49,59	5,69	5,78	3,94	4,02
1,00	18,92	4,04	4,44	2,90	3,22
0,80	13,58	3,65	4,23	2,68	3,14
0,60	8,94	3,16	3,97	2,39	3,08
0,40	5,33	2,53	3,62	2,00	3,04
0,20	3,17	1,90	3,14	1,58	3,01
0,15	3,01	1,84	3,04	1,54	3,01
0,12	3,09	1,87	3,01	1,56	3,01
0,10	3,31	1,95	3,02	1,61	3,01
0,05	6,12	2,67	3,31	2,09	3,02
0,01	100,90	4,58	4,59	3,10	3,13
0,001	9880,73	4,80	4,80	3,20	3,20

Табл.1

Получено, что значению $Sr = 0.01$ соответствует $\mu = 2.247$, а если $Sr = 0.015$, то $\mu = 24.023$. Вычисления показывают, что при $\alpha \rightarrow 0$ имеет место асимптотика $Ma = \frac{0.048}{Sr} + O(\alpha^2)$, которая не зависит от вибрационного параметра.

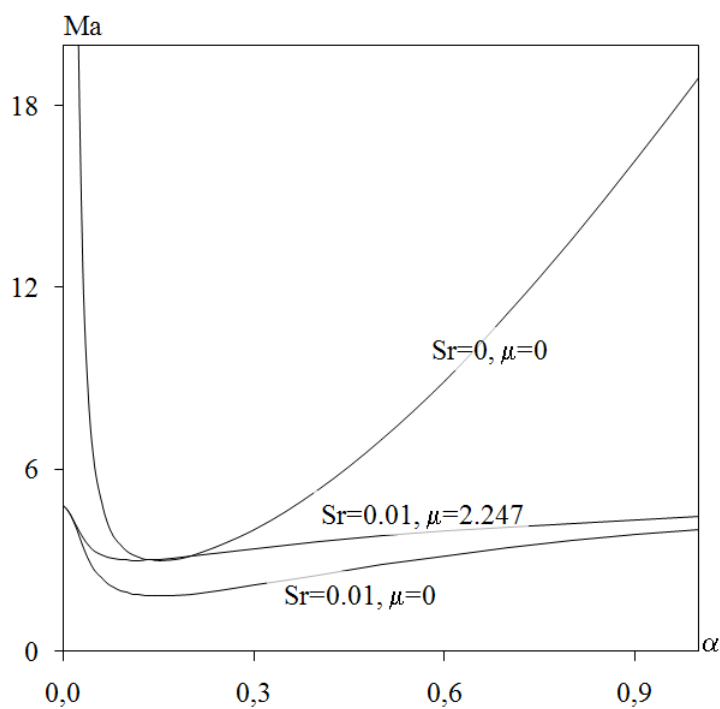


Рис.3

Заключение. Приведенные исследования показывают, что взаимодействие примеси и вибрации может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на конвективную неустойчивость.

Работа была частично поддержана РФФИ (гранты 07-0100099-а и 07-01-92213-НЦНИЛ-а в рамках ЕНО "Регулярные и хаотические движения").

Список литературы

- [1] Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. 2002. Т. 66. С. 573-583.
- [2] Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука. 2000. 280 с.
- [3] Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в слое бинарной смеси с учетом эффекта Соре. // Труды VII Российского симпозиума "Механика невесомости". Москва. 2000. С. 248-261.
- [4] Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 318 с.
- [5] Gershuni G. Z., Kolesnikov A. K., Legros J. C., Myznikova B. I. On the vibrational convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect. // J. Fluid Mech. 1997 Vol. 330, P. 251-269.

Zenkovskaya S.M., Shleykel A.L. *On the influence of an admixture and thermodiffusion on vibration Marangoni convection.* Double-diffusive Marangoni convection in a binary mixture layer under the action of high-frequency vibration is investigated on the basis of the analysis averaged problems. The case when thermodiffusion is taken into account is considered also. Numerically and asymptotically spectral problems of stability are investigated, neutral curves are plotted.

МЕТОДЫ КВАДРАТУР СВЕРТОК, ДУРБИНА И ГРАНИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ УПРУГИХ ТЕЛ

Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Маркин И.П.

НИИ механики Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского

Представлена схема метода граничных элементов в сочетании с методом квадратур свертки. Рассмотрены модификации метода квадратур свертки. Приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующие достоинства полученных модификаций.

Введение

Существующие методологии решения задач упругодинамики с использованием метода граничного элемента (МГЭ) укладываются, главным образом, в два возможных подхода: подход во временной области и подход с использованием обратного преобразования в области Лапласа (Фурье). Все численные формулы обращения зависят от надлежащего выбора их параметров, а все пошаговые процедуры требуют адекватного выбора шага по времени и, как правило, приемов улучшения устойчивости пошаговой формулировки [1, 2]. Появление метода квадратур свертки позволило сформулировать новый МГЭ-подход [2, 3, 4, 5].

Гранично-элементное моделирование

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассмотрим регуляризованное уравнение без объемных сил и начальных деформаций [1]. Базовый процесс ГЭ-дискретизации строится в соответствии со схемой из [1]. Традиционная схема метода квадратур свертки строится на основе составной формулы трапеций с постоянным шагом [2, 3, 4]:

$$y = q * p, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{q}(\gamma(Re^{il2\pi L^{-1}})/\Delta t)e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 x_n = \Delta t [\beta_k (s x_{n+k} + g((n+k)\Delta t)) + \dots + \beta_0 (s x_n + g(n\Delta t))],$$

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 p^k + \dots + \alpha_k}{\beta_0 p^k + \dots + \beta_k}, \quad x(t, p) = \int_0^t e^{p(t-\tau)g(\tau)} d\tau$$

где \bar{q} - изображение по Лапласу функции q .

Разделим интервал интегрирования, обозначив узлы через φ_k ($k = 1, 2, \dots, L$), причем $\varphi_0 = 0$, $\varphi_L = 2\pi$, тогда весовые коэффициенты примут вид:

$$\omega_0 = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^L \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \operatorname{Re}[\bar{f}(\varphi)] d\varphi, \quad \omega_n = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=1}^L \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} [\bar{f}(\varphi)] e^{-in\varphi} d\varphi \quad \text{для } t > 0.$$

На интервале $a = \varphi_k, b = \varphi_{k+1}$ возникают интегралы от быстро осциллирующей функции, причем $n(b-a) \gg 1$, $f(\varphi)$ - гладкая функция. Такие функции могут быть приближены многочленами степени m при $m \gg n(b-a)/\pi$ [6]:

$$\int_a^b L_m e^{in\varphi} d\varphi = S_m^n(f) = \frac{b-a}{2} e^{in\frac{b+a}{2}} \sum_{j=1}^m D_j \left(n \frac{b-a}{2} \right) f(\varphi_j),$$

где

$$D_j(w) = \int_{-1}^1 \left(\prod_{k \neq j} \frac{\xi - d_k}{d_j - d_k} \right) e^{iw\xi} d\xi, \quad \varphi_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} d_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad w = n \frac{b-a}{2}.$$

$$R_m(f) = \int_a^b (f(\varphi) - L_m(\varphi)) e^{ink} d\varphi,$$

$$R_m(f) \leq \int_a^b |f(\varphi) - L_m(\varphi)| d\varphi \leq D(d_1, \dots, d_m) \left(\max_{[a,b]} |f^{(m)}(\varphi)| \right) \left(\frac{b-a}{2} \right)^{m+1}.$$

Если подынтегральное выражение не является быстро осциллирующей функцией, то будем использовать соответствующую традиционную составную формулу типа Ньютона-Котеса.

Численные эксперименты

Рассмотрим задачу о действии силы $p = 1H/m^2$ на торец призматического тела, когда другой торец жестко закреплен. Параметры материала следующие: плотность $\rho = 7850 \text{ кг}/m^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0$, модуль Юнга $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ Н}/m^2$. Задача решена в приведенных величинах ($p = 1, \rho = 0,5, \nu = 0, E = 1$). Гранично-элементная модель построена следующим образом: выбрано 126 четырехугольных элементов на четверти равномерной сетки.

На рис. 1 приведены кривые перемещений, число временных точек $N = 500$, число узлов интегрирования $L = 500$ на интервале от 0 до 2π с постоянным шагом $\Delta t = 0,01$. Цифрой 1 маркировано решение, полученное с использованием традиционного метода квадратур сверток, цифрой 2 - решение, полученное с использованием линейной интерполянты функции $f(\varphi)$, цифрой 3 - решение, полученное с использованием квадратичной интерполянты функции $f(\varphi)$. На рисунке видно, что результат, полученный с использованием традиционного метода квадратур сверток значительно лучше.

На рис. 2 (кривая с осцилляциями) представлено решение, полученное с использованием традиционной составной формулы метода трапеций с переменным шагом: на интервале от 0 до $\pi/2$ взяли 125 узлов интегрирования, на интервале от $\pi/2$ до $3\pi/4$ - 20 узлов, на интервале от $3\pi/4$ до 2π - 125 узлов. Общее число точек интегрирования $L=270$, точек по времени $N=500$, шаг $\Delta t=0,01$. Осцилляции можно погасить, применив предложенные комбинированные формулы. Решения, полученные по линейной и квадратичной комбинированным формулам, совпали,

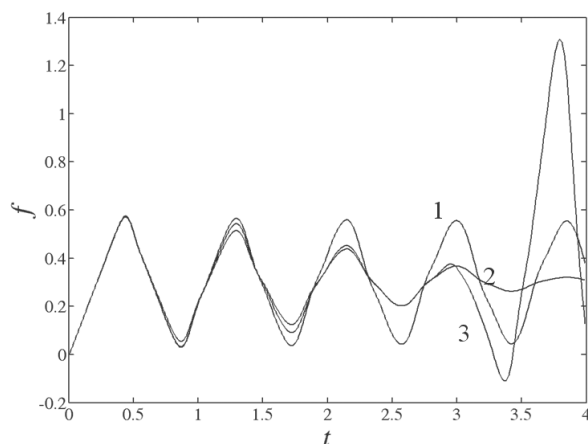


Рис. 1.

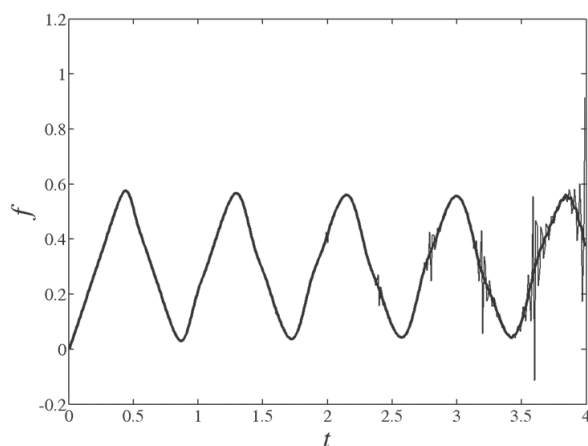


Рис. 2.

им соответствует гладкая кривая на рис. 2. Эти решения при меньшем числе узлов интегрирования ($L=270$) совпадают с кривой 1 на рис. 1 ($L=500$).

Можно и дальше уменьшать число узлов интегрирования, получая при этом хорошие результаты. Однако, если число точек по времени, которое равно N , начинает превышать $2L$, то картина колебательного процесса сильно изменяется - увеличивается амплитуда колебаний, а их частота уменьшается (для традиционного метода квадратур сверток такая картина появляется при $N > L$). На рис. 3 приведены расчеты для следующего разбиения - на интервале от 0 до $\pi/2$ - 70 узлов интегрирования, на интервале от $\pi/2$ до $3\pi/2$ - 20 узлов, на интервале от $3\pi/2$ до 2π - 70 узлов.

Следует отметить, что традиционный вариант формулы квадратур сверток дает хорошие результаты за счет большого количества узлов интегрирования. Применение комбинированной формулы позволяет сохранить необходимую точность с использованием меньшего числа узлов интегрирования.

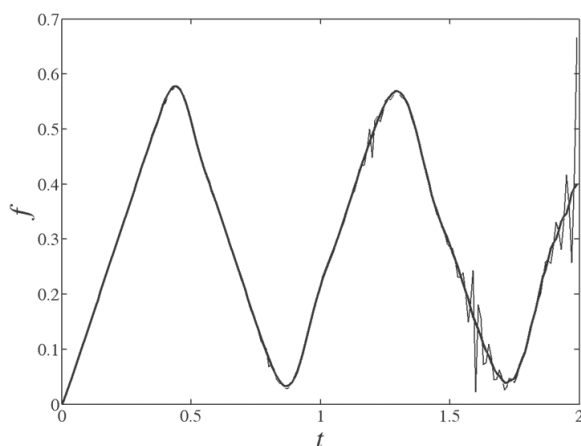


Рис. 3.

Список литературы

- [1] Баженов, В.Г., Игумнов, Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями - М.: Физматлит, 2008. - 352с.
- [2] Schanz, M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua.// Berlin Springer, 2001. - 170 p.
- [3] Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational Calculus. I // Numerische Mathematik. - 1988. - № 52. - P. 129-145.
- [4] Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational Calculus. II // Numerische Mathematik. - 1988. - V. 52. - P. 413-425.
- [5] Schanz, M., Steinbach O. Boundary element analysis - Berlin Springer, 2007. - 354 p.
- [6] Бахвалов, Н.С., Жидков, Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632 с.

Igumnov L.A., Litvinchuk S.U., Markin I.P. *Convolution quadrature method, Durbin method and boundary element method in dynamic problems of elastic bodies.* A scheme of a boundary element method is given in combination with a convolution quadrature method. The modifications of the convolution quadrature method are considered. The results of numerical experiments showing the advantages of the obtained modifications are presented.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ

Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.

Таганрогский государственный педагогический институт

Данная работа посвящена построению микрополярной стержневой модели посредством редукции от трёхмерной моментной теории упругости к одномерной теории стержней. При этом возникает задача обоснования осуществимости редукции от трёхмерной теории к одномерной и замкнутости основной системы уравнений полученной одномерной теории. В дополнение к результатам работы А.А. Илюхина, Н.Н. Щепина “К моментной теории упругих стержней” получены замыкающие соотношения для системы уравнений Кирхгофа. Указаны кинематические параметры, которые нужно привлечь, чтобы вместе с системой дифференциальных уравнений Кирхгофа получить замкнутую систему. Остальные геометрические величины найдены из определяющих их соотношений. Получены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в замыкающих соотношениях.

В работе [1] асимптотическим методом было получено первое приближение решения задачи о деформации гибкого стержня в рамках моментной теории упругости, что позволяет поставить задачу: на основе построенного первого приближения трехмерной задачи решения получить расщепление задачи о деформации стержня на совокупность двумерной и одномерной задач:

уравнения для функций $u_i^{(2)}, \theta_i^{(2)}$ точек поперечного сечения:

$$(\mu + \alpha)\tilde{\Delta}u_1^{(2)} + 2\alpha(\nabla_2\theta_3^{(2)} - \nabla_3\theta_2^{(2)}) = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla_2\nabla_2u_2^{(2)} + (\mu + \alpha)\nabla_3\nabla_3u_2^{(2)} + (\lambda + \mu - \alpha)\nabla_2\nabla_3u_3^{(2)} + 2\alpha\nabla_3\theta_1^{(2)} = \lambda\kappa_3^{(1)},$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla_3\nabla_3u_3^{(2)} + (\mu + \alpha)\nabla_2\nabla_2u_3^{(2)} + (\lambda + \mu - \alpha)\nabla_2\nabla_3u_2^{(2)} - 2\alpha\nabla_2\theta_1^{(2)} = -\lambda\kappa_2^{(1)},$$

$$(\beta + \nu)\tilde{\Delta}\theta_1^{(2)} - 4\alpha\theta_1^{(2)} + 2\alpha(\nabla_2u_3^{(2)} - \nabla_3u_2^{(2)}) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\pi + 2\beta)\nabla_2\nabla_2\theta_2^{(2)} + (\beta + \nu)\nabla_3\nabla_3\theta_2^{(2)} + (\pi + \beta - \nu)\nabla_2\nabla_3\theta_3^{(2)} - 4\alpha\theta_2^{(2)} + 2\alpha\nabla_3u_1^{(2)} = \\ = 2\alpha(\chi_3^{(1)} + x_2\kappa_1^{(1)}), \end{aligned}$$

$$(\pi + 2\beta)\nabla_3\nabla_3\theta_3^{(2)} + (\beta + \nu)\nabla_2\nabla_2\theta_3^{(2)} + (\pi + \beta - \nu)\nabla_2\nabla_3\theta_2^{(2)} - 4\alpha\theta_3^{(2)} - 2\alpha\nabla_2u_1^{(2)} =$$

$$= -2\alpha(\chi_2^{(1)} - x_3\kappa_1^{(1)}),$$

и граничные условия:

$$(\mu + \alpha)\frac{\partial}{\partial n}u_1^{(2)} + 2\alpha e_{1\alpha\beta}n_\alpha\theta_\beta^{(2)} = -(\mu - \alpha)\{n_\alpha\chi_\alpha^{(1)} + \kappa_1^{(1)}e_{1\alpha\beta}x_\alpha n_\beta\},$$

$$\begin{aligned} n_2\{(\lambda + 2\mu)\nabla_2 u_2^{(2)} + \lambda\nabla_3 u_3^{(2)}\} + n_3\{(\mu + \alpha)\nabla_3 u_2^{(2)} + (\mu - \alpha)\nabla_2 u_3^{(2)} + 2\alpha\theta_1^{(2)}\} = \\ = -\lambda n_2(\chi_1^{(1)} + e_{1\alpha\beta}\kappa_\alpha^{(1)}x_\beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_3\{(\lambda + 2\mu)\nabla_3 u_3^{(2)} + \lambda\nabla_2 u_2^{(2)}\} + n_2\{(\mu + \alpha)\nabla_2 u_3^{(2)} + (\mu - \alpha)\nabla_3 u_2^{(2)} - 2\alpha\theta_1^{(2)}\} = \\ = -\lambda n_3(\chi_1^{(1)} + e_{1\alpha\beta}\kappa_\alpha^{(1)}x_\beta), \end{aligned}$$

$$(\beta + \nu)\frac{\partial}{\partial n}\theta_1^{(2)} = -(\beta - \nu)n_\alpha\kappa_\alpha^{(1)}, \quad (2)$$

$$n_2\{(\pi + 2\beta)\nabla_2\theta_2^{(2)} + \pi\nabla_3\theta_3^{(2)}\} + n_3\{(\beta + \nu)\nabla_3\theta_2^{(2)} + (\beta - \nu)\nabla_2\theta_3^{(2)}\} = -\pi n_2\kappa_1^{(1)},$$

$$n_3\{(\pi + 2\beta)\nabla_3\theta_3^{(2)} + \pi\nabla_2\theta_2^{(2)}\} + n_2\{(\beta + \nu)\nabla_2\theta_3^{(2)} + (\beta - \nu)\nabla_3\theta_2^{(2)}\} = -\pi n_3\kappa_1^{(1)}.$$

Полученная система допускает представление решения в виде:

$$\begin{aligned} u_2^{(2)} = \tilde{u}_2^{(2)} - \frac{\lambda\chi_1^{(1)}}{2(\lambda + \mu)}x_2 - \tilde{\theta}_1^{(2)}x_3 + \frac{\kappa_3^{(1)}}{\beta + \nu}\left(\frac{\lambda\beta}{\lambda + 2\mu}x_2^2 + \frac{\beta - \nu}{2}x_3^2\right) + \\ + \frac{(\beta - \nu)}{\beta + \nu}\kappa_2^{(1)}x_2x_3 + \kappa_\alpha^{(1)}v_\alpha^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3^{(2)} = \tilde{u}_3^{(2)} - \frac{\lambda\chi_1^{(1)}}{2(\lambda + \mu)}x_3 + \tilde{\theta}_1^{(2)}x_2 - \frac{\kappa_2^{(1)}}{\beta + \nu}\left(\frac{\lambda\beta}{\lambda + 2\mu}x_3^2 + \frac{\beta - \nu}{2}x_2^2\right) - \\ - \frac{(\beta - \nu)}{\beta + \nu}\kappa_3^{(1)}x_2x_3 + \kappa_\alpha^{(1)}v_\alpha^{(3)}, \end{aligned}$$

$$u_1^{(2)} = \tilde{u}_1^{(2)} - x_\alpha\chi_\alpha^{(1)} + k_1^{(1)}v_1^{(1)}, \quad \theta_1^{(2)} = \tilde{\theta}_1^{(2)} - \frac{\beta - \nu}{\beta + \nu}x_\alpha\kappa_\alpha^{(1)} + \kappa_\alpha^{(1)}\Theta_\alpha^{(3)},$$

$$\theta_2^{(2)} = -\chi_3^{(1)} - \frac{\pi\kappa_1^{(1)}}{2(\pi + \beta)}x_2 + \kappa_1^{(1)}\Theta_1^{(2)}, \quad \theta_3^{(2)} = \chi_2^{(1)} - \frac{\pi\kappa_1^{(1)}}{2(\pi + \beta)}x_3 + \kappa_1^{(1)}\Theta_1^{(3)}. \quad (3)$$

Уравнения Кирхгофа являются основными в одномерной задаче

$$\frac{\tilde{d}}{ds}\vec{F} + \vec{\omega} \times \vec{F} = 0, \quad \frac{\tilde{d}}{ds}\vec{M} + \vec{\omega} \times \vec{M} + \vec{e} \times \vec{F} = 0, \quad (4)$$

вместе с замыкающими соотношениями [2]

$$F_i = \int_{\Omega} \sigma_{1i} d\Omega, \quad M_i = \int_{\Omega} \{e_{i\alpha k} x_k \sigma_{1k} + \mu_{1i}\} d\Omega ; \quad (5)$$

$\frac{\tilde{d}}{ds}$ обозначает относительную производную по дуговой координате s в главных осях изгиба и кручения.

Ниже будет обоснована возможность расщепления трёхмерной задачи на уравнения (1) – (5), найден явный вид замыкающих соотношений (5) и проанализированы их свойства.

В соотношениях (3) функции $v_i^{(j)}, \Theta_i^{(j)}$ являются функциями координат точек только в плоскости поперечного сечения. Для нахождения этих функций допустим определённый произвол в силу не единственности решения задачи Сен-Венана [3,4]. Уравнения для нахождения функций $v_i^{(j)}, \Theta_i^{(j)}$ можно получить следующим образом. Запишем шесть дифференциальных уравнений равновесия для функций $v_i^{(j)}, \Theta_i^{(j)}$, используя соотношения (3). В полученных соотношениях приравняем к нулю коэффициенты при величинах $\kappa_i^{(1)}$, в результате придём к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda\beta}{\beta+\nu} + (\lambda+2\mu) \nabla_2^2 \nu_3^{(2)} + (\mu+\alpha) \frac{\beta-\nu}{\beta+\nu} + (\mu+\alpha) \nabla_3^2 \nu_3^{(2)} - (\lambda+\mu-\alpha) \frac{\beta-\nu}{\beta+\nu} + \\ + (\lambda+\mu-\alpha) \nabla_2 \nabla_3 \nu_3^{(3)} - 2\alpha \frac{\beta-\nu}{\beta+\nu} + 2\alpha \nabla_3 \Theta_3^{(3)} - \lambda = 0, \end{aligned}$$

$$(\lambda+2\mu) \nabla_2^2 \nu_2^{(2)} + (\mu+\alpha) \nabla_3^2 \nu_2^{(2)} + (\lambda+\mu-\alpha) \nabla_2 \nabla_3 \nu_2^{(3)} + 2\alpha \nabla_3 \Theta_2^{(3)} = 0,$$

$$(\mu+\alpha) \tilde{\Delta} \nu_1^{(1)} + 2\alpha \left(\nabla_2 \Theta_1^{(3)} + \nabla_3 \Theta_1^{(2)} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} -\frac{2\lambda\beta}{\beta+\nu} + (\lambda+2\mu) \nabla_3^2 \nu_2^{(3)} - (\mu+\alpha) \frac{\beta-\nu}{\beta+\nu} + (\mu+\alpha) \nabla_2^2 \nu_2^{(3)} - (\lambda+\mu-\alpha) \frac{\beta-\nu}{\beta+\nu} + \\ + (\lambda+\mu-\alpha) \nabla_2 \nabla_3 \nu_2^{(2)} + 2\alpha \frac{\beta-\nu}{\beta+\nu} - 2\alpha \nabla_2 \Theta_2^{(3)} + \lambda = 0, \end{aligned}$$

$$(\lambda+2\mu) \nabla_3^2 \nu_3^{(3)} + (\mu+\alpha) \nabla_2^2 \nu_3^{(3)} + (\lambda+\mu-\alpha) \nabla_2 \nabla_3 \nu_3^{(2)} + 2\alpha \nabla_3 \Theta_3^{(3)} = 0,$$

$$(\beta+\nu) \tilde{\Delta} \Theta_2^{(3)} + 2\alpha \left(\nabla_2 \nu_2^{(3)} - \nabla_3 \nu_2^{(2)} - 2\Theta_2^{(3)} \right) = 0,$$

$$(\beta+\nu) \tilde{\Delta} \Theta_3^{(3)} + 2\alpha \left(\nabla_2 \nu_3^{(3)} - \nabla_3 \nu_3^{(2)} - 2\Theta_3^{(3)} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& (\pi + 2\beta) \nabla_2^2 \Theta_1^{(2)} + (\beta + \nu) \nabla_3^2 \Theta_1^{(2)} + (\pi + \beta - \nu) \nabla_2 \nabla_3 \Theta_1^{(3)} + \\
& \quad + \left(2\alpha \frac{\pi}{\pi + \beta} - 1 \right) x_2 - 4\alpha \Theta_1^{(2)} + 2\alpha \nabla_3 \nu_1^{(1)} = 0, \\
& (\pi + 2\beta) \nabla_3^2 \Theta_1^{(3)} + (\beta + \nu) \nabla_2^2 \Theta_1^{(3)} + (\pi + \beta - \nu) \nabla_2 \nabla_3 \Theta_1^{(2)} + \\
& \quad + \left(2\alpha \frac{\pi}{\pi + \beta} - 1 \right) x_3 - 4\alpha \Theta_1^{(3)} - 2\alpha \nabla_2 \nu_1^{(1)} = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия для функций $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$ имеют вид:

$$\lambda n_2 \nu_2^{(2)} + \lambda n_3 \nu_2^{(3)} = 0, \quad n_2 \nabla_2 \Theta_2^{(3)} - n_3 \nabla_3 \Theta_2^{(3)} = 0, \quad n_2 \nabla_2 \Theta_3^{(3)} + n_3 \nabla_3 \Theta_3^{(3)} = 0,$$

$$n_2 (\pi + 2\beta) \nabla_2 \Theta_1^{(2)} + n_3 (\beta + \nu) \nabla_3 \Theta_1^{(2)} = 0, \quad (\beta - \nu) n_2 \Theta_3^{(3)} - (\beta + \nu) n_3 \Theta_2^{(3)} = 0, \quad (7)$$

$$n_2 (\beta - \nu) \nabla_2 \Theta_1^{(3)} + n_3 \pi \nabla_3 \Theta_1^{(3)} = 0.$$

Уравнения (6) для неизвестных $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$ являются независимыми, что указывает на корректное расщепление трехмерной задачи на систему двумерных уравнений для нахождения функций $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$ точек поперечного сечения и одномерных уравнений для нахождения функций дуговой координаты.

Используя формулы (5), получим следующие выражения для компонент M_i вектора-момента:

$$M_1 = B_{11} \omega_1 + A_1 \omega_1, \quad M_2 = B_{22} \omega_2 + B_{23} \omega_3 + A_2 \omega_3, \quad M_3 = B_{31} \omega_2 + B_{33} \omega_3 + A_3 \omega_2, \quad (8)$$

Коэффициенты A_i в соотношениях (9) характеризуют вклад моментных напряжений, возникающих между частицами в процессе деформации, в величину компонент вектора-момента. Анализ выражения для коэффициентов B_{23} и B_{31} показал, что $B_{23} = B_{31} = 0$ без каких-либо дополнительных ограничений на характер деформаций или свойства деформируемого объекта. Последнее означает, что учет моментных напряжений не приводит к изменению структуры замыкающих соотношений системы уравнений Кирхгофа посредством появления величин γ_i , зависящих от силовых напряжений. Таким образом, при отсутствии моментных напряжений ($A_i = 0$) замыкающие соотношения (8) переходят в соотношения, соответствующие классической теории Кирхгофа.

Анализ формул для коэффициентов A_i показал, что коэффициент A_1 является величиной неотрицательной. Таким образом, учёт моментных напряжений приводит к увеличению сопротивления материала стержня деформации растяжения (увеличению суммарной жёсткости) и, как следствие, к увеличению растягивающего момента M_1 . Рассмотрев выражения для коэффициентов A_2 и A_3 :

$$A_2 = \iint_{\Omega} (\beta - \nu) \nabla_2 \Theta_3^{(3)} d\Omega, \quad A_3 = \iint_{\Omega} (\beta + \nu) \nabla_3 \Theta_2^{(3)} d\Omega,$$

получим:

$$A_2 - A_3 = \iint_{\Omega} \left((\beta - \nu) \nabla_2 \Theta_3^{(3)} - (\beta + \nu) \nabla_3 \Theta_2^{(3)} \right) d\Omega = 0. \quad (9)$$

Что следует из формулы Грина. Или

$$A_2 = A_3 = A. \quad (10)$$

Равенство (10) носит общий характер, поскольку получено без каких-либо дополнительных ограничений на систему уравнений трёхмерной задачи.

Уравнения (8) для компонент M_i вектора-момента представляют собой замыкающие соотношения для системы уравнений Кирхгофа. С учётом произведённого анализа эти соотношения принимают вид:

$$M_1 = \tilde{B}_1 \omega_1, \quad M_2 = B_2 \omega_2 + A \omega_3, \quad M_3 = B_3 \omega_3 + A \omega_2, \quad (11)$$

где $\tilde{B}_1 = B_1 + A_1$.

Соотношения (11) совместно с системой уравнений Кирхгофа представляют собой замкнутую систему, описывающую деформации стержня под действием концевых нагрузок с учётом моментных напряжений, возникающих в процессе деформации между частицами, из которых состоит материал стержня.

Список литературы

- [1] *Илюхин А.А., Щепин Н.Н.* К моментной теории упругих стержней // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2001. Спецвыпуск. С. 92–94.
- [2] *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. — Киев: Наукова думка, 1979. — 216 с.
- [3] *Шкутин Л.И.* Нелинейные модели деформируемых моментных сред. — ПМТФ. — 1980. — № 6. — С. 111–117.
- [4] *Еремеев В.А.* Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // Изв. РАН. МТТ. — 1994. — №3. — С. 181–190.

Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. In addition to results of work of A.A. Ilyukhin, N.N. Shchepin “To moment theories of elastic rods” are received closing parities for system of Kirhhoff equations. Kinematic parameters with which it is necessary to involve that together with system of differential Kirhhoff equations to receive the closed system are specified. Other geometrical sizes are found from parities defining them. Conditions with which should satisfy factors in closing parities are received. For the one-dimensional theory the decision at presence жесткостной is specified to symmetry. The received results were interpreted within the limits of the mechanical approach to definition of configurations of molecules of DNA.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ УДАР МАССИВНОГО ТЕЛА ПО КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ОСНОВАНИИ

Кадомцев И.Г., Лапин А.Г.

Южный Федеральный Университет, г. Ростов-на-Дону

Исследована задача об ударе массивного тела по круглой пластине, жестко зашпеченной по контуру, лежащей на основании. Аналитически построена функция Грина, с помощью которой решена задача упругого и неупругого удара. Построены графики зависимости силы контактного взаимодействия $P(t)$ для различных параметров задачи.

Рассмотрим осесимметричную задачу об ударе тяжелого тела весом P по круглой пластине, лежащей на основании Винклера. В начальный момент $t = 0$ (момент удара) тело имеет заданную скорость v . Сосредоточенная ударная нагрузка прикладывается в центре пластины. Решение будем строить на основе решения дифференциального уравнения поперечных колебаний плиты, вызываемых приложением точечной нагрузки в центре плиты [1]. Перемещение пластины $w(r, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Софи-Жермен, за исключением начала координат $r = 0$, где имеется особенность из-за приложения нагрузки

$$\Delta\Delta w + \frac{k}{D}w + \frac{\gamma h}{\partial D} \frac{\partial^2 w}{\partial t} = q(r, t)$$

где $\Delta = \partial/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r$ – оператор Лапласа, $D = Eh^3/12(1 - \sigma^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль упругости материала пластины, σ – коэффициент Пуассона материала пластины, a – радиус пластины, h – толщина пластины, k – коэффициент сопротивления грунта оседанию, γh – вес пластинки на единицу поверхности, $Q = \gamma h \pi a^2$ – вес пластинки, P – вес падающего груза, $q(r, t)$ – нагрузка на единицу площади плиты. В дальнейшем рассматриваем задачу о колебаниях первоначально покоившейся плиты, вызываемых приложением силы, сосредоточенной в ее центре, т.е. при $q(r, t) = 0$.

Граничные условия для заделанной по контуру пластины имеют вид

$$w(a, t) = 0; \frac{\partial w}{\partial r}(a, t) = 0. \quad (1)$$

Начальные условия в момент $t = 0$ представимы следующим образом

$$w(r, 0) = 0; \frac{\partial w}{\partial t}(r, 0) = 0; r \neq 0. \quad (2)$$

Пусть при $r = 0$ и $t = 0$ пластина находится под действием импульса силы $Z = \delta(t)$. Для любого положительного t давление на пластину в этой точке может быть представлено

$$F = P - \frac{P}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z \quad (3)$$

Введем безразмерную координату $\rho = r/a$ и применим преобразование Лапласа к (1)–(4), тогда получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) + \left(L^4 + \frac{p^2}{v^2}\right) w = 0, \quad (4)$$

$$\frac{a^4}{D} F = \frac{a^4}{D} \left(P - \frac{P}{g} p^2 w + Zp\right), \quad (5)$$

где $L^4 = a^4 k/D$, $v^2 = gD/\gamma h a^4$.

Рассмотрим функцию влияния, которая соответствует решению для случая сосредоточенной силы, равной единице, приложенной в точке ξ (в нашем случае $\xi = 0$). Для (6) функция влияния имеет вид $(a^4/D)G_1(r, 0, p)$. В любой точке от нагрузки F согласно уравнению (6) имеем:

$$G(\rho, p) = \frac{a^4}{D} \left[P + Zp - \frac{P}{g} p^2 G(0, p)\right] G_1(\rho, 0, p) \quad (6)$$

Полагая в последнем равенстве $\rho = 0$, найдем $G(0, p)$, тогда (7) принимает вид

$$G(\rho, p) = \frac{a^4}{D} \frac{(P + Zp)G_1(\rho, 0, p)}{1 + (a^4 P/gD)p^2 G_1(0, 0, p)} \quad (7)$$

Полюсы мероморфной функции $G(\rho, p)$ принимают чисто мнимые значения $p_k = \pm i v \lambda_k$. Обозначая $G_1(0, 0, \pm i \lambda v) = G(0, 0, \lambda)$, получим трансцендентное уравнение для нахождения λ_k

$$1 - \frac{P \pi a^2}{Q} \lambda^2 G(0, 0, \lambda) = 0 \quad (8)$$

Далее с помощью (8) и второй теоремы разложения Хевисайда получаем выражение для прогиба

$$w(\rho, t) = w_{\text{ст}} + \frac{a^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(P + Zp)G_1(\rho, 0, p_k) e^{p_k t}}{[p_k + (P/g)(a^4/D)p_k^2 G_1(0, 0, p_k)]'_{p_k}}, \quad (9)$$

где статический прогиб $w_{\text{ст}} = (Pa^4/D)G(\rho, 0, L)$. После замены p_k на $\pm i \lambda_k v$ получим

$$w(\rho, t) = w_{\text{ст}} - \frac{a^4}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(P \cos v \lambda_i t - Z v \lambda_i \sin v \lambda_i t) G(\rho, 0, \lambda_i)}{-0.5[\lambda_i - (P \pi a^2/Q) \lambda_i^3 G(0, 0, \lambda_i)]'_{\lambda_i}}. \quad (10)$$

Перейдем к решению уравнения (5), учитывая что $\lambda^2 > L^4$. Оно имеет вид:

$$w(\rho, \lambda) = A_1 J_0(u\rho) + A_2 I_0(u\rho) + A_3 N_0(u\rho) + A_4 K_0(u\rho), \quad (11)$$

где $u = \sqrt[4]{\lambda^2 - L^4}$. Здесь $J_0(z)$ – функция Бесселя, $I_0(z)$ – функция Бесселя чисто мнимого аргумента, $N_0(z)$ – функция Неймана, $K_0(z)$ – функция Макдональда, связанная с функцией Ганкеля $H_n^{(1)}(z)$ следующим образом $K_n'(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} \pi n i} H_n^{(1)}(iz)$.

Определяя все неизвестные константы из граничных условий и подставляя их значения в (12), вычислим функцию влияния $G(\rho, 0, \lambda) = (a^2/4u^2D)K(\rho, 0, u)$, и, полагая $\rho = 0$, имеем

$$K(0, 0, u) = \frac{(4/\pi u) + I_1(u)N_0(u) + I_0(u)N_1(u) + (2/\pi)[K_0(u)J_1(u) - K_1(u)J_0(u)]}{2[J_0(u)I_1(u) + J_1(u)I_0(u)]}$$

Учитывая связь между функциями $G(0, 0, \lambda)$ и $K(0, 0, u)$, уравнение (9) для определения значения корней λ_i запишется в виде

$$1 - \frac{P\pi\lambda^2}{4Qu^2}K(0, 0, u) = 0 \quad (12)$$

Значение прогиба (11) в центре плиты, т.е. при $\rho = 0$, можно записать

$$w(0, t) = \frac{Pa^2}{4L^2D}K(0, 0, L) - \frac{a^2}{4D} \frac{4Q}{\pi P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^2}{\lambda_k^2 D(u_k)} [P \cos v\lambda_k t - Zv\lambda_k \sin v\lambda_k t], \quad (13)$$

где $D(u_k) = u_k^2 - \frac{\lambda_k^2}{2(u_k^2)} + \frac{\pi P \lambda_k^4}{16Q u_k^3} K'_{u_k}(0, 0, u_k)$.

Вычислим значение $K'_u(0, 0, u)$, воспользовавшись дифференциальными соотношениями для специальных функций [2], в результате чего получаем

$$K'_u(0, 0, u) = \frac{2}{\pi u} \frac{[I_0(u) - J_0(u)]^2}{[J_0(u)I_1(u) + I_0(u)J_1(u)]^2}$$

Для больших значений u переходим к асимптотическим разложениям:

$$J_p(u) = [P_p(u) \cos(u - \frac{2p+1}{4}\pi) - Q_p(u) \sin(u - \frac{2p+1}{4}\pi)] \sqrt{\frac{2}{\pi u}},$$

$$N_p(u) = [P_p(u) \sin(u - \frac{2p+1}{4}\pi) + Q_p(u) \cos(u - \frac{2p+1}{4}\pi)] \sqrt{\frac{2}{\pi u}},$$

$$I_p(u) = \frac{e^4}{\sqrt{2\pi u}} S_p(-2u),$$

$$i^{p+1} H_p^{(1)}(iu) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-u} S_p(2u),$$

где

$$P_p(u) = 1 - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(8u)^2} + \dots$$

$$Q_p(u) = \frac{4p^2-1}{8u} - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!(8u)^3} + \dots$$

$$S_p(u) = 1 + \frac{4p^2-1}{1!4u} + \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(4u)^2} + \dots$$

С помощью этих выражений уравнение (13) для определения значений λ примет вид:

$$1 - \frac{\pi P \lambda^2 \cos u + U_1 \sin(u - \frac{\pi}{4}) + U_2 \cos(u - \frac{\pi}{4})}{8Q u^2 \sin u + U_2 \sin(u - \frac{\pi}{4}) - U_1 \cos(u - \frac{\pi}{4})} = 0, \quad (14)$$

где $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\frac{9}{64u^2} + \frac{39}{256u^3} + \frac{300}{32768u^4} + \dots]$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\frac{1}{4u} + \frac{9}{64u^2} - \frac{300}{32768u^4} + \dots]$.

Производная функции влияния, входящая в выражение для $D(u)$ представима в форме

$$K'_u(0, 0, u) = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{1}{4u} + \frac{5}{32u^2} + \frac{21}{128u^3} + \dots}{[\sin u + U_2 \sin(u - \frac{\pi}{4}) - U_1 \cos(u - \frac{\pi}{4})]^2}.$$

Далее, решая численно уравнение (15) и находя его корни, определяем прогиб $w(0, t)$ в центре плиты.

Теперь применим подход Тимошенко, который говорит, что полное смещение падающего груза s представима в виде суммы местного сжатия α и прогиба w (14):

$$s = \alpha + w. \quad (15)$$

Смещение s удовлетворяет дифференциальному уравнению движения

$$mg \frac{d^2 s}{dt^2} = -P(t), \quad (16)$$

где m – масса падающего груза, $P(t)$ – сила взаимодействия между грузом и пластинкой. Проинтегрируем (16), используя начальные условия ($s|_{t=0} = 0$, $\frac{ds}{dt}|_{t=0} = v_0$), и получим

$$s = v_0 t - \frac{1}{mg} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1. \quad (17)$$

Принимая во внимание (16) и (17), получаем функциональное уравнение теории удара С.П.Тимошенко:

$$v_0 t - \frac{1}{mg} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1 = \alpha(t) + \int_0^t P(t_1) w dt_1. \quad (18)$$

В данной работе были исследованы две модели, описывающие местное смятие: модель Герца и упругопластическая модель [3].

Для модели Герца $\alpha = kP^{\frac{2}{3}}$, где $k = \left(\frac{9}{16} \frac{1}{\mu r^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$, μ – модуль упругости при сдвиге, r – радиус поверхности ударяющего тела.

Для упругопластической модели имеем систему для трех разных этапов:

- упругое поведение $\alpha = bP^{\frac{2}{3}}$; $P < \sup P(\varsigma)|_{\varsigma \leq t} < P_1$

- учет пластических деформаций $\alpha = (1 + \beta)cP^{\frac{1}{2}} + (1 - \beta)Pd$; $\sup P(\varsigma)|_{\varsigma \leq t} > P_1$; $\sup P(\varsigma)|_{\varsigma \leq t} = P$

- процесс разгрузки $\alpha = b_{\Phi} P^{\frac{2}{3}} + \delta_p [\sup(\varsigma)|_{\varsigma \leq t}]$; $\sup P(\varsigma)|_{\varsigma \leq t} > P_1$; $\sup P(\varsigma)|_{\varsigma \leq t} > P$

где $P_1 = \kappa^3 [3r/4E]^2$, $\kappa = \pi k \eta$, $k = \frac{\sigma_{тек}}{2}$, $E = E_1 E_2 [(1 - \nu_1^2) E_2 + (1 - \nu_2^2) E_1]^{-1}$,

$b = (1/r)^{\frac{1}{3}} (3/4E)^{\frac{2}{3}}$, $c = 3\kappa^{\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{8}}$, $d = 0.5(\kappa r)^{-1}$, $b_{\Phi} = (1/R_{\Phi})^{\frac{1}{3}} (3/4E)^{\frac{2}{3}}$,

$\delta_p = (1 - \beta) P_{max} (2\kappa R_p)^{-1}$, $R_{\Phi} = (\delta_e \frac{\kappa}{P_{max}})^{-1}$, $\delta_e = 0.75 P^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} E^{-1}$,

$R_p = (r^{-1} - \delta_e \frac{\kappa}{P_{max}})^{-1}$,

r – радиус падающего тела, E – приведенный модуль Юнга, E_1 и E_2 – модули Юнга ударника и пластины, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона, k – наименьшая пластическая постоянная материала, $\eta = 5.7$ – при отсутствии трения, β – характеризует вытекание материала из под ударника в процессе его внедрения, для параболического штампа $\beta = 0.33$, P_{max} – наибольшая сила, достигаемая на этапе внедрения, P_1 – сила начиная с которой учитываются пластические деформации. На рис. 1 приведены графики силы контактного взаимодействия при различных параметрах толщины пластины и скорости падающего груза в момент соприкосновения для упругой и упругопластической зависимостей.

Остальные механические и геометрические параметры выбраны следующим образом $\rho_1 = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 8900 \text{ кг/м}^3$ – плотности ударника и пластины, $\nu_1 = 0.28$, $\nu_2 = 0.32$, $E_1 = 2.18e11 \text{ Па}$, $E_2 = 1.2e11 \text{ Па}$, $k = 1.2e8 \text{ Па}$, $\beta = 0.33$, $a = 1 \text{ м}$ – радиус пластины, $m = 3 \text{ кг}$ – масса падающего тела, $r = 0.045 \text{ м}$ – радиус кривизны ударника.

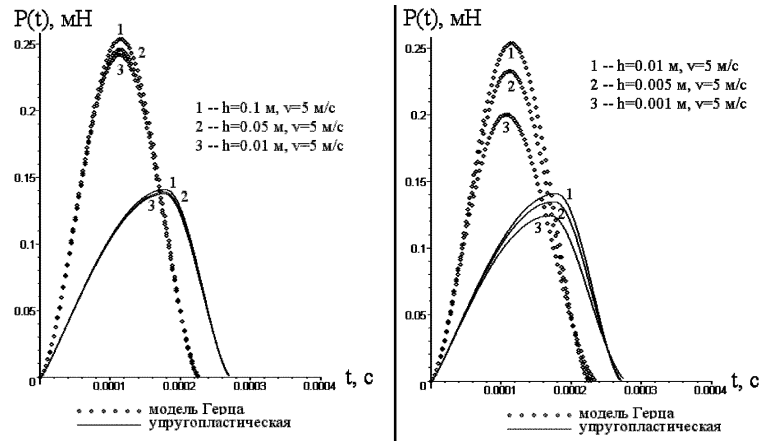


Рис. 1

Из рис. 1 видно, что при увеличении толщины и скорости сила контактного взаимодействия и время взаимодействия увеличиваются, как в упругом, так и в упругопластическом случаях, а также можно заметить, что время взаимодействия для упругопластической модели больше, чем для упругой. Также видно, что пластичность заметно уменьшает максимальное значение силы контактного взаимодействия. Для больших толщин пластины зависимость $P(t)$ стремится к зависимости $P(t)$ при ударе по полупространству. Достоверность полученных результатов следует из хорошего совпадения их с известными экспериментальными данными из [4].

Список литературы

- [1] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
- [2] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [3] Александров В.М., Кадомцев И.Г., Царюк Л.Б. Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел. // Трение и износ. 1984. № 1. с.16-26.
- [4] Батуев Г.С., Голубков Ю.В. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.

Kadomcev I.G., Lapin A.G. *Elasticoplastic impact of the massive body above the round plate, situated on the foundation.* The problem of the impact of the massive body above the round plate, rigidly fixed over the contour, situated on the foundation, is investigated. The Green's function is derived, the problem of elastic and inelastic impact is solved. Time dependence graphs of contact interaction force $P(t)$ is constructed.

ДАТЧИК ДИСТАНЦИОННОГО КОНТРОЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВЕ БЛОКА УЗКОПОЛОСНЫХ ФИЛЬТРОВ И ЛИНИЙ ЗАДЕРЖКИ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ С РАЗЛИЧНЫМИ РАБОЧИМИ ЧАСТОТАМИ

Карапетьян Г.Я.* , Днепровский В.Г.* , Багдасарян А.С.,
Багдасарян С.А.****

** НИИМ и ПМ им. Воровича И.И. ЮФУ, Ростов-на-Дону*

*** ИРЭ РАН им. В.А. Котельникова, Москва*

Рассматривается задача создания датчика на поверхностных акустических волнах (ПАВ), в котором данные об измеряемой физической величине не будут зависеть от расстояний и взаимного расположения антенн датчика и считывателя. Это происходит за счет получения от датчика не одного отраженного импульса, а двух и более, величина которых, кроме одного, зависит от величины нагрузки, за счет введения дополнительных отражательных встречно-штыревых преобразователей, настроенных на разные частоты.

Датчик дистанционного контроля физических величин (температуры, давления, влажности, радиационного фона) представляет собой линию задержки (ЛЗ) на поверхностных акустических волнах (ПАВ), корпус его выполнен герметичным, а один из встречно-штыревых преобразователей (ВШП) является однонаправленным и нагружен на приемно-передающую антенну, расположенную вне герметичного корпуса, а другой ВШП нагружен на импеданс, значение которого зависит от того физического воздействия, величину которого необходимо проконтролировать и который также расположен вне герметичного корпуса. Отсутствие источника питания позволяет располагать данный датчик в труднодоступных местах лишь однажды [1]. Опрос датчика производится с помощью считывателя, посылающего опрашивающий электромагнитный импульс, который принимается антенной датчика и преобразуется в ПАВ, которые отражаясь от отражательного ВШП, принимаются приемно-передающим ВШП и снова преобразуются в электромагнитный сигнал, который принимается приемником считывателя [2]. Однако амплитуда принятого считывателем импульса будет зависеть не только от коэффициента отражения, а, следовательно, и величины импеданса, но и от расстояний и взаимного расположения антенн датчика и считывателя, что может привести к значительным ошибкам при измерении физической величины и является существенным недостатком такого датчика.

Для устранения этого недостатка предлагается использовать в датчике дополнительную ЛЗ с другой рабочей частотой ВШП, причем приемно-передающие ВШП в обоих ЛЗ излучают (или принимают) ПАВ через частотно-избирательный направленный ответвитель (рис. 1), что позволяет сделать развязку между частотными каналами более 30 дБ, за счет частотно-избирательных свойств направленного ответвителя. Каждая секция ответвителя представляет собой вложенные

друг в друга секционированные ВШП с периодом секций 3 длины ПАВ на центральной частоте приемо-передающего ВШП. В этом случае, секционированные ВШП сдвинуты друг относительно друга на величину $7/4$ длины ПАВ на центральной частоте приемо-передающего ВШП и отраженные от них ПАВ складываются в противофазе. Такая секция не отражает ПАВ и, следовательно, не вносит искажения в амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) устройства в целом [3]. ВШП, из которых состоит ответвитель имеют ту же полосу пропускания, что приемо-передающий и отражающий ВШП. Поэтому общая АЧХ этой ЛЗ имеет вид $\left(\frac{\sin X}{X}\right)^4$, где $X = \pi N \left(\frac{f - F_i}{F_i}\right)$, N – число периодов ВШП.

На рис. 2 показана АЧХ двухканального датчика. Как видно, на частоте соседнего канала подавление составляет более 30 дБ.

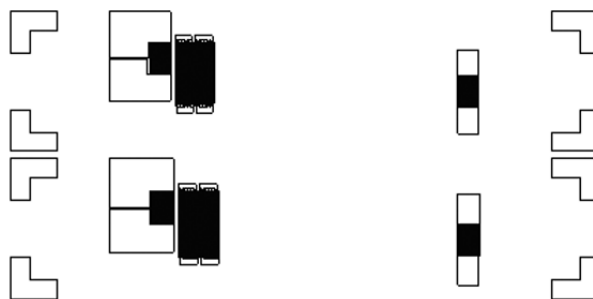


Рис. 1. Топология датчика с частотным разделением

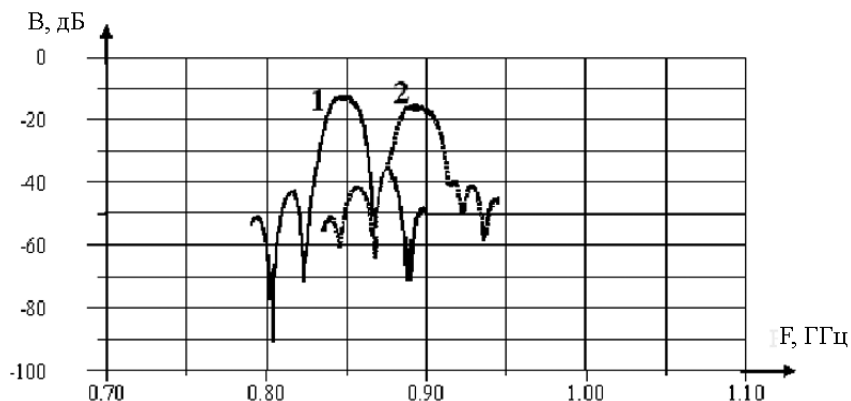


Рис. 2. Частотная зависимость вносимых потерь двухканального датчика: 1 – первый частотный канал; 2 – второй частотный канал

Приемо-передающие ВШП обоих каналов подключаются параллельно и подсоединяются к антенне. На рис. 3 показаны импульсы, отраженные в двух каналах. Время отложено по оси абсцисс в относительных единицах. Сплошной линией изображен импульс в первом частотном канале, пунктирной – во втором. Видно, что импульсы хорошо разделены во времени, что позволяет сравнивать их амплитуды и использовать один из каналов в качестве опорного.

При этом ВШП одного канала начинает шунтировать ВШП другого канала, что приводит к увеличению вносимых потерь, а следовательно и к снижению даль-

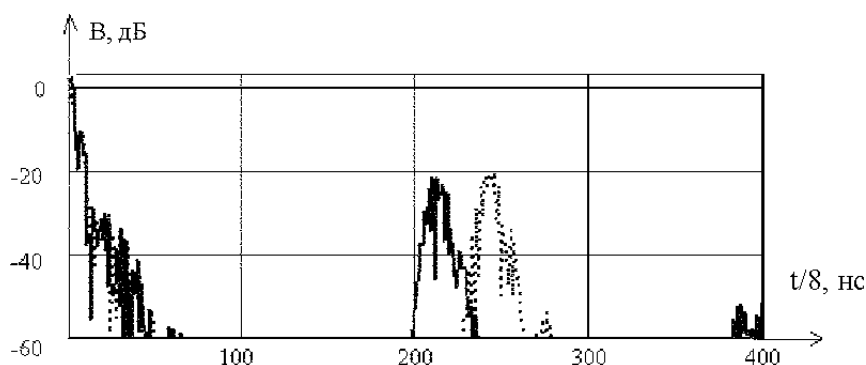


Рис. 3. Импульсы, отраженные от ВШП в различных частотных каналах

ности считывания. Кроме того, ВШП имеют полосу пропускания более 30 МГц, т.е. суммарная полоса частот составляет 60 МГц, что нежелательно, в связи с жесткими требованиями к возможности использования тех или иных частотных диапазонов при заметной мощности излучающих устройств.

Для улучшения характеристик датчика приемо-передающие ВШП были подсоединены к антенне через узкополосные импедансные фильтры, которые изготавливались на одной подложке с ЛЗ в едином технологическом цикле (рис. 4). Эти фильтры позволяют направлять сигналы от антенны к приемо-передающему ВШП той ЛЗ, рабочая частота которой соответствует частоте опросного сигнала. Импедансный фильтр состоит из двух ВШП, один из которых с малой апертурой подсоединен к приемо-передающему ВШП последовательно, а другой ВШП подсоединен к приемо-передающему ВШП параллельно. При этом ВШП с малой апертурой на центральной частоте приемо-передающего ВШП данного частотного канала имеет минимальное сопротивление, обусловленное его активной составляющей, а ВШП с большой апертурой находится в состоянии антирезонанса на этой частоте (его центральная частота отличается от центральной частоты приемо-передающего ВШП канала), его проводимость минимальна и он почти не шунтирует приемо-передающий ВШП.

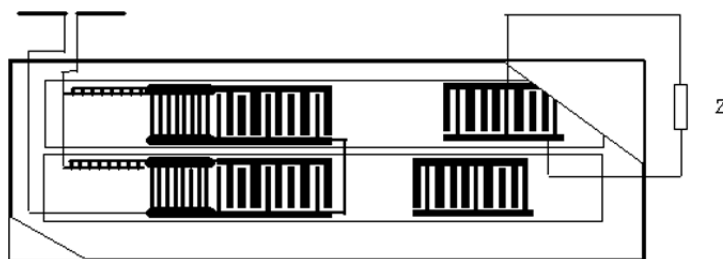


Рис. 4. Топология датчика с узкополосными фильтрами

На этой частоте в другом канале ВШП с малой апертурой имеет большое сопротивление, обусловленное его емкостью, а не активной составляющей, так как активная составляющая проводимости при условии $Nk^2 \gg 1$, которое выполняется в данном случае, много больше его емкостной составляющей (k^2 – коэффициент

электромеханической связи). ВШП с большой апертурой, не находится в состоянии резонанса и его емкостное сопротивление шунтирует нагруженный на него ВШП, уменьшая его сопротивление. Отражательный ВШП одной из ЛЗ нагружен на импеданс. Датчик опрашивается последовательно считывающими импульсами, несущие частоты которых соответствует рабочим частотам первой и второй ЛЗ. При этом в считывателе сравниваются амплитуды сигналов от первой и второй ЛЗ.

Отношение этих сигналов не зависит от расстояний и взаимного расположения антенн датчика и считывателя, а зависит только от разницы коэффициентов отражений от ненагруженного отражательного ВШП одной ЛЗ и нагруженного ВШП другой ЛЗ.



Рис. 5. Топология прореженного однонаправленного ВШП

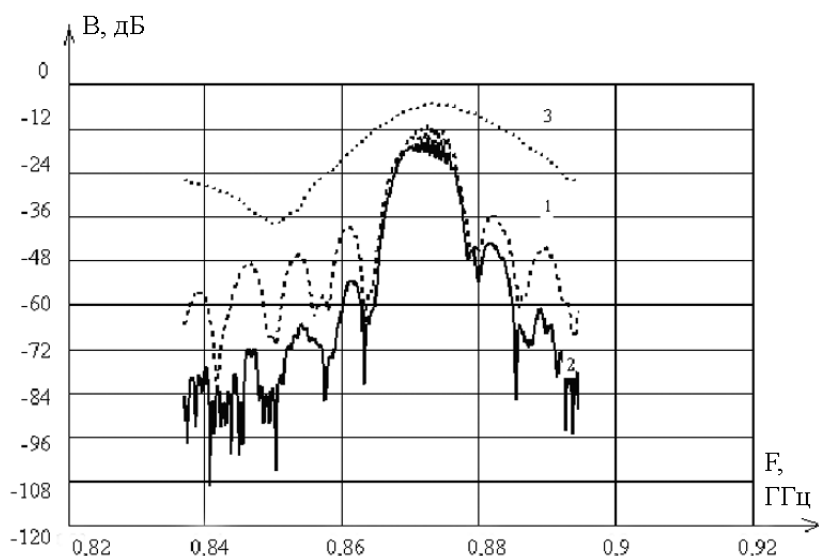


Рис. 6. АЧХ одного канала ЛЗ без узкополосного фильтра (1), с узкополосным фильтром (2) и узкополосного фильтра (3)

Для сужения полосы пропускания кроме узкополосных фильтров, используются прореженные однонаправленные ВШП (рис. 5). Такой ВШП содержит столько же однонаправленных секции, как и обычный однонаправленный ВШП (14-20 секций), но они расположены на расстоянии $n\lambda$ (λ – длина ПАВ на центральной частоте). Таким образом, удается сузить полосу пропускания до 5-6 МГц при $n = 10$.

Период λ пришлось немного скорректировать, поскольку в прореженном ВШП коэффициент металлизации намного отличается от коэффициента металлизации

в непрореженном ВШП, что приводит к значительному изменению скорости ПАВ под прореженным ВШП по сравнению с обычным и может привести к значительному уходу центральной частоты ВШП. На рис. 6 показана АЧХ ЛЗ, когда подключены только узкополосные прореженные ВШП, используемые в качестве отражательного и приемо-передающего ВШП (кривая 1). Кривая 2 соответствует АЧХ, когда приемо-передающий ВШП подсоединен к измерителю через узкополосный импедансный фильтр, а кривая 3 - АЧХ самого импедансного фильтра.

Видно, что центральные частоты узкополосного фильтра и прореженных узкополосных ВШП совпадают.

Возможно объединение не двух, а нескольких ЛЗ, в которых (кроме одной) отражательные ВШП нагружены на импедансы, величина которых зависит от различных физических величин, что позволяет такому датчику дистанционно измерять одновременно несколько различных физических величин.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-08-00583.

Список литературы

- [1] *Карпетьян Г.Я., Катаев В.Ф.* Пассивный датчик на поверхностных акустических волнах для дистанционного контроля параметров // ТКЭА. 2006. № 5. С. 53–54.
- [2] *Карпетьян Г.Я., Днепровский В.Г., Багдасарян А.С., Багдасарян С.А.* Разработка для устройств считывания алгоритмов обнаружения, распознавания сигналов от датчиков физических величин // Материалы XI Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды. 2007 г.
- [3] *Карпетьян Г., Банков В.Н., Орлова Л.В., Багдасарян А.С.* Акустоэлектронное устройство на поверхностных акустических волнах. А.с. № 1699327 от 15.08. 1991 г.

Karapetyan G. Ya, Dneprovski V.G., Bagdasarian A.S., Bagdasarian S.A. *The physical value sensor on the base of narrow band filters block and delay lines on surface acoustic waves for remote monitoring .*

The problem of the designing the sensor on surface acoustic wave (SAW) is considered, in which data about measured physical value will not depend on distances and mutual location of the antennas of the sensor and reader. This occurs due to the receiving from sensor not one reflected pulse, but two and more, value which, except one, depends on values of the load, due to the installation additional reflective interdigital transducers, adjusted on different frequencies.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО УПРУГОГО ДНА И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КОАКСИАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Карнаух А.Ю.

Донецкий национальный университет, Украина

Получены собственные частоты и собственные формы совместных осесимметричных колебаний плоского упругого дна и идеальной жидкости, частично заполняющей коаксиальный цилиндрический сосуд с жесткими стенками. Показана обобщенная ортогональность собственных функций. Рассмотрены вынужденные колебания упруго дна и идеальной жидкости.

В работах [1–3] исследованы собственные и вынужденные совместные колебания плоского упругого дна кругового цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью, а в статье [4] приведены результаты экспериментальных исследований. В [5] обобщены результаты работы [1–3] на случай двусвязного коаксиального цилиндрического сосуда и кольцевого упругого дна.

Пусть коаксиальный цилиндрический сосуд с жесткими боковыми стенками внешнего радиуса a и внутреннего b и плоским упругим дном в виде кольцевой изотропной пластинки частично заполнен до глубины h идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности ρ . Кольцевая изотропная пластинка жестко закреплена по внешнему и внутреннему контуру. Задачу будем рассматривать в рамках линейной теории, считая движение жидкости потенциальным, а совместные колебания дна и жидкости безотрывными.

Интегро-дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний кольцевой пластинки и идеальной жидкости со свободной поверхностью имеет вид [2, 5]

$$\begin{aligned}
 k_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \Delta^2 w + \frac{\rho h}{\pi (a^2 - b^2)} \int_0^{2\pi} \int_b^a \ddot{w} r dr d\theta + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{nm}(r, \theta) \times \\
 \times s_{nm} \int_0^{2\pi} \int_b^a \ddot{w} \Psi_{nm}(r, \theta) r dr d\theta = q(r, \theta, t). \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$w|_{r=a, b} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a, b} = 0.$$

Здесь $w(r, \theta, t)$ – прогиб пластинки; $k_0 = \rho_1 h_1$; ρ_1 , h_1 и D соответственно плотность, толщина и цилиндрическая жесткость пластинки; $q(r, \theta, t)$ – возмущающая нагрузка, действующая на пластинку; $\Psi_{nm}(r, \theta)$ и k_{nm} – собственные функции и собственные числа колебания идеальной жидкости в коаксиальной цилиндрической полости; $\Psi_{nm}(r, \theta) = Z_m(k_{nm}r)(\alpha_{nm} \cos m\theta + \beta_{nm} \sin m\theta)$, $k_{nm}a = \mu_{nm}$,

$Z_m(k_{nm}r) = J_m(k_{nm}r) + \gamma_{nm}Y_m(k_{nm}r)$, $\gamma_{nm} = -J'_m(\mu_{nm})/Y'_m(\mu_{nm})$; μ_{nm} – n -й корень уравнения $J'_m(\mu)Y'_m(\varepsilon\mu) - J'_m(\varepsilon\mu)Y'_m(\mu) = 0$ ($\varepsilon = b/a$), а при $\varepsilon = 0$ ($\gamma_{nm} = 0$) это уравнение запишется так $J'_m(\mu) = 0$; собственные функции Ψ_{nm} после добавления к ним произвольной константы образуют в кольцевой области полную и ортогональную с весом r систему функций; $s_{nm} = 2 \tanh(\kappa_{nm}) \{ \pi a^2 [(1 - m^2/\mu_n^2) Z_m^2(\mu_{nm}) - (\varepsilon^2 - m^2/\mu_{nm}^2) Z_m^2(\varepsilon\mu_{nm})] [\alpha_{nm}^2(1 - \delta_{m0}) + \beta_{nm}^2(1 - \delta_{m0})] \}^{-1}$; δ_{m0} – символ Кронекера.

В дальнейшем будем рассматривать осесимметричные колебания ($m = 0$). Собственные частоты этих колебаний находятся из уравнения (1) в котором прогиб дна представляется в виде $w(r, t) = R(r)e^{i\omega t}$ и полагается $q(r, \theta, t) = 0$. Функция $R(r)$ находится из уравнения

$$\Delta^2 R - \beta^4 R + c \int_b^a R r dr + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z_0(k_n r) \int_b^a R Z_0(k_n r) r dr = 0. \quad (2)$$

Здесь ω – собственная частота совместных колебаний жидкости и дна; $c = 2\rho(g - \omega^2 h)/a^2 D$, $d = -2\rho\omega^2/a^2 D$, $\beta^4 = (k_0\omega^2 + \rho g)/D$, $b_n = \{ \mu_n [Z_0^2(\mu_n) - \varepsilon^2 Z_0^2(\varepsilon\mu_n)] \}^{-1}$, индекс 0 при μ_n опущен.

Решение уравнения (2) ищется в виде

$$R(r) = AJ_0(\beta r) + BI_0(\beta r) + CY_0(\beta r) + DK_0(\beta r) + \tilde{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n Z_0(k_n r),$$

где $J_0(x)$, $Y_0(x)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка; $I_0(x)$, $K_0(x)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода нулевого порядка.

Из граничных условий жесткого защемления упругого дна получается однородная система уравнений относительно неизвестных A , B , C и D , а из равенства нулю определителя этой системы следует частотное уравнение совместных осесимметричных колебаний упругой дна и жидкости [5]

$$\left| \|a_{ij}\|_{i,j=1}^4 \right| = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= J_0(x) + \tilde{J}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\mu_n) J_n^*, & a_{12} &= I_0(x) + \tilde{I}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\mu_n) I_n^*, \\ a_{13} &= Y_0(x) + \tilde{Y}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\mu_n) Y_n^*, & a_{14} &= K_0(x) + \tilde{K}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\mu_n) K_n^*, \\ a_{21} &= -J_1(x), & a_{22} &= I_1(x), & a_{23} &= -Y_1(x), & a_{24} &= -K_1(x), \\ a_{31} &= J_0(\varepsilon x) + \tilde{J}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\varepsilon\mu_n) J_n^*, & a_{32} &= I_0(\varepsilon x) + \tilde{I}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\varepsilon\mu_n) I_n^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= Y_0(\varepsilon x) + \tilde{Y}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\varepsilon\mu_n) Y_n^*, & a_{34} &= K_0(\varepsilon x) + \tilde{K}_\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} Z_0(\varepsilon\mu_n) K_n^*, \\
a_{41} &= -J_1(\varepsilon x), & a_{42} &= I_1(\varepsilon x), & a_{43} &= -Y_1(\varepsilon x), & a_{44} &= -K_1(\varepsilon x), \\
\tilde{J}_\varepsilon &= c^* J_\varepsilon, & \tilde{I}_\varepsilon &= c^* I_\varepsilon, & \tilde{Y}_\varepsilon &= c^* Y_\varepsilon, & \tilde{K}_\varepsilon &= c^* K_\varepsilon, & J_\varepsilon &= [J_1(x) - \varepsilon J_1(\varepsilon x)]/x, \\
I_\varepsilon &= [I_1(x) - \varepsilon I_1(\varepsilon x)]/x, & Y_\varepsilon &= [Y_1(x) - \varepsilon Y_1(\varepsilon x)]/x, & K_\varepsilon &= -[K_1(x) - \varepsilon K_1(\varepsilon x)]/x, \\
\tilde{J}_n &= b_n^* (J_n^* + \tilde{J}_\varepsilon \tilde{Z}_0), & \tilde{I}_n &= b_n^* (I_n^* + \tilde{I}_\varepsilon \tilde{Z}_0), \\
\tilde{Y}_n &= b_n^* (Y_n^* + \tilde{Y}_\varepsilon \tilde{Z}_0), & \tilde{K}_n &= b_n^* (K_n^* + \tilde{K}_\varepsilon \tilde{Z}_0), & \tilde{Z}_n &= [Z_0(\mu_n) - \varepsilon Z_0(\varepsilon\mu_n)]/\mu_n, \\
Z_n^* &= [Z_0^2(\mu_n) - \varepsilon^2 Z_0^2(\varepsilon\mu_n)]/2, & b_n^* &= \tilde{b}_n / (x^4 - \mu_n^4 - \tilde{b}_n Z_n^*), \\
J_n^* &= \{x J_1(x) Z_0(\mu_n) - \mu_n J_0(x) Z_1(\mu_n) - \\
&\quad - \varepsilon [x J_1(\varepsilon x) Z_0(\varepsilon\mu_n) - \mu_n J_0(\varepsilon x) Z_1(\varepsilon\mu_n)]\} / (x^2 - \mu_n^2); \\
\tilde{b}_n &= (1 - \tilde{D} x^4) / (\tilde{\rho} \tilde{D} \mu_n Z_n^*), & I_n^* &= \{x I_1(x) Z_0(\mu_n) + \mu_n I_0(x) Z_1(\mu_n) - \\
&\quad - \varepsilon [x I_1(\varepsilon x) Z_0(\varepsilon\mu_n) - \mu_n I_0(\varepsilon x) Z_1(\varepsilon\mu_n)]\} / (x^2 + \mu_n^2), \\
c^* &= 2\tilde{c} / 2x^4 - (1 - \varepsilon^2)\tilde{c}, & Y_n^* &= \{x Y_1(x) Z_0(\mu_n) - \mu_n Y_0(x) Z_1(\mu_n) - \\
&\quad - \varepsilon [x Y_1(\varepsilon x) Z_0(\varepsilon\mu_n) - \mu_n Y_0(\varepsilon x) Z_1(\varepsilon\mu_n)]\} / (x^2 - \mu_n^2), \\
\tilde{c} &= [2\tilde{\rho} (1 + \tilde{\rho} - \tilde{D} x^4)] / \tilde{D}, & K_n^* &= \{-x K_1(x) Z_0(\mu_n) + \mu_n K_0(x) Z_1(\mu_n) - \\
&\quad - \varepsilon [-x K_1(\varepsilon x) Z_0(\varepsilon\mu_n) + \mu_n K_0(\varepsilon x) Z_1(\varepsilon\mu_n)]\} / (x^2 + \mu_n^2), \\
x &= \beta a, & \tilde{D} &= D / \rho g a^4, & \tilde{\rho} &= \rho_1 h_1 / (\rho h).
\end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (3) имеет вид $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ и совпадает с уравнением [1].

Для граничных условий жесткого защемления упругого дна, а также некоторых других граничных условий можно показать, что $\int_b^a (R_k \Delta^2 R_j - R_j \Delta^2 R_k) r dr = 0$, где R_k и R_j - собственные формы k -го и j -го тона колебаний. С учетом последнего равенства, а также из того, что R_k и R_j удовлетворяют уравнению (2), получаем обобщенное условие ортогональности собственных функций R_j при $\omega_j \neq \omega_k$

$$\begin{aligned}
&\int_b^a R_k R_j r dr + \frac{2}{a^2 - b^2} \frac{\rho h}{\rho h_1} \int_b^a R_j r dr \int_b^a R_k r dr + \\
&+ \frac{2}{a^2 - b^2} \frac{\rho h}{\rho h_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_b^a R_j Z_0(k_n r) r dr \int_b^a R_k Z_0(k_n r) r dr = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

В случае произвольной нагрузки $q(r, \theta, t)$ решение уравнения (1) может быть найдено на основании модального анализа, т.е. в виде разложения в обобщенный

ряд по собственным формам колебаний $R_k(r, \theta)$. В случае осесимметричных колебаний ($m = 0$) будем иметь [2]

$$w(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) R_k(r). \quad (5)$$

Подставляя разложение (5) в уравнение (1) и воспользовавшись обобщенной ортогональностью функций $R_k(r)$, получим счетную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для обобщенных координат $q_k(t)$

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = Q_k(t) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где ω_k – собственная частота совместных колебаний системы;

$$Q_k(t) = \frac{1}{\rho_1 h_1 M_k^2} \int_b^a R_k(r) r dr,$$

$Q_k(t)$ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате $q_k(t)$;

$$M_k^2 = \int_b^a R_k^2 r dr + \frac{2}{a^2 - b^2} \frac{\rho h}{\rho h_1} \left[\int_b^a R_k r dr \right]^2 + \frac{2}{a^2 - b^2} \frac{\rho h}{\rho h_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\int_b^a R_k Z_0(k_n r) r dr \right]^2 = 0,$$

M_k^2 – нормирующий множитель собственной функции $R_k(r)$.

Таким образом, общее решение уравнения (1) для осесимметричных колебаний ($m = 0$) запишется следующим образом

$$w(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) \left[A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t Q_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \right].$$

Здесь A_k и B_k – определяются из начальных условий.

В заключение заметим, как это было отмечено в работе [1], что воздействие упругого дна на жидкость, а следовательно, и внешних нагрузок, приложенных к дну, эквивалентно действию некоторых вполне определенных поверхностных сил, приложенных к жидкости. Отсюда следует, что если в начальный момент времени движение идеальной жидкости в потенциальном поле массовых сил было потенциальным, то оно и будет оставаться потенциальным в последующие моменты времени независимо от возмущающей нагрузки, приложенной к дну сосуда.

Список литературы

- [1] *Петренко М.П.* Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикладная механика. 1969. Т.5, № 6. С. 44–50.

- [2] *Петренко М.П.* Вынужденные колебания жидкости и упругого днища цилиндрического бака // Прикладная механика. 1970. Т.6, № 6. С. 127–131.
- [3] *Пожалостин А.А.* Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном // Изв. вузов.Сер. Авиационная техника. 1963. № 4. С. 25–32.
- [4] *Лакиза В.Д.* Исследование динамических процессов в жестком цилиндрическом сосуде с упругим днищем, частично заполненном жидкостью // Прикладная механика. 2006. Т.42, № 11. С. 114–120.
- [5] *Карнаух А.Ю.* Собственные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью // Вестник Донецкого ун-та. Сер. А: Естественные науки. 2008. Вып.1. С. 114–120.

Karnauch A.Yu. *Forced oscillations of an elastic bottom and ideal fluid in a coaxial cylindrical tank* .In the linear statement the integro-differential equation of share oscillations is obtained. Fundamental frequencies and natural shapes of share rotationally symmetric oscillations of a flat elastic bottom and the ideal fluid in part filling a coaxial cylindrical tank with rigid walls are obtained. The generalized orthogonality of eigenfunctions is shown. Forced vibrations surveyed is elastic a bottom and an ideal fluid.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Качко Д. Л., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Исследована антиплоская задача о колебаниях электроупругого слоя, содержащего включение.

В пьезоэлектрических средах при электрическом и (или) механическом нагружении возникают поверхностные волны. Электроупругие волны распространяются вдоль границ пьезосред, и их характер может существенно отличаться от поведения чисто упругих волн. В связи с этим, большое практическое значение получают задачи, связанные с обнаружением дефектов в однородных средах, находящихся под воздействием электрических полей.

В работе исследуется динамическая задача о колебаниях электроупругой среды, занимающей некоторый объем $-\infty < x, z < +\infty, -H \leq y \leq 0$ ($H = 2h_1 + 2h_2$). На глубине $y = -2h_1$ имеется дефект в виде плоского, невесомого и бесконечно тонкого включения шириной $2a$. Условная граница между слоями толщиной $2h_1$ и $2h_2$ проходит по включению. Предполагается, что верхняя грань первого слоя подвержена некоторому механическому и электрическому воздействию, а нижняя грань второго слоя жестко сцеплена с недеформируемым основанием, металлизирована и закорочена [1].

В случае антиплоских колебаний исследуемого пакета однородных слоев (ось симметрии пьезокерамики класса *btt* параллельна поверхности среды $y = 0$) характеристики волны не будут зависеть от координаты z , и система дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных будет состоять из двух уравнений. Тогда рассматриваемая задача сведется к определению амплитуд механического смещения $w(x, y)$ и электрического потенциала $\varphi(x, y)$.

Решение системы ДУ при условии, что на поверхности слоя заданы сдвиговые напряжения τ_0 и электрическая индукция d_0 , построено в матричной форме

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2), \quad \mathbf{W} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{Q}_1 = (T_0, D_0)$, $\mathbf{Q}_2 = (\Delta T, \Delta D)$, $\mathbf{W}_1 = (W, \Phi)|_{y=0}$, $\mathbf{W}_2 = (W, \Phi)|_{y=-2h_1}$; ΔT , ΔD — трансформанты Фурье скачков сдвиговых напряжений $\Delta\tau$ и электрической индукции Δd на включении; W , Φ , T_0 , D_0 — трансформанты Фурье функций w , φ , τ_0 , d_0 соответственно.

В данном матрично-функциональном уравнении (МФУ) \mathbf{K} представляет собой блочную матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

После построения элементов \mathbf{K}_{ij} , матрицу (2) можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} R_{12} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} R_{12} & K_{11} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} K_{11} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon} R_{12} & \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} R_{12} - \frac{1}{\varepsilon} R_{22} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} K_{11} & \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} K_{11} - \frac{1}{\varepsilon} K_{21} \\ -K_{11} & -\frac{\varepsilon}{\varepsilon} K_{11} & L_{11} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} L_{11} \\ -\frac{\varepsilon}{\varepsilon} K_{11} & -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} K_{11} + \frac{1}{\varepsilon} K_{21} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon} L_{11} & \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} L_{11} - \frac{1}{\varepsilon} L_{21} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{sh2\sigma(h_1 + h_2)}{\sigma(1 + \kappa_0^2)\Delta_1}, & R_{22} &= \frac{sh2|\alpha|(h_1 + h_2)}{|\alpha|\Delta_2}, \\ K_{11} &= -\frac{sh2\sigma h_2}{\sigma(1 + \kappa_0^2)\Delta_1}, & K_{21} &= -\frac{sh2|\alpha|h_2}{|\alpha|\Delta_2}, \\ L_{11} &= -\frac{ch2\sigma h_1 sh2\sigma h_2}{\sigma(1 + \kappa_0^2)\Delta_1}, & L_{21} &= -\frac{ch2|\alpha|h_1 sh2|\alpha|h_2}{|\alpha|\Delta_2}; \\ \Delta_1 &= ch2\sigma(h_1 + h_2), & \Delta_2 &= ch2|\alpha|(h_1 + h_2); \\ \sigma &= \sqrt{\alpha^2 - \frac{\Omega^2}{1 + \kappa_0^2}}, & \kappa_0 &= \sqrt{\frac{e^2}{\varepsilon}}; \end{aligned}$$

α — параметр преобразования Фурье; Ω — приведенная частота колебаний; e, ε — безразмерные пьезоэлектрическая постоянная и диэлектрическая проницаемость материала соответственно.

Так как для построения решения системы интегральных уравнений (СИУ) динамической смешанной задачи необходимо знать нули и полюса элементов блочной матрицы \mathbf{K} и ее определителя, то представление этих элементов получено в виде отношения целых функций [1, 2, 3].

В случае, когда $\mathbf{Q}_1 = 0$, то есть отсутствуют механическая и электрическая нагрузки на поверхности среды, МФУ (1) имеет вид

$$\mathbf{K}_{22}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{W}_2. \quad (3)$$

На основе МФУ (3) строится СИУ

$$\int_{-a}^a \mathbf{k}(x - \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \mathbf{w}(x), \quad |x| \leq 2a, \quad y = -2h_1$$

относительно неизвестного вектора $\mathbf{q}(x)$ при заданном значении $\mathbf{w}(x)$ в области включения.

Здесь

$$\mathbf{q}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}_2(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \mathbf{w}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}_2(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Ядром полученного СИУ является

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \mathbf{K}_{22}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (4)$$

Решение СИУ (4) построено методом фиктивного поглощения. Выбор контура интегрирования σ_1 приведен в [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

Список литературы

- [1] *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
- [2] *Пряхина О.Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3. С.500–507.
- [3] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87 – 97.
- [4] *Бабешко В.А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256с.

Kachko D.L., Priahina O.D., Smirnova A.V. *Mathematical modeling of material properties and constructions.* Anti-flat task about fluctuations of electro-elastic layer with inclusions has been investigated in the article.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ

Кириллова Е.В.* , Сыромятников П.В. , Кармазин А.В.****

* *Университет Висбаден, Висбаден, Германия, kirillova@web.de*

*** *Южный научный центр РАН, Краснодар, Россия, syromyatnikov@math.kubsu.ru*

*** *Университет Висбаден, Висбаден, Германия, karmazin@itm.uka.de*

В работе рассматриваются пространственные гармонические колебания пакета упругих анизотропных слоев. Описываются методы расчета волновых полей в многослойном композите в ближней и дальней зонах при возбуждении поверхностным источником. Расчеты проводились для симметричных восьмислойных композитов, каждый слой которых представлен трансверсально-изотропным материалом. Обсуждаются преимущества и недостатки предложенных методов.

С практической точки зрения важной задачей является нахождение комплексных амплитуд колебаний на поверхности и в глубине композита, возбуждаемых поверхностными источниками различной конфигурации. Вектор механических перемещений точек среды может быть представлен в виде [1, 2]

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1)$$

где \mathbf{Q} — символ Фурье вектора поверхностных нагрузок, $\mathbf{K} = \|\|K_{mn}\|\|$ — символ Фурье матрицы Грина многослойной среды, Γ_1, Γ_2 — контуры интегрирования, частично отклоняющиеся от вещественных осей при обходе особенностей K_{mn} в соответствии с принципом предельного поглощения [2].

Непосредственное вычисление интегралов (1) для анизотропных сред наталкивается на большие трудности — подинтегральные функции в общем случае не имеют явного аналитического представления, являются сильно осциллирующими и имеют вещественные особенности, зависящие от полярного угла. Для преодоления этих сложностей был разработан ряд приемов, позволяющих вычислять аналогичного вида интегралы с приемлемой точностью. В работе [3] предложен алгоритм приближенного вычисления обратного преобразования Фурье (1) при заданном векторе нагрузок \mathbf{Q} , удовлетворяющем некоторым дополнительным условиям. В формуле (1) перейдем к цилиндрическим координатам $x_1 = r \cos \beta$, $x_2 = r \sin \beta$, $x_3 = z$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\beta = \arctg \frac{x_2}{x_1}$, $\alpha_1 = \alpha \cos \gamma$, $\alpha_2 = \alpha \sin \gamma$, $\gamma = \arctg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. Обозначая через $\tau = \gamma - \beta - \frac{\pi}{2}$, представим (1) в виде

$$\mathbf{u}(r, \beta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(iar \sin \tau) \alpha d\alpha d\tau. \quad (2)$$

Пусть $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma) = \mathbf{Q}(\alpha)$ и, кроме того, будем считать, что возможно представление \mathbf{Q} в виде суммы $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ + \mathbf{Q}^-$, где \mathbf{Q}^+ убывает в верхней полуплоскости, а \mathbf{Q}^- убывает в нижней полуплоскости соответственно. Рассмотрим функции $\mathbf{Q}^{(\pm)}$

$$\mathbf{Q}^{(\pm)}(\alpha, \tau) = \begin{cases} \mathbf{Q}^{\pm}(\alpha), & \tau \in [0, \varphi_0] \vee [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0] \vee [2\pi - \varphi_0, 2\pi], \\ \mathbf{Q}^+(\alpha) + \mathbf{Q}^-(\alpha), & \tau \in (\psi^{\pm} + \varphi_0, \psi^{\pm} + \pi - \varphi_0), \\ 0, & \tau \in (\pi - \psi^{\pm} + \varphi_0, 2\pi - \psi^{\pm} - \varphi_0), \end{cases}$$

$$\psi^+ = 0, \quad \psi^- = \pi, \quad r > 1, \quad \varphi_0 = \arcsin(1/r).$$

Используя данные функции и лемму Жордана, можно оценить вклад вещественных и ближайших к вещественной оси комплексных полюсов $\xi(\gamma)$ в интеграл (2)

$$\mathbf{u}^{\pm} = \frac{\pm i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} {}^{(\pm)} \operatorname{res} \mathbf{K}(\alpha, \gamma) \mathbf{Q}^{(\pm)}(\alpha, \tau) \alpha \exp(i\alpha r \sin \tau) \Big|_{\alpha=\xi_n(\gamma)} d\tau. \quad (3)$$

Регулярные вещественные полюса относятся к первому квадранту (знак «+»), нерегулярные (знак «-») — к четвертому. Однако данный метод работает только в ближней зоне и для осесимметричных источников.

Для преодоления этих ограничений был разработан подход, использующий несложные аналитические преобразования контурных интегралов и экономичные алгоритмы вычисления интегралов от осциллирующих функций пакета NAG [4]. Обозначим через \mathbf{F} интеграл

$$\mathbf{F}(\gamma, z, r, \beta) = \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(ir\alpha \sin \tau) d\alpha \quad (4)$$

и представим двойной интеграл (2) как повторный

$$\mathbf{u}(r, \beta, z) = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma, z, r, \beta) d\gamma. \quad (5)$$

Если удастся вычислить каким-либо образом функцию \mathbf{F} (4), то вычисление интеграла (5) уже не представляет сложностей, поскольку \mathbf{F} не имеет особенностей и слабо осциллирует по γ , когда r не слишком велико (ближняя зона). Рассмотрим асимптотики $A_{ij}(\gamma, z) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_{ij}(\alpha, \gamma, z) \alpha$. Тогда, вычислив $A_{ij}(\gamma, z)$, при больших $\alpha \geq R \gg 1$ можно полагать

$$K_{ij}(\alpha, \gamma, z) \approx A_{ij}(\gamma, z) / \alpha. \quad (6)$$

Пусть $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \tilde{\mathbf{F}}_R$, где

$$\mathbf{F}_R(\gamma, z, r, \beta) = \int_{\Gamma_R} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \exp(ir\alpha \sin \tau) d\alpha. \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_R(\gamma, z, r, \beta) = \mathbf{A}(\gamma, z) \int_R^\infty \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \exp(ir\alpha \sin \tau) d\alpha. \quad (8)$$

Здесь $\Gamma_R : 0 \leq \operatorname{Re} \Gamma_R \leq R$ — часть контура Γ , ограниченная некоторым большим вещественным параметром R . Необходимость использования асимптотик (6) связана с тем, что при больших α вычисление матрицы \mathbf{K} может представлять собой достаточно громоздкую вычислительную задачу.

Другой проблемой является значительное время вычисления матрицы \mathbf{K} даже при малом количестве слоев N . Здесь эффективным оказался следующий подход. Вычислительный процесс разбивается на два этапа. На первом этапе на заранее определенной сетке узлов (α_n, γ_m) вычисляется массив $K_{ij}^{nm} = K_{ij}(\alpha_n, \gamma_m)$. По γ сетка может быть взята равномерной: $\gamma_m = \frac{2\pi}{M}m$; $m = 0, 1, \dots, M$; $M \approx 10^3$. Сетка по α — неравномерная, с наибольшей плотностью вблизи вещественных полюсов и значительно разреженная в области больших α , где функции K_{ij} изменяются слабо. Контур $\Gamma = \Gamma(\gamma)$ при отсутствии во всем интервале углов $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ на данной частоте ω обратных волн может быть выбран для всех γ с одинаковым отклонением в комплексную плоскость. При $\alpha \geq R$ используются асимптотики (6) и формулы (8). В целом интерполяционная сетка может содержать порядка 10^6 узлов для одного элемента матрицы, что вполне соответствует ресурсам обычного персонального компьютера. Заметим, что при равномерной сетке по α потребовалось бы в общей сложности $10^8 \div 10^9$ узлов для получения удовлетворительной точности вычисления интегралов (5). На втором этапе основное время при интегрировании (4), (5) уходит на интерполяцию матрицы K и вычисление вектора нагрузки Q . Для вычисления интегралов (4) использовалась адаптивная программа интегрирования осциллирующих функций D01AKF [4]. Для расчета (5) можно использовать практически любые квадратурные формулы, поскольку сходимость интегралов (5) существенно быстрее.

В дальнейшей зоне применялся метод стационарной фазы [5]. Асимптотика интеграла $u(r, \beta) = \int_{\tau^-}^{\tau^+} U(\tau, \beta) \exp(ir k(\tau, \beta)) d\tau$ при $r \rightarrow \infty$ определяется характером фазовой функции $k(\tau, \beta) = \xi(\theta) \sin \tau$ с параметром β . Главный член асимптотики, определяемый внутренней невырожденной стационарной точкой τ_0 , имеет вид

$$\mathbf{u} = \frac{i}{\sqrt{2\pi r |k''(\tau_0)|}} \operatorname{res} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \alpha \Big|_{\alpha=\xi(\gamma_0)} \exp \left[ir k(\tau_0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn}(k''(\tau_0)) \right]. \quad (9)$$

Асимптотическое представление (9) оказывается работоспособным уже на расстоянии 30–50 длин волн от источника.

В численных экспериментах рассматривались два симметричных восьми- и четырехслойных композита $[+45/-45/0/90]_S$, $[+45_6/-45_6]_S$ соответственно, каждый слой которых представлен трансверсально-изотропным материалом AS4/3502 [6]. Материал может быть отнесен к ромбической сингонии с матрицей упругих модулей C_{ij} : $C_{11} = 1.308$, $C_{12} = C_{13} = 0.05263$, $C_{22} = C_{33} = 0.1299$, $C_{23} = 0.04556$, $C_{44} = 0.0375$, $C_{55} = C_{66} = 0.0597$ ($\times 10^{12}$ Па); плотность материала

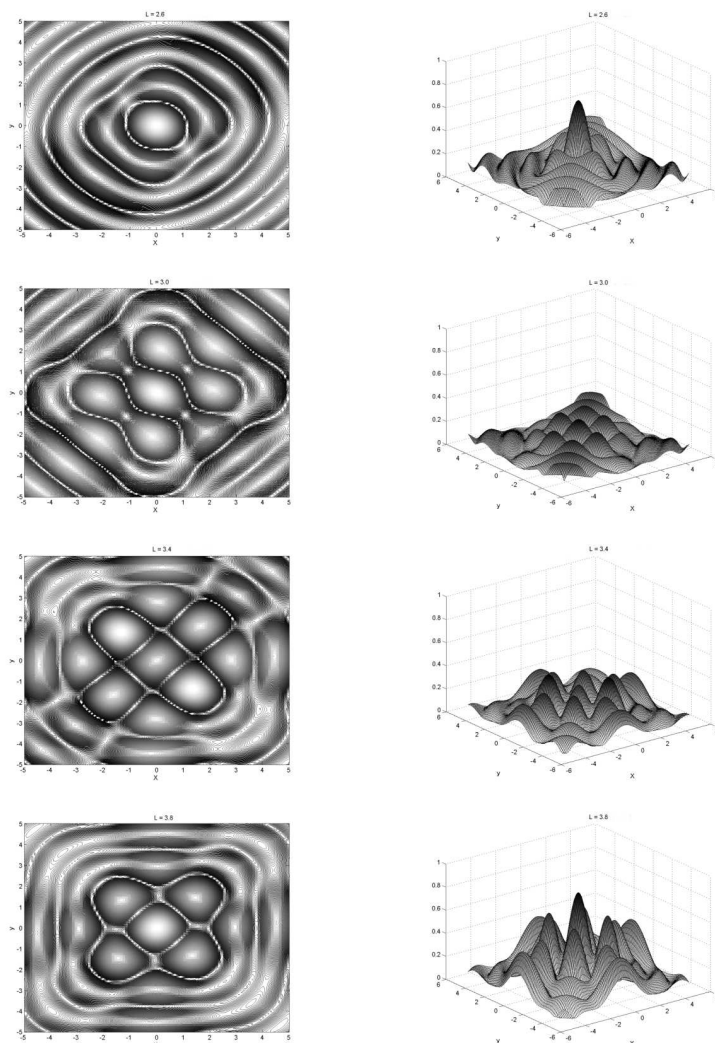


Рис. 1. Амплитуды вектора перемещений на поверхности композита.

$\rho = 1.578 \text{ kg/m}^3$. Высоты слоев композита одинаковы $h_i = 1/N$. Каждый слой повернут вокруг оси OZ на угол, соответствующий технической нотации. Нижняя граница слоя свободна от механических напряжений.

На Рис. 1 в виде линий уровней (слева) и поверхностей (справа) показаны нормированные амплитуды вектора перемещений $u = \max_{0 \leq t \leq 2\pi/\omega} |\mathbf{u}(x, y, 0) \exp(i\omega t)|$ на поверхности восьмислойного композита $[+45/-45/0/90]_S$ при частоте $\omega = 3$, рассчитанные по формулам (4), (5) для случая равномерной нагрузки $q(x, y) = 1$, заданной в квадрате $-L/2 \leq x, y \leq L/2$ при $L/h = 2,6; 3,0; 3,4; 3,8$.

Как видно из этого рисунка, картина распределения амплитуд с увеличением стороны квадрата L изменяется весьма существенным образом.

Наибольшие расхождения между подходами, описываемыми формулами (4), (5) и (3), обнаруживаются в непосредственной близости от источника. преимуще-

ство подхода (3) состоит в возможности анализа вклада отдельных мод и сравнительной простоте вычислений. Расчеты по формулам (4), (5) более точны, но и более трудоемки, источник при этом может иметь произвольный допустимый вид.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, (06-01-00295-а), (06-08-00671-а), (06-08-96635-р-юг-а), (07-01-1208-офи), (08-01-99013-р-офи), (08-08-00447-а), проекта НШ-4839.2006.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

Список литературы

- [1] Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. О смешанных задачах для термоэластостатических сред с разрывными граничными условиями // ДАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 1–6.
- [2] Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [3] Сыромятников П.В., Ратнер С.В. Интегральные представления термоэластостатических полей в многослойных средах с плоскими осесимметричными неоднородностями // Вестник ЮНЦ РАН. 2008. Т. 4. № 2. С. 12–20.
- [4] © The Numerical Algorithms Group Ltd, Oxford UK. 2001. The NAG Fortran Library, Mark 20.
- [5] Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977, 386 с.
- [6] Lei Wang, Yuan F.G. Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Composites Science and Technology. 2007. No. 67. P. 1370–1384.

Kirillova E.V., Syromyatnikov P.V., Karmazin A.V. *Modeling of elastic oscillations of multilayered anisotropic composites.* In work are considered spatial harmonic oscillations of a package of elastic anisotropic layers. The methods of computations of wave fields in a multilayered composite in near and far zones with excitation by a surface source are described. The calculations were carried out for symmetric composites with eight layers, which each layer is transversal-isotropic material. The advantages and imperfections of the offered methods are discussed.

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ФОРМЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Ковалев В. А.* , Радаев Ю. Н.**

* *Московский городской университет управления Правительства Москвы*

** *Самарский государственный университет*

Рассматривается напряженно-деформированное состояние идеально пластического тела в случае, когда выполняется условие полной пластичности, т.е. когда пластическое течение происходит на ребре призмы Кулона—Треска. Уравнения равновесия для указанного случая впервые были получены Д.Д. Ивлевым в 1959 г. Эти уравнения связывают наибольшее (наименьшее) главное напряжение с директором, указывающим главное направление тензора напряжений, соответствующее этому главному напряжению. В представляемой работе с помощью одной явной формы определяющего уравнения для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, полученной на основе нелинейного трехчленного разложения В.В. Новожилова, найдена новая форма пространственных уравнений равновесия. Указанные уравнения, в отличие от пространственных уравнений Д.Д. Ивлева, связывают наибольшее главное нормальное напряжение с приращениями пластических деформаций. Поэтому появляется возможность исключить директор, указывающий главное направление тензора напряжений, соответствующее наибольшему главному напряжению, из формулировки пространственной задачи, поставив ее чисто в терминах приращений пластических деформаций. Полученные новые пространственные соотношения математической теории идеальной пластичности могут быть использованы для исследования трехмерной кинематики идеально пластического течения и решения прикладных пространственных задач теории пластичности.

1. Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает [1], [2], что в шестимерном пространстве напряжений вектор, представляющий тензор приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, ортогонален регулярной поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ в данном напряженном состоянии $\boldsymbol{\sigma}$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\lambda}. \quad (1)$$

Условие текучести Треска или условие максимального касательного напряжения выражается в терминах главных касательных напряжений в форме

$$\max \{|\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3|\} = k, \quad (2)$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге, величины (σ_j — главные напряжения)

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

есть главные касательные напряжения. В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (2), представляет собой правильную шестигранную призму (призма Кулона—Треска), ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства. Кривая текучести (сечение призмы

Кулона—Треска девиаторной плоскостью ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат и со стороной равной $(2\sqrt{2/3})k$. Используя главные касательные напряжения, уравнение призмы может быть также представлено в виде

$$[\tau_1^2 - k^2] [\tau_2^2 - k^2] [\tau_3^2 - k^2] = 0. \quad (3)$$

Ассоциированный закон течения (1) однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Для напряженного состояния, которое соответствует ребру призмы Кулона—Треска (угловая точка), Койтер в 1953 г. предложил использовать обобщенный ассоциированный закон течения: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести $f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ каждая из которых дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластических деформаций. Обобщенный ассоциированный закон течения имеет вид [3]

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial f_\gamma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\gamma, \quad (4)$$

где выполняются условия $d\lambda_\gamma > 0$ ($f_\gamma = 0$, $df_\gamma = 0$), $d\lambda_\gamma = 0$ ($f_\gamma = 0$, $df_\gamma < 0$ или $f_\gamma < 0$).

Используя условия текучести Треска (3), из уравнения (4) находим

$$d\varepsilon_{ij}^P = \sum_{\gamma} \text{sgn}(\tau_\gamma) \frac{\partial \tau_\gamma}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где $d\lambda_\gamma > 0$, если $\text{sgn}(\tau_\gamma)\tau_\gamma = k$ и $d\tau_\gamma = 0$; $d\lambda_\gamma = 0$, если $\text{sgn}(\tau_\gamma)\tau_\gamma = k$ и $\text{sgn}(\tau_\gamma)d\tau_\gamma < 0$ или $\text{sgn}(\tau_\gamma)d\tau_\gamma < k$. Индекс γ пробегает значения 1, 2, 3, однако суммирование в правой части (5) распространяется лишь на те значения γ , для которых $\text{sgn}(\tau_\gamma)\tau_\gamma = k$ и $d\tau_\gamma = 0$, т.е. в правой части содержится не более двух слагаемых.

Обратимся к исследованию уравнений обобщенного ассоциированного закона течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска, а третье главное напряжение является максимальным: $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$. Ясно, что при этом имеет место равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$. В терминах главных касательных напряжений этот случай характеризуется выполнением условий $\tau_1 = -k$, $\tau_2 = k$, $\tau_3 = 0$.

Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} (\mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений) является главным. Следовательно, при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска, т.е. в состоянии полной пластичности, имеется некоторая доля произвола при выборе собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} , так как они определены с точностью до поворота в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} . Их преимущественное положение в этой плоскости указывается ориентацией собственных векторов тензора

приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, который в силу обобщенного ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и обладает, поскольку, вообще говоря, $d\varepsilon_1 \neq d\varepsilon_2$, уникальным триэдром главных направлений. Таким образом, обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона—Треска, устанавливает совпадение только одной из трех главных осей тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, накладывая тем самым минимум кинематических ограничений. Это обстоятельство будем в дальнейшем характеризовать термином "1/3-соосность" тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$.

Для течения на ребре призмы Кулона—Треска "1/3-соосность" тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ достаточна для их соосности в том смысле, что существует хотя бы одна тройка взаимно ортогональных направлений, которая будет главной как для тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, так и для тензора $\boldsymbol{\sigma}$.

2. Условие "1/3-соосности" тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, приводит к важным тензорным соотношениям.

Пусть имеются два симметричных тензора второго ранга \mathbf{A} и \mathbf{B} . Обозначим через a_i и b_i собственные значения тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} , занумеровав их в порядке убывания: $a_3 \leq a_2 \leq a_1$, $b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Тогда собственные значения девиатора \mathbf{A}' могут быть вычислены в тригонометрической форме:

$$a'_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}|\mathbf{A}'| \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \quad a'_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}|\mathbf{A}'| \sin\alpha, \quad a'_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}|\mathbf{A}'| \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right), \quad (6)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2a_2 - a_1 - a_3}{\sqrt{3}(a_1 - a_3)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}\right),$$

$$|\mathbf{A}'| = \frac{1}{6} \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2}.$$

Угол α называется "углом вида" тензора \mathbf{A} . Аналогичные формулы справедливы и для тензора \mathbf{B} . Вводя "направляющие" тензоры $\widetilde{\mathbf{A}}' = \mathbf{A}'/|\mathbf{A}'|$, $\widetilde{\mathbf{B}}' = \mathbf{B}'/|\mathbf{B}'|$, можно показать, что если главные оси тензора \mathbf{B} являются также главными осями тензора \mathbf{A} , то направляющие тензоры связаны уравнением (см. [4], с. 78–92)

$$\widetilde{\mathbf{A}}' = \frac{1}{\cos 3\beta} \left[\cos(2\beta + \alpha) \widetilde{\mathbf{B}}' + \sqrt{3} \cos(\beta - \alpha) \left(\widetilde{\mathbf{B}}' \cdot \widetilde{\mathbf{B}}' - \frac{2}{3} \mathbf{I} \right) \right], \quad (7)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{2b_2 - b_1 - b_3}{\sqrt{3}(b_1 - b_3)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{6}\right).$$

Эту формулу обычно называют трехчленной формулой Новожилова. При ее выводе предполагается, что все собственные значения тензора \mathbf{B} различны между собой. Угол $\alpha - \beta$ называется фазой подобия девиаторов \mathbf{A}' , \mathbf{B}' . Если этот угол становится равным нулю, то направляющие тензоры будут равны $\widetilde{\mathbf{A}}' = \widetilde{\mathbf{B}}'$.

В случае $a_1 = a_2$ в уравнении (7) следует положить $\alpha = \pi/6$. Если $b_1 = b_2$, то трехчленное соотношение (7) между тензорами \mathbf{A}' и \mathbf{B}' не имеет места, за исключением того случая, когда $a_1 = a_2$. Если одновременно $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, то трехчленное соотношение приводится к равенству направляющих тензоров.

Применяя полученные результаты в случае $\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{B} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, приходим к уравнению, тензорная запись которого имеет вид

$$\tilde{\mathbf{s}} = \frac{1}{\cos 3\psi} \left[\cos(2\psi + \vartheta) \widetilde{d\boldsymbol{\varepsilon}^P} + \sqrt{3} \cos(\psi - \vartheta) \left(\widetilde{d\boldsymbol{\varepsilon}^P} \cdot \widetilde{d\boldsymbol{\varepsilon}^P} - \frac{2}{3} \mathbf{I} \right) \right]. \quad (8)$$

Здесь фаза ϑ (угол вида напряженного состояния) определяет собой угол наклона вектора, представляющего девиатор тензора напряжений \mathbf{s} , к соответствующей оси чистого сдвига. Для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, этот угол постоянен. В самом деле, угол ϑ отсчитывается в девиаторной плоскости пространства главных напряжений от линии чистого сдвига, ортогональной проекции на девиаторную плоскость второй координатной оси этого пространства. Для ребра призмы Кулона—Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2k$ имеем $\vartheta = \pi/6$. Кроме того, для указанных состояний выполняется равенство $\tilde{\mathbf{s}} = \sqrt{3}(2k)^{-1}\mathbf{s}$.

Следовательно, с учетом вышеизложенного, уравнение (8) можно представить в следующем виде

$$\mathbf{s} = \frac{2k}{\cos 3\psi} \left[\cos \left(2\psi + \frac{\pi}{6} \right) \frac{\sqrt{2/3} d\boldsymbol{\varepsilon}^P}{\sqrt{\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)}} + 2 \cos \left(\psi - \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P}{\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right) \right]. \quad (9)$$

Здесь угол $\psi - \vartheta = \psi - \pi/6$ называется фазой подобия девиатора тензора напряжений \mathbf{s} и тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$; угол ψ выражается согласно

$$\psi = \arctg \frac{2d\varepsilon_2^P - d\varepsilon_1^P - d\varepsilon_3^P}{\sqrt{3}(d\varepsilon_1^P - d\varepsilon_3^P)} \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{6} \right). \quad (10)$$

Отметим, что вывод уравнения (9) законен только при выполнении условий $d\varepsilon_1^P \neq d\varepsilon_2^P \neq d\varepsilon_3^P \neq d\varepsilon_1^P$, т.е. когда все собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ различны между собой. Заметим, что действительные приращения ds_1, ds_2, ds_3 равны нулю, если процесс нагружения развивается вдоль ребра призмы Кулона—Треска.

Тензорное уравнение (9) является, по существу, наиболее общей формой определяющей зависимости между напряжениями и приращениями пластических деформаций для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, основывающейся на обобщенном законе пластического течения, ассоциированном с условием пластичности Треска.

3. Трехмерные уравнения равновесия для рассматриваемого случая впервые были получены Д.Д. Ивлевым в 1959 г. и имеют вид

$$\text{grad} \sigma_3 \pm \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Эти уравнения связывают наибольшее (наименьшее) главное нормальное напряжение σ_3 с директором \mathbf{n} , указывающим главное направление тензора напряжений, соответствующее этому (третьему по счету) главному напряжению.

Уравнения Д.Д. Ивлева достаточно хорошо изучены, поскольку они отражают формальную статическую определенность уравнений математической теории идеальной пластичности при выполнении условия полной пластичности. Они классифицируются как квазилинейная гиперболическая система трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Геометрия уравнений

Д.Д. Ивлева такова, что нормали к характеристическим элементам образуют конус, ось которого направлена вдоль третьего главного направления тензора напряжений, и плоскость, ортогональную оси конуса.

Найденная выше определяющая зависимость (9) позволяет получить новую форму трехмерных уравнений равновесия. Для этого достаточно принять во внимание, что $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{grad} \sigma_3$, и при подсчете $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$ учесть

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P) &= d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot (\nabla \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P) + (d\boldsymbol{\varepsilon}^P \otimes \nabla) \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P, \\ \nabla(\operatorname{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)) &= 2d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}^P \otimes \nabla). \end{aligned}$$

Полученные таким образом уравнения, в отличие от пространственных уравнений Д.Д. Ивлева (11), связывают наибольшее главное нормальное напряжение σ_3 с приращениями пластических деформаций. Поэтому появляется возможность исключить директор \mathbf{n} , указывающий главное направление тензора напряжений, соответствующее наибольшему главному напряжению, из формулировки пространственной задачи, поставив ее исключительно в терминах приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$.

Полученные новые пространственные соотношения математической теории идеальной пластичности могут быть использованы для исследования трехмерной кинематики идеально пластического течения и решения прикладных задач теории пластичности.

Авторы благодарят проф. Д.Д. Ивлева за постоянное внимание к представленной работе.

Список литературы

- [1] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
- [2] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [3] Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. V. 11, №3. 1953. P. 350-354.
- [4] Новожиллов В.В. Вопросы механики сплошной среды. Л.: Судостроение, 1989. 396 с.

Kovalev V.A., Radayev Yu.N. *A new form of the three-dimensional equilibrium equation for a perfectly plastic solid.* Basic equations of the incremental mathematical theory of perfect plasticity for three-dimensional states are discussed. Constitutive equations consequent to the generalized flow rule formulated for an edge of the Coulomb–Tresca prism are derived. An explicit form of the three-dimensional constitutive equations for stress states corresponding to an edge of the Coulomb–Tresca prism is obtained, thus allowing to come to a new form of the three-dimensional equilibrium equation for a perfectly plastic solid. The obtained equations can be used as a new instrument for study of three-dimensional problems of the perfect plasticity.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМИ ОТСЕКАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

Кононов Ю.Н.

Донецкий национальный университет, Украина

На основании модального анализа выведена счетная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения твердого тела и упругих пластинок, разделяющих идеальную жидкость в цилиндрических отсеках. Из положительной определенности потенциальной энергии получены условия устойчивости поступательных и вращательных колебаний твердого тела с упругими отсеками, содержащими идеальную жидкость. Показано, что предварительным натяжением и величиной изгибной жесткости можно стабилизировать неустойчивое движение рассматриваемой механической системы.

Постановка задачи. Под упругими отсеками будем подразумевать вертикальный цилиндрический сосуд с жесткими стенками и дном, разделенный поперечными упругими пластинками на вертикальные отсеки, содержащие жидкость. Для общности постановки рассмотрим механическую систему, состоящую из m идеальных несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_i , заполняющими цилиндрическую полость произвольного поперечного сечения S до глубин h_i ($i = \overline{1, m}$). На свободной поверхности верхней жидкости ($i = 1$) и на поверхностях раздела (внутренних поверхностях) многослойной жидкости могут находиться упругие мембраны или пластинки с растягивающими усилиями T_i в срединной плоскости. Мембраны и пластинки жестко закреплены по краю. Пластинки считаются изотропными и обладают изгибной жесткостью D_i . В дальнейшем при $D_i = 0$ под пластинкой будем подразумевать мембрану с растягивающим усилием T_i . Движения жидкости и пластинок будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, расположенной так, что плоскость Oxy находится на невозмущенной свободной поверхности, а ось Oz направлена вдоль образующей цилиндрической полости противоположно вектору ускорения силы тяжести \vec{g} и проходит через центр масс поперечного сечения S . Исследуем устойчивость движения рассматриваемой механической системы при поступательных и вращательных колебаниях твердого тела. Задачу будем рассматривать в линейной постановке, считая движения жидкостей потенциальными, а совместные колебания жидкости и пластинок безотрывными.

Уравнения поступательного и вращательного движений твердого тела с упругими отсеками, содержащими идеальную жидкость. Уравнения малых колебаний вдоль оси Ox под действием упругой силы $F_x = -Cx$ твердого тела с многослойной жидкостью и упругими пластинками имеют вид [1]

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + Cx &= - \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{ik} \ddot{p}_k, \\ \mu_k(\ddot{p}_k + \sigma_k^2 p_k) &= -\ddot{x} \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i \tilde{\alpha}_{ik}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mu_k &= \sum_{i=1}^m \sum_n N_n^2 (a_{in}^* \zeta_{ink} - b_{in} \zeta_{i+1nk} - b_{i-1n} \zeta_{i-1nk} b_{in} \zeta_{ink}), \quad \zeta_{ink} = \int_S w_{ij} \Psi_n ds / N_n^2, \\ N_n^2 &= \int_S \Psi_n ds, \quad \tilde{\alpha}_{ij} = \int_S x w_{ij} ds = \sum_n C_n \zeta_{ink}, \quad C_n = \int_S x \Psi_n ds / N_n^2, \\ \Delta \rho_i &= \rho_i - \rho_{i-1} \quad (\rho_0 = 0), \quad a_{in}^* = a_{in} + k_n k_{oi}, \quad \kappa_{in} = k_n h_i, \\ a_{in} &= \rho_i \coth \kappa_{in} + \rho_{i-1} \coth \kappa_{i-1n}, \quad b_{in} = \rho_i / \sinh \kappa_{in},\end{aligned}$$

M – масса твердого тела, многослойной жидкости и упругих пластинок; Ψ_n и k_n – собственные функции и собственные числа колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде; w_{ij} и σ_j^2 – собственные формы и собственные частоты колебаний упругих пластинок и многослойной жидкости в неподвижном сосуде [1, 2].

Уравнения малых колебаний вокруг неподвижной оси под действием силы тяжести твердого тела с многослойной жидкостью и упругими пластинками (физический маятник) запишутся следующим образом [2, 3]

$$\begin{aligned}J\ddot{\theta} + k^2\theta &= - \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\Omega}_{ik} \ddot{p}_k + g \tilde{\alpha}_{ik} p_k), \\ \mu_k (\ddot{p}_k + \sigma_k^2 p_k) &= \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i (\tilde{\Omega}_{ik} \ddot{\theta} + g\theta).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{ik} &= \sum_n C_n \zeta_{ink} \Omega_{in}, \quad \Omega_{in} = \frac{\rho_{i-1} f_{i-1n} + \rho_i f_{in}}{\Delta \rho_i} + H_i + l_0, \\ H_i &= \sum_{k=1}^{i-1} h_k \quad (H_1 = 0), \quad f_{in} = \frac{2 \tan \frac{\kappa_{in}}{2}}{\kappa_{in}},\end{aligned}$$

J – момент инерции твердого тела, многослойной жидкости и упругих пластинок; l_0 – расстояние от оси вращения до начала подвижной системы координат $Oxyz$ [3].

Уравнения (1)-(2) являются довольно общими и могут найти применение во многих теоретических и практических задачах [1-3].

Необходимые условия устойчивости малых колебаний рассматриваемых механических систем можно найти из условий действительности корней частотных уравнений, полученных для уравнений (1)-(2). Эти частотные уравнения являются довольно сложными для аналитических исследований. Поэтому условия устойчивости удобно найти из положительной определенности функционала потенциальной энергии [1-3].

Устойчивость движения твердого тела с упругими отсеками, содержащими идеальную жидкость.

Для исследований устойчивости положения равновесия рассматриваемых двух механических систем запишем потенциальную энергию, которая состоит из потенциальной энергии твердого тела, многослойной жидкости и упругих пластинок. В случае поступательных движений твердого тела потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} C x^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k p_k^2(t),\tag{3}$$

а в случае вращательных –

$$\Pi = \frac{1}{2} \tilde{k} \theta^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \tilde{p}_k^2(t),\tag{4}$$

где

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^m \sum_n N_n^2 \zeta_{ink}^2 [g\Delta\rho_i + (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2].$$

$$\tilde{k} = k^2 - g^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_k^2}{\gamma_k}, \quad \tilde{\gamma}_k = \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i \sum_n N_n^2 \zeta_{ink} C_n.$$

Квадратичная форма (3) будут положительно определенной при

$$C > 0, \quad \gamma_k > 0, \quad (5)$$

а квадратичная форма (4) –

$$\tilde{k} > 0, \quad \gamma_k > 0. \quad (6)$$

Второе неравенство в (5) и соответственно в (6) определяет условие устойчивости положения равновесия упругих пластинок и многослойной жидкости в неподвижном цилиндрическом сосуде. Для выполнения этого неравенства достаточно потребовать, чтобы

$$g\Delta\rho_i + (D_i k_1^2 + T_i) k_1^2 > 0. \quad (7)$$

Так как собственные числа k_n образуют монотонно возрастающую числовую последовательность [1]. При естественной стратификации ($\Delta\rho_i \geq 0 \forall i$), т.е. когда более тяжелая жидкость находится ниже менее тяжелой неравенство $\gamma_k > 0$ всегда выполнено. Неустойчивость может возникнуть, когда нарушается условие $\Delta\rho_i \geq 0$.

Первое неравенство в (6) имеет вид

$$k^2 > g^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_k^2}{\gamma_k}. \quad (8)$$

При $T_i \rightarrow \infty$ или $D_i \rightarrow \infty$ величина $\gamma_k \rightarrow \infty$ и правая часть неравенства (8) стремится к нулю. Следовательно, величинами T_i и D_i можно добиться выполнения этого неравенства для любых значений параметров твердого тела, многослойной жидкости и упругих пластинок (при условии, что $k^2 > 0$), и тем самым стабилизировать неустойчивое положение равновесия физического маятника.

Неравенство (8) включает в себя, как частный случай, условие устойчивости положения равновесия физического маятника, содержащего многослойной идеальную жидкостью с упругой пластинкой или мембраной на свободной поверхности. В этом случае в (8) следует положить $T_i = D_i = 0$ для $i \neq 1$. Полученное неравенство позволяет оценить влияние стратификации, произошедшей в однородной жидкости с упругой пластинкой на свободной поверхности, на устойчивость положения равновесия физического маятника.

При отсутствии пластинок ($T_i = D_i = 0 \forall i$) и естественной стратификации ($\Delta\rho_i \geq 0$) неравенство (8) при наличии свободной поверхности вырождается в неравенство

$$k^2 > g\rho_m J_s, \quad (9)$$

а в случае полного заполнения –

$$k^2 > g(\rho_m - \rho_1) J_s$$

Здесь $J_s = \int_S x^2 ds$ – момент инерции поперечного сечения цилиндрической полости.

Для однородной жидкости ($m = 1$ или $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = \rho$) неравенство (8) совпадает с известным условием устойчивости [3], которое хорошо известно специалистам по теории корабля, перевозящего жидкие грузы.

Список литературы

- [1] Кононов Ю.Н. Устойчивость и стабилизация движения твердого тела с полостью, содержащей многослойную жидкость, разделенную упругими пластинками // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. IX Междунар. конф. Ростов н/Д, 2005: Из-во ООО "ЦВВР Ростов-на-Дону 2006. Т.2. С. 151–153.
- [2] Шевченко В.П., Кононов Ю.Н. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную идеальную жидкость. Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика / Под ред. В.В. Мелешко, В.Н. Олейник. Киев: Наук. думка, 2007. С. 348–361.
- [3] Кононов Ю.Н. Об устойчивости равновесия физического маятника, содержащего многослойную жидкость, разделенную упругими пластинками // Механика твердого тела, 2002. Вып.32. С. 203–207.

Kononov Yu.N. *On the dynamic stabilities of a rigid body with the elastic compartments containing a fluid.* On the basis of the modal analysis the countable system of the ordinary differential equations of forced vibrations of the elastic plates located on free and interior surfaces of a multilayered ideal fluid is deduced. The structural fluid is cylindrical to a vessel of the arbitrary cross-section, making translational oscillations. Stability conditions in a problem about transverse oscillations of a rigid body under an operation of elastic force and in a problem about a physical pendulum are obtained. It is shown an opportunity of stabilization of a labile position of an equilibrium.

О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВУКРАТНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

Куракин Л. Г.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт, Владикавказ*

Рассмотрена задача об устойчивости равновесия автономной системы дифференциальных уравнений в критическом случае двукратного нулевого корня (жорданова клетка). А. М. Ляпунов [1], применяя свой первый метод, получил критерии устойчивости при любых нелинейных вырождениях системы. Большинство из подслучаев, на которые разбивается эта задача, им исследовано также и прямым методом. Функции Ляпунова для остальных подслучаев до сих пор не были построены.

В данной работе найдена часть этих функций. Для некоторых вырождений системы это позволило предложить новый алгоритм определения устойчивости равновесия. Он задается через алгебраические операции над коэффициентами ряда Тейлора системы, в то время, как алгоритм, указанный А.М. Ляпуновым требует вычисления квадратур.

1. Постановка задачи. Алгоритм А. М. Ляпунова определения устойчивости равновесия [1].

Рассматривается автономная вещественная двумерная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x' &= y + X(x, y), \\y' &= Y(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

$$X(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j, \quad Y(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j,$$

где X, Y — аналитические в некоторой окрестности нуля $\Omega \in R^2$ функции, разложение которых в ряд Тейлора начинается со слагаемых не ниже второй степени.

Задача об устойчивости нулевого равновесия этой системы возникает естественным образом при исследовании колебаний пары связанных осцилляторов. Линейного приближения недостаточно для ее решения, так как собственное значение матрицы линеаризации системы (1) — двукратный нуль с индексом два, лежит на мнимой оси.

Этот критический случай устойчивости был исследован А.М. Ляпуновым в 1893 году в работе [1]. При изучении архивов А. М. Ляпунова в 1954 году выяснилось, что им рассматривался и случай m -мерной системы дифференциальных уравнений ($m > 2$)

$$\dot{u} = F(u), \quad F(0) = 0, \quad u \in R^m,\tag{2}$$

когда все собственные значения матрицы линеаризации $F'(0)$, кроме двукратного нулевого собственного значения с индексом два, лежат строго в левой полуплоскости.

А.М. Ляпунов [1] исследовал устойчивость равновесия системы (1) при любых функциях X, Y . Им, в частности, установлено, что оно неустойчиво, когда $b_{20} \neq 0$, а также при $b_{20} = 0$, если $K \geq 0$, где $K = (2a_{20} - b_{11})^2 + 8b_{30}$.

Пусть выполнены условия

$$b_{20} = 0, \quad K < 0. \quad (3)$$

В этом случае в работе [1] указан алгоритм последовательного вычисления величин g_k ($k = 2, 3, \dots$). Заключение об устойчивости равновесия системы (1) делается по знаку первой ненулевой из них. Этот алгоритм состоит в следующем.

Заменой переменных

$$x \rightarrow (-b_{30})^{1/2} x, \quad y \rightarrow (-b_{30})^{1/2} (y + a_{20}x^2) \quad (4)$$

приводим систему (1) к виду:

$$\begin{aligned} x' &= y + \sum_{k \geq 3} X^k(x, y), \\ y' &= -x^3 + bxy + \sum_{k \geq 3} Y^{k+1}(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где $b^2 < 8$; $X^k(x, y), Y^{k+1}(x, y)$ — квазиоднородные многочлены:

$$X^k(x, y) = \sum_{i+2j=k} a_{ij} x^i y^j, \quad Y^{k+1}(x, y) = \sum_{i+2j=k+1} b_{ij} x^i y^j.$$

Пусть $Cs\theta$ и $Sn\theta$ — периодические функции, являющиеся решениями задачи Коши

$$\begin{aligned} Cs'\theta &= -Sn\theta, & Sn'\theta &= Cs^3\theta, \\ Cs\ 0 &= 1, & Sn\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Через $J(\theta)$ обозначим интеграл:

$$J(\theta) = \int_0^\theta \frac{bSn^2\theta Cs\theta d\theta}{1 + bSn\theta Cs^2\theta}.$$

Введем замену переменных

$$x = re^{J(\theta)} Cs\theta, \quad y = -r^2 e^{2J(\theta)} Sn\theta.$$

Исключая время t , приходим к уравнению для функции $r(\theta)$:

$$r'(\theta) = R_2(\theta)r^2(\theta) + R_3(\theta)r^3(\theta) + \dots, \quad (6)$$

где каждая функция $R_i(\theta)$, $i = 2, 3, \dots$ является конечной суммой слагаемых вида:

$$L_{p,q,\ell}(\theta) = e^{J(\theta)} \frac{bSn^p\theta Cs^q\theta}{(1 + bSn\theta Cs^2\theta)^\ell}.$$

Здесь p, q, ℓ — целые неотрицательные числа.

Решение уравнения (6) разлагаем в ряд по произвольной постоянной c :

$$r(\theta) = c + u_2(\theta)c^2 + u_3(\theta)c^3 + \dots$$

Находим последовательно функции $u_2(\theta), u_3(\theta), \dots$:

$$\begin{aligned} u_2(\theta) &= \int_0^\theta R_2(\theta_1) d\theta_1, & u_3(\theta) &= u_2^2(\theta) + \int_0^\theta R_3(\theta_1) d\theta_1, \\ u_4(\theta) &= \frac{1}{3}u_2^3(\theta) + \int_0^\theta [2R_2(\theta_1)u_3(\theta_1) + 3R_3(\theta_1)u_2(\theta_1) + R_4(\theta_1)] d\theta_1, \dots \\ u_s(\theta) &= \int_0^\theta \left[R_s(\theta_1) + \sum_{k=2}^{s-1} R_k(\theta_1)U_{sk}(u_2(\theta_1), \dots, u_{s-k+1}(\theta_1)) \right] d\theta_1, \dots, \end{aligned}$$

где U_{sk} — полиномы относительно $s - k$ переменных.

Функции u_s представимы в виде $u_s(\theta) = g_s\theta + v_s(\theta)$, где $g_s \in R$, а $v_s(\theta)$ — периодические функции. Если среди функций $u_s(\theta)$ есть непериодические, то первая из них имеет четный номер s .

Теорема 1. [1]. Нулевое равновесие системы (1), (3) асимптотически устойчиво, когда первая ненулевая ляпуновская величина $g_s < 0$, и неустойчиво, когда $g_s > 0$. Оно устойчиво по Ляпунову, если все $g_s = 0$.

Замечание. Теорема остается верной, если в системе (1) функции $X \in C^{n-1}$, $Y \in C^n$ и $g_k \neq 0$ при некотором $k \leq n - 2$.

Далее обсуждается возможность представления критериев устойчивости теоремы 1 в алгебраической форме, т.е. в виде конечного числа алгебраических неравенств, наложенных на конечное число коэффициентов ряда Тейлора функций X, Y . В связи с этим отметим (см. §2 главы 3 обзора [2]), что проблема устойчивости по Ляпунову равновесий сильно вырожденных систем дифференциальных уравнений в определенном смысле алгебраически и даже аналитически неразрешима.

Заменой переменных $(x, y) \rightarrow (x, y + a_{30}x^3)$ получаем систему (5), в которой выполнено условие $a_{30} = 0$. Первая ляпуновская величина g_2 для нее записана в явном виде в § 19 работы [1]:

$$\begin{aligned} g_2 &= (b_{21} - a_{11}b)G_{2,2,2} - (a_{11} + b_{40})G_{1,4,2} - b_{02}G_{3,0,2}, \\ G_{p,q,\ell} &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega L_{p,q,\ell}(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

где ω — период функций $Cs\theta, Sn\theta$. А. М. Ляпунов установил, что

$$g_2 = \frac{1}{5}G_1G_{0,2,2}, \quad G_1 = \frac{1}{5}(b_{02} + 3b_{40} - 2a_{11})b + b_{21},$$

потому что выполняются соотношения:

$$G_{2,2,2} = \frac{1}{5}G_{0,2,2}, \quad G_{1,4,2} = -\frac{3}{25}bG_{0,2,2}, \quad G_{3,0,2} = -\frac{1}{25}bG_{0,2,2}. \quad (7)$$

Знаки величин g_2 и G_1 совпадают, так как $G_{0,2,2} > 0$.

В работе [3] (см. также § 5.2 книги [4]) показано, что заменами переменных можно добиться выполнения условий: $a_{11} + b_{40} = 0$; $b_{02} = 0$. Это позволяет доказать совпадение знаков величин g_2 и G_1 без использования соотношения (7).

Возможность определения знаков ляпуновских величин g_s при всех $s > 2$ с помощью только алгебраических операций над коэффициентами правой части системы (5) осталась до сих пор не рассмотренной. Решение этой проблемы осложняется тем, что для вычисления величин g_s при $s > 2$ приходится считать не только квадратуры $G_{p,q,\ell}$, но и интегралы, у которых подынтегральные функции — полиномы от $L_{p,q,\ell}(\theta)$ и функций $u_k(\theta)$ с индексом $k < s$. В работе [1] изучались только интегралы $G_{p,q,\ell}$.

В следующем разделе устойчивость равновесия системы (5) исследуется прямым методом. Предлагается алгоритм определения устойчивости равновесия, реализация которого требует выполнения лишь арифметических операций над коэффициентами этой системы. Он не применим только в случае $b = g_2 = g_4 = 0$. Этот случай, как частный, разобран в работе [5], в которой использованы другие подходы.

2. Исследование устойчивости равновесий прямым методом — построением функций Ляпунова.

Система

$$x' = y, \quad y' = -x^3 + bxy, \quad (8)$$

где $b^2 < 8$, имеет положительно-определенный интеграл:

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{1}{4}(2y^2 - bx^2y + x^4)e^{L(x,y)}, \\ L(x, y) &= 2b\gamma \operatorname{arctg}[\gamma(-b + 4y/x^2)], \quad x \neq 0, \\ L(0, y) &= \operatorname{sign}(y)b\gamma\pi, \quad L(0, 0) = 0, \quad \gamma = (8 - b^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть коэффициент $b \neq 0$. Устойчивость нулевого равновесия системы (1), (3) определяем по следующему правилу.

Заменами переменных (4) преобразовываем эту систему к виду (5). Функцию $V'(x, y) = e^{L(x,y)} \sum_{s \geq 3} R^{s+3}(x, y)$, где $R^{s+3}(x, y) = (x^3 - bxy)X^s(x, y) + yY^{s+1}(x, y)$, являющуюся производной функции (9) в силу системы (5), последовательными заменами переменных

$$u = x - s_{k-1}x^{k-1}, \quad v = y - \sum_{i+2j=k} \delta_{ij}x^i y^j \quad (10)$$

приводим к виду

$$V'(u, v) = \left[v^2 \sum_{\ell=1}^N G_\ell u^{2\ell} + o(|u|^{2N+4} + |v|^{N+2}) \right] e^{L(u,v)},$$

пока не встретится первая ненулевая величина G_s .

Теорема 2. Нулевое равновесие системы (1), (3) асимптотически устойчиво, если $G_s < 0$, и неустойчиво, когда $G_s > 0$. При этом саму систему заменами переменных (10) можно привести к такому виду, что функция (9) является ее функцией Ляпунова.

Исследование, описанное в данной работе, стало возможным, благодаря частичной поддержке Американским Фондом Гражданских Исследований и Развития (АФГИР), грант RUM1-2842-RO-06, Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант № 08-01-00895. Работа выполнена в рамках Европейской научной лаборатории (ЕНО) “Вихревая гидродинамика” (грант РФФИ № 07-01-92213-НЦНИЛ).

Список литературы

- [1] Ляпунов А.М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М.,Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 272–331.
- [2] Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1985. С. 7–149.
- [3] Хазин Л.Г. Замечание к работе Ляпунова: «Особенный случай задачи об устойчивости движения». Препринт ин-та прикл. матем. АН СССР. 1980. № 9.
- [4] Хазин Л.Г., Шноль Э.Э. Устойчивость критических положений равновесия. Пушкино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. 215 с.
- [5] Куракин Л.Г. О ляпуновской цепочке критериев устойчивости в критическом случае жордановой 2-клетки // ДАН. 1994. Т. 337, № 1. С. 14-16.

Kurakin L.G *On stability criteria in a critical case of a double zero root.*

It's considered problem of stability of equilibrium of autonomous system of differential equations in critical case of double zero root (Jordan cell). Using his first method A. M. Lyapunov ([1]) found criterion of stability for any nonlinear degeneration of system.

Most of subcases of the problem was investigated by him with direct method too. Lyapunov exponents of rest subcases hasn't still built.

In this paper it's found some of these functions. It permitted to propose new algorithm of determination of equilibrium stability for some degenerations of system. It's specified by algebraic operations with Taylor series coefficients of system whereas algorithm specified by A. M. Lyapunov demands calculation of quadratures.

К ПОСТРОЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

Ляпин А. А.*, Селезнев Н. М.**

* *Ростовский военный институт*

** *Ростовский государственный строительный университет*

Предлагается метод построения фундаментальных решений стационарной динамики многослойного полупространства с цилиндрической полостью произвольной в плане формы. Метод основан на суперпозиции решений для однородных полупространств и пространства с источником. Простота формы представления решений, отсутствие растущих составляющих при вычислении интегралов позволили рассмотреть на основе метода граничных интегральных уравнений ряд основных и смешанных задач линейной динамической теории упругости для многослойных сред с цилиндрическими полостями с полным погружением их в отдельном слое структуры или с возможным пересечением одной или нескольких границ раздела.

При решении задач динамики для слоистых сред с неоднородностями одной из важных проблем является построение фундаментальных решений, соответствующих действию сосредоточенных усилий в многослойной среде и допускающих эффективную численную реализацию метода граничных элементов. Основой для решений в слоистой среде являются соответствующие матрицы фундаментальных перемещений и напряжений для одного слоя.

Пусть упругая среда занимает область слоя толщины h : $x \in (0, h), y \in (-\infty, +\infty), z \in (-\infty, +\infty)$. В рамках слоя материал считается однородным, определяемым плотностью и упругими параметрами Ламе: ρ, λ, μ . Матрицы Грина фундаментальных решений разыскиваются в виде:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^{(3)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}^{(i)}(\mathbf{r}), i = 1, 2$ - решения для однородного полупространства от действия определяемого в дальнейшем вектора поверхностных усилий $\mathbf{X}_i(y, z)$, $\mathbf{U}^{(3)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ - классическая матрица фундаментальных решений для пространства с источником в точке $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Для решения вспомогательной задачи для однородного полупространства $x \geq 0$ при заданном векторе напряжений $\mathbf{X}_1(y, z)$ на поверхности $x = 0$ применим двойное преобразование Фурье по переменным y, z :

$$\bar{\bar{f}}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, z) \exp(i\alpha y + i\beta z) dy dz$$

Тогда поле перемещений в преобразованном виде может быть выражено как:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{u}}}^{(1)}(x, \alpha, \beta) &= \{\bar{\bar{u}}_x, \bar{\bar{u}}_y, \bar{\bar{u}}_z\}^T = \mathbf{P}^{(1)}(x, \alpha, \beta) \cdot \bar{\bar{\mathbf{X}}}_1(\alpha, \beta), \\ \mathbf{P}^{(1)}(x, \alpha, \beta) &= \mathbf{U}^{(1)}(x, \alpha, \beta) \cdot \mathbf{B}(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Где матрицы $\mathbf{U}^{(1)}$, \mathbf{B} имеют вид:

$$\mathbf{U}^{(1)}(x, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -\sigma_1 \exp(-\sigma_1 x) & -i\alpha \exp(-\sigma_2 x) & i\beta \sigma_2 \exp(-\sigma_2 x) \\ -i\alpha \exp(-\sigma_1 x) & \sigma_2 \exp(-\sigma_2 x) & -\alpha\beta \exp(-\sigma_2 x) \\ -i\beta \exp(-\sigma_1 x) & 0 & \xi_2^2 \exp(-\sigma_2 x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2i\alpha\sigma_1\theta_2^2 & -\zeta^2\xi_2^2 + \beta^2\eta^2 & -2\alpha\beta[2\sigma_1\sigma_2 - \zeta^2] \\ 2i\beta\sigma_1\sigma_2 & [\alpha^2\eta^2 - \zeta^2\sigma_2^2]/\sigma_2 & -\alpha\beta\eta^2/\sigma_2 \\ \zeta^2\xi_2^2 & 2i\alpha\sigma_2\xi_2^2 & 2i\beta\sigma_2\xi_2^2 \end{pmatrix} \Delta_R^{-1}\xi_2^{-2},$$

$$\xi_2^2 = \theta_2^2 - \beta^2, \quad \sigma_j^2 = u^2 - \theta_j^2, \quad u^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad j = 1, 2,$$

$$\theta_1 = \omega a/V_p, \quad \theta_2 = \omega a/V_s, \quad V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad V_s = \sqrt{\mu/\rho},$$

$$\eta^2 = 4\sigma_1\sigma_2 - \zeta^2, \quad \zeta^2 = u^2 + \sigma_2^2, \quad \Delta_R = \zeta^4 - 4u^2\sigma_1\sigma_2,$$

a - характерный размер полости.

Соответственно для компонент вектора напряжений на поверхности с нормалью \mathbf{e}_x получим:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}^{(1)}(x, \alpha, \beta) &= \{\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}\}^T = \mathbf{Q}^{(1)}(x, \alpha, \beta) \cdot \bar{\mathbf{X}}_1(\alpha, \beta), \\ \mathbf{Q}^{(1)}(x, \alpha, \beta) &= \mathbf{T}^{(1)}(x, \alpha, \beta) \cdot \mathbf{B}(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{T}^{(1)}(x, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \zeta^2 \exp(-\sigma_1 x) & 2i\alpha\sigma_2 \exp(-\sigma_2 x) & -2i\beta\sigma_2^2 \exp(-\sigma_2 x) \\ 2i\alpha\sigma_1 \exp(-\sigma_1 x) & -(\sigma_2^2 + \alpha^2) \exp(-\sigma_2 x) & 2\alpha\beta\sigma_2 \exp(-\sigma_2 x) \\ 2i\beta\sigma_1 \exp(-\sigma_1 x) & -\alpha\beta \exp(-\sigma_2 x) & \sigma_2(\beta^2 - \xi_2^2) \exp(-\sigma_2 x) \end{pmatrix},$$

Представление решений для однородного полупространства $x \leq h$ при заданном векторе напряжений $\mathbf{X}_2(y, z)$ на поверхности $x = h$ аналогично соотношениям (2),(3):

$$\bar{\mathbf{u}}^{(2)}(x, \alpha, \beta) = \mathbf{P}^{(2)}(x, \alpha, \beta) \cdot \bar{\mathbf{X}}_2(\alpha, \beta), \quad \bar{\mathbf{t}}^{(2)}(x, \alpha, \beta) = \mathbf{Q}^{(2)}(x, \alpha, \beta) \cdot \bar{\mathbf{X}}_2(\alpha, \beta),$$

где

$$P_{nm}^{(2)}(x, \alpha, \beta) = (-1)^{\delta_{nm}} P_{nm}^{(1)}(h-x, \alpha, \beta), \quad Q_{nm}^{(2)}(x, \alpha, \beta) = (-1)^{\delta_{nm}+1} Q_{nm}^{(1)}(h-x, \alpha, \beta),$$

$n, m = 1, 2, 3$, δ_{nm} - символ Кронекера.

Матрицы фундаментальных решений пространства с источником в точке \mathbf{r}_0 интенсивности $\{q_1, q_2, q_3\}$ имеют вид [1]:

$$u_k^{(3)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 U_{jk}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) q_j(\mathbf{r}_0); \quad k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$U_{jk}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{a}{4\pi\mu} \left[\delta_{jk} \frac{\exp(i\theta_2\rho)}{\rho} - \frac{1}{\theta_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\exp(i\theta_1\rho)}{\rho} - \frac{\exp(i\theta_2\rho)}{\rho} \right) \right], \quad (5)$$

$$\mathbf{r} = \{x_j\}^T = \{x, y, z\}^T, \quad \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

С использованием формул переразложения сферической волны по плоским волнам:

$$\frac{\exp(i\theta\rho)}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma|x-x_0| - i\alpha(y-y_0) - i\beta(z-z_0)) / \sigma d\alpha d\beta, \quad (6)$$

$$\sigma = \sqrt{u^2 - \theta^2}, \quad \text{Re}\sigma \geq 0, \quad \text{Im}\sigma \leq 0,$$

получим в преобразованном по Фурье виде соотношения:

$$\bar{\bar{U}}_{11} = A [-\sigma_1 E_1 + u^2 E_2 / \sigma_2], \quad \bar{\bar{U}}_{12} = \bar{\bar{U}}_{21} = -i\alpha A [E_1 - E_2], \quad (7)$$

$$\bar{\bar{U}}_{13} = \bar{\bar{U}}_{31} = -i\beta A [E_1 - E_2], \quad \bar{\bar{U}}_{23} = \bar{\bar{U}}_{32} = \alpha\beta A [E_1 / \sigma_1 - E_2 / \sigma_2],$$

$$\bar{\bar{U}}_{22} = A [\alpha^2 E_1 / \sigma_1 - (\alpha^2 - \theta_2^2) E_2 / \sigma_2],$$

$$\bar{\bar{U}}_{33} = A [\beta^2 E_1 / \sigma_1 - (\beta^2 - \theta_2^2) E_2 / \sigma_2],$$

$$A = \frac{1}{2\theta_2^2} \exp(i\alpha y_0 + i\beta z_0), \quad E_k = \exp(-\sigma_k |x - x_0|), \quad k = 1, 2.$$

Выражения (7) действительны для $x - x_0 > 0$. При $x - x_0 < 0$ у функций $\bar{\bar{U}}_{12}, \bar{\bar{U}}_{21}, \bar{\bar{U}}_{13}, \bar{\bar{U}}_{31}$ следует поменять знак на противоположный.

Аналогично представляются функции напряжений в пространстве с источником:

$$\sigma_{ij}^{(3)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^3 T_{ijk}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) q_k(\mathbf{r}_0); \quad l, j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$T_{ijk}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \exp(-i\alpha y - i\beta z) \bar{\bar{T}}_{ijk}(\mathbf{r}_0, x, \alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

где, например,

$$\bar{\bar{T}}_{111} = A [-\zeta^2 E_1 + 2u^2 E_2], \quad \bar{\bar{T}}_{112} = A \frac{i\alpha}{\sigma_2} [-2\sigma_1 \sigma_2 E_1 + \zeta^2 E_2].$$

Контуры Γ_1, Γ_2 в плоскостях комплексных переменных α, β определяются в соответствии с принципом предельного поглощения.

Удовлетворение граничным условиям в напряжениях на гранях слоя

$$\sigma \cdot \mathbf{e}_x|_{x=0} = \mathbf{R}_1(y, z), \quad \sigma \cdot \mathbf{e}_x|_{x=h} = \mathbf{R}_2(y, z) \quad (9)$$

в преобразованиях Фурье приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных вектор-функций $\overline{\overline{\mathbf{X}}}_1, \overline{\overline{\mathbf{X}}}_2$:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{X}}}_1(\alpha, \beta) + \mathbf{Q}^{(2)}(0, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\mathbf{X}}}_2(\alpha, \beta) &= \overline{\overline{\mathbf{R}}}_1(\alpha, \beta) - \mathbf{I}_1(\mathbf{r}_0, \alpha, \beta) \\ \mathbf{Q}^{(1)}(h, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\mathbf{X}}}_1(\alpha, \beta) + \overline{\overline{\mathbf{X}}}_2(\alpha, \beta) &= \overline{\overline{\mathbf{R}}}_2(\alpha, \beta) - \mathbf{I}_2(\mathbf{r}_0, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(\mathbf{r}_0, \alpha, \beta) &= \left\{ \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{T}}_{11k}(\mathbf{r}_0, 0, \alpha, \beta) q_k, \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{T}}_{21k}(\mathbf{r}_0, 0, \alpha, \beta) q_k, \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{T}}_{31k}(\mathbf{r}_0, 0, \alpha, \beta) q_k \right\}^T \\ \mathbf{I}_2(\mathbf{r}_0, \alpha, \beta) &= \left\{ \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{T}}_{11k}(\mathbf{r}_0, h, \alpha, \beta) q_k, \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{T}}_{21k}(\mathbf{r}_0, h, \alpha, \beta) q_k, \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{T}}_{31k}(\mathbf{r}_0, h, \alpha, \beta) q_k \right\}^T. \end{aligned}$$

Выражения \mathbf{I}_j определяют наличие в слое сосредоточенного источника колебаний. Поэтому при построении решений для слоя без объемных сил как элемента некоторой более общей слоистой структуры их необходимо положить равными 0.

Отметим, что определитель полученной системы (10) определяет дисперсионные свойства среды, а его нули в точности соответствуют волновым числам поверхностных волн Релея-Лэмба, распространяющихся в слое.

Структура системы (10), а также отсутствие в ней экспоненциально растущих функций определяют численную устойчивость ее решения для всех α, β на контурах интегрирования Γ_1, Γ_2

Рассматривая далее действие источника в многослойном полупространстве, для каждой компоненты слоистой среды выписываются соотношения вида (10), в которых функции $\mathbf{R}_j, j = 1, 2$ являются неизвестными. Для их вычисления к системе (10) добавляются условия стыковки сред по напряжениям и перемещениям на линиях раздела слоев в преобразованном по Фурье виде, а полученная алгебраическая система линейных уравнений решается совместно.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (проект 1.1.08).

Список литературы

- [1] *Новацкий В.* Теория упругости. М.:Мир. -1975. - 872 с.

Lyapin A.A., Seleznev N.M. *To building of the fundamental solutions in spatial problems for multilayered media with cylindrical cavities.* The method of the building of the stationary dynamic fundamental solutions for multi-layered half-space with cylindrical free in plan form cavity is offered. The method is founded on superposition of the solutions for two homogeneous half-spaces and space with the source. The simplicity of the solution presentation form, the rising components absence at the integral calculation have allowed to consider the some basic and mixed problems of the linear dynamic theory of elasticity for layered media with cylindrical cavities with possible intersection one or several boundaries of the section.

О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ В КЛАССИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ ГЕО- И ГОРНЫХ НАУК

Манжиров А. В., Паршин Д. А.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва*

Исследуются актуальные в науках о Земле проблемы расчета напряженного состояния приповерхностных и глубинных слоев Земли. Анализируются классические модели, связанные с рассмотрением тяжелого полупространства и самогравитирующего шара, широко используемые для определения гравитационных напряжений внутри Земли. Обсуждается физическая обоснованность данных моделей и их адекватность наблюдаемым в действительности явлениям. Показано, что такие модели по различным причинам не могут быть признаны пригодными для определения указанных напряжений. В связи с этим предлагается принципиально новая геомеханическая модель, опирающаяся на предположение о постепенном формировании Земли в процессе сферической аккреции. Рассмотрен один из простейших вариантов такой модели. В рамках него получены замкнутые аналитические формулы для описания напряженного состояния Земли, вызванного ее самогравитацией, а также суточным вращением. Проведено сравнение результатов расчета напряженного состояния по этим формулам с общеизвестными экспериментальными фактами и с результатами, получаемыми на основании классических моделей. Обнаружен ряд замечательных особенностей напряженного состояния Земли, предсказываемого предложенной моделью. Установлено, что предлагаемый подход к рассматриваемым проблемам, базирующийся на концепции механики наращиваемых тел [1], позволяет наиболее полно и точно судить об изучаемых явлениях. Наряду с упомянутыми общими формулами построены асимптотические зависимости для оценки нормальных и касательных напряжений в приповерхностных слоях земной коры. Знание этих зависимостей необходимо, например, при анализе процессов бурения скважин, проходки горных выработок, при прогнозировании возможных катастрофических последствий различного рода техногенных воздействий на земную кору.

1. Для расчета гравитационных напряжений в приповерхностных слоях Земли повсеместно используется модель, связанная с рассмотрением тяжелого полупространства. Ниже будем называть такую классическую гравитационную модель Земли «моделью 1» и помечать найденные в рамках нее напряжения соответствующим верхним индексом. Проанализируем данную модель на примере самого простого ее варианта.

Итак, рассматривается однородное изотропное упругое полупространство, находящееся в равновесии под действием однородного поля сил тяжести. Пусть ось Oz прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ направлена вертикально вниз внутрь полупространства, а плоскость Oxy совпадает с его границей. Соответствующие этой системе нормальные напряжения в тяжелом полупространстве являются одновременно главными напряжениями и выражаются формулами

$$\sigma_z^{(1)} = -f_0 z, \quad \sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = -\alpha f_0 z, \quad \alpha = (\varkappa - 1)/(\varkappa + 1), \quad (1)$$

где f_0 — удельный вес полупространства, $\varkappa = (1 - 2\nu)^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона. Для интенсивности касательных напряжений T и максимального касательного напряжения τ_{\max} , отвечающих такому напряженному состоянию, будем иметь соотношения $\sqrt{3} T^{(1)} = 2\tau_{\max}^{(1)} = \sigma_x^{(1)} - \sigma_z^{(1)} = (1 - \alpha)f_0z$.

Выясним, насколько обоснованным является использование модели 1 для определения искомых напряжений. В качестве единственного обоснования этого выдвигается рассуждение примерно следующего характера: нас интересует напряженное состояние Земли под зоной ее поверхности, радиус которой на несколько порядков меньше радиуса самой Земли, и на глубинах, на несколько порядков меньших ее диаметра; на основании этого можно пренебречь кривизной земной поверхности и считать ее бесконечной плоскостью, а также пренебречь непараллельностью линий действия гравитационных сил и изменением их величины с глубиной и считать при этом Землю бесконечно протяженной по глубине. Таким образом, вводя в рассмотрение модель 1, всего лишь предполагают, что переходят от более точной шаровой модели к ее приближенному аналогу с указанной областью применимости. Посмотрим, так ли это.

2. Рассмотрим простейшую классическую шаровую гравитационную модель Земли, которую будем называть ниже «моделью 2». Поскольку форма Земли близка к шаровой, эта модель должна давать уже достаточно точное представление о равновесии геоида под действием сил гравитационного взаимодействия элементов заполняющего его материала.

В самой простой формулировке модель 2 должна иметь дело с однородным изотропным твердым упругим шаром, радиус которого равен среднему радиусу геоида $R_{\oplus} \approx 6371$ км, а плотность массы равна средней плотности Земли $\mu_{\oplus} \approx 5518$ кг/м³. Как известно [2], гравитационный потенциал внутри такого тела равен $\Phi(r) = -2\pi\gamma\mu_{\oplus}(R_{\oplus}^2 - r^2/3)$, где $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²) — гравитационная постоянная, r — удаление точки шара от его центра. Следовательно, интенсивность объемной нагрузки в однородном самогравитирующем шаре представляется векторным полем $\mathbf{f} = -\mu_{\oplus}\nabla\Phi$, направленным в каждой точке к центру шара и имеющим модуль $f(r) = c_{\text{gr}}r$, где $c_{\text{gr}} = 4/3 \pi\gamma\mu_{\oplus}^2 \approx 8,507 \cdot 10^{-3}$ Па/м².

Для гравитационной модели 2 нормальные напряжения в сферической системе координат (r, φ, ϑ) , где φ и ϑ — географические долгота и широта, являются главными напряжениями и равны [3, 4]

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= -c_{\text{gr}}\alpha_1(R_{\oplus}^2 - r^2), & \sigma_{\varphi}^{(2)} &= \sigma_{\vartheta}^{(2)} = -c_{\text{gr}}(\alpha_1 R_{\oplus}^2 - \alpha_2 r^2), \\ \alpha_1 &= 1/10 (5\varkappa + 1)/(\varkappa + 1), & \alpha_2 &= 1/10 (5\varkappa - 3)/(\varkappa + 1). \end{aligned}$$

Интенсивность касательных напряжений и максимальное касательное напряжение при этом выражаются формулами $\sqrt{3} T^{(2)} = 2\tau_{\max}^{(2)} = \sigma_r^{(2)} - \sigma_{\varphi}^{(2)} = (\alpha_1 - \alpha_2)c_{\text{gr}}r^2$.

Чтобы сопоставить модели 1 и 2, нужно, во-первых, положить $R_{\oplus} - r = z$ — глубина залегания рассматриваемого материального слоя, $\mu_{\oplus}g_0 = f_0$ — удельный вес материала Земли у ее поверхности, где g_0 — ускорение силы тяжести у поверхности Земли. При принятых в модели 2 упрощениях, касающихся формы, состава и механических свойств Земли, имеем $g_0 = \gamma M_{\oplus}/R_{\oplus}^2$, $M_{\oplus} = \mu_{\oplus}V_{\oplus}$, $V_{\oplus} = 4/3 \pi R_{\oplus}^3$. Таким образом, $g_0 = c_{\text{gr}}R_{\oplus}/\mu_{\oplus}$, то есть $c_{\text{gr}} = f_0/R_{\oplus}$, $f_0 \approx 54,2$ МПа/км. В итоге

$$\sigma_r^{(2)} = -f_0 R_{\oplus} [2\alpha_1 \zeta - \alpha_1 \zeta^2], \quad \sigma_{\varphi}^{(2)} = \sigma_{\vartheta}^{(2)} = -f_0 R_{\oplus} [(\alpha_1 - \alpha_2) + 2\alpha_2 \zeta - \alpha_2 \zeta^2],$$

где $\zeta = z/R_{\oplus}$. Во-вторых, нужно линеаризовать полученные выражения по ζ и заменить у напряжений индексы « r », « φ », « ϑ » соответственно на « z », « x », « y »:

$$\sigma_z^{(2)} \simeq -2\alpha_1 f_0 z, \quad \sigma_x^{(2)} = \sigma_y^{(2)} \simeq -2\alpha_2 f_0 z - (\alpha_1 - \alpha_2) f_0 R_{\oplus}. \quad (2)$$

Как видим, асимптотические формулы (2), вытекающие из классической шаровой гравитационной модели Земли, не имеют ничего общего с формулами (1), полученными для тяжелого полупространства^{*)}.

Следовательно, использование модели 1 для расчета гравитационных напряжений в земной коре физически ничем не обосновано!

Но допустимо ли использовать для этой цели модель 2? Видно, что получаемые в данной модели окружные напряжения $\sigma_{\varphi, \vartheta}^{(2)}$ и максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}^{(2)}$ отличны от нуля у поверхности Земли ($z = 0$) для любого сжимаемого материала ($\kappa < +\infty$). Этот качественный вывод категорически противоречат действительности, поскольку, как известно, вблизи земной поверхности гравитационные напряжения отсутствуют.

Следовательно, модель 2 следует признать непригодной для оценки гравитационного напряженного состояния Земли по соображениям адекватности.

3. Неадекватность рассмотренной классической шаровой модели Земли свидетельствует, прежде всего, о том, что космические тела нельзя считать сформированными вне поля собственной гравитации и уже после этого наделенными данным полем, как это негласно предполагалось выше. Силы гравитационного взаимодействия частиц материала действуют на протяжении всего процесса формирования любого космического тела. Более того, именно они являются основной причиной данного процесса, вызывая непрерывный приток дополнительного материала к поверхности тела из космического пространства. Это обстоятельство нельзя не учитывать при решении задач о напряженном состоянии космических тел.

Если допустить, что Земля была сформирована в результате подобного процесса сферической аккреции, который начался с притока вещества к одному точечному центру, и при этом для каждого момента данного процесса сохранить все упрощения, принятые в модели 2 относительно формы, состава и механических свойств Земли, то вопрос о нахождении гравитационных напряжений в Земле сведется к решению задачи о центрально-симметричном квазистатическом деформировании непрерывно наращиваемого однородного изотропного упругого шара в поле сил \mathbf{f} (см. предыдущий раздел) его собственной гравитации [5, 6].

В точках такого шара будет справедливо стандартное дифференциальное уравнение равновесия, однако мера его деформации уже не будет определяться традиционными в механике сплошной среды соотношениями. Последнее обстоятельство обусловлено принципиальным отсутствием у любого наращиваемого тела какой-либо единой отсчетной конфигурации. Тем не менее, в той конфигурации, которую растущее тело занимает в каждый конкретный момент времени, однозначно определено достаточно гладкое поле скоростей движения его частиц и, следовательно, тензор скоростей деформации. Поскольку для ненаращиваемого тела (классического деформируемого тела постоянного состава) при малых деформациях этот

^{*)} Формулы (1) и (2) совпадают лишь в случае несжимаемого материала ($\kappa = +\infty$), когда $\alpha = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. Однако вряд ли есть разумные основания считать материал Земли несжимаемым.

тензор есть производная по времени от тензора малой деформации, то в качестве уравнения состояния наращиваемого упругого тела можно взять продифференцированный по времени закон Гука.

Отдельного обсуждения заслуживает краевое условие на поверхности растущего тела, к которой в текущий момент времени поступает дополнительный материал. Так как этот материал в момент присоединения является свободным от напряжений, то на поверхности роста необходимо выставить специфическое условие равенства нулю всех компонент тензора напряжений^{**}). Можно показать, что после этого рассматриваемая задача будет поставлена корректно и может быть сведена к классической краевой задаче математической теории упругости для скоростей движения частиц и скоростей изменения напряжений (см., например, [1, 5, 6, 7, 8]). После решения этой задачи и восстановления напряжений путем интегрирования найденных скоростей их изменения для современного размера Земли получим [5, 6]

$$\sigma_r^{\text{gr}} = \sigma_\varphi^{\text{gr}} = \sigma_\vartheta^{\text{gr}} = -1/2 c_{\text{gr}}(R_\oplus^2 - r^2) = -f_0 R_\oplus (\zeta - \zeta^2/2). \quad (3)$$

Обратим внимание на две важнейшие особенности данного напряженного состояния. Во-первых, оно является *гидростатическим*, то есть в постепенно сформированном в условиях самогравитации твердом упругом шаре на любой площадке отсутствуют касательные напряжения, как в покоящейся жидкости. Во-вторых, полученные напряжения *не зависят от коэффициента Пуассона*, идентификация которого в рассматриваемой модели представляла бы принципиальные трудности.

Если нас интересуют гравитационные напряжения в Земле лишь на относительно небольших глубинах, то, линеаризуя выражение (3), для нормальных напряжений на всех площадках будем иметь зависимость $\sigma^{\text{gr}} \simeq -f_0 z$. Сравнивая эту асимптотическую формулу с формулами (1), видим, что *модель 1 занижает величину напряжений*, сжимающих приповерхностные слои Земли в горизонтальном направлении, в α^{-1} раз. Этот коэффициент равен единице лишь для несжимаемого материала ($\nu = 1/2$), а при уменьшении ν неограниченно возрастает.

4. В проведенных выше рассуждениях не принималось во внимание суточное вращение Земли, приводящее к наличию в ней центробежных сил инерции и вызывающее тем самым дополнительные напряжения. Эти напряжения также могут быть оценены в рамках той простейшей шаровой модели растущей Земли, которая предложена в предыдущем разделе, если в качестве объемной нагрузки в ней рассматривать уже не гравитационные, а центробежные силы. Не останавливаясь на подробностях, сформулируем лишь основные выводы, которые вытекают из анализа построенного авторами замкнутого аналитического решения такой задачи.

Полученное в итоге напряженное состояние Земли, обусловленное ее суточным вращением, как и гравитационное, *не зависит от коэффициента Пуассона*. Отношение соответствующих нормальных напряжений к гравитационным напряжениям не превышает по модулю величины $c_{\text{rot}}/c_{\text{gr}} < 3,5 \cdot 10^{-3}$, где $c_{\text{rot}} = \omega_\oplus^2 \mu_\oplus \approx$

^{**}) Подобного рода граничные условия не встречаются в классической механике сплошной среды, однако они являются типичными для задач механики наращиваемых деформируемых тел. Граничное условие такого типа, очевидно, можно рассматривать одновременно и как начальное условие для тензора напряжений в области, занятой всей сформированной за счет дополнительного материала частью наращиваемого тела.

$\approx 2,934 \cdot 10^{-5}$ Па/м², $\omega_{\oplus} \approx 2\pi/(23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 4 \text{ с})$ — угловая скорость суточного вращения Земли, поэтому в результирующем напряженном состоянии первыми можно пренебречь по сравнению со вторыми. Что касается касательных напряжений, то их интенсивность и максимальное значение в данной точке не зависят от долготы и широты и выражаются формулами $\sqrt{3} T^{\text{rot}} = 2\tau_{\text{max}}^{\text{rot}} = 1/2 c_{\text{rot}}(R_{\oplus}^2 - r^2)$. Линеаризуя последнее выражение в окрестности земной поверхности, для приповерхностных слоев Земли получим $\sqrt{3} T^{\text{rot}} = 2\tau_{\text{max}}^{\text{rot}} \simeq f'_0 z$, где $f'_0 = c_{\text{rot}} R_{\oplus} \approx 0,187$ МПа/км.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-91302-ИНД_а, № 08-01-00553-а и № 06-01-00521-а), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук (программа № 13 ОЭ) и Фонда содействия отечественной науке.

Список литературы

- [1] Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
- [3] Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] Паршин Д.А. Нарастивание гравитирующего упругого шара // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. Т. 1. С. 157–161.
- [6] Манжиров А.В., Паршин Д.А. Нарастивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83.
- [7] Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов нарастивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166.
- [8] Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процесса деформирования нарастиваемых конических тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 290–303.

Manzhirou A.V., Parshin D.A. *New results in the classical problems of Earth and mining sciences.* Important for Earth sciences problems of determination of stress state in the near-surface and deep Earth layers are investigated. Classical models of heavy half-space and self-gravitating globe which are widely used for the analysis of gravitational stresses inside the Earth are considered. Physical validity of these models and their correspondence to the real life phenomena are discussed. It is shown that these models are unsuitable for determination of stresses in question. So a new geomechanical model is proposed which is based on the assumption that the Earth was gradually formed in the process of spherical accretion. One of the simplest versions of this model is considered. Within its framework closed analytical formulas for the determination of the Earth stress state which is caused by gravitation and diurnal rotation are obtained. The comparison of this stress state with experimental data and states obtained by using of both classical models mentioned above is done. A number of remarkable features of the Earth stress state obtained by the new model is found out. It is established that the proposed approach based on the concept of the accreted solids mechanics allows one to study phenomena completely with the highest accuracy. Asymptotic formulas for normal and tangential stresses in the near-surface layers of the Earth's crust are also obtained. These formulas are very useful for example when analyzing processes of boring, road heading as well as forecasting of possible catastrophic consequences of different anthropogenic impacts on the Earth's crust.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ RKDG-МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Марчевский И. К., Токарева С. А.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

В работе реализован параллельный алгоритм решения задач газовой динамики RKDG-методом и исследована его эффективность на примере модельной задачи о расчете обтекания круглого профиля. Расчеты проведены на сети из персональных ЭВМ и на высокопроизводительном кластере.

1. Введение. При решении современных практически важных задач гидрогазодинамики возникает необходимость расчета течения среды в областях сложной формы. Модель среды при этом может учитывать влияние вязкости, сжимаемости, теплопроводности. Время решения задачи может быть многократно уменьшено при выполнении расчетов на многопроцессорных системах кластерного типа. Несмотря на широкую известность общих принципов разработки и реализации параллельных алгоритмов, на практике каждая конкретная задача и каждый конкретный численный метод имеет свои особенности, и создание эффективного параллельного алгоритма представляет собой самостоятельную задачу.

2. Постановка задачи газовой динамики. Течение вязкого теплопроводного газа описывается системой уравнений в частных производных вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \hat{I}) &= \operatorname{div} \hat{\tau}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}[(E + p)\mathbf{v}] &= -\operatorname{div} \mathbf{W} + \operatorname{div}(\hat{\tau} \mathbf{v}),\end{aligned}\tag{1}$$

где t — время; ρ — плотность; \mathbf{v} — вектор скорости; p — давление; $E = \rho \varepsilon + \rho \mathbf{v}^2/2$ — полная энергия единицы объема; ε — удельная внутренняя энергия; $\hat{\tau}$ — тензор вязких напряжений, \hat{D} — тензор скоростей деформаций:

$$\hat{\tau} = 2\eta \hat{D} + \left(\mu - \frac{2}{3}\eta\right) \operatorname{div} \mathbf{v} \hat{I}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Здесь μ , η — коэффициенты вязкости; $\mathbf{W} = -\kappa \operatorname{grad} T$ — вектор плотности теплового потока, T — температура; κ — коэффициент теплопроводности, в общем случае зависящий от температуры.

В качестве уравнения состояния рассмотрим, например, $p = (\gamma - 1)\rho \varepsilon$.

Система уравнений (1) должна быть дополнена соответствующими начальными и граничными условиями.

3. RKDG-метод решения задачи. Одним из главных требований, предъявляемых к качеству методов решения задач газовой динамики, является правильность воспроизведения решения в областях, где оно претерпевает сильные

изменения во времени и пространстве, в частности, на ударных волнах, волнах разрежения и контактных разрывах. Одним из эффективных методов решения таких задач является RKDG (Runge-Kutta Discontinuous Galerkin) метод.

Рассмотрим схему RKDG-метода для двумерного течения газа, описываемого системой уравнений (1), которую запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial R_s(u, \text{grad } u)}{\partial x_s}. \quad (2)$$

Здесь $u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, E)^T$ — вектор консервативных переменных,

$$f_s(u) = \left(\rho v_s, \rho v_s v_1 + \delta_{s1} p, \rho v_s v_2 + \delta_{s2} p, (E + p)v_s \right)^T, \quad s = 1, 2,$$

— невязкие (эйлеровы) потоки,

$$R_s(u, \text{grad } u) = \left(0, \tau_{s1}, \tau_{s2}, \sum_{k=1}^2 \tau_{sk} v_k + \varkappa \frac{\partial T}{\partial x_s} \right)^T, \quad s = 1, 2,$$

— вязкие потоки, \varkappa — коэффициент теплопроводности.

Для решения системы (2) необходимо преобразовать ее к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для этого введем дополнительные переменные:

$$q_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad q_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Тогда исходную систему (2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \hat{F}(u) = \text{div } \hat{R}(u, q_1, q_2); \quad q_1 = \text{div } \hat{Q}_1(u); \quad q_2 = \text{div } \hat{Q}_2(u), \quad (3)$$

где $\hat{F} = (f_1, f_2)$, $\hat{R} = (R_1, R_2)$, $\hat{Q}_1 = (u, 0)$, $\hat{Q}_2 = (0, u)$.

Система (3) — это система дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно набора неизвестных $w = (u, q_1, q_2)$, записанная в дивергентном виде. Для решения такой системы можно использовать RKDG-метод [1, 2, 3, 4].

Пусть T_h — разбиение рассматриваемой области Ω на треугольники. На каждом элементе $K \in T_h$ введем систему линейных базисных функций $\{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, 3$, так, что $\varphi_i(\mathbf{m}_j) = \delta_{ij}$, \mathbf{m}_j — радиус-вектор центра j -го ребра треугольника K .

Приближенное решение $w_h = (u_h, q_{1h}, q_{2h})$ будем искать в треугольнике K в виде разложения по базису:

$$u_h(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t) \varphi_i(\mathbf{r}); \quad q_{1h}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 q_1^i(t) \varphi_i(\mathbf{r}); \quad q_{2h}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 q_2^i(t) \varphi_i(\mathbf{r}),$$

где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени, $\mathbf{r} = (x_1, x_2)^T$.

Умножим уравнения (3) на функцию φ_i , $i = 1, 2, 3$, и проинтегрируем произведение по треугольнику K , имеющему площадь $|K|$. После преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $u_i(t)$:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{3}{|K|} \left[\int_K (\hat{F}(u_h) - \hat{R}(w_h)) \cdot \text{grad } \varphi_i \, dS - \int_{\partial K} (\tilde{f}(u_h) - \tilde{r}(w_h)) \varphi_i \, d\Gamma \right]; \quad (4)$$

$$q_k^i = \frac{3}{|K|} \left[\int_{\partial K} \tilde{q}_k(u_h) \varphi_i d\Gamma - \int_K \hat{Q}_k(u_h) \cdot \text{grad } \varphi_i dS \right], \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{f}(u_h)$, $\tilde{r}(w_h)$, $\tilde{q}_k(u_h)$ — численные потоки, т.е. потоки через границу элемента K , зависящие от значений численного решения внутри K и в элементах, граничащих с K . В качестве численного потока для $\tilde{f}(u_h)$ может быть выбрана произвольная функция монотонного численного потока, соответствующая $f(u)$ [5, 6].

Для аппроксимации численных потоков $\tilde{r}(w_h)$, $\tilde{q}_k(u_h)$ между элементами K_1 и K_2 могут быть использованы центральные потоки вида

$$\tilde{r}(w_h) = \frac{1}{2} \left(\hat{R}(w_h^{K_1}) + \hat{R}(w_h^{K_2}) \right) \cdot \mathbf{n}_{12}, \quad \tilde{q}_k(u_h) = \frac{1}{2} \left(\hat{Q}_k(u_h^{K_1}) + \hat{Q}_k(u_h^{K_2}) \right) \cdot \mathbf{n}_{12},$$

где \mathbf{n}_{12} — единичная нормаль, внешняя по отношению к элементу K_1 .

Для решения системы ОДУ (4) с учетом соотношений (5) используется явный метод Рунге–Кутты 2-го порядка точности.

4. Параллельная реализация RKDG-метода. Количество уравнений в системе ОДУ (4)–(5) пропорционально числу ячеек сетки N . При использовании достаточно подробных сеток ее решение требует значительных затрат машинного времени. Благодаря компактности шаблона аппроксимации и использованию явного метода Рунге–Кутты, имеется возможность существенного ускорения расчета путем распараллеливания алгоритма решения системы ОДУ.

Перепишем систему (4)–(5) в виде

$$\frac{du_i^K}{dt} = L(u_h^K, u_h^{Q(K)}), \quad i = 1, 2, 3, \quad K = 1, \dots, N, \quad (6)$$

где $Q(K)$ — номера элементов, граничащих с элементом K . Правая часть каждого уравнения в (6) зависит только от решения на K -ом треугольнике и соседних с ним треугольниках.

Идея распараллеливания алгоритма RKDG-метода состоит в разделении расчетной области на несколько подобластей (по числу процессоров). Каждый процессор определяет решение на новом временном слое только в “своей” подобласти. Для этого с предыдущего слоя ему необходимы данные о решении в “своей” подобласти, а также в ячейках, граничащих с ней. На рис. 1 приведен пример деления области на 3 подобласти; ячейки, принадлежащие разным подобластям, выделены разными цветами, “приграничные” ячейки обведены полужирным.

Таким образом, между процессорами необходимо организовать обмен данными о решении только в “приграничных” ячейках. Эффективность предложенного алгоритма обеспечивается относительно небольшим количеством “приграничных” ячеек по сравнению с общим числом ячеек в каждой из подобластей.

Предложенный параллельный алгоритм реализован в виде программы на языке Fortran-90 с использованием библиотеки параллельного программирования MPI [7]; расчеты выполнялись на сети, состоящей из персональных ЭВМ, а также на высокопроизводительном вычислительном кластере МВС-100К.

Для анализа эффективности параллельного алгоритма рассматривалась модельная задача о расчете обтекания круглого профиля потоком при значениях

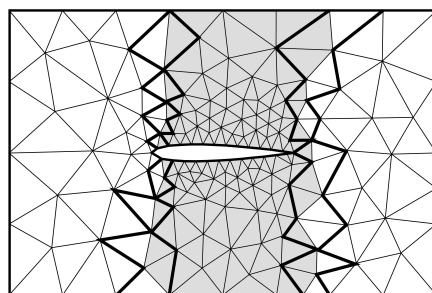


Рис. 1. Разделение области на подобласти

чисел Рейнольдса и Маха $Re = 2000$, $M = 0,05$ (рис. 2). Расчетная область представляла собой прямоугольник с размерами $12d \times 4d$, где d — диаметр профиля, и содержала более 40 000 ячеек. Полученные значения безразмерных стационарных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы, а также безразмерная частота схода вихрей (число Струхала) согласуются с экспериментальными данными и результатами расчетов другими методами: $C_x \approx 1,18$, $C_y \approx 0,05$, $Sh \approx 0,25$.

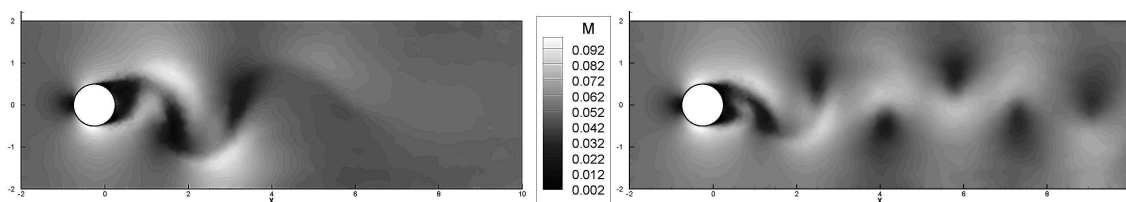


Рис. 2. Расчет обтекания круглого профиля при $t = 100$ и $t = 263$

Результаты распараллеливания представлены на рис. 3. На левом графике даны зависимости времени выполнения одного временного шага при проведении расчетов на 1–8 ядрах процессоров Intel Core2Duo 3,0 ГГц четырех персональных ЭВМ, объединенных в локальную сеть, а также на 1–8 процессорах высокопроизводительного кластера МВС-100К МСЦ РАН. На правом графике представлено ускорение алгоритма, достигнутое при расчетах на кластере МВС-100К при использовании 1–48 процессоров.

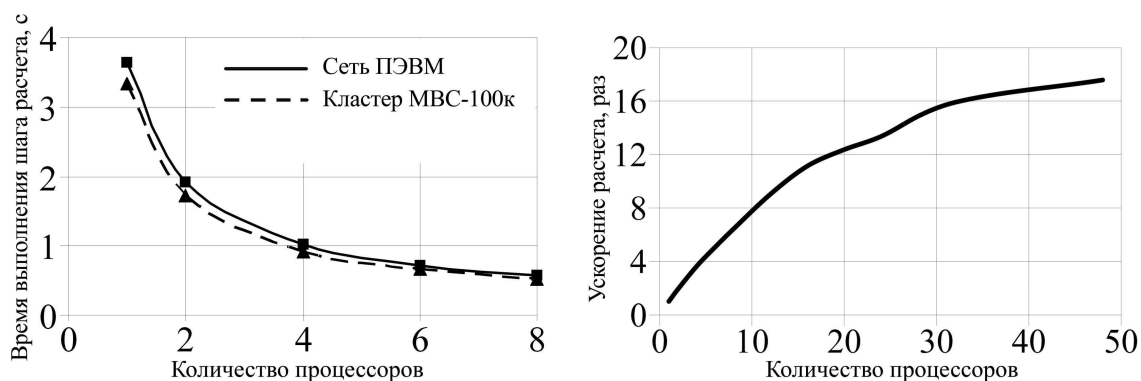


Рис. 3. Эффективность распараллеливания

5. Выводы. Рассмотренная схема RKDG-метода решения задач газовой динамики позволяет построить эффективный параллельный алгоритм его реализации. Результаты вычислений показали, что время выполнения одного шага расчета на сети ПЭВМ не более, чем на 10 % превышает время выполнения одного шага того же расчета на кластере МВС-100К, что свидетельствует о высокой эффективности предложенного параллельного алгоритма не только на специализированных кластерах, но и на вычислительных комплексах, которые могут быть легко созданы на базе широко доступных локальных сетей ПЭВМ.

С увеличением количества задействованных в расчете процессоров эффективность распараллеливания снижается, однако достижение 15–18-кратного ускорения в рассмотренной модельной задаче является вполне реальным при использовании 30–50 процессоров. При этом следует отметить, что эффективность распараллеливания повышается при увеличении трудоемкости расчета (в частности, при использовании более подробной сетки с большим числом элементов).

Авторы благодарят Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН за предоставленную возможность использования кластера МВС-100К.

Список литературы

- [1] *Bernardo Cockburn, Chi-Wang Shu.* Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // *J. Sci. Comp.* 2001. № 16. P. 173–261.
- [2] *Bassy F., Rebay S.* A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations // *J. Comp. Phys.* 1997. № 131. P. 267–279.
- [3] *Dolejsi V.* On the discontinuous Galerkin method for the numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2004. № 45. P. 1083–1106.
- [4] *Galanin M. P. Tokareva S. A.* The RKDG method and its application for the numerical solution of gas dynamics problems // *Heat Transfer Research.* 2008. № 39. P. 123–132.
- [5] *Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction. Berlin: Springer, 1999. 624 p.
- [6] *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
- [7] *Гергель В. П.* Теория и практика параллельных вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 424 с.

Marchevsky I.K., Tokareva S.A.

Parallel implementation of RKDG method for numerical solution of gas dynamics problems. Annotation.

Parallel implementation of RKDG method is investigated and its efficiency is estimated. Simulation of the flow around circular airfoil is used as a model problem for parallel efficiency study. Computations are carried out using PC network and high-performance cluster.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ УПРУГИЙ ВОЛНОВОД: ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОСТЬ

Мелешко В. В.^{*}, Бондаренко А. А.^{**}, Трофимчук А. Н.^{**}

^{*} Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

^{**} Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины, Киев

В статье приведен краткий обзор основных характеристик нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе. Прослежены ключевые аспекты истории проблемы и отражено ее современное состояние.

Характерная особенность классических упругих волноводов в виде круглого цилиндра и слоя заключается в том, что их граница образована одной или двумя однотипными координатными плоскостями и не содержит изломов. Это позволяет построить точные аналитические решения соответствующих граничных задач и полностью исследовать основные характеристики нормальных волн в таких волноводах. Наличие двух пар граничных поверхностей в прямоугольном упругом волноводе приводит к значительному усложнению процесса формирования мод за счет дополнительных отражений от границ продольных и сдвиговых волн. В результате, для прямоугольного волновода не удастся записать в явном виде трансцендентное дисперсионное уравнение, и получение количественно достоверных результатов становится сложной научной задачей.

Проблема отыскания системы нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq \infty$ с компонентами вектора смещений $u_x = u(x, y)e^{(\gamma z - \omega t)}$, $u_y = v(x, y)e^{(\gamma z - \omega t)}$, $u_z = w(x, y)e^{(\gamma z - \omega t)}$ сводится к поиску решений уравнений движения Ламе относительно амплитуд смещений u , v , w с нулевыми граничными условиями в напряжениях на боковых поверхностях волновода $x = \pm a$ и $y = \pm b$ [1, 2]. Наличие двух плоскостей симметрии в прямоугольном волноводе позволяет удобно представить все возможные нормальные волны в виде суперпозиции четырех основных типов мод:

- Продольные L -моды, для которых $w(x, y)$ есть четная функция по x и по y ;
- Крутильные T -моды, для которых $w(x, y)$ есть нечетная функция по x и по y ;
- Изгибные B_x -моды: $w(x, y)$ является нечетной функцией по x и четной по y ;
- Изгибные B_y -моды: $w(x, y)$ является четной функцией по x и нечетной по y .

Для построения решения задачи о нормальных волнах в прямоугольном волноводе широкое распространение получили метод суперпозиции, метод однородных решений, метод коллокаций, метод согласования волн, подходы, основанные на использовании вариационных принципов; разработан ряд приближенных теорий, описывающих несколько распространяющихся мод. Обзору развитых подходов и методик посвящена работа авторов [2], дополнительные ссылки на имеющуюся по этому вопросу литературу можно найти в обзорной статье [3]. К настоящему времени были установлены такие интересные особенности нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе:

- Для дискретных наборов частот ω и постоянных распространения γ определены моды, которые в точности удовлетворяют нулевым граничным условиям на боковых сторонах волновода. Первый набор применительно к нормальным продольным и изгибным волнам в прямоугольном волноводе отвечает эквиволюминальным модам Ламе (G. Lamé, 1852), образованным отражением под углом 45° SV -волн в слое при условии, что:

$$\frac{\omega b}{c_2} \Big|_{Lame} = \sqrt{2}q \frac{\pi}{2}, \quad \gamma b \Big|_{Lame} = q \frac{\pi}{2}, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

при любом соотношении сторон a/b и коэффициенте Пуассона ν . Второй набор точных решений задачи для дискретных значений геометрии волновода a/b был получен Миндлином и Фоксом (R. D. Mindlin, E. A. Fox, 1960) путем комбинации допустимых нормальных мод Рэлея-Лэмба и SH -волн в бесконечном слое. Соответствующие значения для частот и постоянных распространения несколько громоздки и не приводятся здесь.

- Для продольных волн в прямоугольном волноводе с произвольным соотношением сторон установлены зависимости фазовых скоростей двух низших мод от частоты в сравнительно низкочастотной области (R. W. Morse, 1950) и показано, что частота запирающей второй моды отвечает частоте, на которой половина длины волны близка к большему размеру – ширине волновода $2a$ (R. W. Morse, 1948). В случае квадратного волновода дисперсионные кривые для первых четырех мод хорошо аппроксимируются кривыми для симметричных мод в круглом цилиндре, если площади круглого и квадратного сечений соотносятся как 1.14:1, т.е. диаметр круга на 20.5% превышает сторону квадрата (W. B. Fraser, 1970). В высокочастотном диапазоне для квадратного волновода фазовая скорость первой “дышащей” моды выходит на скорость поверхностной волны Рэлея (E. Volterra, 1957); для прямоугольного волновода – на скорость угловой моды клина с прямым углом при вершине (В. В. Мелешко, 1982).
- Для крутильных нормальных волн в тонких прямоугольных волноводах рассчитана фазовая скорость основной моды в зависимости от частоты и показано, что геометрия волновода оказывает существенное влияние на ее дисперсию (A. D. S. Barr, 1962). Однако, не удалось получить теоретическое обоснование для дисперсии этой моды в квадратном волноводе, наблюдаемое экспериментально.
- Дисперсионные спектры для распространяющихся нормальных волн четырех типов симметрии представлены в работах N. J. Nigro (1966), П. Хертленди (1968), W. B. Fraser (1969), К. Такака, Y. Iwahashi (1977), А. Е. Вовк и др. (1980), Е. В. Костржицкая, В. В. Мелешко (1990). Полные дисперсионные спектры для продольных мод колебаний, включающие мнимые и комплексные участки дисперсионных кривых, построены М. А. Медик (1966-1968) на основе приближенных теорий первого (1,1) и второго (2,0) и (2,2) порядков. В работах R. W. Morse (1948), A. D. S. Barr (1962), П. Хертленди (1968),

W. V. Fraser (1970), T. Hayashi et al. (2003, 2006) представлены обширные экспериментальные данные вплоть до шести первых распространяющихся мод различных типов симметрии в прямоугольном волноводе.

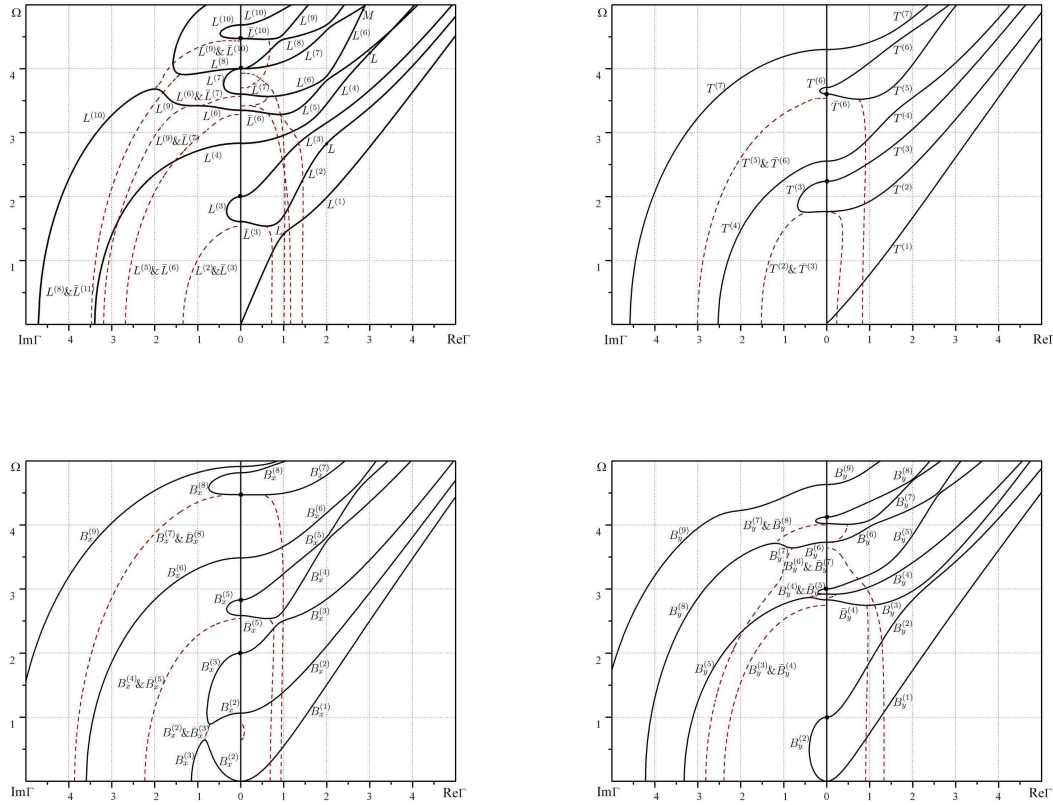


Рис. 1. Дисперсионные спектры для прямоугольного волновода $a/b = 0.5$, $\nu = 0.25$

В целом, можно сделать общее заключение о том, что в имеющейся литературе, посвященной изучению нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе основное внимание уделяется разработке методов решения сложной граничной задачи, а не изучению и систематизации свойств этих волн.

Стремление глубже понять особенности дисперсии и кинематики волн в прямоугольном волноводе, а также формирование знаний о них в такую же ясную и четкую картину процесса волнового распространения, которая имеет место для слоя и круглого цилиндра, побудило авторов провести детальное исследование физически точного решения задачи, полученного на основе метода суперпозиции [1, 2]. В результате были установлены следующие особенности для различных типов нормальных волн в прямоугольном упругом волноводе:

- Построены полные дисперсионные спектры для четырех типов мод в прямоугольном волноводе, включающие в себя действительные, мнимые и комплексные ветви дисперсионных кривых. В качестве примера на рис. 1 приведены

спектры для волновода с соотношением сторон $a/b = 0.5$ при $\nu = 0.25$, отражающие зависимости безразмерной частоты $\Omega = 2\omega b/\pi c_2$ от безразмерной постоянной распространения $\Gamma = 2\gamma b/\pi$. Здесь дисперсионная ветвь обозначается согласно типу волновых движений с верхним индексом в круглых скобках, указывающим порядок моды; черта над символом означает, что данной ветви отвечает зеркальное отражение участка относительно плоскости $\text{Re}\Gamma = 0$. Символами L и M обозначены точные решения в модах Ламе и Миндлина-Фокса, соответственно.

- Наличие точного аналитического решения задачи позволило определить и классифицировать частоты запирания распространяющихся нормальных волн и отвечающие им формы колебаний. Для каждого семейства мод все частоты запирания можно разделить на два типа: осе-сдвиговые и планарные. На частотах первого типа смещения и скорости частиц параллельны боковым поверхностям волновода, а значения частот не зависят от коэффициента Пуассона. Осе-сдвиговые частоты отмечены на графиках точками. На частотах запирания планарного типа движения происходят в плоскости волновода, а значения частот изменяются в зависимости от геометрических и физических параметров волновода. Относительное расположение частот запирания на частотной оси определяется их типом, соотношением a/b и коэффициентом Пуассона ν и оказывает существенное влияние на структуру дисперсионного спектра в целом.
- На основании численных расчетов установлено, что фазовая и групповая скорости первой распространяющейся моды каждого типа симметрии с увеличением частоты стремятся к бездисперсионной скорости угловой моды прямого клина c_E независимо от геометрии прямоугольного волновода. При этом основная часть энергии, переносимой волной, сосредоточена вблизи углов волновода, что характерно для волновых процессов лишь в упругих волноводах. Скорость c_E отличается от скорости поверхностных волн Рэлея на границе свободного полупространства c_R не более чем на 5% и при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.25$ имеет значение $c_E = 0.9014c_2$, $c_R = 0.9094c_2$. Фазовые скорости высших нормальных волн всех типов симметрии, в свою очередь, в коротковолновом диапазоне выходят на скорость c_R . Установленные особенности существенно отличают прямоугольный волновод от волноводов в виде слоя или круглого цилиндра, в которых движения для низших нормальных волн в высокочастотной области локализуются вблизи граничных поверхностей, а фазовые скорости высших мод стремятся к скорости изгибной волны в неограниченной среде c_2 .
- Следующей отличительной чертой прямоугольного волновода от классических волноводов является наличие бесконечного числа чисто мнимых корней дисперсионных уравнений для каждого значения частоты, что отчасти можно объяснить наличием изломов на поверхности волновода, приводящим к связанности различных типов движений. Физическим отражением этого факта является существование бесконечного числа неоднородных волн

с мнимыми значениями постоянной распространения, что может оказать существенное влияние на такую характеристику волновых движений как краевой резонанс.

- Поскольку явление краевого резонанса некоторые исследователи связывают с наличием так называемой обратной волны в волноводе, которая характеризуется разными знаками фазовой и групповой скоростей, интересно отметить, что такие волны существуют не для каждого типа симметрии движений в прямоугольном волноводе. Расчеты показывают, что с увеличением соотношения a/b наблюдается исчезновение участков дисперсионных кривых, отвечающих обратным волнам, для крутильных мод и изгибных B_y -мод. При этом существенно усложняется структура дисперсионного спектра в области мнимых значений постоянной распространения.
- Анализ комплексных участков дисперсионных кривых позволил выявить общие черты для прямоугольного волновода и круглого цилиндра, для которых точки пересечения указанных участков с плоскостью $\Omega = 0$ (комплексные решения соответствующих статических задач) зависят от коэффициента Пуассона, в то время, как для слоя подобная зависимость отсутствует. Аналогичный вывод можно сделать при решении рассматриваемой задачи широко распространенным на сегодняшний день методом конечных элементов (N. G. Stephen, P. J. Wang, 2004).

Таким образом, в результате проведенного исследования получены ответы на ряд важных вопросов о дисперсионных, энергетических и кинематических характеристиках прямоугольного упругого волновода, что позволяет говорить о физически полном решении задачи о нормальных волнах в таком волноводе и открывает широкие возможности для решения более сложных задач и расширения практических применений волноводов прямоугольного сечения.

Список литературы

- [1] Бондаренко А.А. Нормальные волны в прямоугольном упругом волноводе // Акустический вестник. 2007. Т. 10, № 4. С. 12–27.
- [2] Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Трофимчук А.Н. Упругие волноводы: история и современность. II // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2008. Т. 51, № 4. С. 155–172.
- [3] Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С.А., Трофимчук А.Н., ван Хейст Г.Я.Ф. Упругие волноводы: история и современность. I // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2008. Т. 51, № 2. С. 86–104.

Meleshko V.V., Bondarenko A.A., Trofimchuk A.N. *Rectangular elastic waveguide: history and the state-of-art.* The paper addresses a brief review for main characteristics of normal waves in a rectangular elastic waveguide. Key topics in the history of the problem are traced, and its current state is reflected.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2
В ЗАДАЧЕ КУЭТТА-ТЕЙЛОРА
(СЛУЧАЙ RES 0).

Моршнева И.В., Овчинникова С.Н.

ЮФУ, Ростов-на-Дону

Рассматриваются пересечения бифуркаций в задаче Куэтта-Тейлора о течении вязкой несжимаемой жидкости между твердыми соосными вращающимися цилиндрами. Для описания взаимодействия независимых нейтральных мод, существующих в окрестности точки пересечения двух нейтральных кривых (точки пересечения бифуркаций) построена система амплитудных уравнений, в которой присутствуют лишь обязательные резонансные слагаемые (нерезонансный случай Res 0). Для случая Res 0 перечислены стационарные решения амплитудной системы на инвариантных подпространствах, которым отвечают периодические и квазипериодические режимы течения жидкости. Приведены результаты численного анализа условий их существования и устойчивости, которые представляют собой соотношения между коэффициентами амплитудной системы.

Течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными твердыми цилиндрами радиусов r_1, r_2 , вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 соответственно, описывается безразмерными уравнениями Навье-Стокса. Предполагается, что решения уравнений движения имеют периодические вдоль оси цилиндров (оси z) поля скорости и давления с заданным периодом $2\pi/\alpha$. Система Навье-Стокса зависит от четырех безразмерных параметров: $\eta = r_2/r_1$ – отношения радиусов цилиндров, двух чисел Рейнольдса $R_1 = \Omega_1 r_1^2/\nu, R_2 = \Omega_2 r_2^2/\nu$ (ν – коэффициент кинематической вязкости) и α – осевого волнового числа. Хорошо известно, что при любых значениях параметров существует точное стационарное решение уравнений движения – течение Куэтта.

Как система Навье-Стокса, так и линеаризованная на течении Куэтта задача обладают группой симметрии $\mathcal{G} = SO(2) \times O(2)$ – инвариантны относительно вращений вокруг и сдвигов вдоль оси z и преобразования инверсии.

Точка пересечения (R_{1*}, R_{2*}) двух нейтральных кривых определяется такими критическими значениями чисел Рейнольдса R_{1*} и R_{2*} , при которых линеаризованная задача имеет нетривиальные решения (нейтральные моды) с различными азимутальными (m, n) и осевыми (k, l) квантовыми числами. В силу симметрии в каждой точке пересечения нейтральных кривых (R_{1*}, R_{2*}) таких независимых нейтральных мод четыре:

$$\begin{aligned}\Phi_1(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_m t} \Phi_{0m}(r, \theta, z), \quad \Phi_2(t, r, \theta, z) = e^{i\omega_m t} \Phi_{1m}(r, \theta, z), \\ \Phi_3(t, r, \theta, z) &= e^{i\omega_n t} \Phi_{0n}(r, \theta, z), \quad \Phi_4(t, r, \theta, z) = e^{i\omega_n t} \Phi_{1n}(r, \theta, z),\end{aligned}$$

где $\Phi_{0m}(r, \theta, z) = e^{-i(m\theta+k\alpha z)} \varphi_{0m}(r), \quad \Phi_{0n}(r, \theta, z) = e^{-i(n\theta+l\alpha z)} \varphi_{0n}(r),$
 $\Phi_{1m}(r, \theta, z) = e^{-i(m\theta-k\alpha z)} \varphi_{1m}(r), \quad \Phi_{1n}(r, \theta, z) = e^{-i(n\theta-l\alpha z)} \varphi_{1n}(r).$

Далее изучаются возможные бифуркации в малой окрестности точки пересечения (R_{1*}, R_{2*}) , состоящей из точек $R_1 = R_{1*} + k_1\varepsilon^2$ и $R_2 = R_{2*} + k_2\varepsilon^2$, где ε - малый параметр, k_1, k_2 - константы надкритичности ($k_1^2 + k_2^2 = 1$), которые можно выбирать произвольно. Асимптотическое решение уравнений движения в малой окрестности (R_{1*}, R_{2*}) разыскивается в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{00} + \varepsilon(\Phi + \Phi^*) + \dots$$

Здесь \mathbf{v}_{00} - вектор скорости течения Куэтта при R_{1*} и R_{2*} , верхний символ * означает комплексное сопряжение, $\Phi = \xi_{0m}(\tau)\Phi_1 + \xi_{1m}(\tau)\Phi_2 + \xi_{0n}(\tau)\Phi_3 + \xi_{1n}(\tau)\Phi_4$, $\xi_{0m}(\tau), \xi_{1m}(\tau), \xi_{0n}(\tau), \xi_{1n}(\tau)$ - неизвестные комплексные амплитуды, зависящие от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$.

При малых ε с помощью теоремы о центральном многообразии или метода осреднения по быстрому времени строятся системы комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд. Впервые такие амплитудные системы для задачи Куэтта-Тейлора были построены в работах [1] - [3]. Вид амплитудных систем в точках пересечения неосесимметричных мод зависит от соотношений между азимутальными m и n , осевыми k и l квантовыми числами, а иногда и между фазовыми частотами ω_m и ω_n нейтральных мод. Имеется шесть резонансных соотношений, которым отвечают амплитудные системы с различными дополнительными слагаемыми (см. [4], [5]). В данной работе рассматривается нерезонансный случай $\text{Res } 0$, когда эти соотношения не выполняются. Соответствующая амплитудная система содержит лишь обязательные резонансные слагаемые и имеет вид

$$\begin{aligned} \xi'_{0m} &= \xi_{0m}(\sigma + A|\xi_{0m}|^2 + B|\xi_{1m}|^2 + C|\xi_{0n}|^2 + D|\xi_{1n}|^2), \\ \xi'_{1m} &= \xi_{1m}(\sigma + B|\xi_{0m}|^2 + A|\xi_{1m}|^2 + D|\xi_{0n}|^2 + C|\xi_{1n}|^2), \\ \xi'_{0n} &= \xi_{0n}(\mu + P|\xi_{0m}|^2 + S|\xi_{1m}|^2 + U|\xi_{0n}|^2 + V|\xi_{1n}|^2), \\ \xi'_{1n} &= \xi_{1n}(\mu + S|\xi_{0m}|^2 + P|\xi_{1m}|^2 + V|\xi_{0n}|^2 + U|\xi_{1n}|^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\sigma = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2$, $\mu = \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2$, символ ' обозначает производную по τ . Коэффициенты этой системы выражаются через нейтральные моды Φ_{jp} ($j = 0, 1; p = m, n$), собственные решения сопряженной задачи и решения неоднородных систем, правые части которых зависят от тех же нейтральных мод. Выражения для коэффициентов выписаны в работе [6].

Точки резонанса $\text{Res } 0$ образуют поверхности (двухпараметрические семейства) в четырехмерном пространстве Π параметров задачи R_1, R_2, η, α (иногда число Рейнольдса R_2 заменяется отношением угловых скоростей Ω , $R_2 = \Omega R_1 \eta^2$). Ниже перечислены возможные \mathcal{G} -стационарные решения системы (1), которым отвечают периодические и квазипериодические режимы течения, и приведен численный анализ условий их существования и устойчивости. Заметим, что под устойчивостью того или иного стационарного режима понимается асимптотическая устойчивость порождаемой им орбиты действия группы симметрии. Понятно, что большего утверждать нельзя, поскольку вдоль этой орбиты имеет место только нейтральная устойчивость. Некоторые из условий существования и устойчивости зависят от значений коэффициентов амплитудных уравнений и соотношений между ними. Другие же условия, зависящие также от параметров надкритичности k_1 и k_2 ,

определяют в плоскости (k_1, k_2) области, где изучаемые режимы существуют и устойчивы.

Для расчета выбраны значения азимутальных и осевых квантовых чисел: $m = n = 1$; $k = 1, l = 2$, которым при $\eta = 1.2$ и $-0.525 \leq \Omega \leq 0.6$ (шаг расчета по Ω равен 0.025) соответствует самая близкая к кривой первого перехода нейтральная кривая.

1. *Инверсионно - связанная пара спиральных волн.* Такие решения, у которых лишь одна амплитуда отлична от нуля, представляют собой вторичные периодические режимы.

Инверсионно - связанная пара устойчивых спиральных m - волн (с амплитудами $\xi_{0m} \neq 0$ или $\xi_{1m} \neq 0$) существует, если $\sigma_r > 0$, $A_r < 0$ и $A_r - B_r > 0$. Из результатов расчета следует, что при $-0.525 < \Omega < 0.6$ не существует устойчивых m - спиралей.

Аналогичны условия существования инверсионно - связанных пар устойчивых спиральных n - волн (с амплитудами $\xi_{0n} \neq 0$ или $\xi_{1n} \neq 0$), требуется лишь в формулах для m - спиралей заменить σ_r, A_r и B_r на μ_r, U_r и V_r . Из графиков зависимости

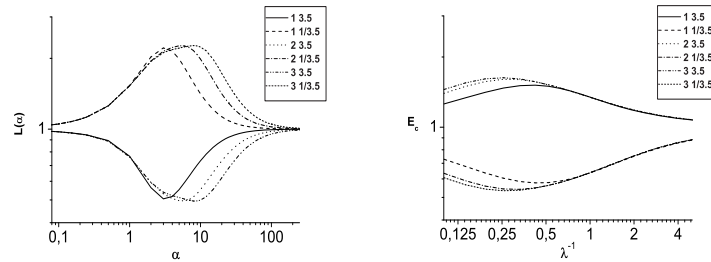


Рис. 1. Слева изображена кривая зависимости коэффициента U_r , справа — кривая зависимости значения $U_r - V_r$ от Ω .

значений U_r и $U_r - V_r$ от Ω следует, что устойчивые спиральные n -волны могут существовать при $-0.525 \leq \Omega \leq 0.655$ в области плоскости надкритичности (k_1, k_2) , где выполняются условия

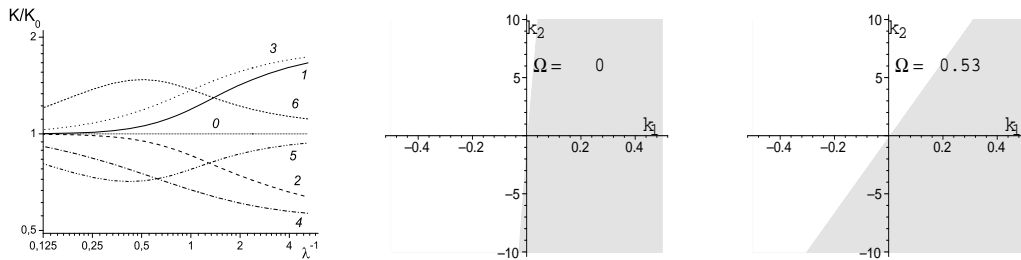


Рис. 2. На рисунках изображены окрашенные в серый цвет области плоскости надкритичности (k_1, k_2) , где существуют и устойчивы спиральные n -волны.

$$\begin{aligned} \mu_{1r}k_1 + \mu_{2r}k_2 > 0, \quad (\sigma_{1r}U_r - \mu_{1r}D_r)k_1 + (\sigma_{2r}U_r - \mu_{2r}D_r)k_2 > 0, \\ (\sigma_{1r}U_r - \mu_{1r}C_r)k_1 + (\sigma_{2r}U_r - \mu_{2r}C_r)k_2 > 0. \end{aligned}$$

Такие области плоскости надкритичности (k_1, k_2) , окрашенные в серый цвет, изображены на рис. 2 при значениях $\Omega = -0.525; 0; 0.53$.

2. *Азимутальные волны.* Решения с двумя ненулевыми амплитудами с равными модулями представляют собой нелинейную смесь пары инверсионно-связанных спиральных m -волн (или n -волн), бегущих вдоль оси цилиндров z навстречу друг другу.

Из результатов расчета следует, что устойчивые азимутальные m -волны с ненулевыми амплитудами ξ_{0m}, ξ_{1m} и n -волны с ненулевыми ξ_{0n}, ξ_{1n} не могут существовать при $\Omega < 0.6$, так как условия существования и устойчивости одновременно не выполняются.

Заметим, что спиральные и азимутальные волны возникают и при переходах общего положения, вне точек пересечения нейтральных кривых.

3. *Инверсионно-связанные двойные спиральные волны.* Такие смешанные режимы с двумя ненулевыми амплитудами представляют собой нестационарные двухчастотные (с частотами ω_m и ω_n) квазипериодические режимы системы Навье-Стокса. Двойная спиральная волна с амплитудами $\xi_{0m} \neq 0, \xi_{1n} \neq 0$, так же как и J- связанная с ней волна с $\xi_{1m} \neq 0, \xi_{0n} \neq 0$ являются нелинейной смесью спиральной m -волны и спиральной n -волны, бегущих вдоль оси z навстречу друг другу. Среди условий существования и устойчивости этих смешанных решений лишь одно $(A_r U_r - D_r S_r > 0)$ не зависит от констант надкритичности.

Из результатов расчета следует (см. рис. 3), что $A_r U_r - D_r S_r > 0$ для $\Omega < -0.35$. Остальные условия определяют область плоскости надкритичности, где такие двойные спиральные волны существуют и устойчивы. Эти области узкие и становятся заметными при $\Omega < -0.425$. Самая большая из рассчитанных областей изображена на рис. 4 при $\Omega = -0.5$.

Двойная спиральная волна с амплитудами $\xi_{0m} \neq 0, \xi_{0n} \neq 0$ и J- связанная с ней с $\xi_{1m} \neq 0, \xi_{1n} \neq 0$ являются нелинейной смесью спиральной m -волны и спиральной n -волны, бегущих вдоль оси z в одном направлении. Такие устойчивые двойные спиральные волны не существуют при $-0.525 \leq \Omega \leq 0.655$.

4. *Суперпозиция азимутальной m - и азимутальной n -волн.* Это решение имеет амплитуды с попарно равными модулями $|\xi_{0m}| = |\xi_{1m}|, |\xi_{0n}| = |\xi_{0n}|$ и представляет собой нестационарный двухчастотный квазипериодический режим –

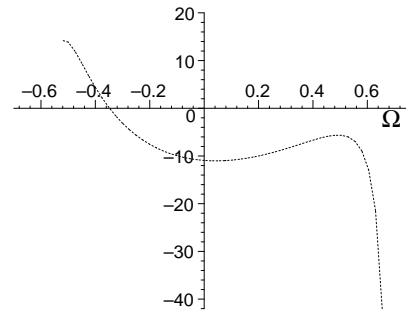


Рис. 3. Кривая зависимости значения $A_r U_r - D_r S_r > 0$ от Ω .

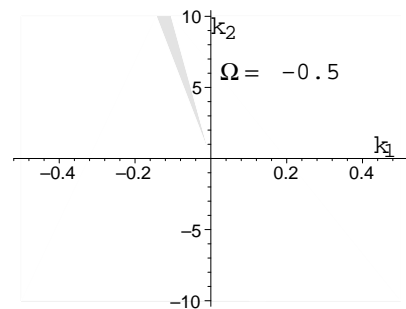


Рис. 4. На рисунке изображена окрашенная область плоскости (k_1, k_2) , где существуют и устойчивы двойные спиральные волны при $\Omega = -0.5$.

нелинейную смесь бегущих вдоль оси z азимутальных m - и n -волн. В рассматриваемых точках резонанса $\text{Res } 0$ такой устойчивый режим не существует.

5. \mathcal{G} - стационарные режимы лишь с одной нулевой амплитудой и \mathcal{G} - стационарные режимы общего положения. Таким решениям отвечают трехчастотные и четырехчастотные квазипериодические режимы системы Навье-Стокса. Они могут существовать, если выполняется условие

$$(A_r - B_r)(U_r - V_r) - (C_r - D_r)(P_r - S_r) = 0.$$

Значения параметров, при которых могут существовать такие режимы, не найдены.

Работа выполнена в рамках ЕНО "Регулярная и хаотическая гидродинамика" (грант РФФИ № 07-01-92213 НЦНИЛ _а).

Список литературы

- [1] В. И. Юдович. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости. Шестой все-союзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Аннотации докладов, с. 661.
- [2] P. Chossat, Y. Demay and G. Iooss. Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette-Taylor. Arch. Rational Mech. Anal., 99, 213–248, 1987.
- [3] P. Chossat and G. Iooss. The Couette-Taylor problem. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] С. Н. Овчинникова, В.И. Юдович. Резонансные режимы при пересечении бифуркаций. Труды международной школы-семинара "Симметрия и косимметрия в динамических системах физики и механики". SCDS-II, 2001, с. 148–153.
- [5] V.I. Yudovich, S.N. Ovchinnikova. Resonances in the intersections of bifurcations in the Couette-Taylor problem. Patterns and Waves, A. Abramian, S. Vakulenko, V. Volpert(Eds.), Saint Petersburg, 2003, pp.55–77.
- [6] В.И. Юдович, С. Н. Овчинникова. Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта-Тейлора. I. Нерезонансный случай. Деп. в ВИНТИ, 6.04.05, №458, В-2005, 33 с.

Morshneva I.V., Ovchinnikova S.N. *A numerical analysis of resonant regimes near the points of codimension-2 bifurcation in the Couette-Taylor problem (case Res 0)*. The present paper is devoted to intersection of bifurcations in the Couette flow between rigid co-axial rotating cylinders. We study interaction between two nonaxisymmetric neutral modes in the Couette–Taylor problem in the intrinsic resonances case (Res 0). We present the results of numerical investigation of existence and stability of stationary solutions of amplitude system which correspond to the periodic and quasi-periodic regimes of Navier-Stokes equations.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ С ДИСЛОКАЦИЯМИ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Наседкин А. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для двумерных задач построены модели упругих тел с краевыми дислокациями и даны классические и обобщенные постановки. С использованием конечно-элементных аппроксимаций получены разрешающие системы метода конечных элементов для задач теории упругости с дислокациями.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с конечно-элементным решением задач для упругих сред с дефектами, моделируемыми краевыми дислокациями. Как известно, дислокации являются одним из типов дефектов кристаллических решеток в материалах и играют важную роль в механизмах развития пластических деформаций и в разрушении [1,2].

Учет дислокаций требует усовершенствования стандартных конечно-элементных технологий применительно к задачам с разрывными решениями. Следует отметить, что в настоящее время только стали появляться исследования, посвященные конечно-элементному моделированию задач механики деформируемого твердого тела с дислокациями. В настоящей работе, опираясь на результаты [3-5], построены модели упругих тел с дислокациями, приведены классические и обобщенные постановки задач, использованы конечно-элементные аппроксимации, получены разрешающие системы метода конечных элементов. Несмотря на то, что в работе описан случай краевых дислокаций, рассматриваемая технология позволяет моделировать и другие виды дислокаций.

Пусть упругое изотропное тело в условиях плоской деформации, характеризующееся тензором упругих модулей \mathbf{c} , занимает область Ω в \mathbb{R}^2 с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Уравнения равновесия упругой среды имеют вид:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, \mathbf{u} – вектор перемещений, ρ – плотность, \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил.

Будем рассматривать только основные граничные условия первого и второго рода. Именно, предположим, что на части границы Γ_σ задан вектор напряжений \mathbf{p}_* , а на оставшейся части границы Γ_u – вектор перемещений \mathbf{u}_* :

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}_*, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_*, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (4)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к Γ .

Предположим, что в теле имеется n_d краевых дислокаций Γ_d^α , $\alpha = 1, 2, \dots, n_d$; $\Gamma_d = \cup_\alpha \Gamma_d^\alpha$ (Рис. 1).

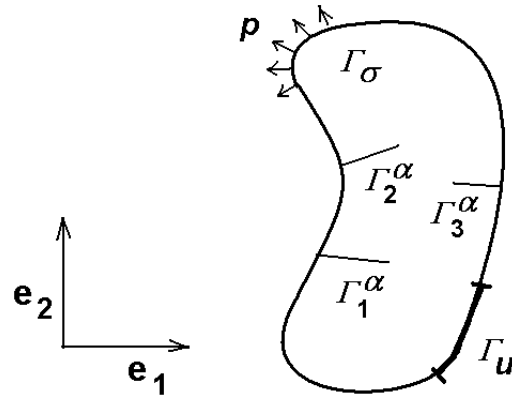
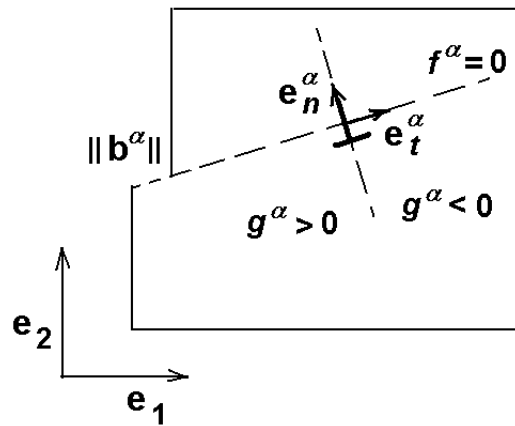


Рис. 1. Упругое тело с границей и дислокациями.

Рис. 2. Представление краевой дислокации через функции f^α и g^α .

Отдельная краевая дислокация Γ_d^α иллюстрируется на рис. 2. Ее геометрия задается плоскостью скольжения $f^\alpha(\mathbf{x}) = 0$ с вектором Бюргерса $\mathbf{b}^\alpha = b^\alpha \mathbf{e}_t^\alpha$ (\mathbf{e}_t^α – единичный вектор направления дислокации) и точкой вершины (ядром) \mathbf{x}_c^α .

Плоскость (или линия) скольжения для дислокации Γ_d^α определяется уравнением:

$$f^\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad f^\alpha(\mathbf{x}) = a_0^\alpha + a_j^\alpha x_j. \quad (5)$$

Вершина \mathbf{x}_c^α краевой дислокации определяется как пересечение с плоскостью скольжения $f^\alpha(\mathbf{x}) = 0$ линии $g^\alpha(\mathbf{x}) = 0$, перпендикулярной данной плоскости. Функция $g^\alpha(\mathbf{x})$ задается таким образом, чтобы величина $|g^\alpha(\mathbf{x})|$ равнялась расстоянию от точки \mathbf{x} до вершины \mathbf{x}_c^α вдоль линии, параллельной вектору Бюргерса \mathbf{b}^α , и чтобы область $g^\alpha(\mathbf{x}) > 0$ соответствовала направлению, противоположному направлению вектора Бюргерса (Рис. 2). В соответствии с данным определением можно записать (суммирование по α отсутствует):

$$g^\alpha(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_c^\alpha - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_t^\alpha. \quad (6)$$

При переходе через плоскость скольжения функция перемещений \mathbf{u} для краевой дислокации Γ_d^α терпит скачок, равный вектору Бюргерса:

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \mathbf{b}^\alpha \Psi^\alpha(\mathbf{x}), \quad f^\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad (7)$$

где $\Psi^\alpha(\mathbf{x})$ – регуляризирующая функция, с помощью которой можно исключить сингулярность решения в вершине дислокации \mathbf{x}_c^α (суммирование по α в (7) нет).

Одним из способов задания регуляризирующей функции является выделение линейного участка от вершины дислокации \mathbf{x}_c^α до некоторой точки \mathbf{x}_{ch}^α , находящейся на линии дислокации на расстоянии h^α в области $g^\alpha(\mathbf{x}) > 0$:

$$\Psi^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & g^\alpha(\mathbf{x}) > h^\alpha, \\ g^\alpha(\mathbf{x}), & 0 \leq g^\alpha(\mathbf{x}) \leq h^\alpha, \\ 0, & g^\alpha(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

При дальнейших конечно-элементных приложениях расстояние h^α удобно выбрать равным размеру конечного элемента, связанного с вершиной \mathbf{x}_c^α . Тогда \mathbf{x}_c^α и \mathbf{x}_{ch}^α будут узлами одного из конечных элементов.

Аналогично случаю обычной упругой среды, используя (1)–(4), можно перейти к обобщенной или слабой постановке задачи. Именно, обобщенным решением назовем вектор-функцию $\mathbf{u} \in H^1(\Omega/\Gamma_d)$, удовлетворяющую главному граничному условию (4), условию нарушению непрерывности при переходе через дислокации (7) и интегральному тождеству

$$\int_{\Omega/\Gamma_d} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p}_* d\Gamma = 0 \quad (9)$$

для произвольных функций $\mathbf{v} \in V$, $V = \{\mathbf{v} \in W_2^1(\Omega/\Gamma_d); \mathbf{v} = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_u\}$.

Для снятия неоднородных главных граничных условий (4) и условий для разрывов (7) разделим перемещения \mathbf{u} на три составляющие:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{in} + \mathbf{u}_d, \quad (10)$$

где \mathbf{u}_0 – неизвестная вектор-функция перемещений, удовлетворяющих однородному главному граничному условию (4), причем $\mathbf{u}_0 \in V$; \mathbf{u}_{in} – известная (специально подобранная) вектор-функция, удовлетворяющая неоднородному главному граничному условию (4); \mathbf{u}_d – известная вектор-функция, удовлетворяющая условиям для разрывов на линиях дислокаций (7), т.е.

$$\mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_{in} = \mathbf{u}_*, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (12)$$

$$[\mathbf{u}_d] = \mathbf{u}_d^+ - \mathbf{u}_d^- = \mathbf{b}^\alpha \Psi^\alpha(\mathbf{x}), \quad f^\alpha(\mathbf{x}) = 0. \quad (13)$$

Подставляя (10) в (9), получаем слабую постановку задачи теории упругости с дислокациями относительно функции \mathbf{u}_0 из того же функционального пространства V , которому принадлежат и проекционные функции \mathbf{v} :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (14)$$

где

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) = \int_{\Omega/\Gamma_d} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0)) d\Omega = \int_{\Omega/\Gamma_d} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0), \quad (15)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p}_* d\Gamma - a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{in}) - a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_d). \quad (16)$$

Для построения конечно-элементных аппроксимаций решения $\mathbf{u}_{0h} \approx \mathbf{u}_0$ обобщенной постановки задачи (14)–(16) выберем конечно-элементную сетку $\Omega_h = \cup_m \Omega^{em}$, $\Omega_h \subset \Omega$, где Ω^{em} – область отдельного конечного элемента с номером m , $m \in I_0$, I_0 – множество номеров конечных элементов из Ω_h . На данной сетке зададимся аппроксимацией вектор-функции перемещений \mathbf{u}_{0h} вида

$$\mathbf{u}_{0h} = \sum_{m \in I_0}^a \mathbf{N}^{emT}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}^{em} = \mathbf{N}_0^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_0, \quad (17)$$

где $\mathbf{N}^{em}(\mathbf{x})$ – матрица функций формы конечного элемента с номером m ; \mathbf{U}^{em} – вектор узловых перемещений элемента с номером m ; \sum^a – операция ансамблирования элементных объектов в глобальные, обычная для метода конечных элементов; $\mathbf{N}_0(\mathbf{x})$ – глобальная матрица функций формы; \mathbf{U}_0 – глобальный вектор узловых перемещений. Отметим, что вектор \mathbf{U}_0 не содержит компонент перемещений в узлах, выходящих на участок границы Γ_{hu} , аппроксимирующий участок Γ_u , и, соответственно, матрица $\mathbf{N}_0(\mathbf{x})$ не содержит функции формы, принимающие значение 1 в узлах, принадлежащих границе Γ_{hu} .

Для составляющих вектора перемещений \mathbf{u}_{in} и \mathbf{u}_d , снимающих неоднородные главные граничные условия и условия для разрывов, соответственно, можно принять конечно-элементные аппроксимации вида:

$$\mathbf{u}_{in} \approx \mathbf{u}_{inh} = \sum_{m \in I_{in}}^a \mathbf{N}^{emT}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}^{em} = \mathbf{N}_{in}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_{in}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d \approx \mathbf{u}_{dh} &= \sum_{\alpha=1}^{n_d} \sum_{m \in I_d^\alpha}^a \mathbf{N}^{emT}(\mathbf{x}) [\Psi^\alpha(\mathbf{x}) \tilde{H}(f^\alpha(\mathbf{x})) - \Psi^\alpha(\mathbf{x}_m) \tilde{H}(f^\alpha(\mathbf{x}_m))] \cdot \mathbf{B}^{\alpha em} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n_d} \mathbf{N}_\alpha^T(\mathbf{x}) [\Psi^\alpha(\mathbf{x}) \tilde{H}(f^\alpha(\mathbf{x})) - \Psi^\alpha \tilde{H}^\alpha] \cdot \mathbf{B}^\alpha, \end{aligned} \quad (19)$$

где \mathbf{U}_{in} – глобальный вектор узловых перемещений для узлов на границе Γ_{hu} ; $\mathbf{B}^{\alpha em}$, \mathbf{B}^α – элементные и глобальные векторы значений Бюргера в узлах дислокаций Γ_d^α ; $\tilde{H}(s)$ – симметризованная функция Хевисайда,

$$\tilde{H}(s) = \begin{cases} 1/2, & s \in [+0, +\infty] \\ -1/2, & s \in [-\infty, -0] \end{cases}, \quad \Psi^\alpha \tilde{H}^\alpha = \sum_{m \in I_d^\alpha}^a \Psi^\alpha(\mathbf{x}_m) \tilde{H}(f^\alpha(\mathbf{x}_m)).$$

Множество индексов I_d^α содержит номера узлов специальной конечно-элементной сетки, окружающей линию дислокаций и переходящей в основную сетку при отступлении от линии дислокации [3-5].

Для проекционных функций \mathbf{v} примем представления, аналогичные (17):

$$\mathbf{v} = \sum_{m \in I_0}^a \mathbf{N}^{emT}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{U}^{em} = \mathbf{N}_0^T(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{U}_0, \quad (20)$$

где $\delta \mathbf{U}_0$ – глобальный вектор виртуальных узловых перемещений.

Подставляя (17) – (20) в (14) – (16) и учитывая произвольность вектора виртуальных узловых перемещений $\delta \mathbf{U}_0$, получаем разрешающую систему уравнений равновесия метода конечных элементов с дислокациями:

$$\mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U}_0 = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} - \sum_{\alpha=1}^{n_d} \mathbf{K}_{ud}^{\alpha} \cdot \mathbf{V}^{\alpha}. \quad (22)$$

Здесь \mathbf{K}_{uu} – обычная матрица жесткости для тела без дислокаций, \mathbf{F} – вектор узловых сил (с учетом ограничений, обусловленных главными граничными условиями) для тела без дислокаций, \mathbf{K}_{ud}^{α} – матрицы дополнительных жесткостей, обусловленных наличием дислокаций Γ_d^{α} с векторами узловых значений Бюргерса \mathbf{V}^{α} .

Как видно из (21), (22), наличие дислокаций приводит к модификации вектора правых частей в уравнении равновесия метода конечных элементов, не затрагивая основную матрицу жесткостей. Кроме того, можно заметить, что формирование добавок $\mathbf{K}_{ud}^{\alpha} \cdot \mathbf{V}^{\alpha}$ аналогично учету главных граничных условий с известными значениями смещений (скачка смещений), равными значениям Бюргерса. Поэтому моделирование напряженно-деформированного состояния упругого тела с множественными дислокациями может быть осуществлено в стандартных конечно-элементных пакетах при реализации в них специальных процедур учета добавочных силовых факторов, вызванных дислокациями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-08-18720, 08-08-00853, 08-08-00873).

Список литературы

- [1] Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. 352 с.
- [2] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 247 с.
- [3] Belytschko T., Gracie R. On XFEM applications to dislocations and interfaces // Int. J. Plasticity. 2007. V. 23. P. 1721-1738.
- [4] Gracie R., Ventura G., Belytschko T. A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities // Int. J. Numer. Meth. Eng. 2007. V. 69. P. 423-441.
- [5] Gracie R., Oswald J., Belytschko T. On a new extended finite element method for dislocations: Core enrichment and nonlinear formulation // J. Mech. & Phys. Solids. 2008. V. 56. P. 200-214.

Nasedkin A.V. *Modelling of elastic bodies with dislocations and finite element approximations.* The models of elastic bodies with edge dislocations are constructed for plane strain problems. The finite element systems for elastic problems with dislocations are obtained by extended finite element method.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ДЕФЕКТАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОКРЫТИЯ

Павлова А.В., Рубцов С.Е., Колесников М.Н.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Волновые поля в неоднородных структурах с покрытиями имеют ряд особенностей, так как наличие последних могут существенно влиять на процессы распространения возмущений и развитие деформаций. Исследуются краевые задачи, описывающие поведение упругого полупространства с покрытиями в условиях гармонических воздействий. В качестве покрытий рассматриваются двумерные деформируемые объекты с усредненными по толщине параметрами.

Проблема создания композиционных структур с заданными механическими свойствами на основе слоистых материалов, упрочнённых включениями и покрытиями, ставит задачу теоретического прогнозирования их свойств.

Решение проблемы безопасного использования материалов в конструкциях непосредственно связано с определением устойчивости материалов, соответствующей переходу от безопасного изменения структуры к ее деградации, приводящей к разрушению.

Рассматриваемая среда представляет собой слой на упругом полупространстве в условиях неидеального контакта между ними. На границе раздела слоев расположено плоское в плане включение, в области которого вектор напряжений претерпевает разрыв. Плоскость включения, параллельна недеформированной поверхности упругой среды.

Полагаем, что в прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , плоскость x_1Ox_2 совпадает с поверхностью среды $(x_3 = 0, -\infty < x_1, x_2 < +\infty)$, а ось Ox_3 направлена вверх. Перемещения точек слоя и полупространства описываются системой уравнений Ламе, которая с учетом установившегося характера движения среды $(\widetilde{\mathbf{u}}_k(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}_k(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t})$ имеет вид

$$(\lambda_k + \mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_k + \mu_k \Delta \mathbf{u}_k + \rho_k \omega^2 \mathbf{u}_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Константы λ_2, μ_2, ρ_2 – соответственно параметры Ламе и плотность слоя. Упругие характеристики и плотность полупространства – λ_1, μ_1, ρ_1 соответственно. В (1) и далее временной множитель опущен.

В плоскости раздела упругих сред $(x_3 = -H)$ имеется жесткое включение. На поверхностях $x_3 \rightarrow -H \pm 0$ действуют напряжения $\mathbf{t}_1^\pm = (\tau_{11}^\pm, \tau_{12}^\pm, \tau_{13}^\pm)$, перемещения точек поверхностей определяются вектором $\mathbf{u}_1^\pm = (u_{11}^\pm, u_{12}^\pm, u_{13}^\pm)$, причем

$$\mathbf{u}_1^+(x_1, x_2, -H + 0) = \mathbf{u}_1^-(x_1, x_2, -H - 0) = \mathbf{u}_1(x_1, x_2, -H), \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty,$$

$$\mathbf{t}_1^+(x_1, x_2, -H + 0) - \mathbf{t}_1^-(x_1, x_2, -H - 0) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_1, \\ \mathbf{t}, & (x_1, x_2) \in \Omega_1. \end{cases}$$

Амплитуды перемещений и напряжений на поверхности основания обозначены соответственно \mathbf{u}_2 и \mathbf{t}_2 .

Далее будем рассматривать описанную среду с включениями как подложку. В качестве покрытий рассматривается двумерный деформируемый объект [1, 2] с усредненными по толщине параметрами, уравнения движения которого в установившемся с частотой ω режиме запишутся [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\rho\omega^2(1-\mu^2)}{E} u_1 + \frac{1-\mu^2}{Eh} \tau_1 &= b_1, \\ \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\rho\omega^2(1-\mu^2)}{E} u_2 + \frac{1-\mu^2}{Eh} \tau_2 &= b_2, \\ \frac{h}{12} \nabla^4 u_3 - \frac{\rho\omega^2(1-\mu^2)}{E} u_3 - \frac{1-\mu^2}{Eh} \tau_3 &= b_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где h – толщина покрытия, μ, E – соответственно модуль сдвига и модуль Юнга, ρ – плотность материала, $u_{1,2}(\mathbf{x})$ – перемещения точек срединной поверхности в плоскости $x_1 O x_2$, $u_3(\mathbf{x})$ – прогиб срединной поверхности, $\tau_i(\mathbf{x})$ – компоненты вектора напряжений \mathbf{t} , $i = \overline{1,3}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

В матричном виде система (2) представима

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{t} = \mathbf{b}.$$

Внешнее воздействие и условия сопряжения покрытия и подложки имеют вид $\mathbf{b} = (b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2), b_3(x_1, x_2))$ при $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ и $\mathbf{b} = 0$ при $(x_1, x_2) \notin \Omega_1$;

$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}_2(x_1, x_2, 0)$, $\mathbf{t}(x_1, x_2) = \mathbf{t}_2(x_1, x_2, 0)$, $\mathbf{u}_2(x_1, x_2, x_3) \rightarrow 0$, при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$, $\mathbf{u}_1(x_1, x_2, x_3) \rightarrow 0$ при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \rightarrow \infty$.

При построении решения задачи применяется принцип предельного поглощения.

Следуя методу исследования задач об установившихся колебаниях слоистых сред с дефектами, представленному в [3, 4] задача для подложки сводится к системе функционально-матричных уравнений. В случае если в качестве подложки рассматривается слой на полупространстве с жестким включением на разделе физико-механических свойств, связь между интегральными характеристиками напряжений и перемещений на границе покрытие/подложка может быть представлена

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{T}_2^- + \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1. \quad (3)$$

Здесь в обозначениях работы [3]

$$\mathbf{K}_2 = (\mathbf{B}_2^- - \mathbf{A}_{12}^- \mathbf{C}_{12}^+)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{12}^- \mathbf{A}_{12}^+), \quad \mathbf{K}_1 = -(\mathbf{B}_2^- - \mathbf{A}_{12}^- \mathbf{C}_{12}^+)^{-1} \mathbf{A}_{12}^- \mathbf{M}^0.$$

Применив к системе дифференциальных уравнений (2) преобразование Фурье по координатам x_1 и x_2 и воспользовавшись соотношениями (3) с учетом условий сопряжения основания и покрытия, получим

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = (\mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{K}_2(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{S}),$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{K}_1(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{U}_1(\alpha_1, \alpha_2).$$

Здесь введены обозначения для Фурье-образов $\mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}\mathbf{t}(x_1, x_2, 0)$, $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}\mathbf{b}(x_1, x_2)$, $\mathbf{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}\mathbf{u}_1(x_1, x_2, -H)$ амплитуд напряжений под покрытием, воздействий и перемещений в плоскости включения.

В случае покрытий конечных размеров соотношения (4) приводят к системе интегральных уравнений. Если покрытие представляет собой совокупность пластин, занимающих ограниченные и полуограниченные области, для завершения постановки задачи необходимо сформулировать условия на границах пластин. Возможные граничные условия, которые ставятся на краях пластин, приведены в работе [1].

Для изучения влияния дефектности подстилающего основания на свойства системы покрытие/подложка в режиме их совместных колебаний рассчитывались вещественные нули и полюса элементов матрицы $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ (4), а также ее определителя при наличии внутреннего включения. Ниже приведены кривые вещественных нулей и полюсов элементов \mathbf{K}_{11} (рис.1) и \mathbf{K}_{33} (рис.2) для среды с жестким включением при следующих безразмерных характеристиках основания и покрытия: $\frac{\rho}{\rho_2} = 3, 8$; $\frac{\mu}{\mu_2} = 2, 6$; $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1, 5$; $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 2$; $\frac{h}{H} = 0, 1$. Пунктирная линия соответствует нулям, сплошная - полюсам.

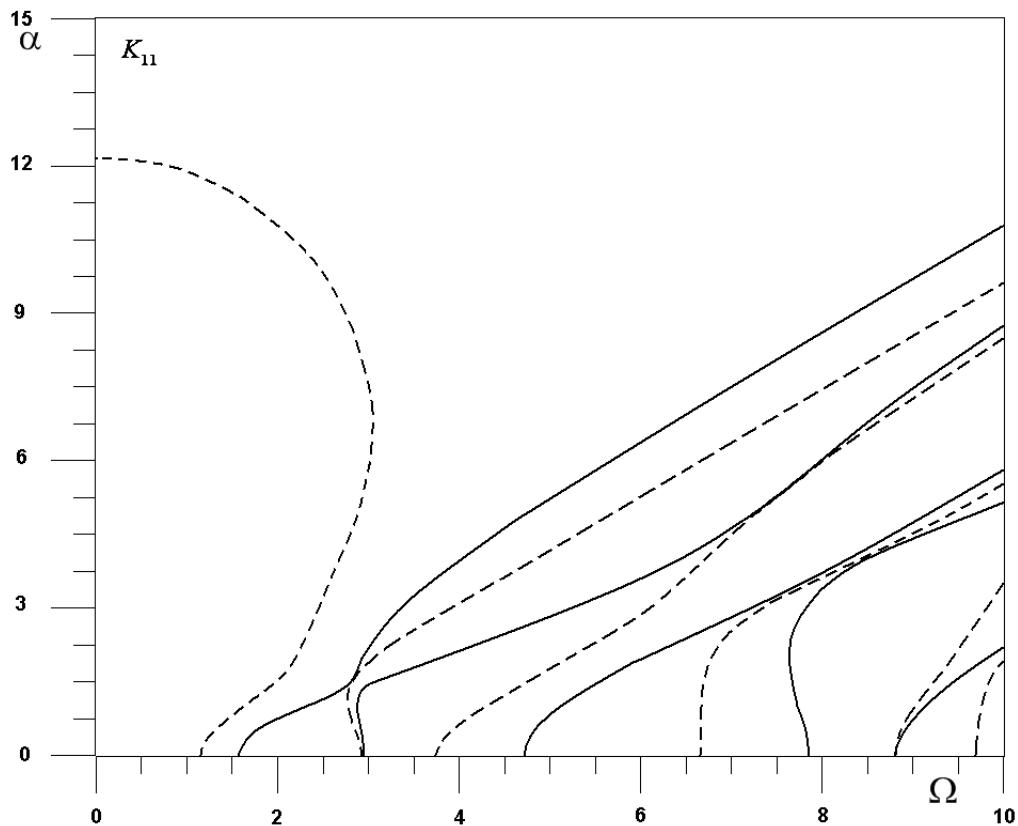


Рис. 1. Кривые нулей и полюсов элемента \mathbf{K}_{11}

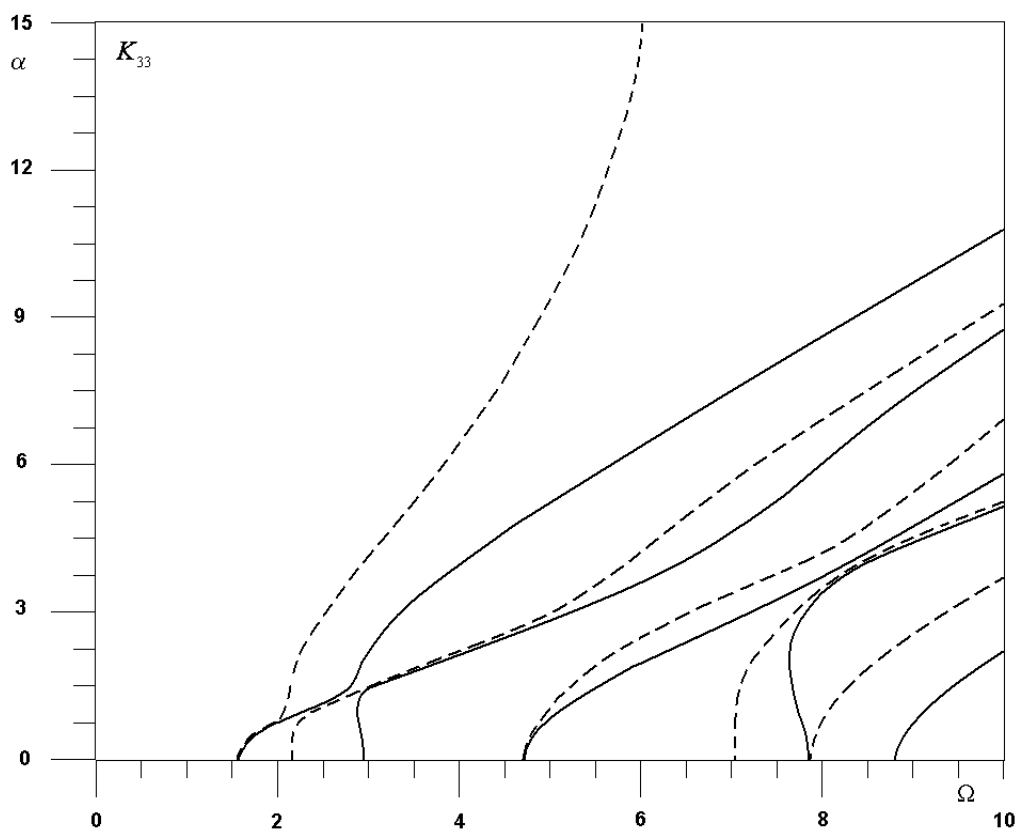


Рис. 2. Кривые нулей и полюсов элемента K_{33}

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (06-01-96638, 08-01-99016, 08-01-99013) и гранта Президента РФ НШ-4839.2006.1

Список литературы

- [1] *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
- [2] *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // Доклады АН. 2006. Т.410. № 1. С. 49–52.
- [3] *Павлова А.В., Рубцов С.Е.* К решению динамических задач для слоистого полупространства с дефектами / Наука технологии: труды XXIV Росс. школы. М.: Изд. РАН, 2004. С. 283–290.
- [4] *Павлова А.В., Рубцов С.Е.* К исследованию установившихся колебаний упругой среды с покрытием при наличии внутренних дефектов / Современные проблемы механики сплошной среды: труды XII межд. коф. Ростов н/Д, 2008. С. 149–151.

Pavlova A.V, Rubtsov S.E., Kolesnikov M.N. The boundary-value problems describing state of half-space with coating and inside defects in the conditions of harmonious influences are investigated. As coverings two-dimensional deformable objects with the parameters averaged on a thickness are considered.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ НЕВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Петровская Н.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача о свободной конвекции жидкости в прямоугольной области в приближении Обербека-Буссинеска. Как показал В. И. Юдович, уравнения Обербека-Буссинеска допускают всего семь различных предельных случаев при стремлении коэффициентов вязкости и теплопроводности к нулю или к бесконечности. Изучаются устойчивые стационарные решения задачи в предельном случае, когда коэффициент вязкости μ стремится к нулю при фиксированном значении коэффициента теплопроводности. Приближенные решения задачи разыскиваются методом Галеркина на основе модели, в которой скорость аппроксимируется одной базисной функцией, а уравнение теплопроводности сохраняется полностью. Исследована эволюция поля температуры при $\mu \rightarrow 0$.

1. Введение

В работе В. И. Юдовича [1] проведен асимптотический анализ уравнений свободной конвекции вязкой жидкости в приближении Обербека-Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \theta \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \delta \Delta \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} , θ и p соответственно безразмерные скорость, отклонение температуры от равновесного профиля и давление; параметры μ и δ (безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности) связаны с числами Прандтля Pr и Рэлея Ra соотношениями

$$\mu = \sqrt{Pr/Ra}, \quad \delta = 1/\sqrt{Pr \cdot Ra}.$$

Рассмотрены все возможные варианты предельных переходов, когда μ , δ стремятся к нулю или к бесконечности — их оказалось всего семь.

Предельные системы, возникающие при $\mu \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ и сохранении величины $\mu \cdot \delta^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, изучены в последующих работах В. И. Юдовича (см. цитированную в [2, 3] литературу). Численное исследование двумерных конвективных течений сильно вязкой, слабо теплопроводной жидкости в подогреваемом снизу горизонтальном слое или круге для полных уравнений Обербека-Буссинеска ([2, 3]) показало, что с течением времени поле температуры стремится к постоянному всюду в области, кроме пограничных слоев на ее границах.

Аналогичные расчеты были проведены для плоского горизонтального слоя со свободными границами для значений параметров, близких к другому предельному случаю — в области *малых* μ . Функция тока ψ и возмущение температуры θ разыскивались в виде

$$\psi = \sum_{m,n} \psi_{mn}(t) \cdot \sin(\alpha m x) \cdot \sin(\pi n z) \quad \theta = \sum_{m,n} \theta_{mn}(t) \cdot \cos(\alpha m x) \cdot \sin(\pi n z) \quad (2)$$

Вычисления показали, что с уменьшением безразмерной вязкости (при фиксированном δ) устанавливаются стационарные конвективные движения. При этом функция тока тем лучше аппроксимируется единственным слагаемым $\psi_{11} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\pi z)$, чем меньше μ , а для аппроксимации температуры, наоборот, приходится учитывать все больше слагаемых ряда Фурье (2). Кроме того, коэффициент ψ_{11} растет пропорционально $1/\sqrt{\mu}$, тогда как коэффициенты θ_{mn} стремятся к конечным пределам порядка $O(1)$, причем существенная их часть — к нулю. Задача становится жесткой, и это не позволяет численно на основе полных уравнений Обербека-Буссинеска исследовать поведение решений при достаточно малых μ .

В статье [4] В. И. Юдович предложил модель свободной конвекции, в которой поле скорости приближается одной модой, а уравнение теплопроводности сохраняется полностью. Для этой модели показано, что при переходе числа Рэлея через критическое значение возникает пара устойчивых стационарных режимов, которые продолжают существовать при всех числах Рэлея, а других стационарных режимов нет. При достаточно больших числах Прандтля эти режимы могут (один раз) потерять устойчивость с возникновением периодических автоколебаний, а при малых Pr они устойчивы. Именно эта модель представляется подходящей для численного исследования двумерной стационарной конвекции при $\mu \rightarrow 0$, $\delta = const$ ($Pr \rightarrow 0$, $Ra \rightarrow \infty$).

2. Конечномерные галеркинские аппроксимации

Двумерные конвективные движения жидкости описываются уравнениями

$$\Delta\psi_t = J(\psi, \Delta\psi) + \mu\Delta^2\psi - \theta_x, \quad \theta_t = J(\psi, \theta) + \delta\Delta\theta - \psi_x \quad (3)$$

где $J(f, g) = f_x g_z - f_z g_x$, $\Delta = (\)_{xx} + (\)_{zz}$, $\psi(x, z, t)$ — функция тока, $\theta(x, z, t)$ — отклонение температуры от линейного распределения в механическом равновесии: $\theta = T - (1 - z)$. Область, занятая жидкостью — квадрат $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, и на ее границе выполняются условия $\psi = 0$, $\theta = 0$.

Замена $t \rightarrow \varepsilon t$, $\psi \rightarrow \psi/\varepsilon$, $\varepsilon = \sqrt{\mu}$, приводит уравнения (3) к форме

$$\Delta\psi_t = J(\psi, \Delta\psi) + \varepsilon^3\mu\Delta^2\psi - \varepsilon^2\theta_x, \quad \theta_t = J(\psi, \theta) + \varepsilon\delta\Delta\theta - \psi_x \quad (4)$$

Функция тока ψ и возмущение температуры θ разыскиваются в виде

$$\psi = \psi_{11}(t) \cdot \sin(\pi i x) \cdot \sin(\pi j z) \quad \theta = \sum_{i+j \leq N} \theta_{ij}(t) \cdot \sin(\pi i x) \cdot \sin(\pi j z)$$

Обычная процедура метода Галеркина приводит к уравнениям

$$\dot{\psi}_{11} = -2\varepsilon^3\pi^2\psi_{11} - \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^L \theta_{2i,1} \frac{i}{4i^2 - 1} \quad (5)$$

$$\dot{\theta}_{pq} = -\varepsilon\delta\pi^2(p^2 + q^2)\theta_{pq} + \frac{\pi^2}{4}\psi_{11} \sum_{i+j \leq 2L+1} \theta_{ij} \cdot A_{ijpq} - \psi_{11} \cdot B_{pq} \quad (6)$$

где $A_{ijpq} = j\alpha_{ip1}\alpha_{1qj} - i\alpha_{1pi}\alpha_{jq1}$; $B_{pq} = 4p/(p^2 - 1)$ при $q = 1$ и p четном, а в остальных случаях $B_{pq} = 0$; $\alpha_{ipk} = 1$ при $k = |i - p|$, $\alpha_{ipk} = -1$ при $k = i + p$, и $\alpha_{ipk} = 0$ в остальных случаях.

Структура уравнений (5)-(6) такова, что уравнения для ψ_{11} и θ_{pq} с нечетной суммой индексов $p + q$ отделяются (образуют «моторную» систему). Для исследования вторичных стационарных движений, возникающих при потере устойчивости механического равновесия жидкости, можно ограничиться этой системой (вторичные равновесия принадлежат инвариантному подпространству, на котором $\theta_{pq} = 0$ при четных $p + q$).

При $\varepsilon = 0$ значения коэффициентов θ_{pq} в равновесии определяются системой *линейных* алгебраических уравнений

$$\frac{\pi^2}{4} \sum_{i+j \leq 2L+1} \theta_{ij} \cdot A_{ijpq} = B_{pq} \quad (7)$$

Уравнения (7) распадаются на две не связанные системы. Одна из них, относительно θ_{pq} с четными значениями p , оказывается однородной и имеет только нулевое решение. Вторая, относительно θ_{pq} с нечетными значениями p , позволяет определить ненулевые компоненты вторичных равновесий. Таким образом, для стационарных движений при $\varepsilon = 0$ как возмущение температуры, так и сама температура оказываются функциями, четными по x и нечетными по z (относительно $x = 1/2$ и $z = 1/2$ соответственно).

3. Результаты вычислений

Конечномерные модели (5)-(6) изучались численно для $2 \leq L \leq 20$. При фиксированном δ параметр μ изменялся от значения, соответствующего потере устойчивости механического равновесия, до значений, близких к нулю (порядка 10^{-6}). Компоненты вторичных равновесий находились путем решения нелинейных систем уравнений, получаемых приравниванием нулю правых частей в (5)-(6). Для исследования устойчивости равновесий по линейному приближению вычислялись собственные значения матрицы линеаризованной системы. Ответвляющиеся от состояния покоя вторичные стационарные движения оставались устойчивыми во всем диапазоне параметров.

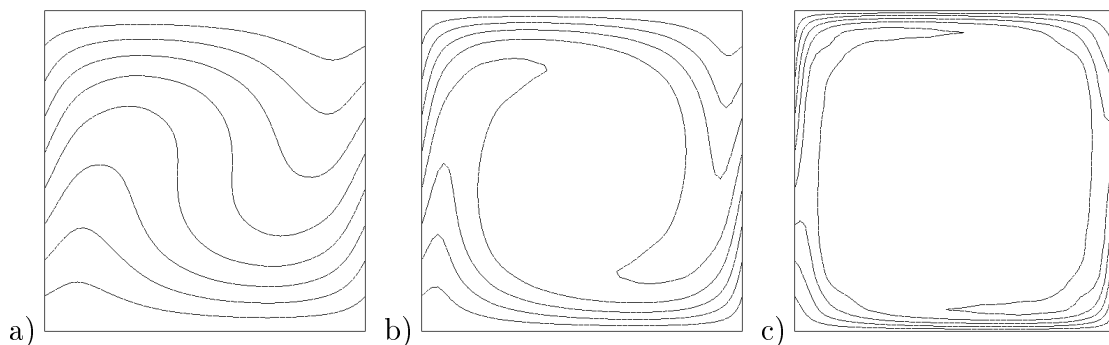


Рис. 1. Изотермы; а) $\mu = 0.013$, б) $\mu = 0.0016$, в) $\mu = 0.000064$.

Эволюция поля температуры в равновесии с уменьшением μ показана на рис. 1, где приведены изотермы для значений безразмерного коэффициента вязкости $\mu = 0.013$ ($Ra = 1.78 \cdot Ra_*$, $Pr = 0.8$), $\mu = 0.0016$ ($Ra = 14.22 \cdot Ra_*$, $Pr = 0.1$) и

$\mu = 0.000064$ ($Ra = 355.6 \cdot Ra_*$, $Pr = 0.004$). Расчеты соответствуют $\delta = 0.016$, Ra_* - критическое число Рэлея, отвечающее потере устойчивости механического равновесия ($Ra_* \approx 2704$). Вблизи границ области возникают пограничные слои, а в центральной части области температура приближается к постоянной — см. рис. 2, где приведены профили температуры $T(z)$ в сечении $x = 1/2$ для тех же значений параметра μ , и график температуры при $\mu = 0.000064$ на рис. 3.

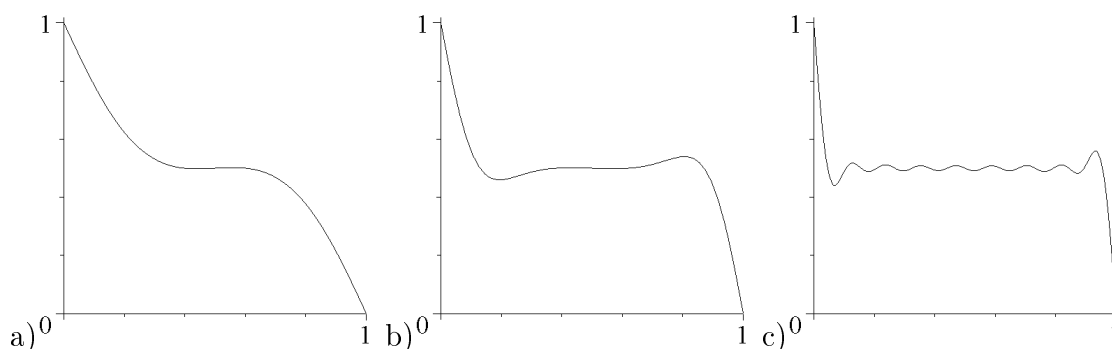


Рис. 2. Профили температуры $T(z)$ в сечении $x = 1/2$; а) $\mu = 0.013$, б) $\mu = 0.0016$, в) $\mu = 0.000064$.

При $\mu \rightarrow 0$ значения коэффициентов θ_{pq} с четными p стремятся к нулю, а значения θ_{pq} с нечетными p стремятся к конечным пределам. Эти предельные значения определяются

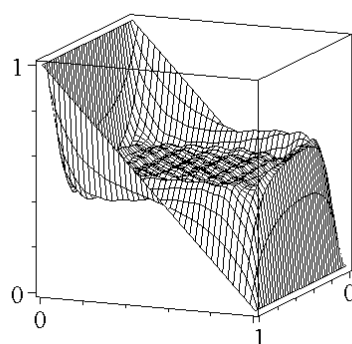


Рис. 3. График температуры при $\mu = 0.000064$.

В таблице 1 приведены предельные значения (при $\mu = 0$) первых шести коэффициентов ряда Фурье для возмущения температуры θ_{mn} (нормированных множителем π^2), рассчитанные при $10 \leq L \leq 20$. Для сравнения в последней строке таблицы приведены соответствующие коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\theta_0(x, z) = (z - 1/2) \cdot \pi^2$. Вычисления демонстрируют сходимость θ_{ij} к соответствующим фурье-коэффициентам функции $\theta_0(x, z)$. Таким образом, оказывается, что температура жидкости стремится к постоянному значению всюду в области, кроме пограничных слоев на ее границах, как и в случае конвекции сильно вязкой и слабо теплопроводной жидкости.

Следует отметить, что предельные значения θ_{mn} определялись путем решения линейной системы алгебраических уравнений (7) с рациональными коэффициен-

тами методом Гаусса, то есть *точно* (в простых дробях) при помощи пакета аналитических вычислений MAPLE, и округлялись только при размещении в таблице.

L	$\pi^2\theta_{12}$	$\pi^2\theta_{14}$	$\pi^2\theta_{32}$	$\pi^2\theta_{16}$	$\pi^2\theta_{34}$	$\pi^2\theta_{52}$
10	-3.967	-1.932	-1.234	-1.227	-0.476	-0.635
12	-3.976	-1.952	-1.262	-1.259	-0.529	-0.682
14	-3.982	-1.964	-1.280	-1.278	-0.562	-0.711
16	-3.986	-1.972	-1.292	-1.291	-0.585	-0.731
18	-3.989	-1.978	-1.300	-1.299	-0.601	-0.745
20	-3.991	-1.982	-1.306	-1.306	-0.613	-0.755
∞	-4.0	-2.0	-1.333	-1.333	-0.667	-0.8

Таблица 1

Работа выполнена в рамках европейского научного объединения «Регулярная и хаотическая гидродинамика» (грант РФФИ 07-01-92213-НЦНИЛ), а также грантов РФФИ 07-01-00389а, 08-01-00895 и гранта АФГИР (CRDF) RUM1-2842-RO-06.

Список литературы

- [1] Юдович В.И. Об уравнениях свободной конвекции в приближении Обербека-Буссинеска. Ростов-на-Дону, 1990. Деп. в ВИНТИ, № 6225-В90. 19 с.
- [2] Жуков М.Ю., Петровская Н.В., Ширяева Е.В. Компьютерный эксперимент по свободной конвекции в сильно вязкой, слабо теплопроводной жидкости. Ростов-на-Дону, 2004. Деп. в ВИНТИ, № 422-В2004. 54 с.
- [3] Жуков М.Ю., Петровская Н.В., Ширяева Е.В. Численное исследование термогравитационной конвекции в плоском горизонтальном слое и круге в случае сильно вязкой, слабо теплопроводной жидкости. // В сб.: Труды X Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов-на-Дону, 2006.
- [4] Yudovich V.I. Об одной бесконечномерной модели свободной конвекции // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана. 1990. Т.26, № 12. С. 1323–1333.

Petrovskaya N.V. *Numerical investigation of 2D convective flows in rectangle domain in the limit case of inviscid heat-conducting fluid.* The results of computer simulation for 2D convective flows are presented. We use Galerkin method to study heat-conducting liquid which fill a rectangle heated from below in the limit case of vanishing viscosity.

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Прозоров О. А., Шлейкель А. Л.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

Проведен анализ спектральных задач конвективной устойчивости, возникающих при использовании двух математических моделей вибрационной конвекции. Построены длинноволновые асимптотики критических параметров. Приведены графики нейтральных кривых.

Исследуется возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости, на который действует высокочастотная вибрация, вдоль вектора $\mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ по закону $\frac{a}{\omega} f(\omega t)$. Предполагается, что слой заполнен слабо неизотермической жидкостью и ограничен снизу твердой стенкой, а сверху свободной недеформирующейся в среднем свободной границей. В работе [1] в качестве модели взяты уравнения Обербека-Буссинеска в обобщенном приближении (ООБ) [2], записанные в подвижной системе координат

$$\begin{aligned} (1 - \kappa \varepsilon T') \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= -\nabla p' + \Delta \mathbf{v}' + (1 - \varepsilon T')(Ga\boldsymbol{\gamma} - \omega Re f(\omega t)\mathbf{s}), \\ \operatorname{div} \mathbf{v}' &= 0, \quad \mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \\ \frac{dT'}{dt} &= Pr^{-1} \Delta T'. \end{aligned} \quad (1)$$

Краевые условия на свободной поверхности $x_3 = \zeta'(x_1, x_2, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}', l') &= \frac{\partial \zeta'}{\partial t}, \quad \frac{\partial T'}{\partial n'} - B_i T' = \delta_1, \\ \tau'_{ik} n'_k - p' n'_i &= 2 \left(C - \frac{Ma}{Pr} T' \right) Kn_i + \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T'}{\partial x_i} n_k n_i. \end{aligned} \quad (2)$$

На твердой стенке $x_3 = 1$:

$$\mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial x_3} + B_0 T' = \delta_2. \quad (3)$$

Задача (1)-(3) содержит безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A\beta h, \quad \omega = \frac{\tilde{\omega} h^2}{\nu}, \quad Re = \frac{ah}{\nu}, \quad Ga = \frac{gh^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \\ Ma &= \frac{A\sigma_T h^2}{p_0 \chi \nu}, \quad C = \frac{\sigma_0 h}{p_0 \nu^2}, \quad Bi = \frac{b_1 h}{k_1}, \quad B_0 = \frac{b_2 h}{k_2}. \end{aligned}$$

В случае $\omega \gg 1$, $a = O(1)$ в [1] был применен метод осреднения. В результате в осредненных уравнениях появилась виброгенная массовая сила [3]:

$$\mathbf{F}_v = Re^2 \langle f'^2 \rangle (\mathbf{w}, \nabla) \nabla \Phi,$$

а в динамическом краевом условии виброгенное напряжение

$$\tau_\nu = -Re^2 \langle f'^2 \rangle \left(\frac{\mathbf{w}^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mathbf{w}, l) \right).$$

Здесь \mathbf{w} и Φ являются решениями краевой задачи

$$\begin{aligned} (1 - \kappa \varepsilon T) \mathbf{w} &= -\nabla \Phi + (1 - \varepsilon T) \mathbf{s}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \\ \Phi(\zeta(x_1, x_2, t)) &= 0, \quad x_3 = 1 : \mathbf{w}_n = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если $\kappa = 0$, то имеем классические уравнения Обербека-Буссинеска. Использование этих двух моделей приводит к различным качественным результатам. В данной статье это показано для случая недеформируемой в среднем свободной границы. При ее исследовании устойчивости квазиравновесного решения приходим к двум спектральным задачам, соответствующим указанным моделям.

Первая спектральная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda Lv &= L^2 v + Ra \alpha^2 \theta - \bar{\mu} \alpha^2 (D\Phi + \theta), \\ \lambda Pr \theta &= L\theta - v, \\ L\Phi &= -D\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad v &= 0, \quad D^2 v - Ma \alpha^2 \theta = 0, \quad D\theta - Bi \theta = 0, \quad \Phi = 0, \\ z = 1 : \quad v &= Dv = 0, \quad D\theta + B_0 \theta = 0, \quad D\Phi + \theta = 0. \end{aligned}$$

где $L = D^2 - \alpha^2$, $D = \frac{d}{dz}$, $\bar{\mu} = \varepsilon^2 Pr (Re \sin \varphi)^2 \langle f'^2 \rangle$ — вибрационный параметр.

Для второй задачи ($\kappa = 0$) спектральная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda Lv &= L^2 v + Ra \alpha^2 \theta - \mu \alpha^2 (\sin \varphi (D\Phi + \theta \sin \varphi) + i \alpha \cos \varphi \Phi) \\ \lambda Pr \theta &= L\theta - v \\ L\Phi &= -i \alpha \cos \varphi \theta - \sin \varphi D\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad v &= 0, \quad D^2 v - Ma \alpha^2 \theta = 0, \quad D\theta - Bi \theta = 0, \quad \Phi = 0. \\ z = 1 : \quad v &= Dv = 0, \quad D\theta + B_0 \theta = 0, \quad D\Phi + \sin \varphi \theta = 0. \end{aligned}$$

где $\mu = \varepsilon^2 Pr Re^2 \langle f'^2 \rangle$.

Как видно, в первой задаче вибрация характеризуется одним параметром $\bar{\mu}$, а во вторую задачу угол φ и параметр μ входят отдельно. При $\varphi = \pi/2$ эти задачи совпадают. Задачи (5) и (6) были исследованы численными и асимптотическими методами.

Получено, что в (5) имеет место только монотонная потеря устойчивости ($\lambda = 0$). В задаче (6) монотонная неустойчивость существует при $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, в

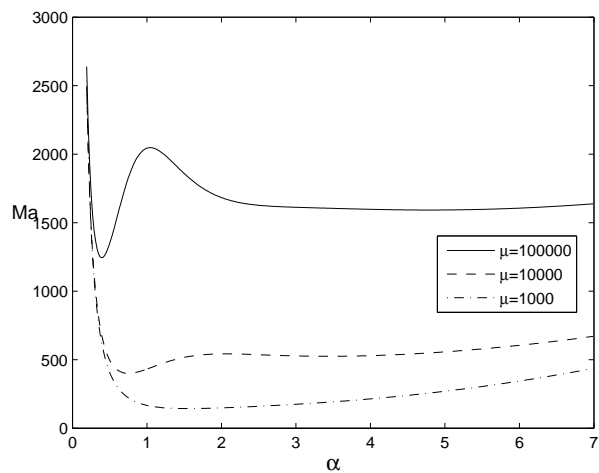


Рис. 1. Зависимость $Ma(\alpha)$ при $\mu = 10^3, 10^4, 10^5$

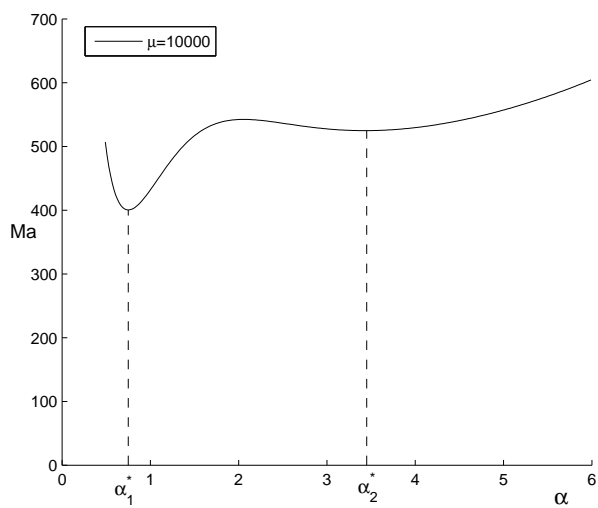
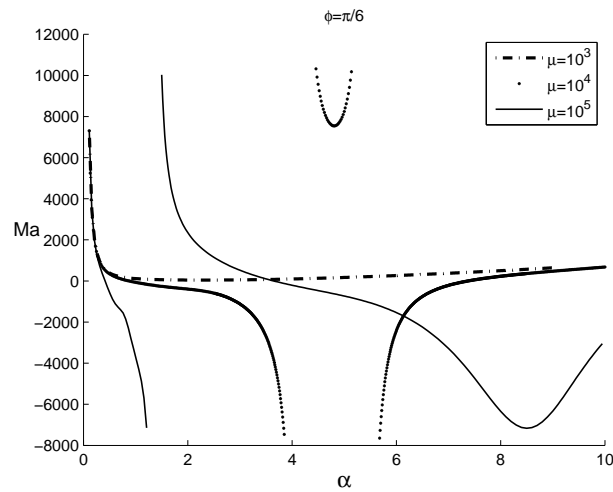
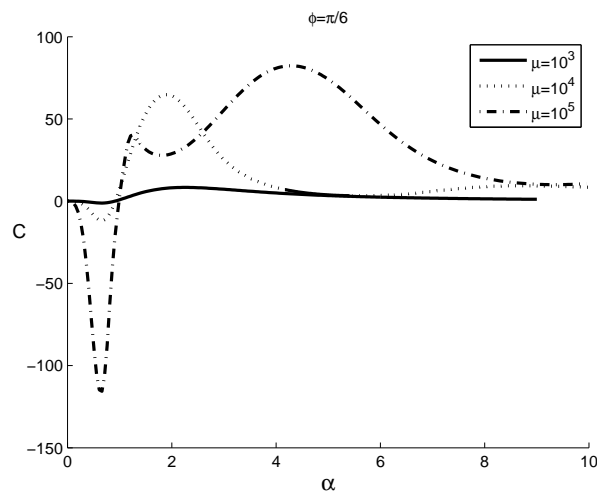


Рис. 2. Зависимость $Ma(\alpha)$

Рис. 3. $Ma(\alpha)$: $\mu = 10^3, 10^4, 10^5$, $\varphi = \pi/6$ Рис. 4. $C(\alpha)$: $\mu = 10^3, 10^4, 10^5$, $\varphi = \pi/6$

остальных случаях неустойчивость — колебательная. Поведение нейтральных кривых изображено на рис. 1-4.

При исследовании задачи (1) получено с увеличением параметра μ нейтральные кривые поднимаются вверх и появляется второй минимум (рис. 2). Наименьшее значение числа Ma достигается на первом минимуме, для которого волновое число α^* уменьшается с ростом μ .

При малых волновых числах имеет место асимптотика

$$Ma(\alpha) = \frac{80(1 + Bi)}{\alpha^2} + O(1), \quad Bi \neq 0, \quad B_0 = \infty. \quad (7)$$

$$Ma(\alpha) = \frac{48Bi}{\alpha^2} + \left[48 - \frac{3}{20}Ra + Bi \left(\frac{96}{5} + \frac{89}{3150}\mu - \frac{289}{6300}Ra \right) \right], \quad B_0 = 0. \quad (8)$$

Во вторую задачу (6) угол φ и параметр $\mu = \varepsilon^2 Re^2 < f'^2 >$ входят отдельно,

поэтому были построены нейтральные кривые для $\varphi = \pi/6$ и $\mu = 10^3, 10^4, 10^5$. Для построения нейтральных кривых колебательной неустойчивости, полагаем $\lambda = ic$, строим трансцендентное уравнение, связывающее параметры задачи, из которого находим значения $c(\alpha, Pr, \mu, \varphi, Ra, Bi)$ и $Ma(\alpha, Pr, \mu, \varphi, Ra, Bi, c)$. Условие $Im(Ma) = 0$ приводит к уравнению для нахождения частоты нейтральных колебаний c . При малых волновых числах имеет место асимптотика

$$c(\alpha, \varphi, \mu) = \mu \sin 2\varphi c_0 \alpha^3 + o(\alpha^3), \quad Ma(\alpha, \varphi, \mu) = \frac{M_0}{\alpha^2} + M_2(\mu, \varphi). \quad (9)$$

На рис. 3 изображены нейтральные кривые $Ma(\alpha)$, при

$$Pr = 0.01, \quad Bi = 0.1, \quad Ra = 0, \quad B_0 = \infty, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

и $\mu = 10^3, 10^4, 10^5$. Из этого рисунка видно, что с некоторого значения параметра μ появляются разрывы нейтральных кривых, которые сдвигаются влево с ростом μ . На рис. 4 представлена зависимость $c(\alpha)$ при тех же значениях параметров.

Таким образом, анализ спектральных задач показал, что учет переменной плотности в инерционных членах меняет вид осредненных уравнений и оказывает существенное влияние на условие возникновения вибрационной конвекции в слое неоднородной жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00587, 07-0100099-а).

Список литературы

- [1] Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. 2002. Т. 66. вып. 4.
- [2] Lyubimov D. V. Thermovibrational flows in a fluid with a free surface // Microgravity Quarterly. 1994. V. 4. P. 117-122.
- [3] Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. №3 с. 26-158.

Prozorov O.A., Sheykel A. L. *On the onset of convection in vibrating nonhomogeneous fluid.* Thermocapillar convection in vibrating fluid is studied. Two different models for convection are used. It's shown that monotonic instability is developed in the model following from generalized Oberbeque - Boussinesq equation. Use of classical Oberbeque - Boussinesq leads to oscillatory instability. Both models are studied numerically and asymptotically. Neutral stability curves are plotted.

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ревина С. В.

*Южный федеральный университет
Южный математический институт, Владикавказ*

Рассматривается задача устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений, когда один из пространственных периодов стремится к бесконечности (волновое число α стремится к нулю). Для основного течения вида: $\mathbf{v} = (0, 0, V_3(x_1, x_2))$ получены явные формулы главных членов асимптотики в двух случаях: когда среднее продольной компоненты скорости $\langle V_3 \rangle = 0$ и когда это среднее отлично от нуля. Показано, что в отсутствие вырождений, происходит колебательная потеря устойчивости.

1. Введение. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерном пространстве $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 и x_3 с периодами L_1, L_2 и L_3 соответственно. Поле скоростей \mathbf{v} и давление p удовлетворяют системе уравнений Навье – Стокса и условию несжимаемости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость.

В качестве краевых условий задаются условия периодичности поля скорости \mathbf{v} по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 с периодами L_1, L_2, L_3 соответственно. Предполагается, что $L_3 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \rightarrow 0$. Пусть $z = \alpha x_3$. Тогда поле скоростей периодически по z с периодом 2π .

Всюду в дальнейшем через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по переменным x_1, x_2 :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2,$$

а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по параллелепипеду периодов:

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \quad \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, 2\pi].$$

Среднее значение скорости \mathbf{v} считается заданным:

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}.$$

Длинноволновая асимптотика ($\alpha \rightarrow 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных течений $\mathbf{v} = (0, V_2(x))$ получена в [1]. Исследованию автоколебаний, возникающих при потере устойчивости параллельных течений относительно длинноволновых возмущений, посвящена работа [2]. Линейная задача устойчивости трехмерных стационарных течений вида $\mathbf{v} = (\alpha V_1, \alpha V_2, V_3)$, $\langle V_3 \rangle \neq 0$ рассмотрена в [3]. В частности, показано, что если среднее продольной компоненты скорости отлично от нуля, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости.

Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [4–5].

Настоящая работа посвящена исследованию задачи устойчивости стационарного течения вида

$$\mathbf{v} = (0, 0, V_3(x_1, x_2)). \tag{1}$$

в двух случаях: когда $\langle V_3 \rangle = 0$ и когда $\langle V_3 \rangle \neq 0$. Явно найдены первые члены асимптотики по параметру α собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи.

2. Линейная задача устойчивости. Для нормальных возмущений вида $u = \varphi(x_1, x_2, z)e^{\sigma t}$ получается спектральная задача:

$$\sigma \varphi_j + \alpha V_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} - \nu_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_j = -\frac{\partial P}{\partial x_j}, \tag{2}$$

$$\sigma \varphi_3 + \alpha V_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \varphi_s \frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \nu_c \left(\Delta_0 + \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_3 = -\alpha \frac{\partial P}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_s} + \alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0, \quad \langle \langle \varphi \rangle \rangle = 0. \tag{4}$$

Здесь $\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — плоский оператор Лапласа, индексы j, s меняются от 1 до 2, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Неизвестные собственные значения, собственные функции и критическое значение вязкости ν_c будем разыскивать в виде рядов по параметру α :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k, & \nu_c &= \nu^* + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha^k, \\ \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \alpha^k, & P &= \sum_{k=0}^{\infty} P^k \alpha^k. \end{aligned}$$

Приравнивая в системе (2)–(4) выражения при α^0 : выводим, что коэффициент $\sigma_0 = 0$, функции φ_j^0 и P^0 зависят только от z : $\varphi_j^0 = \varphi_j^0(z)$ и $P^0 = P^0(z)$, а φ_3^0 имеет вид:

$$\varphi_3^0 = \frac{1}{\nu^*} \varphi_s^0(z) \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s},$$

где $\Delta_0 \theta_3(x_1, x_2) = V_3 - \langle V_3 \rangle$, $\langle \theta_3 \rangle = 0$.

Приравнивая выражения при α^1 , из (2)–(4) выводим равенства:

$$\sigma_1 \varphi_j^0(z) + V_3 \frac{d\varphi_j^0}{dz} - \nu^* \Delta_0 \varphi_j^1 = -\frac{\partial P^1}{\partial x_j}, \quad (5)$$

$$\sigma_1 \varphi_3^0 + V_3 \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial z} + \varphi_s^1 \frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \nu^* \Delta_0 \varphi_3^1 - \nu_1 \Delta_0 \varphi_3^0 = -\frac{dP^0}{dz}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi_s^1}{\partial x_s} + \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial z} = 0, \quad \langle\langle \varphi_k^1 \rangle\rangle = 0. \quad (7)$$

После осреднения уравнения (5) приходим к задаче для нахождения σ_1 , φ_j^0 :

$$\sigma_1 \varphi_j^0(z) + \langle V_3 \rangle \frac{d\varphi_j^0}{dz} = 0, \quad \varphi_j^0(z + 2\pi) = \varphi_j^0(z).$$

откуда, если $\langle V_3 \rangle \neq 0$, то $\sigma_1 = im \langle V_3 \rangle$, $\varphi_j^0(z) = C_j^0 e^{-imz}$. Если же $\langle V_3 \rangle = 0$, получаем: $\omega_0^1 = 0$, $\varphi_j^0(z)$ — остаются неопределенными.

Из (5), (7) найдем P^1 и φ_j^1 :

$$P^1 = -2 \frac{d\varphi_j^0}{dz} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_j} + \langle P^1 \rangle, \quad \varphi_j^1 = \frac{1}{\nu^*} \frac{d\varphi_s^0}{dz} \left[\theta_3 \delta_{js} - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \right] + \langle \varphi_j^1 \rangle,$$

средние P^1 и φ_j^1 пока не определены, функция F_3 определяется из уравнений: $\Delta_0 F_3(x_1, x_2) = \theta_3$, $\langle F_3 \rangle = 0$.

Из (6) находим

$$\varphi_3^1 = \frac{1}{\nu^{*2}} \frac{d\varphi_s^0}{dz} G_s + \frac{1}{\nu^*} \langle \varphi_s^1 \rangle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} - \frac{\nu_1}{\nu^*} \varphi_3^0, \quad (8)$$

где функция G_s определяется как решение задачи

$$\Delta_0 G_s = \left(\theta_3 \delta_{js} - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \right) \frac{\partial V_3}{\partial x_j} + \Delta_0 \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s}, \quad \langle G_s \rangle = 0. \quad (9)$$

Приравнивая выражения при α^2 , из (2)–(4) выводим равенства:

$$\sigma_2 \varphi_j^0(z) + \Delta_0 \theta_3 \frac{\partial \varphi_j^1}{\partial z} - \nu^* \Delta_0 \varphi_j^2 - \nu_1 \Delta_0 \varphi_j^1 - \nu^* \frac{d^2 \varphi_j^0}{dz^2} = -\frac{\partial P^2}{\partial x_j}, \quad (10)$$

$$\sigma_2 \varphi_3^0 + \Delta_0 \theta_3 \frac{\partial \varphi_3^1}{\partial z} + \varphi_s^2 \frac{\partial V_3}{\partial x_s} - \nu^* \Delta_0 \varphi_3^2 - \nu_1 \Delta_0 \varphi_3^1 - \nu_2 \Delta_0 \varphi_3^0 - \nu^* \frac{d^2 \varphi_3^0}{dz^2} = -\frac{\partial P^1}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_s^2}{\partial x_s} + \frac{\partial \varphi_3^1}{\partial z} = 0, \quad \langle\langle \varphi_k^2 \rangle\rangle = 0. \quad (12)$$

Для нахождения среднего $\langle \varphi_j^1 \rangle$ осредним уравнение (10) по переменным x_1, x_2 :

$$\langle V_3 \rangle \left[im \langle \varphi_j^1 \rangle + \frac{d}{dz} \langle \varphi_j^1 \rangle \right] = \frac{1}{\nu^*} (\nu^{*2} \delta_{js} - a_{js}) \frac{d^2 \varphi_s^0}{dz^2} - \sigma_2 \varphi_j^0(z), \quad (13)$$

где компоненты матрицы $A = \{a_{js}\}$ определяются формулой:

$$a_{js} = 2 \left\langle \frac{\partial \theta_3}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_3}{\partial x_s} \right\rangle - \delta_{js} \langle (\nabla_0 \theta_3)^2 \rangle. \quad (14)$$

Если $\langle V_3 \rangle \neq 0$, то из условия разрешимости уравнения (13) находим $\sigma_2 = 0$. Нулевой член разложения критического значения вязкости является собственным значением матрицы A : $AC^0 = \nu^{*2} C^1$ и

$$\nu^{*2} = \sqrt{-\det A} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}. \quad (15)$$

Если же $\langle V_3 \rangle = 0$, то уравнение (13) принимает вид

$$\frac{1}{\nu^*} (\nu^{*2} \delta_{js} - a_{js}) \frac{d^2 \varphi_s^0}{dz^2} - \sigma_2 \varphi_j^0(z) = 0. \quad (16)$$

Отсюда $\varphi_j^0(z) = C_j^0 e^{-imz}$, уравнение (16) совпадает с условием разрешимости уравнения (13) в случае $\langle V_3 \rangle \neq 0$. Поэтому для σ_2 , ν^{*2} получаем те же выражения.

Из (10) находим P^2 , φ_j^2 . Выражения этих функций одинаковы в рассматриваемых случаях и не приводятся здесь ввиду громоздкости.

В осредненном по x_1, x_2 уравнении (2) выпишем слагаемые при α^3 . После преобразований выражение принимает вид:

$$\begin{aligned} \langle V_3 \rangle \left[im \langle \varphi_j^1 \rangle + \frac{d}{dz} \langle \varphi_j^1 \rangle \right] = & -(\sigma_3 + 2m^2 \nu_1) \varphi_j^0(z) - \\ & -i \frac{m^3}{\nu^{*2}} f_{js} \varphi_s^0(z) - \frac{1}{\nu^*} \frac{d^2 \langle \varphi_s^1 \rangle}{dz^2} (a_{js} - \nu^{*2} \delta_{js}). \end{aligned} \quad (17)$$

где через f_{js} обозначено следующее выражение:

$$f_{js} = \langle \delta_{js} \theta_3^2 \Delta_0 \theta_3 - 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_s \partial x_j} \theta_3 \Delta_0 \theta_3 + 2 \frac{\partial Q_s}{\partial x_j} \theta_3 \rangle.$$

Если $\langle V_3 \rangle \neq 0$, то среднее $\langle \varphi_j^1 \rangle$ имеет вид: $\langle \varphi_j^1 \rangle = \beta C_j^1 e^{-imz}$, где C^1 есть собственный вектор матрицы A : $AC^1 = -\nu^{*2} C^1$. Из условия разрешимости уравнения (17) получаем:

$$\begin{aligned} \nu_1 = 0, \quad \sigma_3 = & -i \frac{m^3}{\nu^{*2}} \xi_1, \\ \operatorname{Re} \beta = 0, \quad \operatorname{Im} \beta = & -\frac{m}{2\nu^{*3}} \xi_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются из уравнения $f_{js} C_s^0 = \xi_1 C_j^0 + \xi_2 C_j^1$.

Пусть $\langle V_3 \rangle = 0$. Тогда уравнение (17) после упрощений принимает вид:

$$\frac{1}{\nu^*} (a_{js} - \nu^{*2} \delta_{js}) \frac{d^2 \langle \varphi_s^1 \rangle}{dz^2} = -(\sigma_3 + 2m^2 \nu_1) \varphi_j^0(z) - i \frac{m^3}{\nu^{*2}} f_{js} \varphi_s^0(z). \quad (19)$$

Снова подставляя среднее в виде $\langle \varphi_j^1 \rangle = \beta C_j^1 e^{-imz}$ и приравнявая коэффициенты при C^0 , C^1 , приходим к выражениям (18).

Таким образом, для трехмерного сдвигового основного течения главные члены асимптотики собственных значений и собственных функций линейной спектральной задачи совпадают. Если $\xi_1 \neq 0$, то в обоих случаях происходит колебательная потеря устойчивости.

Список литературы

- [1] Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М., Наука. 1966. С. 242–249.
- [2] Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
- [3] Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.
- [4] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 29–41.
- [5] Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 41–56.

Revina S.V. *The stability problem of 3-D shearing motion streams of viscous flow with respect to long-wave length disturbances.* We consider the stability problem of stationary 3-D spatially-periodic stream $\mathbf{v} = (0, 0, V_3(x_1, x_2))$ with respect to long-wave length disturbances in two cases $\langle V_3 \rangle = 0$, $\langle V_3 \rangle \neq 0$, when one of the periods goes to infinity (the wave number α goes to zero). The explicit formulas for the main asymptotic terms are obtained. When nondegeneracy conditions are fulfilled the oscillating loss of stability takes place.

ОЦЕНКИ ВОЗМУЩЕННОЙ ПОЛУГРУППЫ ОЗЕЕНА

Саонов Л.И.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону.

Южный математический институт, Владикавказ.

Исследуется вопрос об условиях, при которых возмущенная полугруппа операторов Озеена допускает степенные оценки, аналогичные оценкам невозмущенной полугруппы Озеена. Установлено, что указанный факт имеет место, если возмущенный оператор Озеена не имеет собственных значений в замыкании правой полуплоскости. В частности, результат справедлив для малых в определенном смысле возмущений. Доказательство основано на результатах об обратимости элементов некоторой банаховой алгебры оператор-функций, которые получаются применением локального принципа Аллана-Дугласа.

Нестационарное движение несжимаемой вязкой жидкости при обтекании тела описывается следующей начально-краевой задачей для системы Навье - Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - (u, \nabla)u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{t=0} = a, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\infty} = u_{\infty} \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – внешность обтекаемого тела, u – поле скорости жидкости, p – функция давления, f – поле внешних сил, ν – коэффициент вязкости.

Осуществляя линеаризацию на постоянном решении $u = u_{\infty}(1, 0, 0)(f = 0)$, получаем линеаризованную систему Озеена (Стокса при $u_{\infty} = 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - u_{\infty} \partial_1 u - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{t=0} = a, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\infty} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Эволюционный оператор системы (2) $u(t) = T(t)a$ определен в подходящем банаховом пространстве и образует аналитическую полугруппу, называемую полугруппой Озеена (Стокса при $u_{\infty} = 0$).

В исследованиях системы Навье-Стокса полугрупповыми методами важную роль играют оценки указанных полугрупп. (См. [1] и приведенную там библиографию об оценках полугруппы Стокса; [2], [3] – об оценках полугруппы Озеена.)

В данной работе исследуется вопрос об условиях, при которых для возмущенной полугруппы Озеена $\tilde{T}(t)$, связанной с линеаризованной системой Озеена

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - u_{\infty} \partial_1 u - (v, \nabla)u - (u, \nabla)v - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{t=0} = a, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\infty} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

выполняются оценки, аналогичные оценкам невозмущенной полугруппы. При малых возмущениях оценки могут быть получены непосредственно при исследовании интегрального уравнения для возмущенной полугруппы. В общем случае они

получаются в качестве следствия результатов об обратимости в некоторой банаховой алгебре оператор-функций. Обратимость оператор-функций исследуется на основе локального принципа Аллана - Дугласа [4].

Возмущенный оператор Озеена

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – внешняя область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 , $L_p^3(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) – пространство трехмерных векторных полей на Ω , $W_p^k(\Omega)$, $k = 1, 2$ – соболевские пространства векторных полей, $\dot{W}_p^1(\Omega)$ – подпространство в $W_p^1(\Omega)$, состоящее из полей с нулевым следом на границе $\partial\Omega$. Обозначим через $S_p(\Omega)$ – подпространство в $L_p^3(\Omega)$, являющееся замыканием множества всех финитных гладких соленоидальных полей в области Ω . Известно ([5], [6]), что оператор Π ортогонального проектирования из $L_p^3(\Omega)$ на подпространство $S_2(\Omega)$ определяет ограниченный проектор $\Pi : L_p(\Omega) \rightarrow S_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$), называемый гидродинамическим проектором.

Рассмотрим действующий в пространстве $S_p(\Omega)$ оператор Озеена

$$A = \Pi(\Delta - u_\infty \partial_1) \quad (4)$$

с областью определения $D(A) = S_p(\Omega) \cap W_p^2(\Omega) \cap \dot{W}_p^1(\Omega)$.

Оператор Озеена порождает в любом пространстве $S_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) аналитическую полугруппу $T(t)$, для которой справедливы оценки

$$\|T(t)\Pi\partial^\alpha\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq}^\alpha t^{-|\alpha|/2 - 3/2(1/p - 1/q)},$$

где $1 < p \leq q < \infty$ при $\alpha = 0$; $3/2 \leq p \leq q < \infty$ при $|\alpha| = 1$.

При фиксированном значении $u_\infty \neq 0$ данные оценки установлены в [2] методом гидродинамических потенциалов, в [3] они получены независимо и иными методами, причем доказана их равномерность по параметру $u_\infty \in (0, r)$.

Вместе с оператором A рассмотрим возмущенный оператор $\tilde{A} = A + B$, где $Bu = -\Pi((u, \nabla)v + (v, \nabla)u)$.

Справедлива

Лемма 1. Пусть v – соленоидальное поле, причем $v, \partial_j v \in L_\infty^3(\Omega)$. Тогда возмущенный оператор \tilde{A} с областью определения $D(\tilde{A}) = D(A)$ порождает в любом пространстве $S_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) аналитическую полугруппу $\tilde{T}(t)$.

Алгебра оператор-функций $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}(End X)$

Пусть X – банахово пространство, $End X$ – банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в X . Обозначим через $C_{\alpha,\beta}(End X)$ пространство оператор-функций $U = U(t)$ на $[0, \infty)$ со значениями в $End X$, которое является пополнением в норме

$$\|U\|_{\alpha,\beta} = \sup_{t>0} \|t^\alpha(1+t)^\beta U(t)\|$$

множества $C_0(End X)$ всех непрерывных на $[0, \infty)$ финитных оператор-функций. В $C_{\alpha,\beta}(End X)$ введем операцию свертки $U * V$, полагая

$$(U * V)(t) = \int_0^t U(t - \tau)V(\tau)d\tau.$$

При $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha + \beta > 1$ (далее всегда предполагается выполненным) справедлива оценка

$$\|U * V\|_{\alpha, \beta} \leq c \|U\|_{\alpha, \beta} \|V\|_{\alpha, \beta},$$

где константа c не зависит от U и V .

Присоединив к алгебре $C_{\alpha, \beta}(End X)$ единичный оператор I , получим алгебру $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$, топологически изоморфную банаховой алгебре ограниченных операторов вида T_A , действующих на пространстве $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$ посредством формулы

$$T_A B = A * B,$$

где для элементов $A = \lambda I + U$, $B = \mu I + V$, $U, V \in C_{\alpha, \beta}(End X)$ произведение определяется формулой:

$$A * B = \lambda \mu I + \lambda V + \mu U + U * V.$$

Норма в $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$ определяется как операторная норма.

На элементах $A = \gamma I + B(t)$ алгебры $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$ определим преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}_z(\gamma I + B(t)) = \begin{cases} \gamma I + \int_0^{\infty} B(t) e^{itz} dt, & Im z \geq 0, \\ \gamma I, & z = \infty, \end{cases} \quad (5)$$

где $\gamma \in \mathbb{C}$, $B(t) \in C_{\alpha, \beta}(End X)$.

Преобразование Фурье \mathcal{F}_z является топологическим гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$ в алгебру $End X$.

В центре алгебры $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$ выделим подалгебру элементов вида aI , где $a \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End \mathbb{C})$. Пространство максимальных идеалов этой алгебры совпадает с одноточечной компактификацией Π_+ полуплоскости $\{Im z \geq 0\}$, а преобразование Гельфанда совпадает с преобразованием Фурье \mathcal{F}_z (5).

Рассмотрим идеал

$$J_{z_0} = \text{clos} \left\{ \sum_{j=1}^n (a_j I) * A_j, A_j \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X), a_j \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}[0, \infty), \mathcal{F}_{z_0} a_j = 0 \right\}.$$

Здесь clos означает замыкание множества в норме $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$.

Справедлива

Лемма 2. Пусть $\alpha > 1/2$. Элемент $A \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$ принадлежит идеалу J_{z_0} тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_{z_0}(A) = 0$.

Выясним условия обратимости оператор-функции A в алгебре $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$. Согласно локальному принципу Аллана-Дугласа элемент A обратим в алгебре $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$ тогда и только тогда, когда для любого $z_0 \in \Pi_+$ фактор-класс $A + J_{z_0}$ обратим в фактор-алгебре $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X) / J_{z_0}$. Сформулируем условия обратимости в терминах преобразования Фурье.

Если A обратима в $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$, то $\mathcal{F}_z(A)$ – обратимый оператор для любой точки $z \in \Pi_+$. Обратно, предположим, что $\mathcal{F}_z(A)$ обратим для любого $z \in \Pi_+$. Пусть $z_0 \neq \infty$ и $B = [\mathcal{F}_{z_0}(A)]^{-1}$. Рассмотрим оператор-функцию $\tilde{B}(t) = e^{-t}(1 - iz_0)B \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}(End X)$. Так как $\mathcal{F}_z[e^{-t}] = 1/(1 - iz)$, то $\mathcal{F}_z(\tilde{B}) = \frac{1 - iz_0}{1 - iz} B$.

Для оператор-функции $A(t) * \tilde{B}(t) - I$ имеем $\mathcal{F}_{z_0}(A(t) * \tilde{B}(t) - I) = 0$. Поэтому $A(t) * \tilde{B}(t) - I \in J_{z_0}$. Следовательно, фактор-класс $A(t) + J_{z_0}$ обратим в фактор-алгебре $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}/J_{z_0}$. Случай $z_0 = \infty$ рассматривается аналогично.

Поэтому в силу локального принципа Аллана-Дугласа справедлива

Теорема 1. Пусть $1/2 < \alpha < 1$. Элемент $A \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}(\text{End } X)$ обратим в этой алгебре тогда и только тогда, когда для любого $z \in \Pi_+$ оператор $\mathcal{F}_z(A)$ обратим.

Оценки возмущенной полугруппы Озеена

Применим теорему 1 к выводу степенных оценок для возмущенной полугруппы Озеена. Рассмотрим интегральное уравнение для решения $u(t) = \tilde{T}(t)a$ линеаризованной системы (3)

$$u(t) = T(t)a + \int_0^t T(t-\tau)(Bu)(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Ввиду леммы 1 при любом начальном условии $a \in S_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) интегральное уравнение (6) имеет единственное решение $u(t) \in C([0, \infty), S_p(\Omega))$.

Пусть $q > 3$, $v \in L^3_\varrho(\Omega)$ для всех $\varrho \in [\varrho_1, \infty]$, где $1 < \varrho_1 < 3$. Тогда оператор-функция $T(t)B$ удовлетворяет оценке

$$\|T(t)B\|_{q \rightarrow q} \leq ct^{-1/2-3/(2\varrho)} \|v\|_\varrho, \quad (7)$$

при $1/q + 1/\varrho \leq 2/3$ и, следовательно, принадлежит алгебре $C_{\alpha,\beta}(\text{End } S_q(\Omega))$ при

$$\alpha > 1/2, \quad \alpha + \beta < \min(1/2 + 3/(2\varrho_1), 3/2(1 - 1/q)).$$

Предположим, что оператор $I - \mathcal{F}_z[T(t)B]$ для любого $z \in \Pi_+$ обратим в пространстве $S_q(\Omega)$ ($q > 3$). Тогда оператор-функция $I - T(t)B$ обратима в алгебре $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}(\text{End } S_q(\Omega))$, т.е. существует оператор-функция $A(t) \in C_{\alpha,\beta}(\text{End } S_q(\Omega))$ такая, что выполняются соотношения

$$(I - A(t)) * (I - T(t)B) = (I - T(t)B) * (I - A(t)) = I. \quad (8)$$

Представляя уравнение (6) для определения $u(t) = \tilde{T}(t)a$ в виде свертки

$$(I - T(t)B) * u(t) = T(t)a$$

и применяя левую свертку с оператор-функцией $I - A(t)$, ввиду (8) получаем, что

$$u(t) = \tilde{T}(t)a = (I - A(t)) * T(t)a, \quad (9)$$

Дальнейший анализ уравнения (9) приводит к следующему результату.

Теорема 2. Предположим, что оператор $I - \mathcal{F}_z[T(t)B]$ для любого $z \in \Pi_+$ обратим в пространстве $S_q(\Omega)$ при любом $q > 3$. Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки

$$\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\delta\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq}t^{-|\delta|/2-3/2(1/p-1/q)} \quad (10)$$

при выполнении следующих условий

$$|\delta| \leq 1, \quad 1 < p \leq q < \infty,$$

причем $p > 3/2$ при $|\delta| = 1$.

Сформулируем условия теоремы в терминах возмущенного оператора Озеена. В работе [2] установлено, что при $Im z \geq 0$ оператор $\mathcal{F}_z[T(t)B] = R_{-iz}(A)B$, где $R_{-iz}(A)$ – резольвента оператора Озеена, компактен. Там же доказано, что при $q > 2$ и $Im z \geq 0$

$$Ker_q(I + R_{-iz}(A)B) = Ker_q(\tilde{A} + izI),$$

причем ядра не зависят от q .

Поэтому справедлива

Теорема 3. Пусть при некотором $q > 2$ возмущенный оператор Озеена $\tilde{A} : S_q(\Omega) \rightarrow S_q(\Omega)$ не имеет собственных значений в полуплоскости $Re \lambda \geq 0$. Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедлива оценка (10).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 07-01-00099-а.

Список литературы

- [1] Солонников В.А. Об оценках нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С.Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, вып. 2(350). С. 123–156.
- [2] Сазонов Л.И. Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 5. С. 85-109.
- [3] Kobayashi T., Shibata Y. On the Oseen equation in exterior domains // Math. Ann. 1998. V. 310. P. 1-45.
- [4] Böttcher A., Silbermann B. Analysis of Toeplitz operators. Akademie - Verlag Berlin. 1989. 410 p.
- [5] Galdi G.P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Vol.I, Linearized Steady Problems. Springer-Verlag, New York. 1994. 448 p.
- [6] Сазонов Л.И. Гидродинамический проектор во внешней области // ВИНТИ. Деп. № 3148 - В00, 15.12.2000.

Sazonov L.I. *Estimates for the perturbed Oseen semigroup.* Annotation.

We present a sufficient condition for the perturbed Oseen semigroup which yields the same power-like decay rate as for the unperturbed one. We prove that such coincidence takes place provided the perturbed Oseen operator have no eigenvalues inside the closed right semi plane. In particular, this result is valid provided the perturbations are small in some sense. The proof is based on several results on invertibility in Banach algebra's of operator-valued functions, which, in turn, employ the Allan-Douglas principle.

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ГРИНА ДЛЯ ПОРИСТОУПРУГОГО СЛОЯ, КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ НА СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Суворова Т. В.*, Усошина Е. А.**

* Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону

** Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматриваются колебания гетерогенного флюидонасыщенного слоя, лежащего на слое жидкости. Нижний слой идеальной жидкости находится на недеформируемом основании. К верхней границе приложена осциллирующая сосредоточенная нагрузка. Колебания пористоупругой гетерогенной среды описывается уравнениями Био-Френкеля. После применения преобразования Фурье к системе уравнений, описывающих краевую задачу, удовлетворяются сначала нижние граничные условия, затем, последовательно, условия контакта жидкой и гетерогенной среды и граничные условия на лицевой поверхности. В результате последовательного нормирования растущих экспоненциальных множителей и аналитических преобразований для выделения громоздких взаимно уничтожающихся функций, получено достаточно компактное выражения для функции Грина, позволяющей исследовать волновые поля, возникающие в составной слоистой среде, при произвольной нагрузке.

Рассмотрим задачу о воздействии нагрузки, осциллирующей с частотой на поверхности гетерогенной полосы, лежащей на слое идеальной жидкости. Нагрузка приложена в конечной области. Неоднородная по толщине составная полоса колеблется на недеформируемом основании. В декартовой системе координат жидкий и гетерогенный слой соответственно занимают области

$$-\infty < x < \infty, \quad -h_2 \leq y \leq 0,$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq h_1.$$

К лицевой границе полосы в конечной области $-p \leq x \leq p$, $y = h_1$ приложена нагрузка $\bar{P}e^{-i\omega t}$.

Перемещения двухфазной гетерогенной среды, состоящей из упругого скелета и пор, насыщенных вязкой жидкостью или газом, определяются уравнениями Био-Френкеля [1]

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= \sigma_{ij,j}^s, \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= \sigma_{,i}^f, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_i(x, y, t)$, $v_i(x, y, t)$, $i = 1, 2$ – компоненты векторов перемещений твердой и жидкой фаз.

Связь между тензором полных напряжений Γ_{ij} и деформациями твердой e_{ij} и жидкой ε_{ij} фаз выражается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= A e \delta_{ij} + 2N e_{ij} + Q \varepsilon \delta_{ij}, \quad \sigma^f = Q \vartheta + R \varepsilon, \\ \vartheta &= \operatorname{div} \bar{u}, \quad \varepsilon = \operatorname{div} \bar{v}, \\ \Gamma_{ij} &= \sigma_{ij}^s + \delta_{ij} \sigma^f, \end{aligned} \quad (2)$$

δ_{ij} – символ Кронекера, σ_{ij}^s – тензор напряжений, действующих в упругом скелете, σ^f – напряжения, действующие на жидкость в порах, A , N , Q , R – механические характеристики гетерогенной среды, зависящие от скоростей распространения волн в упругом скелете и в жидкости, $\rho_{12} < 0$ – коэффициент динамической связи упругого скелета и жидкости, ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} – коэффициенты динамической плотности, выражаемые через ρ_s , ρ_f – плотности сред упругого скелета и жидкости, коэффициент b зависит от пористости среды m , коэффициента вязкости жидкости в порах и коэффициента проницаемости. Более подробные обозначения приведены в [2],[4].

Вектор перемещений $\bar{w}\{w_i(x, y, t)\}$, $i = 1, 2$ и давление $p_0(x, y, t)$ в идеальной жидкости нижнего слоя выражается известным образом через волновой потенциал.

На нижней границе жидкого слоя и недеформируемого основания нормальные перемещения равны нулю.

$$w_2(x, y, t) = 0, \quad y = -h_2. \quad (3)$$

На границе жидкости и пористоупругой среды предполагается свободная фильтрация жидкости через границу, при этом граничные условия имеют вид при $y = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^s + \sigma^f &= (m - 1)p_0, \\ \sigma^f &= -mp_0, \\ \sigma_{12}^s &= 0, \\ (1 - m) \frac{\partial u_2}{\partial t} + m \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial w_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4)$$

На верхней границе полосы при $y = h_1$ в конечной области задана равномерная нагрузка по типу «непроницаемый поршень», при этом

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^s + \sigma^f &= -P e^{-i\omega t}, \quad u_2 = v_2, \quad |x| \leq a, \\ \sigma_{22} &= 0, \quad \sigma_{12}^s = 0, \quad |x| > a. \end{aligned} \quad (5)$$

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность [3]. Так как режим колебаний предполагается установившимся, во всех функциях, зависящих от времени, отделим временной множитель $e^{-i\omega t}$. Представим перемещения в виде суммы трех потенциалов:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \operatorname{grad}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \operatorname{rot} \Lambda_3, \\ \bar{v} &= \operatorname{grad}(m_1 \Lambda_1 + m_2 \Lambda_2) + m_3 \operatorname{rot} \Lambda_3, \end{aligned} \quad (6)$$

Применим интегральное преобразование Фурье к уравнениям (1), (2):

$$\tilde{\bar{u}}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x, y) e^{i\alpha x} dx.$$

Система уравнений (1, 2) на основании свойств преобразования Фурье и дифференциальных операторов распадается на три волновых уравнения

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Lambda}_i + \kappa_i^2 \tilde{\Lambda}_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \kappa_i = \frac{\omega}{V_i}, \\ \tilde{L}_k(\alpha, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} L_k(x, y) e^{i\alpha x} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

В гетерогенной среде распространяется независимо друг от друга три типа волн, V_1, V_2 – скорости распространения продольных волн первого и второго типов в двухфазной среде, V_3 – скорость распространения поперечной волны. Продольная волна первого типа соответствует синфазному движению скелета грунта и жидкости, распространяется с малым затуханием. В продольной волне второго типа движение скелета грунта и жидкости противофазно и затухание этой волны значительное. Если связь между упругой и жидкой фазами слабая, то скорости продольных волн первого и второго типов приближаются к скоростям волн в сплошной упругой и сплошной жидкой средах в отдельности. При большой вязкости жидкости или малой частоте колебаний продольная волна второго типа, затухает значительно быстрее продольной волны первого типа. Через решения волновых уравнений (7) перемещения в пористоупругой среде выражаются в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha, y) &= \underline{\underline{B}}^s \overline{\underline{C}}^s + \underline{\underline{B}}^k \overline{\underline{C}}^k, \\ \underline{\underline{B}}^s &= \begin{pmatrix} -i\alpha \tilde{c}_1(y) & -i\alpha \tilde{c}_2(y) & \gamma_3 \tilde{c}_3(y) \\ \gamma_1^2 \tilde{s}_1(y) & \gamma_2^2 \tilde{s}_2(y) & i\alpha \gamma_3 \tilde{s}_3(y) \end{pmatrix} \\ \gamma_i &= \sqrt{\alpha^2 - \kappa_i^2}; \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tilde{s}_i(y) = e^{\gamma_i(y-h_1)} - e^{-\gamma_i(y-h_1)} / \gamma_i, \quad \tilde{c}_i(y) = e^{\gamma_i(y-h_1)} + e^{-\gamma_i(y-h_1)}.$$

Матрица $\underline{\underline{B}}^k$ получается из матрицы $\underline{\underline{B}}^s$ заменой $\tilde{c}_i(y)$ на $\tilde{s}_i(y)$ и $\tilde{s}_i(y)$ на $\tilde{c}_i(y)$. Здесь $\overline{\underline{C}}^{s,k}$ – трехмерные векторы произвольных постоянных.

Элементы матрицы (8) не содержат экспоненциальных составляющих, растущих на бесконечности [4].

Для удовлетворения граничных условий в плоском случае имеем 8 произвольных постоянных, которые определяются системой линейных уравнений, коэффициенты которой являются функциями параметра преобразования Фурье. Система может быть решена средствами аналитических преобразований компьютерных систем математики, например Maple. Однако этим способом невозможно обеспечить отсутствие неопределенностей, устойчивый счет для достаточно больших значений аргумента. Поэтому удовлетворение граничных условий проводилось в 3 этапа, для каждой границы выполнялись преобразования в соответствии с поставленными целями. В результате удовлетворения граничных условий (3) – (5) получаем выражение для $\overline{\underline{C}}^{s,k}$ через преобразование Фурье от заданной нагрузки. В случае непроницаемой границы решение для сосредоточенной силы получается известным предельным переходом с сохранением значения равнодействующей силы при

стремлении области приложения к нулю. В результате приходим к представлению матрицы Грина, которая в данном случае является несимметричной и имеет следующую структуру:

$$\underline{\underline{G}}(\alpha, y) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{g_{11}}{i\alpha} & \frac{g_{12}}{i\alpha} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Delta = s_1 s_{21} - s_2 s_{22} + s_3 s_{23};$$

$$s_{21} = s_5 s_7 - s_6 s_8 + s_9;$$

$$s_{22} = s_4 s_7 + \alpha^2 (s_6 s_{10} + s_{11});$$

$$s_{23} = \alpha^2 (s_5 s_{10} - s_{12}) - s_4 s_8;$$

$$\gamma_{3+i} = q_6 \gamma_i^2 - \kappa_i^2 (q_4 + q_5 m_i); \quad i = 1, 2$$

$$\gamma_{6+i} = -\kappa_i^2 (q_{12} - m_i q_{22}); \quad \gamma_6 = \alpha^2 - 0.5 \kappa_3^2;$$

$$\gamma_7 = \frac{i\omega \rho_0 m \kappa_3^2 \operatorname{cth} \gamma_0 h_2 (1 - m + m m_2)}{2\gamma_0 q_8 H};$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_0^2}; \quad \kappa_0 = \frac{\omega}{V_0},$$

$$\gamma_8 = (q_7 \gamma_5 - q_8 \gamma_4) / q_8 q_6;$$

$$\gamma_9 = (q_8 - m \gamma_5) \gamma_7 / (q_6 m);$$

$$\tilde{s}_i = \tilde{s}_i(h_1), \quad \tilde{c}_i = \tilde{c}_i(h_1) \quad i = 1, 2, 3;$$

$$s_1 = \alpha^2 (\gamma_1^2 \tilde{s}_1 + \gamma_2^2 \tilde{s}_2 q_9) + \gamma_6 \gamma_8 \tilde{s}_3;$$

$$s_2 = \gamma_4 \tilde{c}_1 + q_9 \gamma_5 \tilde{c}_2 + q_6 q_8 \tilde{c}_3; \quad s_3 = (1 - m_1) \gamma_1^2 \tilde{s}_1 + q_9 (1 - m_2) \gamma_2^2 \tilde{s}_2 + (1 - m_3) \gamma_8 \tilde{s}_3;$$

$$s_4 = \alpha^2 ((\gamma_2^2 \gamma_7 \tilde{s}_2) / \gamma_6 - \tilde{c}_3) + \gamma_9 \tilde{s}_3; \quad s_5 = (\gamma_5 \gamma_7 \tilde{c}_2 + q_6 \gamma_9 \tilde{c}_3 - \alpha^2 \gamma_3^2 q_6 \tilde{s}_3) / \gamma_6;$$

$$s_6 = ((1 - m_2) \gamma_2 \gamma_7 \tilde{s}_2 + (1 - m_3) \gamma_9 \tilde{s}_3 - (1 - m_3) \alpha^2 \tilde{c}_3) / \gamma_6; \quad s_7 = (1 - m_2) \tilde{c}_2 - (1 - m_1) \tilde{c}_1;$$

$$s_8 = \gamma_4 \tilde{s}_1 - \gamma_5 \tilde{s}_2;$$

$$s_9 = (1 - m_2) \tilde{c}_2 \gamma_4 \tilde{s}_1 - (1 - m_1) \gamma_5 \tilde{c}_1 \tilde{s}_2;$$

$$s_{10} = \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2;$$

$$s_{11} = (m_1 - m_2) \tilde{c}_1 \tilde{c}_2;$$

$$s_{12} = \gamma_4 \tilde{c}_2 \tilde{s}_1 - \gamma_2 \tilde{c}_1 \tilde{s}_2;$$

$$g_{11} = \alpha^2 (s_{21} \tilde{c}_1(y) + s_{41} \tilde{c}_2(y)) + s_{43} \tilde{c}_3(y) + \alpha^2 ((s_{17} + s_{20}) \tilde{s}_1(y) + (s_{19} - s_{17}) \tilde{s}_2(y) - \gamma_3^2 / \gamma_6 s_{31} \tilde{s}_3(y));$$

$$g_{12} = \alpha^2 (-s_{22} \tilde{c}_1(y) + s_{42} \tilde{c}_2(y)) + s_{44} \tilde{c}_3(y) + \alpha^2 ((s_{18} + s_{25}) \tilde{s}_1(y) + (s_{24} - s_{18}) \tilde{s}_2(y) - \gamma_3^2 / \gamma_6 s_{32} \tilde{s}_3(y));$$

$$g_{21} = \gamma_1^2 s_{21} \tilde{s}_1(y) + \gamma_2^2 s_{41} \tilde{s}_2(y) + s_{43} \tilde{s}_3(y) + (s_{17} + s_{20}) \tilde{c}_1(y) + (s_{19} - s_{17}) \tilde{c}_2(y) - \alpha^2 / \gamma_6 s_{31} (\tilde{c}_3(y));$$

$$g_{22} = -\gamma_1^2 s_{22} \tilde{s}_1(y) + \gamma_2^2 s_{42} \tilde{s}_2(y) + s_{44} \tilde{s}_3(y) + (s_{18} + s_{25}) \tilde{c}_1(y) + (s_{24} - s_{18}) \tilde{c}_2(y) - \alpha^2 / \gamma_6 s_{32} (\tilde{c}_3(y));$$

$$\begin{aligned}
s_{17} &= s_3 s_5 - s_2 s_6; \quad s_{18} = s_1 s_6 - s_3 s_4; \\
s_{18+i} &= (-1)^{i+1} s_2 (1 - m_i) c_i - \gamma_{3+i} s_3 s_i; \\
s_{23+i} &= (s_i \gamma_i (1 - m_i) - \alpha^2 \gamma_3 s_3) c_i \\
s_{31} &= s_{19} + s_{20}; \quad s_{32} = s_{24} + s_{25}; \quad i = 1, 2. \\
s_{40+i} &= (-1)^{i+1} q_9 s_{2i} + \gamma_7 / \gamma_6 s_{3i}; \\
s_{42+i} &= (-1)^{i+1} \gamma_8 s_{2i} + \gamma_9 / \gamma_6 s_{3i};
\end{aligned}$$

Элементы матрицы Грина являются осциллирующими функциями, убывающими на бесконечности степенным образом, мероморфные в комплексной плоскости. При $\alpha \rightarrow \infty$, $\Delta = O(\alpha^4)$.

Поле перемещений в пористоупругой полосе, лежащей на жидком слое, для произвольной нагрузки $\bar{q}(x, y)$ на непроницаемой лицевой поверхности можно представить в виде

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} \underline{G}(\alpha, y) \tilde{q}(\alpha, y) (\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha.$$

Контур интегрирования R_1 выбирается в соответствии с принципом излучения [3], обходя регулярные особенности подынтегральной функции с положительной действительной частью и малой комплексной в нижней комплексной полуплоскости.

Список литературы

- [1] Био М. А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. В. 6, № 82, С. 103 – 134.
- [2] Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова думка, 1990. 224 с.
- [3] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1976. 319 с.
- [4] Суворова Т. В., Беляк О. А. О колебаниях многослойного гетерогенного полупространства под действием осциллирующей нагрузки
Труды РГУПС. 2006. В. 3. С. 127 – 134/

Suvorova T. V., Usoshina E. A. *Oscillations of the composite layer of porous elastic saturated and liquid layer are considered. Oscillations of heterogeneous media is described by Biot-Frenkel's equations. Expressions for Green's function are received appropriate to investigate the wave fields arising in the composite layer.*

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В КОРОТКОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКОМ ТВЕРДОМ ЭКРАНЕ

Сумбатян М.А., Попужин В.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается применение методики Быстрого Преобразования Фурье (БПФ) при решении задачи дифракции на плоском твердом экране в области высоких частот колебаний. Вывод дифракционного интеграла основывается на физической теории дифракции Кирхгофа. После специальной замены переменных, основанной на специфическом виде фазовой функции, и далее эффективной полуаналитической реализации данной замены переменных интеграл приведен к виду, допускающему применение БПФ.

Одна из основных трудностей эффективной численной реализации дифракционных интегралов и решения интегральных уравнений коротковолновой дифракции связана с тем, что для более или менее удовлетворительного соответствия между прямым численным результатом и асимптотической теорией следует брать как минимум десять узлов на каждую длину волны. В общем же случае необходимо оценивать дифракционные интегралы на огромных сетках, а с ростом частоты (т.е. с уменьшением длины волны) число узлов в таких прямых численных методах существенно увеличивается. Поэтому для работы в высокочастотной области требуются огромные машинные ресурсы, и решение некоторых задач даже на современных компьютерах занимает дни, а порой и недели. В связи с этим становится актуальным построение таких численных алгоритмов, которые можно применять в реальном масштабе времени для предельно высоких частот.

В связи с изложенным выше, целью данной работы является усовершенствование численных методов расчета дифракционных интегралов, возникающих в задачах акустики и теории упругости с использованием методов Быстрого Преобразования Фурье (БПФ). Основная идея данного подхода заключается в том, что подынтегральное выражение дифракционного интеграла можно привести к виду Фурье-преобразования. Это осуществляется путём замены переменных, основанной на специфическом виде фазовой функции. Далее, численное интегрирование сводится к БПФ с помощью специального выбора волнового числа. Заметим, что данный подход, кроме увеличения скорости счета, позволяет вычислить давление в точке приемника для всех волновых чисел одновременно. В результате численные расчеты сокращаются по времени практически во столько раз, какова размерность сетки. Более точно: прямые вычисления требуют квадратичного числа операций в зависимости от размерности сетки, а данный подход - линейно-логарифмического, т.е. практически линейного, числа операций.

Для демонстрации данной методики рассмотрим следующую задачу. Пусть на экран длиной l падает известная, например, плоская волна $p^{sc} = \exp(ikr)/\sqrt{r}$, где k - волновое число ($kr \gg 1$), $r = \sqrt{(\xi - x_S)^2 + y_S^2}$ - расстояние от источника до экрана, (x_S, y_S) - координаты источника. Экран считаем плоским и акустически

твердым. Согласно дифракционной теории Кирхгофа [1], давление в точке приема вычисляется по формуле:

$$p^{sc} = 2 \int_0^l p^{inc} \frac{\partial \Phi}{\partial n_\xi} d\xi \quad (1)$$

Для простоты рассмотрим случай совмещённого источника и приёмника звука (так называемый эхо-случай). Тогда выражение для функции Грина и её производной по нормали к экрану примут следующий вид:

$$\Phi(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \approx \frac{1+i}{4\sqrt{\pi kr}} e^{ikr}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_\xi} \approx \frac{y_R(i-1)\sqrt{k}}{4r\sqrt{\pi r}} e^{ikr}, \quad (kr \gg 1)$$

Здесь при разложении функции Ханкеля, мы ограничились рассмотрением только главных членов. После подстановки известных величин в (1) получаем

$$p^{sc} = \frac{y_R(i-1)\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^l \frac{e^{2ikr}}{r^2} d\xi \quad (2)$$

Из этого выражения с помощью численных методов можно получить точное решение. Однако в силу замечаний, указанных выше, такой подход потребует больших временных затрат. Для реализации предлагаемого альтернативного подхода, основанного на применении метода БПФ, необходимо сделать следующие преобразования. Для начала в предыдущем уравнении произведем замену переменной $\xi = x_S + \sqrt{r^2 - y_S^2}$:

$$\begin{aligned} p^{sc} &= \frac{y_R(i-1)\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x_R^2+y_R^2}}^{\sqrt{(l-x_R)^2+y_R^2}} \frac{e^{2ikr}}{r\sqrt{r^2-y_R^2}} dr = \\ &= \frac{y_R(i-1)\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_{y_R}^{\sqrt{x_R^2+y_R^2}} \frac{e^{2ikr}}{r\sqrt{r^2-y_R^2}} dr + \int_{y_R}^{\sqrt{(l-x_R)^2+y_R^2}} \frac{e^{2ikr}}{r\sqrt{r^2-y_R^2}} dr \right) = \\ &= \frac{y_R(i-1)\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \int_{y_R}^{L_1} f(r) dr \end{aligned}$$

где

$$L_1 = \max\{\sqrt{(l-x_R)^2+y_R^2}, \sqrt{x_R^2+y_R^2}\}, \quad L_0 = \min\{\sqrt{(l-x_R)^2+y_R^2}, \sqrt{x_R^2+y_R^2}\}$$

$$f(r) = \begin{cases} \frac{2e^{2ikr}}{r\sqrt{r^2-y_R^2}}, & r \in [y_R, L_0], \\ \frac{e^{2ikr}}{r\sqrt{r^2-y_R^2}}, & r \in (L_0, L_1] \end{cases}$$

Для удобства возьмем подинтегральную функцию в виде $2e^{2ikr}/(r\sqrt{r^2 - y_R^2})$. При этом помним, что на отрезке $(L0, L1)$ необходимо брать половину от данной функции. Это не отразится на конечном результате, однако сделает рассуждения более наглядными. Чтобы избавиться от особенности на нижнем пределе, разобьем интеграл на сумму:

$$p^{sc} = \frac{y_R(i-1)\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \int_{y_R}^{L1} \frac{2e^{2ikr}}{\sqrt{r-y_R}} \left(\frac{1}{r\sqrt{r+y_R}} - \frac{1}{y_R\sqrt{2y_R}} \right) dr +$$

$$+ \frac{y_R(i-1)\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{y_R\sqrt{2y_R}} \int_{y_R}^{L1} \frac{2e^{2ikr}}{\sqrt{r-y_R}} dr$$

Первый интеграл можно свести к быстрому преобразованию Фурье. Однако, для этого необходимо сначала сдвинуть пределы интегрирования таким образом, чтобы на нижнем пределе оказался ноль. Вводя безразмерные величины $\eta l = r - y_R$ и $\Omega = 2kl$, преобразуем предыдущее выражение к виду

$$p^{sc} = \frac{y_R(i-1)\sqrt{\Omega l}}{2\sqrt{2\pi}} e^{iy_R l/\Omega} \int_0^{(L1-y_R)/l} \frac{2e^{i\eta\Omega}}{\sqrt{\eta l}} \left[\frac{1}{(\eta l + y_R)\sqrt{\eta l + 2y_R}} - \frac{1}{y_R\sqrt{2y_R}} \right] d\eta +$$

$$+ \frac{(i-1)\sqrt{\Omega l}}{4\sqrt{y_R\pi}} e^{iy_R l/\Omega} \int_0^{(L1-y_R)/l} \frac{2e^{i\eta\Omega}}{\sqrt{\eta l}} d\eta = \tag{3}$$

$$= \frac{y_R(i-1)\sqrt{\Omega l}}{2\sqrt{2\pi}} e^{iy_R l/\Omega} \int_0^{\widehat{L1}} u(\eta) e^{i\eta\Omega} d\eta + \frac{(i-1)\sqrt{\Omega l}}{4\sqrt{y_R\pi}} e^{iy_R l/\Omega} \int_0^{\widehat{L1}} \frac{2e^{i\eta\Omega}}{\sqrt{\eta l}} d\eta$$

Первый интеграл заменим интегральной суммой по правилу прямоугольников:

$$\int_0^{\widehat{L1}} u(\eta) e^{i\eta\Omega} d\eta \approx h \sum_{m=1}^N u(\eta_m) e^{i\eta_m\Omega} = h \sum_{m=1}^N u(\eta_m) e^{\frac{2\pi i(n-1)(m-1)}{N}}$$

где $\eta_m = (m-1)h$, $h = \widehat{L1}/N$, $\Omega_n = 2\pi i(n-1)/\widehat{L1}$, $(n = 1, 2..N)$

Отсюда видно, что при специальном выборе безразмерного волнового числа первый интеграл в уравнении (3) представляет собой стандартное выражение для БПФ, которое согласно идеологии БПФ можно вычислять для всех n одновременно [2], т.е. сразу для всех волновых чисел.

Второй интеграл в уравнении (3) можно представить в виде интегралов Френеля. Для этого осуществим следующие преобразования:

$$\int_0^{\widehat{L1}} \frac{2e^{i\eta\Omega}}{\sqrt{\eta l}} d\eta \stackrel{z=\eta\Omega}{=} \frac{2}{\sqrt{\Omega l}} \int_0^{\Omega\widehat{L1}} \frac{\cos(z)}{\sqrt{z}} dz + i \frac{2}{\sqrt{\Omega l}} \int_0^{\Omega\widehat{L1}} \frac{\sin(z)}{\sqrt{z}} dz \tag{4}$$

Вспоминая, что на отрезке $(\widehat{L0}, \widehat{L1})$ подынтегральная функция имеет множитель $1/2$, и учитывая соотношения для интегралов Френеля:

$$C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos(z)}{\sqrt{z}} dz, \quad S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin(z)}{\sqrt{z}} dz$$

преобразуем выражение (4) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\Omega l}} \left[2 \left(\int_0^{\Omega \widehat{L0}} \frac{\cos(z)}{\sqrt{z}} dz + i \int_0^{\Omega \widehat{L0}} \frac{\sin(z)}{\sqrt{z}} dz \right) + \int_{\Omega \widehat{L0}}^{\Omega \widehat{L1}} \frac{\cos(z)}{\sqrt{z}} dz + i \int_{\Omega \widehat{L0}}^{\Omega \widehat{L1}} \frac{\sin(z)}{\sqrt{z}} dz \right] = \\ & = \sqrt{\frac{2\pi}{\Omega l}} [2(C_2(\Omega \widehat{L0}) + iS_2(\Omega \widehat{L0})) + C_2(\Omega(\widehat{L1} - \widehat{L0})) + iS_2(\Omega(\widehat{L1} - \widehat{L0}))] \end{aligned}$$

Далее задача считается численно в среде Visual C++. Сравнение полученных результатов с явным асимптотическим решением при стремлении волнового числа к бесконечности и прямым численным интегрированием данной задачи продемонстрировали хорошую сходимость. Заметим, что основной вклад в асимптотическое решение дают интегралы Френеля.

Если при численном интегрировании мы разобьём экран на N узлов, то прямое вычисление первого интеграла в уравнении (3) потребует N^2 операций. При быстром преобразовании Фурье количество операций равно $N \log(N)$. К примеру, для $N = 1024$ выигрыш в скорости вычисления получается равным $N^2/N \log(N)$, т.е. примерно на 2 порядка.

Список литературы

- [1] Скучик Е. Основы Акустики. М.: Мир, 1976.
- [2] Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989.

Sumbatyan M.A., Popuzin V.V. *Application of the Fast Fourier Transform in the short-wavelength diffraction by a plane rigid screen.* We apply the Fast Fourier Transform to solve diffraction problem for a plane rigid screen in the high frequency range. Derivation of the diffraction integral is based on Kirchhoff's physical diffraction theory. After a special change of variables, based on a specific form of the phase function, with the use of some efficient semi-analytic realization of this change, the integral is reduced to a form permitting application of FFT.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ АУРАЛИЗАЦИИ В АКУСТИКЕ ПОМЕЩЕНИЙ

Тодоров Н. Ф.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

В статье рассматриваются вопросы, возникающие при аурализации. В ходе компьютерной реализации расчёта акустических свойств помещений был применён метод лучевых траекторий (МЛТ). Лучи "путешествуют" по заданному замкнутому помещению, теряя энергию при каждом отражении. Учитываются также и рассеивающие свойства отражающих поверхностей. Полный набор зеркально и диффузно отраженных звуковых лучей формирует истинную структуру звуковых отражений, то есть импульсный отклик помещения. Если рассматривать помещение как линейный фильтр, имеющий свою амплитудно-временную энергетическую характеристику, то в каждой точке пространства суммарный сигнал получается как "свертка" сигнала источника и характеристик помещения. Предложенный алгоритм позволяет преобразовать любой записанный аудио-фрагмент в форму, которую он примет при звучании в моделируемом зале.

Для простоты ограничимся лишь помещением с плоскими граничными поверхностями. Его модель представляет собой конечный объем, ограниченный замкнутым многогранником. Имеется замкнутый многогранник с боковой поверхностью S . Внутри S необходимо решить волновое уравнение для акустического давления $p(x, y, z, t)$ с некоторыми начальными условиями по времени и граничными условиями на внешних гранях.

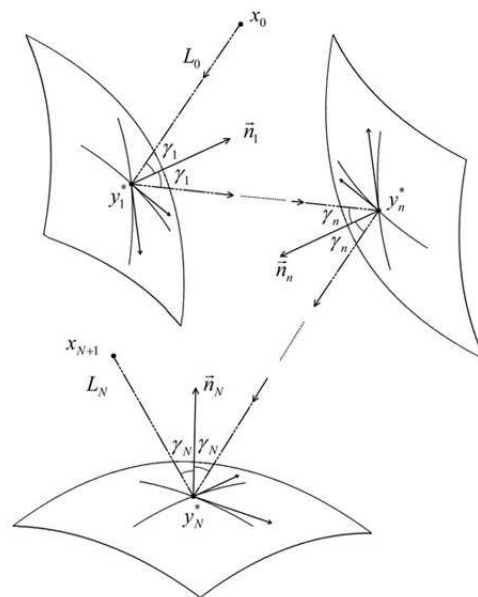


Рис. 1 N-кратное переотражение высокочастотной акустической волны от граничных поверхностей N акустически твёрдых препятствий, находящихся в акустической среде.

Пусть из точки x_0 акустической среды распространяется высокочастотная сферическая волна. Считаем, что далее акустическая волна распространяется вдоль луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - y_3^* - \dots - y_N^* - x_{N+1}$, где точки зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$ принадлежат граничным в общем случае искривленным поверхностям различных N отражателей.

Волна принимается в точке x_{N+1} акустической среды, в которой требуется найти амплитуду N раз переотраженной волны. Последняя определяется отражением волны от малых окрестностей $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$ граничных поверхностей в точках зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$.

Давление в N раз отраженной волне в точке S_{N+1} будем находить в виде интеграла Кирхгофа по окрестности S_N^* последней точки зеркального отражения y_N^* лучей, полученных при однократном отражении от окрестности S_{N-1}^* предпоследней точки зеркального отражения y_{N-1}^* . Тогда давление в точке приема дается выражением

$$p(x_{N+1}) = \iint_{S_N^*} 2p(y_N) \frac{\partial \Phi(y_N, x_{N+1})}{\partial n_N} dS_N \quad (1)$$

где функция $\Phi(r) = e^{ikr}/(4\pi r)$ обозначает функцию Грина для оператора Гельмгольца.

В свою очередь давление $p(y_N)$ само выражается в виде интегрального представления через падающую на окрестность S_N^* волну, пришедшую после отражения на окрестности S_{N-1}^*

$$p(y_N) = \iint_{S_{N-1}^*} 2p(y_{N-1}) \frac{\partial \Phi(y_{N-1}, y_N)}{\partial n_{N-1}} dS_{N-1} \quad (2)$$

Продвигаясь последовательно в направлении $x_{N+1} - y_N^* - \dots - y_2^* - y_1^* - x_0$, приходим к окончательному представлению для $p(x_{N+1})$ в виде $2N$ кратного интеграла

$$p(x_{N+1}) = 2^N \iiint_{S_N^*} \iiint_{S_{N-1}^*} \dots \iiint_{S_2^*} \iiint_{S_1^*} p^{inc} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \dots \frac{\partial \Phi}{\partial n_{N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n_{N-2}} dS_1 \dots dS_N \quad (3)$$

В случае волнового процесса на фиксированной круговой частоте ω с волновым числом $k = \omega/c$ в коротковолновой области можно использовать асимптотическое представление для функции Грина при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \Phi(y_{m-1}, y_m)}{\partial n_{m-1}} = ik \cos \gamma_{m-1} (4\pi)^{-1} |y_{m-1} - y_m|^{-1} e^{ik|y_{m-1} - y_m|} [1 + O(k^{-1})] \quad (4)$$

$$m = 1, 2, \dots, N + 1, \quad y_0 = x_0, \quad y_{N+1} = x_{N+1}$$

Давление в точке x_{N+1} в переотраженной произвольное число N раз акустической волне составляет модификация интегрального представления Кирхгофа. После некоторых преобразований его можно представить в виде $2N$ кратного интеграла

$$p(x_{N+1}) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^N L_0^{-1} \prod_{n=1}^N L_n^{-1} \cos \gamma_n \iint_{S_N^*} \dots \iint_{S_1^*} e^{ik\varphi} dS_1 \dots dS_{N-1} dS_N, \quad (5)$$

$$\varphi = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + \dots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}|.$$

Основанный на этом методе алгоритм реализован в виде компьютерной программы.

Рассмотрим некоторый источник звука, который создает определенный акустический сигнал, представляющий собой звуковую волну с зависимостью звукового давления от времени $p_0(t)$ (пример показан на Рис. 2).

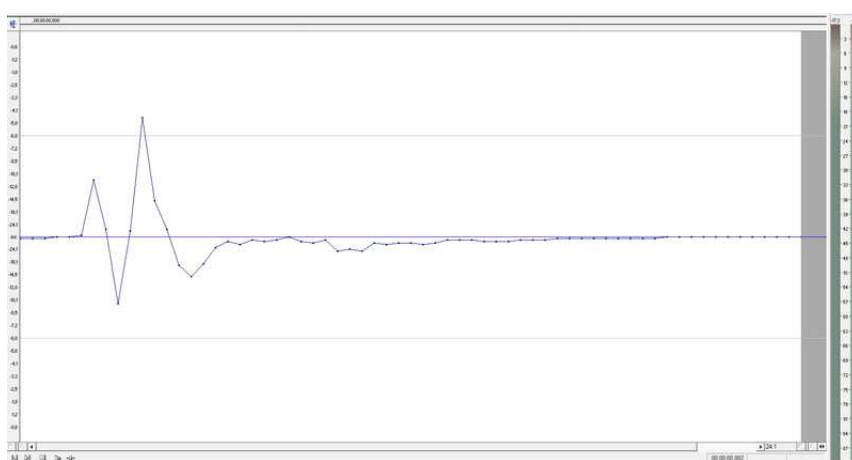


Рис. 2 Амплитудно-временное представление звука выстрела стартового пистолета в заглушенной безэховой камере.

Если рассматривать помещение как линейный фильтр, который имеет свою амплитудно-временную энергетическую характеристику $E_r(t) = p_r^2(t)$, то в каждой точке пространства суммарный сигнал получается как "свертка" сигнала источника и характеристик помещения:

$$p(t) = (p_0 \otimes p_r)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\tau) p_r(t - \tau) d\tau \Rightarrow \tilde{p}(\omega) = \tilde{p}_0(\omega) \tilde{p}_r(\omega) \quad (6)$$

Самой сложной задачей при этом является определение полной спектральной характеристики отклика помещения $\tilde{p}_r(\omega)$. Значения коэффициентов поглощения и диффузии, как правило, задаются для шести несущих октавных частот $f = 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000$ Гц. Таким образом, применение МЛТ позволяет найти импульсную характеристику, только для этих 6-ти частот. В дискретном виде импульсный отклик помещения для каждой из этих частот f_n определяется некоторой дельта-образной последовательностью (здесь δ - дельта - функция Дирака)

$$p_r^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{J_n} \sqrt{E_j^{(n)}} \delta(t - t_j^{(n)}) \quad (7)$$

где $t_j^{(n)}$ - моменты прихода очередного звукового луча к приемнику, а $E_j^{(n)}$ - соответствующие значения энергии. В частном случае, когда отклик помещения слабо зависит от частоты, форма аудио сигнала, преобразованного помещением, может быть выписана в явном виде:

$$p(t) = \sum_{j=1}^J \sqrt{E_j} p_0(t - t_j) \quad (8)$$

Представление (8) имеет прозрачный физический смысл. Пусть импульсный отклик помещения - один и тот же для всех частот звучания. Тогда исходный аудиофрагмент при воспроизведении в данном зале представляет собой сумму исходных копий этого фрагмента, сдвинутых на время запаздывания j -го пришедшего луча, и имеющих амплитуду, определяемую потерей энергии данного луча при всех его отражениях от граничных поверхностей. Заметим, что такой расчет, осуществленный прямо во временной области, требует квадратичного числа арифметических операций по числу выбранных временных узлов, поскольку для каждого момента $t = t_k$ необходимо осуществить суммирование по j . Для существенного сокращения времени вычислений необходимо перейти в спектральную область, воспользовавшись теоремой свертки. В этом случае функция $\tilde{p}_r(\omega)$ является преобразованием Фурье от (8):

$$\tilde{p}_r(\omega) = \sum_{j=1}^J \sqrt{E_j} \exp(i\omega t_j) \quad (9)$$

В общем случае соотношение (9) можно использовать лишь для шести несущих октавных частот. Однако реальная зависимость от частоты здесь будет примерно такая же, как и частотная зависимость коэффициента поглощения, т.е. достаточно плавной функцией, что подробно описано в литературе. В итоге можно достаточно эффективно интерполировать спектральные свойства на всю частотную область.

Практическая реализация этой идеи такова. Если ограничиться выбранным частотным диапазоном от $125/2^{1/2} = 88$ Гц до $4000 \cdot 2^{1/2} = 5640$ Гц, то исходный сигнал можно представить в виде суммы шести сигналов, отфильтрованных каждый внутри своей октавной полосы:

$$p_0(t) = \sum_{n=1}^6 p_0^n(t) \quad (10)$$

Если в первом приближении считать отклик помещения постоянным внутри одной октавной полосы, то с учетом (10) свертка (6) принимает следующий вид:

$$p(t) = \sum_{n=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} p_0^{(n)}(\tau) p_r^{(n)}(t - \tau) d\tau \Rightarrow \tilde{p}(\omega) = \sum_{n=1}^6 \tilde{p}_0^{(n)}(\omega) \tilde{p}_r^{(n)}(\omega) \quad (11)$$

где импульсный отклик в каждой октавной полосе свой. В итоге, с использованием (7) получаем

$$p(t) = \sum_{n=1}^6 \sum_{j=1}^{J_n} \sqrt{E_j^{(n)}} p_0^{(n)}(t - t_j^{(n)}) \quad (12)$$

Это и является основной расчетной формулой.

Предложенный алгоритм позволяет преобразовать любой записанный аудиофрагмент в форму, которую он примет при звучании в моделируемом зале.

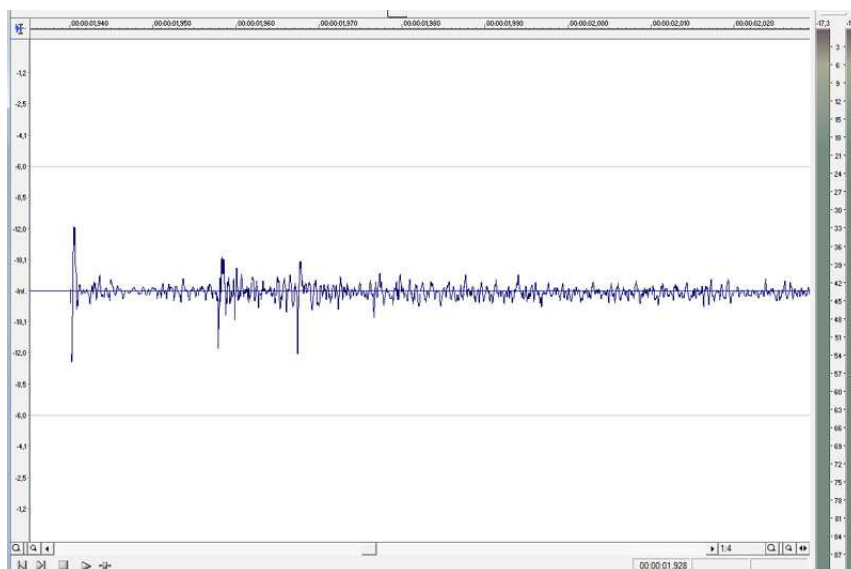


Рис. 3 Амплитудно-временное представление смоделированного звука выстрела стартового пистолета в тестовой комнате.

Список литературы

- [1] *Макриненко Л.И.* Акустика помещений общественных зданий. - М.: Стройиздат. 1986. 173
- [2] *Kuttruff H.* Room acoustics. //London: Applied Science. 1973. 312 P.
- [3] *Сумбатян М.А., Боев Н.В., Тодоров Н.Ф.* Алгоритмы траекторий звуковых лучей в акустике помещений //Сборник трудов XVIII сессии Российского акустического общества. М.: ГЕОС, 2006. Т.3 С. 191-195
- [4] *R. Heinz* Binaurale Raumsimulation mit Hilfe eines kombinierten Verfahrens - Getrennte Simulation der geometrischen und diffusen Schallanteile // *Acustica* , 1993. №79 S. 207-217

Todorov N.F. *Mathematical models and auralization algorithms in room acoustics.* We study the auralization problem. The basis is Ray Tracing algorithm, when the sound rays "travel" in the room losing energy at every reflection. Diffusion is also taken into account. The room can be modeled as a linear filter, then the resulting audio impulse is a convolution of the initial one with the room impulse response.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ «УГОЛЬ-ФЛЮИД» В ВЫБРОСООПАСНОЙ ЗОНЕ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА.

Труфанов В.Н., Труфанов И.В., Устинов Ю.А.

Южный федеральный университет

В 90-х годах прошлого века при Северо-Кавказском научном центре высшей школы работала группа ученых, объединившаяся для изучения явления внезапного выброса угля, пород и газа в угольных шахтах (НТП "Уголь-выброс"). В группу входили ученые геолого-географического, физического и механико-математического факультетов Ростовского государственного университета, ВНИГРИуголь ГУРШ МПР, ЮРГТУ (НПИ) и ряда других организаций [1]. Руководил программой профессор Н.Ф.Лосев.

К началу отмеченных исследований было известно, что внезапные выбросы принадлежат к опасным газодинамическим явлениям, возникающим при вскрытии угольных пластов в сложных горно-геологических условиях на глубинах более 170-200 м. Они всегда приурочены к участкам тектонической нарушенности высокогазоносных угольных пластов, сложенных углями средних стадий метаморфизма [2]. Детальные исследования этого явления были начаты еще в начале 50-х годов прошлого века под руководством академика С.А.Христиановича большим коллективом ученых ИГД им. А.А.Скочинского, ВНИМИ, ИПКОН РАН и других институтов, однако кардинального решения данной проблемы не произошло [3-4]. И до настоящего времени внезапные выбросы ежегодно приводят к большим материальным потерям и уносят жизни десятков, а иногда и сотен шахтеров во всем мире. Печальными примерами в этом отношении являются недавние катастрофы в Кузбассе и Украинском Донбассе, при которых погибли более 200 шахтеров. Поэтому актуальность исследований по этой проблеме не вызывает сомнения.

В результате последующих комплексных геолого-структурных, минералогопетрографических, физических и термобарогеохимических исследований, проведенных по программе, было установлено, что очаги внезапных выбросов локализируются в особых флюидоактивных зонах, образующихся в участках тектонической нарушенности угольных пластов под воздействием потоков глубинных флюидов при температурах до 300⁰С и давлениях порядка 50-60 МПа [5-6]. В этих участках наблюдается глубокая трансформация структуры и технологических свойств угольного вещества, проявляющаяся в образовании "губчатого" угля, насыщенного газовой-жидкими и газовыми включениями под высоким давлением. В итоге уголь становится выбросоопасным и разрушается при снятии внешнего давления. Однако механизм этого процесса остается недостаточно изученным.

Основные задачи состоят в следующем:

1. Понять природу явления "выброса" и по возможности построить физические и математические модели, которые объясняли бы это явление.
2. Разработать методы и приборные средства для прогнозирования и обнаружения выбросоопасных зон в угольных пластах. Сложность проблемы усугубляется

тем, что при исследованиях приходится иметь дело с конечным тонкодисперсным углем, образующимся при деструкции системы "уголь-флюид т.е. с так называемой "бешеной мукой" которая дает очень мало информации об исходном материале даже с помощью современных физических средств исследования (ЭПР, ЯМР, рентгеноструктурный анализ, ВД-декриптометрия и др.).

Тем не менее, на основании анализа полученных данных, изучения известной литературы, особенно технических отчетов ВНИИГРИ-УГОЛЬ и соображений, высказанных профессором Ю.М. Гуфаном [7] (известным специалистом в области термодинамики) было сделано несколько ключевых положений, которые позволили применить математические методы для анализа проблемы.

Основное положение состоит в том, что метан всегда содержится в угле в сорбированном состоянии и в виде флюидных микровключений. В свободном состоянии он оказывается в результате микро- и макро повреждений угольной среды, выделяясь и заполняя при крупных повреждениях угольного слоя (например типа "сброса" или "разлома") крупные полости, при микроповреждениях - микропоры и микротрещины, превращаясь в среду, насыщенную пузырьками метана с некоторым давлением. Такую среду можно рассматривать как "активный пористый композит".

Из технических отчетов следовало:

- 1) выбросоопасные зоны встречаются как правило на умеренных горизонтах;
- 2) они встречаются, как правило, в областях малых подвижек угольного слоя, т.е. в зонах, в которых в результате тектонической деятельности слой деформировался "слегка но не разрушился полностью.

На основе этих данных можно полагать, что в зонах малых подвижек в результате образования микротрещин уголь превращается в активный композит. Желательно было построить математическую модель, позволяющую понять, как зона активного композита воздействует на окружающую среду.

Для этого рассмотрим две разномасштабные задачи.

Первая задача. На уровне масштаба отдельного пузырька рассматривается задача для неограниченной среды со сферической полостью, наполненной газом. Давление газа - p . В предположении, что расстояние между порами значительно превосходит радиус пузырька a , рассмотрим классическую задачу теории упругости об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) неограниченного пространства с шаровой полостью, поверхность которой подвержена давлению. Решение этой центрально-симметричной задачи имеет вид

$$u_r = \frac{pa^3}{4\mu r^2}, \quad \sigma_{rr} = -\frac{pa^3}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pa^3}{2r^3} \quad (1)$$

где u_r — радиальное смещение, $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ — напряжения, μ — модуль сдвига.

Вторая задача. На уровне масштаба пласта и прилегающего горного массива. рассматривается следующая модельная задача: *в неограниченной упругой среде имеется шар радиуса A , наполненный пузырьками с давлением p и плотностью распределения*

$$K = \frac{N}{V}, \quad V = \frac{4}{3}\pi A^3 \quad (2)$$

где N — число пузырьков в шаре.

С центром большой сферы свяжем декартовую систему координат $Ox_1x_2x_3$ и сферическую r, θ, φ , которые связаны соотношениями

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta \quad (3)$$

Каждый отдельный пузырек снабдим индексом n ($n = 1, \dots, N$) и будем рассматривать как некоторую силовую сингулярность с радиусом вектором \mathbf{r}_n . Во внешней по отношению к сфере среде выберем произвольную точку M — точку наблюдения с радиусом вектором \mathbf{R} ($|\mathbf{R}| > A$). Для простоты вычислений ось Ox_3 проведем через точку наблюдения M . Введем обозначения

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R} - \mathbf{r}_n, \quad R_n = |\mathbf{R}_n| = \sqrt{R^2 + r_n^2 - 2Rr_n \cos \theta_n} \quad (4)$$

Каждая сингулярность порождает в точке наблюдения смещение с вектором

$$\mathbf{u}_n = \frac{pa^3}{4\mu R_n^2} \frac{\mathbf{R}_n}{R_n} \quad (5)$$

Используя принцип суперпозиции (задача линейная), радиальное смещение в точке M можно представить в виде

$$U_R = \sum_n |\mathbf{u}_n| \cos \alpha_n, \quad \cos \alpha_n = \sqrt{1 - \frac{r_n^2}{R_n^2} \sin^2 \alpha_n} \quad (6)$$

где α_n — угол между \mathbf{u}_n и осью Ox_3 . Приближенное вычисление суммы (6) осуществляется с помощью формулы

$$U_R \approx \frac{Kpa^3}{4\mu} \int_V \frac{\cos \alpha}{R'^2} dV, \quad dV = r \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (7)$$

$$R'^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R'^2} \cos^2 \theta}$$

В результате вычисления интеграла (7) получаем

$$U_R = \frac{p'A^3}{4\mu R^2}, \quad p' = \gamma p, \quad \gamma = \frac{Na^3}{2A^3} \quad (8)$$

Основной вывод, вытекающий из формулы (8) состоит в том, что сфера, наполненная "активным композитом по отношению к внешней среде ведет себя как сфера, наполненная газом, диспергированным в структуре угля, с приведенным давлением p' . Из этого вытекает, что выбросоопасная зона ведет себя аналогичным образом. При этом становятся очевидными следующие выводы:

1) обычные профилактические противовыбросные мероприятия типа вытеснения газа с помощью нагнетания воды мало эффективны в силу структуры системы уголь-флюид ("активный пористый композит") выбросоопасной зоны;

2) при проходке толщина участка пласта, отделяющего "свободную" зону, образовавшуюся в результате выработки, от "выбросоопасной" флюидоактивной зоны

уменьшается, что в конечном итоге приводит к разрушению стенки и это разрушение принимает динамический характер, а "активный композит" превращается в "бешеную муку" в результате цепной реакции разрушения микровключений системы "уголь-флюид";

3) в реальных условиях в зависимости от конкретных горно-геологических факторов полость выброса имеет сложную форму, что порождает зоны концентрации напряжений, которые активизируют процесс разрушения;

4) Прогнозирование выбросоопасных зон может быть осуществлено термобарогеохимическими методами путем мониторинга и оценки уровня энергетической флюидоактивности исследуемых углей.

Полученные выводы из предложенной математической модели поведения системы "уголь-флюид" в выбросоопасной зоне угольного пласта представляют определенный интерес не только для прогнозирования и предотвращения опасных газодинамических явлений в угольных шахтах, но также в значительной мере для решения проблемы извлечения угольного метана как нетрадиционного вида углеводородного сырья [8-9]. Этот интерес вызван тем, что флюидоактивные зоны с локализованными в них потенциальными очагами выброса являются наиболее перспективными участками для бурения дегазационных скважин при практическом решении данной проблемы, т.к. флюидизированные угли отличаются максимальной газоотдачей при минимальных энергетических затратах на интенсификацию процессов деструкции системы "уголь-флюид". При этом превентивная дегазация флюидизированных углей выступает как наиболее эффективный способ предотвращения внезапных выбросов угля, пород и газа при последующей отработке метанугольных месторождений. Оценка извлекаемых ресурсов угольного метана из таких месторождений - одна из актуальных задач ближайшего будущего.

Работа выполнена при поддержке поддержке РФФИ (07-01-254а)

Список литературы

- [1] Лосев Н.Ф., Труфанов В.Н., Смирнов В.Б., Фролов Г.Д. Процессы и явления, формирующие и сопровождающие выбросы угля и газа. Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ. Препринт. 1994. 22 с.
- [2] Ходот В.В. Внезапные выбросы угля и газа. М. 1961. 363 с.
- [3] Христианович С.А. О волне выброса // Известия АН СССР. 1953. № 12. С. 1679-1688.
- [4] Васильчук М.П. Проблема борьбы с выбросами угля, пород и газа // Безопасность труда в промышленности. 1993. № 9. С. 2-6.
- [5] Труфанов В.Н., Лосев Н.Ф., Гамов М.И., Рылов В.Г., Славгородский Н.И. Особенности формирования и термобарогеохимические критерии прогнозирования выбросоопасных зон в угольных пластах. Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ. Препринт. 1993. 30 с.

- [6] Труфанов В.Н., Гамов М.И., Рылов В.Г., Майский Ю.Г., Труфанов А.В. Углеродная флюидизация ископаемых углей Восточного Донбасса. Ростов-на-Дону: ИРУ. 2004. 272 с.
- [7] Труфанов Ю.М., Мощенко И.Н. Модель структурных превращений в углях при метаморфизме. Ростов-на-Дону: СКНЦ ВШ. Препринт. 1992. 24 с.
- [8] Труфанов В.Н., Труфанов И.В. Основные итоги и перспективы развития работ по проблеме угольного метана Восточного Донбасса // Разведка и охрана недр. 2006. № 11. С.67-72.
- [9] Майский Ю.Г., Труфанов И.В. Термобарогеохимические условия формирования Краснодонского метаноугольного месторождения (восточный Донбасс) // Известия вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. 2008. № 2. С.113-117.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Цибулин В.Г., Шевченко С.В.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается конвекция в двухслойной системе, состоящей из пористого массива, заполненного жидкостью, поверх которого располагается свободная жидкость. Данная задача представляет большой интерес из-за ряда приложений, в частности, в геофизике и моделировании биологических сообществ, обитающих на границе раздела жидких и твердых сред [1]. Кроме того, эта задача может рассматриваться как возмущенная по отношению к плоской проблеме Дарси, в которой обнаружена сильная неединственность решений [2, 3]. Расчет конвективных движений двухслойной системы интересен также как пример разрушения семейства стационарных решений, возникающих в случае однородной пористой среды. Для проведения численного эксперимента построена разностная схема, основанная на методе смещенных сеток, и написана программа в среде MATLAB.

Постановка задачи

Рассматривается конвекция в двухслойной системе, состоящей из прямоугольника $D_1 = [0, a] \times [0, b]$ с пористой средой и насыщенного несжимаемой теплопроводной жидкостью, и прямоугольника $D_2 = [0, a] \times [b, c]$, заполненного той же жидкостью.

Для описания движения свободной жидкости в области D_2 используются уравнения в приближении Обербека-Буссинеска, которые в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$\dot{V} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla p + \Delta V - kGrT, \quad \nabla \cdot V = 0, \quad \dot{T} + (V \cdot \nabla)T = \frac{1}{Pr}\Delta T. \quad (1)$$

Здесь $V = (u, 0, w)$ — скорость, p — давление, T — температура, Gr и Pr — числа Грасгофа и Прандтля, t — время, x и z — декартовы координаты, вектор $k = (0, 0, -1)$ задает направление силы тяжести.

Движение жидкости в пористом слое описывается с помощью уравнений, основанных на законе Дарси:

$$\frac{1}{\phi}\dot{V}^m = -\nabla p^m - \frac{1}{Da}V^m - kGrT^m, \quad \nabla \cdot V^m = 0, \quad (2)$$
$$\dot{T}^m + (V^m \cdot \nabla)T^m = \frac{1}{Pr}\Delta T^m.$$

Здесь $V^m = (u^m, 0, w^m)$ — скорость, p^m — давление, T^m — температура, ϕ — коэффициент пористости, Da — число Дарси.

На границе области $D = D_1 \cup D_2$ ставятся условия прилипания свободной жидкости и условия непротекания для жидкости в пористой среде:

$$V = 0, \quad (x, z) \in \partial_2 D, \quad u^m|_{x=0,a} = w^m|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

а также задается линейный по высоте профиль температуры:

$$T|_{\partial_2 D} = T_*(z), \quad T^m|_{\partial_1 D} = T_*(z), \quad T_*(z) = T_d + \frac{z}{b+c}(T_u - T_d). \quad (4)$$

Здесь T_u и T_d — значения температуры на верхней и нижней границе, $\partial_k D = \partial D_k \setminus \{z = b\}$.

На границе раздела S ставятся условия непрерывности температуры, потоков тепла, давления и скорости:

$$[T - T^m]_S = 0, \quad [\partial_z T - \partial_z T^m]_S = 0, \quad [p - p^m]_S = 0, \quad [w - w^m]_S = 0. \quad (5)$$

Для численного исследования задачи (1)–(5) применяется метод искусственной сжимаемости, для чего уравнение несжимаемости заменяется на $\partial_t p + \gamma(\nabla \cdot V) = 0$, где γ — коэффициент искусственной сжимаемости.

Начальные условия задаются для скорости и температуры, а давление при $t = 0$ полагается нулевым.

Метод решения

Для дискретизации задачи (1)–(5) применяется метод смещённых сеток. Используются узлы четырёх типов: для двух компонент скорости, температуры и давления. В области D вводится основная сетка, в узлах которой вычисляется температура:

$$\Omega_T = \{(x_i, z_j), \quad x_i = ih_x, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad z_j = jh_1, \quad j = 0, \dots, M_1+1, \\ z_j = b + (j - M_1)h_2, \quad j = M_1+1, \dots, M_1+M_2+1\}.$$

Здесь шаги сетки $h_x = a/(N+1)$, $h_1 = b/(M_1+1)$, $h_2 = (c-b)/(M_2+1)$.

На основе введенной сетки Ω_T строятся три сетки: для горизонтальной и вертикальной компонент скорости u, w , а также для давления p :

$$\Omega_u = \{(x_i, z_{j+1/2}), \quad i = 0, \dots, N+1, \quad j = 0, \dots, M_1+M_2\}, \\ \Omega_w = \{(x_{i+1/2}, z_j), \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M_1+M_2+1\}, \\ \Omega_p = \{(x_{i+1/2}, z_{j+1/2}), \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M_1+M_2\}, \\ x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N, \quad z_{j+1/2} = \frac{1}{2}(z_j + z_{j+1}), \quad j = 0, \dots, M_1+M_2.$$

Для обозначения сеточных значений скорости, температуры и давления в областях D_1 и D_2 используются те же символы, а принадлежность определенной подобласти задается индексом. $u_i^{j+1/2} = u(x_i, z_{j+1/2})$, $w_{i+1/2}^j = w(x_{i+1/2}, z_j)$, $p_{i+1/2}^{j+1/2} = p(x_{i+1/2}, z_{j+1/2})$, $T_i^j = T(x_i, z_j)$.

Дискретные аналоги краевых условий (3)–(4) запишутся следующим образом

$$u_0^{j+1/2} = u_{N+1}^{j+1/2} = 0, \quad j = 0, \dots, M_1+M_2, \quad w_{i+1/2}^0 = w_{i+1/2}^{M_1+M_2+1} = 0, \quad i = 0, \dots, N, \\ T_i^0 = T_d, \quad T_i^{M_1+M_2+1} = T_u, \quad i = 0, \dots, N+1, \\ T_0^j = T_{N+1}^j = T_*(z_j), \quad j = 0, \dots, M_1+M_2+1.$$

Для аппроксимации уравнений (1)–(2) вводятся операторы усреднения и операторы дифференцирования на двухточечном шаблоне:

$$(\delta_0^x f)_{i+1/2}^j = \frac{f_i^j + f_{i+1}^j}{2}, \quad (\delta_0^z f)_i^{j+1/2} = \frac{f_i^j + f_i^{j+1}}{2}, \quad (6)$$

$$(\delta_x f)_{i+1/2}^j = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{h_x}, \quad (\delta_z f)_i^{j+1/2} = \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{h_z}. \quad (7)$$

В зависимости от значения индекса j используется соответствующая величина: $h_z = h_1$, для $j < M_1 + 1$, и $h_z = h_2$, для $(j \geq M_1 + 1)$.

По (6)–(7) строятся разностные операторы на трехточечном шаблоне

$$(D_x f)_i^j = (\delta_x \delta_0^x f)_i^j, \quad (D_z f)_i^j = (\delta_z \delta_0^z f)_i^j. \quad (8)$$

Формулы (6)–(8) верны для целых и полуцелых значений i и j . С помощью операторов (7) дискретный аналог лапласиана на пятиточечном шаблоне записывается в виде: $\Delta_h = \delta_x \delta_x + \delta_z \delta_z$.

Для аппроксимации нелинейных слагаемых в уравнениях (1)–(2), используются операторы усреднения и дифференцирования на четырехточечном шаблоне

$$d_0 = \delta_0^x \delta_0^z \equiv \delta_0^z \delta_0^x, \quad d_x = \delta_x \delta_0^z \equiv \delta_0^z \delta_x, \quad d_z = \delta_z \delta_0^x \equiv \delta_0^x \delta_z. \quad (9)$$

С их помощью аппроксимация конвективного члена в уравнении теплопроводности дается формулой:

$$(u \partial_x T + w \partial_z T)_i^j \approx \beta J_D + (1 - \beta) J_d \equiv J, \quad \beta = 1/3, \quad (10)$$

$$J_D = D_x(T \delta_0^z u) + D_z(T \delta_0^x w), \quad J_d = d_x(d_0 T \delta_0^x u) + d_z(d_0 T \delta_0^z w).$$

Аппроксимации конвективных членов в уравнениях Обербека-Буссинеска записываются следующим образом

$$(u \partial_x u + w \partial_z w)_i^{j+1/2} \approx \beta \widetilde{J}_D + (1 - \beta) \widetilde{J}_d \equiv \widetilde{J}, \quad (11)$$

$$\widetilde{J}_D = \delta_x [(\delta_0^x u)^2] + \delta_z [(\delta_0^z u)(\delta_0^x w)], \quad \widetilde{J}_d = d_x [(d_0 u)^2] + d_z [(d_0 u)w].$$

$$(u \partial_x w + w \partial_z w)_{i+1/2}^j \approx \beta \widehat{J}_D + (1 - \beta) \widehat{J}_d \equiv \widehat{J}, \quad (12)$$

$$\widehat{J}_D = \delta_x [(\delta_0^z u)(\delta_0^x w)] + \delta_z [(\delta_0^z w)^2], \quad \widehat{J}_d = d_x [u(d_0 w)] + d_z [(d_0 w)^2].$$

С помощью введённых операторов разностные аналоги уравнений (1)–(2) записываются во внутренних узлах областей D_1 и D_2 . Для аппроксимации уравнений на границе раздела применяется интегро-интерполяционный метод. Полученные уравнения в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют следующий вид:

$$(u_t)_i^{j+1/2} = (F_u)_i^{j+1/2}, \quad (w_t)_{i+1/2}^j = (F_w)_{i+1/2}^j, \quad (p_t)_{i+1/2}^{j+1/2} = -\gamma(\nabla \cdot V)_{i+1/2}^{j+1/2}, \quad (T_t)_i^j = (F_T)_i^j.$$

Здесь при $j > M_1 + 1$ (свободная жидкость):

$$(F_u)_i^{j+1/2} = (-\widetilde{J} - \delta_x p + \Delta_h u)_i^{j+1/2},$$

$$(F_w)_{i+1/2}^j = (-\hat{J} - \delta_z p + \Delta_h w + Gr\delta_0^x T)_{i+1/2}^j, \quad (F_T)_i^j = (-J + \frac{1}{Pr}\Delta_h T)_i^j,$$

и при $j < M_1 + 1$ (пористый слой) :

$$(F_u)_i^{j+1/2} = (-\phi\delta_x p - \frac{\phi}{Da}u)_i^{j+1/2},$$

$$(F_w)_{i+1/2}^j = (-\phi\delta_z p - \frac{\phi}{Da}w + \phi Gr\delta_0^x T)_{i+1/2}^j, \quad (F_T)_i^j = (-J + \frac{1}{Pr}\Delta_h T)_i^j.$$

а в случае $j = M_1 + 1$, получаются специальные формулы.

Результаты расчетов

На основе разработанной численной схемы написана программа в среде MATLAB для исследования конвективных режимов в двухслойных системах. Некоторые результаты расчетов конвективных режимов в высоком прямоугольнике, в основном заполненном пористым слоем, представлены на Рис. 1 и 2. В качестве начальных данных брались режимы из семейства стационарных решений, рассчитанного методом конечных разностей [5], фильтрационное число Рэлея λ выражается через параметры Gr , Da и Pr по формуле $\lambda = GrDaPr/c$, где c – высота прямоугольника.

Числа Нуссельта на нижней стенке и в центральном вертикальном сечении определяются интегралами $Nu_h = \int_0^a T_z(x, 0, t) dx$, $Nu_V = \int_0^c T_x(a/2, z, t) dz$.

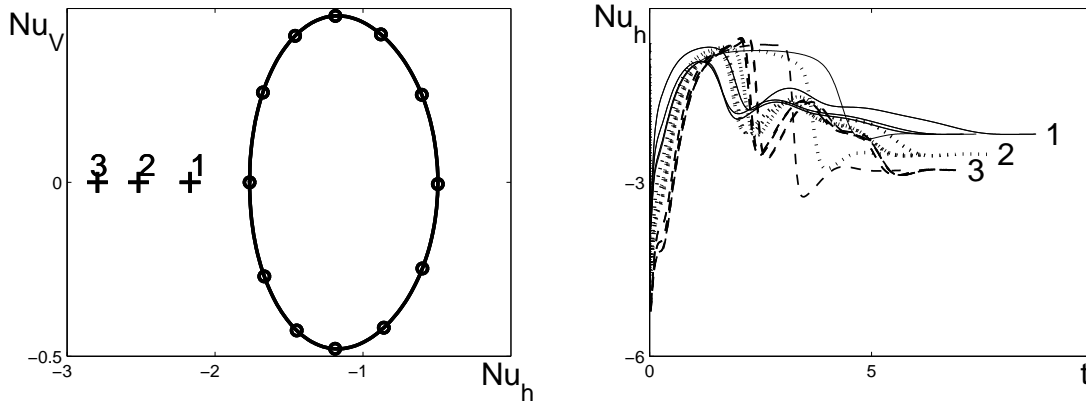


Рис. 1. Слева: Семейство стационарных режимов для фильтрационной конвекции (кривая) и изолированные режимы в двухслойной системе при различных Da (цифры и крестик). Справа: графики зависимости от времени числа Nu_h для $Da = 3.4 \cdot 10^{-3}$ (1), $Da = 1.7 \cdot 10^{-3}$ (2), $Da = 1.0 \cdot 10^{-3}$ (3).

Слева на рис. 1 представлены кривая семейства стационарных режимов фильтрационной конвекции и кружками отмечены начальные точки. Расчеты выполнены при различных числах Дарси и следующих значениях остальных параметров: $\lambda = 80$, $\phi = 10$, $Pr = 7$, $c = 2$, $b = 1,6$, $a = 1$, $T_d = 0$, $T_u = 1$. В результате установления в двухслойной системе реализуется стационарный режим с симметричным расположением валов относительно центрального вертикального сечения. Распределения температуры и функции тока для реализующихся изолированных стационарных режимов приведены на рис. 2. С уменьшением Da (со снижением

проницаемости) в зоне, где находится свободная жидкость, движения приповерхностного слоя трансформируются в конвективные валы, занимающие всю высоту области над пористой средой.

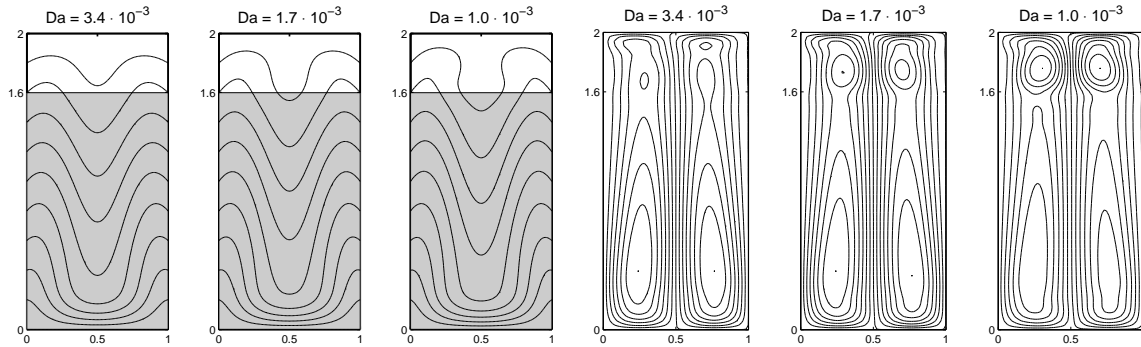


Рис. 2. Распределение температуры (слева) и линии уровня функции тока (справа) для $Da = 3.4 \cdot 10^{-3}$, $Da = 1.7 \cdot 10^{-3}$, $Da = 1.0 \cdot 10^{-3}$.

Список литературы

- [1] *Nield D.A., Bejan A.* Convection in Porous Media. N.Y.: Springer, 1999. 556 p.
- [2] *Любимов Д.В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
- [3] *Юдович В.И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142–148.
- [4] *Karasözen B., Tsybulin V.G.* Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // Comp. Phys. Commun. 2005. V. 167. P. 203–213.
- [5] *Karasözen B., Tsybulin V.G.* Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Let. A., 1999. V. 262. P. 321–329.

Tsybulin V.G., Shevchenko S.V. *Numerical study of convection in two-layer rectangle.* We study convective flows in the rectangle with a layer of porous medium saturated by the incompressible fluid and a layer filled by the viscous fluid. The staggered grid scheme is used for discretisation of the system of equations in primitive variables. Computer experiment is performed for the analysis of convective patterns.

К АНАЛИЗУ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА

Шалдырван В.А., Васильев Т.А.

Донецкий национальный университет

Статья посвящена изучению несвязанных смешанных задач термоупругости для цилиндрических тел. Решение строится в два этапа: на первом – решается задача теплопроводности, на втором – находится решение пространственной задачи теории упругости с фиктивными объемными силами, индуцированными термоупругим потенциалом. Использование в качестве однородного базиса однородных решений сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений, которые исследуются с помощью асимптотических методов. При суммировании рядов, фигурирующих в записи напряжений, используются методы ускорения сходимости.

Деформирование сплошного цилиндра под действием заданной неравномерно распределенной температуры изучалось с помощью метода суперпозиции в работе [1] и метода однородных решений в [2]. В работах [3-4] исследовалось термоупругое равновесие свободного от нагрузжений цилиндра, на боковой поверхности которого задавалось распределение температуры, а на торцах отсутствовал тепловой поток или была нулевая температура. В этой статье рассмотрен случай, когда термоупругому деформированию цилиндра препятствует жесткая заделка боковой поверхности. Поскольку задача смешанная, возникают дополнительные трудности, вызванные медленной сходимостью решения в окрестности линии излома граничной поверхности [5]. Проблема преодолевается за счет проведения асимптотического анализа бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ).

§1 Постановка проблемы и метод решения. Изотропный цилиндр (ν - коэффициент Пуассона и G - модуль сдвига) находится в стационарном температурном поле $T(x, y, z)$. Для исследования его термоупругого состояния будем использовать уравнения равновесия теории упругости в перемещениях [6]

$$\begin{aligned} \mu u_{i,ij} + \Delta u_i &= \alpha(3\mu - 1)T_i \quad i = 1, 2, 3; \\ \Delta T &= 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} [u_{i,j} + u_{j,i} + \delta_{ij}((\mu - 1)u_{l,l} - \alpha(3\mu - 1)T)]_{z=\pm 1} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ [\alpha_1 T_{,z} + \alpha_2 T]_{z=\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На защемленной боковой поверхности поддерживается заданная температура распределенная по степенному закону вдоль ее образующей

$$u_s(r, \theta, z) |_{r=1} = 0, \quad T(x, y, z) |_{r=1} = \tau_0 z^q, \quad s = r, \theta, z, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (3)$$

Согласно общей схеме, подробно описанной в монографии [4], решение задачи представим в виде суперпозиции

$$u_i = u_i^* + u_i^0, \quad (4)$$

где u_i^* — однородное решение уравнений равновесия, обусловленное температурным потенциалом при однородных температурных условиях, u_i^0 — при однородных статических условиях (2). Величины u_i^* определяются соотношениями

$$u_r^* = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_z^* = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

в которые входит неизвестный термоупругий потенциал $\Phi(r, z)$, определяемый из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (1 + \nu)\alpha T. \quad (5)$$

Функция $T(r, z)$ описывает температурное поле. Так как она удовлетворяет гармоническому уравнению, то для ее отыскания применим метод разделения переменных. Тогда, например, в антисимметричном случае для температурного поля получим такое представление

$$T(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{I_0(\beta_k^* r)}{I_0(\beta_k^* r)} \sin(\beta_k z), \quad B_k = 2 \int_0^1 z^q \sin(\beta_k z) dz \quad (6)$$

где β_k — корни уравнения

$$\alpha_1 \beta + \alpha_2 \tan(\beta) = 0. \quad (7)$$

При этом, если $\alpha_1 = 0$, то $\beta_k = \pi k$, и если $\alpha_2 = 0$, то $\beta_k = \pi(k + 1/2)$, $k = 1, 2, \dots$

Теперь решением уравнения (5) для потенциала будет функция

$$\Phi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{I_0(\beta_k^* r)}{\beta_k^{*2} I_0(\beta_k^* r)} \sin(\beta_k z). \quad (8)$$

Это позволяет записать решение термоупругой задачи

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{a}{2\nu} + 2Re \sum_p A_p n_p(z) P_0^-(\gamma_p^* r) \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)}, \\ u_z(r, z) &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{ha}{1-\nu} + 2Re \sum_p A_p q_p(z) \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Произвольные постоянные a и A_p определяются из системы функциональных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{a}{2\nu} + 2Re \sum_p A_p n_p(z) P_0^-(\gamma_p^*) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ -\frac{ha}{1-\nu} + 2Re \sum_p A_p q_p(z) &= \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (10)$$

получаемой из граничных условий на боковой поверхности. Требуя чтобы невязки граничных условий (10) были ортогональны полной тригонометрической системе функций, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_m a + 2Re \sum_p A_p n(\delta_m, \gamma_p) P_0^+(\gamma_p^*) &= c_{1m} / \delta_m^2, \\ \beta_m a - 2Re \sum_p A_p q(\delta_m, \gamma_p) &= c_{2m} / \delta_m^2, \quad m = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \quad (11)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} n(\delta_m, \gamma_p) &= ha_{mp} [(\mu - 1)\gamma_p^2 + (\mu + 1)\delta_m^2], \quad \alpha_m = 1/\nu, \quad \beta_m = -h/(1 - \nu), \\ a_{mp} &= \delta_m^2 \cos^2 \gamma_p / (\gamma_p^2 - \delta_m^2)^2, \quad q(\delta_m, \gamma_p) = -a_{mp} [(3\mu + 1)\gamma_p^2 - (\mu + 1)\delta_m^2]. \end{aligned}$$

Решение системы (11) можно осуществлять методом простой редукции. Однако последний позволяет установить с приемлемой точностью только первые коэффициенты разложений (9). В то же время для исследования напряженно-деформированного состояния вблизи границ тела необходимо оценить сумму всего ряда. Поэтому необходимо проведение асимптотического анализа (11). С этой целью зададим следующее асимптотическое поведение коэффициентов A_p

$$A_p \approx A \gamma_p^{\beta-1} / \sin^2 \gamma_p, \quad (12)$$

которое полностью согласуется с результатами работ [1,5]. Суммы, фигурирующие в системе, используя теорему о вычетах, можно заменить на контурные интегралы. Процедура их вычисления подробно изложена в [5]. Главная часть интегралов позволяет получить из БСЛАУ (11) однородную систему уравнений для определения коэффициентов $A_1^* = \Re A$ и $A_2^* = \Im A$

$$\begin{aligned} A_1^*(\mu\beta - 1) \cot \pi\beta/2 + A_2^*(\mu\beta + \mu + 1) &= 0, \\ A_1^*(\mu\beta - \mu - 1) \tan \pi\beta/2 - A_2^*(\mu\beta - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

Если определитель системы равен нулю, то она имеет нетривиальные решения. Из этого условия получаем характеристическое уравнение для показателя β

$$(3 - 4\nu) \sin^2 \pi\beta/2 + \beta^2 - 4(1 - \nu)^2 = 0. \quad (14)$$

Последнее совпадает с уравнением, возникающим в смешанной задаче деформирования пространственного или плоского клина [7,8].

Таким образом, установлено, что асимптотическое поведение коэффициентов системы (11) определяется степенью сингулярности напряжений на линии излома граничной поверхности, а система (11) аппроксимируется теперь такой конечной системой

$$\begin{aligned} \alpha_m a + 2Re \sum_{p=1}^P A_p n(\delta_m, \gamma_p) P_0^+(\gamma_p) + Re \frac{2Ai}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{z^\beta n(\delta_m, z) dz}{h(\sin 2z - 2z)} &= \frac{c_{1m}}{\delta_m^2}, \\ \beta_m a - 2Re \sum_{p=1}^P A_p q(\delta_m, \gamma_p) + Re \frac{2Ai}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{z^{\beta-1} q(\delta_m, z) dz}{\sin 2z - 2z} &= \frac{c_{2m}}{\delta_m^2}, \quad m = \overline{1, P+1}, \end{aligned} \quad (15)$$

§2 Анализ полученных результатов. Проведился анализ термонапряженного состояния при разных значениях показателя степени q в (3). На рис. 1 представлено распределение напряжения σ_{rr} внутри цилиндра ($h = 1, \nu = 0,25, \alpha_1 = 0$) в задаче изгиба при распределении температуры по линейному закону вдоль образующей цилиндра ($q = 1$), на рис. 2 в задаче растяжения-сжатия при квадратичном распределении температуры ($q = 2$).

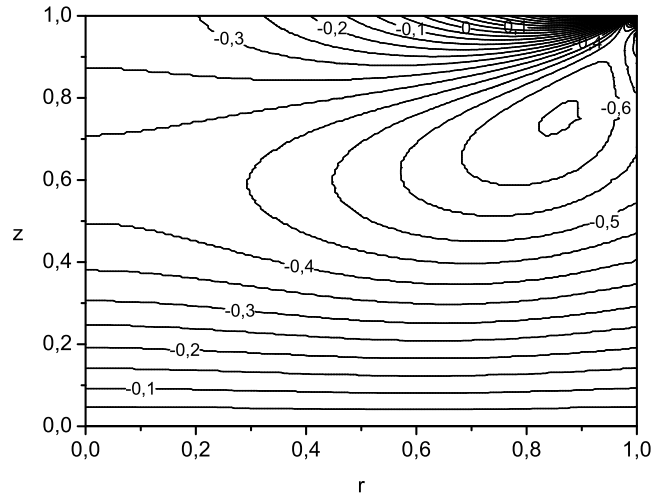


Рис. 1. Распределение напряжений $\sigma_{rr}/\alpha\tau_0$ в задаче растяжения-сжатия

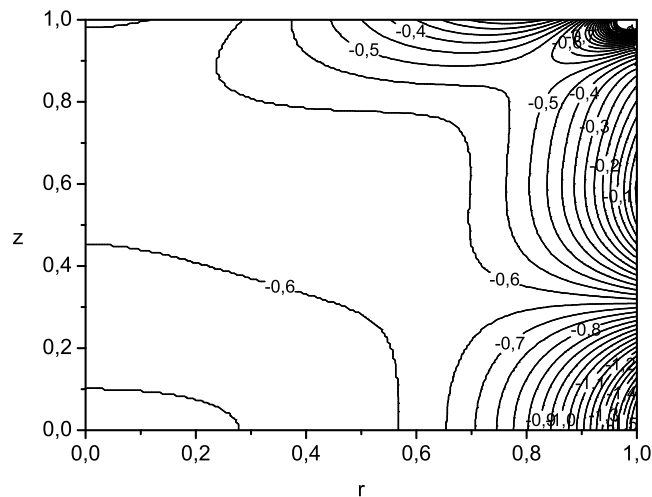


Рис. 2. Распределение напряжений $\sigma_{rr}/\alpha\tau_0$ в задаче изгиба

Основные выводы из представленных графиков сводятся к следующему. В задаче изгиба вблизи линии излома наблюдается область положительных напряжений, далее расположена область максимальных отрицательных напряжений и,

наконец, срединная поверхность разгружается. Иная картина наблюдается в задаче растяжения-сжатия. Напряжения претерпевают значительные изменения в области, прилегающей к боковой поверхности.

Список литературы

- [1] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1969. № 8. С. 110–125.
- [2] Прокопов В.К., Бабешко М.Е., Стрюк В.К. Применение однородных решений к осесимметричной задаче термоупругости для цилиндров конечной длины // Прикл. механика. 1977. Т. 13, № 12. С. 3–8.
- [3] Алтухов Е.В., Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Осесимметричные задачи термоупругости для сред, обладающих поперечной анизотропией // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1978. № 4. С. 316–319.
- [4] Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. Киев : Наук. думка, 1978. 240 с.
- [5] Шалдырван В.А., Васильев Т.А. Аналитические методы в смешанных задачах теории упругости // Сборник посвященный 70-летию В.Т. Гринченко. 2007.
- [6] Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. Думка, 1965. 204 с.
- [7] Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния в окрестности ребра // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 5. С. 178–186.
- [8] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.

Shaldyrvan V.A., Vasiliev T.A. *About analysis of thermoelastic state of cylinder.* Annotation. The article deals with mixed problems of thermoelasticity for short cylinder. Solution of problems is provided in two steps: at first it is considered the problem of heat conductivity, at last – the problem of elasticity with fictive volume forces by means of the homogeneous solution method. Linear algebraic equation systems is investigated by the use of asymptotical methods. Summation of stress series is provided by means of improving convergence methods.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Юдин А.С., Юдин С.А.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассматриваются варианты физических соотношений для задач больших нелинейных деформаций при простом нагружении. Исходными являются соотношения типа Дэвиса-Надаи и полулинейного материала. Последний модифицируются заменой упругого модуля на секущий и обычных компонент деформаций на логарифмические. Применяются гипотезы несжимаемости материала, гипотезы Кирхгофа относительно нормальных напряжений и разложение модуля пластичности в степенной ряд по поперечной координате. На этой базе выведены двумерные аналоги. Соотношения применимы для моделирования пластической формовки оболочек вращения.

При постановке задач о поведении материалов и конструкций за пределом линейной упругости важной составляющей при построении моделей является выбор соотношений, определяющих физические свойства материала и связь обобщенных внутренних усилий с деформациями. Для описания свойств материала в деформационной теории пластичности широко используется физическая зависимость $\sigma(\bar{e})$ между интенсивностью напряжений σ и интенсивностью истинных (логарифмических) деформаций \bar{e} . Её применение позволяет рассматривать нелинейные напряженно-деформированные состояния при больших деформациях.

Далее полагаем, что выполняются условия простого нагружения или близкого к простому. Вводится секущий модуль (модуль пластичности) $E_c(\bar{e}) = \sigma(\bar{e})/\bar{e}$, так что $\sigma(\bar{e}) = E_c(\bar{e})\bar{e}$. При активном нагружении, когда интенсивность напряжений возрастает во всех точках материала, деформационная пластическая модель аналогична некоторому нелинейно-упругому материалу.

В общем случае трехмерного состояния интенсивность напряжений и интенсивность деформаций связаны с компонентами напряженно-деформированного состояния (НДС) формулами:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)},$$
$$\bar{e} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\bar{e}_{11} - \bar{e}_{22})^2 + (\bar{e}_{11} - \bar{e}_{33})^2 + (\bar{e}_{22} - \bar{e}_{33})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2)}, \quad (1)$$

где:

$$\bar{e}_{kk} = \ln(1 + e_{kk}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Компоненты напряжений и деформаций здесь соответствуют физическим [2] в ортогональной системе координат. В (1) деформации сдвига предполагаются малыми по сравнению с единицей и далее зануляются.

Для задания вида функции $\sigma(\bar{e})$ широкое применение находит степенная аппроксимация: $\sigma = C\bar{e}^\eta$, где C, η – постоянные для данного материала. Последние определяются из условий прохождения аппроксимирующей кривой через точки условного предела текучести $(\sigma_{0,2}, e_{0,2})$ и предела прочности (σ_B, \bar{e}_B) :

$$\eta = (\lg \sigma_B - \lg \sigma_{0,2}) / (\lg \bar{e}_B - \lg \bar{e}_{0,2}), \quad C = \sigma_B / (\bar{e}_B)^\eta,$$

где $e_{0,2} = \sigma_{0,2}/E$.

Помимо информации о свойствах материала для решения физически-нелинейных задач необходимо иметь определяющие соотношения, связывающие компоненты напряжений и деформаций. Относительно простые разрешающие уравнения с логарифмическими деформациями формируются на основе физических соотношений Дэвиса и Надаи [1] для несжимаемых материалов (соотношения ДН): Нормальные напряжения здесь считаются главными и ориентированными по координатным направлениям. В трехмерном варианте соотношения ДН имеют вид:

$$\begin{aligned} E_c \bar{e}_{11} &= \sigma_{11} - 0.5(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad E_c \bar{e}_{22} = \sigma_{22} - 0.5(\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ E_c \bar{e}_{33} &= \sigma_{33} - 0.5(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{aligned} \quad (2)$$

Формально запись (2) похожа на закон Гука. Только здесь под деформациями понимаются логарифмические деформации (истинные, натуральные), а модуль Юнга заменен секущим модулем, зависящим от интенсивности деформаций и, соответственно, от координат текущей точки.

В теории оболочек пренебрегаются напряжения σ_{33} на эквидистантных поверхностях по толщине оболочки по сравнению с остальными ($\sigma_{33} \approx 0$). Далее будем рассматривать осесимметричное НДС, определяемое компонентами $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_2$, $\sigma_{13} = \tau_{13}$ и $e_{11} = e_1$, $e_{22} = e_2$, $e_{13} = 0.5\gamma_{13} = 0.5\gamma$. Поскольку $\gamma_{13} = \gamma$ полагается малым, компоненты нормальных напряжений и деформаций близки к главным направлениям, совпадающим с координатными. Для соотношений ДН угол сдвига γ вообще полагаем равным нулю. Компоненту поперечного обжатия считаем не зависящей от поперечной координаты ζ и равной её значению на срединной поверхности: $e_3 = \varepsilon_3 \neq 0$. Выполняется условие несжимаемости $(1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) = 1$. С учетом $\sigma_{33} = 0$ и условия несжимаемости записи интенсивностей напряжений и деформаций упрощаются:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau_{13}^2}, \quad \bar{e} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\bar{e}_1^2 + \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2^2}.$$

К относительно простым физическим соотношениям, применяемым в задачах нелинейной теории упругости, относятся определяющие уравнения "полулинейного" (или гармонического) материала, связывающие главные напряжения и главные относительные удлинения [2]. Для радиальной осесимметричной деформации оболочек вращения с учетом $e_3 = \varepsilon_3$ эти соотношения записываются в виде:

$$\sigma_1 = \frac{1 + e_1}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} (e_1 + \nu e_2), \quad \sigma_2 = \frac{1 + e_1}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} (e_1 + \nu e_2),$$

где I_3 – третий инвариант первой меры деформации, определяющий изменение объема:

$$\sqrt{I_3} = (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + \varepsilon_3), \quad \varepsilon_3 = \frac{-\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (3)$$

С учетом (3):

$$\sigma_1 = \frac{1}{(1 + e_2)(1 + \varepsilon_3)} \cdot \frac{E}{1 - \nu^2}(e_1 + \nu e_2), \quad \sigma_2 = \frac{1}{(1 + e_1)(1 + \varepsilon_3)} \cdot \frac{E}{1 - \nu^2}(e_1 + \nu e_2). \quad (4)$$

Прямое применение определяющих соотношений (4) к задачам пластического формоизменения не дает адекватных результатов. Поэтому целесообразно их модификация по логике построения соотношений типа ДН. Для моделирования пластического деформирования модуль E в (9) заменим секущим модулем (модулем пластичности) $\Lambda = E_c$, коэффициент Пуассона ν – на 0.5, обычные деформации – на логарифмические следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{1}{(1 + e_2)(1 + \varepsilon_3)} \cdot \frac{4\Lambda}{3}(\bar{e}_1 + \nu\bar{e}_2), \quad \sigma_2 = \frac{1}{(1 + e_1)(1 + \varepsilon_3)} \cdot \frac{4\Lambda}{3}(\bar{e}_1 + \nu\bar{e}_2) \quad (5)$$

Использование соотношений (5) приводит к несколько более простым, чем для ДН, связям интегральных характеристик напряженного состояния с деформациями. Интегральные характеристики вводятся как обобщенные внутренние усилия виртуальной работы и уравнений равновесия [4, 5]:

$$\begin{aligned} N_1^o &= (1 + \varepsilon_3) \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \sigma_1(1 + e_2)d\zeta; \quad N_2^o = (1 + \varepsilon_3) \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \sigma_2(1 + e_1)d\zeta, \\ M_1^o &= (1 + \varepsilon_3)^2 \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \sigma_1(1 + e_2)\zeta d\zeta; \quad M_2^o = (1 + \varepsilon_3)^2 \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \sigma_2(1 + e_1)\zeta d\zeta. \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка (5) в (6) дает:

$$\begin{aligned} N_1^o &= \frac{4}{3} \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_1 + 0.5\bar{e}_2)_1 d\zeta, \quad N_2^o = \frac{4}{3} \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_2 + 0.5\bar{e}_1)_2 d\zeta; \\ M_1^o &= (1 + \varepsilon_3) \frac{4}{3} \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_1 + 0.5\bar{e}_2)_1 \zeta d\zeta, \quad M_2^o = (1 + \varepsilon_3) \frac{4}{3} \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_2 + 0.5\bar{e}_1)_2 \zeta d\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

Для материала типа ДН:

$$\begin{aligned} N_1^o &= \frac{4}{3} \delta_3 \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_1 + 0.5\bar{e}_2)_1 \Delta_2 d\zeta, \quad N_2^o = \frac{4}{3} \delta_3 \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_2 + 0.5\bar{e}_1)_2 \Delta_1 d\zeta; \\ M_1^o &= \frac{4}{3} \delta_3^2 \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_1 + 0.5\bar{e}_2)_1 \Delta_2 \zeta d\zeta, \quad M_2^o = \frac{4}{3} \delta_3^2 \int_{-h_o/2}^{h_o/2} \Lambda(\bar{e}_2 + 0.5\bar{e}_1)_2 \Delta_1 \zeta d\zeta, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\delta_k = 1 + \varepsilon_k$, $k = 1, 2, 3$, $\Delta_1 = (1 + e_1)$, $\Delta_2 = (1 + e_2)$,

$e_1 = (\varepsilon_1 + \zeta\kappa_1)$, $\kappa_1 = [\Phi'_o - (1 + \varepsilon_3)\Phi']/\alpha_o$, $\varepsilon_1 = (w' \sin \Phi + u' \cos \Phi)/\alpha_o + \cos(\Phi - \Phi_o) - 1$;

$$e_2 = (\varepsilon_2 + \zeta\kappa_2), \quad \varepsilon_2 = u/\tau_o, \quad \kappa_2 = [\sin \Phi_o - (1 + \varepsilon_3) \sin \Phi]/\tau_o,$$

u, w – радиальное и осевое смещения, Φ_o, Φ – углы наклона нормали оболочки к оси вращательной симметрии до и после деформации.

Логарифмические деформации и множители Δ_1 и Δ_2 представим следующим образом:

$$\bar{e}_1 = \ln(1 + \varepsilon_1 + \zeta\kappa_1) = \ln(1 + \varepsilon_1) + \ln(1 + \zeta\bar{\kappa}_1), \quad \bar{e}_2 = \ln(1 + \varepsilon_2 + \zeta\kappa_2) = \ln(1 + \varepsilon_2) + \ln(1 + \zeta\bar{\kappa}_2),$$

$$\Delta_1 = 1 + \varepsilon_1 + \zeta\kappa_1 = \delta_1(1 + \zeta\bar{\kappa}_1), \quad \Delta_2 = 1 + \varepsilon_2 + \zeta\kappa_2 = \delta_2(1 + \zeta\bar{\kappa}_2),$$

где:

$$\bar{\kappa}_1 = \kappa_1/\delta_1, \quad \bar{\kappa}_2 = \kappa_2/\delta_2. \quad (9)$$

Величины (9) имеют смысл изменений главных кривизн срединной поверхности деформированной оболочки, уменьшенных на $\delta_1 = 1 + \varepsilon_1$ и $\delta_2 = 1 + \varepsilon_2$ соответственно, где $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$. Полагаем, что исходная оболочка тонкая и в процессе деформации таковой остается. Тогда величины $\zeta\bar{\kappa}_1$ и $\zeta\bar{\kappa}_2$ малы по сравнению с единицей, так что можно положить $\ln(1 + \zeta\bar{\kappa}_1) \approx \zeta\bar{\kappa}_1, \ln(1 + \zeta\bar{\kappa}_2) \approx \zeta\bar{\kappa}_2$ с погрешностью, соответственно, $0.5 \zeta\bar{\kappa}_1$ и $0.5 \zeta\bar{\kappa}_2$ по сравнению с единицей. Поэтому имеют место соотношения:

$$\bar{e}_1 = \bar{\varepsilon}_1 + \zeta\bar{\kappa}_1, \quad \bar{e}_2 = \bar{\varepsilon}_2 + \zeta\bar{\kappa}_2.$$

С погрешностью $\max\{\zeta\bar{\kappa}_1, \zeta\bar{\kappa}_2\}$ по сравнению с единицей можно также положить:

$$\Delta_1 = 1 + \varepsilon_1, \quad \Delta_2 = 1 + \varepsilon_2.$$

Таким образом, скобки $(\dots)_1$ и $(\dots)_2$ под интегралами в (8) линейно зависят от ζ :

$$(\dots)_1 = \bar{a}_1 + \zeta\bar{b}_1, \quad (\dots)_2 = \bar{a}_2 + \zeta\bar{b}_2, \quad (10)$$

где:

$$\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon}_1 + 0.5\bar{\varepsilon}_2, \quad \bar{a}_2 = \bar{\varepsilon}_2 + 0.5\bar{\varepsilon}_1, \quad \bar{b}_1 = \bar{\kappa}_1 + 0.5\bar{\kappa}_2, \quad \bar{b}_2 = \bar{\kappa}_2 + 0.5\bar{\kappa}_1.$$

Поскольку Λ сложным образом связаны с компонентами деформации, прямо взять интегралы (7), (8) в явном виде не удастся. Однако это можно сделать, заменив Λ степенным рядом в окрестности $\zeta = 0$. Ограничимся тремя членами:

$$\Lambda = \bar{A} + \bar{A}_1\zeta + \bar{A}_2\zeta^2, \quad (11)$$

Для логарифмических деформаций:

$$\bar{A}_0 = \Lambda(\bar{\varepsilon}), \quad \bar{A}_1 = [\Lambda(\bar{\varepsilon}),_{\bar{\varepsilon}} \bar{e}, \zeta]_{\zeta=0}, \quad \bar{A}_2 = 0.5[\Lambda(\bar{\varepsilon}),_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} \bar{e}, \zeta + \Lambda(\bar{\varepsilon}),_{\bar{\varepsilon}} \bar{e}, \zeta\zeta]_{\zeta=0},$$

$$\Lambda(\bar{\varepsilon}),_{\bar{\varepsilon}} \bar{e} |_{\zeta=0} = C(\eta - 1)\bar{\varepsilon}^{\eta-2}, \quad \Lambda(\bar{\varepsilon}),_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} \bar{e} |_{\zeta=0} = C(\eta - 1)(\eta - 2)\bar{\varepsilon}^{\eta-3}, \quad \bar{e}(\zeta),_{\zeta} |_{\zeta=0} = 2\bar{\kappa}_\varepsilon/(3\bar{\varepsilon}),$$

$$\bar{e}(\zeta),_{\zeta\zeta} |_{\zeta=0} = 2\bar{\kappa}/(3\bar{\varepsilon}) - 4\bar{\kappa}_\varepsilon^2/(9\bar{\varepsilon}^3); \quad \bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_2^2};$$

$$\bar{\kappa}_\varepsilon = 2(\bar{a}_1\bar{\kappa}_1 + \bar{a}_2\bar{\kappa}_2) = 2[\bar{\varepsilon}_1\bar{\kappa}_1 + 0.5(\bar{\varepsilon}_1\bar{\kappa}_2 + \bar{\varepsilon}_2\bar{\kappa}_1) + \bar{\varepsilon}_2\bar{\kappa}_2],$$

$$\bar{\kappa} = 2(\bar{\kappa}_1^2 + \bar{\kappa}_1\bar{\kappa}_2 + \bar{\kappa}_2^2) - 2(\bar{a}_1\bar{\kappa}_1^2 + \bar{a}_2\bar{\kappa}_2^2).$$

После подстановки (11) в (12) и (13) и интегрирования, имеем:

$$N_1^o = (\delta_3 \delta_2)^m \{ \bar{B} \bar{a}_1 + \bar{D} [\bar{\Theta}_1 \bar{b}_1 + \bar{\Theta}_2 \bar{a}_1] \}, \quad N_2^o = (\delta_3 \delta_1)^m \{ \bar{B} \bar{a}_2 + \bar{D} [\bar{\Theta}_1 \bar{b}_2 + \bar{\Theta}_2 \bar{a}_2] \},$$

$$M_1^o = \delta_3^{m+1} \delta_2^m \bar{D} (\bar{b}_1 + \bar{\Theta}_1 \bar{a}_1), \quad M_2^o = \delta_3^{m+1} \delta_1^m \bar{D} (\bar{b}_2 + \bar{\Theta}_1 \bar{a}_2).$$

где $m = 0$ соответствует материалу типа ПЛ, $m = 1$ – материалу ДН,

$$\bar{\Theta}_1 = \bar{A}_1 / \bar{A}_0, \quad \bar{\Theta}_2 = \bar{A}_2 / \bar{A}_0, \quad \bar{B} = (4/3) \Lambda(\bar{\varepsilon}) h_o, \quad \bar{D} = (1/9) \Lambda(\bar{\varepsilon}) h_o^3.$$

В самом простом варианте можно учесть только первое слагаемое в разложении (11), т.е. положить $\Lambda(\bar{\varepsilon}) \approx \bar{A}_0 = \Lambda(\bar{\varepsilon})$, что эквивалентно пренебрежению наведенной неоднородностью свойств материала по толщине. В этом случае:

$$N_1^o = (\delta_3 \delta_2)^m \bar{B} (\bar{\varepsilon}_1 + 0.5 \bar{\varepsilon}_2), \quad N_2^o = (\delta_3 \delta_1)^m [\bar{B} (\bar{\varepsilon}_2 + 0.5 \bar{\varepsilon}_1)],$$

$$M_1^o = \delta_3^{m+1} \delta_2^m \bar{D} (\bar{\kappa}_1 + 0.5 \bar{\kappa}_2), \quad M_2^o = \delta_3^{m+1} \delta_1^m [\bar{D} (\bar{\kappa}_2 + 0.5 \bar{\kappa}_1)]. \quad (12)$$

Соотношения (12) при $m = 1$ проверены в задаче формовки купольных оболочек и дают хорошее согласование с экспериментом [4]. Учет второго члена в (11) практически не влияет на форму оболочки, но несколько уточняет напряженное состояние в зоне краевого эффекта. Квадратичное слагаемое в (11) можно не учитывать.

Список литературы

- [1] *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел / Пер. с англ. М.: Изд-во ИЛ. 1954. 647 с.
- [2] *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.
- [3] *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. Изд.2-е, перераб. М.: Машиностроение. 1975. 400 с.
- [4] *Юдин А.С., Юдин С.А.* Пластическая вытяжка купола из круглой пластинки: теория и эксперимент // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. XI м/нар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во "ЦВВР". 2007. Т. 1. С. 255–259.
- [5] *Юдин А.С., Юдин С.А.* Условия сферичности купола при пластической формовке из круглой пластинки // Модели и алгоритмы для имитац. физ.-хим. процессов. М-лы м/нар. конф. 8-12 сент. 2008 г. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2008. С. 86–94.

Yudin A.S., Yudin S.A. *Constitutive relations in problems of axisymmetric shells forming.* Variants of physical relations of large nonlinear deformations at simple loading are considered. Davis-Naday's and semilinear materials are initial. Last is modified by replacement of the elastic module on secant and usual component of deformations on logarithmic. Hypotheses of incompressibility, Kirchhoff's hypothesis concerning normal stress and expansion in series of the plasticity module on cross coordinate are applied. On this base two-dimensional analogues are deduced. The relations are applicable for modelling of plastic axisymmetric shells forming.