

Содержание

Белоконь А. В., Ватульян А. О. К 90-летию Иосифа Израилевича Ворovichа	7
Абросимов Н. А., Елесин А. В., Куликова Н. А. Численное моделирование нестационарного деформирования композитных пластин при контактном взаимодействии с жесткими телами	11
Агаян К. Л. Дифракция сдвиговой плоской волны на крае упругого слоя в составном пространстве	16
Азарова П. А., Явруян О. В. К идентификации трещин в вязкоупругой слоистой среде	21
Акопян В. Н., Саргсян А. О. Напряженное состояние составной полуплоскости с абсолютно жестким включением на линии раздела материалов	25
Алексеев Д. В., Иванов В. А., Иванча Е. В., Фомин В. В., Черкесов Л. В. Математическое моделирование динамических процессов в шельфовой зоне моря в штормовых условиях	30
Анкудинов А. В., Бауэр С. М., Ермаков А. М., Каштанова С. В., Морозов Н. Ф. О механических параметрах асбестовых нанотрубок	35
Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Факторизационные методы в граничных задачах механики сплошных сред	39
Баженов В. Г., Кибец А. И., Павленкова Е. В., Баранова М. С. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости и закритического поведения упругопластических оболочек вращения при ударном нагружении	44
Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г. Сравнительный анализ динамического поведения виброударных систем разных типов	49
Баничук Н. В., Барсук А. А., Иванова С. Ю. Свободные колебания и устойчивость предварительно напряженной полосы	54
Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Семенов Б. Н. Механические аспекты понятия ригидности глаза	59
Белоконь А. В., Герасименко Т. Е., Скалиух А. С. Об одной двумерной модели поликристаллических сегнетоэлектриков	63
Белянкова Т. И., Калинин В. В. Особенности динамики слоисто-неоднородных и функционально градиентных сред	68
Боев Н. В. Многократные переотражения высокочастотных волн в заданной декартовой системе координат	73
Бунтин Д. А., Поплавская Т. В. Применение биспектрального анализа к расчетным данным	77
Ватульян А. О. Итерационные процессы в обратных коэффициентных задачах	81
Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д., Саакян Я. Г. О некоторых задачах идентификации предварительных напряжений	86

Ватульян К. А. Дислокации в цилиндре с винтовой ромбоэдрической анизотропией	91
Вернигора Г. Д., Еремеев В. А., Соловьев А. Н. Об идентификации свойств функционально градиентных композитов	96
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ламмеринг Р., Еремин А. А., Нойманн М.-Н. Возбуждение и распространение волн Лэмба в слоистых упругих волноводах с поверхностными и внутренними неоднородностями	101
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И. Влияние пористости материалов на характеристики бегущих волн в слоистых волноводах . .	106
Говорухин В. Н. Частные решения стационарной задачи протекания идеальной жидкости	111
Голованов А. И., Султанов Л. У. Численное исследование больших упруго-пластических деформаций на основе мультипликативного разложения	116
Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. О моделировании процессов химико-механического полирования	119
Горячева И. Г. Износоконтактные задачи для неоднородных тел	124
Денина О. В. Об определении неоднородных характеристик стержней . .	125
Дерезин С. В., Зубов Л. М. Равновесие нелинейно упругой пластинки с распределёнными дислокациями и дисклинациями	130
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Уравнения электрогидродинамических течений в квазидвумерных областях	135
Зеньковская С. М., Прозоров О. А., Шлейкель А. Л. Вибрационная конвекция в слое бинарной смеси с учетом эффекта Соре	140
Зубов Л. М. Универсальные решения для изотропных несжимаемых микрополярных тел	145
Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Петров А. Н. Численное моделирование матриц Грина теории упругости и электроупругости	150
Илюхин А. А. Дифференциальный подход к решению задачи ориентации	154
Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н. Оценивание влияния теплового шума на погрешности измерения АСМ	159
Карякин М. И., Шубчинская Н. Ю. Равновесие и устойчивость нелинейно-упругой панели при чистом изгибе	162
Кизилова Н. Н., Чистина Э. О. Распространение волн в заполненных жидкостью многослойных вязкоупругих трубках: асимптотический анализ	167
Кизилова Н. Н., Штейн А. А. Многофазные модели растущих биологических сплошных сред	172
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Гиперболический термоупругий континуум Коссера как физическая теория поля	177
Колесников А. М. Выпрямление высокоэластичной кривой трубы внутренним давлением	182

Колосова Е. М. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия в подшипнике скольжения с учетом тепловыделения от трения	187
Кононов Ю. Н., Дидок Н. К. Задача Сретенского для цилиндра с упругими днищами	191
Короткин В. И., Сухов Д. Ю. Действие распределённой нагрузки на прямой бочкообразный зуб эвольвентного профиля	196
Kudish I. I. Contact Fatigue and Rough Surfaces	201
Липанов А. М. Теоретическое исследование турбулентных потоков сжимаемых сред	206
Лыжов В. А., Тукодова О. М., Ворович Е. И. Взаимодействие многоэлектродных структур с предварительно напряженными электроупругими средами	211
Манжиров А. В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации	215
Матвеев В. П. Численный анализ упругих тел с особыми точками: построение сингулярных решений, конечно-элементные алгоритмы, оптимизация геометрии	220
Мелешко В. В., Токовый Ю. В., Вилладжио П. Спектр Коссера осесимметричной задачи теории упругости в напряжениях для сплошного изотропного цилиндра конечной длины	225
Мещерякова Е. Ю., Пухначев В. В. Групповой анализ уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла	230
Моргулис А. Б. Высокочастотная асимптотика течения вязкой жидкости, создаваемого вращательными колебаниями погруженного шара	235
Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. Локализованные формы потери устойчивости сжатой сплошной среды	240
Овчинникова С. Н., Моршнева И. В. Режимы течения около точки резонанса Res 2 в задаче Куэтта–Тейлора	245
Надолин К. А. Моделирование массопереноса в русловых потоках: проблемы и подходы	250
Назарова Л. А., Назаров Л. А., Эпов М. И., Ельцов И. Н. Формирование и эволюция зон необратимых деформаций в окрестности глубоких скважин в массивах горных пород	255
Наседкин А. В., Рыбьянец А. Н. Микроструктурное конструирование и моделирование поликристаллических пьезокомпозиционных материалов по методам эффективных модулей и конечных элементов	260
Панфилов И. А., Устинов Ю. А. Критические частоты и высокочастотные колебания тел с винтовой анизотропией	265
Пипа В. А., Михайлова И. Б. Влияние начального напряженного состояния на волновое поле в структуре «слоистый пьезоэлектрик – диэлектрическая подложка»	270

Полянских С. В., Гусарчук А. Н., Демехин Е. А. Автомодельный сценарий перехода к электроконвекции в ионообменных мембранах	275
Попов А. В. Об устойчивости двуслойного полого цилиндра, нагруженного внешним давлением	280
Пряхина О. Д., Смирнова А. В. Интегральные уравнения динамических задач для многослойных сред с учетом связности физических полей	285
Саакян А. В. Метод дискретных особенностей в применении к решению задач для областей с краевыми трещинами	290
Сазонов Л. И. Оценки сходимости нестационарных решений к устойчивым стационарным течениям задачи обтекания	295
Сафроненко В. Г., Трифонов В. В., Шутько В. М. Численное решение задачи о колебаниях и звукоизлучении трехслойной цилиндрической оболочки из полимерного композита	300
Симонов И. В. Концепция ослабленной зоны и прочность поликристаллических тел	305
Соколов А. В. Патологическая извитость артерий и возможные методы исследования процесса ее образования	309
Столбова О. С., Роговой А. А. Применение процедуры восполнения напряжений при решении нелинейных краевых задач механики деформируемого твёрдого тела методом конечных элементов	314
Сумбатьян М. А., Бондарчук А. А. Обратная задача об оптимальной геометрии лопасти турбины ВЭУ	319
Трубчик И. С., Айзикович С. М., Евич Л. Н. О влиянии переменного градиента упругих свойств слоя на деформирование поверхностных слоев в области индентирования	324
Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю., Тенкам Э. М. Теория продольных колебаний стержня, основанная на модели Рэлея–Бишопа	329
Цибулин В. Г. Разностные схемы, наследующие свойства уравнений фильтрационной конвекции	334
Чебаков М. И., Колосова Е. М. Контактные задачи для двухслойных оснований и методы их решения	339
Шейдаков Д. Н. Влияние свойств покрытия на устойчивость составного микрополярного стержня при сжатии и внешнем давлении	344
Якупов Н. М., Киямов Х. Г. Моделирование тонкостенных элементов конструкции с трещиной трехмерными элементами	349

К 90-ЛЕТИЮ ИОСИФА ИЗРАИЛЕВИЧА ВОРОВИЧА

21 июня 2010 года исполнилось 90 лет со дня рождения Иосифа Израилевича Ворovichа — выдающегося российского ученого-математика и механика, замечательного педагога, создавшего авторитетную в стране и за рубежом школу механиков.

И.И. Ворovich родился 21 июня 1920 года в небольшом городке Стародубе в Брянской области, где и окончил среднюю школу. В 1937 г. он поступил в Московский государственный университет на отделение механики, где читали лекции будущие академики М.В. Келдыш, Л.И. Седов, А.Ю. Ишлинский, Ю.Н. Работнов. Когда молодой студент Ворovich закончил 4-й курс, началась Великая Отечественная война; он в числе других студентов мехмата МГУ был призван в ряды Красной Армии и направлен на учебу в Военно-воздушную инженерную академию им. Н.Е. Жуковского. В годы войны курсанты проходили производственную практику на прифронтовых аэродромах. И.И. Ворovich в 1942 г. был авиамехаником на Волховском фронте, затем принимал участие в войне с Японией на Забайкальском фронте в качестве авиатехника и авиаинженера

В 1944 г. И.И. Ворovich, окончив Академию с отличием, был направлен в строевую часть. В то время Иосиф Израилевич еще не знал, что студентам, перед войной окончившим 4 курса МГУ, Постановлением Правительства был присвоен статус выпускников вуза. Таким образом, И.И. Ворovich оказался выпускником двух вузов, сочетание фундаментального и инженерного образования в которых сыграло в его дальнейшей судьбе важную роль. В 1945 г. он в составе Академии был участником Парада Победы. В 1947 г. он был отозван из строевой части для продолжения учебы в Академии, где под руководством выдающегося ученого, будущего академика В.С. Пугачева исследовал воздействие случайных возмущений на устойчивость и точность работы систем автоматического регулирования; по материалам этого исследования в 1950 г. он защитил кандидатскую диссертацию. В том же году И.И. Ворovichу предложили преподавательскую работу. Его выбор пал на Ростовский государственный университет, с которым он с 1950 года связал свою судьбу на долгие годы, пройдя все этапы педагогической и научной карьеры.

В 1958 г. И.И. Ворovich защищает докторскую диссертацию в Ленинградском университете на тему «Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек», в которой были заложены строгие математические основы этого важного раздела механики. Он разработал топологический и вариационный подходы в проблеме разрешимости основных краевых задач нелинейной теории оболочек, дал строгое обоснование применимости метода Бубнова–Галеркина для этой цели. Блестящая защита докторской диссертации в 1958 году явилась предпосылкой создания в Ростовском университете кафедры теории упругости. Уже на первых этапах становления новой кафедры в начале 60-х годов под руководством И.И. Ворovichа сформировался ряд актуальнейших в период бурного развития военной техники научных направлений в механике: нелинейная теория оболочек и проблемы устойчивости тонкостенных конструкций, нелинейная теория гидродинамической устойчивости, смешанные статические и динамические задачи теории упругости, математическая теория толстых плит и оболочек, математическая

теория начально-краевых задач вязкоупругости. В этом же году на кафедре был заключен первый хозяйственный договор практического характера по исследованию бандажированных колес редукторов прокатных станков и шахтных подъемников, что позволило начать осуществление программы по внедрению теоретических разработок в практику. Сочетание глубоких теоретических разработок и успешных экспериментальных исследований привело к созданию в 1971 г. на базе кафедры теории упругости РГУ Научно-исследовательского института механики и прикладной математики (НИИ МиПМ РГУ), директором которого был назначен И. И. Ворович. В стенах института за 30 лет его руководства был создан крупный научный коллектив и были выполнены важнейшие научные темы из различных областей механики и моделирования природных систем. И. И. Воровичу была свойственна определенная прозорливость в определении приоритетных направлений исследований, а также умение сочетать глубину решения теоретических задач с видением их выхода в прикладные области.

Весом вклад И. И. Воровича в постановку и решение многих трудных проблем механики. Среди них отметим анализ многочисленных моделей теорий оболочек и толстых плит и проблему предельного перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерной, где им совместно с учениками был разработан новый вариант асимптотического метода, выявлен ряд общих закономерностей в структуре решений. На этой основе построены уточненные методы расчета существенно неоднородных пластин и оболочек, теории волноводов, широко используемые в современной практике расчетов, осуществлен анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности концентраторов — ребер, отверстий. Существенные результаты получены И. И. Воровичем при исследовании устойчивости оболочек; он был одним из первых, кто применил вероятностные методы в проблеме устойчивости оболочек, осуществил исследование, посвященное влиянию начальных несовершенств и случайных нагрузок на устойчивость тонкостенных конструкций. В последующие годы он руководил выполнением ряда важных тем по разработке методов и программных комплексов в области виброакустики сложных оболочечных, в том числе и усиленных ребрами конструкций, которые находили применение в судостроении, авиации и других отраслях.

Значительного продвижения удалось добиться И. И. Воровичу и его ученикам в изучении смешанных статических и динамических задач теории упругости. Одним из первых он начал исследовать смешанные краевые задачи для полуограниченных и ограниченных областей с негладкой границей, предложив эффективные асимптотические методы исследования и вычислительные схемы. В работах, посвященных динамическим задачам теории упругости для полуограниченных областей (типа полосы, слоя, бесконечного цилиндра), им произведено качественное исследование структуры решений, построена строгая математическая теория изолированных резонансов в системе, состоящей из полуограниченной упругой среды и массивного тела, и в частности, обоснована возможность существования резонансных частот в низкочастотной области. В рамках этого направления удалось успешно решить ряд важных научных проблем, имеющих приложения в геофизике и вибросейсморазведке, горной механике и фундаментостроении, строительстве дорожных покрытий и дефектоскопии.

В ряде работ И.И. Ворович предложил метод исследования на устойчивость конструкций из реологических материалов, который позволил решить ряд важных практических проблем для элементов конструкций из новых конструктивных материалов — композитов, полимеров. Значителен вклад И.И. Воровича в постановку и исследование новых проблем механики для связанных полей — в исследование разрешимости краевых задач электроупругости, в исследование ряда новых обратных геометрических и граничных задач. В начале 90х-годов И.И. Ворович заложил основы нового для классической механики деформируемого тела направления, связанного с идентификацией различных динамических объектов по дополнительной информации. Он неоднократно обращал внимание коллег и учеников на ряд задач механики, в которых решение конкретных задач не могло быть получено численно, например, на основе бурно развивающегося метода конечных элементов. Эти задачи, являющиеся, как правило, нелинейными некорректными проблемами, интересовали его и как механика, и как математика. Простейшие задачи такого класса возникают при идентификации полимерных материалов в рамках линейных дифференциальных моделей, при оценке размеров и расположения полостей или трещин в твердом теле по данным акустического зондирования. Это направление интенсивно развивается и сейчас, позволяя решать новые типы задач механики.

Огромный практический опыт работы по исследованию механических систем позволил И.И. Воровичу перейти к исследованию математических моделей природных систем, он является одним из инициаторов разработки эколого-математической модели Азовского моря, которая получила высокую оценку ученых и общественности страны, позволяя прогнозировать различные режимы природопользования. Особо упомянем созданную И.И. Воровичем концепцию критических режимов в экологических системах, согласно которой приближение системы к критическому режиму в результате внешних воздействий приводит к резкому увеличению времени релаксации равновесия или к его катастрофической неустойчивости.

В 1983 г. за создание этой модели коллективу ученых и И.И. Воровичу в их числе была присуждена Государственная премия СССР.

В 1990 году он был избран действительным членом Академии наук СССР.

В трудные годы после распада СССР И.И. Ворович приложил немало сил для сохранения и развития научного потенциала института, кафедры, науки в стране и в регионе. При его деятельном участии в РГУ был открыт докторский Совет по механике деформируемого твердого тела, ежегодно с 1995 года стали проводиться международные конференции по актуальным проблемам механики сплошной среды.

За цикл работ по фундаментальным проблемам тонкостенных конструкций И.И. Ворович с группой исследователей в 1998 г. удостоен Государственной премии Российской Федерации.

В течение 50 лет И.И. Ворович вел преподавательскую и научную работу в Ростовском государственном (Южном федеральном) университете. Большим авторитетом в России и за ее пределами пользуется созданная им научно-педагогическая школа ученых-механиков, среди которых около 50 докторов и бо-

лее 130 кандидатов наук. И. И. Воровичем опубликовано более 300 научных работ, из них 16 монографий, посвященных различным проблемам механики. За боевые и трудовые заслуги он награжден рядом орденов и медалей СССР и Российской Федерации, удостоен медалей академиков П. Л. Капицы и А. А. Благонравова.

Последние годы жизни Иосиф Израилевич посвятил самому важному труду — написанию всеобъемлющего учебника по механике. К сожалению, большая часть из запланированного автором осталась незавершенной, однако после его смерти, в 2004 году благодаря усилиям учеников вышла первая часть этого поистине энциклопедического труда «Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие», состоящая из 23 лекций. За несколько лет работы коллектива кафедры теории упругости и при поддержке РФФИ подготовлена и издана в издательстве «Физматлит» в 2010 году вторая часть, состоящая из 26 лекций. Несомненные достоинства книги — широта и глубина охвата материала, доступность изложения, стремление дать практические приложения, указать уточненные методы анализа проблемы. В ней наряду с классическими разделами теоретической и аналитической механики присутствуют исторические экскурсы, практические задачи и глубокие аналитические результаты из разных областей механики и математики (контактные задачи, трение, теория потенциала и ее приложения, баллистика околоземного пространства, элементы теории относительности, теория устойчивости и качественная теория дифференциальных уравнений). Кроме того, в книге имеются биографические данные о выдающихся механиках и огромное количество справочного материала.

Вклад Иосифа Израилевича в становление и развитие новых разделов механики огромен. Вместе с тем в памяти учеников И. И. Воровича остались не только его научные результаты и прозорливость, но и удивительная доброжелательность и открытость.

Память об И. И. Воровиче сохранится на долгие годы, его имя носит основанный им НИИ механики и прикладной математики Южного федерального университета, школа механиков, созданная им, продолжает интенсивно работать, готовить новые поколения исследователей.

Белоконь А. В., Ватульян А. О.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖЕСТКИМИ ТЕЛАМИ

Абросимов Н. А., Елесин А. В., Куликова Н. А.

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Предлагается методика численного решения задач динамического деформирования композитных пластин при низкоскоростном соударении с абсолютно жесткими телами. На примере решения задачи динамического контактного взаимодействия стального шарика с композитной пластиной показана достоверность данного подхода, а также проведен анализ влияния различных параметров (скорости и массы ударника, структуры пакеты) на величину контактной силы и прогиб в центре пластины.

Рассматривается пластина толщиной h , состоящая из N элементарных слоев однонаправленного композитного материала с толщинами h_k ($k = \overline{1, N}$) в декартовой системе координат α_i ($i = \overline{1, 3}$), так, что орт оси α_3 направлен по нормали к срединной поверхности. Распределение перемещений по толщине пластины задается в виде

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= \sum_{n=0}^1 (\alpha_i)^n u_i^n(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (i = 1, 2), \\ u_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) &= u_3^0(\alpha_1, \alpha_2, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_i^0(\alpha_1, \alpha_2, t)$ ($i = \overline{1, 3}$) — перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных осей; $u_j^1(\alpha_1, \alpha_2, t)$ ($j = 1, 2$) — углы поворота поперечного сечения пластины.

Компоненты нелинейного тензора деформаций определяются соотношениями [1]

$$\begin{aligned} e_{11} &= \varepsilon_{11} + (\varepsilon_{13})^2/2 + \alpha_3 \chi_{11} \quad (1 \leftrightarrow 2); \\ e_{12} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23} + \alpha_3 \chi_{12}); \\ e_{13} &= \frac{1}{2}(u_1^1 + \varepsilon_{13}), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1^0}{\partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3^0}{\partial \alpha_1}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial u_1^1}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2); \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1^0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial \alpha_1}; \quad \chi_{12} = \frac{\partial u_2^1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1^1}{\partial \alpha_2}. \end{aligned}$$

Тензор напряжений определяется законом Гука для ортотропного тела

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} \quad (1 \Leftrightarrow 2); \\ \sigma_{13} &= 2c_{44}e_{13}; \\ \sigma_{23} &= 2c_{55}e_{23}; \\ \sigma_{12} &= 2c_{66}e_{12},\end{aligned}\tag{3}$$

где c_{ij} — эффективные жесткости пакета слоев, вычисляемые в рамках теории эффективных модулей [2].

Задача контактного взаимодействия пластины с жестким телом формулируется как несвободная вариационная задача. Абсолютно жесткий ударник может двигаться только в направлении оси α_3 .

Для описания совместного движения жесткого тела и пластины используется условие непроникания по нормали и вариационное уравнение Даламбера-Лагранжа, которое для рассматриваемой системы может быть записано в виде

$$\iiint_V \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV + \iiint_V \sum_{i=1}^3 \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \iint_S \lambda (\delta u_3 - \delta U_3) dS + m \frac{\partial U_3}{\partial t^2} \delta U_3 = 0, \tag{4}$$

где V — объем, занятый пластиной в недеформированном состоянии; $S(t)$ — поверхность контакта пластины с жестким телом, ρ — усредненная плотность оболочки ($\rho = 1/h \sum_{k=1}^N \rho_k h_k$, ρ_k — плотность материала k -го слоя); $\delta u_i, \delta U_3$ — произвольные кинематически допустимые изменения перемещений пластины и жесткого тела, λ — неопределенный множитель Лагранжа; m — масса жесткого тела.

Подставляя в (4) соотношения (1–3) и выполняя операции варьирования (исключая при этом зависимые вариации перемещений пластины и жесткого тела в зоне контакта) и интегрирования по толщине пластины, получим:

- уравнения движения пластины

$$\frac{\partial M_{1i}^n}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{2i}^n}{\partial \alpha_2} - M_i^n + p_i = A^n \ddot{u}_i^n \quad (i = \overline{1,3}, n = 0, 1), \tag{5}$$

где

$$M_{ij}^n = \sum_{l=1}^3 N_{il}^n E_{lj}^0; \quad N_{ij}^n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\alpha_3)^n d\alpha_3;$$

$$E_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial u_3^0}{\partial \alpha_1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial u_3^0}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_1^n = nM_{31}^0 \quad (1 \Leftrightarrow 2); \quad M_3^n = nM_{33}^0;$$

$$A^0 = \rho h; \quad A^1 = \rho h^3/12; \quad p_i = 0 \quad (i = 1, 2),$$

- естественные краевые условия

$$M_{11}^0 = M_{11}^{0*}, M_{12}^0 = M_{12}^{0*}, M_{13}^0 = M_{13}^{0*}, M_{11}^1 = M_{11}^{1*}, M_{12}^1 = M_{12}^{1*},$$

где $M_{11}^{0*}, M_{12}^{0*}, M_{13}^{0*}, M_{11}^{1*}, M_{12}^{1*}$ - усилия и моменты, приложенные к соответствующим граничным линиям;

- уравнение движения жесткого тела

$$m \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = F = \iint_S p_3 dS, \quad (6)$$

где p_3 — проекция контактного давления на ось α_3 .

Уравнения движения (5), (6) вместе с геометрическими (2) и физическими (3) соотношениями, краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} u_i^0(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_i^{0*}(\alpha_1, \alpha_2); \quad u_j^1(\alpha_1, \alpha_2, 0) = u_j^{1*}(\alpha_1, \alpha_2); \\ \dot{u}_i^0(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_i^{0*}(\alpha_1, \alpha_2); \quad \dot{u}_j^1(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \dot{u}_j^{1*}(\alpha_1, \alpha_2); \\ &(i = \overline{1,3}) \quad (j = 1, 2) \\ U_3(0) &= U_3^*; \quad \dot{U}_3(0) = \dot{U}_3^* \end{aligned}$$

представляют полную систему уравнений, необходимую для исследования динамического деформирования композитных пластин при контактном взаимодействии с жесткими телами.

Численное решение сформулированной начально-краевой задачи осуществлялось на основе явной вариационно-разностной схемы [3].

В результате определение скоростей и перемещений узлов дискретной модели сводится к рекуррентному счету по формулам

$$\begin{aligned} (\dot{u}_i^n)_l^{j+1/2} &= (\dot{u}_i^n)_l^{j-1/2} + \frac{(\Phi_{3n+i} + Q_i)_l^j}{\Phi_n^m} \Delta t \quad (i = \overline{1,3}; n = 0, 1), \\ (u_i^n)_l^{j+1} &= (u_i^n)_l^j + (\dot{u}_i^n)_l^{j+1/2} \Delta t, \end{aligned} \quad (7)$$

где j — номер временного шага, l — номер узла, Φ_{3n+i}, Φ_n^m — обобщенные силы и массы, Q_i — контактная сила ($Q_i = p_i \Delta S_k, \Delta S_k$ — площадь контакта для k -го узла); Δt — шаг интегрирования по времени, определяемый исходя из оценки максимальной собственной частоты полудискретной линеаризованной системы [3].

Для проверки достоверности методики было проведено сравнение результатов расчета по данной методике с решениями, полученными в работах [4,5]. Рассматривалось динамическое деформирование композитной пластины со свободными краями толщиной $h = 0,0027$ м и линейными размерами $L_1 = 0,1524$ м, $L_2 = 0,1016$ м при контактном взаимодействии с ударником. Ударник имел сферическую головку радиуса $R = 0,00635$ м, масса ударника $m^1 = 8,5 \cdot 10^{-3}$ кг [4], $m^2 = 3,2 \cdot 10^{-2}$ кг [5]. Удар наносился по центру пластины с начальной скоростью $\dot{U}_3^* = 3$ м/с. Физико-механические характеристики элементарного слоя пластины равны $E_1 = 120$ ГПа, $E_2 = 7,9$ ГПа, $\nu_{12} = 0,3, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5,5$ ГПа, $\rho = 1,58 \cdot 10^3$ кг/м³. Структура пакета имеет вид $[0^0/45^0/0^0/-45^0/0^0]_S$.

На рис. 1 приведены графики изменения контактной силы во времени, рассчитанные по вышеописанной методике (сплошные линии) и приведенные в работах [4, 5] (штриховые линии). Кривые 1 и 2 получены для ударников массой m^1 и m^2 соответственно. Наблюдается достаточно хорошее соответствие результатов.

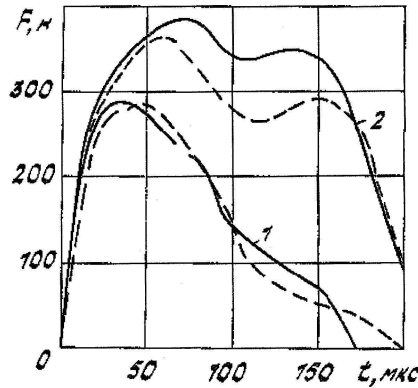


Рис. 1.

На примере трехслойной прямоугольной пластины симметричного строения исследовалось влияние скорости и массы ударника на процесс деформирования. Рассматривалась пластина толщиной $h = 0,003$ м ($h_1 = h_2 = h_3$) с линейными размерами $L_1 = 0,174$ м, $L_2 = 0,042$ м, жестко заземленная по краям $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = L_1$ и свободная по другим краям. Удар наносится по центру пластины сферическим ударником радиусом $R = 0,0075$ м. Физико-механические характеристики слоя пластины: $E_1 = 120$ ГПа, $E_2 = 7,9$ ГПа, $\nu_{12} = 0,3$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5,5$ ГПа, $\rho = 1,58 \cdot 10^3$ кг/м³. Структура пакета имеет вид $[0^0/90^0/0^0]$.

На рис. 2,3 приведены графики изменения максимального прогиба пластины (сплошные линии), максимальной контактной силы (штриховые линии) и времени соударения (штрихпунктирные линии) в зависимости от скорости соударения при взаимодействии с ударником массой $m = 0,01$ кг (рис. 2) и от массы ударника при скорости соударения $\dot{U}_3^* = 3$ м/с (рис. 3).

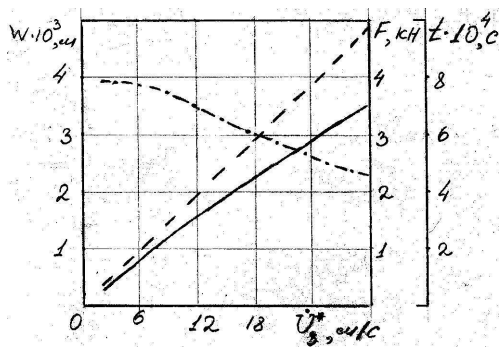


Рис. 2.

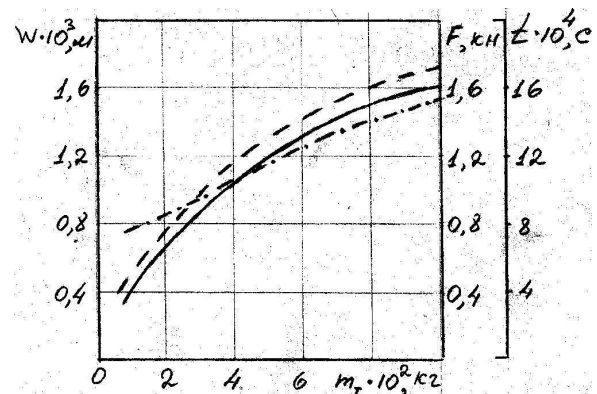


Рис. 3.

Из приведенных результатов следует, что в исследованном диапазоне параметров нагружения максимальные значения контактной силы и прогиба пластины практически прямо пропорционально зависят от скорости соударения. Зависимости контактной силы и прогиба в центре пластины нелинейно растут с увеличением массы ударника. Таким образом, приведенные результаты позволяют сделать вывод о достоверности разработанной методики и возможности решения достаточно широкого класса задач динамического деформирования композитных пластин при контактном взаимодействии с жесткими телами.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00500-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новожиллов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
- [2] *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 373 с.
- [3] *Абросимов Н. А., Баженов В. Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
- [4] *Sun S. T., Chen J. K.* On the impact of initially stressed composite laminates // Composite Materials. 1985. № 19. pp. 490-504.
- [5] *Tan T. N., Sun S. T.* Wave propagation in grafits/epoxy laminates due to impact // Appl. Mech. 1985. № 52. pp. 6-12.

Abrosimov N. A., Yelesin A. V., Kulikova N. A. *Numerical modeling non-stationary deformation of composite plates under contact interaction with rigid bodies.* A numerical method for solving problems of dynamic deformation of multi-layered composite plates under a low velocity impact with perfectly rigid bodies is proposed. The authenticity of the approach under consideration is shown by solving the dynamic deformation problems of the composite beams and plates under a normal impact with a spherical striker and the influence of a stack structure and an impact velocity on the deformation process is investigated.

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА КРАЕ УПРУГОГО СЛОЯ В СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Агаян К. Л.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Исследуется динамическая контактная задача о дифракции сдвиговой плоской волны, падающей из бесконечности под некоторым углом, на край упругого слоя, вложенного в упругое полупространство и частично скрепленного с ним. Получены конечные выражения, определяющие волновое поле в каждой части слоя и пространства, а также асимптотические формулы, описывающие волновое поле в дальних зонах и около концов участков контакта.

1. Постановка задачи и ее решение. Исследованию характерных особенностей распространения волновых воздействий различного рода в упругом слое и пространстве посвящены многочисленные работы [1], [2]. В работах [3]– [6] рассмотрены задачи о распространении сдвиговых плоских волн в составном упругом пространстве.

Рассмотрим составное упругое пространство, состоящее из упругого слоя и двух одинаковых упругих полупространств. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ слой, с модулем сдвига μ_0 и плотностью ρ_0 , занимает область $\Omega_0(|x| < \infty, |y| < h, |z| < \infty)$, а полупространство, с одинаковыми характеристиками μ и ρ — $\Omega_1(y > h)$ и $\Omega_2(y < -h)$. Слой и пространство по своим граничным полуплоскостям ($x > 0, y = \pm h$) соединены (жесткий контакт), а по плоскостям ($x < 0, y = \pm h$), не контактируют (трещина) и свободны от напряжений. В полупространстве Ω_1 распространяется падающая из бесконечности под углом β ($0 < \beta < \pi/2$) заданная сдвиговая плоская волна (гармонический множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и в дальнейшем опускаем, т.е. задача решается в амплитудах) с амплитудой

$$w^{(\infty)}(x, y) = \exp(-ikx \cos \beta - ikx \sin \beta) \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, $c = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения сдвиговой волны, ω — частота колебаний.

Предполагая, что составное пространство находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить дифрагированное волновое поле в каждой области Ω_j ($j = 0, 1, 2$).

Для решения задачи амплитуда неизвестных упругих перемещений и соответственно амплитуда падающей волны из (1) представляется в виде суммы своих четных и нечетных частей. В итоге решение поставленной задачи сводится к определению амплитуд волновых полей четно и нечетно (относительно y) поставленных задач.

Решение последних, как и в работах [3]– [6], сведено к двум независимым крайевым задачам типа Римана на действительной оси. Решение этих функциональных уравнений построено по обычной процедуре — методом факторизации [5, 7]. В конечном итоге решение поставленной выше задачи получено в виде:

в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ($|y| > h$)

$$w(x, y) = \frac{e^{-ik_y h}}{2\mu_*} \frac{\lambda}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{M}_1^-(k_x) \bar{M}_1^+(\sigma) + \text{sign } y \bar{M}_2^-(k_x) \bar{M}_2^+(\sigma)] \times \\ \times \frac{e^{-\gamma(|y|-h)}}{\gamma h} \frac{e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sigma - k_x + i0} + \text{sign } y e^{-2k_y h} e^{-ik_x x + ik_y |y|} + w^{(\infty)}(x, y) \quad (2)$$

в области Ω_0 ($|y| < h$)

$$w_0(x, y) = \frac{e^{-ik_y h}}{2\mu_*} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{M}_1^-(k_x) \bar{M}_1^+(\sigma) \frac{\text{ch}(\gamma_0 y)}{\text{sh}(\gamma_0 h)} + \bar{M}_2^-(k_x) \bar{M}_2^+(\sigma) \frac{\text{sh}(\gamma_0 y)}{\text{ch}(\gamma_0 h)} \right] \times \\ \times \frac{e^{-i\sigma x}}{\gamma_0 h (\sigma - k_x + i0)} d\sigma \quad (3)$$

$$k_x = k \cos \beta, \quad k_y = k \sin \beta, \quad \mu_* = (\mu_0 + \mu) / 2\mu, \quad \lambda = \mu_0 / \mu \quad (4)$$

$$\bar{M}_1^\pm(\sigma) = \frac{h(\sigma \pm k_0) \bar{E}_1^\pm(\sigma)}{\bar{K}_1^\pm(\sigma)}, \quad \bar{M}_2^\pm(\sigma) = \frac{\sqrt{h(\sigma \pm k)} \bar{E}_2^\pm(\sigma)}{\bar{K}_2^\pm(\sigma)} \quad (5)$$

$$\bar{K}_1(\sigma) = L_1(\sigma) / \mu \mu_* \gamma e^{\gamma_0 h} = \bar{K}_1^+(\sigma) \bar{K}_2^-(\sigma) \\ \bar{K}_2(\sigma) = L_2(\sigma) / \mu \mu_* \gamma_0 e^{\gamma_0 h} = \bar{K}_2^+(\sigma) \bar{K}_2^-(\sigma) \quad (6)$$

$$\bar{E}_1(\sigma) = \frac{\text{sh}(\gamma_0 h)}{\gamma_0 h e^{\gamma_0 h}} = \bar{E}_1^+(\sigma) \bar{E}_1^-(\sigma); \quad \bar{E}_2(\sigma) = \frac{\text{ch}(\gamma_0 h)}{e^{\gamma_0 h}} = \bar{E}_2^+(\sigma) \bar{E}_2^-(\sigma) \quad (7)$$

$$L_1(\sigma) = \gamma_0 \mu_0 \text{sh}(\gamma_0 h) + \gamma \mu \text{ch}(\gamma_0 h); \quad L_2(\sigma) = \gamma_0 \mu_0 \text{ch}(\gamma_0 h) + \gamma \mu \text{sh}(\gamma_0 h) \quad (8)$$

$$\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}, \quad \gamma_0(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2} \quad (9)$$

Явное представление факторизованных функций $\bar{K}_j^\pm(\alpha)$ и $\bar{E}_j^\pm(\sigma)$ ($j = 1, 2$), входящих в решения (2) и (3), и подробности об их свойствах можно найти в [5]. Отметим лишь, что при $k < \sigma < k_0$ функции $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ из (8) имеют действительные корни соответственно $\pm\sigma_{1m}$ и $\pm\sigma_{2m}$, число и распределение которых на вещественной оси существенно зависит от параметра $h\sqrt{k_0^2 - k^2}$ [5]. При этом в решении (2) и (3) действительная ось (линия интегрирования) обходит точки $-k_0$, $-\sigma_{jm}$, $-k$ сверху, а точки k , σ_{jm} , k_0 — снизу, обеспечивая при этом условие уходящей волны.

Проведено подробное исследование решения (2) и (3). Получены аналитические формулы, представляющие распределение дифрагированного волнового поля в каждой подобласти составного пространства. По изложенным в [6, 8] подходам

получены асимптотические формулы с явными коэффициентами, характеризующими особенности волнового поля в дальних зонах.

2. Исследование волнового поля. Приведем некоторые результаты для области Ω_0 .

В подобласти $x < 0$, $|y| \leq h$ амплитуда проходящей волны представляется в виде:

$$w_0(x, y) = \frac{2\mu e^{-ik_y h}}{\mu + \mu_0} \left\{ \frac{\bar{E}_1^-(k_x) \bar{E}_1^+(k_0)}{\bar{K}_1^-(k_x) \bar{K}_1^+(k_0)} e^{-ik_0 x} + \right. \\ \left. + \frac{i(k_0 - k_x) \bar{E}_1^-(k_x)}{\bar{K}_1^-(k_x)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(k_0 + \xi_m) \bar{E}_1^+(\alpha_m) \cos(\pi y \frac{m}{h})}{\xi_m (\xi_m - k_x) \bar{K}_1^+(\xi_m)} e^{-i\xi_m x} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2k} \sin(\beta/2) \bar{E}_2^-(k_x)}{h \bar{K}_2^-(k_x)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{k_0 + \eta_m} \bar{E}_2^+(\eta_m) \sin(\pi y \frac{2m-1}{2h})}{\eta_m (\eta_m - k_x) \bar{K}_2^+(\eta_m)} e^{-i\eta_m x} \right\} \quad (10)$$

$$\xi_m = \sqrt{k_0^2 - (\pi m/h)^2}, \quad \eta_m = \sqrt{k_0^2 - (\pi(2m-1)/(2h))^2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что при фиксированном k_0 лишь конечное число ξ_m и η_m вещественны и, следовательно, в волноводе ($x < 0$) распространяется конечное число проходящих волн. При этом, если $0 < k_0 < \pi/(2h)$, то по свободной части слоя ($x < 0$) распространяется только одна волна, которая при $x \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$w_0(x, y) = \frac{2\mu}{\mu + \mu_0} \frac{\bar{E}_1^-(k \cos \beta) \bar{E}_1^+(k_0)}{\bar{K}_1^-(k \cos \beta) \bar{K}_1^+(k_0)} e^{-ikh \sin \beta} e^{-ik_0 x}, \quad (12)$$

При $\mu = \mu_0$, $k = k_0$ она совпадает с известным результатом [8].

В подобласти ($x > 0$, $|y| \leq h$) волновое поле имеет вид

$$w_0(x, y) = \tilde{w}_0(x, y) + \Lambda(x, y) - \\ - \frac{A_1}{\pi \lambda} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_0 \alpha \sin \alpha_0 h \cos \alpha_0 y}{\bar{M}_1^-(i\tau) [\alpha_0^2 \sin^2 \alpha_0 h + \lambda^2 \alpha^2 \cos^2 \alpha_0 h]} \frac{e^{-\tau x}}{k_x + i\tau} d\tau + \\ + \frac{A_2}{\pi \lambda} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_0 \alpha \cos \alpha_0 h \sin \alpha_0 y}{\bar{M}_2^-(i\tau) [\alpha_0^2 \cos^2 \alpha_0 h + \lambda^2 \alpha^2 \sin^2 \alpha_0 h]} \frac{e^{-\tau x}}{k_x + i\tau} d\tau - \\ - \frac{iA_1}{\pi \lambda} \int_0^k \frac{\beta_0 \beta \sin \beta_0 h \cos \beta_0 y}{\bar{M}_1^-(\sigma) [\beta_0^2 \sin^2 \beta_0 h + \lambda^2 \beta^2 \cos^2 \beta_0 h]} \frac{e^{i\sigma x}}{k_x + \sigma} d\tau + \\ + \frac{iA_2}{\pi \lambda} \int_0^k \frac{\beta_0 \beta \cos \beta_0 h \sin \beta_0 y}{\bar{M}_2^-(\sigma) [\beta_0^2 \cos^2 \beta_0 h + \lambda^2 \beta^2 \sin^2 \beta_0 h]} \frac{e^{i\sigma x}}{k_x + \sigma} d\tau \quad (13)$$

$$\alpha = \sqrt{k^2 + \tau^2}, \quad \alpha_0 = \sqrt{k_0^2 + \tau^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2 - \sigma^2}, \quad \beta_0 = \sqrt{k_0^2 - \sigma^2}$$

$$\Lambda(x, y) = iA_1 \sum_{m=1}^N R_m^{(1)} \cos(\gamma_{1m}y) e^{i\sigma_{1m}x} + A_2 \sum_{m=1}^{N_1} R_m^{(2)} \sin(\gamma_{2m}y) e^{i\sigma_{2m}x} \quad (14)$$

$$\tilde{w}_0(x, y) = \left[\frac{ie^{-ik_y h} \cos(\gamma_x y)}{\lambda \gamma_x \sin(\gamma_x h) + ik_y \cos(\gamma_x h)} - \frac{ie^{-ik_y h} \sin(\gamma_x y)}{\lambda \gamma_x \cos(\gamma_x h) - ik_y \sin(\gamma_x h)} \right] e^{-ik_x x} \quad (15)$$

$$R_m^{(j)} = \frac{\mu \sqrt{\sigma_{jm}^2 - k^2}}{\bar{M}_j^-(-\sigma_{jm}) L_j'(-\sigma_{jm}) (\sigma_{jm} + k_x)}, \quad j = 1, 2$$

$$\gamma_x = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}, \quad \gamma_{jm} = \sqrt{\sigma_{jm}^2 - k^2}, \quad A_j = ie^{-ik_y h} \bar{M}_j^-(k_x)$$

В (14) $N_1 = N - 1$, при $(N - 1)\pi < h\sqrt{k_0^2 - k^2} < (2N - 1)\pi/2$ ($L_1(\sigma)$ имеет $2N$ корней, а $L_2(\sigma) - 2N - 1$ корней), и $N_1 = N$ при $(2N - 1)\pi/2 < h\sqrt{k_0^2 - k^2} < N\pi$ ($L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ имеют по $2N$ корней).

Отметим, что в (13) составляющая $\Lambda(x, y)$ представляет сумму локализованных дифрагированных волн, распространяющихся по несвободной части слоя по направлению оси Ox . При этом волновым числам σ_{1m} соответствуют поверхностные волны Лява. $\tilde{w}_0(x, y)$ — приходящая из бесконечности объемная волна, полностью обусловленная несвободной частью слоя.

Определение перемещений в дальней зоне рассматриваемой подобласти сводится к определению асимптотических поведений интегральных составляющих из (13) при $x \rightarrow +\infty$. Эти формулы получены простым методом интегрирования по частям [6, 8] и имеют вид

$$w_0(x, y) = \left[-C_1 \frac{\cos(\sqrt{k_0^2 - k^2} y)}{\sin(\sqrt{k_0^2 - k^2} h)} + C_2 \frac{\sin(\sqrt{k_0^2 - k^2} y)}{\cos(\sqrt{k_0^2 - k^2} h)} \right] e^{-i(kx - \pi/4)} (kx)^{-3/2} +$$

$$+ O(x^{-5/2}) + \Lambda(x, y) + \tilde{w}_0(x, y), \quad -h \leq y \leq h, \quad x \rightarrow +\infty \quad (16)$$

где $\Lambda(x, y)$ и $\tilde{w}_0(x, y)$ даются формулами (14) и (15), и

$$C_j = \frac{e^{-ik_y h}}{\sqrt{2\pi} \cos^2(\beta/2)} \frac{k \bar{M}_j^-(k_x)}{\sqrt{k_0^2 - k^2} \bar{M}_j^-(-k)}, \quad (j = 1, 2) \quad (17)$$

В особых случаях, когда

$$h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(N - 1), \quad h\sqrt{k_0^2 - k^2} = \pi(2N - 1)/2 \quad (N = 1, 2, \dots)$$

амплитуда объемной волны в слое, подобно однородному случаю, имеет порядок убывания $O(x^{-1/2})$ при $x \rightarrow +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 324 с.
- [2] Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.: Наукова думка, 1981. 284 с.
- [3] Агаян К. Л., Григорян Э. Х., Джилавян С. А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН РА. Механика, 2003. № 4. С. 3–17.
- [4] Григорян Э. Х., Агаян К. Л., Джилавян С. А. Дифракция локализованной сдвиговой волны в упругом пространстве с полубесконечным включением // В сб. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Саратов, 2005. 330 с.
- [5] Григорян Э. Х., Агаян К. Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство // Изв. НАН РА. Механика, 2007. № 3. С. 23–37.
- [6] Агаян К. Л., Григорян Э. Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью // Изв. НАН РА. Механика, 2010. № 1. С. 6–25.
- [7] Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294 с.
- [8] Григорян Э. Х., Агаян К. Л. Новый подход к определению асимптотических формул в задачах дифракции // «Механика». Труды Международной школы-конференции молодых ученых. Ереван. 2009. С. 36–43.

Aghayan K. L. *Diffraction of shear plane wave on the edges of elastic layer at compound space.* Dynamic contact problem of diffraction of a shear plane wave falling from infinity at a certain angle on the edges of the elastic layer embedded in an elastic half-space and partially bonded with it is discussed. Closed form expressions are obtained which determine the wave field in all the parts of the strip and space. Asymptotic expressions are provided which represent the wave field in the far field and in the neighborhood of the contact zones ends.

К ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕЩИН В ВЯЗКОУПРУГОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Азарова П. А., Явруян О. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена задача идентификации геометрических параметров трещины (местоположения и размеров) в вязкоупругом ортотропном слое по известным (измеренным) полям перемещений на части верхней границы в случае плоских колебаний. Свойства вязкоупругого материала учтены в рамках принципа соответствия. Прямая задача решена на основе метода граничных интегральных уравнений. Решение обратной задачи сведено к процедуре минимизации функционала невязки, которая осуществлена генетическими алгоритмами.

В данной работе представлены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции параметров прямолинейной трещины, оценено влияние вязкоупругих свойств материала на процедуру идентификации трещины.

Рассмотрим задачу идентификации геометрических параметров трещины (местоположения и размеров) в вязкоупругом ортотропном слое по известным (измеренным) полям перемещений на части верхней границы в случае плоских колебаний. Нижняя граница слоя жестко закреплена, верхняя – свободна от напряжений за исключением точки приложения нормальной сосредоточенной силы.

Слой ослаблен внутренней трещиной. Трещина описана как математический разрез в области S с берегами l_0^\pm , на которых компоненты вектора перемещений терпят конечные скачки: $\chi_j = u_j|_{l_0^+} - u_j|_{l_0^-}$, $j = 1, 2$. На основе теории дислокаций действие трещины заменено действием фиктивных массовых сил f_j с носителем на трещине. Предполагается, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют и свободны от напряжений.

Свойства вязкоупругого материала учтены на основе принципа соответствия в рамках концепции комплексных модулей. В случае стационарных гармонических колебаний можно, так же как и в упругом случае, исключить время из уравнений динамики. Краевая задача для вязкоупругого материала принимает вид, аналогичный краевой задаче для упругого материала, но с комплексными модулями вязкоупругого материала, которые представляют собой функции частоты колебаний:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0, \quad (1)$$

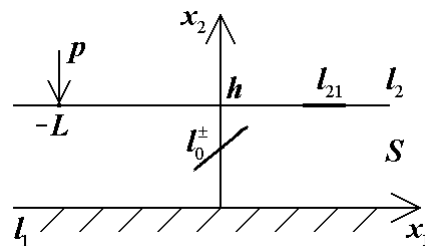


Рис. 1.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^*(i\omega)u_{k,l}, \quad (2)$$

$$u_j|_{l_1} = 0; \quad \sigma_{12}|_{(-L,h)} = 0; \quad \sigma_{22}|_{(-L,h)} = -p; \quad \sigma_{j2}|_{l_2 \setminus (-L,h)} = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}n_j^\pm|_{l_0^\pm} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (4)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ρ — плотность среды, $C_{ijkl}^*(i\omega)$ — комплексные модули, $f_i = -[C_{ijkl}^*(i\omega)n_k^+\chi_l\delta(\zeta)]_{,j}$, ζ — координата, отсчитываемая по нормали к l_0^+ , $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака с носителем на трещине, n_j^\pm — компоненты единичных векторов нормалей к поверхностям l_0^\pm .

Задача идентификации трещины состоит в определении параметров трещины по полям перемещений, измеренным на части верхней границы полосы

$$u_j(x)|_{l_{21}} = g_j(x), \quad x \in l_{21} \subset l_2, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

В [1] представлен метод реконструкции трещины в слое. Первый этап состоит в решении прямой задачи о колебаниях полосы с известной трещиной (1)–(4). С помощью формул Сомильяны получены интегральные представления полей перемещений точек слоя. Составлена система граничных интегральных уравнений относительно неизвестных функций раскрытия трещины, после нахождения которых становится возможным определение полей перемещений любой точки слоя. На основе решения прямой задачи решается обратная задача идентификации трещины по известной информации (5).

Неизвестные параметры трещины находятся из условия минимума функционала невязки. При использовании позиционного зондирования в качестве входных данных задаются значения компонент полей перемещений $g_j(x_i)$ в N точках $x_i \in l_{21}$ при фиксированной частоте колебаний, а функционал невязки определяется следующим выражением:

$$\Phi(Q_k) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^N |u_j(x_i, Q_k) - g_j(x_i)|^2, \quad x_i \in l_{21}, \quad (6)$$

где Q_k — неизвестные параметры трещины.

В данной работе представлены результаты вычислительных экспериментов по идентификации трещины. Для численного анализа рассмотрен вязкоупругий ортотропный композит, состоящий из эпоксидной смолы с 60 процентами графитных продольных волокон, описанный в [2]. На рис. 2 представлены графики комплексных модулей указанного материала в зависимости от безразмерной частоты колебаний $k_0 = \sqrt{\rho(C_{22}^*(0))^{-1}\omega h}$. Здесь и далее используется форма записи комплексных модулей с двумя индексами.

Из графиков видно, что наибольшее затухание (максимальные значения мнимых частей комплексных модулей) наблюдается в окрестности безразмерной частоты, которая находится на промежутке от 0 до 1. При $k_0 \gg 1$ мнимые части комплексных модулей стремятся к 0, как и следует из общей теории [3]. Это означает, что при $k_0 > 2$ можно материал считать упругим с модулями упругости, равными мгновенным модулям вязкоупругого материала. Следовательно при таких

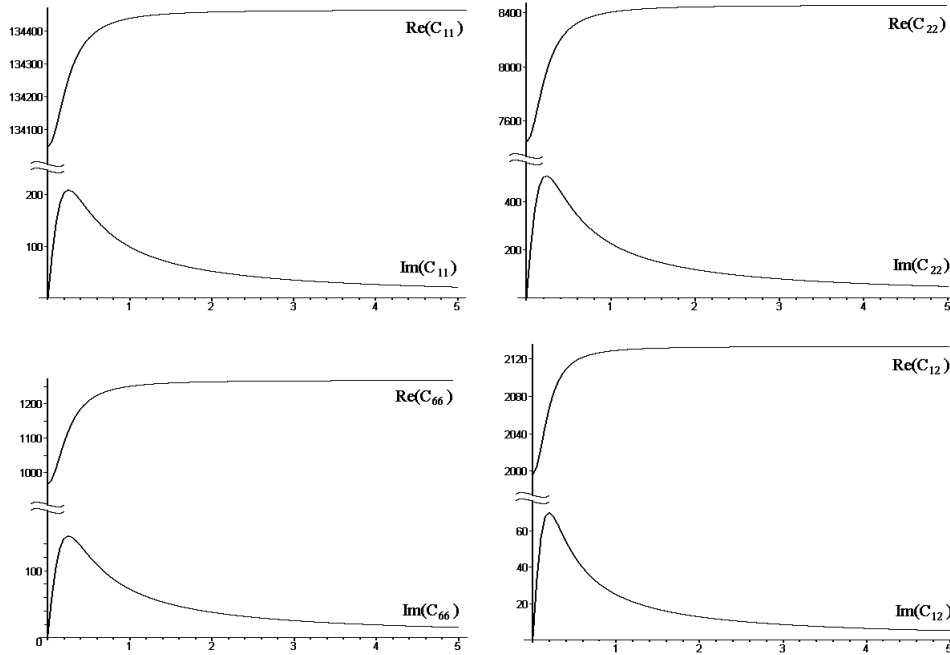


Рис. 2.

частотах процедуру реконструкции трещины можно проводить в предположении, что материал упругий.

Рассмотрим теперь процедуру идентификации прямолинейной наклонной трещины. Параметрами такой трещины являются длина l , угол наклона к положительному направлению горизонтальной оси θ и координаты средней точки трещины x_{1C} и x_{2C} . При восстановлении трещины минимизация функционала невязки (6) осуществлена при помощи генетических алгоритмов. Ниже приведены некоторые численные результаты.

Восстанавливалась вертикальная трещина (т. е. $\theta = 1.57$), длиной $l = 0.1$, средняя точка которой имеет координаты $(0 ; 0.5)$, в слое единичной толщины. Единичная нагрузка p приложена в точке $(0 ; 1)$. Область поиска была выбрана следующим образом: $0.01 < l < 0.25$; $0 < \theta < 3.14$; $-1 < x_{1C} < 1$; $0.3 < x_{2C} < 0.7$.

Следует обратить внимание на выбор точек зондирования. Так как требуется восстановить 4 параметра, то необходимо задавать как минимум 4 числовых значения входной информации, что соответствует одной точке зондирования (вещественные и мнимые части двух компонент поля перемещений). В таком случае, конечно, велика вероятность восстановить параметры другой трещины, поле перемещения от которой в выбранной точке зондирования совпадает с заданным полем перемещений или очень близко к нему. С увеличением числа точек зондирования эта вероятность снижается. При расчетах была рассмотрена реконструкция трещины в случае трех точек зондирования.

Относительные погрешности определения параметров трещины (в процентах) для разных безразмерных частот представлены в таблице 1. Полученные результаты свидетельствуют о применимости данного подхода при идентификации трещины.

k_0	0.1	0.2	0.5	1.0	1.1	1.5	2.0
ε_l	4	4	25	25	0	7	12
ε_θ	9	11	12	8	1	8	7
ε_{x_1C}	15	14	14	28	10	20	19
ε_{x_2C}	20	2	30	19	2	15	4

Таблица 1.

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596) и грантом РФФИ 10-01-00194.

Авторы благодарят Ватульяна А.О. за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Азарова П. А., Явруян О. В. Об одном способе определения параметров трещины в вязкоупругой ортотропной полосе // Труды XIII международной конференции Современные проблемы механики сплошной среды. 2009. Т. 1. С. 6–10.
- [2] Garnich M. R., Hansen A. C. A multicontinuum Approach to Structural Analysis of Linear Viscoelastic Composite Materials // J. of Applied Mechanics. December 1997. Vol. 64. P. 795–803.
- [3] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.

Azarova P.A., Yavruyan O.V. *To the identification of a cracks in the viscoelastic laminated medium.* The problem of the identification of the geometrical crack parameters (such as location and sizes) in the orthotropic viscoelastic layer by the known (measured) fields of displacement on a part of the upper border in the case of plane oscillations is investigated. Properties of the viscoelastic material are considered within the framework of a principle of correspondence. The direct problem is solved on the base of the method of boundary integral equations. The solution of the inverse problem is reduced to the minimization of the functional of the discrepancy, which is carried out by the genetic algorithms.

In this paper the results of computing experiments on the reconstruction of the parameters of the rectilinear crack are presented, the influence of viscoelastic properties of a material on the procedure of identification of the crack is evaluated.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

Акопян В. Н., Саргсян А. О.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Исследованию напряженно-деформированного состояния однородных и составных массивных тел, содержащих абсолютно жесткие включения, посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных исследователей. Из них особо отметим работы [1–3], которые непосредственно связаны с настоящей работой.

Здесь рассмотрено плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, содержащей на линии стыка различных материалов абсолютно жесткое тонкое включение, одна из боковых сторон которого жестко сцеплена с матрицей, а другая сторона находится в условиях гладкого контакта. Изучено поведение искомых функций в концевых точках включения в зависимости от физических параметров и построено решение задачи методом ортогональных многочленов.

1. Рассмотрим плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщины h и упругой полуплоскости с коэффициентами Лямэ μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 , когда на линии их соединения имеется абсолютно жесткое тонкое включение длины $2a$, нижняя сторона которого жестко сцеплена с упругой полуплоскостью, а верхняя сторона гладко контактирует с полосой. Будем считать, что составная полуплоскость деформируется под действием симметричной относительно оси OY нормальной распределенной нагрузки $P_0(x)$, приложенной к свободной границе полосы $y = h$, и сосредоточенной силы Q_0 , приложенной к центру включения перпендикулярно к нему.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = P_0(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \\ U_1(x, 0) = U_2(x, 0), \quad V_1(x, 0) = V_2(x, 0), \end{aligned} \quad |x| > a; \quad (1b)$$

$$V_1(x, +0) = V_2(x, -0) = \delta, \quad \sigma_{xy}^{(1)}(x, +0) = U_2(x, -0) = 0, \quad |x| < a. \quad (1c)$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) соответственно нормальные и касательные компоненты напряжений полосы и полуплоскости, $U_j(x, y)$ и $V_j(x, y)$ — горизонтальные и вертикальные смещения точек полосы и полуплоскости, а δ — неизвестная постоянная, характеризующая жесткое смещение включения.

Введя в рассмотрение функции скачков

$$\begin{aligned} \sigma(x) = \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0); \quad \tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0); \\ U(x) = U_1(x, 0) - U_2(x, 0). \end{aligned} \quad (|x| < a) \quad (2)$$

решение граничной задачи (1) не трудно свести к решению следующей определяющей системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} u'(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) d(s)}{s-x} + \int_{-a}^a K_{11}^*(x-s) \sigma(s) ds + \\
+ \int_{-a}^a K_{12}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{13}^*(x-s) U'(s) ds = -F_1(x) \\
\frac{d_0}{\Delta_*} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{u'(s) ds}{s-x} - \int_{-a}^a K_{21}^*(x-s) \sigma(s) ds - \\
- \int_{-a}^a K_{22}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{23}^*(x-s) U'(s) ds = F_2(x) \\
\frac{l_0}{\Delta_*} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) ds}{s-x} - \frac{l_3}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a K_{31}^*(x-s) \sigma(s) ds + \\
+ \int_{-a}^a K_{32}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{33}^*(x-s) U'(s) ds = -F_3(x).
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
\vartheta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \vartheta_2^{(j)} = \frac{\mu_j(\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad d_0 = \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2}; \\
l_0 = \vartheta_2^{(1)}(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) - \vartheta_1^{(1)}(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}); \quad l_1 = 2(\vartheta_1^{(2)} l_0 - \vartheta_2^{(2)} l_2); \\
l_2 = \vartheta_1^{(1)} \vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{(1)} \vartheta_1^{(2)}; \quad l_3 = 2(\vartheta_1^{(2)} l_2 - \vartheta_2^{(2)} l_0); \quad \Delta_* = [\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}]^2 - [\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}]^2,
\end{aligned}$$

а $K_{i,j}^*(x)$ и $F_j(x)$ ($i, j = 1-3$) – регулярные функции, значения которых здесь не приводятся.

При этом искомые функции должны удовлетворять условиям равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках включения, т.е. условиям

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = Q_0; \quad \int_{-a}^a \tau(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a U'(x) dx = 0 \tag{4}$$

Таким образом решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (3) при условиях (4).

2. Прежде чем перейти к решению системы сингулярных интегральных уравнений (3) при условиях (4), определим поведение искомых функций в концевых точках интервала $(-a, a)$. Для этого сперва рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда толщина полосы бесконечно большая, т.е. рассмотрим напряженное состояние составной плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей включение на линии их соединения. В этом случае система (3) принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds &= 0 \\
\frac{d_0}{\Delta_*} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds &= 0 \\
\frac{l_0}{\Delta_*} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds &= 0
\end{aligned} \right. \tag{1}$$

Отметим, что последняя задача методом комплексных потенциалов была рассмотрена в работе [2], однако не в полном объеме.

Построим решение системы (1) при условиях (4). Из последних двух уравнений, с учетом (4), найдем

$$U'(x) = -\frac{1}{\vartheta_2^{(2)}} \left(\sigma(x) - \frac{MQ_0}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \right) \quad \left(M = \vartheta_2^{(1)} \tilde{\Delta}_*/2 \right), \quad (2)$$

Далее, подставим значения функции $U'(x)$ в первые два уравнения (1). В итоге, для определения скачков напряжений, получим следующую систему двух сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \sigma(x) - \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)ds}{s-x} = \frac{Q_0^*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \\ \tau(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{\Delta} = \vartheta_2^{(1)} \left(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)} \right) - \left(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)} \right)^2; Q_0^* = \frac{l_0 Q_0}{\tilde{\Delta}}; \alpha = \frac{\vartheta_1^{(2)}}{\tilde{\Delta}} \left(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)} \right); \beta = \frac{\vartheta_2^{(2)}}{\vartheta_1^{(2)}}.$$

Заметим, что система (3) верна только в случае $\tilde{\Delta} \neq 0$. В этом случае, решив систему (3) при условиях (4), для функций $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ получим

$$\sigma(x) = \frac{K_I}{\sqrt{a^2-x^2}} + K_{II} [\omega(x) + \omega(-x)]; \quad \tau(x) = K_{III} [\omega(x) - \omega(-x)]; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{2Q_0^*}{\pi(1+q^2)} \left[1 + \frac{1}{2} q t g \pi \gamma_1 \right]; \quad K_{II} = \frac{Q_0}{\pi} \left[\sin \pi \gamma_1 - \frac{l_0 q}{2(1+q^2)\tilde{\Delta} \cos \pi \gamma_1} \right]; \\ K_{III} &= \frac{Q_0}{\pi} \left[\sin \pi \gamma_1 - \frac{q l_0}{2\lambda^*(1+q^2)\tilde{\Delta} \cos \pi \gamma_1} \right], \quad q = \sqrt{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega(x) = \frac{(a-x)^{\gamma_1-1}}{(x+a)^{\gamma_1}}; \quad \gamma_1 = \frac{\vartheta_1}{2\pi}; \quad 0 < \vartheta_1 = \arg G_1 < 2\pi; \quad G_1 = \frac{1+iq}{1-iq}; \quad g(x) = \frac{Q_0^*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Таким образом определены все искомые функции, с помощью которых, используя полученные выше формулы, можно определить напряженно-деформированное состояние составной плоскости полностью.

Что же касается случая $\tilde{\Delta} = 0$, который совпадает со случаем $\alpha = -1$ работы [2], то в этом случае, подставляя значение $U'(x)$ из (2) в первые два уравнения (1), получим

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(\xi)d\xi}{\xi-x} = -\frac{Q_0'}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \\ \tau(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi-x} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы (6), удовлетворяющее условиям (4), дается формулами

$$\sigma(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \left\{ \frac{Q_0'}{2\pi^2\beta} \ln^2 \left(\frac{a-x}{a+x} \right) - A \right\} \quad (-a < x < a); \quad (7)$$

$$\tau(x) = \frac{Q'_0 \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}}; \quad (Q'_0 = l_0/2\vartheta_1^{(2)}d_1); \quad \left(A = Q'_0/3\beta - Q_0\right). \quad (8)$$

Производная же от функции скачков горизонтальных смещений будет задаваться формулой

$$U'(x) = Q'_0 \left[\frac{1}{2\pi^2} \ln^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) - \frac{1}{3} \right] / 2\pi\vartheta_1^{(2)}\beta\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a < x < a) \quad (9)$$

3. Теперь перейдем к решению системы уравнений (3) при условиях (4) в случае, когда $\tilde{\Delta} \neq 0$. С этой целью введем новые искомые функции по формулам:

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &= \frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) + \frac{\mu_j^* d_1}{\Delta_*} \tau(x) \quad (j = 1, 2); \\ \psi_3(x) &= \frac{\vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*} \sigma(x) + \frac{2\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*} U'(x); \quad \left(\mu_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\tilde{\Delta}/2d_1\vartheta_2^{(2)}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда, после некоторых несложных преобразований, систему (3) можно привести к виду:

$$\begin{cases} -\pi i t h(\pi \mu_j) \psi_j^*(t) + \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^*(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^1 R_{nj}^*(t - \tau) \psi_n^*(\tau) d\tau = Q_j^*(t) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3^*(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^1 R_{n3}^*(t - \tau) \psi_n^*(\tau) d\tau = Q_3^*(t) \end{cases} \quad (2)$$

$$(j = 1, 2; \quad -1 < t < 1)$$

При этом условия (4) примут вид:

$$\int_{-1}^1 \psi_j^*(x) dx = P_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad \left(P_1 = P_2 = \frac{d_0 Q_0}{a \Delta_*}; \quad P_3 = \frac{\vartheta_2^{(1)} Q_0}{a \Delta_*} \right). \quad (3)$$

Здесь $R_{nj}^*(x)$ и $Q_j(x)$ — линейные комбинации от функции $R_{nj}(x)$ и $F_j(x)$, а постоянные μ_j ($j = 1, 2$) определяются из условий $th\mu_j\pi = i(-1)^j q^{-1}$. Используя результаты работы [4], решение системы (2) представим в виде разложений

$$\psi_j^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^{(j)} P_k^{(\gamma_j, \sigma_j)}(x)}{\omega_j(x)}; \quad (\omega_j(x) = (1-x)^{-\gamma_j} (1+x)^{-\sigma_j}) \quad (4)$$

$$\psi_3^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^{(3)} T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\gamma_j = -\frac{1}{2} - i\mu_j; \quad \sigma_j = -\frac{1}{2} + i\mu_j; \quad j = 1, 2) \quad (5)$$

где $P_k^{(j, \sigma_j)}(x)$ ($j = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2, \dots$) многочлены Якоби, $T_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода, а постоянные $X_k^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3; \quad k = 0, 1, 2, \dots$) неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Для коэффициентов $X_0^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) из (3) сразу находим

$$X_0^{(j)} = \frac{P_j ch(\pi \mu_j)}{\pi} \quad (j = 1, 2); \quad X_0^{(3)} = \frac{P_3}{\pi}. \quad (6)$$

Далее, подставляя значения функций $\psi_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) из (4) и (5) в (2), по обычной процедуре [4] для определения коэффициентов $X_k^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots$) получим следующую систему из трех систем бесконечных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(j)} = h_m^{(j)} \left[\sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}^{(j,n)} X_k^{(n)} + C_m^{(j)} \right] \quad (j = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Нетрудно доказать, что система (7) квазивполне регулярна [4]. После нахождения функций $\psi_j(x)$ ($j = 1 - 3$) скачки напряжений и производная скачка горизонтальных смещений определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{\vartheta_1^{(2)} \Delta_*}{\Delta} [\psi_1(x) + \psi_2(x) - \nu_0 \psi_3(x)]; & \tau(x) &= \frac{\Delta_*}{2\mu_1 d_1} [\psi_1(x) - \psi_2(x)]; \\ U'(x) &= -\frac{\Delta_*}{2\Delta} \left[\psi_1(x) + \psi_2(x) - \frac{2d_0}{\vartheta_2^{(1)}} \psi_3(x) \right]; & & \left(\nu_0 = -l_0 / \vartheta_1^{(2)} \vartheta_2^{(1)} \right). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Акопян В. Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, № 4, С. 57–65.
- [2] Ильина И. И., Сильвестров В. В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды // Изв. РАН, МТТ, 2005, № 3, С. 153–166.
- [3] Акопян В. Н. Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве // Сб. трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван, 2007, С. 45–50.
- [4] Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками // Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т.25, № 2, С. 15–35.

Hakobyan V. N., Sargsyan A. O. *Stress state of a half-plane with a rigid inclusion on the interface of materials.* A plane stress-strain state of composite half-plane containing rigid thin inclusion on the interface of different materials is considered. Governing system of singular integral equations of the problem is derived, when one of the sides of inclusion is rigidly fastened with the matrix, and the other side is in smooth contact. The behavior of the unknown functions at the endpoints of inclusion depending on the physical parameters is studied and solution of the problem by the method of orthogonal polynomials is constructed.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ШЕЛЬФОВОЙ ЗОНЕ МОРЯ В ШТОРМОВЫХ УСЛОВИЯХ

**Алексеев Д. В., Иванов В. А., Иванча Е. В., Фомин В. В.,
Черкесов Л. В.**

Морской гидрофизический институт НАН Украины, Севастополь

С использованием трехмерной нелинейной численной модели исследуются процессы формирования нестационарных течений и переноса ими пассивной примеси и мелкодисперсных донных осадков на северо-западном шельфе Черного моря. Динамические процессы в водной среде генерируются одиночными интенсивными атмосферными циклонами. Для обеспечения высокого пространственного разрешения в модели применяется процедура вложенных сеток. Проанализирована временная эволюция полей уровня моря, скоростей течений, концентрации примеси и взмученных донных осадков.

1. Актуальность проблемы. Исследование динамических процессов на северо-западном шельфе Черного моря представляет как научный, так и прикладной интерес, который обусловлен интенсифицировавшейся хозяйственной деятельностью в данном регионе. Сюда входят гидротехническое и рекреационное строительство, судоходство, рыболовство, добыча газа из открытых на шельфе месторождений. Антропогенная нагрузка приводит к увеличению опасности природных и техногенных катастроф. Особенно эта опасность возрастает в штормовых условия. Над Черным морем наблюдается два основных типа штормовых синоптических ситуаций. Первый тип возникает, когда траектории средиземноморских циклонов проходят через юг Черного моря. Другой тип синоптических ситуаций связан с выходом средиземноморских циклонов на запад и север Черного моря, а так же со смещением областей низкого давления с Балтийского моря и южной Скандинавии.

В силу морфологических особенностей (мелководность, сложный рельеф, песчано-илистая с добавлением ракушечника структура дна, наличие островов и кос) северо-западный шельф Черного моря является районом интенсивных морфодинамических процессов (рис. 1). Под влиянием природных факторов, а также в результате деятельности человека меняются конфигурация берегов, рельеф дна, площадь, очертания и даже число островов. Поэтому актуальной является задача прогноза влияния штормов на перенос донных осадков.

Эффективным и физически оправданным методом диагноза и прогноза параметров морской среды является математическое моделирование. С использованием численного моделирования в Морском гидрофизическом институте НАН Украины исследовались гидродинамические процессы на северо-западном шельфе Черного моря и их влияние на транспорт загрязняющей примеси, эрозию, перенос и седиментацию мелкодисперсных донных осадков при прохождении циклонов.

2. Математическая постановка задачи и метод решения. Введем декартову систему координат с осями x , y , z , направленными соответственно на восток,

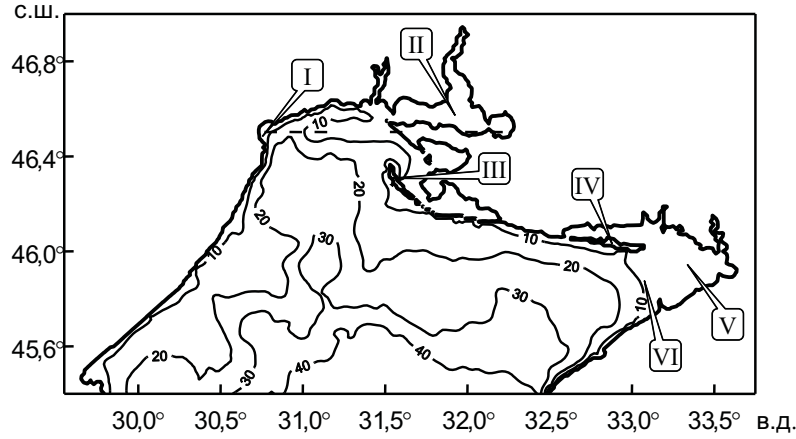


Рис. 1. Батиметрия северо-западного шельфа Черного моря (м), римскими цифрами обозначены: I — Одесский залив, II — Днепро-Бугский лиман, III — Тендровская коса, IV — о. Джарылгач, V — Каркинитский залив, VI — Бакальская банка.

север и вертикально вверх. Для описания динамики морской воды воспользуемся нелинейными уравнениями движения однородной несжимаемой жидкости в приближении гидростатики [1]:

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2A_M \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[A_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(2A_M \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2)$$

$$p = p_a + g\rho(\eta - z), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где $\{u, v, w\}$ — компоненты скорости вдоль осей x, y, z ; t — время; $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$; f — параметр Кориолиса; p — давление; $\rho = 1015 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды; g — ускорение силы тяжести; A_M — коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости, вычисляемый по формуле Смагоринского [1]; K_M — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости, для определения которого используется теория Мейлора-Ямады [1]; p_a — атмосферное давление; $\eta(x, y, t)$ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного состояния.

В основе блока расчета распространения пассивной загрязняющей примеси лежит уравнение переноса-диффузии

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (5)$$

где φ — концентрация примеси; $A_\varphi = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ и $K_\varphi = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии примеси.

Для расчета концентрации взвешенных донных осадков C , состоящих из частиц одного типа, запишем уравнение переноса-диффузии-осаждения [2]

$$\frac{dC}{dt} - \frac{\partial(w_s C)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_C \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_C \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_C \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (6)$$

Здесь $w_s = 10^{-5}$ м/с — скорость оседания взвеси; $A_C = 10$ м²/с и $K_C = 10^{-4}$ м²/с — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии взвеси.

На свободной поверхности ($z = \eta(x, y, t)$) должны быть выполнены кинематическое и динамические условия [1]:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \rho K_M \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = \rho_a C_A (W_x^2 + W_y^2)^{1/2} \{W_x, W_y\}. \quad (7)$$

В (7) $\rho_a = 1,2$ кг/м³ — плотность воздуха; $\{W_x, W_y\}$ — компоненты вектора скорости ветра \mathbf{W} ; $C_A = k^2 \{14,56 - \ln [(W_x^2 + W_y^2)/W_0^2]\}^{-2}$ — коэффициент поверхностного трения [3], где $W_0 = 1$ м/с, $k = 0,4$ — постоянная Кармана.

В местах расположения поверхностных источников загрязняющей примеси задается постоянный поток $Q = 10^{-7}$ кг/м²с, а поток взвеси на поверхности считается равным нулю

$$K_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = Q, \quad -w_s C - K_C \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

На дне ($z = -H(x, y)$) равна нулю нормальная составляющая скорости, касательные напряжения связаны со скоростью квадратичной зависимостью [1] и отсутствует поток примеси

$$w + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \rho K_M \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = \rho C_D \sqrt{u^2 + v^2} \{u, v\}, \quad K_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

В (9) C_D — коэффициент донного трения, который находится по формуле: $C_D = k^2 [\ln(z_b/z_0)]^{-2}$, где z_b — расстояние от дна, $z_0 = 0,001$ м — масштаб шероховатости донной поверхности [1].

Поток взмученных осадков со дна определяется разностью потоков эрозии F_e и седиментации F_d :

$$-w_s C - K_C \frac{\partial C}{\partial z} = F_e - F_d. \quad (10)$$

Следуя [2], будем считать F_e и F_d функциями придонных сдвиговых напряжений $\tau_b = \rho C_D (u^2 + v^2)$. Чтобы учесть эффект истощения взмучиваемого вещества, введем величину запаса осадков, находящихся в данный момент времени на дне $B(x, y, t)$. Седиментация и эрозия соответственно увеличивают и уменьшают этот запас.

Поток эрозии отличен от нуля, когда придонные сдвиговые напряжения превышают критическое значение $\tau_{ce} = 0,13$ Н/м² и B больше нуля

$$F_e = \begin{cases} M_0 \left(\frac{\tau_b}{\tau_{ce}} - 1 \right), & \text{если } \tau_b \geq \tau_{ce} \text{ и } B > 0; \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (11)$$

где $M_0 = 10^{-5}$ кг/м²с — коэффициент, характеризующий интенсивность взмучивания.

Поток седиментации определяется концентрацией у дна C_b и отличен от нуля, когда придонные напряжения меньше критического значения $\tau_{cd} = 0,1$ Н/м²

$$F_d = \begin{cases} w_s C_b \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_{cd}} \right), & \tau_b < \tau_{cd}; \\ 0, & \tau_b \geq \tau_{cd}. \end{cases} \quad (12)$$

На боковых границах выполняются условия прилипания для скоростей и условие отсутствия потока примеси в направлении внешней нормали.

В начальный момент времени циклон находится за пределами акватории, движение жидкости отсутствует, а свободная поверхность горизонтальна. При этом концентрация примеси и взвеси равна нулю, а распределение запаса осадков на дне предполагается горизонтально однородным $B(x, y, 0) = 0,3 \text{ кг/м}^2$.

В исходных уравнениях (1)–(6) и граничных условиях (7)–(10) осуществляется переход от координаты z к σ -координате: $\sigma = (z - \eta)/(H + \eta)$ [1]. Далее, поле горизонтальных скоростей представляется в виде суммы двух составляющих: средней по глубине компоненты и отклонения от нее. В результате этого уравнения движения расщепляются на две системы. Из первой определяются осредненные горизонтальные скорости и уровень моря. Из второй — отклонения горизонтальных скоростей от их средних значений и вертикальная скорость. Операторы переноса аппроксимируются с помощью схемы *Superbee*, относящейся к классу *TVD*-схем [4]. Уравнения (5), (6) решаются методом расщепления. С целью повышения пространственного разрешения в модели реализована процедура вложенных сеток. Для лучшего разрешения вблизи дна и свободной поверхности расчетные уровни сгущались.

3. Анализ результатов. С использованием описанной трехмерной баротропной гидродинамической модели исследована эволюция поля уровня моря и полей скорости нестационарных течений, генерируемых циклоном, перемещающимся с запада на восток со скоростью 5 м/с. Воздействие передней части циклона приводит к повышению уровня по всей акватории северо-западного шельфа Черного моря. Когда над шельфом располагается центральная часть атмосферного возмущения, на западе возникает опускание уровня, распространяющееся на всю акваторию при прохождении тыловой части циклона. Поля скоростей нестационарных течений трижды перестраиваются в соответствии с полями ветра в передней, центральной и тыловой частях циклона.

Для Одесско-Днепровского региона изучена эволюция пространственного распределения концентрации загрязняющей примеси от действующих длительное время источников в поле нестационарных течений. Вхождение циклона на акваторию моря сопровождается накоплением примеси у берега вблизи длительно действующих источников в Одесском заливе и в районе Одесской банки. Во время ухода атмосферного образования примесь от берега уносится течениями на юго-восток. В Днепро-Бугском лимане наличие загрязнения в результате действия источника прослеживается по всей его ширине. Общая закономерность уменьшения глубины проникновения примеси по мере удаления от источника и при приближении к периферии загрязненного района нарушается в Днепро-Бугском лимане вследствие возникающих там локальных колебаний.

Для изучения зависимости пространственно-временного распределения областей эрозии и седиментации донных осадков от направления и скорости движения циклонов проведены две серии численных прогностических экспериментов. В каждой из них атмосферные возмущения перемещались по трем прямолинейным траекториям: на северо-восток, юго-восток и на восток. Это соответствует траекториям движения циклонов в зимне-весенний период. В первой серии чис-

ленных экспериментов скорость поступательного движения циклонов составляла 5 м/с, во второй — 15 м/с.

Перемещение циклонов сопровождается последовательным возникновением и исчезновением областей эрозии, что связано с перестройкой полей нестационарных течений, обусловленной прохождением передней, центральной или тыловой частей циклонов. Во всех рассмотренных случаях эрозии подвержены области у западного побережья, вдоль Тендровской косы, у острова Джарылгач, в районе Одесской и Бакальской банок и в Днепро-Бугском лимане. В центральной части акватории с глубинами 40—50 м эрозия происходит при движении циклонов в зональном направлении со скоростями 5 и 15 м/с и на юго-восток со скоростью 15 м/с. Свободной поверхности взвесь достигает с запаздыванием по времени от десятков до сотен часов относительно момента начала взмучивания. Это запаздывание тем существеннее, чем в более глубоководных районах происходит эрозия. В центральных частях всех основных областей эрозии запас донных осадков существенно истощается. Из областей взмучивания взвесь выносится нестационарными течениями, но направления данных течений изменяются в процессе перемещения циклонов, что препятствует заметному увеличению концентрации вне районов эрозии. Поэтому превышение запаса донных осадков относительно первоначального значения вследствие седиментации имеет место только вблизи границ районов взмучивания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Blumberg A. F., Mellor G. L.* A description of three dimensional coastal ocean circulation model in Three-Dimensional Coast Ocean Models // Coastal and Estuarine Science. 1987. №4. pp. 1–16.
- [2] *Burchard H., Bolding K., Villareal M. R.* Three-dimensional modeling of estuarine turbidity maxima in a tidal estuary // Ocean Dynamics. 2004. **54**, № 2. pp. 250–265.
- [3] *Hsu S. A.* A mechanism for the increase of wind stress coefficient with wind speed over water surface: A parametric model // J. Phys. Oceanogr. 1986. №16. pp. 144–150.
- [4] *Sweby P. K.* High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // Journal on Numerical Analysis. 1984. №21. pp. 995–1011.

Alekseev D.V., Ivanov V.A., Ivancha E.V., Fomin V.V., Cherkesov L.V. *Mathematical simulation of dynamical processes on the sea shelf zone in the storm conditions.* By using of nonlinear 3-D numerical model the processes of formation of time-dependent currents and transportation of passive admixture and fine sediments by them on the North-West Shelf of the Black Sea are studied. Dynamical processes are generated by single intensive atmospheric cyclones. To provide high space resolution the nested grid technique is implemented. Temporal evolution of fields of sea level, current velocities, admixture concentration and suspended sediment one are analyzed.

О МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ АСБЕСТОВЫХ НАНОТРУБОК

Анкудинов А. В.* , Бауэр С. М. , Ермаков А. М.** ,
Каштанова С. В.** , Морозов Н. Ф.****

** Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе, Санкт-Петербург*

*** Санкт-Петербургский государственный университет*

С помощью сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) исследованы механические свойства нанотрубки из хризотилового асбеста с внешним диаметром около 30 нм и внутренним — около 5 нм. Определена жесткость наномостика. Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования в рамках континуальной теории упругости. Рассмотрены как простейшие классические модели изотропных балок, так и неклассические трансверсально-изотропные модели. В частности, показано, что в рассматриваемой задаче подход Тимошенко–Рейсснера существенно уточняет теорию Кигхгофа–Лява и дает следующее асимптотическое приближение трехмерной теории для тел из трансверсально-изотропного материала с малой жесткостью на сдвиг в направлении толщины балки. Еще более точную аппроксимацию решения в рассматриваемой задаче можно получить за счет использования теории Родионовой–Гитаева–Черныха, которая кроме поперечных сдвигов позволяет учесть слоистую структуру асбеста.

Возможность применения традиционных методов классической механики к нанообъектам уже несколько лет обсуждается учеными [1–3]. В работе [1] при анализе «простейшей модели атомарных слоев» получено, что при числе слоев больше 10 изгибная жесткость двумерного монокристалла может приближаться к значению, используемому в теории классической упругости. В работе [3] отмечается, что механические характеристики, соответствующие наноразмерным структурным элементам, таким как балки и пластинки могут отличаться от механических характеристик, соответствующих структурам из того же материала, имеющим «обычные» геометрические размеры. В данной работе сделана попытка описать моделями теории балок и оболочек поведение нанотрубки из хризотилового асбеста, заполненной теллуром. С помощью сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) была измерена жесткость нанотрубки с внешним диаметром около 30 нм и внутренним — около 5 нм, внутренняя полость которой была заполнена теллуром. Под жесткостью понималось отношение приложенной силы к величине прогиба мостика, сформированного нанотрубкой, перекрывающей отверстие в пористой подложке.

В работе проведено сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования в рамках континуальной теории упругости. Как отмечается в [4], классическая теория Бернулли–Кирхгофа–Лява (БКЛ) хорошо работает для балок сплошного поперечного сечения из однородного материала, но может давать существенные погрешности для многослойных балок. Так как в рассматриваемой нанотрубке в радиальном направлении наблюдается сильная анизотропия механических свойств — внутренняя полость трубки заполнена теллуром, а сама трубка состоит из асбеста. Поэтому для аналитической оценки прогибов нанотрубок как

балок использовалась теория Тимошенко–Рейсснера (ТР). В изотропном случае теория ТР, учитывающая сдвиг, несущественно уточняет классическую теорию, но для тел из трансверсально-изотропного материала «при умеренно малой поперечной жесткости на сдвиг» теория ТР существенно уточняет теорию БКЛ и дает следующее асимптотическое приближение трехмерной теории [6]. Тела «с умеренно малой поперечной жесткостью на сдвиг», это тонкие тела, для которых малый параметр $g = G'/E$ (где E — модуль Юнга в тангенциальном направлении, G' — модуль упругости при поперечном сдвиге) удовлетворяет соотношению $\mu^2 \ll g \ll 1$. Еще более точную аппроксимацию решения в рассматриваемой задаче можно получить за счет использования теории Родионовой–Титаева–Черныха [5], которая кроме поперечных сдвигов позволяет учесть слоистую структуру асбеста (рис. 1) и цилиндрическую анизотропию в рассматриваемой задаче.

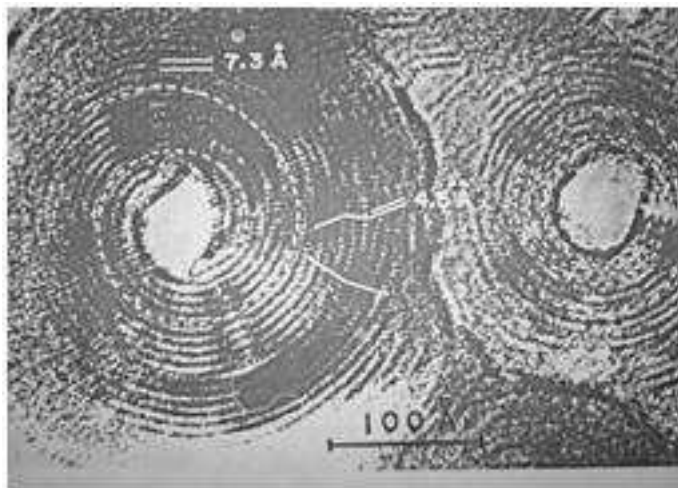


Рис. 1. Сечение асбестовой нанотрубки.

То есть заполненная асбестовая нанотрубка рассматривается как трансверсально-изотропное тело с малой поперечной жесткостью на сдвиг, так как, даже если каждый отдельный слой не меняет своей структуры, то интегральный модуль сдвига в поперечном сечении может существенно меняться. Кроме того, при использовании теории Родионовой–Титаева–Черныха предполагается, что имеет место жесткий контакт на плоскости сопряжения слоев, после чего вводятся неизвестные усилия взаимодействия между слоями, которые определяются из условий сопряжения слоев по перемещениям (как обычно предполагается для относительно толстых оболочек). Такой подход позволяет получить корректное качественное описание наблюдаемого явления.

В качестве иллюстрации приведен пример моделирования изгиба нанотрубки из хризотилового асбеста, заполненного теллуром. В эксперименте трубка опиралась двумя концами на лавсановую мембрану (рис. 2), образуя «мостик» над порой в мембране. Нанотрубка нагружалась поперечными усилиями различной величины в различных точках и измерялся прогиб.

Диаметр нанотрубки — 32 ± 2 нм, длина провисающей части около 490 нм, модуль Юнга $E = 7.72 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, а рассчитанное

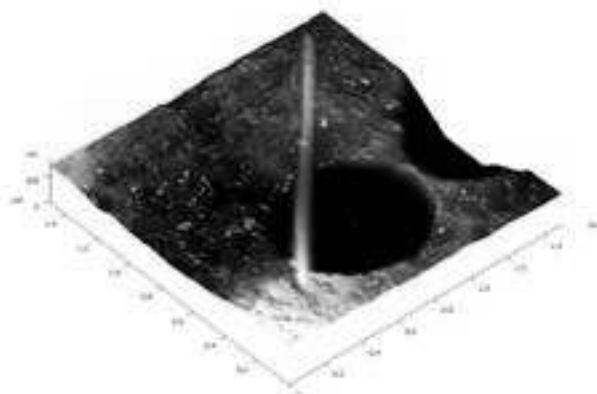


Рис. 2. АСМ топография (3D изображение) участка мембраны с порой перекрытой мостиком из асбестовой нанотрубки, наполненной теллуром.

значение модуля сдвига $G' = 2.3 \cdot 10^7$ Па. На графике (рис. 3) представлены результаты сравнения экспериментальных данных, данных полученных по теории ТР и данных, полученных по теории РТЧ.

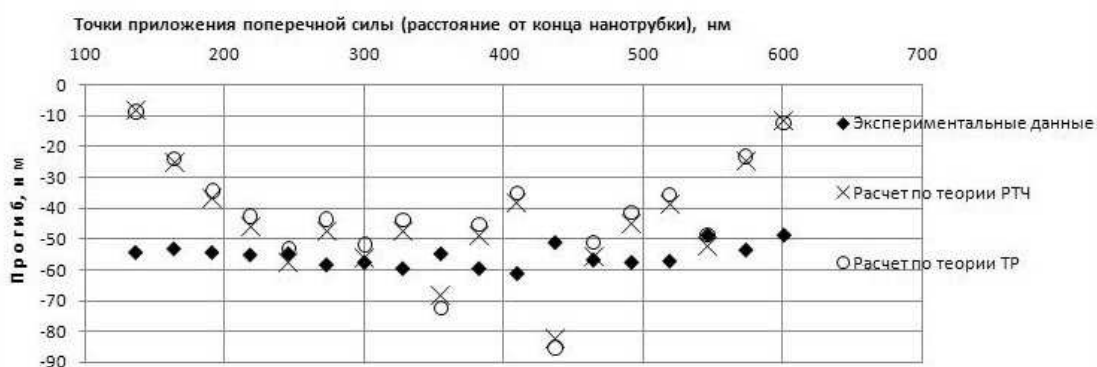


Рис. 3. Сравнение данных из эксперимента, данных полученных по теории ТР и данных, полученных по теории РТЧ.

Представленные результаты показывают, что по-видимому и для описания механического поведения нанотрубок использование классических моделей теории упругости является вполне оправданным. Однако выбор соответствующей континуальной модели определяется конкретными условиями задачи. В приведенном примере наиболее корректный результат удалось получить, используя теорию РТЧ, которая позволяет учесть не только анизотропию, поперечные сдвиги, но и многослойность асбестовой нанотрубки.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант №09-01-00623-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Еремеев В. А., Иванова Е. А., Морозов Н. Ф.* Механические проблемы в нанотехнологии // Известия Саратовского ун-та, Серия Математика, Механика, Информатика. 2008. т. 8(3). С. 25.
- [2] *Иванова Е. А., Индейцев Д. А., Морозов Н. Ф.* К вопросу об изменении параметров жесткости // ЖТФ 2006. т. 76(10). С. 74.
- [3] *Ronald E. Miller, Vijay B. Shenoy* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // Nanotechnology 11. 2000. pp. 139–147.
- [4] *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982.
- [5] *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. С-Пб: Изд-во СПбГУ, 1996.
- [6] *Товстик П. Е.* Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестник С.-Пб. Ун-та Сер. 1 2007. т. 3. С. 49.

Ankudinov A.V., Bauer S.M., Ermakov A.M., Kashtanova S.V., Morozov N.F.
On mechanical properties of asbestos nanotubes. Mechanical properties of asbestos nanotubes with different materials for filling are investigated based on classical mechanics approaches. The objects under consideration are the multilayer tubes with isotropic centers, therefore the theories considering the share modulus have to be used. Results of calculations under the theory of Timoshenko–Reissner and theory of Rodionova–Chernych.

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.

Кубанский государственный университет, Краснодар

В докладе обсуждаются различные методы исследования граничных задач механики сплошных сред, в той или иной форме использующие идеи факторизации. Первоначально возникшие для изучения интегральных уравнений, в настоящее время они получили развитие для изучения и решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Показывается различие и связь факторизационных методов, используемых для исследования дифференциальных (дифференциальный метод факторизации) и интегральных (интегральный метод факторизации) уравнений, а также связь факторизационных методов с другими подходами. Излагается теория блочных структур и блочного элемента, обсуждаются возможности этих подходов для исследования задач сейсмологии, механики сплошных сред с неоднородностями, физики, и других областей.

1. Возникшее в теории графов название «факторизация», применяемое для разложения графа на непересекающиеся по ребрам подграфы было использовано Н. Винером и Е. Хопфом [1] для обозначения непересекающихся аналитических многообразий, регулярных отдельно в верхней и нижней полуплоскостях. В дальнейшем, разделение различных математических объектов на непересекающиеся компоненты в виде суммы или произведения стали называть факторизацией.

В указанной выше работе рассматривавшаяся задача привела к интегральному уравнению, на полуоси, названному уравнением Винера–Хопфа. В дальнейшем, метод факторизации в интегральных уравнениях использовался в самых разных задачах. Н. И. Мухелишвили, И. Н. Векуа, В. А. Фок, М. Г. Крейн, Л. А. Галин, Ф. Д. Гахов, В. М. Александров, Г. Я. Попов, В. В. Калинин, Ж. Ахенбах, Е. Койтер, Л. Левин, В. Вильямс — это далеко не полный список исследователей, в той или иной степени использовавших методы факторизации в интегральных уравнениях.

Попытки использования идеи факторизации для исследования и решения непосредственно граничных задач для систем дифференциальных уравнений в числе первых были предприняты М. И. Вишиком и Г. И. Эскиным [2]. Однако, ограничившись лишь главным асимптотическим членом символа псевдодифференциальных уравнений, они не смогли заметить связь этих задач с автоморфизмом многообразий. Первый результат безотносительно к автоморфизму по построению псевдодифференциального уравнения граничной задачи был получен в [3]. В работах А. О. Ватульяна и учеников эти уравнения исследовались с применением теории некорректных задач, где были получены интересные результаты [4]. Связь граничных задач с автоморфизмом многообразий, факторизацией, внешним анализом была установлена в работах [5–7]. Применение метода факторизации в случае граничных задач для дифференциальных уравнений оказалось существенно отличным от случая интегральных уравнений. Поэтому этот метод в отличие

от интегрального метода факторизации был назван дифференциальным методом факторизации.

2. Интегральный метод факторизации, созданный в работах Н. Винера и Е. Хопфа [1], возник при исследовании и решении интегральных уравнений или их систем, заданных на полуоси, с разностным ядром. Интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} \mathbf{k}(x - \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \mathbf{f}(x), \quad x > 0, \quad (1)$$

продолженное на отрицательную полуось вектор-функцией $\mathbf{e}(x)$, применением преобразования Фурье сводится к векторному функциональному уравнению Винера-Хопфа вида [8]

$$\mathbf{K}(\alpha) \mathbf{Q}_+(\alpha) = \mathbf{F}_+(\alpha) + \mathbf{E}_-(\alpha). \quad (2)$$

Здесь функции, обозначенные большими буквами, означают преобразования Фурье от соответствующих функций, обозначенных малыми, а знаки внизу — свойства регулярности аналитических функций в верхней (плюс) и в нижней (минус) комплексных полуплоскостях. Свойства регулярности определяются носителями вектор-функций $\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{e}(x)$ — положительной или отрицательной полуосями. Решающую роль для решения функционального уравнения Винера-Хопфа играет факторизация в виде произведения функции матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$

$$\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{K}_-(\alpha) \mathbf{K}_+(\alpha), \quad (3)$$

элементы которой в общем случае являются суммой полиномиальной составляющей и преобразования Фурье суммируемых функций. Здесь матрица-функция $\mathbf{K}_+(\alpha)$ регулярна в верхней полуплоскости и ее определитель не имеет там нулей, таким же свойством обладает матрица-функция $\mathbf{K}_-(\alpha)$ в нижней полуплоскости. Техника решения функционального уравнения или различных его модификаций изложена в работах [8] и здесь не повторяется.

Заметим, что в приложениях более важными являются интегральные уравнения (1), заданные не на полуоси, а на конечных отрезках [9–12]. Применением функционального уравнения (2) уравнения (1) на конечных отрезках сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

3. Дифференциальный метод факторизации [5–7], предназначен для получения интегрального представления решений систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в сложных областях и продиктован необходимостью исследования прежде всего задач сейсмологии. Его основу составляют следующие положения топологической алгебры. Область задания краевой задачи рассматривается как топологическое многообразие с краем. Автоморфизм, т. е. топологическое отображение этого многообразия на себя, порождает группы преобразований, изоморфные некоторым группам невырожденных матриц. Последние порождают представления этих групп, описываемые в общем случае сложными специальными функциями. Дифференциальное выражение, в частных производных, входящее в постановку краевой задачи, рассматривается как дифференцируемое отображение на многообразии векторного поля,

заданного на этом же многообразии. Оно приводит к функциональному уравнению, отличающемуся от (2). Обеспечение автоморфизма приводит к необходимости исследования функционального уравнения методом факторизации. В том случае, когда порождаемые при автоморфизме специальные функции оказываются инвариантными относительно дифференцируемого отображения, исследование функционального уравнения оказывается особенно простым, поскольку граничные условия глобально формулируются на координатных поверхностях. В общем случае для обеспечения автоморфизма приходится использовать локальные координаты, применяя топологическое разбиение единицы.

4. В работах [5–7], а также в работах, на которые имеются в них ссылки, рассмотрены варианты применения метода факторизации к краевым задачам в различных постановках. В результате этих исследований сформировались алгоритмы применения метода дифференциальной факторизации для исследования и решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Рассмотрим следующую, достаточно общую, записанную в операторном виде, краевую задачу для системы P дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в частных производных произвольного порядка дифференцирования в выпуклой трехмерной области Ω .

$$\mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P A_{spmnk} \varphi_{p, x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, P, \quad A_{sqmnk} = const, \quad \varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_P\}.$$

$$\varphi = \{\varphi_s\}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

На границе $\partial\Omega$ задаются следующие граничные условия

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{K_1} \sum_{p=1}^P B_{spmnk} \varphi_{p, x_1 x_2 x_3}^{(m)(n)(k)} = f_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, s_0 < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K. \quad (5)$$

Заметим, что подобно изложенному выше интегральному методу факторизации, в дифференциальном методе факторизации граничная задача решается точно, если Ω является полупространством.

Трехмерным преобразованием Фурье вида

$$\Phi_n(\alpha) = \iiint_{\Omega} \varphi_n(x) e^{i\langle \alpha x \rangle} dx \equiv F\varphi_n, \quad \Phi_m = F\varphi_m.$$

она сводится к функциональному уравнению вида

$$\mathbf{K}(\alpha)\Phi = \iint_{\partial\Omega} \omega, \quad \mathbf{K}(\alpha) \equiv -\mathbf{K}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \|k_{nm}(\alpha)\|, \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{K}(\alpha)$ — полиномиальная матрица-функция порядка P .

Вектор внешних форм ω имеет в качестве компонент двумерные функции вида $\omega = \{\omega_s\}$, $s = 1, 2, \dots, P$

$$\omega_s = P_{12s} dx_1 \wedge dx_2 + P_{13s} dx_1 \wedge dx_3 + P_{23s} dx_2 \wedge dx_3 \quad (7)$$

Применяя в функциональном уравнении факторизацию матрицы- функции $\mathbf{K}(\alpha)$ факторизацию (3) и вычисляя формы-вычеты Лере, получаем псевдодифференциальное уравнение вида

$$\sum_{p=1}^P \iint_{\partial\Omega} \omega_p Z_{mp}(z_{s-}^\nu) = 0, \quad s- = 1, 2, \dots, G-, \quad (8)$$

$$Z_{mm}(\alpha_3^\nu) = -Q(\alpha_3^\nu).$$

Допустим, удалось решить систему псевдодифференциальных уравнений (8). Внесем найденные составляющие в вектор внешних форм (7) и используем трехмерное обращение Фурье к функции $\Phi(\alpha)$. В результате получим представление решения граничной задачи в виде

$$\varphi(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_r^{-1}(\alpha_3^\nu) \mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) \iint_{\partial\Omega} \omega e^{-i\langle \alpha_3^\nu, x_3^\nu \rangle} d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu d\alpha_3^\nu, \quad \mathbf{x}^\nu \in \Omega.$$

Решение можно сделать более наглядным, вычислив интеграл по параметру α_3^ν по теории вычетов. В результате имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}^\nu) = & \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)} \left[\mathbf{K}_r^{-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) \mathbf{T}_+ (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu) e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu} - \right. \\ & \left. - \mathbf{K}_r^{-1} \left(i \frac{\partial}{\partial x_3^\nu} \right) \mathbf{T}_- (\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s-}^\nu) e^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu} \right] d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu \end{aligned} \quad (9)$$

Этот подход позволил построить теорию блочных структур и развить метод блочного элемента [13, 14].

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170), (08-08-00468), (09-08-00171), (08-08-00669), программы Юг России, проекты (09-01-96500), (09-01-96503), (09-08-96522), (09-08-96527), (09-08-00294), проекта НШ-3765.2010.1, проекта ФЦП 2009-1.5-503-004-006, Гранта Президента МД-1554.2009.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wiener N., Hopf E. Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen // S. B. Preuss. Acad. Wiss. 1932. pp. 696–706.
- [2] Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
- [3] Бабешко В. А. К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел // Докл. АН. 1989. Т. 304. № 2. С. 318–321.

- [4] Ватульян А. О. О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Докл.АН. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.
- [5] Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
- [6] Бабешко В. А., Бабешко О. М. Интегральные преобразования и метод факторизации в краевых задачах // ДАН. 2005. Т. 403. № 6. С. 28–32.
- [7] Бабешко В. А., Бабешко О. М. Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 26–28.
- [8] Нобл В. Метод Винера–Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
- [9] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М., 1979. 320 с.
- [10] Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [11] Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный Мир, 1999. 246 с.
- [12] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхностных неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
- [13] Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Павлова А. В. Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424. № 1. С. 36–39.
- [14] Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 30–34.

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. *Factorization methods in boundary-value problems of continuum mechanics.* In this lecture we discuss various analysis methods for boundary-value problems of continuum mechanics, which use the concept of factorization. The difference and connection of factorization methods, used for analysis of differential and integral equations, is shown, as well as a relation of factorization methods to other approaches. The theory of block structures and block element is stated.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО–ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

**Баженов В. Г., Кибец А. И., Павленкова Е. В.,
Баранова М. С.**

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Доклад посвящен обзору экспериментальных и теоретических исследований устойчивости и закритического поведения упругих и упругопластических оболочек вращения при осевом ударном нагружении. Представлены также новые результаты исследования многостадийного неосесимметричного выпучивания упругопластических цилиндрических оболочек при продольном ударе.

С помощью аналитических методов удается оценить длину полуволны выпучивания и связанное с ней критическое время или критическую скорость удара, а также выявить наиболее быстро растущие формы потери устойчивости для полубесконечных тонких упругих цилиндрических оболочек, подверженных осевому удару по торцу бесконечно большой массой. Для всех этих исследований характерна идеализация реального процесса, частичный или полный отказ от учета волнового характера распространения напряжений.

Отметим, что в рамках линейной теории критические параметры осесимметричного и неосесимметричного выпучивания цилиндрических оболочек одинаковы, поэтому теоретически предсказать преобладающую форму изгиба не представляется возможным. Более полную картину динамического выпучивания оболочек с учетом переходного волнового процесса можно получить при численном решении задачи в нелинейной постановке. В этом случае появляется возможность проследить весь процесс выпучивания оболочек конечной длины при реальных начальных и граничных условиях.

Критерии потери устойчивости оболочек при динамических нагрузках определены не так хорошо, как при статических, и требуют оценки неустановившейся реакции оболочек при различных уровнях воздействия. Чаще всего применяемые динамические критерии основываются на построении зависимости максимальной амплитуды выпучивания от параметров нагружения. Критической считается такая нагрузка, при которой происходит резкое возрастание амплитуд прогибов.

Для численного решения задач динамического выпучивания оболочек чаще всего применяется метод конечных разностей или метод конечных элементов в сочетании с явной схемой «крест» интегрирования по времени. Эти схемы алгоритмичны и удобны в расчетах, но, являясь условно устойчивыми, имеют малый шаг интегрирования по времени. Эти же схемы могут применяться и для исследования квазистатических процессов выпучивания оболочек. При этом время выступает в качестве параметра нагружения. Варьируя им, можно управлять

вкладом сил инерции в решение задачи. Выпучивание упругопластических цилиндрических оболочек при продольном ударном сжатии происходит либо по осесимметричным формам с образованием кольцевых складок вблизи торцов, либо по неосесимметричным, когда в процессе деформирования поверхность оболочек покрывается рядами вмятин, напоминающих ромбы. Такое волнообразование имеет место и для статического продольного сжатия, однако при динамическом приложении нагрузки выпучивание происходит по более высоким формам. Реализация той или иной картины волнообразования зависит от многих факторов: скорости удара, соотношения масс ударяющего тела и оболочки, геометрии и материала оболочки. Одним из главных параметров, определяющих форму потери устойчивости оболочек средней длины, является отношение радиуса кривизны срединной поверхности к толщине оболочки. Для тонких оболочек при умеренных скоростях удара осесимметричная стадия деформирования и ее трансформация в неосесимметричные протекают упруго [1]. Пластические деформации образуются в закритической стадии на линиях изгиба поверхности, они не влияют на формы выпучивания тонких оболочек, а лишь фиксируют окончательную картину волнообразования.

Разработанная в [1] методика позволила теоретически смоделировать все стадии процесса ударного выпучивания тонких изотропных и ортотропных цилиндрических и конических оболочек: продольный волновой процесс — осесимметричное выпучивание — трансформация осесимметричных форм в неосесимметричные — распространение процесса волнообразования от краев вдоль оболочки. Исследована роль краевых эффектов, нелинейности докритического состояния, связанности осесимметричных и неосесимметричных форм потери устойчивости. Полученные численные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными по ударному выпучиванию тонких цилиндрических оболочек как в зоне краевого эффекта, так и в средней части оболочки. Причем осесимметричное формоизменение вблизи ударяемого края оболочки приводит к эффекту увеличения длины неосесимметричной выпучины — уменьшению их числа в окружном направлении при увеличении скорости удара. В средней части оболочки имеет место противоположная тенденция — число выпучин в окружном направлении растёт. При этом их амплитуда значительно меньше, чем в зоне краевого эффекта. Детально исследованы процессы выпучивания упругих изотропных и ортотропных цилиндрических и конических оболочек [2], а также вопросы применимости гипотез Кирхгофа для оболочек с низкой сдвиговой жесткостью.

Возникновение пластических деформаций существенно изменяет осесимметричный переходный волновой процесс, так как напряжения ограничены диаграммой деформирования, а волны догрузки имеют скорость распространения значительно меньшую скорости упругих волн. Развитие изгибных пластических деформаций в зоне кольцевой выпучины заметно уменьшает продольную жесткость оболочки. Этим объясняется образование одной заметной складки вблизи торца и замораживание роста прогибов в остальной части оболочки. При скоростях удара выше критических возможна многостадийная потеря устойчивости, когда одна складка замыкается, образуется вторая, затем третья и т. д. При этом на заключительной стадии процесса выпучивания даже для оболочек средней толщины наблюдалась потеря устойчивости по низшей неосесимметричной форме вне зоны осесимметричного выпучивания.

Результаты численного решения задачи неосесимметричного выпучивания цилиндрической упругопластической оболочки под действием импульсной сжимающей нагрузки представлены на рис. 1 в виде кинограммы процесса деформирования. Образцы изготавливались из стали X18H10T и имели размеры рабочей части: наружный диаметр $D = 3 \cdot 10^{-2}$ м, длину $L = 9,2 \cdot 10^{-2}$ м, толщину $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Оболочка подвергалась равномерному осевому сжатию со скоростью 60 м/с. Геометрическое несовершенство задавалось в виде начальной погиби, имеющей вид $w = A \cos(\beta) \sin(\pi x/L)$, где $A = 0,1h$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ — координата по углу поворота, $0 \leq x \leq L$ — координата вдоль образующей, L — продольная длина оболочки. Сжатие производилось до величины осадки $\Delta L = 4,2$ см. Сначала в процессе деформирования вблизи торцов образовались осесимметричные выпучины, затем рост складки вблизи подвижного торца прекратился, и в дальнейшем увеличивалась выпучина только у неподвижно опертого торца. Ее развитие шло по осесимметричной форме, чему способствовал краевой эффект жесткой заделки. После замыкания у неподвижного торца первой складки вблизи него началось образование второй. Так как влияние краевого эффекта от жестко заделанного торца было ослаблено первой складкой, развитие второй шло уже по неосесимметричной форме. Поперечное сечение приобрело эллиптическую форму, а затем образовалась глубокая вмятина. Дальнейшее сжатие привело к замыканию неосесимметричной выпучины и к схлопыванию поверхности оболочки выше нее. После этого началось образование третьей складки. Ее поперечное сечение было повернутым на 90° относительно сечения второй выпучины.

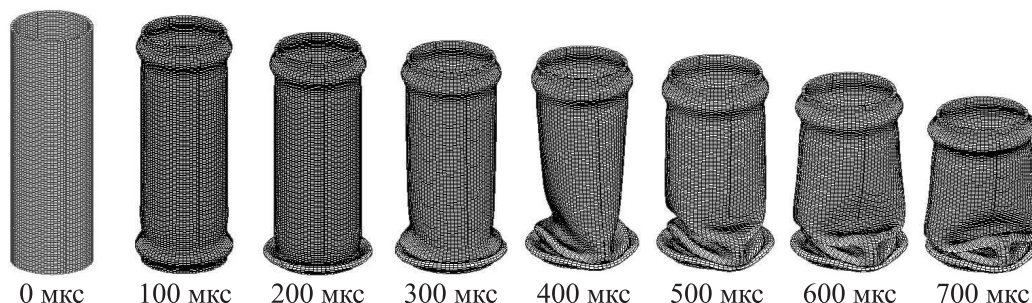


Рис. 1.

Численное моделирование осуществлялось на основе пакета программ «Динамика-3» [3] с использованием билинейных моментных оболочечных конечных элементов, учитывающих деформацию поперечного сдвига.

Результаты расчета сравнивались с данными натурального эксперимента, полученными на установке РСГ Деменко П. В. и Лаптевым П. В. Один из торцов образца свободно опирался на мерный стержень, по другому торцу бил ударник массой 5,4 кг с начальной скоростью $V_0 = 11,93$ м/с. Ударник и мерный стержень выполнены из стали и в расчетах предполагались упругими. Величина осадки образца в расчете составила $11,5h$, в эксперименте — $12h$, где h — толщина оболочки. На рис. 2 представлено формоизменение экспериментального образца и его расчетной модели после окончания деформирования. На рис. 3, 4 изображены остаточные прогибы вдоль образующей рабочей части. Точками на рисунках обозначены экспериментальные значения амплитуд выпучин.

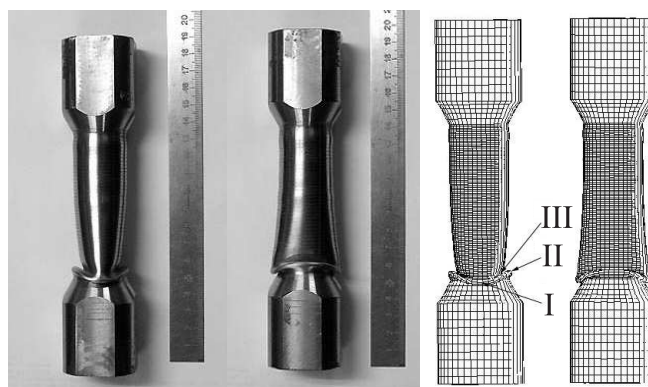


Рис. 2.

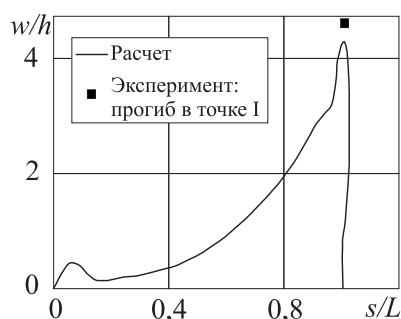


Рис. 3.

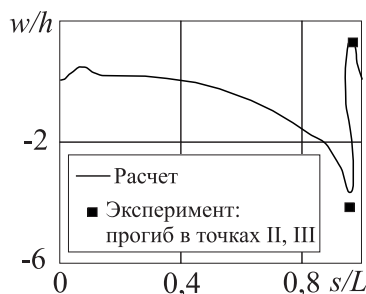


Рис. 4.

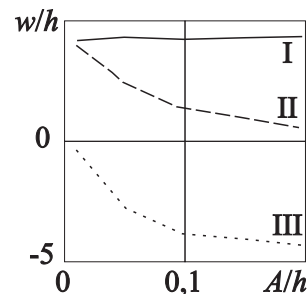


Рис. 5.

Зависимость величин прогибов в точках I, II, III (рис. 2) от амплитуды начальной погиби представлена на рис. 5. Как показывают графики, выпучина в точке I не зависит от амплитуды погиби и практически совпадает по значению с осесимметричной величиной складки. Прогибы в точках II и III сильно зависят от амплитуды геометрического несовершенства в диапазоне $A \leq 0,1h$. При дальнейшем увеличении погиби чувствительность к ней уменьшается.

Неосесимметричная форма потери устойчивости начинает развиваться, когда прогиб осесимметричной складки превышает толщину оболочки. В последующем за складкой образуется вмятина, и поперечное сечение оболочки в этой области приобретает эллиптическую форму.

Для оценки влияния сложного нагружения изучались параметры Лоде и траектории деформации, построенные в девиаторном пространстве А. А. Ильюшина. Наиболее существенно сложное нагружение проявляется на наружных волокнах оболочки, где в момент образования складки параметры Лоде по напряжениям и деформациям изменяются почти в противофазе. В зонах активного нагружения траектории деформаций достаточно плавные. Согласно классификации А. А. Ильюшина, траектории деформаций следует отнести к классу траекторий малой и средней кривизны. Процесс деформирования на закритической стадии идет по траекториям малой кривизны.

По результатам представленных исследований можно сделать заключение, что, несмотря на сложный характер нагружения при упругопластическом выпучивании цилиндрических оболочек, численно рассчитанные интегральные параметры

процесса: прогибы, усилия — удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными даже при большой величине осадки (до 40%) и многостадийной потере устойчивости. Необходимо заметить, что неосесимметричные формы потери устойчивости цилиндрических оболочек в упругопластической области реализуются при числе волн в окружном направлении $n = 2; 3$ как при статическом, так и при динамическом нагружениях. Поэтому теория пологих оболочек применима только для исследования выпучивания тонких упругих оболочек при $n \geq 4$, но не упругопластических, где необходимо применять общую теорию оболочек. Велика также роль краевых эффектов на процесс осесимметричного и неосесимметричного выпучивания оболочек вращения, особенно в задачах динамики, когда нагрузка превышает критическую.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4807.2010.8), а также при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00500-а, 09-08-97034-р_п_а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баженов В. Г., Игоничева Е. В. Нелинейные процессы ударного выпучивания упругих элементов конструкций в виде ортотропных оболочек вращения. Н. Новгород: ННГУ, 1991. 132 с.
- [2] Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций: Монография. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
- [3] Абросимов Н. А., Баженов В. Г., Кибец А. И., Садырин А. И., Чекмарев Д. Т. Нелинейные задачи динамики конструкций // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 6. С. 47–50.

Bazhenov V.G., Kibets A.I., Pavlenkova E.V., Baranova M.S. *The experimental-theoretical study of the stability and post-critical behavior of elastic-plastic shells of revolution under impact loading.* The report reviews experimental and theoretical studies of the stability and post-critical behavior of elastic and elastic-plastic shells of revolution under axial impact loading. New results and also recent of investigation the multistage non-axisymmetrical buckling of elastic-plastic cylindrical shells under longitudinal impact are presented.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ РАЗНЫХ ТИПОВ

Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Анализируется влияние изменения конструктивных параметров нелинейных двухмассовых виброударных систем разных типов с двумя степенями свободы на характер их движения. Удар моделируется силой контактного взаимодействия, описанной законом Герца. Показано, что система с ударом о твердый ограничитель устойчивее к изменению параметров. Система с ударом о мягкий ограничитель при изменении ее параметров меняет характер колебательных режимов от одноударного гармонического до многоударных субгармонических.

Одной из главных задач, связанных с подготовкой современных образованных инженеров-исследователей и инженеров-физиков, оказывается необходимость дать им в руки «инструменты», позволяющие рассмотреть изучаемые объекты с единой точки зрения: «модель (например, дифференциальное или операторное уравнение) — расчетная схема — получение решения — корректная и воспроизводимая интерпретация решения» [1]. В настоящей работе этот путь пройден для двухмассовых нелинейных виброударных систем с двумя степенями свободы двух разных типов, находящихся под действием периодического внешнего воздействия. Первая модель виброударной системы с твердым ограничителем колебаний является классической моделью системы, присоединенное тело которой может служить ударным гасителем колебаний. Вторая модель с мягким ограничителем колебаний соответствует виброударной площадке, предназначенной для уплотнения бетонных смесей и формования бетонных изделий большой массы, которая широко применяется в строительном производстве.

Колебания в виброударных системах характеризуются резкими изменениями скорости в некоторые моменты времени, по этой причине их иногда называют разрывными, и это же обстоятельство является причиной нелинейности таких систем. В литературе предлагаются принципы классификации виброударных систем по различным аспектам, одним из которых является вид ограничителя колебаний [2]. Классификация механических систем с ударами по отношению к виду ограничителя связана с возможными способами моделирования удара. Решающим фактором тут является коэффициент жесткости: быстротечность удара и его сила определяются жесткостью контактирующих тел. В системах с твердым ограничителем можно считать, что продолжительность удара бесконечно мала и коэффициент восстановления имеет постоянное значение, поэтому в таких системах удар может быть смоделирован граничными условиями с использованием коэффициента восстановления; также его можно моделировать нелинейной силой контактного взаимодействия, которая может быть описана разными законами [3]. В системах с мягким ограничителем допущение о мгновенности удара не соответствует действительности, удар следует моделировать только контактной силой [4]. Поэтому

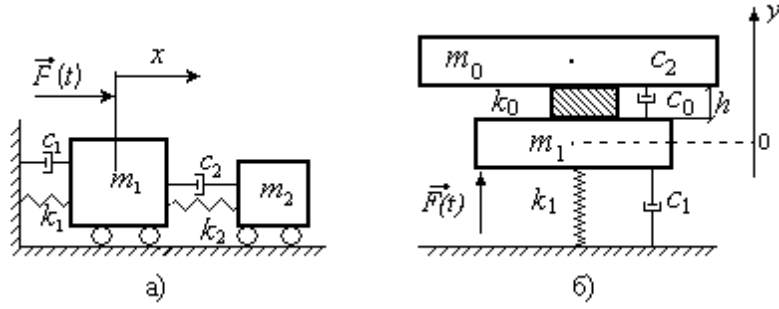


Рис. 1. Схемы виброударных систем

в системах обоих типов мы моделируем удар нелинейной силой контактного взаимодействия и описываем ее законом Герца [5]:

$$F_{con}(t) = K\alpha(t)^{3/2},$$

где $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$ — относительное сближение тел,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0\pi}, \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1\pi},$$

μ_i, E_i — коэффициенты Пуассона и модули Юнга для обоих тел, A, B и q — константы, характеризующие местную геометрию зоны контакта. На рис. 1 приведены схемы двух рассматриваемых моделей виброударных систем. На основное тело первой системы и на нижнее тело второй действует периодическая возбуждающая сила $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Верхнее тело второй системы имеет огромную массу (это форма с бетоном), в процессе колебательного движения оно отрывается от прокладки и «подпрыгивает», затем падает на мягкую, податливую прокладку, при этом происходит удар о мягкий ограничитель колебаний.

Уравнения движения первой системы имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 - \omega_1^2x_1 - 2\xi_2\omega_2\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) + \\ \quad + \frac{1}{m_1}[F(t) - F_{con}(t)], \\ \ddot{x}_2 = -2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) + \frac{1}{m_2}F_{con}(t). \end{cases} \quad (1)$$

Для второй системы имеем три системы уравнений движения: совместное движение тел до первого отрыва верхнего тела

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 = -g + \omega_0^2 [h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0y_0, \\ \ddot{y}_1 = g\chi - \omega_1^2y_1 - \omega_0^2\chi [h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1\omega_1y_1 + 2\xi_0\omega_0\chi y_0 + \\ \quad + \frac{F_0}{m_1}\cos(\omega t + \varphi); \end{cases} \quad (2)$$

раздельное движение тел

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 = -g - 2\xi_2\omega_0y_0, \\ \ddot{y}_1 = g\chi - \omega_1^2y_1 - 2\xi_1\omega_1y_1 + \frac{F_0}{m_1}\cos(\omega t + \varphi); \end{cases} \quad (3)$$

совместное движение тел в период удара после падения верхнего тела на прокладку

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 = -g - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0 y_0 + \frac{F_{con}(t)}{m_0}, \\ \ddot{y}_1 = g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_1 + 2\xi_0 \omega_0 \chi \dot{y}_0 - \\ - \frac{F_{con}(t)}{m_1} + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (4)$$

Приняты стандартные обозначения: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$, $\chi = \frac{m_2}{m_1}$. Числовые характеристики обеих систем, более подробное их описание и начальные условия уравнений (1)–(4) даны в [3, 4].

Применение ударных процессов в виброударных машинах рассматриваемых двух типов связано с использованием тонких динамических эффектов, сопровождающих соударение тел. Как при формовании бетонной смеси технологический эффект достигается благодаря ударам, так и при работе ударного виброгасителя его эффективность также всецело определяется характером виброударных режимов движения. Следовательно надо изучить динамику машины для того, чтобы научиться ее «настраивать» и добиться ее эффективной работы [6].

Численное интегрирование уравнений движения дает возможность проследить влияние изменений конструктивных параметров на динамическое поведение виброударных систем обоих типов. В работе исследовано влияние таких параметров: масса одного из тел и жесткость ограничителя. На рис. 2 представлена зависимость полуразмахов колебаний: основного тела от массы присоединенного для модели с твердым ограничителем; верхнего тела (формы с бетоном) от его массы для модели с мягким ограничителем.

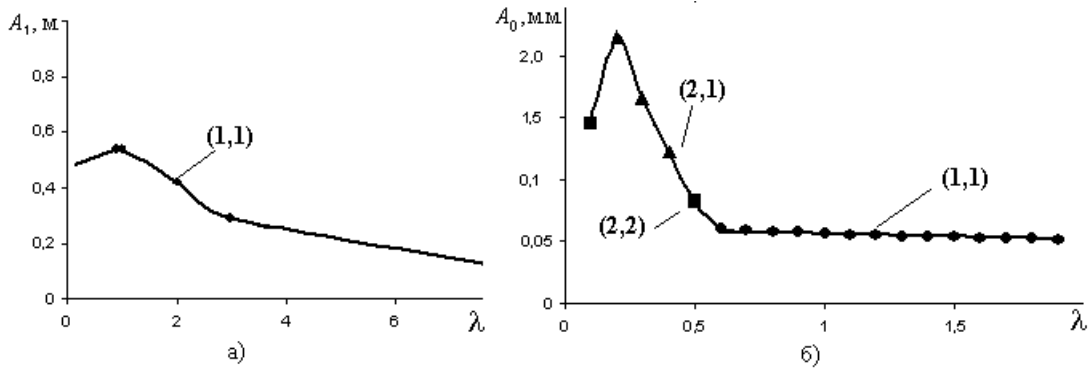


Рис. 2. Кривые массы а) для модели с твердым ограничителем $m = \lambda m_2$; б) для модели с мягким ограничителем $m = \lambda m_0$.

Субгармонический (или гармонический) режим колебаний периода nT с k ударами за цикл называем (n, k) -периодическим, здесь T — период внешней нагрузки [7]. Как видно из графиков, одноударный гармонический режим — $(1,1)$ -периодический — при изменении параметров виброударной системы с мягким ограничителем сменяется субгармоническими $2T$ -периодическими режимами с двумя и одним ударом за цикл. На рис. 3 представлена зависимость полуразмахов колебаний:

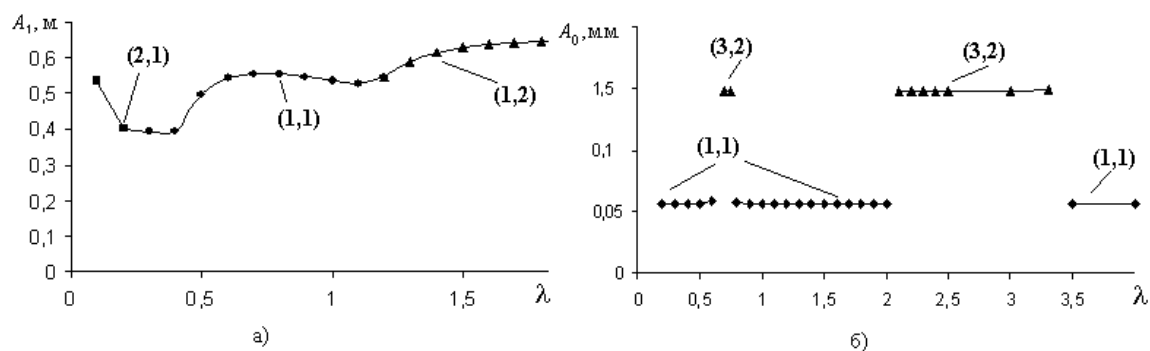


Рис. 3. Кривые жесткости а) для модели с твердым ограничителем $k = \lambda k_2$; б) для модели с мягким ограничителем $k = \lambda k_0$.

основного тела от жесткости соединяющей пружины для твердого ограничителя и верхнего тела от жесткости прокладки для второй модели.

Как видно из графиков, и здесь одноударный гармонический режим — (1,1)-периодический — при изменении параметров виброударной системы сменяется многоударными субгармоническими режимами.

Для анализа влияния жесткости исследовалась также зависимость колебательных режимов и их характеристик от изменения модуля упругости контактирующих тел. В системе с твердым ограничителем предполагалось, что основное тело и присоединенное (гаситель) в зоне контакта имеют одинаковый материал и, соответственно, одинаковые модули упругости. Исследования, выполненные для 4-х разных материалов (сталь, медь, алюминий и каучук), показали, что режим колебаний остается одноударным гармоническим, изменение модуля упругости влияет на величину контактной силы и практически не изменяет величин полуразмахов колебаний. Например, модуль упругости у каучука в 26000 раз меньше, чем у стали, контактная сила меньше в 60 раз, а полуразмах основного тела увеличился лишь в 1,14 раза! В системе с мягким ограничителем предполагалось, что форма всегда стальная, а модуль упругости прокладки изменяется. Исследования показали, что в некотором диапазоне значений модуля упругости прокладки одноударный гармонический режим сменяется субгармоническим двухударным — (3,2)-периодическим режимом.

Подводя итог сказанному, подчеркнем, что виброударная система с твердым ограничителем устойчивее к изменению конструктивных параметров, характер режимов ее колебаний меняется реже, в то время как система с ударом о мягкий ограничитель при изменении параметров чаще меняет характер режимов колебаний — от одноударного гармонического до многоударных субгармонических. Отметим, что при изменении амплитуды и частоты внешней нагрузки в некоторых диапазонах значений этих величин в системе с мягким ограничителем режим движения становится хаотическим.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Крупенин В. Л.* О проблеме изучения нелинейных объектов // *Фундаментальные исследования.* 2009. № 5. С. 16–18.
- [2] *Blazejczyk-Okolewska B., Czolczynski M., Kapitaniak T.* Classification principles of types of mechanical systems with impacts - fundamental assumptions and rules // *European Journal of Mechanics.* 2004. № 23. pp. 517–537.
- [3] *Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Лукьянченко О. А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия // *Пробл. прочности.* 2008. № 6. С. 82–90.
- [4] *Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах // *Пробл. прочности.* 2009. № 4. С. 69–77.
- [5] *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
- [6] *Крупенин В. Л.* Ударные и виброударные машины и устройства // *Вестник научно-технического развития.* 2009. № 4. С. 3–32.
- [7] *Lamarque C. H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact nonlinearities: limitations to a modal // *Journal of Sound and Vibration.* 2000. № 235. pp. 567–609.

Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G. *The comparative analysis of different types vibro-impact systems dynamic behavior.* The influence of constructive parameters alteration for different types of nonlinear two-mass vibro-impact systems with two degrees of freedom at their movement is analyzed. The contact force that is described by Hertz law models the impact. It is shown that the system with impact at the rigid limiting stop is more stable to parameters modification. The system with the impact at soft limiting stop changes its vibration regime character from harmonic with one impact in the cycle to sub harmonic with several impacts in the cycle when its parameters are altered.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ПОЛОСЫ

Баничук Н. В.* , Барсук А. А.** , Иванова С. Ю.*

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

**Кишиневский государственный университет

Рассматривается задача о свободных гармонических колебаниях упругой изотропной полосы в условиях ее растяжения (сжатия) равномерно распределенными по поперечному сечению усилиями заданной интенсивности. Показывается, что полученное решение задачи для полосы одновременно служит точным решением этой же задачи и для прямоугольных пластин конечных размеров для граничных условий, генерируемых инвариантностью полосы относительно сдвигов. Приводятся результаты асимптотического анализа решения задачи.

1. Формулировка задачи. Рассматривается задача о свободных гармонических колебаниях изотропной упругой полосы шириной h , упругими модулями λ , μ и плотностью материала полосы ρ . Полоса подвержена однородному растяжению (сжатию) интенсивности p , при этом значение p положительно при растяжении и отрицательно при сжатии. Интегральное значение растягивающих (сжимающих) усилий P и значение p связаны соотношением $P = ph$. Для описания колебаний полосы введем декартову систему координат, ось ox которой направим параллельно кромкам вдоль осевой линии полосы, а ось oy — вертикально вверх, так что верхняя и нижняя кромки полосы описываются уравнениями $y = \pm h/2$. Введем обозначения $u(x, y)$, $v(x, y)$ для горизонтальной и вертикальной компонент вектора перемещения и ω — для частоты свободных гармонических колебаний полосы. Имеем

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \rho\omega^2 u &= 0, \\ \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \rho\omega^2 v &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm h/2) = 0, \quad \sigma_y(x, \pm h/2) = 0, \quad (2)$$

где компоненты напряжений τ_{xy} и σ_y связаны с деформациями известными соотношениями

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \sigma_y = \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3)$$

При отсутствии осевых усилий ($p = 0$) соотношения (1)–(3) описывают задачу о свободных гармонических колебаниях прямолинейной упругой полосы, изучавшуюся Рэлеем [1] и Лэмбом [2], а при $\omega = 0$ и при $p < 0$ — задачу об устойчивости упругой полосы, обсуждавшуюся А.Ю. Ишлинским [3]. При $\omega = 0$ имеем задачу упругой устойчивости [4, 5]. Отметим, что все описывающие ее соотношения инвариантны относительно сдвига $x = x \rightarrow d$ (d — произвольное число), откуда сразу следует, что решения задачи могут быть представлены в виде $u(x, y) = u(y) \cos(\gamma x)$, $v(x, y) = v(y) \sin(\gamma x)$. При вещественных значениях параметра γ напряженно-деформированное состояние полосы представляет собой

периодическую вдоль оси полосы структуру. Обозначив через l длину полуволны этой структуры, придем к соотношению $\gamma l = \pi$. С учетом используемого представления для компонент вектора перемещения краевая задача (1)–(3) переписется в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \gamma(\lambda + \mu) \frac{dv}{dy} + (\rho\omega^2 - (p + (\lambda + 2\mu))\gamma^2)u &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 v}{dy^2} - \gamma(\lambda + \mu) \frac{du}{dy} + (\rho\omega^2 - (p + (\lambda + \mu))\gamma^2)v &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u'(\pm h/2) + \gamma v(\pm h/2) = 0, \quad (\lambda + 2\mu)v'(\pm h/2) - \gamma \lambda u(\pm h/2) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что все соотношения спектральной краевой задачи (4), (5) инвариантны относительно преобразований $y \rightarrow -y$, $u \rightarrow u$, $v \rightarrow -v$; $y \rightarrow -y$, $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow v$, откуда следует, что все ее решения могут быть разбиты на симметричные и антисимметричные решения, характеризующиеся свойством четности компонент вектора перемещения

$$u^s(y) = u^s(-y), \quad v^a(y) = -v^a(-y); \quad u^a(y) = -u^a(-y), \quad v^s(y) = v^s(-y). \quad (6)$$

Решение системы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} u(y) &= A \cosh(\chi_1 \gamma y) + B \sinh(\chi_1 \gamma y) + C \chi_2 \cosh(\chi_2 \gamma y) + D \chi_2 \sinh(\chi_2 \gamma y), \\ v(y) &= \chi_1 A \sinh(\chi_1 \gamma y) + \chi_1 B \cosh(\chi_1 \gamma y) + C \sinh(\chi_2 \gamma y) + D \cosh(\chi_2 \gamma y), \end{aligned} \quad (7)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, а

$$\chi_1 = \sqrt{1 - \frac{\chi}{\lambda + 2\mu}}, \quad \chi_2 = \sqrt{1 - \frac{\chi}{\mu}}, \quad \chi = \rho c^2 - p, \quad \omega = c\gamma. \quad (8)$$

Ниже все соотношения приводятся для случая плоской деформации. Для случая плоского напряженного состояния следует сделать известную замену $\lambda \rightarrow \lambda_*$, $\mu \rightarrow \mu$, $\rho \rightarrow \rho\delta$ ($\lambda_* = \lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$, δ — толщина пластинки). В частности, для решений класса AS $A = 0$, $C = 0$, и общее решение (7) принимает форму

$$u^a(y) = B \sinh(\chi_1 \gamma y) + D \chi_2 \sinh(\chi_2 \gamma y), \quad v^s(y) = \chi_1 B \cosh(\chi_1 \gamma y) + D \cosh(\chi_2 \gamma y). \quad (9)$$

Из требования удовлетворения решения (9) граничным условиям (5) приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения постоянных B, D

$$\begin{aligned} 2\chi_1 B \cosh(\chi_1 \gamma h/2) + (\chi_2^2 + 1)D \cosh(\chi_2 \gamma h/2) &= 0, \\ ((\lambda + 2\mu)\chi_1^2 - \lambda)B \sinh(\chi_1 \gamma h/2) + 2\mu\chi_2 D \sinh(\chi_2 \gamma h/2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие существования ненулевых решений однородной системы (10) (обращения ее определителя в ноль) приводит к трансцендентному уравнению для определения зависимости $\chi = \chi(\gamma h/2)$. Аналогично, для решений класса SA имеем представление для общего решения

$$u^s(y) = A \cosh(\chi_1 \gamma y) + \chi_2 C \cosh(\chi_2 \gamma y), \quad v^a(y) = \chi_1 A \sinh(\chi_1 \gamma y) + C \sinh(\chi_2 \gamma y), \quad (11)$$

систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных A, C

$$\begin{aligned} 2\chi_1 A \sinh(\chi_1 \gamma h/2) + (\chi_2^2 + 1)C \sinh(\chi_2 \gamma h/2) &= 0, \\ ((\lambda + 2\mu)\chi_1^2 - \lambda)A \cosh(\chi_1 \gamma h/2) + 2\mu\chi_2 C \cosh(\chi_2 \gamma h/2) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

и трансцендентное уравнение для определения зависимости $\chi = \chi(\gamma h/2)$. При отсутствии осевых напряжений ($p = 0$) трансцендентные соотношения представляют собой известные дисперсионные зависимости Рэлея–Лэмба для частот свободных гармонических колебаний упругой полосы.

2. Асимптотический анализ для значений $\gamma h/2 \ll 1$ и $\gamma h/2 \gg 1$. Приведем предельные значения при $\gamma h/2 \rightarrow 0$ величин $\chi_1 = \sqrt{1 - \frac{\chi_0}{\lambda + 2\mu}} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$, $\chi_2 = \sqrt{1 - \frac{\chi_0}{\mu}} = i\sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}}$, $1 - \frac{\chi_0}{2\mu} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$ и собственных форм $u^s(y) \equiv C$, $v^a(y) = 0$. Проанализируем возможность существования решений $\chi(\gamma)$, обращающихся в бесконечность при $\gamma h \rightarrow 0$. Будем иметь $\sqrt{\frac{\chi}{\mu}} \frac{\gamma h}{2} = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. С учетом связи (8) между частотами свободных колебаний, осевыми усилиями и параметром χ при $\gamma \rightarrow 0$ приходим к значениям частот свободных гармонических колебаний полосы, отвечающих нераспространяющимся модам ($\gamma = 0$)

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \frac{\omega h}{2} = n\pi, \quad \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \frac{\omega h}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Значениям частот (13) отвечают асимптотические представления для собственных форм

$$u_{2n}^s(y) = 0, \quad v_{2n}^a(y) = C_1 \sin \frac{2n\pi y}{h}; \quad u_{2n+1}^s(y) = C_2 \cos \frac{(2n+1)\pi y}{h}, \quad v_{2n+1}^a(y) = 0 \quad (14)$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные). Исследуем асимптотическое поведение частот свободных колебаний полосы и отвечающих им собственных форм при $\gamma h/2 \gg 1$. Проводя асимптотический анализ, приходим к асимптотическим представлениям для зависимостей $\chi(\gamma)$:

$$\frac{\chi_{2n}(\gamma)}{\mu} \approx 1 + \frac{(2n)^2 \pi^2}{\gamma^2 h^2} + \dots, \quad \frac{\chi_{2n+1}(\gamma)}{\lambda + 2\mu} \approx 1 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\gamma^2 h^2} + \dots, \quad \frac{\gamma h}{2} \gg 1 \quad (15)$$

и отвечающим им асимптотическим выражениям для собственных форм (14).

3. Свободные колебания и устойчивость полосы конечной длины. Рассмотрим свободные гармонические колебания в своей плоскости сжимаемой (растягиваемой) прямоугольной пластинки шириной h и длиной l . Уравнения колебаний описываются выражениями (1). Примем, что продольные стороны пластинки свободны от напряжений, а на поперечных сторонах выполняются условия

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, y)}{\partial x} = 0, \quad v(0, y) = v(l, y) = 0. \quad (16)$$

В соответствии с граничными условиями (16) представим искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (17)$$

Приходим к спектральным краевым задачам для компонент $u_n(y)$, $v_n(y)$:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 u_n}{dy^2} + \gamma_n(\lambda + \mu) \frac{dv_n}{dy} + (\rho\omega^2 - (p + (\lambda + 2\mu))\gamma_n^2)u_n &= 0, \quad \gamma_n = \frac{\pi n}{l}, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 v_n}{dy^2} - \gamma_n(\lambda + \mu) \frac{du_n}{dy} + (\rho\omega^2 - (p + (\lambda + \mu))\gamma_n^2)v_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$u'_n(\pm h/2) + \gamma_n v_n(\pm h/2) = 0, \quad (\lambda + 2\mu)v'_n(\pm h/2) - \gamma_n \lambda u_n(\pm h/2) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Проанализируем случай $n = 0$ ($\gamma_0 = 0$). Приведем выражения для собственных форм и отвечающих им частот и отметим, что все решения могут быть разбиты на два класса — симметричные и антисимметричные — по свойству четности собственных форм

$$u_{0n}^s(y) = C_{0n}^s \cos \frac{2n\pi y}{h}, \quad \omega_{0n}^s = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$u_{0n}^a(y) = C_{0n}^a \cos \frac{(2n+1)\pi y}{h}, \quad \omega_{0n}^a = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} (2n+1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Отметим также, что при $n = 0$ $u_{00}^s(y) \equiv Const$, $\omega_{00}^s = 0$, и, таким образом, это решение отвечает горизонтальному перемещению пластинки без деформаций. Ниже при построении и анализе решений спектральных задач будем полагать $n \neq 0$. Для класса решений AS зависимость частоты свободных колебаний от осевых усилий определяется из соответствующего трансцендентного уравнения. Аналогичным образом для класса решений SA имеем трансцендентное уравнение и соответствующие собственные формы

$$\begin{aligned} u_{nk}^s(y) &= C \left[\frac{\cosh \chi_{1k} \gamma_n y}{\sinh(\chi_{1k} \gamma_n h/2)} - \frac{\chi_{1k} \chi_{2k} \cosh \chi_{2k} \gamma_n y}{1 - \frac{1}{2\mu} \chi_{nk}^{sa} \cosh(\chi_{2k} \gamma_n h/2)} \right], \\ v_{nk}^s(y) &= \chi_{1k} C \left[\frac{\sinh \chi_{1k} \gamma_n y}{\sinh(\chi_{1k} \gamma_n h/2)} - \frac{\chi_{1k} \chi_{2k} \sinh \chi_{2k} \gamma_n y}{1 - \frac{1}{2\mu} \chi_{nk}^{sa} \sinh(\chi_{2k} \gamma_n h/2)} \right], \\ \chi_{nk}^{sa} &= \rho \frac{(\omega_{nk}^{sa})^2}{\gamma_n^2} - p, \quad \chi_{1k} = \sqrt{1 - \frac{\chi_{nk}^{sa}}{\lambda + 2\mu}}, \quad \chi_{2k} = \sqrt{1 - \frac{\chi_{nk}^{sa}}{\mu}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где χ_{nk}^{sa} — корень трансцендентного уравнения, а ω_{nk}^{sa} — соответствующая частота свободных колебаний.

Примем также, что значения параметра $n\pi h/l \ll 1$, что означает, что рассматриваются колебания пластины с частотами из нижней части спектра частот. Тогда при $\omega_{n0}^{as} = 0$ приходим к асимптотическому представлению для критических сжимающих усилий

$$p_n = -\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{n\pi h}{2l} \right)^2 \left[1 - \frac{27\lambda + 34\mu}{15(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{n\pi h}{2l} \right)^2 + \dots \right], \quad n = 1, 2, \dots, \quad \frac{n\pi h}{l} \ll 1. \quad (23)$$

Отметим, что асимптотическое представление для критической силы, отвечающее значению $n = 1$, приводится в работе А. Ю. Ишлинского [3] и имеет вид

$$p_1 = -\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\pi h}{2l}\right)^2 \left[1 + \frac{3\lambda - 4\mu}{15(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\pi h}{2l}\right)^2 + \dots\right]. \quad (24)$$

Обратимся к анализу решений уравнения при $\gamma_n h/2 = n\pi/(2l) \gg 1$, откуда приходим к асимптотическим зависимостям для частот свободных колебаний

$$\begin{aligned} (\omega_{n,2k-1}^{sa})^2(\gamma) &\approx \frac{1}{\rho} \left[p + \left(1 + \frac{(2k-1)^2 l^2}{n^2 h^2} + \dots\right) (\lambda + 2\mu) \right] \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \\ (\omega_{n,2k+1}^{sa})^2(\gamma) &\approx \frac{1}{\rho} \left[p + \left(1 + \frac{(2k)^2 l^2}{n^2 h^2} + \dots\right) \mu \right] \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

и отвечающих им асимптотическим представлениям для собственных форм

$$u_{n,2k-1}^s(y) = 0, \quad v_{n,2k-1}^a(y) = C_1 \sin \frac{(2k-1)\pi y}{h}; \quad u_{n,2k}^s(y) = C_2 \cos \frac{2k\pi y}{h}, \quad v_{n,2k-1}^s(y) = 0. \quad (26)$$

В заключение отметим, что, как выше показано, в прямоугольной пластинке при указанных граничных условиях существует счетное множество колебаний с локализованными формами в окрестности свободных продольных сторон.

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №08-08-00025а, Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН №13 и Программы поддержки ведущих научных школ (грант №169.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Rauleigh J. W.* On the Free Vibration in an Infinite Plate of Homogenous Isotropic Elastic Matter // Proc. Math. Sos. London, 1889. № 20.
- [2] *Lamb H.* On Waves in an Elastic Plate // Proc. Roy. Sos. London, 1916. № 93A.
- [3] *Ишлинский А. Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 2. М.: Наука, 1986. 416 с.
- [4] *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 332 с.
- [5] *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 541 с.

Banichuk N. V., Barsuk A. A., Ivanova S. Yu. *Free vibrations and stability of preliminary stressed band.* The problem of free vibrations of elastic isotropic band is considered for the case of its stretching (compression) by equally distributed forces. It has been shown that obtained solution of the problem is the rigorous solution for the considered band and for the rectangular plate of finite sizes with the boundary conditions generated by the invariability with respect to shifts. The results of asymptotic analysis of problem solution are given.

МЕХАНИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОНЯТИЯ РИГИДНОСТИ ГЛАЗА

Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Семенов Б. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет

В офтальмологии под ригидностью глаза понимают некоторый параметр, характеризующий зависимость изменения объема глаза при изменении давления внутри фиброзной оболочки глаза. Понятие ригидности глаза лежит в основе клинической тонометрии и тонографии. Кроме того, знание зависимости, связывающей изменение внутриглазного давления (ВГД) и внутриглазного объема, позволяет контролировать изменение ВГД при введении внутриглазных инъекций, что имеет очень большое значение, так как даже кратковременное увеличение ВГД выше определенного индивидуального уровня может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва. Математическое моделирование может помочь оценить, какие параметры глаза оказывают наибольшее влияние на коэффициент ригидности, помочь в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции и риск для отдельного пациента.

Большую часть наружной оболочки глаза (> 90%) составляет склера. Для глаз с нормальным зрением склера имеет форму близкую к сферической, для глаз с миопией или гиперметропией склера чаще имеет форму вытянутого или сплюснутого эллипсоида.

В данной работе для эллипсоидальных изотропных и ортотропных оболочек вращения получены зависимости «объем–давление» по линейной безмоментной теории оболочек, по уточненной прикладной теории анизотропных оболочек Родионовой–Титаева–Черныха, а также выполнено конечно-элементное моделирование задачи в программном пакете ANSYS. Построенные модели позволяют оценить влияние формы оболочки (степень ее отклонения от сферической), а также степень анизотропии (различие модулей упругости в меридиональном и окружном направлении) на коэффициент ригидности, характеризующий зависимость «объем–давление». Проводится сравнение результатов, полученных при использовании разных моделей, с имеющимися клиническими данными.

Понятие «ригидность глаза», которое используют в офтальмологии, лежит в основе тонометрии и тонографии. Однако несмотря на широкое использование этого понятия, оно остается «одной из самых запутанных областей в офтальмологии» [1]. Во всех случаях «ригидность глаза» связывают с некоторым параметром, характеризующим зависимость изменения объема глаза при изменении внутриглазного давления [1]– [3]. В Представляется важным исследование вопроса о том, какие параметры глаза оказывают наибольшее влияние на коэффициент ригидности, чтобы, например, точнее оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции и риск для каждого отдельного пациента. Большую часть наружной оболочки глаза (> 90%) составляет склера. Известно, что для глаз с нормальным зрением склера имеет форму близкую к сферической, для глаз с миопией или гиперметропией склера чаще имеет форму вытянутого или сплюснутого эллипсоида.

В данной работе для эллипсоидальных изотропных и ортотропных оболочек вращения строятся зависимости «объем–давление» по линейной безмоментной теории оболочек, по уточненной прикладной теории анизотропных оболочек

Родионово–Титаева–Черныха [4], а также выполнено конечно-элементное моделирование задачи в программном пакете ANSYS.

Используемые модели в широком диапазоне геометрических и механических параметрах при давлениях до 100 мм рт. ст., (что превосходит реальные значения внутриглазного давления даже при введении инъекций) дают очень близкие результаты. Что позволяет сделать вывод о том, что для исследования зависимости «объем–давление» для реального глаза можно использовать сравнительно простые соотношения безмоментной теории оболочек. Кроме того, если предполагать, что в этом диапазоне склера подчиняется линейному закону упругости, то и зависимость изменения объема от изменения давления является линейной.

На рис. 1 представлены графики зависимости изменения объема от ВГД сферической ортотропной оболочки при разной степени анизотропии, то есть при разных соотношениях модулей упругости в меридианальном (E_m) и окружном (E_c) направлении. Наименьший коэффициент ригидности, как видно из рис. 1, соответствует трансверсально-изотропной сферической оболочке.

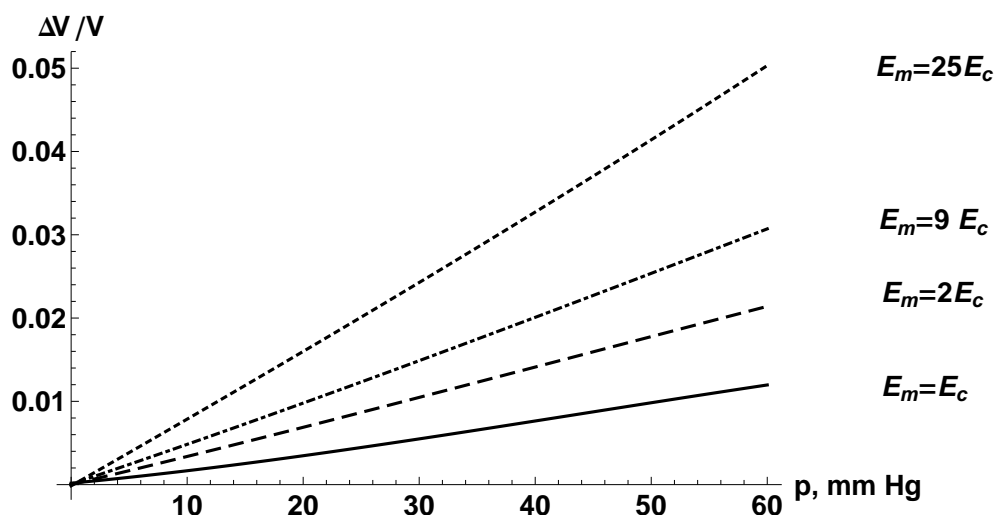


Рис. 1. Относительное изменение объема ортотропной сферы

Проведенные расчеты позволяют оценить также влияние формы оболочки (степень ее отклонения от сферической) на коэффициент ригидности. На рис. 2 представлены изменения объема трансверсально-изотропных эллипсоидальных оболочек, имеющих первоначально одинаковый объем, но разные соотношения R_2/R_1 , при нагружении этих оболочек внутренним давлением 45 мм рт. ст. Здесь $2R_2$ — величина, характеризующая длину передне-задней оси глаза, R_1 — величина экваториального радиуса.

Видно, что наименьший коэффициент будет соответствовать сферической оболочке (что обычно соответствует глазу с нормальным зрением), при увеличении отношения R_2/R_1 (случай миопии), то коэффициент ригидности также незначительно возрастает. (Следует, правда, отметить, что в реальном случае обычно глаза с миопией имеют больший объем, чем глаза с эметропией). Если же отноше-

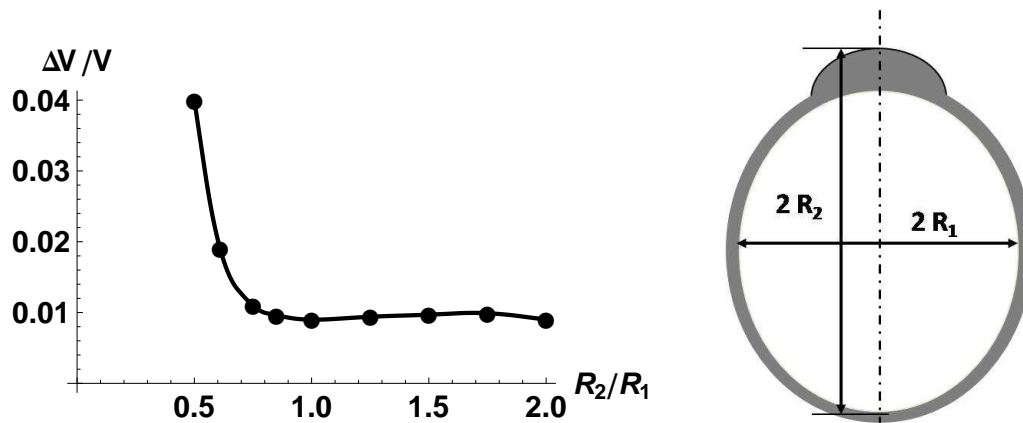


Рис. 2. Относительное изменение объема эллипсоидальной оболочки

ние R_2/R_1 уменьшается, то это приводит к резкому увеличению коэффициента ригидности.

Результаты расчетов сравнивались также с клиническими данными, представленными в работе [5], и соответствующими изменению давления при введении внутрисклеральных инъекций (см. рис. 3). Сравнение результатов показывает, что описанные механические модели адекватно описывают процесс деформации склеры.

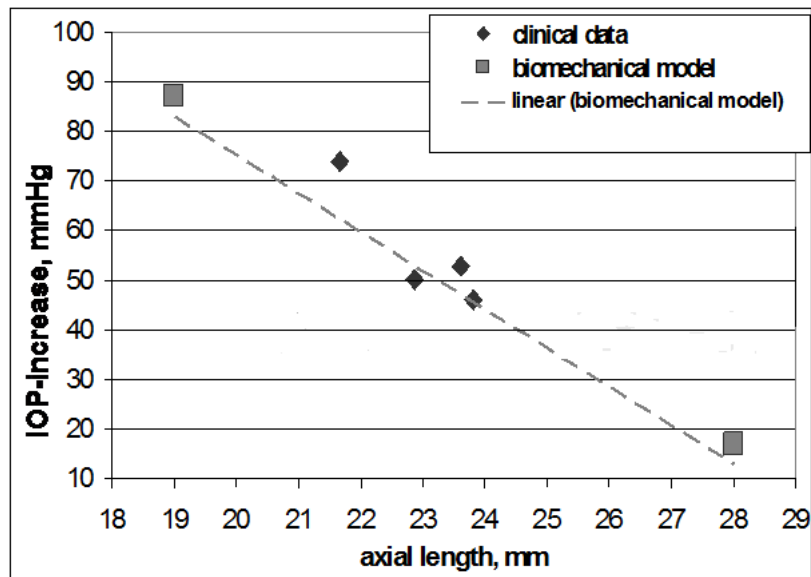


Рис. 3. Сравнение расчетных и клинических данных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00140а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *White O. M.* Ocular elasticity // *Ophthalmology*. 1990. № 9. pp. 1092–1094.
- [2] *Purslow P., Karwatowsky W. S.* Is engineering stiffness a more useful characterization parameter than ocular rigidity // *Ophthalmology*. 1996. № 10. pp. 1686–1692.
- [3] *Котляр К. Е., Кошчи И. Н.* Ригидность глаза. Биомеханические и клинические аспекты // Биомеханика глаза. Труды конференции. Московский НИИ глазных болезней им Гельмгольца. 2009. С. 121–126.
- [4] *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996, 280 с.
- [5] *Kotliar K., Maier M., Bauer S. M., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I.* Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model // *Acta Ophthalmologica Scandinavica*. 2007. № 7. pp. 777–781.

Bauer S. M., Voronkova E. B., Semenov B. N. *Mechanical aspects of ocular rigidity.*

Ocular rigidity is a very common concept in ophthalmology, but parameter of ocular rigidity is always connected with relation «intraocular pressure–volume of eye». In this work the different mechanical models describing the relation «pressure–volume» for a human eye are considered, to reveal which mechanical characteristics of sclera, such as their anisotropy and deflections in their spherical shapes, affect the most significantly on this relation.

The relation «pressure–volume» is obtained for three different models, for which sclera are assumed to be soft shell; sclera are assumed to be transversal-isotropic shells with small modules of elasticity in the thickness direction, for this model calculations were made due to applied shell theory by Rodionova–Titaev–Chernykh, and in the third case sclera is modeled as 3D elastic solids, the last case is analyzed numerically by means of FEM package ANSYS.

The results are obtained for numerous sets of parameters for all mechanical models and were compared to clinical data.

Transversal isotropic shells of revolution of different shapes (modeling the sclera) with equal initial volumes showed linear pressure-volume relationship, while proportionality factor (coefficient of ocular rigidity) is minimal for a spherical shell (emmetropic eye). If the ratio of the axial length (AL) and the equator diameter of the shell (D) increases (the case of a myopic eye), then the coefficient of ocular rigidity increase up to 5-10%. If the ratio AL/D decreases (for hyperopic eye), then the coefficient of ocular rigidity increase up to 100%.

Both the ortotropic properties of the sclera (the ratio of two tangential modulus of elasticity) of the sclera have a significant effect on the character of the pressure–volume relationship and, thus, on the rigidity of the human eye.

ОБ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Белоконь А. В., Герасименко Т. Е., Скалиух А. С.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена двумерная модель, позволяющая находить поля остаточной поляризации и деформации в поликристаллических сегнетоэлектрических материалах при воздействии сильных электрических и малых механических полей. Известный метод Джилла–Атертона для одномерных задач поляризации обобщается на двумерную постановку. Модель может служить в качестве определяющих соотношений в дифференциальной форме.

Постановка задачи. Объектом исследования является частица или представительный объем, который значительно меньше общего объема, но который содержит, в свою очередь, очень большое число доменов сегнетоэлектрического материала. В том случае, когда на представительный объем воздействует электрическое поле значительной интенсивности при малых механических напряжениях, требуется найти поля остаточной и индуцированной поляризации, а также поле остаточной деформации в двумерном случае.

Метод решения. Для решения задачи возьмем за основу метод Джилла–Атертона, который был разработан для ферромагнетиков и позднее применен для поликристаллических сегнетоэлектрических материалов в [1, 2]. В отличие от исследований авторов указанных работ будем рассматривать двумерный случай. При таком подходе одна компонента вектора поляризации равна нулю.

Общая схема применяемой методики состоит из нескольких этапов. На первом этапе строится вспомогательная предельная зависимость между вектором поляризации и вектором электрического поля, для случая когда влиянием соседних доменов друг на друга пренебрегается (так называемый идеальный случай). На следующем этапе подсчитывается энергия, необходимая для поворота домена. Далее оцениваются потери электрического поля в реальном и идеальном случае. После этого составляется энергетическое соотношение, учитывающее потери в реальном процессе поляризации, потери в идеальном случае и энергию, необходимую для слома механизмов запирающих доменных стенок. Из этого балансного соотношения получается зависимость, представляющая собой дифференциальный оператор гистерезисного типа. Последним шагом является построение поля остаточных деформаций по найденному вектору остаточной поляризации, для чего используется условие несжимаемости остаточных деформаций.

Для вывода предельной зависимости в вышеуказанных работах вводится эффективное поле Вейсса, $\mathbf{E}^{ef} = \mathbf{E} + \alpha \mathbf{P}_0$, учитывающее искажение реального поля при наличии остаточной поляризации, и статистика Больцмана, согласно которой распределение осей доменов в эффективном поле отличается от их распределения без поля на величину $e^{-\frac{U}{kT}}$. Здесь U — потенциальная энергия ячейки в поле \mathbf{E}^{ef} , k — постоянная Больцмана, T — температура. Однако анализ переключений доменов, происходящий в поликристаллических сегнетоэлектрических материалах

заставил нас несколько изменить эффективное поле. Нами было введено влияние коэрцитивного поля на процесс переключения. Кроме того, на наш взгляд влияние коэрцитивного поля сказывается неодинаково при возрастании и убывании поля. Таким образом, мы внесли следующие поправки. В качестве коэрцитивного взяли значение $E_c^* = E_c \frac{p_s - |\mathbf{p}_0|}{p_s}$, где E_c — параметр, связанный с коэрцитивным полем монокристалла, из которого изготовлена керамика, p_s — поляризация насыщения для керамики, \mathbf{p}_0 — вектор остаточной поляризации представительного объема. Далее при возрастающем поле $d|\mathbf{E}| \geq 0$ считаем при $0 \leq |\mathbf{E}| \leq E_c^*$ значение $\mathbf{E}^{ef} = \alpha \mathbf{P}_0$, а при $E_c^* < |\mathbf{E}|$ значение $\mathbf{E}^{ef} = \mathbf{E} - E_c \frac{p_s - |\mathbf{p}_0|}{p_s} \mathbf{n}_E + \alpha \mathbf{P}_0$, где \mathbf{n}_E — единичный вектор направления поля. При убывании электрического поля $d|\mathbf{E}| \leq 0$ принимаем $\mathbf{E}^{ef} = \mathbf{E} + \alpha \mathbf{P}_0$. Выражение для предельной зависимости получаем стандартным методом, как указано в [3]

$$\mathbf{P}_\infty = \frac{\int_0^{2\pi} e^{\frac{E_1^{ef} \cos \varphi + E_2^{ef} \sin \varphi}{a}} \mathbf{p}_s d\varphi}{\int_0^{2\pi} e^{\frac{E_1^{ef} \cos \varphi + E_2^{ef} \sin \varphi}{a}} d\varphi}.$$

Здесь a — некоторый параметр подлежащий определению.

Следующий шаг связан с определением энергии, необходимой для поворота домена, когда его вектор спонтанной поляризации меняет свое направление с \mathbf{p}_s на \mathbf{p}'_s . Полагая, что эффективное поле получает приращение $d\mathbf{E}^{ef}$, можно считать, что энергия, необходимая для слома механизмов запираения домена, пропорциональна приращению энергии домена в эффективном поле, тогда будем иметь

$$\Delta U_* = C(\mathbf{p}'_s - \mathbf{p}_s) \cdot d\mathbf{E}^{ef}.$$

Определяя константу C из условия поворота домена на 180° , и учитывая средние характеристики, получим для произвольного объема

$$\Delta U = \int_\Omega k \frac{d\mathbf{P}_0 \cdot d\mathbf{E}^{ef}}{|d\mathbf{E}^{ef}|},$$

где k — константа также подлежащая определению.

Далее оценим работу поля в поляризационном процессе

$$\Delta A = \int_\Omega \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} d\Omega.$$

Можно показать, что при циклическом изменении электрического поля за потери отвечает следующий интеграл

$$\Delta A_c = - \int_\Omega \mathbf{P}_0 \cdot d\mathbf{E}^{ef} d\Omega.$$

А потери в идеальном случае получим, заменяя \mathbf{P}_0 на \mathbf{P}_∞ , т. е.

$$\Delta A_\infty = - \int_\Omega \mathbf{P}_\infty \cdot d\mathbf{E}^{ef} d\Omega.$$

Теперь интегральные соотношения энергетического баланса можно представить в виде

$$\Delta A_c = \Delta A_\infty + \Delta U.$$

С учетом произвольности объема интегрирования и приращения эффективного поля, имеем следующее соотношение в дифференциалах

$$P_0 = P_\infty - k \frac{dP_0}{|dE^{ef}|}.$$

Перепишем его в виде

$$dP_0 = \frac{1}{k} |dE^{ef}| (P_\infty - P_0)$$

и заметим, что оно представляет собой уравнение в дифференциалах относительно dP_0 . Это обстоятельство позволяет его решать методом последовательных приближений. Для нахождения полной поляризации заметим, что она складывается из остаточной и индуцированной, т. е.

$$P = P_0 + P_e.$$

Индуцированную составляющую, которая возникает вследствие деформирования доменных стенок, будем моделировать через предельную и остаточную поляризацию, а также через электрическое поле в виде

$$P_e = c(P_\infty - P_0) + \beta E.$$

В этом соотношении член с коэффициентом β был введен нами. Как показали дальнейшие расчеты именно благодаря этому коэффициенту удается «наклонять» гистерезисные петли диэлектрического отклика, что позволяет более точно приближать их к экспериментальным.

Последний шаг связан с определением поля остаточной деформации. Пусть для определенности рассматриваются условия плоской деформации. При малых механических напряжениях в локальных осях, когда одна из осей

$$e_2 = \frac{P_0}{|P_0|}$$

направлена по вектору остаточной поляризации, имеем деформации растяжения в том же направлении. А используя свойство несжимаемости остаточных деформаций, получаем

$$\epsilon_0 = \epsilon_s (e_2 e_2 - e_1 e_1).$$

Численные результаты. Представленная модель поляризации предназначена для описания полей остаточной и полной поляризации и остаточной деформации для различных типов пьезокерамик. Она имеет семь параметров $\alpha, a, k, c, p_s, E_c, \beta$, которые подбираются из условия совпадения расчетных и экспериментальных зависимостей, например петель гистерезиса диэлектрического отклика. В качестве первого примера рассмотрим изменение электрического поля вдоль одной из осей и приведем большую петлю гистерезиса, т. е. изменение поляризации вдоль

этой же оси, когда электрическое поле изменяется циклически. Экспериментальная кривая для керамики ЦТС-19 была любезно предоставлена нам сотрудником НИИ механики ЮФУ Рожковым Е. В. На рисунке 1 она изображена красным цветом. На этом же рисунке черным цветом показана расчетная кривая, наложенная на экспериментальную. Для данного случая выбраны следующие параметры модели (система СИ) $\alpha = 7.3 \cdot 10^6$, $a = 9.79 \cdot 10^5$, $k = 4.9 \cdot 10^5$, $c = 0.1$, $p_s = 0.432$, $\beta = 1.4 \cdot 10^{-8}$, $E_c = 2.0 \cdot 10^5$.

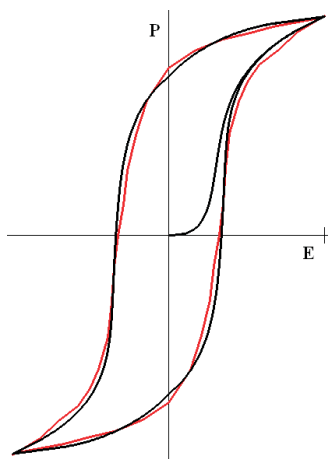


Рис. 1. Экспериментальная и расчетная петля гистерезиса.

Второй пример демонстрирует сравнение малых петель диэлектрического гистерезиса. В качестве экспериментальных данных взяты результаты зарубежных авторов [4], а соответствующие кривые показаны на рисунке 2. На рисунке 3 показаны расчетные кривые. Получено качественное совпадение для следующего набора параметров $\alpha = 6.1 \cdot 10^6$, $a = 8.79 \cdot 10^5$, $k = 6.9 \cdot 10^5$, $c = 0.15$, $p_s = 0.55$, $\beta = 0.8 \cdot 10^{-9}$, $E_c = 6.0 \cdot 10^5$. Примечательно, что каждый из параметров отвечает за поведение кривых. Это дает уверенность возможности использования оптимизационных методов, чтобы получить более точное совпадение этих кривых. В качестве таких методов могут быть использованы гинетические алгоритмы.

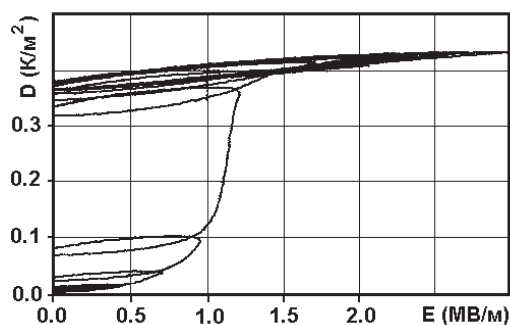


Рис. 2. Малые петли гистерезиса (эксперимент).

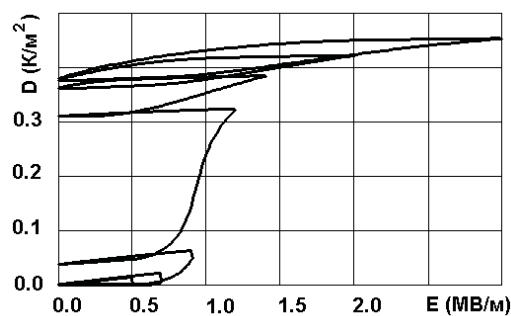


Рис. 3. Малые петли гистерезиса (модель).

В завершение приведем петлю деформационного гистерезиса, т. е. зависимость остаточной деформации от электрического поля, показанную на рисунке 4, рассчитанную по указанной выше методике.

Выводы. Построенная модель позволяет находить поля остаточной поляризации и деформации при воздействии на поликристаллические сегнетоэлектрические материалы сильных электрических полей при малых механических напряжениях. Эти поля необходимы для определения упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант локально неоднородно поляризованной керамики.

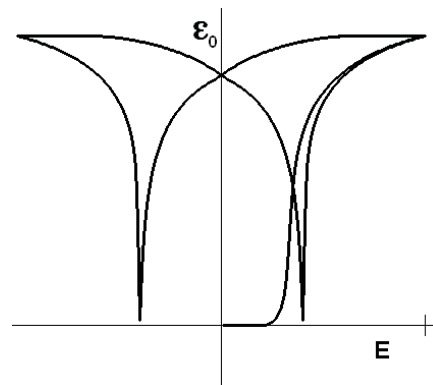


Рис. 4. Большая деформационная петля гистерезиса типа «бабочка».

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ (грант 08-01-00828-а) и ФЦП (Госконтракт № П-487).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Massad J. E., Smith R. C.* A domain wall model for hysteresis in ferroelectric materials // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, V. 14, 2003, pp. 455–471.
- [2] *Smith R. C., Ounaies Z.* A Domain Wall Model for Hysteresis in Piezoelectric Materials // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 11, №1, 2000, pp. 62–79.
- [3] *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.:Наука, 1966, 624 с.
- [4] *M. Selten, G. A. Schneider, V. Knoblauch, R. M. McMeeking* On the evolution of the linear material properties of PZT during loading history — an experimental study // Int. Journal of Solid and Structures. 2005. Vol. 42, pp. 3953–3966.

Belokon A. V., Gerasimenko T. E., Skaliukh A. S. *A two-dimensional model of polycrystalline ferroelectrics.* The two-dimensional model to find the field of remanent polarization and remanent strain in polycrystalline ferroelectric materials under the influence of strong electrical and small mechanical fields are presented. A well-known one-dimensional Jile–Atherton’s method of polarization is generalized to two-dimensional case. Model can serve as the constitutive relations in differential form.

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД

Белянкова Т. И., Калинин В. В.
Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

На примере ряда конкретных задач для структурно-неоднородных сред демонстрируются возможности усовершенствованных методов изучения особенностей динамики слоисто-неоднородных и функционально градиентных полуграниченных тел. Для слоисто-неоднородных структур подходы базируются на использовании усовершенствованных численно-аналитических методов построения функции Грина, позволяющих изучать тонкие вопросы влияния структуры среды (механические и геометрические параметры, наличие начальных напряжений различной природы) на структуру поверхностного волнового поля. В случае функционально-градиентного полупространства предлагается усовершенствованная двухточечная схема численного построения функции Грина, позволяющая изучать влияние изменения свойств и геометрии неоднородной среды, а также неоднородного начального напряженного состояния на изменение ее динамических характеристик. Проведен сравнительный анализ различных моделей.

Необходимость обеспечения прочности деталей, выполненных из современных композиционных материалов и работающих в условиях постоянных динамических нагрузок и воздействия полей различной природы, обуславливает необходимость создания адекватных моделей, отражающих влияние внешних воздействий на изменение динамических характеристик материала среды. Решение этой проблемы опирается на возможность эффективного моделирования самих неоднородных материалов, их напряженного состояния и волновых полей, возникающих под действием внешних динамических нагрузок. Особое место занимает верификация результатов и возможность сопоставления работы различных моделей.

Рассматриваются колебания слоисто-неоднородной среды под действием поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(x_1, x_2) e^{-i\omega t}$, распределенной в области Ω . Среда представляет собой либо пакет однородных слоев $|x_1|, |x_2| \leq \infty$, $h_{k+1} \leq x_3 \leq h_k$, $k = 1, 2, \dots, M - 1$, либо слой $|x_1|, |x_2| \leq \infty$, $0 \leq x_3 \leq h$ с изменяющимися по глубине свойствами, сцепленные с однородным упругим полупространством $x_3 \leq 0$. Все величины в структуре, относящиеся к m -слою обозначим индексом $n = m$, к полупространству — индексом $n = M$. Материал среды полагается первоначально изотропным гиперупругим, имеющим упругий потенциал.

Краевая задача о колебаниях слоисто-неоднородной среды описывается уравнениями движения:

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности и на границе раздела сред

$$x_3 = h_1 : \quad \mathbf{N} \cdot \Theta^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{q}(x_1, x_2, t), & x_1, x_2 \in \Omega \\ 0, & x_1, x_2 \notin \Omega \end{cases} \quad (2)$$

$$x_3 = h_n : \quad \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad \mathbf{N} \cdot \Theta^{(n)} = \mathbf{N} \cdot \Theta^{(n+1)}, \quad n = 2, \dots, M - 1 \quad (3)$$

Замыкают задачу условия излучения на бесконечности:

$$\mathbf{u}^{(M)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_3 \rightarrow -\infty \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}\}$ — вектор перемещений произвольной точки, $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ — вектор нагрузки, \mathbf{N} — вектор нормали, $\Theta^{(n)}$ — тензор напряжений m -го слоя ($n = m$) или полупространства ($n = M$). Компоненты тензоров $\Theta^{(n)}$ в выражениях (1) — (3) представляются формулой

$$\theta_{pl}^{(n)} = \chi_{plms}^{(n)} u_{s,m}^{(n)} \quad (5)$$

Здесь $\chi_{pmls}^{(n)}$ — упругие константы, определяющие закон состояния слоя или полупространства. В случае изотропной среды они имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_{pmls}^{(n)} &= (\delta_{pl}\delta_{ms} + \delta_{ml}\delta_{ps})\mu^{(n)}(x_3) + \delta_{pm}\delta_{ls}\lambda^{(n)}(x_3) \\ \chi_{pmls}^{(M)} &= (\delta_{pl}\delta_{ms} + \delta_{ml}\delta_{ps})\mu^{(M)} + \delta_{pm}\delta_{ls}\lambda^{(M)} \end{aligned} \quad (6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Полагая режим колебаний установившимся, рассмотрим задачу в гармонической постановке. Постановка краевой задачи (1)–(4) о колебаниях неоднородной, в том числе слоисто-неоднородной и функционально градиентной, полуграниченной среды в компонентной форме, и схема ее решения приведены в [1–3]. Следуя традиционной схеме решения применяем к задаче (1)–(4) двумерное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 (α_1, α_2 — параметры преобразования). В случае, когда составляющие среды выполнены из однородного материала, решение полученной задачи ищем в виде ($U_p^{(n)}$, $p = 1, 2, 3$ — трансформанты Фурье вектора смещений среды $\mathbf{u}^{(n)}$):

$$\begin{aligned} U_l^{(n)} &= \sum_{k=1}^3 f_{lk}^{(n)} \left[g_k^{(n)} sh\sigma_k^{(n)} x_3 + d_k^{(n)} ch\sigma_k^{(n)} x_3 \right], \quad l = 1, 2 \\ U_3^{(n)} &= \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(n)} \left[g_k^{(n)} ch\sigma_k^{(n)} x_3 + d_k^{(n)} sh\sigma_k^{(n)} x_3 \right], \quad n = 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$U_l^{(M)} = \sum_{k=1}^3 f_{lk}^{(M)} g_k^{(M)} e^{\sigma_k^{(M)} x_3}, \quad l = 1, 2, 3 \quad (8)$$

$\sigma_k^{(n)}$ удовлетворяют характеристическим уравнениям:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_1^{(n)} \right)^2 - \alpha^2 + \rho^{(n)} (\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)})^{-1} \chi_2^2 &= 0 \\ \left(\sigma_k^{(n)} \right)^2 - \alpha^2 + \rho^{(n)} (\mu^{(n)})^{-1} \chi_2^2 &= 0, \quad (n = 1, \dots, M; k = 2, 3) \end{aligned} \quad (9)$$

В случае, когда один или несколько слоев выполнены из материала с переменными по глубине свойствами, решение ищем в виде:

$$U_k^{(n)} = Y_k^{(n)} = \sum_{m=1}^6 c_m^{(n)} (\alpha_1, \alpha_2) y_{km} (\alpha_1, \alpha_2, x_3), \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (10)$$

$Y_k^{(n)} = \Theta_{k3}^{(n)}$, $Y_{k+3}^{(n)} = U_k^{(n)}$, $k = 1, 2, 3$ новые неизвестные, определяемые из решения системы

$$\mathbf{Y}^{(n)'} = \mathbf{M}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{Y}^{(n)} \quad (11)$$

$\mathbf{M}^{(n)}$ — матрицы размера 6×6 , элементы которых приведены в [1–3].

Неизвестные константы $g_k^{(n)}$, $d_k^{(n)}$ и $c_k^{(n)}$ определяются при удовлетворении граничных условий. Таким образом, для нахождения неизвестных констант получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую в матричном виде можно представить:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Q} \quad (12)$$

Здесь в рамках принятых в [1–3] обозначений \mathbf{C} — вектор неизвестных констант, \mathbf{Q} — вектор заданной нагрузки ($\mathbf{Q} = \uparrow \{Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*, 0, \dots, 0\}$), матрица \mathbf{A} представлена в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)}(h_1) & 0 \\ \mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M}) & \mathbf{B}^{(M)}(h_M) \end{pmatrix} \quad (13)$$

причем $\mathbf{B}^{(1)}(h_1)$ и $\mathbf{B}^{(M)}(h_M)$ — матрицы размера 3×6 и 6×3 , вид которых полностью определяется свойствами верхнего слоя и подстилающего полупространства соответственно, и не зависит от свойств и количества возможных промежуточных слоев [2, 3]. Матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M})$ — квадратные, размер определяется геометрией задачи и равен соответственно $6(M-1) + 3$ и $6(M-1)$. Представление матриц (13) и вид $f_{mk}^{(n)}$ можно найти в [1–3]. Таким образом, дисперсионное уравнение задачи имеет вид (12), исследуя свойства корней которого можно изучать особенности структуры поверхностного волнового поля слоисто-неоднородного полупространства.

Применяя к решению (7), (8), (10) обратное преобразование Фурье, решение краевой задачи (1)–(4) можем записать в традиционном виде:

$$\mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^2\mu^{(1)}} \iint_{\Omega} \mathbf{k}^{(n)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (14)$$

$$\mathbf{k}^{(n)}(s, t, x_3) = \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \left\| K_{lp}^{(n)} \right\|_{l,p=1}^3$$

Компоненты матрицы-функции Грина выражаются через миноры матрицы (13) [3].

Исследование таких динамических характеристик среды, как ее динамическая жесткость, особенности распределения напряжений в зоне контакта возможно лишь на основе решения динамических контактных задач, которые в свою очередь сводятся к решению интегральных уравнений и систем интегральных уравнений типа (14) относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений при заданных смещениях в зоне контакта.

На примере трехслойного полупространства с жестким включением показано влияние изменения свойств внешнего слоя на дисперсионные характеристики, структуру поверхностного волнового поля и динамическую жесткость среды.

На рис. 1 и 2 приведены графики, иллюстрирующие влияние податливости внешнего слоя на дисперсионные свойства $K_{33}^{(1)}(\alpha, \chi_2)$ (рис. 1) и относительные фазовые скорости (рис. 2) в случае задачи о вертикальных колебаниях трехслойного полупространства, в предположении, что геометрия задачи ($h_1 = 1, h_2 = 0.5, h_3 = 0$) и отношение параметров внутреннего слоя и полупространства ($\mu^{(2)}/\mu^{(3)} = 7$) фиксированы, меняется только отношение $\mu^{(1)}/\mu^{(3)}$. Оно равно 1 для рис. а, 0.5 для рис. б и 0.3 для рис. в.

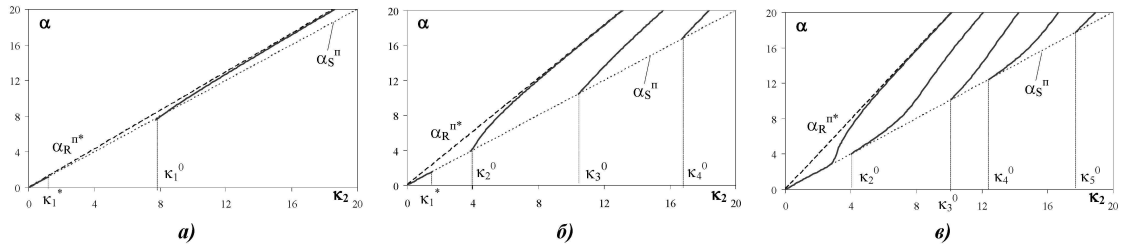


Рис. 1. Влияние податливости внешнего слоя трехслойного полупространства с жестким включением на дисперсионные кривые.

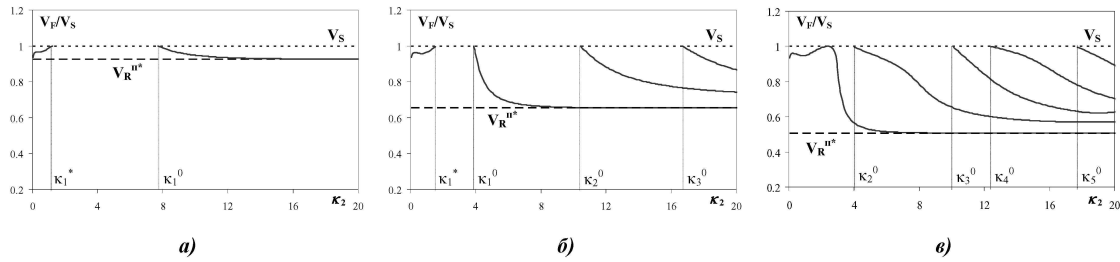


Рис. 2. Влияние податливости внешнего слоя трехслойного полупространства с жестким включением на относительные фазовые скорости.

Как следует из графиков, уменьшение жесткости верхнего слоя при фиксированной жесткости включения приводит к увеличению количества мод поверхностных волн и к уменьшению значений частот их возникновения.

Из графиков следует, что изменение податливости внешнего слоя существенно влияет как на диапазон исчезновения поверхностной волны, так и на дисперсию скорости. В частности при значениях $\gamma_1 = \mu^{(1)}/\mu^{(3)}$ равных 1 и 0.5 скорость поверхностной волны сначала возрастает, достигая скорости $V_S^{(3)}$, затем исчезает (становится комплексной), а потом вновь появляется и убывает до значения $V_R^{\text{П}*}$ рэлеевской волны полупространства с параметрами внешнего слоя. Увеличение податливости внешнего слоя при фиксированных значениях остальных параметров приводит к сужению диапазона исчезновения поверхностной волны и к уменьшению предельного значения фазовой скорости, при $\gamma_1 = 0.3$ первая волна не исчезает.

На рис. 3 приведены графики иллюстрирующие влияние податливости внешнего слоя трехслойного полупространства с жестким включением на вещественную (рис. а) и мнимую (рис. б) составляющие динамической жесткости среды $Q(\chi_2)$.

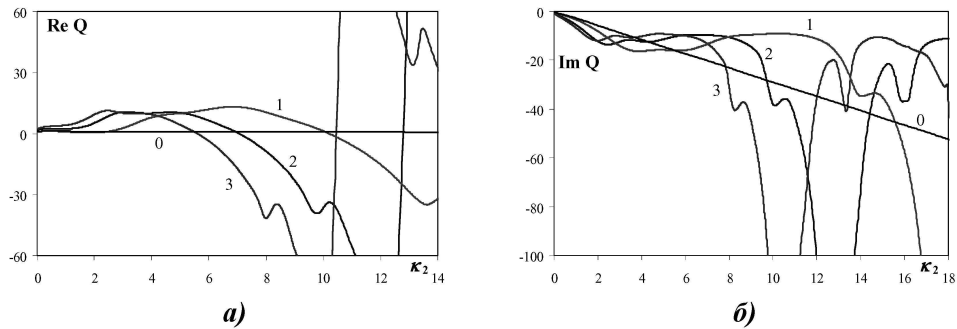


Рис. 3. Влияние податливости внешнего слоя трехслойного полупространства с жестким включением на динамическую жесткость среды.

Цифрами 1, 2, 3 на рисунках отмечены кривые динамической жесткости, рассчитанные для $\gamma_1 = 1$, $\gamma_1 = 0.5$ и $\gamma_1 = 0.3$. Для сравнения цифрой 0 отмечена динамическая жесткость однородного полупространства.

Как следует из графиков, увеличение податливости (смягчение) внешнего слоя существенно усиливает осцилляцию как реальной, так и мнимой составляющей динамической жесткости среды, наблюдается значительный сдвиг кривых в низкочастотную область.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (09-01-00695, 09-08-01065, 09-08-96527-юг), Президиума РАН (направление № 12 программы № 4П РАН, программы № 11П РАН).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
- [2] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
- [3] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.

Belyankova T. I., Kalinchuk V. V. *Dynamics features of layered inhomogeneous and functionally gradient media.* By example of specific problems for structurally inhomogeneous media, the capabilities of improved methods are demonstrated for analysis of dynamics features for layered heterogeneous and functionally gradient semi-bound bodies. For layered heterogeneous structures, the approaches are based upon improved numerically analytical methods of a Green function construction. In the case of functionally gradient half-space, an improved two-point scheme is proposed for numerical construction of a Green function. A comparative analysis of various models is carried out.

МНОГОКРАТНЫЕ ПЕРЕОТРАЖЕНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН В ЗАДАННОЙ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Боев Н. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках геометрической теории дифракции на основе интегральных представлений физической теории дифракции Кирхгофа получена явная формула для амплитуды продольной высокочастотной волны, многократно переотраженной от скопления полостей, находящихся в бесконечной упругой среде. Траектория луча, вдоль которого исследуется распространение волны, представляет собой пространственную ломаную линию и рассматривается в некоторой декартовой системе координат.

Введение. В ультразвуковом неразрушающем контроле (УЗНК) основная часть методов определения местоположения и реконструкции формы дефектов в упругих материалах основана на озвучивании дефектов и их скоплений волнами растяжения–сжатия [3]. В связи с этим важным является исследование рассеяния продольных волн на поверхностях скопления препятствий в упругих средах с учетом их переотражений.

Постановка задачи. Пусть из точки x_0 бесконечной упругой среды на граничную поверхность находящейся в ней полости падает сферическая монохроматическая высокочастотная волна. Волна порождается сосредоточенной в точке x_0 силой $\mathbf{Q}e^{-i\omega t}$, где ω — частота колебаний. При этом перемещения в точке y упругого пространства определяются матрицей Купрадзе [4].

$$\begin{aligned} U_j^{(k)}(y, x_0) &= U_{jp}^{(k)}(y, x_0) + U_{js}^{(k)}(y, x_0), \quad k, j = 1, 2, 3, \\ U_{jp}^{(k)}(y, x_0) &= -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left(\frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} \right), \quad R_0 = |x_0 - y|, \\ U_{js}^{(k)}(y, x_0) &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left(k_s^2 \delta_{kj} \left(\frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left(\frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \right) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность, λ , μ — коэффициенты Лямэ, $k_p = \frac{\omega}{c_p}$, $k_s = \frac{\omega}{c_s}$, c_p , c_s — волновые числа и скорости продольной и поперечной волн, δ_{kj} — символы Кронекера. Целью работы является исследование амплитуды N раз переотраженной продольной волны от поверхностей скопления полостей в упругой среде.

Метод решения. Зависимость характеристик задачи от времени монохроматическая, в частности, для перемещений в упругой среде она имеет вид: $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \text{Re}(\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \exp(-i\omega t))$. Матрица Купрадзе определяет в точке y в радиальном направлении $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}_0 \mathbf{y}}{|\mathbf{x}_0 \mathbf{y}|}$ ненулевые перемещения в продольной (p -волне) и поперечной (s -волне) волнах.

$$\mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{(p)}(y) = Q_{\mathbf{q}} \mathbf{q} \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \left(1 + i \frac{2}{k_p R_0} - \frac{2}{(k_p R_0)^2} \right) \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0}, \quad Q_{\mathbf{q}} = (Q, q),$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{q}_1}^{(s)}(y) = Q_{\mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1 \frac{k_s^2}{4\pi\rho\omega^2} \left(1 - i \frac{1}{k_s R_0} - \frac{1}{(k_s R_0)^2} \right) \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0}, \quad Q_{\mathbf{q}_1} = (Q, q_1).$$

Тангенциальное направление \mathbf{q}_1 перпендикулярно \mathbf{q} ; Q_q и Q_{q_1} — проекции силы \mathbf{Q} на направления \mathbf{q} и \mathbf{q}_1 . В высокочастотном режиме колебаний при $k_p \rightarrow \infty$ и $k_s \rightarrow \infty$ в направлениях \mathbf{q} и \mathbf{q}_1 имеем асимптотические представления перемещений в падающей волне

$$\mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{(p)}(y) = Q_{\mathbf{q}} \mathbf{q} \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} \left(1 + O\left(\frac{1}{k_p R_0}\right) \right), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{q}_1}^{(s)}(y) = Q_{\mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1 \frac{k_s^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \left(1 + O\left(\frac{1}{k_s R_0}\right) \right), \quad (3)$$

Компоненты вектора перемещений в отраженной от свободной граничной поверхности волне в точке x упругой среды определяются следующим интегралом Сомильяны [5]

$$U_k(x) = \iint_S \mathbf{T}_y(\mathbf{U}^{(k)}(y, x)) \mathbf{u}(y) dS_y, \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_y(\mathbf{U}^{(k)}(y, x)) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{U}^{(k)}}{\partial n} + \lambda \text{div}(\mathbf{U}^{(k)}) + \mu(\mathbf{n} \times \text{rot}(\mathbf{U}^{(k)})), \quad (5)$$

где матрица Купрадзе $\mathbf{U}^{(k)}(y, x)$ получается из матрицы $\mathbf{U}^{(k)}(y, x_0)$ (1) заменой x_0 на x и R_0 на $R = |y - x|$, \mathbf{T}_y — вектор силы в точке y , $\mathbf{u}(y)$ — вектор полного поля перемещений на граничной поверхности, \mathbf{n} — нормаль к поверхности S . Выделим в векторах полного перемещения на граничной поверхности и в векторе силы \mathbf{T}_y в точке y слагаемые, определяемые продольной (p) и поперечной (s) волнами.

Рассмотрим случай, когда геометрия граничной поверхности такова, что траектория луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - \dots - y_N^* - x_{N+1}$ приводит к $p - p - p - \dots - p$ отражению. Прямое использование интегрального представления (4) по всей зоне «света» для отраженных волн невозможно [1], так как оно не описывает многократно отраженных волн. Для решения задачи о многократном переотражении будем исходить из модификации [1] интегральной формулы (4). Амплитуда радиального перемещения N раз отраженного луча в точке x_{N+1} относительно локальной сферической системы координат r, θ, ψ в точке y_N^* граничной поверхности представляется интегралом

$$u_r^{(p)}(x_{N+1}) = i^N \frac{Q_q}{4\pi\mu} \frac{k_p^2}{k_s^2} \left(\frac{k_p}{2\pi} \right)^N \left(\frac{k_p^2}{2k_s^2} \right)^N L_0^{-1} \prod_{n=1}^N L_n^{-1}(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{k}_n) V_{pp}(y_n^*) \times \\ \times \iint_{S_N^*} \iint_{S_{N-1}^*} \dots \iint_{S_2^*} \iint_{S_1^*} e^{ik_p \varphi} dS_1 dS_2 \dots dS_{N-1} dS_N, \quad (6)$$

$$u_\theta^{(p)}(x_{N+1}) = 0, u_\psi^{(p)}(x_{N+1}) = 0,$$

$$\varphi_p = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + \dots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}|,$$

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, L_{n-1} = |y_{n-1}^* - y_n^*|, n = 2, \dots, N; L_N = |y_N^* - x_{N+1}|,$$

где L_0 — расстояние между излучателем x_0 и первой точкой зеркального отражения y_1^* , L_N — расстояние между приемником x_{N+1} и последней точкой зеркального отражения y_N^* , L_{n-1} ($n = 2, 3, \dots, N$) — расстояние между точками зеркального отражения y_{n-1}^* и y_n . $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$ — окрестности точек зеркального отражения, $V_{pp}(y_n^*)$ — коэффициенты отражения p — волны [2] в точках зеркального отражения y_n^* , $n = 1, 2, \dots, N$. \mathbf{q}_n^0 — орт направления падения волны и $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$ — ортонормированный базис локальной декартовой системы координат в точке y_n^* , которые заданы координатами в основной декартовой системе координат. Применяя для оценки при $k_p \rightarrow \infty$ $2N$ кратного интеграла Сомильяны (6) метод многомерной ($2N$ кратной) стационарной фазы [6], получаем амплитуду радиального перемещения в N раз преотраженной p — волне.

$$u_r^{(p)}(x_{N+1}) = \frac{Q_q k_P^2}{4\pi\mu k_s^2} \prod_{n=1}^N (\mathbf{q}_n^0, \mathbf{k}_n) V_{pp}(y_n^*) \frac{\exp\left(i\left(k_p \sum_{n=0}^N L_n + \frac{\pi}{4} \left(\delta_{2N}^{(p)} + 2N\right)\right)\right)}{\prod_{n=0}^N L_n \sqrt{|\det(D_{2N}^{(p)})|}} \quad (7)$$

Матрица Гессе $D_{2N}^{(p)} = (d_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, 2N$ является ленточной (с шириной ленты равной семи) и симметричной $d_{ij} = d_{ji}$ со следующими ненулевыми элементами d_{ij} , $i \leq j$:

диагональные элементы:

$$d_{2n-1, 2n-1} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1})(1 - (\mathbf{q}_n^0, \mathbf{i}_n)^2) + 2k_1^{(n)}(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{k}_n)$$

$$d_{2n, 2n} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1})(1 - (\mathbf{q}_n^0, \mathbf{j}_n)^2) + 2k_2^{(n)}(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{k}_n)$$

внедиагональные элементы:

$$d_{2n-1, 2n} = -(L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1})(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{i}_n)(\mathbf{q}_n^0, \mathbf{j}_n)$$

$$d_{2n-1, 2n+1} = L_n^{-1} ((\mathbf{q}_n^0, \mathbf{i}_n)(\mathbf{q}_{n+1}^0, \mathbf{i}_{n+1}) - (\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{i}_n))$$

$$d_{2n-1, 2n+2} = L_n^{-1} ((\mathbf{q}_n^0, \mathbf{i}_n)(\mathbf{q}_{n+1}^0, \mathbf{j}_{n+1}) - (\mathbf{j}_{n+1}, \mathbf{i}_n))$$

$$d_{2n, 2n+1} = L_n^{-1} ((\mathbf{q}_n^0, \mathbf{j}_n)(\mathbf{q}_{n+1}^0, \mathbf{i}_{n+1}) - (\mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{j}_n))$$

$$d_{2n, 2n+2} = L_n^{-1} ((\mathbf{q}_n^0, \mathbf{j}_n)(\mathbf{q}_{n+1}^0, \mathbf{j}_{n+1}) - (\mathbf{j}_{n+1}, \mathbf{j}_n))$$

где $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) — главные кривизны поверхности в точке y_n^* . Переменная n принимает последовательно натуральные значения $1, 2, 3, \dots$ с условием, что каждый из индексов i и j элементов d_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 2N$) не превосходит числа $2N$. Заметим, что оценка многомерного дифракционного интеграла (6) не сводится к последовательному асимптотическому анализу двукратных интегралов, поскольку структура фазовой функции представляет собой довольно сложную комбинацию, зависящую от всех точек окрестностей $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$, участвующих в отражении луча. Формула (7) для радиального перемещения в отраженной волне устанавливает его зависимость от параметров задачи, которые определяются главными кривизнами, расстояниями между точками зеркального отражения, удалением источника волны от первой точки отражения, удалением точки приема

от последней точки отражения, направлениями падающих и отраженных волн, коэффициентами отражения $V_{pp}(y_n^*)$ p — волны в точках зеркального отражения y_n^* , $n = 1, 2, \dots, N$. Теоретическая значимость формулы (7) состоит в том, что перемещение в отраженной продольной волне в случае произвольного конечного числа её переотражений получено в замкнутом виде. Практическая важность формулы (7) определяется тем, что вычисление амплитуды перемещения в переотраженной N раз продольной волне сведено к вычислению определителя симметричной ленточной матрицы Гессе порядка $2N$ с шириной ленты, равной семи, который на современных компьютерах вычисляется в реальном масштабе времени. Таким образом, в работе получен главный член асимптотики перемещений в переотраженной произвольное конечное число раз продольной волне от поверхностей системы полостей, находящихся в бесконечной упругой среде. Формула (7) для амплитуды перемещения N раз переотраженной p — волны отличается от формулы для амплитуды давления в N раз переотраженной акустической волне, присутствием несущественного множителя и произведения коэффициентов отражения $V_{pp}(y_n^*)$ p — волны в точках зеркального отражения y_n^* , $n = 1, 2, \dots, N$.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ 10-01-00557а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [2] Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с. Ермолов И. Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
- [3] Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
- [4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [5] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Boev N. V. *Multiple high frequency waves reflections in provided cartesian coordinates.* Explicit formula, based on Kirchhoff physical diffraction theory's integral representation, of amplitude of high frequency longitudinal wave multiply reflected from a number of planes, which are contained in infinitely elastic environment, is derived in terms of geometrical theory of diffraction. Track of the ray, along which distribution of the wave is probed, is a widespread broken line, and it is examined in some cartesian coordinates.

ПРИМЕНЕНИЕ БИСПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ДАННЫМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИПЕРЗВУКОВОМ УДАРНОМ СЛОЕ

Бунтин Д. А., Поплавская Т. В.

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Биспектральный анализ был применен к результатам прямого численного моделирования нелинейных волновых процессов в гиперзвуковом ударном слое на пластине под воздействием локализованных возмущений типа вдув-отсос, вводимых в ударный слой с поверхности модели.

1. Объект исследований. При движении летательного аппарата с высокой скоростью в верхних слоях атмосферы режим вязкого ударного слоя (ВУС) реализуется даже на значительном расстоянии от передних кромок. Вязкий ударный слой состоит из толстого пограничного слоя и тонкой зоны невязкого течения за головной ударной волной. Исследование развития возмущений и понимание механизмов неустойчивости вязкого ударного слоя является необходимым условием разработки эффективных методов управления ламинарно-турбулентным переходом при гиперзвуковом обтекании летательных аппаратов. Анализ ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое традиционно начинают с задачи восприимчивости, т. е. возбуждения волн неустойчивости. В данной работе представляется исследование локализованной восприимчивости, т. е. исследование характеристик возмущений, генерируемых в гиперзвуковом ударном слое на пластине под углом атаки воздействием возмущений, вводимых в ударный слой локально с поверхности модели. Для обработки данных использовался биспектральный анализ, который впервые применен к данным численного моделирования.

2. Методика. Расчетное исследование выполнено с использованием пакета программ, созданного в ИТПМ СО РАН, на основе решения полных двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса с использованием схем сквозного счета высокого порядка точности [1]. Возмущения типа периодического вдува-отсоса, генерируемые на поверхности тела вблизи передней кромки, моделировались заданием граничного условия для поперечного массового расхода на некотором участке поверхности пластины [2].

Для валидации расчетных данных использовались экспериментальные измерения пульсаций плотности, выполненные в гиперзвуковой азотной аэродинамической трубе Т-327А ИТПМ СО РАН при числе Маха $M = 21$, фиксированном единичном числе Рейнольдса $Re_1 = 6 \cdot 10^5$ и температуре торможения $T_0 = 1200\text{K}$ методом электронно-пучковой флюоресценции [2]. Для выявления эффектов нелинейности экспериментальные данные и данные прямого численного моделирования анализировались при помощи спектров бикогерентности. Метод бикогерентности позволяет не только выявить нелинейные процессы, но определить некоторые характеристики нелинейных взаимодействий: амплитуду взаимодействий и

частоты волн, участвующих во взаимодействиях. Метод бикогерентности впервые был применен для анализа расчетных данных. Для этого метод был несколько усовершенствован.

3. Результаты. В расчетах изучалось поведение пульсаций плотности и пульсаций давления в ударном слое на пластине с изменением угла атаки. Проведены параметрические исследования, включающие вариации интенсивности и положения источника возмущений. Такая информация важна для задачи управления интенсивностью пульсаций в ударном слое с помощью вдува-отсоса. На основе Фурье-анализа расчетных данных были получены спектральные амплитуды возмущений плотности на границе пограничного слоя. На рисунках 1 и 2 приведены значения этих амплитуд пульсаций плотности для основной частоты и первой гармоники в зависимости от амплитуды начального возмущения. Видно, что нелинейность на основной частоте не проявляется (рис. 1), в тоже время наблюдается нелинейный рост первой гармоники (рис. 2).

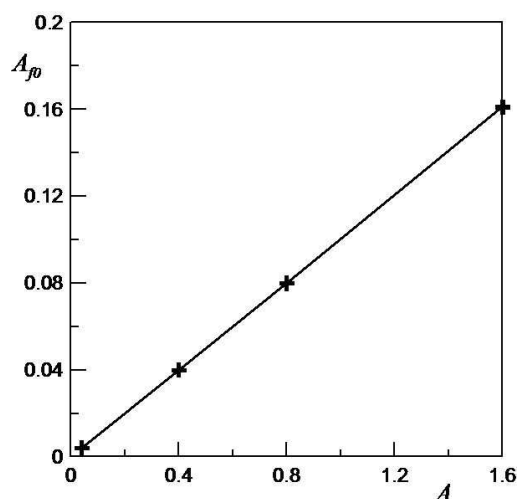


Рис. 1. Зависимость амплитуды основной волны от амплитуды вводимых возмущений

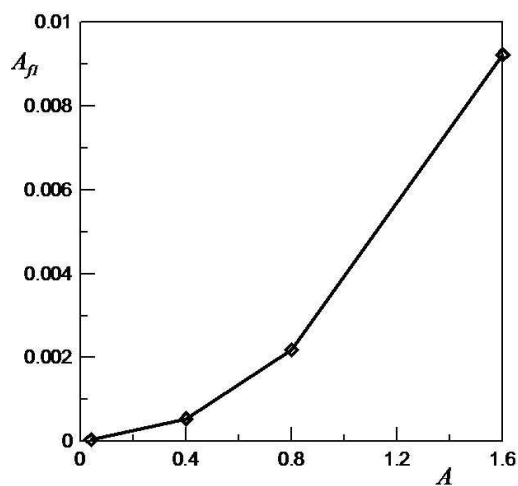


Рис. 2. Зависимость амплитуды гармоники от амплитуды вводимых возмущений

По спектрам бикогерентности определено, что гармоника вводимых возмущений, как для эксперимента, так и для расчетных данных, растет благодаря нелинейному взаимодействию. Выявлены другие нелинейные взаимодействия, не видимые в явной форме на спектрах пульсаций. В частности, при помощи метода бикогерентности обнаружена генерация второй гармоники вводимых возмущений (рис. 3). На рисунке выделяются два пика: $(f_1, f_2) = (38,4 \text{ кГц}, 38,4 \text{ кГц})$, $f_3 = f_1 + f_2 = 76,8 \text{ кГц} = 2f_0$ (генерация первой гармоники основной волны); $(f_1, f_2) = (38,4 \text{ кГц}, 76,8 \text{ кГц})$, $f_3 = f_1 + f_2 = 115,2 \text{ кГц} = 3f_0$ (генерация второй гармоники основной волны).

Биспектральный анализ также показал, что при увеличении угла атаки амплитуда вводимых возмущений падает, но картина нелинейных процессов похожа на случай нулевого угла атаки при существенно больших амплитудах вводимых возмущений.

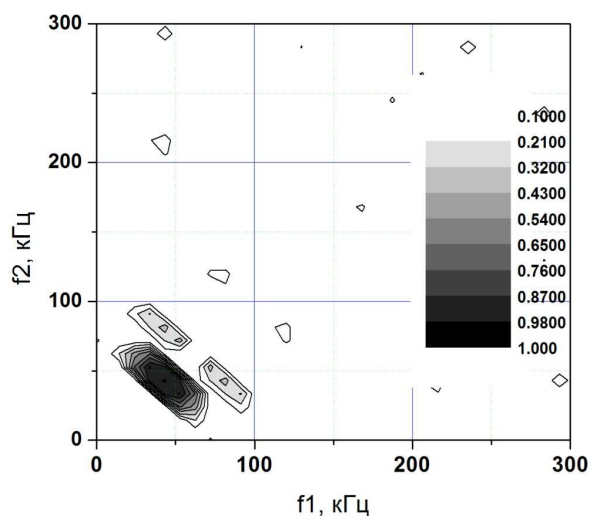


Рис. 3. Спектр бикогерентности расчетных данных для случая воздействия возмущения вдув-отсос с $f = 38.4$ кГц

В работе также проведено численное моделирование пульсаций в ВУС, создаваемых многочастотным нестационарным периодическим источником на поверхности. Для получения информации о нелинейных составляющих волновой картины в ВУС вновь был применен биспектральный анализ (рис. 4). Многочисленные пики на рис. 4 показывают нелинейную генерацию гармоник основных волн (6 кГц и 7,3 кГц), а также волн с различными комбинационными частотами.

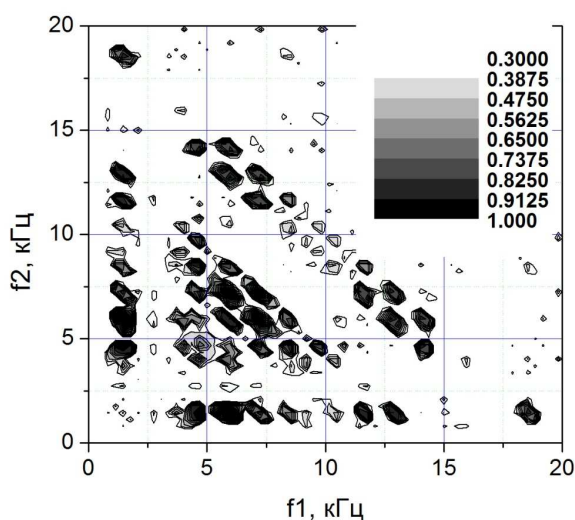


Рис. 4. Спектр бикогерентности расчетных данных для двух источников возмущений с $f_1 = 6$ кГц и $f_2 = 7,3$ кГц

4. Заключение. В работе приведены данные численного моделирования развития возмущений в гиперзвуковом ударном слое на пластине под углом атаки при больших числах Маха ($M = 21$) и умеренных числах Рейнольдса $Re_L = 1.44 \times 10^5$.

Впервые для возмущений в гиперзвуковых ударных слоях выполнен биспектральный анализ массивов расчетных и экспериментальных данных для выявления нелинейного взаимодействия возмущений.

В случае взаимодействия ВУС с начальными возмущениями высокой амплитуды одновременно на двух частотах показано появление комбинационных частот — суммарных и разностных — и их взаимодействие друг с другом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №09-08-00679), АЦВП (проекта №2.1.1/3963) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН №11 (проект №9).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кудрявцев А. Н., Поплавская Т. В., Хотяновский Д. В. Применение схем высокого порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений // Мат. Моделирование. 2007. Т. 19. № 7, С. 39–55.
- [2] Кудрявцев А. Н., Миронов С. Г., Поплавская Т. В., Цырюльников И. С. Экспериментальное исследование и прямое численное моделирование развития возмущений в вязком ударном слое на плоской пластине // ПМТФ. 2006. Т.47. № 5. С. 3–15.

Bountin D., Poplavskaya T. *Bispectral analysis application to calculation result of waves evolution in hypersonic shock layer*. Results of calculation research of nonlinear wave processes are presented for hypersonic shock layer on a flat plate with introduction of the artificial disturbances (blowing-suction type) entered into a shock layer from a surface. For nonlinear interaction detection a bispectral analysis has been applied to the experimental and calculation data.

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ

Ватульян А. О.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ*

Обсуждены различные способы организации итерационных процессов при решении нелинейных некорректных задач по восстановлению неоднородных характеристик твердых тел с помощью процедуры акустического зондирования. Первый из них опирается на традиционную процедуру типа Ньютона и вычисление производных по Фреше от исходных операторов. Такой подход сочетает процедуру решения прямых задач и обращение вполне непрерывного оператора с помощью метода А. Н. Тихонова. Второй подход основан на сочетании решения прямой задачи и задачи Коши для дифференциального оператора первого порядка. Проведен сравнительный анализ подходов, представлен пример о нахождении модуля сдвига в слое.

1. Введение. Модели неоднородных сред все чаще используются при моделировании в различных областях математической физики [1, 2]. При этом расчеты физических полей в неоднородных средах требуют использования не только современных вычислительных технологий, но и знания функций, задающих неоднородность. Идентификация неоднородных свойств твердых тел по данным акустического зондирования — одна из важнейших задач современной механики материалов и технической диагностики. Примерами материалов, для которых существенным является учет неоднородности и микроструктуры, являются композиты различного типа, геологические породы, твердые пористые и пенные материалы, наноструктуры, биологические ткани, функционально-градиентные материалы. Для них характеристики среды являются функциями, а коэффициенты дифференциальных операторов (модули упругости, плотность, теплофизические характеристики, пьезомодули) определяются чаще всего на основе решения простейших одномерных обратных задач для стержневых или слоистых структур. Среди линейных операторов с переменными коэффициентами, для которых получены результаты по реконструкции одномерных неоднородностей, отметим операторы линейной изотропной теории упругости [3–5], теплопроводности [6], обыкновенные дифференциальные операторы, описывающие колебания стержней при продольных, крутильных и изгибных колебаниях [7, 8]. Для восстановления искомого функции координат, характеризующих свойства среды, требуется решать обратные коэффициентные задачи для дифференциальных операторов [3, 8]. Наиболее распространенным способом исследования является анализ динамического отклика на возмущение, что приводит к анализу краевых задач, описывающих колебания исследуемого объекта при варьировании граничных условий и частоты колебаний. При этом в качестве исходной информации выступают данные измерений граничных или внутренних полей в некотором наборе точек при варьировании

режима нагружения. В настоящее время сформулированы различные постановки обратных задач, предложены итерационные схемы исследования, разработаны экономичные вычислительные процедуры построения решений, основанные на регуляризованных подходах [9, 10].

Отметим, что наибольшую сложность представляет собой построение операторных уравнений, связывающих искомые и измеряемые функции. Различие в характере доступной экспериментальной информации—задание полей внутри области или на части ее границы, приводит к различным постановкам, кардинально отличающимся друг от друга. Отметим, что к настоящему времени достаточно подробно изучена простейшая постановка, в которой известны компоненты поля всюду внутри области [9]. Такая постановка приводит к простым линейным операторным соотношениям при исследовании обратной задачи, решение которой строится на основе либо анализа задачи Коши, либо на основе конечномерных аппроксимаций и метода регуляризации. Главную трудность на этом пути в практическом плане представляет собой вычисление неограниченных операторов от функций, заданных в дискретном наборе точек. Обычно простейшим способом преодоления этой вычислительной трудности является техника сплайн-аппроксимаций.

Другая постановка, в которой известны лишь граничные поля в некотором диапазоне изменения частоты, гораздо более сложна, приводит к нелинейным операторным уравнениям, которые содержат промежуточные переменные-компоненты физических полей. Задачи в такой постановке могут быть исследованы лишь на основе некоторых итеративных процедур, основные принципы построения которых опираются на метод линеаризации и обобщенное соотношение взаимности, либо на слабую постановку [9]. Однако комбинирование идей по обращению соответствующих операторов, возникающих естественным образом при исследовании первой и второй постановок позволяет формировать новые принципы построения итерационных процессов в обратных коэффициентных задачах, что и изложено в настоящей работе.

2. Постановка задачи и построение итерационного процесса.

Рассмотрим в области $V \subset R^n, n = 2, 3$ с кусочно-гладкой границей S операторное уравнение дивергентного типа, характеризующее режим установившихся колебаний с частотой ω

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{mj} &= C_{mjkl} u_{k,l}, \\ u_i |_{S_u} &= 0, \sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = p_i \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь C_{ijkl} — компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат и удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности, ρ — плотность, n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности S . Отметим, что постановка (1) при известных законах изменения модулей и плотности есть классическая смешанная задача неоднородной теории упругости в случае установившихся колебаний и достаточно подробно изучена в литературе в рамках общих спектральных постановок для эллиптических операторов с параметром. Для таких задач разработаны эффективные численные методы решения, опирающиеся на конечноэлементные и разностные аппроксимации. В обратной задаче требуется определить

не только поля смещений, но и законы изменения модулей упругости (иногда и плотности) по некоторой дополнительной информации, в частности, по следам решений (смещений) на граничных поверхностях. Дополнительная информация, по которой осуществляется реконструкция неизвестных физических характеристик, представима в форме

$$u_i |_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \omega \in [\omega_-, \omega_+] \quad (2)$$

и задает общую информацию о граничных полях смещений, которые доступны для непосредственного измерения в некотором частотном диапазоне (возможно, в дискретном наборе точек). Совместная постановка (1)–(2) приводит в простейшей ситуации к обратной задаче об отыскании функций смещений $u_i(x)$ и $\lambda(x), \mu(x)$ — параметров Ляме.

Для получения аналитических соотношений, связывающих заданные и искомые функции в обратных коэффициентных задачах, которые, как правило, являются нелинейными, ранее наиболее часто использовался метод линеаризации [3, 4], причем для реализации итерационного процесса необходимо обращать дифференциальные операторы в частных производных с переменными коэффициентами, что практически невозможно для произвольных видов зависимостей. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Относительно компонент вектора смещений оператор задачи есть оператор второго порядка, а относительно неизвестных функций Ляме — первого. Это соображение позволяет предложить следующую реализацию итерационного процесса. Опишем двухэтапную процедуру его реализации для задачи теории упругости. Задается некоторое начальное приближение функций, характеризующих законы изменения модулей Ляме $\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$, учитывающее априорную информацию о их верхних и нижних границах, которые обычно известны (часто начальное приближение выбирается и среди линейных функций, коэффициенты которых определяются из условия минимизации функционала невязки). На первом этапе решается краевая задача относительно компонент перемещений $u_i^{(n)}$ с известными функциями Ляме (возможно постоянными), но с иным граничным условием на части S_σ

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + \rho\omega_n^2 u_i^{(n)} = 0, \sigma_{mj}^{(n)} = \lambda^{(n-1)} u_{k,k}^{(n)} \delta_{mj} + \mu^{(n-1)} (u_{j,m}^{(n)} + u_{m,j}^{(n)}), \quad (3)$$

$$u_i^{(n)} |_{S_u} = 0, u_i^{(n)} |_{S_\sigma} = f_i(x, \omega_n)$$

На следующем этапе при известных компонентах смещений $u_i^{(n)}$, найденных на предыдущем этапе, решается задача Коши, что приводит к системе уравнений в частных производных первого порядка, относительно $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$ следующего вида

$$(\lambda^{(n)} u_{k,k}^{(n)} \delta_{mj} + \mu^{(n)} (u_{j,m}^{(n)} + u_{m,j}^{(n)}))_{,j} + \rho\omega_n^2 u_i^{(n)} = 0 \quad (4)$$

$$(\lambda^{(n)} u_{k,k}^{(n)} \delta_{mj} + \mu^{(n)} (u_{j,m}^{(n)} + u_{m,j}^{(n)})) n_j |_{S_\sigma} = p_m$$

Её решение может быть построено как аналитическими средствами на основе нахождения первых интегралов [11], так и численно с помощью разностных аппроксимаций. Главная сложность на этом этапе — вычисление градиентов функций, найденных численно в наборе точек. Обычно регуляризованное вычисление неограниченных операторов осуществляется при помощи сплайн-аппроксимаций [13].

3. Пример. Рассмотрим реализацию предлагаемого подхода в одномерной обратной задаче о нахождении модуля сдвига неоднородного слоя толщины h .

Постановка задачи о нахождении функций $u(x_1, x_2)$, $\mu(x_2)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \rho \omega^2 u = 0 \quad (5)$$

$$u|_{x_2=0} = 0; \mu \frac{\partial u}{\partial x_2} |_{x_2=h} = p; u|_{x_2=h} = f(x_1, \omega); \omega \in [\omega_-, \omega_+]$$

Применяя к задаче преобразование Фурье по координате x_1 и далее полагая параметр преобразования равным нулю, и обезразмеривая и вводя $g(x) = \mu(x)\mu_0^{-1}$, $U(x, k) = \tilde{u}(0, x_2, \omega)h^{-1}$, $k^2 = \rho_0\omega^2h^2\mu_0^{-1}$, получим краевую задачу относительно пары функций $U(x, k)$, $g(x)$

$$(g(x)U'(x, k))' + k^2U(x, k) = 0 \quad (6)$$

$$U(0, k) = 0; g(1)U'(1, k) = 1, U(1, k) = f(k), k \in [k_-, k_+]$$

В этом случае реализация двухэтапного итерационного процесса в соответствии с общей схемой (3), (4) основана на исследовании двух задач, из которых первая — краевая задача

$$(g_{n-1}(x)U'_n(x))' + k_n^2r(x)U_n(x) = 0; U_n(0, k) = 0; U_n(1) = f(k_n) \quad (7)$$

а вторая — задача Коши

$$(g_n(x)U'_n(x))' + k_n^2r(x)U_n(x) = 0; g_n(1)U'_n(1) = 1 \quad (8)$$

которая в этом случае имеет аналитическое решение

$$g_n(x) = (U'_n(x))^{-1} \left(1 + k_n^2 \int_x^1 r(\xi)U_n(\xi)d\xi \right) \quad (9)$$

Здесь $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ некоторая последовательность точек из отрезка $[k_-, k_+]$. Реализация итерационного процесса на основе (7), (9) позволяет строить решение обратной задачи.

Замечание. Обычно при решении обратных задач имеется априорная информация вида $g_- \leq g(x) \leq g_+$; тогда в качестве начального приближения рекомендуется выбирать $g_0 = g_+$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00194-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
- [2] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд. МГУ, 1990. 312 с.

- [3] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [4] *Ватульян А. О.* О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Доклады РАН. 2008. Т. 422. № 2. С. 182–184.
- [5] *Chen J. and Gockenbach M. J.* A variational method for recovering planar Lamé moduli // Math. Mech. Solids 2002. № 7. P. 191–202.
- [6] *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 24–30
- [7] *Jimenez R. D., Santos L. C., Kuhl N. M., Egana J. C., Soto R. L.* An inverse eigenvalue procedure for damage detection in rods // J. Computers and Mathematics with Applications. 2004. V. 47. № 4–5. pp. 643–657.
- [8] *Бочарова О. В., Ватульян А. О.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал 2009. Т. 55. № 3. С. 281–288.
- [9] *Ватульян А. О.* О некоторых постановках обратных коэффициентных задач для линейных операторов // Известия вузов. Сев. кавк. рег. Сер. Естественные науки, спецвыпуск «Актуальные проблемы механики». 2009. С. 50–54.
- [10] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
- [11] *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.-Л.: ГИТТЛ, 1934. 181 с.
- [12] *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
- [13] *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.

Vatulyan A. O. *Iterative processes in inverse coefficient problems.* Various methods of organization of iterative processes at the solution of nonlinear ill-conditioned problems on recovery of nonuniform characteristics of rigid bodies by means of procedure of acoustical sounding are considered. First of them rely on traditional procedure of type of Newton and scaling of derivatives on Frechet from initial operators. Such approach combines procedure of the solution of direct problems and a reversion of a completely continuous operator with the help of A. N. Tikhonov's regularization procedure. The second approach based on a combination of the solution of a direct problem and the solution of a Cauchy problem for a differential operator of the first order. The comparative analysis of approaches is carried out, various instances are presented.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д., Саакян Я. Г.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлены различные постановки задач об идентификации существенно неоднородного предварительного напряжённого состояния для различных канонических моделей в режиме установившихся колебаний (плоская деформация прямоугольного бруса, изгиб балки, осесимметричная деформация круговой области). Изложены различные способы формирования итерационных процессов, основанные как на традиционной схеме типа Ньютона, так и на попеременном решении прямой задачи и задачи Коши для дифференциальных операторов первого порядка. Приведены примеры реконструкции, обсуждены некоторые аспекты численной реализации.

Введение. Задачи об идентификации предварительного напряжённого состояния относятся к коэффициентным обратным задачам и имеют приложения в совершенствовании методик неразрушающего контроля в различных областях: горной механике и геофизике, биомеханике, идентификации сложных композиционных материалов, медицинской диагностике мягких тканей и определении уровня предварительных напряжений в аварийных конструкциях [1–3]. При этом отметим, что для определения уровня однородного предварительного напряжённого состояния разработано множество методов, таких как метод отверстий, голографический, тензометрический, рентгеновский методы и методы акустоупругости [4].

В случае же неоднородного предварительного напряжённого состояния, которое возникает в области различных дефектов (полостей, трещин, включений), проблема идентификации остаточных напряжений является существенно нелинейной некорректной задачей [3]. При этом главная трудность состоит в достаточно сложной процедуре построения общих операторных соотношений, связывающих искомые, характеризующие законы распределения компонент тензора предварительных напряжений, и измеряемые в ходе эксперимента функции – амплитудно-частотные характеристики точек тела на границе. В таких ситуациях не представляется возможным построить в явном виде достаточно общих представлений решений из-за переменности коэффициентов дифференциальных операторов. Поэтому основу решения прямых задач составляют либо аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для стержневых и пластинчатых конструкций), либо конечноэлементные или конечноразностные технологии (в случае более сложных объектов). При этом для эффективного построения решения обратных задач используются итерационные схемы, основанные обычно на методе линеаризации в окрестности некоторого напряжённого состояния.

Общая постановка задачи. В качестве объекта исследования рассмотрим некоторое упругое тело объёма V ограниченное поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$ с постоянными Ламе λ , μ и плотностью ρ . Будем считать, что в нем имеется некоторое неоднородное предварительное напряжённое состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений σ_{ij}^0 . Пусть колебания вызываются нагрузкой $p_j e^{i\omega t}$,

приложенной на части S_σ , а часть S_u закреплена. Линеаризованные уравнения колебаний после отделения временного множителя имеют вид [1, 3]:

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma_{mj}^0 \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u}), \quad u_i|_{S_u} = 0, \quad T_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i \tag{2}$$

где $\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$ — компоненты тензора малых деформаций.

В основу процедуры идентификации предварительных напряжений σ_{ij}^0 может быть положено изменение амплитудно-частотных характеристик точек тела. В качестве дополнительной информации в обратной задаче предлагается воспользоваться данными об измеряемых на границе S_σ компонент поля смещений f_i в зависимости от частоты колебаний $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$.

Плоская задача. Используя обычную технику, на основе общей постановки задачи (1)–(2) может быть получена слабая формулировка для двумерной области Ω в условиях плоского напряжённого состояния:

$$\int_{\Omega} (\lambda^* u_{k,k} v_{k,k} + 2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u})\epsilon_{ij}(\mathbf{v}) + u_{i,m}\sigma_{mj}^0 v_{i,j} - \rho\omega^2 u_i v_i) d\Omega - \int_{l_\sigma} p_i v_i dl = 0 \tag{3}$$

где $l = l_u \cup l_\sigma$ — граница области Ω , $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ — пробный вектор, компоненты которого удовлетворяют условию $v_i|_{l_u} = 0$, $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$.

1. Задача для прямоугольника. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу о колебаниях прямоугольной области $\Omega = [0, l] \times [-0.5h, 0.5h]$ с приложенной на верхней грани распределённой нормальной нагрузкой $q = q(x_1)$ и защемлённой левой границей (см. Рис. 1). При этом будем считать, что имеется одноосное предварительное напряжённое состояние $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_2)$. На основе слабой формулировки (3) осуществлено решение прямой задачи с помощью конечноэлементного пакета FreeFem++. Для оценки точности решения построено аналитическое решение аналогичной задачи о колебаниях тонкого стержня прямоугольного сечения при постоянных значениях параметров. Уравнения колебаний и соответствующие граничные условия были получены в [5]:

$$J(E + \sigma_{11}^0)w^{IV} - F\sigma_{11}^0 w'' - \rho F\omega^2 w = -\tilde{q} \tag{4}$$

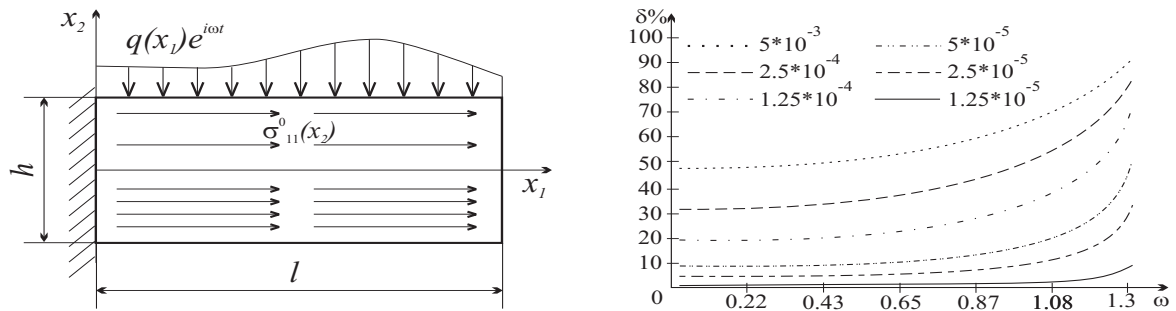


Рис. 1. Слева — исследуемая прямоугольная область Ω . Справа — график влияния величины однородного предварительного напряжения на смещение $u_2(l, 0)$ в области до 1-го резонанса (при $\frac{l}{h} = 5$, $q(x_1) = const$)

$$w(0) = w'(0) = w''(l) = 0, \quad (J(E + \sigma_{11}^0)w''' - F\sigma_{11}^0 w')|_{x_1=l} = 0 \quad (5)$$

где b — ширина поперечного сечения, $J = \frac{bh^3}{12}$ — осевой момент инерции, E — модуль Юнга, $F = bh$ — площадь поперечного сечения, $\tilde{q} = qb$ — величина распределённой нагрузки.

Сравнительный анализ двух решений прямой задачи показал, что для частот, находящихся ниже второго резонанса, относительная погрешность в узлах конечноэлементного решения $u_2(x_1, 0)$ и аналитического решения $w(x_1)$ составляет менее 0.15% при сетке разбиения 100×20 . Анализ влияния величины одноосного предварительного напряжения на амплитудно-частотные характеристики показал, что оно наиболее существенно в частотном диапазоне до первого резонанса, а также между первым и вторым резонансами (см. рис. 1).

Сформулированная обратная задача об идентификации предварительного напряжённого состояния является нелинейной задачей, при построении решения которой необходимо использовать итерационный процесс, основанный на методе линеаризации. Необходимое операторное соотношение, связывающее искомые поправки для компонент предварительных напряжений σ_{ij}^0 и заданные функции поля смещений f_i было получено в [3]. Для рассматриваемой прямоугольной области имеем:

$$\int_{-0.5h}^{0.5h} K(x_2, \omega) \delta\sigma_{11}^0(x_2) dx_2 = R(\omega), \quad \omega \in [\omega_1; \omega_2] \quad (6)$$

где $K(x_2, \omega) = \int_0^l ((u_{1,1}(x_1, x_2, \omega))^2 + (u_{2,1}(x_1, x_2, \omega))^2) dx_1$, $R(\omega) = \int_0^l q(x_1)(f_2(x_1, \omega) - u_2(x_1, 0.5h, \omega)) dx_1$

С помощью полученного уравнения был организован итерационный процесс для определения поправки $\delta\sigma_{11}^0$ по отношению к некоторому начальному состоянию. Отметим, что уравнение (6) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, для решения которого был использован метод регуляризации А.Н. Тихонова. На рис. 2 представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению следующих законов распределения предварительного одноосного напряжения (сплошная линия — исходный закон распределения предварительного напряжения, пунктир — начальное приближение, точки — восстановленный закон): 1) слева $\sigma_{11}^0(x_2) = (1 + 0.5(\frac{y}{h})^2)10^3$, начальное приближение $\sigma_{11}^0(x_2) = 1160 + 16y$, количество итераций — 2; 2) справа $\sigma_{11}^0(x_2) = (1 + 0.6\sin(\frac{\pi y}{h}))10^3$, начальное приближение $\sigma_{11}^0(x_2) = 1350$, количество итераций — 4. При проведении расчётов рассматривался частотный диапазон между первым и вторым резонансами; результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о достаточно эффективной процедуре реконструкции.

2. Задача для круга. Рассмотрим осесимметричную задачу об установившихся колебаниях круговой области Ω радиуса a под действием распределённой нагрузки p , приложенной на всей границе. При этом будем считать, что в полярной системе координат из компонент тензора предварительных напряжений отличны от нуля лишь компоненты σ_{rr}^0 и $\sigma_{\varphi\varphi}^0$. Введём следующие обозначения, полагая $u_r = u(r)$, $u_\varphi = 0$. Тогда ненулевыми будут следующие компоненты тензора T : $T_{rr} = \sigma_{rr} + u_{r,r}\sigma_{rr}^0$, $T_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u\sigma_{\varphi\varphi}^0$, а уравнение движения и граничное

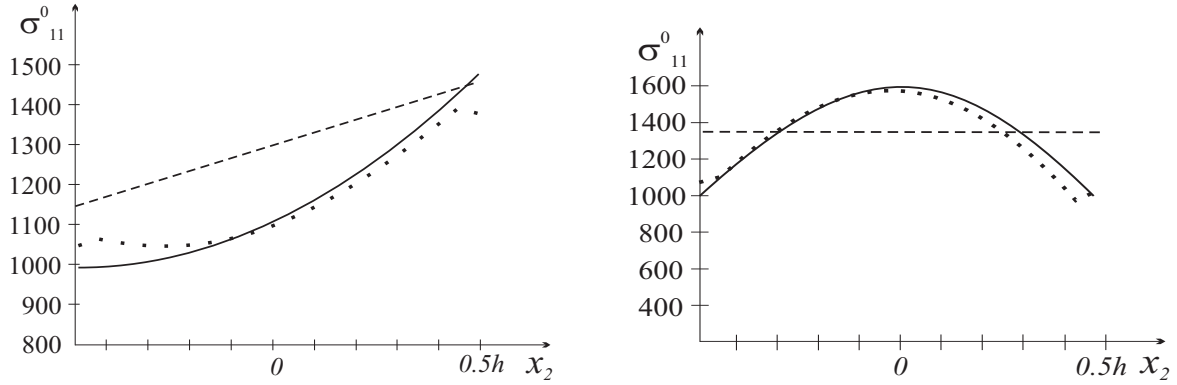


Рис. 2. Примеры восстановления $\sigma_{11}^0(x_2)$ (при $\frac{l}{h} = 5, q(x_1) = const$)

условие после введения безразмерных параметров и функций примут вид:

$$(1 + g)U'' + (g' + \frac{1 + g}{\xi})U' - (\frac{1 + g}{\xi^2} + \frac{g'}{\xi} - \chi^2)U = 0 \tag{7}$$

$$(1 + g')U' + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{U}{\xi} |_{\xi=1} = p^* \tag{8}$$

$$U|_{\xi=1} = f(\chi), \chi \in [\chi_-, \chi_+] \tag{9}$$

где $\xi = \frac{r}{a} \in [0; 1], u(r) = U(\xi)a, \chi^2 = \frac{\rho\omega^2 a^2}{\lambda + 2\mu}$ есть безразмерное волновое число, функция $g(\xi) = \frac{\sigma_{rr}^0}{\lambda + 2\mu}$ характеризует закон изменения предварительного напряжения, $p^* = \frac{pa}{\lambda + 2\mu}$, соотношение (9) выступает в качестве дополнительной информации о поле перемещений на границе при решении обратной задачи.

Для решения обратной задачи об идентификации предварительного напряжения σ_{rr}^0 может быть предложен следующий итерационный процесс: 1) на первом этапе выбирается некоторое начальное приближение σ_{rr}^0 , 2) далее решается прямая задача (7)–(9) по определению функции смещения U при некотором $\chi_1 \in [\chi_-, \chi_+]$, 3) решается задача (7)–(8) по определению функции g при вычисленной функции U , 4) процесс возобновляется для следующего значения параметра $\chi_2 \in [\chi_-, \chi_+] : \chi_2 > \chi_1$. Следует отметить, что основная трудность в предложенной схеме состоит в процедуре вычисления производных 1-го и 2-го порядка.

3. Задача для стержня. В качестве одного из важнейших примеров поставленной проблемы ранее в работах [5, 6] была изучена задача об установившихся изгибных колебаниях прямолинейного упругого изотропного стержня длины l под действием поперечной силы P с одноосным предварительным напряжённым состоянием σ_{11}^0 . Решение прямой задачи осуществлено путём сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. На основе такого подхода был проведён анализ влияния величины однородного предварительного напряжения на резонансные характеристики, который показал, что это влияние существенно для значений $\frac{\sigma_{11}^0}{E} \geq 10^{-4}$. В ходе итерационного процесса при решении обратной задачи была реализована процедура реконструкции монотонных функций изменения σ_{11}^0 . На каждом этапе для вычисления поправок $\delta\sigma_{11}^0$ находилось решение

интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова. Полученные результаты проведенных вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность определения предварительного напряженного состояния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по проекту 10-01-00194 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гузъ А. Н.* Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений // Прикладная механика. 1994. Т. 30, № 1. С. 3–17.
- [2] *Чернышев Г. Н., Попов А. Л., Козинцев В. М., Пономарев И. И.* Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996. 240 с.
- [3] *Ватульян А. О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Самар. ун-та. 2007. Вып. 54, № 4. С. 93–103.
- [4] *Гузъ А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И.* Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
- [5] *Ватульян А. О., Дударев В. В.* О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах // Изв. Саратов. ун-та. 2009. Т. 9, Вып. 4, Ч. 2. С. 25–32.
- [6] *Ватульян А. О., Дударев В. В.* О реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в стержне // Экологический вестн. научных центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 18–23.

Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Nedin R. D., Saakyan Ya. G. *On some problems of identification of residual stresses.* Different statements of identification essentially inhomogeneous prestressed state problem for a different canonical models in the regime of stationary vibrations are represented (plane deformation of a rectangular beam, bending of a beam, axisymmetric deformation of a circular area). Different ways of iterative process forming, based on both the traditional scheme of Newton type and the alternate forward solution and the Cauchy problem solution for first order differential operators, are expounded. Examples of reconstruction are presented, some aspects of numerical implementation are discussed.

ДИСЛОКАЦИИ В ЦИЛИНДРЕ С ВИНТОВОЙ РОМБОЭДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Ватульян К. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрены задачи о винтовой дислокации и клиновой дисклинации для полого цилиндра с винтовой ромбоэдрической анизотропией. Обе задачи на сечении сводятся к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Проведено численное интегрирование полученных краевых задач для различных углов крутки винтовой линии и различных значений отношения внутреннего и внешнего радиусов цилиндра. Построены графики напряжений в зависимости от τ (тангенса угла крутки) при фиксированном радиусе и наоборот, в зависимости от радиуса при фиксированном τ .

Работа посвящена решению задач о дислокации и дисклинации Вольтерры для полого цилиндра с винтовой ромбоэдрической анизотропией. Решение построено с помощью численного интегрирования однотипных краевых задач на сечении в соответствии с общей теорией задач Сен-Венана, изложенной в монографии [1]. Другие задачи Сен-Венана для цилиндра с таким же типом анизотропии исследованы ранее в [2]– [4].

Рассмотрим равновесие упругого полого цилиндра длины L с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 . С геометрическим центром одного из торцов цилиндра совместим начало декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$, направив ось Ox_3 по оси цилиндра. Эту систему координат будем называть основной. Для описания винтовой анизотропии введем винтовую цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , связанную с основной соотношениями:

$$x_1 = r \cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z, \quad (1)$$

где $\tau = \text{const}$, $\tau = \text{tg}\alpha$, α -угол наклона касательной к винтовой линии к оси цилиндра. При $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ соотношения (1) являются параметрическими уравнениями винтовой линии.

Материал цилиндра обладает тригональной сингонией класса 32 или 3m [5]. Матрица упругих постоянных в этом случае приведена в [4]. Будем считать, что боковые поверхности цилиндра свободны от напряжений. Рассмотрим две задачи.

1. Задача о винтовой дислокации.

Рассмотрим винтовую дислокацию, возникающую в результате разреза цилиндра по аксиальной плоскости и сдвига поверхностей разреза друг относительно друга вдоль оси x_3 на величину C_z .

Вектор смещений при обходе по любому замкнутому контуру, охватывающему центр кольца, претерпевает скачок, а компоненты тензоров деформаций и напряжений остаются однозначными функциями.

Решение сформулированной задачи будем искать в виде $\mathbf{u} = \mathbf{a}_0\theta + \mathbf{a}_1$, где

$$\mathbf{a}_0 = \left(0, 0, \frac{C_z}{2\pi}\right), \quad \mathbf{a}_1 = (a_r(r), 0, 0)$$

Тогда ненулевые компоненты тензора напряжений находятся в соответствии с законом Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= C'_{11}\partial_r a_r + C'_{12}\frac{a_r}{r} - C'_{13}\tau\frac{C_z}{2\pi} + C'_{14}\frac{C_z}{r2\pi} \\ \sigma_{\theta\theta} &= C'_{12}\partial_r a_r + C'_{22}\frac{a_r}{r} - C'_{23}\tau\frac{C_z}{2\pi} + C'_{24}\frac{C_z}{r2\pi} \\ \sigma_{zz} &= C'_{13}\partial_r a_r + C'_{23}\frac{a_r}{r} - C'_{33}\tau\frac{C_z}{2\pi} + C'_{34}\frac{C_z}{r2\pi} \\ \sigma_{\theta z} &= C'_{14}\partial_r a_r + C'_{24}\frac{a_r}{r} - C'_{34}\tau\frac{C_z}{2\pi} + C'_{44}\frac{C_z}{r2\pi}\end{aligned}\quad (2)$$

причем упругие характеристики C'_{ij} зависят от крутки τ и радиуса r и приведены в [4].

Учитывая уравнения равновесия и соответствующие граничные условия, а также закон Гука (2), для определения a_r имеем следующую краевую задачу

$$\begin{aligned}La_r &= p_1, \\ Ma_r|_{r=r_{1,2}} &= t_{1,2}\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}La_r &= \frac{d}{dr} \left(rC'_{11} \frac{da_r}{dr} + C'_{12}a_r \right) - C'_{12} \frac{da_r}{dr} - \frac{a_r}{r} C'_{22} \\ p_1 &= \frac{C_z}{2\pi} \left(\frac{d}{dr} (C'_{13}r\tau - C'_{14}) - \tau C'_{23} + C'_{24} \right) \\ Ma_r|_{r=r_{1,2}} &= C'_{11} \frac{da_r}{dr} + C'_{12} \frac{a_r}{r} \Big|_{r=r_{1,2}} \\ t_{1,2} &= \frac{C_z}{2\pi} \left(C'_{13}\tau - C'_{14} \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=r_{1,2}}\end{aligned}\quad (4)$$

2. Задача о клиновой дисклинации.

Рассмотрим задачу о равновесии цилиндра при наличии клиновой дисклинации, возникающей в результате разреза цилиндра по аксиальной плоскости и вставки клиновидного кусочка того же материала.

Для этой задачи вектор смещений будем отыскивать в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_0\theta + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_0 = (0, r, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (a_r(r), 0, 0)$$

Аналогично изложенному выше, для определения a_r получаем краевую задачу (3) с другими правыми частями:

$$\begin{aligned}La_r &= p_2, \\ Ma_r|_{r=r_{1,2}} &= f_{1,2}\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}p_2 &= \frac{C_\theta}{2\pi} \left(\frac{d}{dr} \left(C'_{14}r^2\tau - C'_{12}r \right) - C'_{22} + C'_{24}\tau r \right) \\ f_{1,2} &= \frac{C_\theta}{2\pi} \left(-C'_{12} + C'_{14}\tau r \right) \Big|_{r=r_{1,2}}\end{aligned}\quad (6)$$

Отметим, что (3) и (5) представляют собой однотипные краевые задачи для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и их решение может быть построено лишь численно.

3. Численные результаты

Для численного решения (3) сведем краевую задачу к интегрированию канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка, для чего введем следующие обозначения: $y_1 = a_r$, $y_2 = r\sigma_{rr}/C_{11}$. Тогда получим

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - s_{11}y_1 - s_{12}y_2 = q_{11} \\ \dot{y}_2 - s_{21}y_1 - s_{22}y_2 = q_{12} \end{cases} \quad (7)$$

где введены следующие обозначения

$$s_{11} = -\frac{C'_{12}}{rC'_{11}}, \quad s_{12} = \frac{1}{rC'_{11}}, \quad s_{21} = \frac{C'_{11}C'_{22} - C'^2_{12}}{rC'_{11}}, \quad s_{22} = \frac{C'_{12}}{rC'_{11}},$$

$$q_{11} = \frac{C_z}{2\pi} \left(C'_{13}\tau r - C'_{14} \right) \frac{1}{rC'_{11}}, \quad q_{12} = \frac{C_z}{2\pi} \left[\frac{C'_{12}}{C'_{11}} \left(C'_{13}\tau - \frac{1}{r}C'_{14} \right) - \left(C'_{23}\tau - \frac{1}{r}C'_{24} \right) \right].$$

Решение краевой задачи для системы находилось методом прогонки. Расчеты проводились для материала со следующими значениями модулей упругости (10^9 Па) [5]:

$$C_{11} = 86,8; C_{33} = 105,75; C_{44} = 58,2; C_{12} = 7,04; C_{13} = 11,91; C_{14} = -18,04.$$

На рис. 1 приведены графики компонент напряжений σ_{zz} и $\sigma_{z\theta}$, отнесенных к C_z в зависимости от параметра $\xi = \frac{r}{r_2}$ при фиксированном угле крутки α .

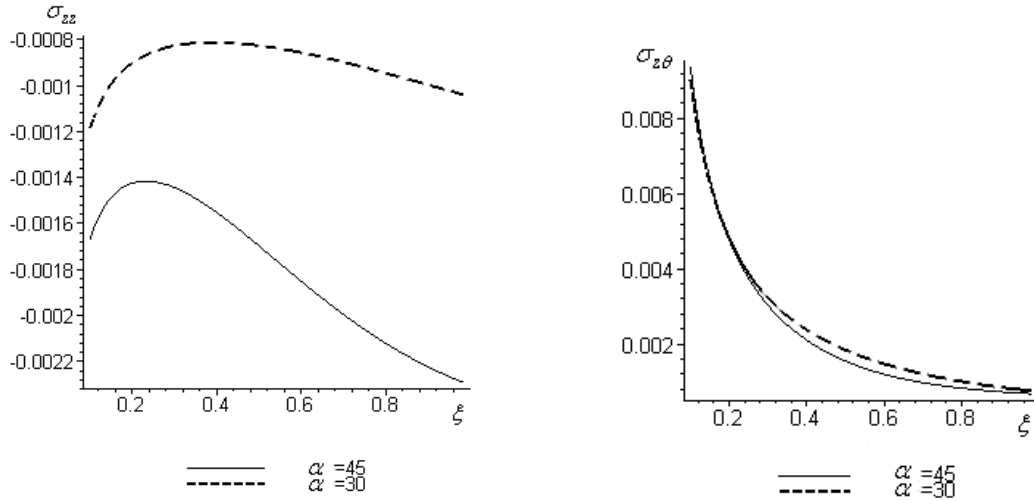


Рис. 1.

Отметим, что результаты расчетов в первой задаче показали, что компонента тензора напряжений σ_{zz} имеет экстремум, а компонента $\sigma_{z\theta}$ монотонно убывает.

На рис. 2 приведен график компоненты напряжений $\sigma_{z\theta}$, отнесенной к C_z , в зависимости от угла α при фиксированном параметре $\xi = r_1 + 0,8(r_2 - r_1)$. По графику видно, что она немонотонна.

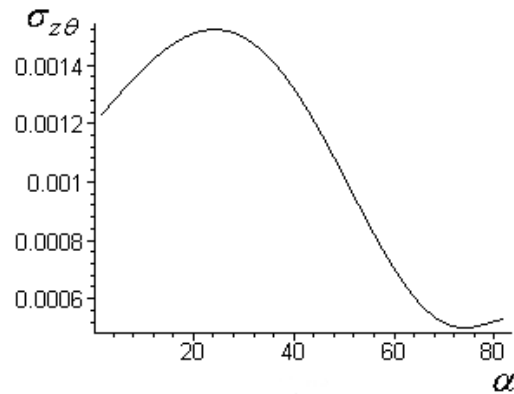


Рис. 2.

Аналогичный численный анализ проведен для задачи 2. Краевую задачу (5) приводим к аналогичной системе дифференциальных уравнений с другими правыми частями:

$$q_{21} = \frac{C_\theta}{2\pi C'_{11}}(C'_{14}\tau r - C'_{12}), \quad q_{22} = \frac{C_\theta}{2\pi} \left(C'_{22} - C'_{24}\tau r + \frac{C'_{12}(C'_{14}\tau r - C'_{12})}{C'_{11}} \right)$$

Полученные графики компонент напряжений σ_{zz} и $\sigma_{z\theta}$ в зависимости от параметра ξ , отнесённых к C_θ , монотонны.

На рис. 3 приведен график компоненты напряжений $\sigma_{z\theta}$ в зависимости от параметра α при различных значениях текущего радиуса. Как мы видим, компонента напряжения $\sigma_{z\theta}$ не монотонна.

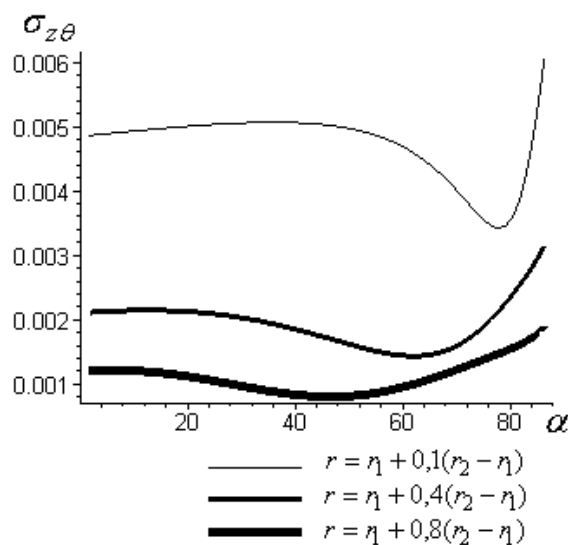


Рис. 3.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00065а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Физматлит. 2003. 128 с.
- [2] Ватульян К. А., Устинов Ю. А. Задача Сен-Венана для графитовых стержней и углеродных нанотрубок // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X международной конференции. Ростов-на-Дону, 5-9 декабря 2006 г. ЦВВР. 2007. С. 299–303
- [3] Ватульян К. А., Устинов Ю. А. Задача Сен-Венана кручения цилиндрического анизотропного стержня // Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика. Труды V школы-семинара. Ростов-на-Дону, 18-21 декабря 2006 г. ЦВВР. 2007. С. 56–58
- [4] Ватульян К. А., Устинов Ю. А. Задача Сен-Венана для тел с винтовой ромбоэдрической анизотропией. Задачи растяжения–кручения // ПМТФ. 2010. Том 51. № 1. С. 125–133
- [5] Шаскольская М. П. Кристаллография. М.:Наука. 1984.

Vatulyan K. A. *Dislocations in the cylinder with screw rhombohedral anisotropy.* Problems about screw dislocation and wedge disclinations for the hollow cylinder with screw rhombohedral anisotropy are observed. Both problems on cross-section are reduced to system of differential first-order equations. The numerical integration of the gained boundary value problems for various angles of twist of spiral line and various values of the ration of interior and exterior radiuses of cylinder is spent. Graphs of stresses depending on τ (an angle tangent twist) are built at the fixed radius and on the contrary, depending on radius at fixed τ .

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ СВОЙСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ КОМПОЗИТОВ

Вернигора Г. Д.^{*}, Еремеев В. А.^{**,***}, Соловьев А. Н.^{*,**,***}

^{*}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

^{**}Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

^{***}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Предложены методы определения эффективных характеристик пористых материалов (низкопористых металлических пен) на основе аналитического решения ряда модельных задач для сплошных тел и конечно-элементного моделирования пористых материалов в комплексе ACELAN. Для достижения этой цели разработано специальное программное обеспечение. Проведены тестовые расчеты на основе которых построены полиномиальные зависимости эффективного модуля упругости от процента пористости.

1. Введение. Композиционные материалы широко применяются в различных областях промышленности, это обуславливает интерес отечественных и зарубежных исследователей по изучению их эффективных свойств и характеристик конструкций и приборов с их использованием. Одним из путей получения новых свойств материалов является дизайн новых композиционных материалов, состоящих из нескольких фаз. Пористые материалы являются одним из видов композитов и проявляют в некоторых приложениях более высокие характеристики, чем сплошные (например, пористая пьезокерамика). Еще одним перспективным материалом для современного авиа- и машиностроения являются металлические пены. Поэтому проблемы получения, дизайна, моделирования пен и конструкций на их основе весьма актуальны в настоящее время. Одним из способов расчета конструкций содержащих композитные материалы является их замена некоторыми сплошными материалами с эффективными свойствами. Результаты исследования пен подытожены в ряде книг [1]– [8]. Здесь рассматривались как вопросы получения, так и построения различных моделей пен, рассматривались механические свойства, решались некоторые задачи, в частности, изгиба трехслойных панелей (сэндвичей) [1], [4].

Целью настоящей работы является методов определения эффективных характеристик пористых материалов (низкопористых металлических пен) на основе аналитического решения ряда модельных задач для сплошных тел и конечно-элементного моделирования пористых материалов в комплексе ACELAN. Для достижения этой цели разработано специальное программное обеспечение.

2. Моделирование в ACELAN. Рассмотрим низкопористую металлическую пену, которую будем описывать в рамках линейной теории упругости [9]. При моделировании пористого материала, поры будем связывать с отдельными конечными элементами, модуль упругости в которых, на несколько порядков (описывается коэффициентом понижения свойств) ниже, чем в материале. При таком способе моделирования первым шагом расчетов является установление величины коэффициента понижения (обычно $10^{-4} - 10^{-5}$) и размера конечно-элементной сетки

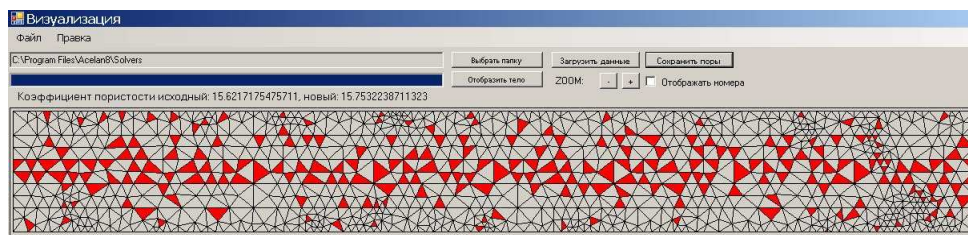


Рис. 1. Распределение пор в 15.7% функционально градиентном композите.

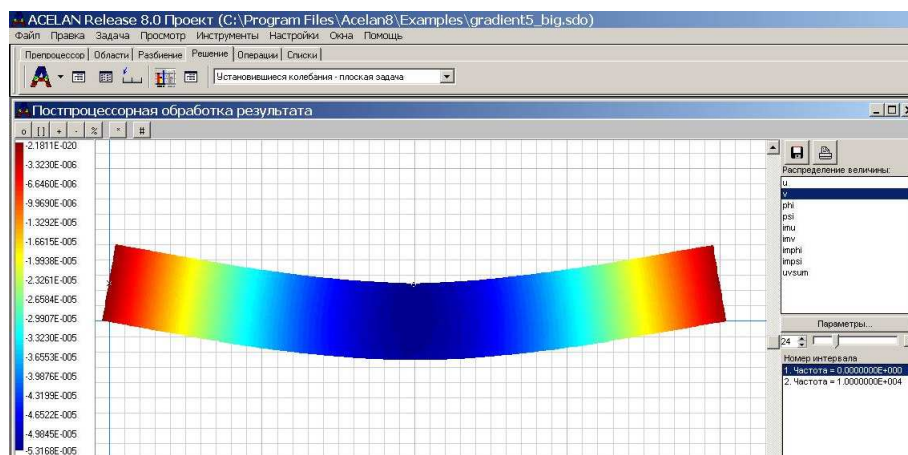


Рис. 2. Распределение вертикального смещения на деформированном состоянии области.

(зависит от выбранного представительного объема или конструкции), при которых на результаты расчета не влияют значение этого коэффициента и вида конечно-элементного разбиения. На рис.1, представлены распределения пор в функционально градиентном композите (окно визуализации композита в ACELAN), а на рис. 2 распределение вертикальной компоненты вектора смещения при изгибе (окно постпроцессора ACELAN).

Различают два типа структур пен: открытые и закрытые ячейки. Для высокопористых пен с указанными структурными различиями в литературе известны следующие эмпирические формулы:

в случае открытых ячеек

$$\frac{E_f}{E_s} = c \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right)^2 \quad (1)$$

в случае закрытых ячеек

$$\frac{E_f}{E_s} = \Phi^2 \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right)^2 + (1 - \Phi) \frac{\rho_f}{\rho_s} \quad (2)$$

где E_f — модуль Юнга пены, E_s — модуль Юнга материала, ρ_f — плотность пены, ρ_s — плотность материала, эмпирические коэффициенты $c \approx 1$, $\Phi = 0.6 - 0.8$.

Рассматривается применение и модификацию формулы (2) для пористого металлического материала с объемным процентным содержанием пор до 40%. для случая пористого композита нерегулярной структуры. Положение пор считается случайным с равномерным распределением по объему материала. Конечно-

элементное моделирование пористого композита проводится в специализированном комплексе ACELAN, предназначенном для расчета пьезоэлектрических устройств, которые моделируются составными упругими, электроупругими и акустическими средами. Структура комплекса такова, что имеется возможность встраивать пользовательские “решатели”. Реализованные в работе решатели позволяют моделировать нерегулярные композиты.

3. Определение эффективных свойств. В качестве задачи, имеющей аналитическое решение, рассматривается цилиндрический изгиб пластины шарнирно опертой по двум противоположным сторонам, находящейся под действием равномерного давления; эта краевая задача описывается следующим дифференциальным уравнением

$$D\Delta^2 w = Q \quad (3)$$

и граничными условиями:

$$\text{при } x = 0 \quad w = 0, M_x = 0; \text{ при } x = l \quad w = 0, M_x = 0$$

где w — прогиб, $D = \frac{E_f \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, Q — равномерно распределенная нагрузка, E_f — модуль Юнга пористого материала, h — толщина пластины, μ — коэффициент Пуассона $M_x = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ — момент.

Решение задачи в случае цилиндрического изгиба ищется в виде: $w = w(x)$ и имеет вид

$$w = -\frac{Q \cdot x \cdot (\mu^2 - 1)(x^3 - 2lx^2 + l^3)}{2E_f h^3} \quad (4)$$

Прогиб в центре пластины при $x = l/2$ имеет вид

$$w = -\frac{5}{13} \cdot \frac{Q \cdot (\mu^2 - 1) \cdot l^4}{E_f \cdot h^3} \quad (5)$$

Соотношение (5) является разрешающим для нахождения эффективного модуля Юнга при заданном коэффициенте Пуассона. Для одновременного определения эффективных модуля Юнга и коэффициента Пуассона возможно рассмотреть задачу растяжения прямоугольной плиты при приложении равномерного напряжения к ее торцу.

Далее рассматривается задача об изгибе прямоугольной области (плоская деформация) с нерегулярным распределением пор, ее решение проводится в конечно-элементном комплексе ACELAN для двух материалов пористой пластины — алюминия и титана. При этом, $h = 10^{-1}$ м, $l = 1$ м, $Q = 1000$ Па, для алюминия $\mu = 0.3$, $E_e = 6.9 \cdot 10^{10}$ Па, для титана $\mu = 0.32$, $E_e = 11.2 \cdot 10^{10}$ Па.

Результаты расчета соотношения E_f/E_s для различного процентного содержания пор на основе соотношения (5) и конечно-элементного расчета прогиба пластины представлены на рис. 3 (кривые 1 и 2 для алюминия и титана соответственно). Следует отметить, что в этой области соотношения (2) приводят к значительным погрешностям (кривые 3 и 4 на рис. 3 при $\Phi = 0.6$ и $\Phi = 0.8$).

Далее предполагается, что зависимость E_f/E_s от коэффициента пористости можно описать при помощи функции

$$\frac{E_f}{E_s} = F(X(k)) = A \cdot X^3(k) + B \cdot X(k) \quad (6)$$

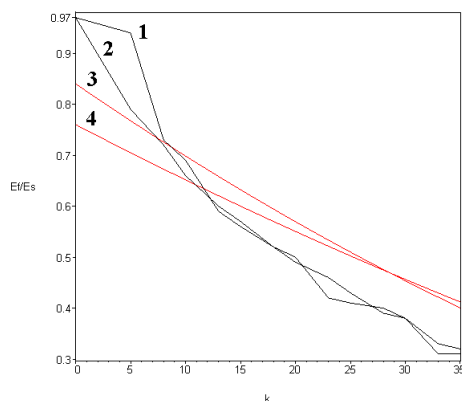


Рис. 3. Расчетные значения E_f/E_s и найденные по формуле (2).

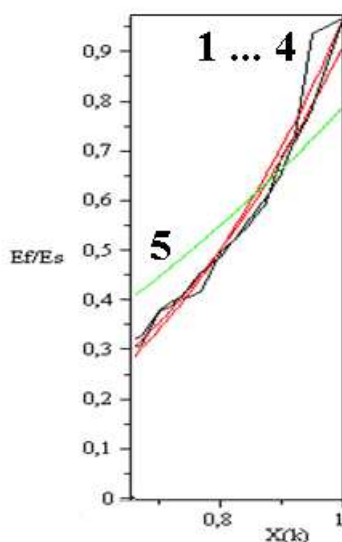


Рис. 4. Аппроксимация E_f/E_s кубическим многочленом (6).

где $X(k) = 1 - \frac{k}{100}$; k — коэффициент пористости в процентах; A , B — коэффициенты многочлена, которые находятся при помощи метода наименьших квадратов.

На рис. 4 представлены расчетные зависимости и аппроксимированные по формуле (6) соотношения E_f/E_s (кривые 1...4) и вычисленные по формуле (2) при $\Phi = 0.7$ (кривая 5).

4. Выводы. На основе сочетания аналитического решения задач о цилиндрическом изгибе пластин и конечно-элементным решением задач для пористых тел разработан метод определения эффективных характеристик пористого материала. Проведены численные эксперименты для низкопористых металлических пен с объемным процентным содержанием пор до 40% с их случайным равномерным распределением. На основе численных расчетов построены приближенные полиномиальные зависимости модуля Юнга от объемной доли металла. Предложены способы определения эффективных модуля Юнга и коэффициента Пуассона на ос-

нове статической эквивалентности представительных объемов композита и сплошного материала.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-01-00194-а, 10-08-00093-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *M. F. Ashby, A. G. Evans, N. A. Fleck, L. J. Gibson, J. W. Hutchinson, H. N. G. Wadley.* Metal Foams: a Design Guid, Butterworth-Heinemann, Boston, 2000.
- [2] *J. Banhart, M. F. Ashby, N. A. Fleck (Eds.)* Metal Foams and Porous Metal Structures, Verlag MIT Publishing, Bremen, 1999.
- [3] *H. P. Degischer, B. Kriszt (Eds.)*. Handbook of Cellular Metals. Production, Processing, Applications, Wiley-VCH, Weinheim, 2002.
- [4] *L. J. Gibson, M. F. Ashby* Cellular Solids: Structure and Properties, 2nd Edition, Cambridge Solid State Science Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] *D. Klempner, V. Sendjarevic (Eds.)* Handbook of Polymeric Foams and Foam Technology, 2nd Edition, Hanser, Munich, 1992.
- [6] *A. H. Landrock (Ed.)*. Handbook of Plastic Foams. Types, Properties, Manufacture and Applications, Noes Publications, Park Ridge, New Jersey, 1995.
- [7] *S. Lee, N. Ramesh (Eds.)*. Polymeric Foams. Mechanisms and Materials, CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [8] *N. Mills*. Polymer Foams Handbook. Engineering and Biomechanics Applications and Design Guide, Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 2007.
- [9] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Vernigora G. D., Eremeyev V. A., Soloviev A. N. *Identification properties of FGM composites.* In this paper we propose methods for determining the effective properties of porous materials (low-porous metal foams), based on analytical solutions of several model problems for solid-body and finite element modeling of porous materials in a FEM package ACELAN. To achieve this, the special software. The test calculations on the basis of which a polynomial dependence of the effective modulus of elasticity of the percentage of porosity.

ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ЛЭМБА В СЛОИСТЫХ УПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Глушков Е. В.*, Глушкова Н. В.*, Ламмеринг Р.**,
Еремин А. А.*, Нойманн М.-Н.**

*Кубанский государственный университет, Краснодар

**Helmut-Shmidt Universität, Гамбург, Германия

В работе приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований распространения и дифракции волн Лэмба, возбуждаемых поверхностными пьезоактуаторами, в слоистых упругих материалах, содержащих трехмерные внутренние и поверхностные неоднородности (дефекты). Задача определения неизвестного поля, отраженного препятствием, сводится к граничным интегральным уравнениям (ГИУ) с матричным ядром — слоистым элементом для рассматриваемого упругого волновода. В случае поверхностной неоднородности для решения ГИУ используется вариационно-разностный подход с осесимметричной сплайн-аппроксимацией неизвестной вектор-функции. Решение ГИУ для внутреннего препятствия строится с использованием техники метода граничных элементов. Проведено сопоставление численных результатов с данными экспериментальных измерений, показавшее эффективность разработанной модели; определены оптимальные параметры пьезоисточников.

1. Одним из перспективных подходов к решению задач неразрушающего контроля конструкций из слоистых упругих материалов является использование методов, основанных на применении упругих волн Лэмба. Они распространяются на большое расстояние от источника колебаний практически без затухания и взаимодействуют с неоднородностями любого вида, что позволяет судить о наличии и характере повреждений в исследуемой структуре. В качестве устройств, позволяющих возбуждать и улавливать волны Лэмба, в настоящее время широкое распространение получили пьезокерамические преобразователи. Их малая толщина и вес позволяют осуществить их монтаж на поверхность исследуемого образца, не нарушая его структуры и целостности. Кроме того, в качестве устройств, регистрирующих поверхностные упругие волны, хорошо зарекомендовали себя лазерные виброметры, использующие эффект Доплера.

2. Рассматриваются упругие колебания изотропного слоя толщины h , занимающего в системе координат (x, y, z) полубесконечную область $D : \{-\infty < x, y < \infty, -h \leq z \leq 0\}$. Источником колебаний служит тонкий вертикально поляризованный пьезоактуатор, контактирующий с поверхностью $z = 0$ по области Ω с центром в начале координат (рис. 1). С использованием принципа суперпозиции и обратного преобразования Фурье \mathcal{F}_t^{-1} нестационарные перемещения слоя $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ могут быть выражены через гармонические $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$ (частотный спектр). Комплексная амплитуда перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \{u_x, u_y, u_z\}$ (здесь и далее гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен) удовлетворяет уравнениям Ламе [1]. Внешние поверхности волновода $z = 0$ и $z = -h$ предполагаются свободными от напряжений

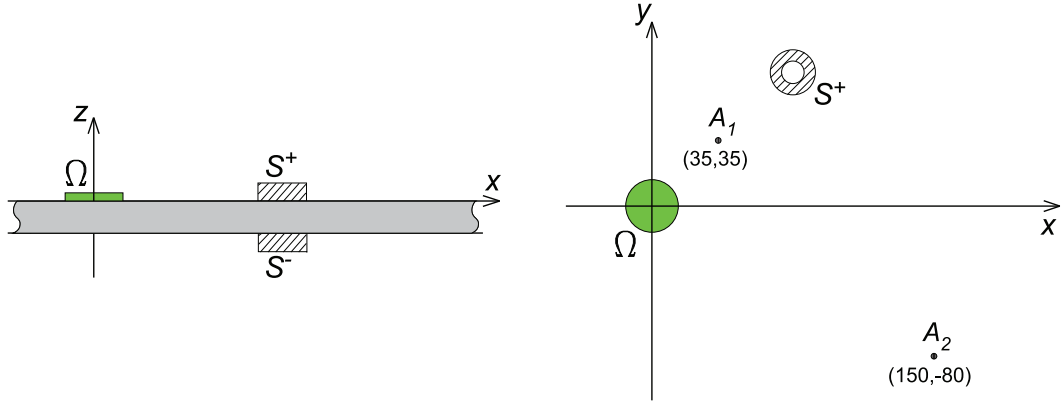


Рис. 1. Вид сбоку и вид сверху на упругую пластину с круглым пьезоактуатором, цилиндрическими препятствиями и точками наблюдения A_1 и A_2 .

$\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$ за исключением области Ω , в которой действие актуатора моделируется нагрузкой \mathbf{q}_0 , и областей контакта S^+ и S^- (в общем случае, многосвязных) с препятствиями, расположенными на поверхностях $z = 0$ и $z = -h$, соответственно. При экспериментальной верификации математической модели в качестве препятствий использовалось два постоянных магнита относительно большой массы, колебания которых, по сравнению с перемещениями свободной поверхности малы. В целом, наличие пьезоактуатора и поверхностных препятствий моделировалось следующими граничными условиями:

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}_0, & (x, y) \in \Omega \\ \mathbf{q}_s^+, & (x, y) \in S^+ \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \cup S^+ \end{cases}, \quad \boldsymbol{\tau}|_{z=-h} = \begin{cases} \mathbf{q}_s^-, & (x, y) \in S^- \\ 0, & (x, y) \notin S^- \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0, (x, y) \in S^+, \quad \mathbf{u}|_{z=-h} = 0, (x, y) \in S^- \quad (2)$$

В качестве внутренних объемных неоднородностей, ограниченных кусочно-гладкой поверхностью S , рассматривались полости ($\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{x} \in S} = 0$) или недеформируемые массивные включения ($\mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in S} = 0$). Экспериментальные измерения проводились в сравнительно низкочастотном диапазоне (до первой частоты отсечки). Сопоставление с результатами расчетов показало, что на таких частотах действие кругового пьезоактуатора ($\Omega : r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$) хорошо аппроксимируется радиальными касательными напряжениями, сосредоточенными на границе области Ω : $\tau_r = p_0 \delta(r - a)$ [2].

В рамках разработанного И. И. Воровичем и его учениками интегрального подхода [3, 4] поле \mathbf{u}_0 , возбуждаемое пьезоактуатором в волноводе без препятствий (поле источника), представимо в виде

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} k^+(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{q}_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K^+(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}_0(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (3)$$

где $K^+(\alpha_1, \alpha_2, z)$ и $\mathbf{Q}_0(\alpha_1, \alpha_2)$ — Фурье-символы матрицы Грина $k^+(\mathbf{x})$ для слоистой упругой среды с заданными на поверхности $z = 0$ напряжениями и нагрузки $\mathbf{q}_0(x)$ соответственно.

При наличии препятствий волновое поле \mathbf{u} ищется в виде суммы $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{sc}$, где \mathbf{u}_{sc} — поле, рассеянное неоднородностями. В случае поверхностных препятствий для поля \mathbf{u}_{sc} справедливо интегральное представление, аналогичное (3), но с неизвестными вектор-функциями контактных напряжений \mathbf{q}_s^+ , \mathbf{q}_s^-

$$\mathbf{u}_{sc}(\mathbf{x}) = \iint_{S^+} k^+(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{q}_s^+(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \iint_{S^-} k^-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{q}_s^-(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (4)$$

Подстановка соотношений (3) и (4) в граничные условия (2) приводит к системе интегральных уравнений относительно вектор-функций \mathbf{q}_s^+ , \mathbf{q}_s^- . Для решения ГИУ используется вариационно-разностный подход с осесимметричной сплайн-аппроксимацией [4].

В случае объемной неоднородности отраженное поле \mathbf{u}_{sc} ищется в виде:

$$\mathbf{u}_{sc} = \iint_S l(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (5)$$

Здесь $l(\mathbf{x})$ — слоистый элемент [5], то есть матрица 3×3 , столбцами которой являются перемещения, вызванные в рассматриваемом волноводе без дефекта элементарными сосредоточенными источниками заданными в точке $\boldsymbol{\xi}$; $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ — неизвестная плотность распределения, которая определяется при решении ГИУ, возникающего после подстановки соотношений (3) и (5) в граничные условия на поверхности S , с использованием метода граничных элементов в модификации, предложенной в работе [6]. Дискретизация интегрального представления (5) приводит к разложению по базисным функциям — слоистым элементам l_j :

$$\mathbf{u}_{sc} \approx \sum_{j=1}^N l_j(\mathbf{x}) \mathbf{c}_j \quad (6)$$

Неизвестные коэффициенты разложения \mathbf{c}_j определяются методом коллокаций или с помощью проекционной схемы Галеркина.

3. Для верификации разработанной математической модели проводилось сопоставление численных результатов с экспериментальными данными. Рассматривались нестационарные колебания под действием круглого пьезоактуатора радиуса $a = 8$ мм упругой алюминиевой пластины ($v_s = 3122$ м/с, $\nu = 0.33$, $h = 1$ мм), на поверхностях которой расположены два постоянных магнита в форме цилиндров с толстыми стенками: $S^\pm : \{a_1 \leq r_s \leq a_2\}$, $r_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$, $a_1 = 3.5$ мм, $a_2 = 7$ мм, $(x_s, y_s) = (75, 75)$ мм (рис. 1). Пьезоактуатор приводился в действие двухцикловыми модулированными синусоидальными посылками

$$V(t) = \begin{cases} \sin(\omega_c t) \sin(\omega_c t/4), & 0 \leq t \leq 2T \\ 0, & t > 2T \end{cases}, \quad T = 2\pi/\omega_c \quad (7)$$

при различных значениях центральной круговой частоты ω_c в диапазоне возбуждения двух первых (фундаментальных) мод. В качестве устройства регистрации

колебаний использовался лазерный виброметр. Для всех рассмотренных форм сигнала (значений ω_c) и точек наблюдения A_m теоретические и экспериментальные результаты совпали с высокой точностью.

В качестве примера на рис. 2 приведены графики вертикальной компоненты скорости $\dot{u}_z(x, y, -h, t)$ в точках A_1 и A_2 , полученные на основе используемой модели и измеренные лазерным виброметром при $\omega_c = 0.2$. Результаты приводятся в безразмерном виде в единицах, выраженных через три характерные величины: длину $l_0 = h$, скорость $v_0 = v_s$ и плотность $\rho_0 = \rho$. При этом безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi fl_0/v_0$, где f — размерная частота в герцах. Приведенный пример показывает, что разработанная модель достоверно описывает не только поле источника \mathbf{u}_0 (основной волновой пакет), но и отраженное поле \mathbf{u}_{sc} (следующий за ним пакет меньшей амплитуды). В рамках данной модели были определены оптимальные параметры пьезоисточника (размер, центральная частота и др.).

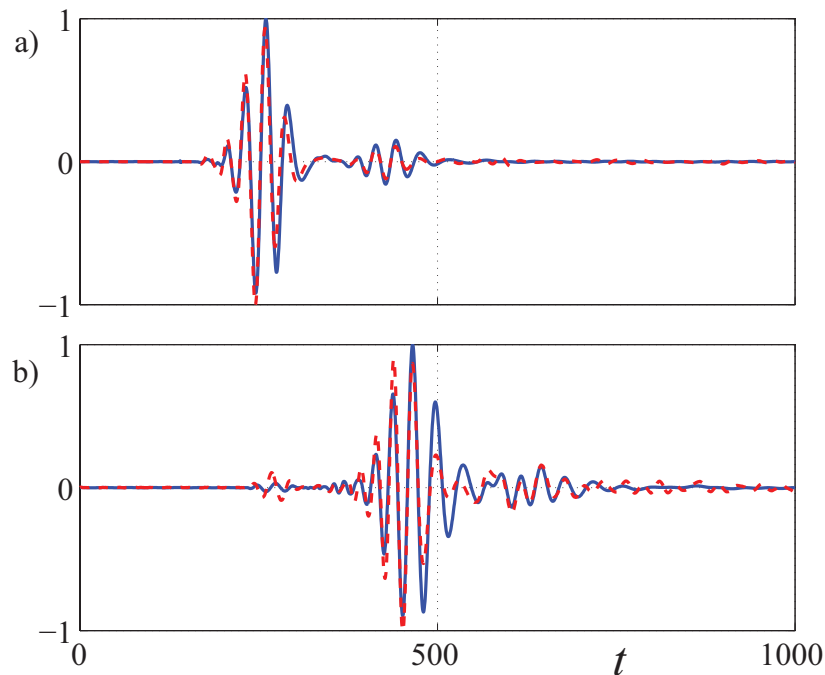


Рис. 2. Нормированные вертикальные компоненты скорости $\dot{u}_z(t)$, вычисленные (сплошные линии) и измеренные (пунктирные линии) в точках A_1 (а) и A_2 (б).

4. В качестве примера, иллюстрирующего дифракцию на внутренних трехмерных неоднородностях, на рис. 3 приводится распределение амплитуды вертикальных смещений $|u_z(x, y, 0, \omega)|$ поверхности слоя, содержащего неподвижное включение в форме эллипсоида $S : x^2/a^2 + y^2/b^2 + (z - z_c)^2/c^2 = 1$, $a = b = 0.7$, $c = 0.1$, $z_c = -0.5$. Источник колебаний — вертикальная гармоническая нагрузка $\mathbf{q}_0 = \{0, 0, \delta(x + 6, y + 6, 0)\}$; $\omega = 2$. Здесь использовано $N = 180$ слоистых элементов в разложении (6). Смещения поверхности над включением минимальны, а за включением наблюдается зона тени.

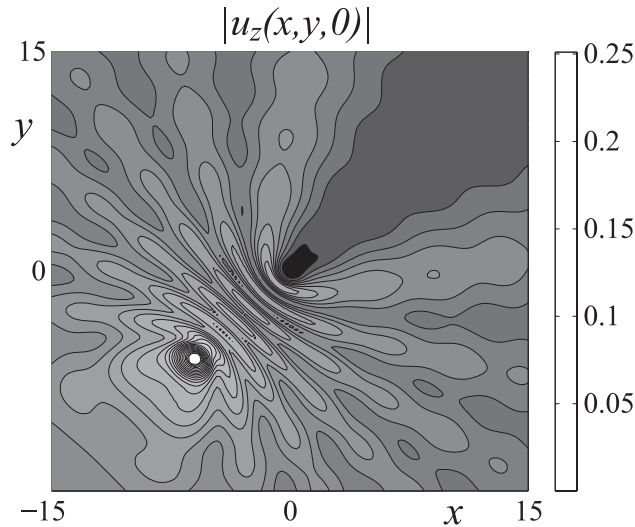


Рис. 3. Амплитуда вертикальных гармонических смещений u_z поверхности слоя, содержащего эллипсоидальное неподвижное включение; $\omega = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука. 1987.
- [2] Crawley E. F., de Luis J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures // AIAA J. 1987. № 25. pp. 1373–1385.
- [3] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
- [4] Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [5] Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Михаськив В. В. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости. ПММ. 2009. № 4. С. 622–634.
- [6] Glushkov E., Glushkova N., Ekhlakov A., Shapar E. An analytically based computer model for surface measurements in ultrasonic crack detection // Wave Motion 2006. № 43. pp. 458–73.

Glushkov E. V., Glushkova N. V., Lammering R., Eremin A. A., Neumann M. N. *Lamb wave excitation and propagation in layered elastic waveguides with surface and internal inhomogeneities.* The paper presents the results of theoretical and experimental investigations of Lamb waves propagation and diffraction in layered elastic waveguides with 3D surface and hidden obstacles. Unknown wave fields scattered by obstacles are derived from the boundary integral equations (BIE) with laminate element kernels. In the case of surface inhomogeneity the BIEs are solved by the variational-differential method with axisymmetric spline-approximation of unknown vector-functions. With buried obstacles the boundary element technique is used. Comparison of numerical results with the experimental data has proved high efficiency of the analytically-based computer model developed.

ВЛИЯНИЕ ПОРИСТОСТИ МАТЕРИАЛОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ БЕГУЩИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ВОЛНОВОДАХ

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Рассматриваются пористо-упругие флюидонасыщенные многослойные волноводы, движение частиц которых описываются уравнениями Био-Френкеля для двухфазных сред. Анализируется влияние пористой микроструктуры не только на вид дисперсионных кривых, но и на амплитудные характеристики возбуждаемых бегущих волн как в слоистых плоскопараллельных, так и в цилиндрических скважинных волноводах. Показано, что амплитуда дополнительных мод, возникающих из-за наличия микроструктуры, может быть существенно больше амплитуды основных мод, которые присутствуют в волноводе с чисто упругими (однофазными) слоями.

1. Необходимость исследования волновых процессов в пористых средах, насыщенных жидкостью или газом (флюидом) обусловлена не только прикладными проблемами механики грунтов, геофизики и вибросейсморазведки, строительной, нефтяной и газовой индустрии, но и появлением новых зернисто-порошковых и губчатых материалов, используемых, например, для термо- и виброизоляции различных конструкций. К настоящему времени общепризнанным инструментом теоретического исследования распространения линейных волн в пористых флюидонасыщенных средах являются уравнения Био-Френкеля [1, 2]. Учет взаимного влияния между колебаниями частиц упругого скелета и поровой жидкости приводит как к изменению скорости продольной (P_1) и поперечной (S) объемных волн так и к появлению дополнительной медленной продольной волны или волны Био (P_2), амплитуда которой сравнительно мала [3]. Меняются не только характеристики волн, распространяющихся вдоль границ, но нередко и их число: при наличии пористости и водонасыщенности появляются дополнительные бегущие волны [4, 5].

Представляет интерес определение реального соотношения между амплитудами различных волн, возбуждаемых заданными источниками. Подобный анализ может быть осуществлен с использованием разработанной И. И. Воровичем и его учениками техники интегральных преобразований, в рамках которой волновое поле строится в виде контурных интегралов от произведения Фурье-символов матрицы фундаментальных решений и вектора заданной нагрузки [6]. В настоящей работе данный подход, хорошо зарекомендовавший себя для многослойных упругих сред [7], обобщается на случай пористо-упругих материалов и на этой основе анализируются амплитудные характеристики волн, возбуждаемых заданными источниками. В частности, ставится задача выяснить, может ли амплитуда дополнительных поверхностных и каналовых волн, обусловленных микроструктурой (пористостью), быть, в отличие от волны P_2 , соизмеримой с амплитудой основных волн рэлеевского типа.

2. Для анализа влияния водонасыщенности и пористости ε рассматриваются две волноводные структуры: N -слойное полупространство (рис. 1, слева) и пространство с цилиндрическими границами (скважина) (рис. 1, справа). В скважинной структуре внутренний цилиндр заполнен акустической жидкостью. Предполагается, что в обеих структурах материал слоев может быть как двухфазным пористо-упругим (среда Био), так и чисто упругим, т. е. без микроструктуры. Источником колебаний в полупространстве является поверхностная нагрузка \mathbf{q} , а в цилиндрической структуре – сосредоточенное давление в скважинной жидкости $p_0\delta(x, y, z)$.

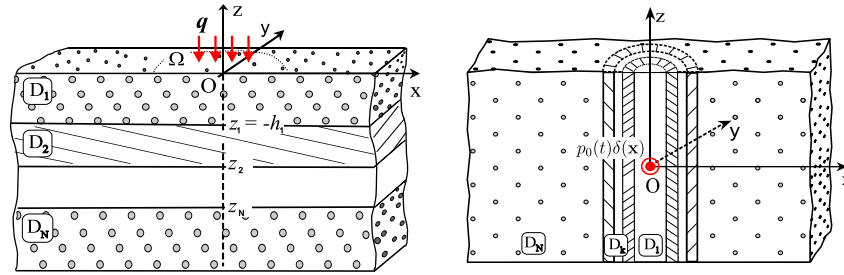


Рис. 1. Геометрия задач.

В соответствии с теорией Био осредненные по элементарному объему смещения пористого материала $\mathbf{u} = (1 - \varepsilon)\mathbf{u}^s + \varepsilon\mathbf{u}^f$, складываются из смещений упругого скелета \mathbf{u}^s и поровой жидкости \mathbf{u}^f , которые удовлетворяют уравнениям [1, 2]:

$$\nabla[(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}^s + Q \operatorname{div} \mathbf{u}^f] + \mu\Delta\mathbf{u}^s - \rho_{11}\ddot{\mathbf{u}}^s - \rho_{12}\ddot{\mathbf{u}}^f - b\dot{\mathbf{w}} = 0,$$

$$\nabla[Q \operatorname{div} \mathbf{u}^s + R \operatorname{div} \mathbf{u}^f] - \rho_{12}\ddot{\mathbf{u}}^s - \rho_{22}\ddot{\mathbf{u}}^f + b\dot{\mathbf{w}} = 0.$$

Константы λ, μ, R, Q – модули упругости пористой среды, $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ – инерционные коэффициенты, связанные с плотностями упругой и жидкой фазы ρ^s и ρ^f соотношениями: $\rho_{11} = (1 - \varepsilon)\rho^s - \rho_{12}$, $\rho_{22} = \varepsilon\rho^f - \rho_{12}$, $\rho_{12} = \varepsilon(1 - \tilde{\alpha})\rho^f$, где $\tilde{\alpha}$ – коэффициент извилистости пор; стоящий при $\dot{\mathbf{w}}$ коэффициент b задает уровень диссипации волновой энергии (аналог вязкости среды). Далее полагается $b = 0$.

3. Для решения задач о возбуждении гармонического волнового поля $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$ заданными источниками $\mathbf{q}e^{-i\omega t}$ (полупространство) и $p_0e^{-i\omega t}$ (скважина) используется техника интегрального преобразования Фурье. Волновое поле в полупространстве находится в форме контурного интеграла обратного преобразования по горизонтальным координатам от произведения Фурье-символов матрицы Грина $K(\alpha_1, \alpha_2, z) = \mathcal{F}_{xy}[k]$ и вектора заданной нагрузки $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{q}]$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{xy}^{-1}[K\mathbf{Q}] \equiv \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma_1\Gamma_2} K\mathbf{Q} e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \mathbf{x} = (x, y, z).$$

Решение задачи для скважины в силу осевой симметрии представляется в виде однократного интеграла от преобразования Фурье по вертикальной координате z вектора смещений $\mathbf{U}(r, \alpha_3) = \mathcal{F}_z[\mathbf{u}]$ [8]:

$$\mathbf{u}(r, z) = \mathcal{F}_z^{-1}[\mathbf{U}] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} \mathbf{U} e^{-i\alpha_3 z} d\alpha_3.$$

Описание разработанных на основе общего матричного подхода [7] и реализованных в виде пакетов программ эффективных алгоритмов вычисления Фурье-символов фундаментальных решений для рассматриваемых пористо-упругих волноводов приведено в [9].

Контуры Γ_1, Γ_2 и Γ_3 в интегральных представлениях идут вдоль вещественной оси, отклоняясь от нее в комплексную плоскость при обходе полюсов ζ_n подынтегральных функций. Вычеты в этих полюсах описывают поверхностные или каналовые волны в плоскопараллельных структурах

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \sim \mathbf{a}_n(\varphi, z)e^{i\zeta_n r}/\sqrt{r}, \quad r/l \gg 1$$

или скважинные волны в цилиндрических структурах

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \sim \mathbf{b}_n(r)e^{i\zeta_n |z|}, \quad |z|/l \gg 1,$$

l — характерная длина волны, r, φ — полярные радиус и угол: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

4. В качестве примера влияния водонасыщенности и упругих свойств пористой среды на волновые характеристики ниже приводятся результаты для следующих сред: двуслойное полупространство с верхним пористым слоем с закрытыми на поверхности порами и сосредоточенной вертикальной нагрузкой (табл. 1а) и четырехслойная скважинная структура с пористой прослойкой (табл. 1б). Свойства материалов в размерности СИ даны в табл. 1в. Здесь ν — коэффициент Пуассона, K_s и K_f — коэффициенты объемного расширения упругой и жидкой фазы, $\rho_s, \rho_f, \varepsilon$ и $\tilde{\alpha}$ см. выше. Приведенные для пористой среды параметры K_s, K_f , а также K_b (коэффициент объемного расширения материала с пустыми порами) связаны с модулями упругости λ, μ, R, Q соотношениями [2]:

$$\mu = \frac{3}{2}K_b(1 - 2\nu)/(1 + \nu), \quad \lambda = K_b - \frac{2}{3}\mu + Q^2/R, \quad R = \varepsilon^2\Lambda_1, \quad Q = \varepsilon(\Lambda_0 - \varepsilon)\Lambda_1;$$

$$\Lambda_0 = 1 - K_b/K_s, \quad \Lambda_1 = K_s^2 K_f / [K_f(K_s - K_b) + \varepsilon K_s(K_s - K_f)].$$

а) полупространство

№	материал	толщина
1	пористый	1
2	грунт	∞

б) скважина

№	материал	толщина
1	жидкость	0.06
2	сталь	0.02
3	пористый	0.02
4	грунт	∞

в) свойства материалов

материал	ν	$K_s, \times 10^9$	$K_f, \times 10^9$	ρ_s	ρ_f	ε	$\tilde{\alpha}$
пористый	0.2	36	2.35	2650	1000	0.3	1.25
грунт	0.1	2.64		2500			
жидкость	0.5		2.19		1000		
сталь	0.3	164.5		7900			

Таблица 1. Параметры волноводов.

На рисунках 2а (полупространство) и 3а (скважина) приводятся графики зависимости медленности волн $s_n = \zeta_n/\omega$ от отношения K_b/K_{hs} , где K_b — объемное расширение пористой среды, а K_{hs} — коэффициент объемного расширения нижнего полупространства и для внешней среды скважины соответственно. Фактически изменяются только K_b и μ , остальные параметры, в том числе и K_{hs} , фиксированы, частота $f = 50$ гц. На рисунках 2б и 3б приводятся амплитуды возбуждаемых заданными источниками поверхностных или скважинных волн (сплошные линии 1 и 2). Штрих-пунктирной линией 3 обозначены характеристики единственной волны релеевского типа, возбуждаемой в соответствующей структуре без учета пористости, т.е. когда $\varepsilon = 0$ и $K_b = K_s$.

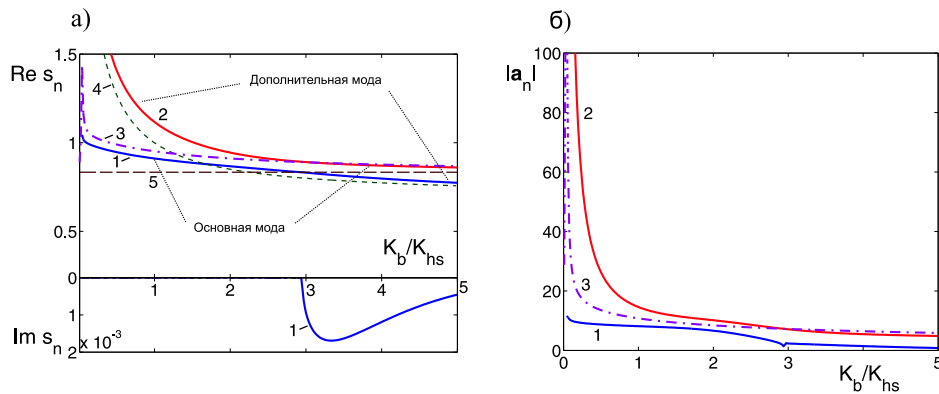


Рис. 2. Зависимость медленностей (а) и амплитуд поверхностных волн (б) от упругих свойств верхнего пористого слоя двухслойного полупространства на частоте $f = 50$ гц; линии 1 и 2 — возбуждаемые поверхностные волны, 3 — волна в отсутствии пористости слоя, 4 — медленная P_2 -волна, 5 — S -волна нижнего полупространства.

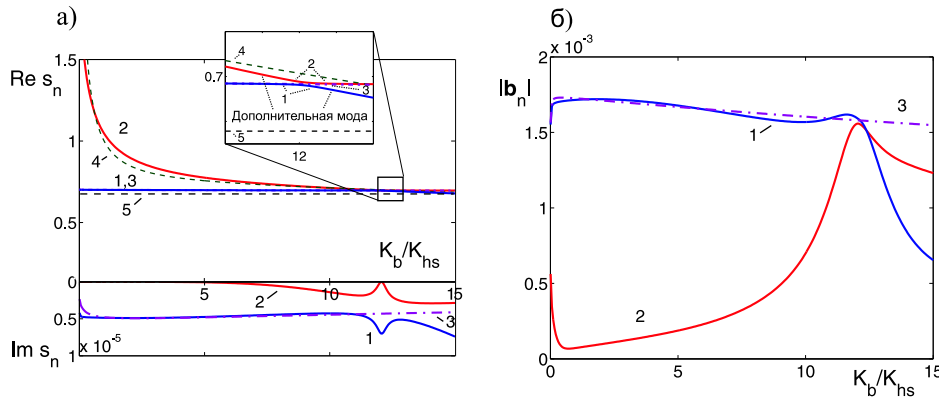


Рис. 3. Зависимость медленностей (а) и амплитуд скважинных волн (б) от упругих свойств пористого слоя четырехслойной цилиндрической структуры, $f = 50$ гц; линии 1 и 2 — возбуждаемые скважинные волны, 3 — волна в отсутствии пористости слоя, 4 — P_2 -волна слоя, 5 — продольная волна в скважинной жидкости.

Таким образом, в рассматриваемых многослойных структурах пористость (водонасыщенность) отдельных слоев приводит к появлению дополнительных бегущих волн. Амплитуды дополнительных волн могут быть соизмеримы с ампли-

тудой основной моды. В задаче для скважины это наблюдается, если значения фазовых скоростей P_2 -волны в пористой среде и P -волны в скважинной жидкости близки друг к другу (рис. 3, при $K_b \approx 12K_{hs}$). Интересно, что в двухслойном полупространстве в случае мягкого слоя ($K_b < 1.8K_{hs}$), т. е. когда скорость P_2 -волны меньше скорости S -волны нижнего полупространства (рис. 2а, штриховые линии 4 и 5), дополнительная волна имеет даже большую амплитуду, чем основная мода (рис. 2б).

Работа выполнена при поддержке Аналитической ведомственной целевой программы (проект № 2.1.1/1231).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. II. Higher-frequency range // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28(2). pp. 168–178.
- [2] *Молотков Л. А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 248 с.
- [3] *Kelder O., Smeulders D. M. J.* Observation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner sandstone // *Geophys.* 1997. 62(6). pp. 1794–1796.
- [4] *Feng S., Johnson D. L.* High-frequency acoustic properties of a fluid/porous solid interface I. New surface mode // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1983. 74, №3. С. 906–914.
- [5] *Городецкая Н. С.* Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // *Акустичний вісник.* 2007. Т. 10. № 2. С. 43–63.
- [6] *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [7] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Методы построения матрицы Грина на стратифицированном упругом полупространстве // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
- [8] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И.* Распределение энергии сейсмоакустического скважинного источника в пористо-упругом водонасыщенном грунте // *Актуальные аспекты физико-механических исследований. Акустика и волны.* Киев: Наук. думка, 2007. С. 73–82.
- [9] *Фоменко С. И.* Распространение и дифракция волн в слоистых пористо-упругих средах с плоскопараллельными и цилиндрическими границами. Дис. канд. физ.-мат. наук, 01.02.04. Кубанский государственный университет, 2008, 130 с.

Glushkov E. V., Glushkova N. V., Fomenko S. I. *Influence of the porosity on normal mode characteristics in multilayered waveguides.* Porous elastic layered waveguides fully saturated by fluid are considered. Displacements of porous solid are governed by the Biot-Frenkel equations. Influence of the porosity on wave velocity and amplitudes of normal modes that excited by given sources in the both halfspace and borehole multilayered structures is studied. Additional normal modes appear in the considered waveguides because of the porosity. Amplitudes of the additional and main modes are commensurable for some range of porous layer elastic properties.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Говорухин В. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В докладе приведены примеры аналитических и численных решений стационарной задачи протекания идеальной жидкости сквозь прямоугольный канал с граничными условиями Юдовича. Найденны стационарные течения с различным числом застойных зон и различной функциональной зависимостью завихренности от функции тока. Проведено численное исследование их устойчивости.

Задача протекания идеальной жидкости сквозь заданную область изучается много десятилетий. Известно [6], что в двумерном случае она разрешима по времени, а корректность имеет место, если, кроме нормальной скорости на границе, на входе в область задана касательная компонента вихря или скорости [3]. Для двумерного случая установлено [1], что стационарная задача протекания с заданным на входе вихрем имеет обобщённое решение при любых граничных данных, а соответствующее течение жидкости в этом случае подразделяется на проточную и застойную зоны. В [2, 7] численно были обнаружены нетривиальные стационарные режимы с различным числом застойных зон. В докладе приведены новые течения, полученные аналитическими и численными методами.

1. Динамика идеальной жидкости. Рассматривается задача протекания жидкости сквозь канал D :

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}. \quad (1)$$

Уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости в терминах вихря течения ω и функции тока ψ записываются в виде

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0; \quad (2)$$

$$-\Delta \psi = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \omega; \quad (3)$$

В данной работе рассматриваются граничные условия, поставленные в [6]:

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=a} = \psi^w(y), \quad \psi^w(y) > 0, \quad y \in [0, b]; \quad (4)$$

$$\psi|_{y=0} = 0; \quad \psi|_{y=b} = \psi^w(b); \quad (5)$$

$$\omega|_{x=0} = \omega^w(y). \quad (6)$$

То есть, жидкость втекает в канал через сечение $x = 0$ и вытекает из него через сечение $x = a$ с нормальной скоростью $v^w(y) = \frac{\partial \psi^w}{\partial y}$. В представленных ниже результатах $\psi^w = q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3$ при $q_1 = 0.03$, $q_2 = 0.21$, $q_3 = -0.14$, что соответствует параболическому профилю скорости протекания v^w .

Для завихренности задается условие в начальный момент времени:

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y) \quad (7)$$

2. Стационарная задача протекания. Для поиска не зависящих от времени решений задача (2)–(7) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0 \\ -\Delta \psi = \omega \end{cases} \quad (8)$$

с граничными условиями (4)–(6).

Первое уравнение системы эквивалентно соотношению $\omega = F(\psi)$, где F может быть любой дифференцируемой функцией. С одной стороны существование некоторой функциональной зависимости ω от ψ является критерием стационарности решения, а с другой дает способ поиска стационарных решений. То есть, стационарные решения могут быть найдены как решения уравнения

$$-\Delta \psi = F(\psi) \quad (9)$$

при соответствующих граничных условиях. Естественно [4, 5] задать некоторую известную зависимость $\omega = F(\psi)$, а затем решать (9). В представленной работе мы ограничимся тремя случаями: $\omega = k\psi$, $\omega = k\psi^2$, $\omega = k\psi^3$.

3. Линейная зависимость $\omega = k\psi$. Предположим, что имеет место простейшая зависимость ω от ψ — линейная, то есть, $\omega = k\psi$, где k — параметр. Уравнение (9) принимает вид:

$$-\Delta \psi = k\psi \quad (10)$$

с граничными условиями (4),(5) для функции тока. При этих условиях решение уравнения (10) будем разыскивать в следующем виде:

$$\psi(x, y) = q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + \sum_{i,j=1}^{\infty} C_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad (11)$$

где $C_{i,j}$ — постоянные коэффициенты. После подстановки (11) в (10) получаем выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned} C_{i,j} = & \frac{4kb^3a^2(-1)^j(-1+(-1)^i)}{\pi^2ij(\pi^2(i^2b^2+j^2a^2)-ka^2b^2)} q_1 + \frac{4b^3a^2(kb^2(\pi^2j^2-6)+6\pi^2j^2)(-1)^j(-1+(-1)^i)}{\pi^4ij^3(\pi^2(i^2b^2+j^2a^2)-ka^2b^2)} q_3 + \\ & + \frac{4a^2b^2(kb^2(2+(\pi^2j^2-2)(-1)^j)+2\pi^2j^2((-1)^j-1))(-1+(-1)^i)}{\pi^4ij^3(\pi^2(i^2b^2+j^2a^2)-ka^2b^2)} q_2 \end{aligned} \quad (12)$$

То есть, найдено однопараметрическое семейство стационарных режимов вида (11)–(12), определяемое параметром k . Эти режимы могут быть проточными, могут состоять из проточной и разного числа застойных зон. На рис. 1 приведены поля завихренности и линии тока режимов при разных k . На рис. 1a изображен полностью проточный режим, на рис. 1b с одной застойной зоной, на рис. 1c,d два различных режима с тремя застойными зонами, а режимы с большим числом различных застойных зон и проточной зоной сложной формы даны на рис. 1e,f.

Возникает естественный вопрос об устойчивости найденных стационарных режимов. Строгое математическое исследование устойчивости решений (11)–(12) с использованием спектральных или энергетических подходов затруднительно в силу их сложной формы. Одним из альтернативных путей анализа устойчивости

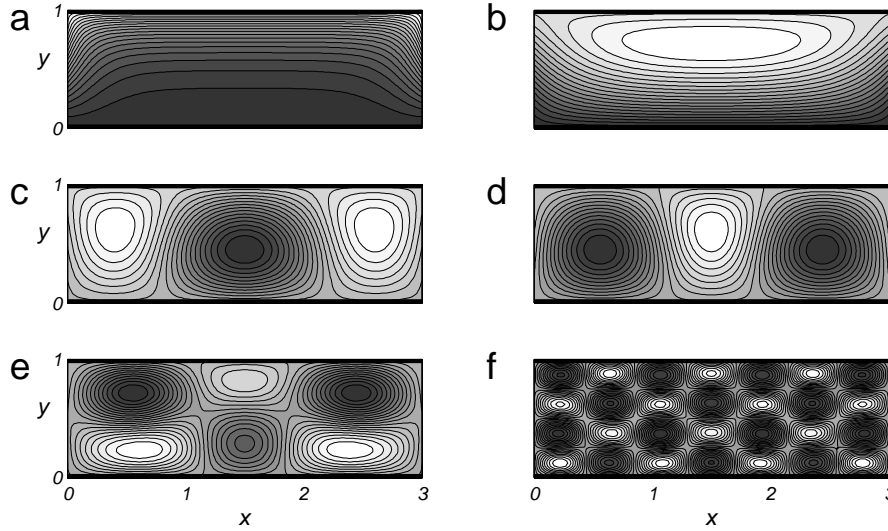


Рис. 1. Поля завихренности и линии тока стационарных режимов при $\omega = k\psi$. а) $k = -20$, б) $k = 5$, в) $k = 18$, д) $k = 21$, е) $k = 51$, ф) $k = 212$.

вихревых конфигураций является численный эксперимент см., например, [8,9]. С помощью численного решения нестационарной задачи рассматривают влияние на исследуемый режим возмущений различного вида. При этом использовать классические определения и критерии гидродинамической устойчивости вихревых структур не удастся, и приходится их заменять иными. В данной работе принят довольно простой 'критерий' устойчивости стационарного режима: будем считать его устойчивым к некоторому возмущению, если структура невозмущенного режима сохраняется на достаточно больших временах при численном решении. Если же режим распадается за это время, то будем его считать неустойчивым.

Применим описанный подход к анализу устойчивости решений (11)–(12) изображенных на рис.1. В качестве возмущения стационарного режима будем рассматривать вычислительную погрешность, а для решения нестационарной задачи (2)–(7) на временах $t \in [0, 300]$ используем вариант метода частиц в ячейках [2, 7]. Вычисления показали, что режимы при $k = -20, 5, 21$ оказались устойчивыми, а остальные режимы с рис. 1 – неустойчивыми. На рис.2 даны зависимость $\omega(\psi)$ в начальный и конечный моменты времени. Видно, что при $k = 21$ линейная зависимость сохраняется, а для $k = 18, 51$ функциональная зависимость отсутствует при $t = 300$. На рис.3 представлены конечные (при $t = 300$) вихревые конфигурации для $k = 18, 51$. Видно, что в результате распада режима с тремя застойными зонами (рис.1с) реализовался близкий к стационарному режим с двумя зонами, а из режима с шестью застойными зонами (рис.1е) — с тремя валами.

4. Нелинейные зависимости ω от ψ . В случае $\omega = k\psi^2$ и $\omega = k\psi^3$ не удастся получить точное решение. Для решения воспользуемся методом Галеркина и пакетом Maple. Решение будем разыскивать в виде:

$$\psi(x, y) = q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} x^i (x - a) y^j (y - b). \quad (13)$$

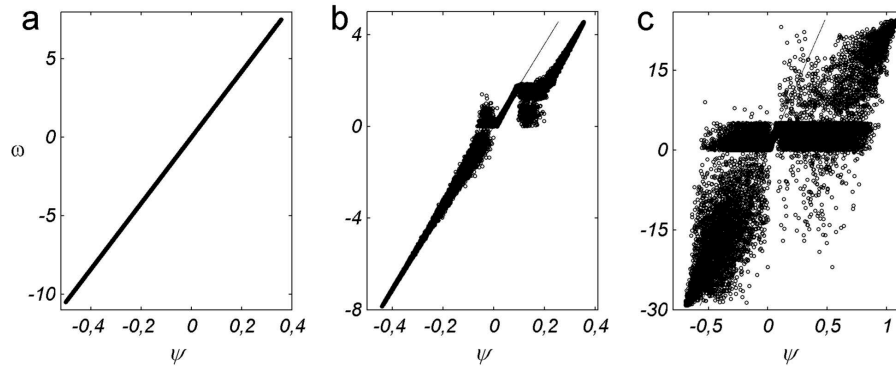


Рис. 2. $\omega(\psi)$ при $t = 0$ (точки) $t = 300$ (кружки) для: а) $k = 21$, б) $k = 18$, с) $k = 51$.

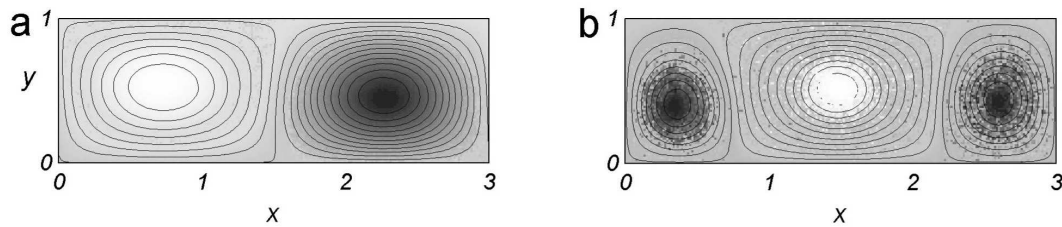


Рис. 3. Поля завихренности и линии тока режима при $t = 300$ для: а) $k = 18$, б) $k = 51$.

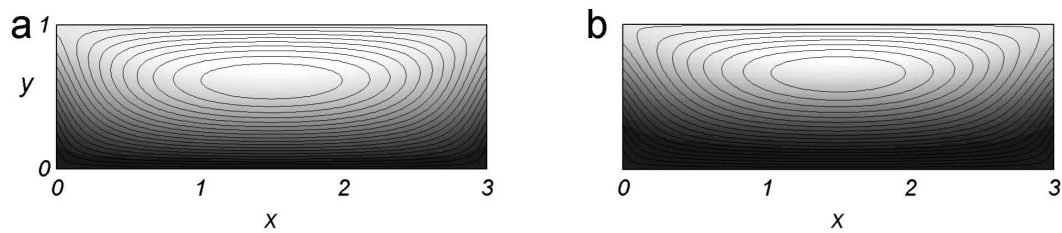


Рис. 4. Поля завихренности и линии тока стационарных режимов: а) $\omega = k\psi^2$ при $k = 45$; б) $\omega = k\psi^3$ при $k = 460$.

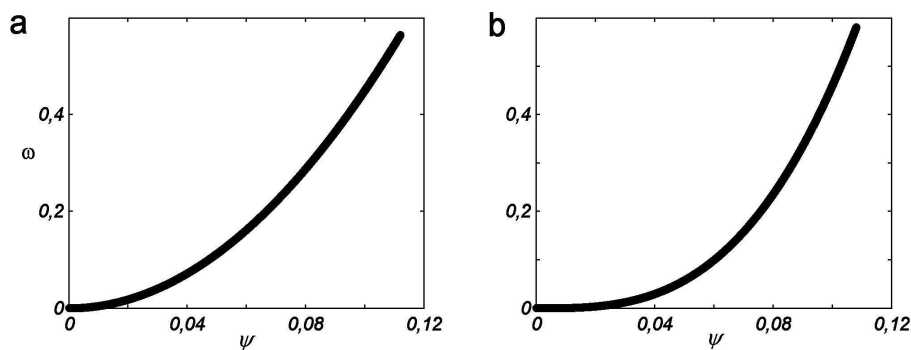


Рис. 5. Зависимость ω от ψ для начального стационарного режима (точки) и режима для $t = 400$ (кружки) при: а) $\omega = k\psi^2$ и $k = 45$; б) $\omega = k\psi^3$ и $k = 460$.

В расчетах принимались $n = 6, 7$. После подстановки (13) в (9) и операций проектирования получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $c_{i,j}$, которую решаем численно.

Для обоих видов зависимостей удалось найти режимы состоящие из проточной и одной застойной зоны, см. рис. 4. Полученные с погрешностью метода Галеркина режимы оказались устойчивыми по предложенному выше критерию. На рис. 5 даны зависимость $\omega(\psi)$ в начальный и конечный моменты времени. Видно, что вид функциональной зависимости сохраняется в обоих случаях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 08-01-00895.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Алексеев Г. В.* Об исчезающей вязкости в двумерных стационарных задачах гидродинамики несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1972. Вып.10. С. 5–28.
- [2] *Говорухин В. Н., Моргулис А. Б., Юдович В. И.* Расчет двумерных режимов протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал // Доклады Академии Наук, 2007, т. 412, №4, С. 1–5.
- [3] *Кажихов А. В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикл. математика и механика, 1980. Т.44. № 5. С. 947–949.
- [4] *Ламб* Гидродинамика. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [5] *Чаплыгин С.А.* Один случай вихревого движения жидкости // Труды отд. физ. наук Императ. Моск. общ. любителей естествознания, 1903, т.11, №2, С. 11–14.
- [6] *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Мат. сб. 1964. Т.64. № 4. С. 562–588.
- [7] *Govorukhin V. N., Pin K. I.* Numerical study of an inviscid incompressible fluid through a channel of finite length // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2009. Vol. 60. № 12. pp. 1315–1333.
- [8] *Velasco Fuentes O. U.* Evolution of a Lamb quadrupolar vortex // Fluid Dynamics Research, 26, 2000, pp. 13–33.
- [9] *Walther J. H., Guenot M., Machefaux E., Rasmussen J. T., Chatelain P., Okulov V. L., Sorensen J. N., Bergdorf M. and Koumoutsakos P.* A numerical study of the stability of helical vortices using vortex methods // J. Phys.: Conf. Ser. 75, 2007, 012034, 16 pp.

Govorukhin V. N. *The partial solutions of the stationary problem for the flows of ideal fluid through the channel.* In this talk a set of stationary solutions of the problem for the flows of inviscid incompressible fluid through rectangular channel with Yudovich's boundary conditions are presented. These solutions was obtained both by analitical and numerical methods. Stationary flows with various number of stagnant zones and various functional dependence of vorticity from stream function are found. Numerical research of their stability is carried out also.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Голованов А. И., Султанов Л. У.

Казанский государственный университет

Приводится методика исследования деформаций гиперупругих тел в текущей конфигурации при мультипликативном представлении градиента деформаций. Кинематика среды описывается с помощью левого тензора Коши–Грина и в терминах главных удлинений. Наряженное состояние характеризуется тензором истинных напряжений Коши–Эйлера. Получено разрешающее уравнение в скоростях. Решение основано на инкрементальном методе. Численная реализация основана на методе конечных элементов. Приводятся примеры решения задачи.

1. Кинематика среды. Приводится кинематика конечных деформаций при мультипликативном разложении тензора градиента полных деформаций в виде произведения градиента упругих и пластических деформаций с использованием левого тензора Коши–Эйлера и в терминах главных удлинений. При таком разложении вводится промежуточное состояние, соответствующее состоянию при снятии нагрузки. Для каждого состояния вводятся соответствующие меры деформаций. Приводятся тензоры, описывающие кинематику движения среды: пространственный градиент скоростей, тензор деформации скорости и тензор скорости поворота. В соответствии с мультипликативным разложением используются аналоги тензоров пространственного градиента скоростей, деформации скорости и скорости поворота для упругих и пластических скоростей деформаций.

2. Физические соотношения.

Описывается процедура получения определяющих соотношений. Напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши–Эйлера, который определяется в актуальном состоянии. Определяющее соотношение получено из второго закона термодинамики для изотермического процесса, записанного для тензора напряжений Кирхгофа в исходной конфигурации, из которого получено линеаризованные физические соотношения. При моделировании пластических деформаций используется теория течения, где критерием пластического течения служит функция текучести.

3. Алгоритм расчета. Алгоритм исследования основан на методе последовательных нагружений. В качестве базового уравнения принимается уравнение мощностей в актуальном состоянии. После линеаризации и некоторых преобразованиях получено разрешающая система линейных уравнений, где неизвестным является приращение перемещений в текущем временном слое, решение которой дает приращение перемещений, с помощью которых можно определить конфигурацию на следующем шаге. Процедура определения последующего НДС основана на итерационном процессе. Вычисляются пробные меры упругих деформаций, по которым определяются тензоры напряжений. При выполнении условия пластичности пробные напряжения и меры деформаций считаются истинными. В противном

случае, используя функцию текучести и уравнение стационарности, определяется скорость пластических деформаций, с помощью которой определяются тензор меры деформации и тензор напряжений для текущего номера итерации. По достижении сходимости определяется НДС. Численная реализация основана на методе конечных элементов. Полученные уравнения и соотношения аппроксимируются на базе восьмиузлового конечного элемента.

4. Численные примеры. Рассмотрен пример построения определяющих соотношений для слабосжимаемого изотропного материала. Физические соотношения получены в виде выражения производной Труделла напряжений Коши–Эйлера через деформации скорости. Также приводится пример расчета «гипоупругого» материала. Для полученных методик решения нелинейных задач приводятся результаты решения тестовых и модельных задач.

5. Заключение. В работе построена методика численного исследования гиперупругих тел. Кинематика среды описана с помощью различных тензоров. Приводится методика решения нелинейных задач с использованием левого тензора Коши–Грина и в терминах главных удлинений. Получены линейризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решенные задачи демонстрируют работоспособность полученной методики исследования нелинейно упругих задач. Предложенная методика решения задачи о конечных деформациях гиперупругих тел в терминах главных удлинений является работоспособной, дает хорошую точность на достаточно «грубых» сетках и может служить основой для создания соответствующей вычислительной информационной системы. Ее достоинством служит одинаковая точность вычисления, как компонент тензоров деформаций, так и компонент тензоров напряжений. Действительно, определив значения главных удлинений и направляющих косинусов главного базиса, все тензоры вычисляются в виде простых алгебраических операций. Некоторым недостатком можно считать повышенную трудоемкость вычислений, что, однако, компенсируется постоянным ростом мощности современной вычислительной техники. Более того, процесс вычислений хорошо поддается распараллеливанию, что позволяет использовать кластеры и распределенные вычислительные системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №08-01-00546.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Голованов А. И., Султанов Л. У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань, КГУ, 2009. 465 с.
- [2] Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
- [3] Le K. C., Stumpf H. Constitutive equations for elastoplastic bodies at finite strain: thermodynamic implementation // *Acta Mech.*, 1993, V.100. pp. 155–170.

- [4] *Hackenberg H. P., Kollmann F. G.* A general theory of finite inelastic deformation of metals based on the concept of unified constitutive models // *Acta Mech*, 1995, V. 110. pp. 217–239.
- [5] *Yeoh O. H.* Some forms of strain energy function for rubber // *Rubber Chem. Techn.* 1994. V. 66. pp. 754–771.
- [6] *Arruda E. M., Boyce M. C.* A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // *J. Mech. Physics Solids*. 1993. V. 41. pp. 389–412.
- [7] *Auricchio F.* A robust integration-algorithm for a finite-strain shape-memory-alloy superelastic model // *Int. J. Plasticity*. 2001. V. 17. pp. 971–990.
- [8] *Auricchio F., Taylor R. L.* A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes // *Int. J. Plasticity*. 1999. V. 15. pp. 1359–1378.
- [9] *Simo J. S., Taylor R. L., Pister K. S.* Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1985. V. 51. pp. 177–208.
- [10] *Simo J. S., Pister K. S.* Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1984. V. 46. pp. 201–215.
- [11] *Storakers B.* On material representation and constitutive branching in finite compressible elasticity // *J. of Mech. Physics Solids*. 1986. V. 34. pp. 125–145.
- [12] *Bonet J., Wood R. D.* *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 1997. 283 p.

Golovanov A. I., Sultanov L. U. *Nnumerical investigation large deformations using multiplicative decomposition.* The algorithm of investigation of large deformations of hyperelastic solids using the left Cauchy–Green tensor and in principal directions is considered. The stressed state is represented by Cauchy stress. The general equation is received. An incremental method is used. Numerical computations illustrate ability of the described approach.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ХИМИКО–МЕХАНИЧЕСКОГО ПОЛИРОВАНИЯ

Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва

Химико-механическое полирование (ХМП) (Рис. 1а) представляет характерный пример взаимодействия нано- микро- и макромасштабов в технологическом процессе. Действительно, размеры абразивных частиц варьируются в диапазоне 7 нм – 100 нм, их агрегатов до 10 мкм, скорость полирования — от 1–5 нм/мин до 500 нм/мин, зазор между обрабатываемой поверхностью и полировальником — от 10 мкм до 50 мкм. Уникальная комбинация химического и механического воздействия приводит к эффективному выравниванию (планаризации) однородных (кремний) и составных (кремний-металл) плоских деталей при высокой чистоте получаемых поверхностей [1, 2]. Понимание совокупности явлений, происходящих в рабочей зоне полирования, и разработка моделей, адекватных технологическим процессам ХМП, является актуальным научным направлением [3, 4].

Развита модель процесса ХМП с учетом комплекса рассматриваемых явлений различного масштаба, определяющих в совокупности скорость процесса полирования, таких как механическое давление, диффузия активной рабочей жидкости в поверхностный слой, ограничение экспозиции химической обработки механически нагруженным шероховатым полировальником, и обобщающая эмпирический закон Престона.

Скорость удаления материала dh/dt при (ХМП) обычно оценивают соотношениями, аналогичными уравнению Престона [2, 3]

$$dh/dt = Kp (ds/dt); \quad p = N/A \quad (1)$$

где h — толщина обрабатываемой пластины, N — сила прижатия полировальника к обрабатываемой пластине, A — площадь рабочей поверхности полировальника, p — нормальное давление на обрабатываемую поверхность, ds/dt — скорость относительного движения инструмента и детали, K — постоянная Престона.

В случае упругого контакта между локальным индентором (частицей абразива) и плоской обрабатываемой поверхностью (задача Герца) $K = (2E)^{-1}$ [2, 5]. Заметим, что модель Престона и ее аналоги в сущности описывают только абразивный износ обрабатываемой поверхности и не учитывают в явном виде особенности технологии. Наблюдаемые соотношения параметров значительно отличаются от предсказываемых этой моделью (пример на рис. 1б [1]).

Расширим диапазон модельных представлений учетом влияния некоторых локальных процессов физической и механической природы, оставаясь в рамках степенных функций влияния.

1. Полирование в обстановке химического воздействия рабочей жидкости происходит путем удаления с поверхности детали тонкого ослабленного слоя. Будем считать, что характерные времена реакций, приводящих к необходимому ослаблению прочности поверхностного слоя, малы (оценка скорости полирования сверху), так что эффект снижения прочности целиком определяется процессом диффузии

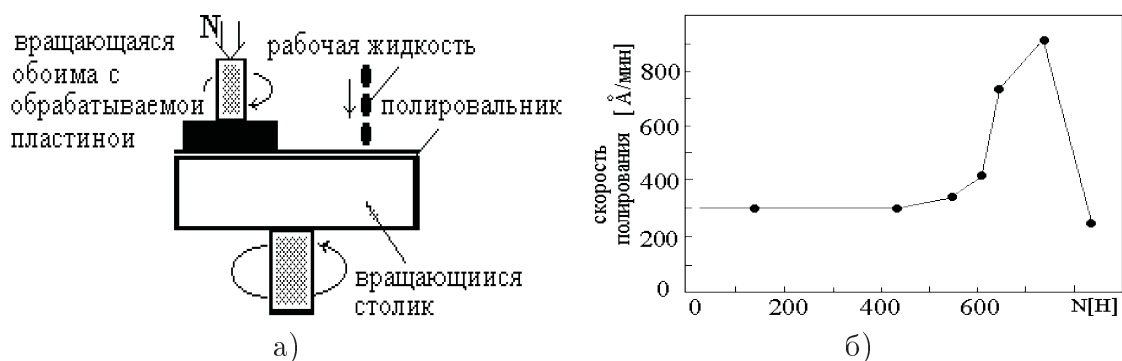


Рис. 1. Химико-механическое полирование. а — схема процесса, б — пример наблюдаемого соотношения параметров [1].

активного компонента рабочей жидкости в обрабатываемый материал. При относительно малой концентрации диффундирующего вещества в растворе можно считать, что коэффициент диффузии D не зависит от концентрации вещества C и процесс подчиняется закону Фика

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

Диффузия происходит с поверхности ($x = 0$). Решение уравнения (2) при $\tau > 0$ имеет вид

$$C(x, \tau) = C_0 \operatorname{erf} \left[x \left(2\sqrt{D\tau} \right) \right] \quad (3)$$

Градиент концентрации на расстоянии x от границы

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x, \tau) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi D \tau}} e^{-\frac{x^2}{4D\tau}} \quad (4)$$

На границе обрабатываемой поверхности

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0, \tau) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi D \tau}} \quad (5)$$

Это соотношение может быть использовано, если толщина диффузионного слоя, $\delta_D \sim \sqrt{\pi D \tau}$, где заметны вариации концентрации, существенно меньше толщины слоя активной жидкости.

Примем, что поток активного вещества через поверхность раздела (обрабатываемую поверхность) пропорционален градиенту концентрации, а скорость роста обработанного слоя $\partial h / \partial \tau$, по крайней мере, для толщин, близких к мономолекулярным, пропорциональна величине потока активного вещества. Поэтому, используя (5), можно записать максимальную скорость полирования как скорость увеличения толщины обработанного слоя

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} \sim \frac{\partial C}{\partial x}(0, \tau) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi D \tau}} \quad (6)$$

Здесь в качестве характерного времени $\tau = \tau^*$ выступает определенный ниже (11) средний интервал времени между двумя эпизодами контакта частиц абразива с обрабатываемой поверхностью на одной и той же площадке.

Если размер индивидуального пятна контакта частицы абразива с поверхностью детали соответствует модели упругого контакта (модель Герца)

$$a^* = 2 \left(\frac{3p_i r}{4E^*} \right)^{1/3}, \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (7)$$

где p_i — усилие, приходящееся на одну частицу, r — радиус эффективной сферической абразивной частицы, E_1, ν_1 и E_2, ν_2 модули упругости и коэффициенты Пуассона детали и абразивной частицы соответственно.

Величина относительной площади контакта, приходящейся на одну активную частицу

$$(S_i/S) \sim n^* (a^*/r)^2; \quad n^* \sim b (n^{2/3}) \quad (8)$$

где S — обрабатываемая площадь, S_i — средняя площадь единичного контакта, n — плотность абразивных частиц в рабочей жидкости, $b \ll 1$ — коэффициент.

Расстояние до следующей области локального контакта и интервал времени до контакта на той же площадке оцениваются соответственно соотношениями

$$L \sim (S/S_i) 2a^*, \quad \tau^* \sim L/v \quad (9)$$

где $v = ds/dt$ — скорость относительного движения инструмента и детали.

Оценим удельную нагрузку на одну активную частицу, используя (7)

$$p_i \sim Nr^2/R^2 n^* = \pi \sigma r^2 / b n^{2/3}, \quad \sigma \approx N/\pi R^2 \quad (10)$$

где σ — среднее давление на полировальник, R — радиус области прижатия.

Отсюда с точностью до постоянной m порядка единицы

$$a^* = 2 \left(\frac{3p_i r}{4E^*} \right)^{1/3} \sim m r \left(\frac{\sigma}{E^* b n^{2/3}} \right)^{1/3}; \quad \tau^* \sim \frac{L}{v} \sim \frac{r E^{*1/3}}{n^{4/9} \sigma^{1/3} v} \quad (11)$$

Соотношения (11) отражают изменение скорости полирования при вариации концентрации частиц абразива — при ее возрастании уменьшается интервал времени до повторного воздействия абразива на один и тот же участок.

Окончательно из (11) и (6) получим с точностью до постоянной

$$V_r \sim C_0 n^{2/9} v^{1/2} (\sigma/E^*)^{1/6} (Dr)^{-1/2} \quad (12)$$

2. Рассмотрим влияние локальной геометрии в области контакта на скорость полирования. При использовании мягкого шероховатого полировальника процессы активного взаимодействия между абразивом и полируемой пластиной сосредоточены в основном на выступах отдельных шероховатостей. Доступ химических реагентов к обрабатываемой поверхности при слабом прижатии не затруднен [2].

Обрабатываемую пластину будем считать жесткой, а шероховатость округлой с характерным радиусом кривизны при вершине R_1 и радиусом проекции основания на плоскость полировальника $R_0 > R_1$. Для такой системы из условий упругого контакта можно записать

$$S_i \sim \pi (3F_1 R_1 / 4E_{ef})^{2/3}; \quad F_1 \approx \pi \sigma (R_0)^2; \quad S_0 \approx \pi (R_0)^2; \quad S_i/S_0 \sim (3\pi \sigma R_1 / 4E_{ef} R_0)^{2/3} \quad (13)$$

где E_{ef} модуль упругости полировальника, F_1 — усилие вдавливания, приходящееся на одну шероховатость. Соответственно,

$$p \sim \sigma(S_0/S_i) \approx \sigma^{1/3}(4E_{ef}R_0/3\pi R_1)^{2/3} \quad (14)$$

Отсюда следует оценка влияния единичной шероховатости сферической формы на скорость полирования.

$$V_R \sim \sigma^{13/18}v^{1/2}(3\pi R_1/4E_{ef}R_0)^{5/9} \quad (15)$$

Показатель степени при σ (13/18) занимает промежуточное положение между его значением (2/3) в [6] и (5/6), упоминаемым, например, в [2].

По мере роста давления прижатия полировальника к обрабатываемой пластине сначала увеличивается площадь контакта абразивных частиц. В соответствии с моделью упругого контакта [5] отношение площади контакта к общей площади, приходящейся на один контакт, имеет вид аналогичный (13). Области, доступные для химической обработки, меньше всей обрабатываемой площади на величину суммы площадей контакта, что пропорционально уменьшает скорость полирования. Учитывая связь между распределением частиц в рабочем зазоре и их концентрацией n в виде $r/L \sim (n^*)^{1/3}$, получим

$$V_R \sim m\sigma^{1/6}v^{1/2}(1 - 3\pi\sigma(n^*)^{1/3}/4E_{ef})^{2/3} \quad (16)$$

Соотношение (16) дает немонотонную взаимосвязь между скоростью полирования и давлением со стороны полировальника. Максимум скорости полирования ожидается в области давлений

$$\sigma^* \sim kE_{ef}/(n^*)^{1/3}; k \approx 4/15\pi \quad (17)$$

В большинстве вариантов технологии $\sigma(n^*)^{1/3}/E_{ef}k \ll 1$ (см., например, [2]), поэтому практически важна только восходящая ветвь (16).

При дальнейшем повышении давления происходит смыкание поверхностей полировальника и детали. Доступными для химической обработки остаются только нарушения контакта в окрестности отдельных абразивных частиц.

Область нарушения контакта можно уподобить эффективной трещине нормального разрыва, сжатой однородным давлением, и расклиниваемой абразивной частицей, в концевых частях которой выполняется условие плавного смыкания

$$K_1(\sigma) + K_1(r) \equiv 0 \quad (18)$$

где $K_1(\sigma) \approx \sigma\sqrt{\pi}l$ — коэффициент интенсивности напряжений от однородного сжатия, $K_1(r) \approx E_{ef}r\sqrt{2l}/\pi$ — то же от присутствия клина толщиной $2r$ [7].

Из (18) получим искомый размер области нарушения контакта

$$\ell \approx \pi^{-1}\sqrt{2}E_{ef}/\sigma; \quad \ell < L \quad (19)$$

Оценка взаимосвязи скорости полирования и внешнего давления может быть сделана в рамках предположения о пропорциональности скорости полирования и отношения размера локальных областей нарушения контакта ко всей площади контакта, то есть $V_r \sim \ell/L$. При описанном контакте полировальника с пластиной имеем с учетом (12), (19)

$$V_r \sim n^{5/9}v^{1/2}(E_{ef}/\sigma)^{5/6}(Dr)^{-1/2} \quad (20)$$

Скорость полирования снижается с ростом давления.

Приведенные варианты воспроизводят условия смены определяющих механизмов процесса полирования. Поэтому можно говорить о необходимости построения диаграмм этих механизмов или сценариев рабочего процесса ХМП.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №13 и Гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ России (НШ - 134.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Yasseen A. A., Mourlas N. J., Mehregany M.* Chemical-mechanical polishing for polysilicon surface micromachining // Journal of Electrochemical Society. 1997. № 1. pp. 237–242.
- [2] *Luo J., Dornfeld D. A.* Material removal mechanism in chemical mechanical polishing: theory and modelling // IEEE transactions on semiconductor manufacturing. 2001. № 2. pp. 112–133.
- [3] *Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.* Химико-механическое полирование. Модели процесса. М. Препринт ИПМех РАН, 2009. No 918,40 с.
- [4] *Goldstein R. V., Osipenko N. M.* Fracture aspects of the chemical mechanical polishing // Euromech Colloquium 418. Fracture aspects in manufacturing. Abstracts, 2000. № 7. p. 18.
- [5] *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с. 46.
- [6] *Мур Д.* Основы и применения трибоники. М.: Мир, 1978. 487 с.
- [7] *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Goldshstein R. V., Osipenko N. M. *The models of chemical-mechanical polishing.* Chemical-mechanical polishing (CMP) is a perspective technology in fabrication of micro- and nanoelectronics elements, devices and systems. The development of models qualitatively and quantitatively adequate to CMP processes remains to be the actual problem. Some approaches were suggested to the problem accounting for the complex of the phenomena of different scales determining the polishing rate such as diffusion of slurry into the surface layer and restriction of time of chemical treatment of the surface by a rough pad being under the action of a mechanical load. A model of the CMP process was developed. Within the framework of this model a dependence of the polishing rate on the loading parameters was derived. The dependence generalizes the empirical Preston law.

ИЗНОСОКОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Горячева И. Г.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва

Построена математическая модель для анализа формоизменения неоднородного упругого полупространства с периодической структурой в условиях трения скольжения. Даны постановка и решение задачи о формоизменении при изнашивании неоднородного материала в контакте с вязкоупругим телом, а также задачи об изнашивании тонкого упругого покрытия, нанесенного на поверхность упругого тела, обладающего регулярным рельефом. Изучена кинетика изменения контактного давления и формы поверхности композиционного материала в процессе изнашивания.

Изнашивание композиционных и неоднородных материалов, а также материалов, поверхность которых подвергнута локальному упрочнению, происходит неравномерно, вследствие чего их первоначально плоская рабочая поверхность становится волнистой. В настоящей работе построена математическая модель для анализа формоизменения неоднородного упругого полупространства с периодической структурой в условиях трения скольжения. Периодическая структура создана при помощи локального упрочнения поверхности материала, который после упрочнения обладает переменным по поверхности коэффициентом износостойкости. Результаты исследования модели показывают, что на поверхности возникает эксплуатационная волнистость, параметры которой зависят от коэффициентов износа упрочненной и не упрочненной зон и их характерных размеров.

В работе даны постановка и решение задачи о формоизменении при изнашивании неоднородного материала в контакте с вязкоупругим телом. Установлено, что вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние на формирование рельефа поверхности при изнашивании, причем изношенная форма поверхности зависит от скорости скольжения и в определенном интервале скоростей является несимметричной. Также рассмотрена задача об изнашивании тонкого упругого покрытия, нанесенного на поверхность упругого тела, обладающего регулярным рельефом. Вследствие неоднородности толщины покрытия происходит перераспределение контактных давлений и неравномерное изнашивание поверхности.

Полученные результаты позволяют при некоторых условиях трения повысить триботехнические свойства сопряжений, получить желаемый рельеф обрабатываемой поверхности, оптимизировать свойства поверхностных слоев; обеспечить создание своеобразных карманов на поверхности трения, повышающих ее маслоемкость и ограничивающих присутствие продуктов изнашивания в зоне трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-08-01229-а, 10-08-90047 Бел-а).

Goryacheva I. G. *Contact wear problems for inhomogeneous bodies.* The mathematical model is constructed for analysis of forming for inhomogeneous elastic half-space with periodic structure in the case of sliding friction. The problem statement and solution are given for forming due to wear of inhomogeneous material in contact with the viscoelastic body, as well as for the wear of a thin elastic coating, applied on the surface of elastic body.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕРЖНЕЙ

Денина О. В.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассмотрена обратная задача о восстановлении по амплитудно-частотным характеристикам при совместном анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний трех неоднородных характеристик стержня: модуля Юнга, модуля сдвига и плотности. Для идентификации неизвестных характеристик построены итерационные процессы, основанные на аппарате интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода. Рассмотрены конкретные примеры восстановления искомым характеристик.

Практически все задачи неразрушающего контроля объектов различного назначения относятся к обратным задачам механики деформируемого твердого тела. Стержневые элементы являются одними из наиболее распространенных элементов машин, механизмов и строительных объектов. По этой причине разработка и реализация математически строго обоснованных методов решения обратных задач и практических методик определения свойств неоднородных стержней является актуальной задачей.

Отметим, что различные аспекты обратных задач об определении модуля Юнга и плотности в стержне были рассмотрены в работах [1, 2]. В настоящей работе рассмотрена обратная задача об определении трех неоднородных характеристик стержня: модуля Юнга, модуля сдвига и плотности по амплитудно-частотным характеристикам при совместном анализе продольных, изгибных и крутильных колебаний стержня.

Краевые задачи, описывающие различные типы колебаний консольно закрепленного стержня длины l переменного поперечного сечения под действием нагрузки на торце, после отделения временного множителя имеют вид [3]:

продольные колебания

$$\frac{d}{dx} \left(E(x)F(x) \frac{du(x, \omega)}{dx} \right) + \omega^2 \rho(x)F(x)u(x, \omega) = 0 \quad (1)$$

$$u(0, \omega) = 0, \quad E(l)F(l) \frac{du}{dx}(l, \omega) = -P$$

изгибные колебания

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)J(x) \frac{d^2w}{dx^2}(x, \omega) \right) - \omega^2 F(x)\rho(x)w(x, \omega) = 0 \quad (2)$$

$$w(0, \omega) = 0, \quad \frac{dw}{dx}(0, \omega) = 0$$

$$\left(JE \frac{d^2w}{dx^2} \right) (l, \omega) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(\left(JE \frac{d^2w}{dx^2} \right) \right) (l, \omega) = -P$$

крутильные колебания

$$\frac{d}{dx} \left(G(x) J_p(x) \frac{dv(x, \omega)}{dx} \right) + \omega^2 J_p(x) \rho(x) v(x, \omega) = 0 \quad (3)$$

$$v(0, \omega) = 0, \quad G(l) J_p(x) \frac{dv}{dx}(l, \omega) = -M$$

Здесь $E(x)$, $G(x)$, $\rho(x)$ — неизвестные положительные функции, характеризующие законы изменения модуля Юнга, модуля сдвига и плотности, которые могут быть как гладкими функциями, так и иметь конечное число разрывов первого рода; $F(x)$, $J(x)$, $J_p(x)$ — соответственно площадь, осевой и полярный моменты инерции поперечного сечения стержня.

Будем считать, что известна дополнительная информация об амплитудно-частотной характеристике торца стержня следующего вида:

$$u(l, \omega) = f_1(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (4)$$

$$w(l, \omega) = f_2(\omega), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4], \quad (5)$$

$$v(l, \omega) = f_3(\omega), \quad \omega \in [\omega_5, \omega_6], \quad (6)$$

по которой требуется определить неизвестные функции $E(x), G(x), \rho(x)$.

Задача (1)–(6), представляющая собой обратную коэффициентную задачу об определении трех неизвестных функций, является нелинейной и некорректной проблемой [4] и требует специальных приемов при решении.

В настоящей работе для определения неизвестных функций предложена следующая схема: на первом этапе на основе совместного анализа продольных и изгибных колебаний определены функции, характеризующие законы изменения модуля Юнга и плотности; на втором этапе при известной функции плотности из анализа крутильных колебаний определялась функция, характеризующая закон изменения модуля сдвига.

Исходные задачи были обезразмерены:

$$x = lz, \quad u(x) = l\tilde{u}(z), \quad w(x) = l\tilde{w}(z), \quad v = l\tilde{v}(z), \quad E(x) = E^* \tilde{E}(z), \quad \rho(x) = \rho^* \tilde{\rho}(z),$$

$$F(x) = F^* \tilde{F}(z), \quad G(x) = G^* \tilde{G}(z), \quad J(x) = J^* \tilde{J}(z), \quad J_p(x) = J_p^* \tilde{J}(z), \quad z \in [0, 1]$$

$$E^* = \max_{x \in [0, l]} E(x), \quad \rho^* = \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \quad F^* = \max_{x \in [0, l]} F(x), \quad J^* = \max_{x \in [0, l]} J(x), \quad J_p^* = \max_{x \in [0, l]} J_p(x)$$

$$G^* = \max_{x \in [0, l]} G(x), \quad \chi^2 = \frac{\omega^2 l^2 \rho^*}{E^*}, \quad \lambda^4 = \frac{\omega^2 \rho^* F^* l^4}{E^* J^*}, \quad \chi^2 = \frac{\omega^2 l^2 \rho^*}{G^*}$$

Далее для всех функций знак тильды над ними опускался.

Прямые задачи были решены с помощью сведения исходных краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода [1, 2]. На основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода были построены итерационные процессы для идентификации неизвестных функций, позволяющие осуществить расщепление исходной обратной задачи на последовательность задач двух типов — решение прямой задачи с переменными коэффициентами и определение поправок

на основе решения стандартной некорректной задачи — обращения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром.

Первый этап итерационного процесса требует знания начального приближения. В настоящей работе начальное приближение $E_0(z)$ строилось в классе линейных положительных ограниченных функций вида $E_0(z) = a_0 + a_1z$. Из априорной информации об ограниченности модуля упругости $0 < E_- \leq E_0(z) \leq E_+$ были получены ограничения на константы a_0 и a_1 , которые определили компактное множество на плоскости изменения параметров (a_0, a_1) . Значения постоянных a_0 и a_1 находились из условия минимума функционала невязки на построенном компактном множестве [1, 2].

Таким образом, на первом этапе задачи, для определения модуля Юнга и плотности, на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (7):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{du^{(n-1)}(z, \chi)}{dz} \right)^2 F(z) E^{(n)}(z) dz - \chi^2 \int_0^1 (u^{(n-1)}(z, \chi))^2 F(z) \rho^{(n)}(z) dz = \\ = P(f_1(\chi) - u^{(n-1)}(1, \chi)), \quad \chi \in [\chi_1, \chi_2] \quad (7) \\ \int_0^1 \left(\frac{d^2w^{(n-1)}(z, \lambda)}{dz^2} \right)^2 J(z) E^{(n)}(z) dz - \lambda^4 \int_0^1 (w^{(n-1)}(z, \lambda))^2 F(z) \rho^{(n)}(z) dz = \\ = -P(f_2(\lambda) - w^{(n-1)}(1, \lambda)), \quad \lambda \in [\lambda_3, \lambda_4] \end{aligned}$$

Отметим, что ядра интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода вычислялись в результате решения прямой задачи.

На втором этапе задачи для восстановления модуля сдвига на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода (8):

$$\int_0^1 \left(\frac{dv^{(n-1)}(z, \chi)}{dx} \right)^2 J_p(z) G^{(n)}(z) dz = M(f_3(\chi) - v^{(n-1)}(1, \chi)), \quad \chi \in [\chi_5, \chi_6] \quad (8)$$

Выход из построенных процессов производился, когда значение функционала невязки становилось меньше погрешности входных измерений [5].

На рис. 1 представлены результаты восстановления безразмерной функции, характеризующей изменение модуля Юнга, при анализе продольных колебаний, в случае, когда известна априорная информация о законах изменения плотности и модуля сдвига, на первом, третьем и пятом шагах итерационного процесса для следующих законов $\rho(z) = 2 + 0.5z^3$, $E(z) = 1 + z^3$. В серии расчетов было принято $\chi_1 = 2$, $\chi_2 = 3$, что соответствует частотному диапазону, расположенному между 1-ой и 2-ой резонансными частотами; измерения производились для пяти частот внутри выбранного диапазона.

На рис. 2 представлены результаты восстановления безразмерных функций, характеризующих законы изменения плотности, модуля Юнга и модуля сдвига

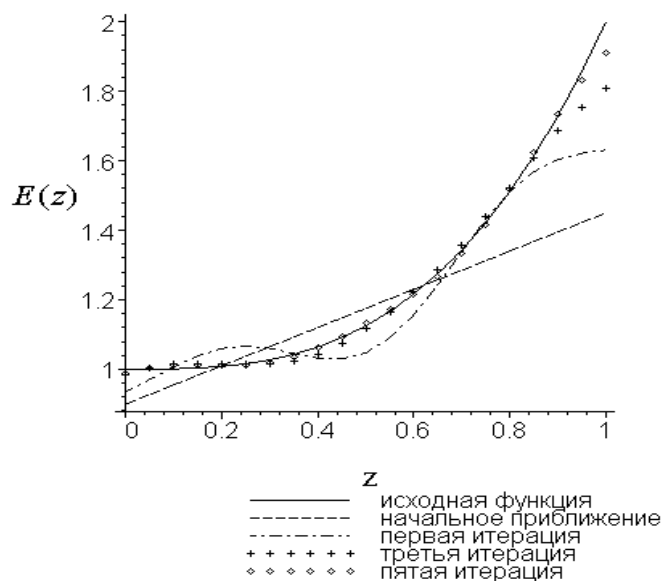


Рис. 1. Восстановление модуля Юнга на различных шагах итерационного процесса

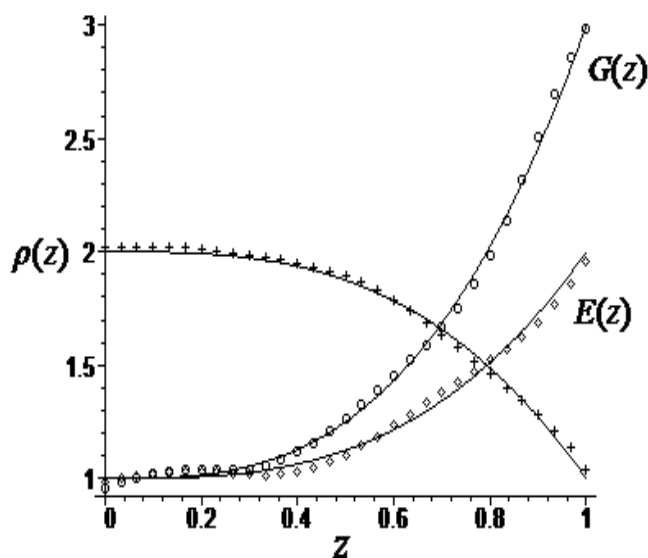


Рис. 2. Восстановление трех неоднородных характеристик стержня

для следующих законов $\rho(z) = 2 - z^3$, $E(z) = 1 + z^3$, $G(z) = 1 + 2z^3$. При продольных, изгибных и крутильных колебаниях рассматривались частотные отрезки $\chi \in [2, 3]$, $\lambda \in [2, 3]$, $\chi \in [2, 3.8]$, находящиеся между 1-ой и 2-ой резонансными частотами, измерения производились для пяти частот внутри выбранного диапазона. Для восстановления оказалось достаточно 5-ти итераций.

Необходимо заметить, что для восстановления функции, характеризующей закон изменения плотности для обеспечения единственности решения необходимо знание априорной информации о значении функции в месте защемления стержня. В противном случае погрешность восстановления функции на защемленном конце составляет около 20%.

Предложенный подход показал свою работоспособность в достаточно представительной серии вычислительных экспериментов при восстановлении гладких неоднородностей (для полиномиальных (монотонных и немонотонных), тригонометрических, показательных функций с большим градиентом). Отметим, что неоднородности с конечным числом разрывов первого рода (например, кусочно-постоянные) восстанавливаются значительно хуже и на основе предложенной схемы дают близкие к искомым в среднеквадратичном. Также нужно отметить, что процедура реконструкции более эффективна, если для ее осуществления выбираются частотные диапазоны, расположенные, либо до первого резонанса, либо между первым и вторым резонансом, причем их границы должны находиться вдали от резонансных частот.

Также были проведены вычислительные эксперименты об определении влияния погрешности входных данных на точность восстановления искомым характеристик. Их результаты показали, что при внесении во входную информацию погрешности, не превышающей 2%, погрешность восстановления искомым функций не превосходит 10%.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00194-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бочарова О. В., Ватульян А. О. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2008. №3. С. 33–37.
- [2] Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустич. журн. 2009. Т.55. №3. С. 275–282.
- [3] Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970.
- [4] Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
- [5] Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Доклады РАН 2005. Т.405. №3. С. 343–345.

Denina O. V. *Discovering inhomogeneous properties of rods.* The inverse problem concerning the reconstruction of the following inhomogeneous properties of the rod via combined analysis of rod's longitudinal, bending and torsion vibrations using amplitude-frequency characteristics is considered: Young modulus, shear modulus and density. The repetitive algorithms based on the apparatus of Fredholm integral equations of the first and the second kind are constructed to identify unknown properties of the material. Some specific examples of reconstruction the properties sought-for are considered.

РАВНОВЕСИЕ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ И ДИСКЛИНАЦИЯМИ

Дерезин С. В., Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках общей нелинейной теории оболочек типа Кирхгофа-Лява рассматривается задача сильного изгиба упругой пластинки, содержащей в плоском состоянии непрерывно распределённые поля краевых дислокаций и клиновых дисклинаций, а также другие источники собственных (внутренних) напряжений. В отличие от модели пластинок Кармана деформации в плоском напряжённом состоянии не считаются малыми. Выведена система нелинейных уравнений, содержащая в качестве неизвестных функций нормальный прогиб пластинки и коэффициенты первой квадратичной формы деформированной срединной поверхности пластинки. Кроме уравнений равновесия, выражающих баланс сил и моментов для любой части пластинки, данная система включает нелинейное условие несовместности метрических деформаций, содержащее плотности дислокаций и дисклинаций. Полученная система уравнений описывает, в частности, изгиб пластинки при отсутствии внешних нагрузок за счёт релаксации внутренних напряжений, обуславливающих плоское напряжённое состояние. В случае весьма тонкой пластинки (мембраны), не сопротивляющейся изгибу, и положительной плотности дисклинаций доказано существование, наряду с плоским напряжённым состоянием, также и изогнутой формы равновесия, переходя в которую мембрана полностью освобождается от внутренних напряжений.

1. Общие уравнения. Пусть q^1, q^2 — некоторые координаты в плоскости пластинки, ортогональной орту \mathbf{i}_3 ; $\mathbf{r}^\alpha, \mathbf{r}_\beta$ — соответствующие основной и взаимный базисы на плоскости. Здесь и далее греческие индексы традиционно принимают значения 1, 2. Деформация пластинки, рассматриваемой как двумерный континуум, задаётся в виде

$$\mathbf{R}(q^1, q^2) = \boldsymbol{\rho}(q^1, q^2) + \mathbf{i}_3 w(q^1, q^2), \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{i}_3 = 0. \quad (1)$$

В (1) функция w — прогиб пластинки. Предполагается, что поверхность изогнутой пластинки однозначно проектируется на плоскость. Из (1) имеем

$$\nabla \mathbf{R} = \nabla \boldsymbol{\rho} + \nabla w \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{G} = \nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^T = \nabla \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \boldsymbol{\rho}^T + \nabla w \nabla w, \quad (2)$$

где $\nabla = \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$ — оператор градиента в лагранжевых координатах на плоскости, $\mathbf{G} = G_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta$ — мера метрической деформации поверхности пластинки. Согласно (2) можно записать

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^* + \nabla w \nabla w, \quad \mathbf{G}^* = \nabla \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \boldsymbol{\rho}^T.$$

Предположим сначала, что пластинка в плоском недеформированном состоянии занимает многосвязную область. Считая, что тензор \mathbf{G} и прогиб w (а следовательно, и тензор \mathbf{G}^*) являются однозначными и гладкими функциями, поставим задачу определения плоского векторного поля $\boldsymbol{\rho}$ по заданному однозначному тензорному полю \mathbf{G}^* . Следуя методу работы [1], введём в рассмотрение плоские дефекты — краевые дислокации и клиновые дисклинации, а также перейдём от дискретного набора дефектов к их непрерывному распределению. В результате получим условие несовместности плоской нелинейной теории упругости

$$\nabla \cdot \left[I_2^{-1/2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{U}) \right] = \nabla \cdot \left(I_2^{-1/2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \right) + \beta, \quad (3)$$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{G}^*} = \frac{\sqrt{I_2} \mathbf{g} + \mathbf{G}^*}{\sqrt{2\sqrt{I_2} + I_1}}, \quad I_1 = \text{tr} \mathbf{G}^*, \quad I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{G}^* - \text{tr} \mathbf{G}^{*2}),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{E} \times \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3.$$

Здесь \mathbf{E} — трёхмерный единичный тензор, \mathbf{g} — плоский единичный тензор, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — плоский дискриминантный тензор, $\boldsymbol{\eta}_0$ — вектор плотности краевых дислокаций, β — плотность клиновых дисклинаций. Уравнение (3) отличается от уравнения (23) из [1] тем, что вместо \mathbf{U} надо подставить тензор $(\mathbf{G} - \nabla w \nabla w)^{\frac{1}{2}}$.

К уравнению несовместности надо присоединить уравнения равновесия пластинки ([2], стр.138)

$$\nabla_\alpha (\nu^{\alpha\beta} - \mu^{\alpha\delta} B_\delta^\beta) - B_\delta^\beta \nabla_\alpha \mu^{\alpha\delta} + F^\beta = 0, \quad (\beta = 1, 2) \quad (4)$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \mu^{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} (\nu^{\alpha\beta} - B_\delta^\alpha \mu^{\delta\beta}) + F = 0. \quad (5)$$

$$\chi \sqrt{\frac{G}{g}} \nu^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial W}{\partial G_{\alpha\beta}}, \quad -\chi \sqrt{\frac{G}{g}} \mu^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial W}{\partial B_{\alpha\beta}}, \quad (6)$$

$$G = G_{11} G_{22} - G_{12}^2, \quad g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2, \quad \chi = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 2, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

В формулах (4)–(6) ∇_α — ковариантная производная в метрике $G_{\alpha\beta}$, $\nu^{\alpha\beta}$ — тензор мембранных напряжений, $\mu^{\alpha\beta}$ — тензор изгибающих моментов, $B_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы деформированной срединной поверхности, F^β , F — поверхностные плотности внешних сил, $W = W(G_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta})$ — удельная потенциальная энергия деформации пластинки. Кроме того, справедливо соотношение

$$B_{\alpha\beta} = \frac{\nabla_\alpha \nabla_\beta w}{\sqrt{1 + \nabla w \cdot \nabla w}}. \quad (7)$$

С учётом (7) уравнения равновесия (4), (5) и уравнение несовместности (3) образуют систему четырёх уравнений относительно неизвестных w , $G_{\alpha\beta}$.

2. Условие несовместности. Приведём явную форму условия несовместности деформаций в декартовых координатах x_1 , x_2 , опустив для экономии места

выражения, стоящие в правой части и зависящие от поверхностных плотностей дефектов, а также других источников внутренних напряжений (например, связанных с ростом тканей в биологических системах [9]).

$$\begin{aligned}
R_{1212}^* &= R_{1212} + 2(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)[w, w] + \\
&+ \left[2G_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} - G_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 - G_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 G_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x_2^2} \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \\
&+ \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \left[2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right] + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \left[G_{22} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} \right) + G_{12} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} \right] + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \left[G_{11} \left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \right) + G_{12} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} \right] + \\
&+ 2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left[G_{22} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} - G_{12} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right] + 2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left[G_{11} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} - G_{12} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} \right] + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \left[2G_{12} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} - G_{22} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} - G_{12} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} \right] + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \left[2G_{12} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} - G_{11} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} - G_{12} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь R_{1212} — стандартное выражение из [2] (формула (1.4.8) на стр. 29)

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= (G_{11}G_{22} - G_{12}^2) \left(\frac{\partial^2 G_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 G_{11}}{\partial x_2^2} \right) + \\
&+ G_{11} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right) + \\
&+ G_{22} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} - 2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right) - \right. \\
&\left. - G_{12} \left(2 \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_2} \frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right) \right].
\end{aligned}$$

$[w, w]$ — оператор Монжа–Ампера в декартовых координатах [6]

$$[w, w] = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2.$$

Величины R_{1212}^* и R_{1212} являются полными кривизнами (с точностью до коэффициента) двумерного континуума, вычисленными в метриках \mathbf{G}^* и \mathbf{G} .

3. Частные случаи поставленной задачи. 1. Безмоментная (весьма тонкая) пластинка — мембрана. В этом случае в уравнениях (4), (5) надо положить $\mu^{\alpha\beta} = 0$, а удельную энергию W считать зависящей только от $G_{\alpha\beta}$: $W = W(G_{\alpha\beta})$. На краю мембраны задаётся функция прогиба w и вектор усилий $N_\alpha \nu^{\alpha\beta}$, где \mathbf{N} — вектор нормали к границе поверхности деформированной мембраны.

2. Пусть внешние и контурные силы отсутствуют. Тогда имеются два решения: а) плоское напряжённое состояние мембраны, обусловленное распределёнными дефектами, в котором $w = 0$; б) ненапряжённое состояние мембраны, в котором $\nu^{\alpha\beta} = 0$, $w \neq 0$. Уравнения равновесия (4), (5) и силовые граничные условия тождественно удовлетворяются. Из определяющих соотношений мембраны теперь вытекает $G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Подставляя это условие в уравнение несовместности (8), получим уравнение относительно только одной неизвестной функции w , которое оказывается классическим уравнением Монжа-Ампера [6]. Для случая пластинок, описываемых теорией Кармана, подобный результат был получен в работах [3, 4]. Если краевые дислокации отсутствуют, то знак плотности дисклинаций β в конкретной точке определяет знак гауссовой кривизны поверхности мембраны в этой точке. Согласно результатам А.В. Погорелова [6] задача Дирихле для уравнения Монжа-Ампера разрешима при непрерывной и положительной правой части, т. е. для положительной плотности дисклинаций.

Решение б) описывает явление релаксации [5] внутренних напряжений в мембране, обусловленных распределёнными дефектами. Переходя в третье измерение, т. е. приобретая изогнутую форму, мембрана освобождается от указанных внутренних напряжений. Задача б) является чисто геометрической. В её формулировке не участвуют ни параметры физических свойств упругого материала, ни толщина мембраны, а только плотности дислокаций и дисклинаций. Решение задачи б) представляет собой реализацию двумерного многообразия с кривизной и кручением в виде поверхности в трёхмерном пространстве. При этом гладкость вложения поверхности в трёхмерное пространство существенно зависит от вида правой части.

Отметим интересные приложения развиваемой теории в задачах описания структур фуллеренов и других углеродных наноструктур [7], [8]. Введение положительных дисклинаций приводит к релаксации графитовой плоскости и появлению положительной кривизны. Однако, с физической точки зрения, могут существовать и структуры с отрицательной гауссовой кривизной. Такие структуры наблюдались впервые при синтезе одностеночных углеродных нанотрубок. Поверхность с отрицательными дисклинациями в работе [7] с хорошей точностью аппроксимировалась поверхностью однополостного гиперболоида.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дерезин С. В., Зубов Л. М. Уравнения нелинейно упругой среды с непрерывно распределёнными дислокациями и дисклинациями // ДАН. 1999. Т.366. № 6. С. 762–765.
- [2] Zubov L. M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. 205 p.
- [3] Зубов Л. М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями // ДАН. 2007. Т.412. № 3. С. 343–346.
- [4] Seung H. S., Nelson D. R. Defects in flexible membranes with crystalline order // Phys. Rev. A. 1988. Vol.38. № 2. pp. 1005–1018.
- [5] Карякин М. И. Равновесие и устойчивость нелинейно упругой пластинки с клиновой дисклинацией // ПМТФ. 1992. № 3. С. 157–163.
- [6] Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа-Ампера $\det ||z_{ij}|| = \varphi(z_1, \dots, Z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. М.: Наука, 1988. 96 с.
- [7] Колесников Д. В., Осипов В. А. Теоретико-полевой подход к описанию электронных свойств углеродных наноструктур // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2009. Т.40. Вып.4. С. 967–1011.
- [8] Колесникова А. Л., Романов А. Е. О дисклинационном подходе при описании структуры фуллеренов // ФТТ. 1998. Т.40. № 6. С. 1178–1180.
- [9] Dervaux J., Ciarletta P., Ben Amar M. Morphogenesis of thin hyperelastic plates: A constitutive theory of biological growth in the Föppl-von Karman limit // Journ. Mech. Phys. Sol. 2009. V.57. pp. 458–471.

Derezin S. V., Zubov L. M. *Equilibrium of a nonlinearly elastic plate with distributed dislocations and disclinations.* In the framework of general nonlinear shell theory of Kirchhoff–Love type we consider a buckling problem for an elastic plate containing continuously distributed fields of edge dislocations and wedge disclinations as well as other sources of eigen-(internal) stresses. To differ from the von Karman plate model the tangential strains are not supposed to be small. We obtain a system of nonlinear partial differential equations with respect to the transverse deflection and the coefficients of the first fundamental form. In addition to the equilibrium equations which postulate the balance of elastic forces and moments for any part of the plate the system contains a nonlinear incompatibility condition for the metrics including densities of dislocations and disclinations. The system describes in particular the bending of the plate due to relaxation of internal stresses with no external forces applied. In the case of very thin plate (membrane) that doesn't resist to bending and has a positive disclination density it was proven that there exists along with the plane stress state solution also the bent form which corresponds to the relaxed state of the membrane.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В КВАЗИДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Приведена процедура осреднения, позволяющая получить уравнения для описания электрогидродинамических течений в многокомпонентных смесях в квазидвумерных областях, в частности, в жидких подвешенных пленках.

Введение. В работах [1]– [3] построена и исследована математическая модель, описывающая вращательное электрогидродинамическое (ЭГД) течение в тонкой, свободно подвешенной жидкой пленке с плоскими границами. В работах [1]– [2] математическая модель приведена без вывода осредненных уравнений, а работа [3] содержит такой вывод лишь схематично. Настоящая статья ликвидирует данный пробел — вывод осредненных уравнений приведен полностью, а использованная техника позволит в дальнейшем строить математические модели ЭГД течений, например, для пленок с деформируемыми свободными границами.

1. Основные уравнения. Система уравнений, описывающая ЭГД течения в многокомпонентной смеси без учета пондеромоторных сил $\frac{1}{2}\rho\mathbf{E}^2\nabla\varepsilon$ в размерных переменных, имеет вид

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\rho\Delta\mathbf{v} + q\mathbf{E}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = q, \quad q = F \sum_k e_k c_k, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_k + \operatorname{div}\mathbf{i}_k = 0, \quad \mathbf{i}_k = -D_k\nabla c_k + e_k\gamma_k c_k\mathbf{E}, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — скорость, p — давление, φ , \mathbf{E} — потенциал и напряженность электрического поля, c_k , \mathbf{i}_k — концентрация и плотность потока концентрации, ρ — плотность, D_k , γ_k , e_k — коэффициент диффузии, подвижность в электрическом поле и удельный заряд, q — плотность заряда, ε — диэлектрическая проницаемость, F — число Фарадея, ν — коэффициент кинематической вязкости.

В случае квазиплоских областей (см. рис. 1), толщина которых много меньше характерного размера в плоскости, например, тонкой пленки с плоскими границами, удобно осуществить следующий переход к безразмерным переменным (в дальнейшем квазиплоские области для удобства изложения будем называть пленкой)

$$[x, y] = a, \quad [z] = h, \quad [t] = \mathcal{T}, \quad [u, v] = \frac{a}{\mathcal{T}}, \quad [w] = \frac{h}{\mathcal{T}}, \quad \gamma = \frac{F\mathcal{E}a}{RT},$$

$$[c_k] = \mathcal{C}, \quad [E] = \mathcal{E}, \quad [\varphi] = \mathcal{E}a, \quad [q] = F\mathcal{C}, \quad [p] = F\mathcal{C}\mathcal{E}a\delta^2,$$

$$\mathcal{T}^2 = \frac{\rho a}{F\mathcal{C}\mathcal{E}\delta^2}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{a^2}, \quad \nu = \frac{\nu^*\mathcal{T}}{a^2}, \quad D_k = \frac{D_k^*\mathcal{T}}{a^2}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^*\mathcal{E}}{aF\mathcal{C}}.$$

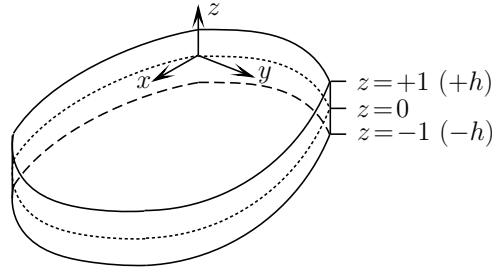


Рис. 1. Квазиплоская область (пленка)

Здесь a — характерный размер в плоскости пленки; h — характерная полутолщина пленки; ρ — плотность жидкости; \mathcal{T} , \mathcal{P} , \mathcal{C} — характерные время, давление, молярная концентрация; $F\mathcal{C}$ — характерная плотность заряда; F — число Фарадея; R — универсальная газовая константа; T — абсолютная температура смеси; $a\mathcal{E}$ — характерная разность потенциалов в направлении x , δ — относительная полутолщина пленки; ν^* , D_k^* , ε^* — характерные значения кинематической вязкости, коэффициентов диффузии, диэлектрической проницаемости жидкости.

Система уравнений в безразмерных переменных, описывающая электрогидродинамические процессы для многокомпонентной жидкости, имеет вид (для обозначения безразмерных величин сохранены те же символы, что и для размерных)

$$\delta^2 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\delta^2 \nabla_0 p + \delta^2 \nu \Delta_0 \mathbf{u} + \nu \partial_{zz} \mathbf{u} - q \nabla_0 \varphi, \quad (4)$$

$$\delta^4 \frac{dw}{dt} = -\delta^2 \partial_z p + \delta^4 \nu \Delta_0 w + \nu \delta^2 \partial_{zz} w - q \partial_z \varphi, \quad (5)$$

$$\operatorname{div}_0 \mathbf{u} + \partial_z w = 0, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_0 + w \partial_z, \quad (6)$$

$$\varepsilon (\delta^2 \Delta_0 \varphi + \partial_{zz} \varphi) = -\delta^2 q, \quad q = \sum_k z_k c_k, \quad (7)$$

$$\delta^2 \frac{dc_k}{dt} + \delta^2 \operatorname{div}_0 \mathbf{i}_k + \partial_z I_k = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{i}_k = -D_k (\nabla_0 c_k + z_k \gamma c_k \nabla_0 \varphi), \quad I_k = -D_k (\partial_z c_k + z_k \gamma c_k \partial_z \varphi). \quad (9)$$

$$\mathbf{\Gamma} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, 0) = \nu (\partial_z \mathbf{u} + \delta^2 \nabla_0 w), \quad \nabla_0 = (\partial_x, \partial_y), \quad \Delta_0 = \partial_{xx} + \partial_{yy}. \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, w)$ — скорость, $\mathbf{u} = (u, v)$ — скорость течения в плоскости пленки, \mathbf{i}_k — плотность потока концентрации в плоскости пленки, I_k — плотность потока концентрации поперек пленки, z_k — зарядности компонент, γ — параметр, характеризующий отношение интенсивности переноса концентрации электрическим полем к переносу за счет диффузии, δ — относительная полутолщина пленки, $\mathbf{\Gamma}$ — вектор касательных напряжений (σ_{13} , σ_{23} — компоненты тензора вязких напряжений).

На границах пленки $z = \mp 1$ зададим условия непротекания, условия отсутствия касательных напряжений, условия непроницаемости границ для концентраций и условия отсутствия нормальных компонент электрического поля

$$w|_{z=\mp 1} = 0, \quad \mathbf{\Gamma}|_{z=\mp 1} = \nu \partial_z \mathbf{u}|_{z=\mp 1} = 0, \quad I_k|_{z=\mp 1} = 0, \quad \partial_z \varphi|_{z=\mp 1} = 0. \quad (11)$$

Обратим внимание, что краевых условий (11) достаточно для получения уравнений, осредненных по толщине области. Краевые условия для осредненной модели могут быть поставлены независимо от условий (11).

2. Процедура осреднения. Введем операцию осреднения по толщине

$$\bar{f}(x, y, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x, y, z, t) dz, \quad \tilde{f} = f - \bar{f}. \quad (12)$$

Решение задачи (4)–(11) разыскиваем в виде рядов по степеням δ^2

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}, w, p, q, c_k, \varphi\} &= \sum_{m=0} \{\mathbf{u}^m, w^m, p^m, q^m, c_k^m, \varphi^m\} \delta^{2m} = \\ &= \sum_{m=0} \{\bar{\mathbf{u}}^m, \bar{w}^m, \bar{p}^m, \bar{q}^m, \bar{c}_k^m, \bar{\varphi}^m\} \delta^{2m} + \sum_{m=0} \{\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{w}^m, \tilde{p}^m, \tilde{q}^m, \tilde{c}_k^m, \tilde{\varphi}^m\} \delta^{2m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Осредняя (4), (6)–(9), с учетом краевых условий (11) получим **точную**, но **незамкнутую** систему уравнений

$$\delta^2(\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \nabla_0 \bar{\mathbf{u}}) + \delta^2 \operatorname{div}_0(\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = -\delta^2 \nabla_0 \bar{p} + \delta^2 \nu \Delta_0 \bar{\mathbf{u}} - \bar{q} \nabla_0 \bar{\varphi} - \overline{\tilde{q} \nabla_0 \tilde{\varphi}}, \quad (14)$$

$$\operatorname{div}_0 \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (15)$$

$$\varepsilon \Delta_0 \bar{\varphi} = -\bar{q}, \quad (16)$$

$$\partial_t \bar{c}_k + \bar{\mathbf{u}} \nabla_0 \bar{c}_k + \operatorname{div}_0(\tilde{\mathbf{u}} \tilde{c}_k) + D_k \operatorname{div}_0 \bar{\mathbf{i}}_k = 0, \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{i}}_k = -D_k(\nabla_0 \bar{c}_k + z_k \gamma \bar{c}_k \nabla_0 \bar{\varphi} + z_k \gamma \tilde{c}_k \nabla_0 \tilde{\varphi}). \quad (18)$$

Для замыкания уравнений с точностью до членов $O(\delta^4)$ достаточно, используя разложения (13), вычислить члены

$$\overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}} = \overline{\tilde{\mathbf{u}}^0 \otimes \tilde{\mathbf{u}}^0} + O(\delta^2), \quad (19)$$

$$\overline{\tilde{q} \nabla_0 \tilde{\varphi}} = \overline{(\tilde{q}^0 + \delta^2 \tilde{q}^1) \nabla_0 (\tilde{\varphi}^0 + \delta^2 \tilde{\varphi}^1)} + O(\delta^4), \quad (20)$$

$$\overline{\tilde{\mathbf{u}} \tilde{c}_k} = \overline{(\tilde{\mathbf{u}}^0 + \delta^2 \tilde{\mathbf{u}}^1) (\tilde{c}_k^0 + \delta^2 \tilde{c}_k^1)} + O(\delta^4), \quad (21)$$

$$\overline{\tilde{c}_k \nabla_0 \tilde{\varphi}} = \overline{(\tilde{c}_k^0 + \delta^2 \tilde{c}_k^1) \nabla_0 (\tilde{\varphi}^0 + \delta^2 \tilde{\varphi}^1)} + O(\delta^4). \quad (22)$$

Для главных членов разложения (13) из уравнений (5), (7)–(9) и условий (11) имеем

$$(\bar{q}^0 + \tilde{q}^0) \partial_z \tilde{\varphi}^0 = 0, \quad \bar{q}^0 + \tilde{q}^0 = \sum_k z_k (\bar{c}_k^0 + \tilde{c}_k^0), \quad (23)$$

$$\partial_z \tilde{I}_k^0 = 0, \quad \bar{I}_k^0 + \tilde{I}_k^0 = \partial_z \bar{c}_k^0 + z_k \gamma (\bar{c}_k^0 + \tilde{c}_k^0) \partial_z \tilde{\varphi}^0, \quad (\bar{I}_k^0 + \tilde{I}_k^0)|_{z=\mp 1} = 0. \quad (24)$$

Из (23), (24) следуют соотношения $\partial_z \tilde{\varphi}^0 = 0$, $\partial_z \tilde{I}_k^0 = 0$, $\tilde{I}_k^0 = \partial_z \tilde{c}_k^0$. Очевидно, что если $\partial_z \tilde{f} = 0$, то $\tilde{f} = 0$ и $f = \bar{f}$. Тогда

$$\tilde{\varphi}^0 = 0, \quad \tilde{c}_k^0 = 0, \quad \tilde{q}^0 = 0, \quad \varphi^0 = \bar{\varphi}^0, \quad c_k^0 = \bar{c}_k^0, \quad q^0 = \bar{q}^0. \quad (25)$$

С учетом (25) выражения (20)–(22) примут вид

$$\overline{\tilde{q}\nabla_0\tilde{\varphi}} = O(\delta^4), \quad \overline{\tilde{\mathbf{u}}\tilde{c}_k} = \delta^2\overline{\tilde{\mathbf{u}}^0\tilde{c}_k^1} + O(\delta^4), \quad \overline{\tilde{c}_k\nabla_0\tilde{\varphi}} = O(\delta^4).$$

Для определения $\tilde{\mathbf{u}}^0$ из (4) с учетом (25) имеем уравнение

$$\nu\partial_{zz}\tilde{\mathbf{u}}^0 - \overline{q}^0\nabla_0\tilde{\varphi}^0 = 0.$$

Величина $\tilde{\mathbf{u}}^0$ требуется для вычисления члена (19) с точностью $O(\delta^2)$. В частности, это означает, что допустимы замены $\overline{q} = \overline{q}^0 + O(\delta^2)$, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}^0 + O(\delta^2)$ и величины \tilde{w}_0 , $\tilde{\mathbf{u}}_0$ определяются уравнениями

$$\nu\partial_{zz}\tilde{\mathbf{u}}^0 - \overline{q}\nabla_0\overline{\varphi} = 0, \quad \operatorname{div}_0(\overline{\mathbf{u}}^0 + \tilde{\mathbf{u}}^0) + \partial_z\tilde{w}^0 = 0 \quad (26)$$

с краевым условием

$$\overline{w}^0 + \tilde{w}^0 = 0, \quad z = \mp 1. \quad (27)$$

Потребуем $\overline{w}^0 = 0$. Интегрируя (26), (27), получим

$$\tilde{\mathbf{u}}^0 = g'(z)\mathbf{U}, \quad \tilde{w}^0 = -g(z)\operatorname{div}_0\mathbf{U}, \quad \nu\mathbf{U} = \overline{q}\nabla_0\overline{\varphi}, \quad (28)$$

$$\operatorname{div}_0\overline{\mathbf{u}}^0 = 0, \quad g(z) = \frac{1}{6}(z^3 - z), \quad \overline{g(z)} = 0, \quad \overline{g'(z)} = 0.$$

Здесь \mathbf{U} — скорость течения вязкой жидкости, индуцированная переносом заряда \overline{q} электрическим полем напряженности $\nabla_0\overline{\varphi}$.

Обратим внимание, что на границах $z = \mp 1$ для величины $\tilde{\mathbf{u}}^0$ **не следует** требовать выполнение краевого условия $\nu\partial_z\mathbf{u}|_{z=\mp 1} = 0$ из (11). Это условие должно быть выполнено лишь для $\tilde{\mathbf{u}}$. Соотношение $\partial_z\tilde{\mathbf{u}}^0 = 0$ при $z = \mp 1$ немедленно повлекло бы равенство $\mathbf{U} = 0$. Заметим, что требование $\overline{w}^0 = 0$ является эвристическим и мотивировано лишь физическими соображениями — отсутствием среднего движения всей пленки в целом.

Используя (28), для (19) имеем

$$\overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}} = \overline{g'^2(z)}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + O(\delta^2), \quad \overline{g'^2(z)} = \frac{1}{45}.$$

Для вычисления $\overline{\tilde{\mathbf{u}}\tilde{c}_k}$ требуется рассматривать последующее приближение для уравнений (7)–(9)

$$\partial_t c_k^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla_0 c_k^0 + w^0 \partial_z c_k^0 + \operatorname{div}_0 \mathbf{i}_k^0 + \partial_z I_k^1 = 0, \quad \mathbf{i}_k^0 = -D_k \left(\nabla_0 c_k^0 + z_k \gamma c_k^0 \nabla_0 \varphi^0 \right),$$

$$I_k^1 = -D_k \left(\partial_z c_k^1 + z_k \gamma (c_k^1 \partial_z \varphi^0 + c_k^0 \partial_z \varphi^1) \right), \quad \varepsilon (\Delta_0 \varphi^0 + \partial_{zz} \varphi^1) = -q^0.$$

Или с учетом (25)

$$\partial_t \tilde{c}_k^0 + (\overline{\mathbf{u}}^0 + \tilde{\mathbf{u}}^0) \cdot \nabla_0 \tilde{c}_k^0 + \operatorname{div}_0 \mathbf{i}_k^0 + \partial_z I_k^1 = 0, \quad \mathbf{i}_k^0 = -D_k \left(\nabla_0 \tilde{c}_k^0 + z_k \gamma \tilde{c}_k^0 \nabla_0 \tilde{\varphi}^0 \right),$$

$$I_k^1 = -D_k \left(\partial_z \tilde{c}_k^1 + z_k \gamma \tilde{c}_k^0 \partial_z \tilde{\varphi}^1 \right), \quad \varepsilon (\Delta_0 \tilde{\varphi}^0 + \partial_{zz} \tilde{\varphi}^1) = -\tilde{q}^0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\partial_{zz}\tilde{\varphi}^1$ не зависит от z , и для определения \tilde{c}_k^1 имеем уравнение с краевым условием, вытекающим из (11)

$$\tilde{\mathbf{u}}^0 \cdot \nabla_0 \bar{c}_k^0 - D_k \partial_{zz} \tilde{c}_k^1 = 0, \quad \partial_z \tilde{c}_k^1 \Big|_{z=\mp 1} = 0. \quad (29)$$

При вычислении $\overline{\tilde{\mathbf{u}}c_k^1}$ в уравнении (29) допустима замена $\bar{c}_k = \bar{c}_k^0 + O(\delta^2)$, т. к. для (21) требуется точность $O(\delta^2)$. Это позволяет проинтегрировать задачу (29)

$$D_k \tilde{c}_k^1 = (g_0(z) - \overline{g_0(z)}) \mathbf{U} \cdot \nabla_0 \bar{c}_k, \quad g_0(z) = \frac{z^2}{12} \left(\frac{1}{2} z^2 - 1 \right).$$

Окончательно имеем

$$\overline{\tilde{\mathbf{u}}c_k^1} = -\alpha_k \mathbf{U} (\mathbf{U} \cdot \nabla_0 \bar{c}_k), \quad \alpha_k = -\frac{1}{D_k} \left(\overline{g'(z)(g_0(z) - \overline{g_0(z)})} \right) = \frac{4}{945 D_k}.$$

3. Осредненные уравнения для квазидвумерных областей. В заключение приведем осредненные двумерные уравнения, описывающие процессы в тонкой пленке с сохранением членов порядка $O(\delta^2)$, и использованные в [1]–[3]

$$\delta^2 \frac{d_0 \bar{\mathbf{u}}}{dt} + \beta \nabla_0 (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\delta^2 \nabla_0 \bar{p} + \delta^2 \nu \Delta_0 \bar{\mathbf{u}} - \nu \mathbf{U}, \quad \text{div}_0 \bar{\mathbf{u}} = 0,$$

$$\varepsilon \Delta_0 \bar{\varphi} = -\bar{q}, \quad \bar{q} = \sum_k z_k \bar{c}_k,$$

$$\frac{d_0 \bar{c}_k}{dt} - \alpha_k \delta^2 \text{div}_0 (\mathbf{U} (\mathbf{U} \cdot \nabla_0 \bar{c}_k)) + \text{div}_0 \bar{\mathbf{i}}_k = 0, \quad \bar{\mathbf{i}}_k = -D_k (\nabla_0 \bar{c}_k + z_k \gamma \bar{c}_k \nabla_0 \bar{\varphi}),$$

$$\frac{d_0}{dt} = \partial_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_0, \quad \nu \mathbf{U} = \bar{q} \nabla_0 \bar{\varphi}, \quad \beta = \frac{\delta^2}{45}, \quad \alpha_k = \frac{4}{945 D_k}.$$

Подчеркнем, что параметр δ^2 теперь не следует устремлять к нулю, это такой же равноправный параметр как ν , ε , γ и др.

Работа поддержана грантами АВЦП 2.1.1/6095 и 2.1.1/554 и РФФИ 10-01-00452, 08-01-00895, 10-05-00646, CRDF-РФФИ 09-01-92504-ИК, и грантом Федерального агентства по науке и инновациям РФ (госконтракт № 02.740.11.5189).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Владимиров В. А., Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Численное исследование ЭГД течения в тонкой пленке // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск «Актуальные проблемы математической гидродинамики». С. 46–50.
- [2] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Вращательное ЭГД течение в подвешенной жидкой пленке // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 2009. № 5. С. 18–23.
- [3] Shiryayeva E. V., Vladimirov V. A., Zhukov M. Yu. Theory of rotating electrohydrodynamic flows in a liquid film // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80. № 4, pp. 041603-1–041603-15.

Zhukov M. Yu., Shiryayeva E. V. *The electrohydrodynamic flows equations in quasi-two-dimensional domains.* The equations describing electrohydrodynamic flows in multicomponent mixtures in quasi-two-dimensional domains are obtained with help of depth-averaging method.

ВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В СЛОЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА СОРЕ

Зеньковская С. М., Прозоров О. А., Шлейкель А. Л.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

На основе анализа осредненной задачи исследована двухдиффузионная конвекция Марангони в слое бинарной смеси при действии высокочастотной вибрации. Рассмотрен также случай, когда учитывается термодиффузия. Численно и асимптотически изучены спектральные задачи устойчивости, построены нейтральные кривые.

Рассматривается действие высокочастотной поступательной вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном слое бинарной смеси, ограниченном свободной деформирующейся поверхностью и твердой стенкой. Основное внимание уделяется анализу влияния вибрации и термодиффузии на возникновение конвекции Марангони. В данной работе также, как и в [1], исследования проводятся на основе анализа осредненной задачи. К исходной задаче применяется метод осреднения, который позволяет разыскивать решение в виде суммы плавных и быстрый составляющих, получить задачу для плавных компонент и выражения для быстрых через плавные. Основное ограничение метода осреднения состоит в том, что скорость вибрации ω должна быть велика, а амплитуда скорости конечна, так что закон колебаний имеет вид $x_3 = b/\omega f(\omega t)$, где f – 2π -периодическая функция с нулевым средним, ω – частота, b – амплитуда скорости вибрации. Колебания происходят вдоль вектора $\mathbf{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$. В результате осреднения в случае однородной жидкости приходим к задаче [1]–[2]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla q + \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{dT}{dt} &= Pr^{-1} \Delta T, \quad \frac{dC}{dt} = Sc^{-1} (\Delta C - \varepsilon \Delta T), \\ \mathbf{w} &= -\nabla \Phi + \mathbf{s}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Краевые условия на осредненной свободной поверхности $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \boldsymbol{\ell}) &= \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \boldsymbol{\ell} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi}{\partial x_2}, 1 \right), \\ \tau_{ik} n_k - \left(q + Ga\xi - Re^2 \left(\frac{\mathbf{w}^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\ell}) \right) \right) n_i &= \\ = 2K \left(C_p - \frac{Ma_1}{Pr} T - \frac{Ma_2}{Sc} C \right) n_i + \frac{Ma_1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{Ma_2}{Sc} \frac{\partial C}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} - Bi_1 T = \delta_{11}, \quad \frac{\partial C}{\partial n} - Bi_2 C = \delta_{12}, \quad \Phi = 0.$$

На твердой стенке $x_3 = 1$ условия следующие

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} + B_{01} T = \delta_{21}, \quad \frac{\partial C}{\partial x_3} + B_{02} T = \delta_{22}, \quad \mathbf{w}_n = 0. \quad (3)$$

Здесь v' , q , T , C — скорость, давление, температура, концентрация примеси соответственно. Задача содержит безразмерные параметры: Pr , Sc , Ga , Ma_1 , Ma_2 , Bi_1 , Bi_2 , C_p — числа Прандтля, Шмидта, Галилея, Марангони тепловое и концентрационное, два числа Био, безразмерный коэффициент поверхностного натяжения и вибрационный параметр $Re^2 = \frac{b^2 h^2}{\nu^2} \langle f'^2 \rangle$, который входит в краевые условия. Осредненная задача (1)–(3) имеет решение

$$\begin{aligned} v_0 = 0, \quad T_0 = z, \quad C_0 = z, \quad q_0 = \frac{Re^2}{2} \cos^2 \varphi, \\ \mathbf{w}_0 = (\cos \varphi, 0, 0), \quad \Phi_0 = x_3 \sin \varphi, \quad \xi_0 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При исследовании устойчивости этого решения приходим к спектральной задаче для нормальных возмущений. Далее будем рассматривать термодиффузионную конвекцию. В этом случае градиент концентраций создается не внешними условиями, а является следствием эффекта термодиффузии Соре. В случае слоя с твердыми стенками вибрационная конвекция с учетом эффекта Соре рассмотрена в [3].

В отсутствие вибрации двухдиффузионная конвекция Марангони изучалась во многих работах, например, в [4], [5]. Действие высокочастотной вибрации рассмотрена в [6], но в этой работе исследовалась только монотонная неустойчивость. В данной статье рассматривается как монотонная, так и колебательная неустойчивость. При этом большое внимание уделяется построению длинноволновой асимптотики, которая дает возможность выяснить роль физических параметров, а также может служить хорошим начальным приближением для расчета нейтральных кривых монотонной и колебательной неустойчивости. Соответствующая спектральная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda Lv = L^2 v, \quad \lambda Pr \theta = L \theta - v, \quad \lambda Sc C = L(C - Sr T) - Sr Lev, \\ z = 0 : \quad v = \lambda Pr \delta, \quad D^2 v + \alpha^2 v = Ma \alpha^2 (\theta + C + \delta(1 + Sr)), \\ Cr((3\alpha^2 + \lambda)Dv - D^3 v) = \alpha^2 (\alpha^2 + BO + \mu \alpha \operatorname{th} \alpha) \delta, \\ D\theta - Bi(\theta + \delta) = 0, \quad DC - SrDT = 0, \\ z = 1 : \quad v = Dv = 0, \quad B_1 D\theta + B_0 \theta = 0, \quad DC - SrDT = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта задача содержит безразмерные параметры: $Pr = \frac{\nu}{\chi}$, $Sc = \frac{\nu}{D}$ — числа Прандтля и Шмидта, $Sr = -\frac{\alpha \sigma_2}{\sigma_1}$ — число Соре, $Le = \frac{Sc}{Pr}$ — число Льюиса, $Ma = \frac{A_1 \sigma_1 h^2}{\rho_0 \chi \nu}$ — число Марангони, $Cr = (Pr C_p)^{-1}$ — капиллярный параметр, $BO = \frac{Ga}{C_p}$ — гравитационное число Бонда, $\mu = Re^2 \sin^2 \varphi C_p^{-1}$ — вибрационное число Бонда, λ — спектральный параметр.

Монотонная неустойчивость, длинноволновая асимптотика.

В этом случае полагаем $\lambda = 0$ и неизвестные разыскиваем в виде

$$\theta = \theta_0(z) + \alpha^2 \theta_1(z) + \dots, \quad C = C_0(z) + \alpha^2 C_1(z) + \dots, \quad Ma = M_0 + \alpha^2 M_1 + \dots$$

$$M_0 = 48 \frac{BO(Bi(B_1 + B_0) + B_0)}{SrLeBO(Bi(B_1 + B_0) + B_0) + 72CrB_0(Sr + 1)}.$$

Рассмотрим частные случаи этой формулы.

$$B_1 = 0, B_0 = 1, Bi \neq 0, \quad M_0 = 48 \frac{BO(1 + Bi)}{SrLeBOBi + SrLeBO + 72Cr + 72CrSr},$$

$$B_1 = 1, B_0 = 0, Bi \neq 0, \quad M_0 = 48 \frac{1}{SrLe},$$

$$B_1 = 0, B_0 = 1, Bi = 0, \quad M_0 = 48 \frac{PrBO}{(72CrPr + ScBO)Sr + 72CrPr},$$

$$B_1 = 1, B_0 = 0, Bi = 0, \quad M_0 = 48 \frac{PrBO}{(ScBO + 72PrCrPrBO)Sr + 72PrCr + PrBO}.$$

Ниже приведено сравнение асимптотических и численных значений при фиксированных значениях параметров: $\mu = 2.247$, $Sc = 1.000$, $Pr = 0.010$, $BO = 0.005$, $Cr = 0.033$, $Sr = 0.01$.

$$B_1 = 1.0, B_0 = 0.0, Bi = 0.0, \quad \alpha = 0.0010, \quad M_0 = 0.6243889, \quad Ma = 0.624390,$$

$$B_1 = 0.0, B_0 = 1.0, Bi = 0.0, \quad \alpha = 0.0010, \quad M_0 = 0.0617485, \quad Ma = 0.061787,$$

$$B_1 = 0.0, B_0 = 1.0, Bi = 0.1, \quad \alpha = 0.0010, \quad M_0 = 0.0674892, \quad Ma = 0.067531,$$

$$B_1 = 1.0, B_0 = 0.0, Bi = 0.1, \quad \alpha = 0.0010, \quad M_0 = 0.9600000, \quad Ma = 0.959860.$$

Как видно из полученных формул, при увеличении $Sr > 0$ число M_0 уменьшается, это свидетельствует о дестабилизирующем влиянии термодиффузии, даже в отсутствие вибрации. Действие вибрации проявляется при $BO = 0$, когда $M_0 = 0$, а второй член M_1

$$M_1 = \frac{2}{3} \frac{(1 + \mu)}{Cr(1 + Sr)} \frac{Bi(B_1 + B_0) + B_0}{B_0}, \quad B_0 \neq 0.$$

Если $Bi = 0$, то $M_1 = \frac{2}{3} \frac{(1 + \mu)}{1 + Sr}$. Если $1 + Sr < 0$, то $M_1 < 0$.

Из этой формулы видно, что вибрация оказывает стабилизирующее влияние при $B_0 \neq 0$.

На рис. 1–2 приведены графики нейтральных кривых $Ma(\alpha)$ при $Bi = 0.1$, $Sc = 1.0$, $Pr = 0.01$, $Le = 100$, $BO = 0.0049$, $Cr = 0.033$, $Sr = 0.01$, из которых видно стабилизирующее влияние вибрации. В случае монотонной неустойчивости нетрудно получить формулу для числа Марангони в упрощенном виде, так, например, в случае $B_1 = 0$, $B_0 = 1$, $Bi = 0$.

$$Ma = \frac{KPrN1}{D1},$$

где

$$K = \alpha^2 (\alpha^2 + BO + \mu \alpha \operatorname{th}(\alpha)), \quad N1 = -2\alpha^2 \operatorname{sh}(2\alpha) (2\alpha - \operatorname{sh}(2\alpha)),$$

$$D1 = K ((D1_S Sc + D1_P Pr) Sr + D2 Pr) + D3 Cr Pr (Sr + 1),$$

$$D1_S = -\operatorname{ch}(\alpha) (2 \operatorname{sh}(\alpha) \alpha + \operatorname{sh}(\alpha) \alpha^3 - \alpha^2 \operatorname{ch}(\alpha) - (\operatorname{ch}(\alpha))^3 + \operatorname{ch}(\alpha)),$$

$$D1_P = -\operatorname{sh}(\alpha) (\alpha^3 \operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{sh}(\alpha) (\operatorname{ch}(\alpha))^2 + \operatorname{sh}(\alpha)),$$

$$D2 = -\operatorname{sh}(\alpha) (\alpha^3 \operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{sh}(\alpha) (\operatorname{ch}(\alpha))^2 + \operatorname{sh}(\alpha)), \quad D3 = 8\alpha^7 \operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha).$$

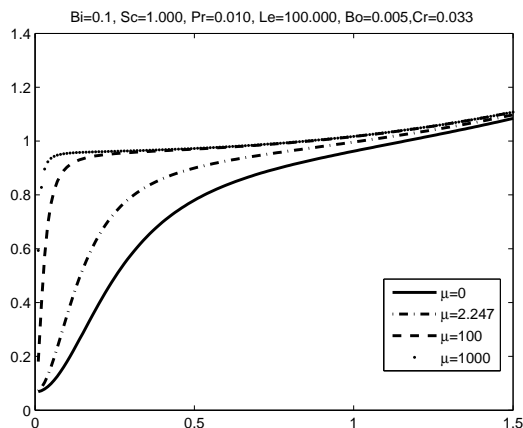


Рис. 1. $B_1 = 0$, $B_0 = 1$, различные μ .

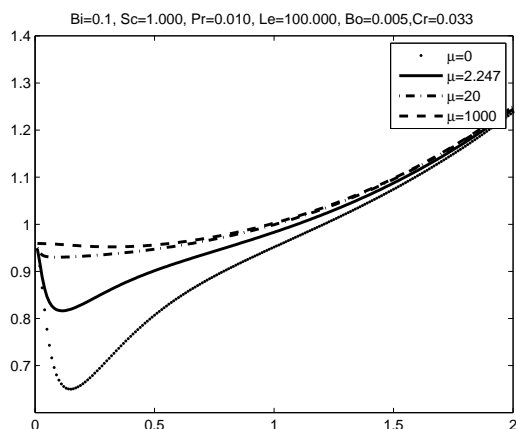


Рис. 2. $B_1 = 1$, $B_0 = 0$, различные μ .

Из этой формулы следует коротковолновая асимптотика

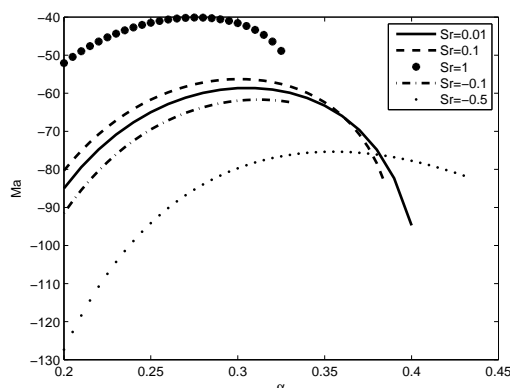
$$Ma = 8 \frac{\alpha^2}{(1 + Le) Sr + 1} + O(1), \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

В случае колебательной неустойчивости полагаем $\lambda = ic$ и строим асимптотику при $\alpha \rightarrow 0$ вида

$$c = c_0 + c_1 \alpha^2 + \dots, \quad Ma = \frac{M_0}{\alpha^2} + M_1 + \alpha^2 M_2 + \dots \quad (6)$$

Для неизвестного коэффициента c_0 получено трансцендентное уравнение, а для M_0 — явная формула, в главные члены c_0 и M_0 вибрационный параметр μ не входит. На рис. 3 приведены графики нейтральных кривых вблизи точки максимума для различных Sr .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований — номер проекта 09-01-00658-а.

Рис. 3. Колебательная неустойчивость, различные Sr .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л. Влияние примеси и термодиффузии на вибрационную конвекцию Марангони // XIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, 13-15 октября 2009 г.
- [2] Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. 2002. Т. 66. С. 573–583.
- [3] Gershuni G. Z., Kolesnikov A. K., Legros J. C., Myznikova B. I. On the vibrational convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect // J. Fluid Mech. 1997 Vol. 330, pp. 251–269.
- [4] Javanta K. Bhattacharjee Marangoni convection in binary liquids // Physical Review E. 1994. Vol. 50, № 2, pp. 1198–1205.
- [5] A. Bergeon, D. Henry, H. Benhadid, L. S. Tuckerman Marangoni convection in binary mixtures with Soret effect // Journal of Fluid Mechanics. 1998, Vol. 375, pp. 143–177.
- [6] Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в слое бинарной смеси с учетом эффекта Соре // Труды VII Российского симпозиума «Механика невесомости». Москва. 2000. С. 248–261.

Zenkovskaya S. M., Prozorov O. A., Shleykel A. L. *On the onset of convection in a vibrating layer of binary liquid with Soret effect.* Soret convection in a binary mixture layer under the action of high-frequency vibration is investigated on the basis of averaged problem. Spectral problems of stability arising are investigated numerically and asymptotically, neutral curves are plotted.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ

Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Универсальными деформациями (универсальными решениями) для данного класса материалов в механике сплошной среды называют такие деформации, которые удовлетворяют уравнениям равновесия для любого материала из этого класса при отсутствии массовых нагрузок. Значение универсальных решений состоит в том, что их можно эффективно использовать для экспериментального определения уравнений состояния материала. В нелинейной теории упругости простых (неполярных) материалов известны [1–5] пять семейств неоднородных деформаций, являющихся универсальными решениями уравнений равновесия для однородных несжимаемых изотропных тел.

В настоящей работе найдены универсальные конечные деформации для несжимаемых изотропных микрополярных материалов, т. е. тел с моментными напряжениями и вращательным взаимодействием частиц. Модель микрополярной среды (континуума Коссера) применяется для описания композитов, полимеров, наноструктурных, высокопористых, магнитных и других материалов. В силу кинематической независимости поля вращений континуума Коссера от поля смещений набор универсальных решений микрополярной упругости значительно превышает множество универсальных деформаций классической теории упругости неполярных материалов.

Система уравнений равновесия нелинейно упругой микрополярной несжимаемой среды при отсутствии массовых сил и моментов состоит [6–10] из уравнений статики для напряжений (1), определяющих соотношений (2) и геометрических соотношений (3), (4).

$$\operatorname{Div} \mathbf{T} = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{M} + \mathbf{T}_x = 0. \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H} - p\mathbf{I}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial W(\mathbf{E}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{E}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial W(\mathbf{E}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}}$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathbf{R}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{L} \times \mathbf{I} = -(\operatorname{grad} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T \quad (3)$$

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{E} = 1 \quad (4)$$

В (1)–(4) \mathbf{T} — тензор напряжений Коши, \mathbf{M} — тензор моментных напряжений типа Коши, \mathbf{F} — градиент деформации, \mathbf{R} — вектор положения частицы тела в деформированной конфигурации, \mathbf{H} — собственно ортогональный тензор микроповорота, характеризующий вращательные степени свободы частиц микрополярного тела, \mathbf{E} — мера деформации, \mathbf{L} — тензор изгибной деформации, \mathbf{I} — единичный тензор, W — удельная потенциальная энергия деформации, Div — оператор дивергенции в эйлеровых координатах, grad — оператор градиента в лагранжевых координатах, p — давление в несжимаемой среде, которое не определяется через

деформацию, символ \mathbf{T}_\times означает векторный инвариант тензора второго ранга: $\mathbf{T}_\times = (T_{sk}\mathbf{R}^s \otimes \mathbf{R}^k)_\times = T_{sk}\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}_k$, где $\mathbf{R}^s (s = 1, 2, 3)$ — векторный базис. В изотропной упругой среде тензоры $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — изотропные функции тензоров \mathbf{E} и \mathbf{L} , т. е. удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}, \varepsilon \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}) &= \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q}, \quad \varepsilon = \det \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}, \varepsilon \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}) &= \varepsilon \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \mathbf{Q} — произвольный ортогональный тензор. В (5) учтено, что величины \mathbf{E} и $\boldsymbol{\tau}$ являются истинными тензорами второго ранга, в то время как \mathbf{L} и $\boldsymbol{\mu}$ — псевдотензоры второго ранга. Деформацию сплошной среды будем задавать при помощи отображения $U^M(u^m)$, где $u^m (m = 1, 2, 3)$ — некоторые криволинейные координаты в отсчетной конфигурации тела (лагранжевы координаты), $U^M (M = 1, 2, 3)$ — некоторые криволинейные координаты в пространстве (эйлеровы координаты). В дальнейшем будут использоваться следующие координатные системы: декартова — $u^1 = x_1, u^2 = x_2, u^3 = x_3; U^1 = X_1, U^2 = X_2, U^3 = X_3$; цилиндрическая — $u^1 = r, u^2 = \varphi, u^3 = z; U^1 = R, U^2 = \Phi, U^3 = Z$; сферическая — $u^1 = r, u^2 = \varphi$ (долгота), $u^3 = \theta$ (широта); $U^1 = R, U^2 = \Phi, U^3 = \Theta$. В полюсах сферы $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Для этих ортогональных координат удобно применять ортонормированные векторные базисы, векторы которых касательны к координатным линиям. Орты декартовых координат обозначим $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Ортонормированные базисы, ассоциированные с цилиндрическими лагранжевыми и эйлеровыми координатами, обозначим соответственно $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$. Ортонормированные базисы, ассоциированные с сферическими лагранжевыми и эйлеровыми координатами, обозначим соответственно $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_\Theta$.

Перечисленные ниже универсальные решения для однородной несжимаемой изотропной микрополярной среды образуют шесть семейств деформаций. Каждое семейство характеризуется определенной зависимостью $U^M = U^M(u^m)$, задающей поле перемещений частиц тела и удовлетворяющее условию несжимаемости (4). Поскольку в микрополярном теле поле микроповоротов кинематически независимо от поля перемещений, для определения состояния среды необходимо еще задать собственно ортогональное тензорное поле $\mathbf{H}(u^m)$. По этой причине каждое из упомянутых шести семейств неоднородных универсальных деформаций состоит из нескольких подсемейств, различающихся полями микроповоротов. Для всех подсемейств приводятся выражения тензоров \mathbf{E} и \mathbf{L} .

1. Цилиндрический изгиб прямоугольной плиты

$$R = \sqrt{\frac{2x_1}{\alpha k}} + A, \quad \Phi = kx_2, \quad Z = \alpha x_3. \quad (6)$$

$$\mathbf{F} = (\alpha k R)^{-1} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_R + k R \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_\Phi + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (7)$$

Здесь α, k, A — постоянные.

$$\begin{aligned} \text{Подсемейство 1а):} \quad \mathbf{H} &= \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= (\alpha k R)^{-1} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + k R \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{L} = k \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Подсемейство 1b):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= (\alpha k R)^{-1} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 - k R \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 - \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{L} = -k \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Подсемейство 1c):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= -(\alpha k R)^{-1} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + k R \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 - \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{L} = -k \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Подсемейство 1d):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= -(\alpha k R)^{-1} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 - k R \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{L} = k \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (11)$$

2. Выпрямление сектора полого кругового цилиндра

$$X_1 = (2\alpha\eta)^{-1} r^2 + B, \quad X_2 = \eta\varphi, \quad X_3 = \alpha z \quad (12)$$

$$\mathbf{F} = (\alpha\eta)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 + \eta r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (13)$$

Подсемейство 2a):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= (\alpha\eta)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \eta r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{L} &= -r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Подсемейство 2b):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= -(\alpha\eta)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \eta r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{L} &= -r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (15)$$

Подсемейство 2c):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= (\alpha\eta)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \eta r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{L} &= -r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (16)$$

Подсемейство 2d):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= -(\alpha\eta)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \eta r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{L} &= -r^{-1} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (17)$$

3. Чистый изгиб или выворачивание сектора полого кругового цилиндра

$$R = \sqrt{\frac{r^2}{\alpha\chi} + D}, \quad \Phi = \chi\varphi, \quad Z = \alpha z. \quad (18)$$

$$\mathbf{F} = (\alpha\chi R)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + r^{-1} R \chi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (19)$$

Подсемейство 3a):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= (\alpha\chi R)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + r^{-1} R \chi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= (\chi - 1) r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Подсемейство 3b):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= -(\alpha\chi R)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + r^{-1} R \chi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= -(1 + \chi) r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Подсемейство 3с):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= (\alpha\chi R)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - r^{-1} R \chi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= -(1 + \chi) r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Подсемейство 3d):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{E} &= -(\alpha\chi R)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - r^{-1} R \chi \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \alpha \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= (\chi - 1) r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (23)$$

4. Выпрямление и изгиб сектора полого кругового цилиндра

$$R = \sqrt{G - \frac{r^2}{st}}, \quad \Phi = sz, \quad Z = t\varphi. \quad (24)$$

При деформации вида (24) сектор цилиндра выпрямляется в прямоугольный блок, который затем изгибается в другой плоскости, превращаясь в сектор цилиндра с осью, ортогональной оси первоначального цилиндра.

Подсемейство 4а):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi \\ \mathbf{E} &= -(stR)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + r^{-1} t \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - s R \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= s \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi - r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (25)$$

Подсемейство 4b):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi \\ \mathbf{E} &= -(stR)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - r^{-1} t \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + s R \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= -s \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi - r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (26)$$

Подсемейство 4с):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi) \\ \mathbf{E} &= (stR)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - tr^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - s R \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= -s \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi - r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (27)$$

Подсемейство 4d):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi \\ \mathbf{E} &= (stR)^{-1} r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + tr^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + s R \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{L} &= s \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi - r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (28)$$

5. Радиально-симметричная деформация полого шара

$$R = \sqrt[3]{r^3 + K}, \quad \Phi = \varphi, \quad \Theta = \theta, \quad K = \text{const} \quad (29)$$

Подсемейство 5а):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{I} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{E} &= R^{-2} r^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + r^{-1} R (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta), \quad \mathbf{L} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Подсемейство 5b):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{E} &= R^{-2} r^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - r^{-1} R (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta), \\ \mathbf{L} &= 2r^{-1} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \quad (31)$$

6. Выворачивание сектора полого шара

$$R = \sqrt[3]{C - r^3}, \quad \Phi = \varphi, \quad \Theta = -\theta, \quad C = \text{const} \quad (32)$$

$$\mathbf{F} = -R^{-2} r^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + r^{-1} R (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta)$$

Подсемейство 6a):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta \\ \mathbf{E} &= R^{-2}r^2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + r^{-1}R(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta), \\ \mathbf{L} &= 2r^{-1}(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \quad (33)$$

Подсемейство 6b):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta \\ \mathbf{E} &= R^{-2}r^2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - r^{-1}R(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta), \quad \mathbf{L} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

При помощи (2), (5) доказывається, что уравнения равновесия (1) удовлетворяются для всех двадцати подсемейств (6)–(34) деформаций микрополярного несжимаемого изотропного тела.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00459) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ericksen J. L.* Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body // *Zeitsch. Angew. Math. und Phys. (ZAMP)* 1954. V. 5. pp. 466–489.
- [2] *Truesdell C., Noll W.* The Nonlinear Field Theories of Mechanics // *Handbuch der Physik*. Ed. by S. Flügge. B.: Springer, 1965. V. 3/3. pp. 1–602.
- [3] *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [4] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [5] *Зубов Л. М.* Универсальные квазистатические деформации для изотропных несжимаемых тел с памятью // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1979. №3. С. 57–62.
- [6] *Toupin R. A.* Theory of elasticity with couple stresses // *Arch. Ration. Mech. and Anal.* V 17. 1964. №2. pp. 85–112.
- [7] *Шкутин Л. И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
- [8] *Zubov L. M.* Nonlinear Theory of Dislocation and Disclinations in Elastic Bodies. B.: Springer, 1997. 205 p.
- [9] *Nikitin E., Zubov L. M.* Zubov Conservation Laws and Conjugate Solutions in The Elasticity of Simple Materials and Materials With Couple Stress // *J. Elasticity*. 1998. V. 51. pp. 1–22.
- [10] *Eringen A. C.* Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. B.: Springer, 1999. 325 p.
- [11] *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.

Zubov L. M. *Universal solutions for isotropic incompressible micropolar bodies.* Twenty classes of finite deformations are presented. These deformations are possible for every isotropic incompressible micropolar body.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТРИЦ ГРИНА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Петров А. Н.

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

На основе единой формализации для матриц Грина трехмерных теорий анизотропной упругости и электроупругости представлены два метода построения матриц Грина. Спецификой первого метода является получение матриц Грина в виде интегрального представления, а спецификой второго метода — в виде аналитической формулы. Для конкретных свойств материала численно построены компоненты полученных представлений матриц Грина. Даны сравнения с результатами других авторов. Представлена визуализация компонент матриц Грина в виде поверхностей.

Введение. Получение упругостатической матрицы Грина в трехмерной постановке имеет свою историю. Из соответствующего корпуса публикаций выделим работы следующих авторов: Freedholm (1900), Lifshitz и Rozenzweig (1947), Kroner (1953), Synge (1957), Willis (1965), Mura и Kinoshita (1971), Pan и Chou (1976), Wang (1997). Ссылки на первые работы по детальному обсуждению упругостатических матриц Грина для анизотропного случая можно найти в обзоре Васон и др. (1978), а также в работах Mura (1987) и Ting (1996). Матрицы Грина электроупругости можно найти, к примеру, у Pan (2002). Определенные итоги подведены в [1].

1. Постановка задач. Для того, чтобы задачи анизотропной теории упругости и электроупругости рассматривать с единых позиций группируем базовые компоненты следующим образом [2–4]:

$$\hat{u}_i = \begin{cases} u_i, & i = 1, 2, 3, \\ \phi, & i = 4, \end{cases} \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij}, & i = 1, 2, 3, \\ -E_j, & i = 4, \end{cases} \quad \hat{F}_j = \begin{cases} F_j, & j = 1, 2, 3, \\ -Q, & j = 4, \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = 1, 2, 3, \\ D_i, & j = 4, \end{cases} \quad \hat{C}_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}, & j, k = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & j = 1, 2, 3, k = 4, \\ e_{ikl}, & j = 4, k = 1, 2, 3, \\ -\varepsilon_{il}, & j, k = 4. \end{cases}$$

где σ_{ij} , D_i соответственно компоненты тензора напряжения и вектора электрического смещения; F_i , Q — компоненты плотностей объемной силы и плотности электрического заряда; где ε_{ij} — компоненты тензора деформации, E_j — компоненты вектора электрического поля; C_{ijkl} , e_{ijk} и $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ — упругие модули, электроупругие коэффициенты, диэлектрические константы; u_i и ϕ — упругое смещение и электрический потенциал.

2. Получение формул представлений матриц Грина. Содержание первого подхода построения матриц Грина $G_{jk}(j, k = \overline{1, 3})$ на основе преобразования Радона для анизотропной теории упругости выглядит следующим образом [5]:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (M_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i) ds(z_i) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{S^2} (M_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i^0) ds(z_i),$$

$$r_i^0 = \frac{r_i}{r}, \delta(z_i r_i) = \delta(r z_i r_i^0) = \frac{1}{r} \delta(z_i r_i^0), M_{jk}^{zz} = \hat{C}_{ijkl} z_i z_l.$$

Преобразуем к интегралу по пересечению сферы с плоскостью $z_i r_i^0$:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} (M_{jk}^{zz}(z_i(\phi)))^{-1} d\phi. \quad (1)$$

Содержание второго подхода базируется на представлении $(M_{jk}^{zz}(z))^{-1}$ через матрицу алгебраических дополнений $A_{jk}(z)$ и определитель $D(z)$ [3, 6]:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{A_{jk}(z_i)}{D(z_i)} \delta(z_i r_i) dS(z_i) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{jk}(p + \zeta q)}{D(p + \zeta q)} d\zeta. \quad (2)$$

Применяя теорию вычетов к интегралу (2), получаем:

$$G_{jk}(x) = -\frac{Im}{2\pi r} \sum_{m=1}^4 \frac{A_{jk}(p + \zeta_m q)}{a_9(\zeta_m - \zeta_m^*) \prod_{k=1, k \neq m}^4 (\zeta_m - \zeta_k)(\zeta_m - \zeta_k^*)} \quad (3)$$

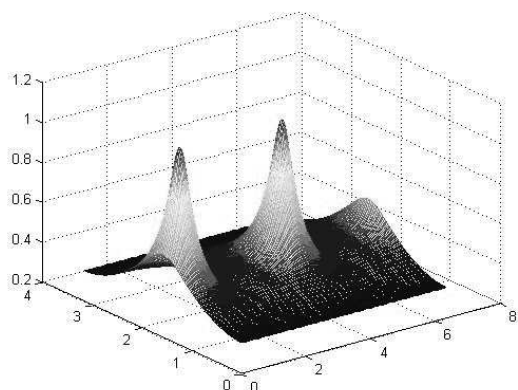
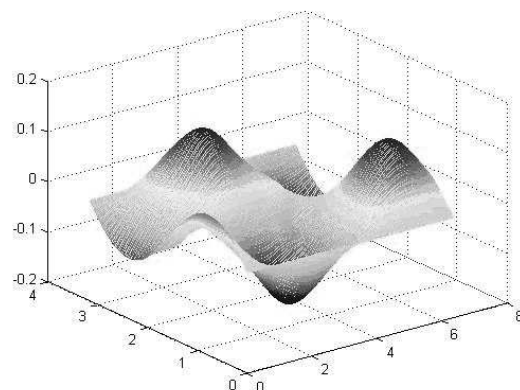
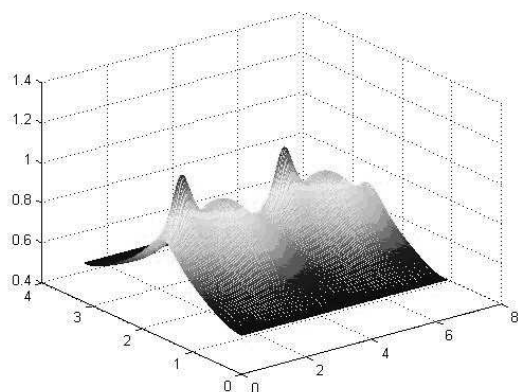
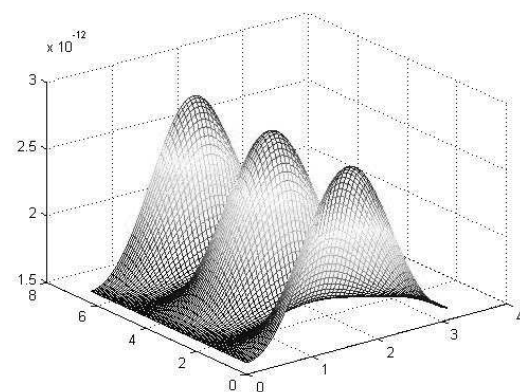
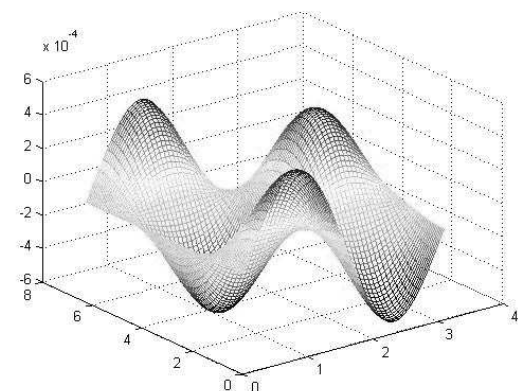
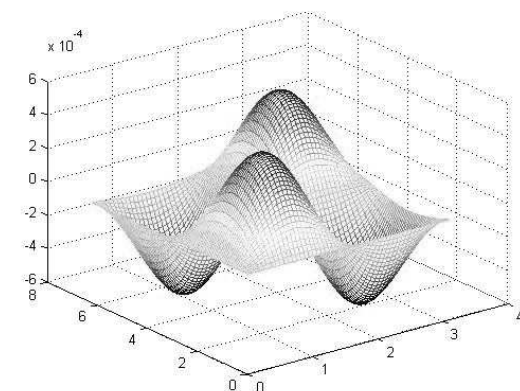
где ζ_m — корни $D(p + \zeta q)$ — многочлен восьмой степени от ζ ; a_9 — коэффициент при ζ^8 ; $Im\zeta_m > 0$, $m = \overline{1, 4}$; ζ_m^* — сопряженное к ζ_m .

Итак, в отличие от интеграла (1), второй способ дает явную формулу (3), что гарантирует эффективность использования и точность получаемых результатов.

3. Численные эксперименты и визуализация. Для изотропного упругого материала матрица Грина может быть найдена аналитически и численно. Сравнение численно построенных компонент матрицы Грина с аналитически полученными значениями дают ошибку существенно меньшую 1%. Высокая точность получена для трансверсально изотропного электроупругого материала, для которого также известны точные значения компонент матриц [7]. Исследуя трансверсально изотропную пьезокерамику (PZT-4) [8], получаем также ошибку существенно меньшую 1%.

Матрицу Грина можно изобразить в виде двумерной поверхности на основе интерполяционной схемы вычисления [4, 6]. Функции $G_{jk}(x)$ зависят от трех пространственных переменных x_1 , x_2 и x_3 . Переход к сферическим координатам (r, θ_1, θ_2) позволяет уменьшить число параметров, если положить $r=1$, и построить компоненты матрицы Грина.

На рис. 1–3 представлены приведенные компоненты анизотропной матрицы Грина для графито-эпоксидного моноклинического материала [6]. На рис. 4–6 представлены компоненты электроупругой матрицы Грина для трансверсально изотропного пьезокерамика (PZT-4) [8].

Рис. 1. Компонента G_{11} Рис. 2. Компонента G_{13} Рис. 3. Компонента G_{22} Рис. 4. Компонента G_{11}, m Рис. 5. Компонента G_{14}, m Рис. 6. Компонента G_{24}, m

Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, при поддержке РФФИ (проект № 10-08-01017-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Qing-Hua Qin* Green's function and boundary elements of multifield materials. Elsevier, 2007. 254 p.
- [2] *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
- [3] *Pan E., Tonon F.* Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids // International Journal of Solids Structures. 2000. № 37. pp. 943–958.
- [4] *Li X., Wang M.* Three-dimensional Green's functions for infinite anisotropic piezoelectric media // International Journal of Solids Structures. 2007. № 44. pp. 1680–1684.
- [5] *Баженов В. Г., Игумнов Л. А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
- [6] *Gaul L., Kogl M., Wagner M.* Boundary Element Methods for Engineers and Scientists. Berlin: Springer, 2003. 488 p.
- [7] *Dunn M. L., Wienecke H. A.* Green's functions for transversely isotropic piezoelectric solids // International Journal of Solids Structures. 1996. № 33. pp. 4571–4581.
- [8] *Dunn M. L., Taya M.* An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities // Proc. R. Soc. Lond. 1993. № A443. pp. 265–287.

Igoumnov L. A., Litvinchuk S. Yu., Petrov A. N. *Numerically modeling Green matrices of elasticity and electric elasticity.* Based on the unified formalization for Green's matrices of 3-D anisotropic elasticity and electric elasticity, two methods for constructing Green's matrices are presented. The first method is specially designed for obtaining Green's matrices in the form of an integral representation, whereas the second one — in the form of an analytical formula. The components of the obtained representations of Green's matrices are numerically constructed for specific material properties. Comparison is made with the results of other authors. The visualization of the components of Green's matrices in the form of surfaces is presented.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОРИЕНТАЦИИ

Илюхин А. А.

Таганрогский государственный педагогический институт

В задачах ориентации твердых тел основными параметрами, определяющими взаимное положение двух систем координат, служат направляющие косинусы. Вычисление направляющих косинусов через измеряемые величины является главной проблемой ориентации, решение которой зависит, как от выбора измеряемых величин, так и промежуточных параметров. В свою очередь, этот выбор существенно влияет на алгоритм вычисления направляющих косинусов [1]. К числу промежуточных параметров, которые иногда могут выступать и в качестве основных, относятся различным образом вводимые углы, параметры Родрига–Гамильтона, Кейли–Клейна и др. [2]. В практических задачах одним из главных требований, предъявляемых к измеряемым параметрам и вычислительному алгоритму, является требование проведения минимума операций при определении положения тела по данным измерений. Это снижает запаздывание в решении задач ориентации.

С другой стороны, задачи ориентации непрерывно связаны с решением задач наблюдения, так как при любом алгоритме вычисления параметров ориентации необходимо задание не менее трех начальных условий. В свою очередь, к решению задач наблюдения обязательно привлекаются динамические уравнения движения. Таким образом, в определении углового положения тела прямо или косвенно участвуют и динамические уравнения. Представляется естественным поставить задачу ориентации так, чтобы в ее решении с самого начала использовались динамические уравнения, в частности, свойства силового поля.

Для решения задачи об определении положения твердого тела воспользуемся уравнениями для кинетического момента. Эти уравнения позволяют вычислить направляющие косинусы через компоненты вектора кинетического момента в подвижных осях и некоторого вектора, фиксированного в системе координат, связанной с телом [3]. Движение около неподвижной точки твердого тела или тела, несущего вращающиеся маховики, описываются системой дифференциальных уравнений [4]

$$(\bar{M} + \bar{\lambda})^* + \bar{\omega} \times (\bar{M} + \bar{\lambda}) = \bar{L}, \quad (1)$$

где $\bar{\omega}$ — абсолютная угловая скорость вращения тела (либо тела носителя), \bar{M} — вектор-момент количества движения тела, $\bar{\lambda}$ — гидростатический момент, \bar{L} — момент внешних сил относительно неподвижной точки. Звездочка в уравнениях (1) обозначает дифференцирование в осях, связанных с телом. Если тело движется в потенциальном осесимметричном силовом поле, то

$$\bar{L} = \text{grad}_{\bar{\gamma}} U(\bar{\gamma}) \times \bar{\gamma}.$$

Единичный вектор $\bar{\gamma}$ оси симметрии называется еще вектором местной вертикали. Для завершенности конечных формул остановимся на случае потенциального

осесимметричного поля. Тогда к уравнениям (1) необходимо добавить уравнения, определяющие направление вектора в подвижных осях

$$\bar{\gamma}^* = \bar{\gamma} \times \bar{\omega}. \quad (2)$$

Допустим, что измеряются компоненты M_i вектора \bar{M} в подвижной системе координат, базисные векторы которой будем обозначать \bar{e}_i (в реальных условиях чаще всего измеряемыми величинами являются компоненты вектора угловой скорости, однако вычислить компоненты кинетического момента через измеряемые величины не представляет труда).

В частном случае

$$\bar{L} = \text{grad}_{\bar{\gamma}} U(\bar{\gamma}) \times \bar{\gamma}$$

система дифференциальных уравнений (1), (2) допускает три интеграла

$$\frac{1}{2} \bar{M} \cdot \bar{\omega} - U = h, \quad (\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\gamma} = k, \quad \bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma} = 1, \quad (3)$$

из которых можно определить вектор $\bar{\gamma}$, избавившись от необходимости интегрировать уравнения (2). Заметим, что из всех векторов, участвующих в основных соотношениях, только компоненты этого вектора входят в каждый из интегралов. Например, когда силовое поле однородно, то эта зависимость имеет вид

$$\bar{\gamma} = [(k - \mu p) (\bar{M} + \bar{\lambda}) - (kp - \mu\nu)\bar{\tau} + D^{1/2} (\bar{M} + \bar{\lambda}) \times \bar{\tau}] / (\nu - p^2), \quad (4)$$

где, следуя В. Гессу [6], обозначено

$$\begin{aligned} p &= (\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\tau}, \\ \nu &= (\bar{M} + \bar{\lambda})^2, \\ \mu &= (\bar{M} \cdot \bar{\omega} - 2h) / 2P, \\ D &= (1 - \mu^2)(\nu - p) - (k - \mu p)^2. \end{aligned}$$

Единичный вектор $\bar{\tau}$ в рассматриваемой задаче направлен из неподвижной точки в центр масс тела, а P равно произведению веса тела на расстояние от неподвижной точки до центра масс тела.

Для определения компонент вектора $\bar{M} + \bar{\lambda}$ в инерциальной системе координат введем цилиндрическую систему координат с базисом:

$$\begin{aligned} \bar{e}_\rho &= \frac{\bar{M} + \bar{\lambda} - [(\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\gamma}] \cdot \bar{\gamma}}{|(\bar{M} + \bar{\lambda}) \times \bar{\gamma}|} \\ \bar{e}_\alpha &= \frac{\bar{\gamma} \times (\bar{M} + \bar{\lambda})}{\bar{\gamma} \times (\bar{M} + \bar{\lambda})}, \quad \bar{e}_\zeta = \bar{\gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда по аналогии с выводом формул для кинетического момента в работе [3] можно получить выражения для компонент вектора $(\bar{M} + \bar{\lambda})$:

$$\begin{aligned} M_\zeta &= (\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\gamma}, \\ M_\rho &= [(\bar{M} + \bar{\lambda}) \times \bar{\gamma}] \cdot \bar{e}_\rho, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\{[(\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\gamma}] \cdot \bar{\gamma}\} \text{grad}_{\bar{\gamma}} U}{[\bar{\gamma} \times (\bar{M} + \bar{\lambda})]^2} = -\frac{\bar{e}_\rho \cdot \text{grad}_{\bar{\gamma}} U}{M_\rho^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

В частном случае, когда силовое поле однородно, равенства (6) совпадают с уравнениями упругой линии при $P \neq 0$. Обозначим через \bar{e}_i базисные векторы неизменно связанной с телом системы координат, и найдем компоненты этих векторов в базисе $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\zeta$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i\rho} &= \varepsilon_i \cdot \bar{e}_\rho = \varepsilon_i \cdot \{ \bar{M} + \bar{\lambda} - [(\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\gamma}] \cdot \bar{\gamma} \} / M_\rho = \\ &= \{ M_i + \lambda_i - [(\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\gamma}] \cdot \gamma_i \} / M_\rho \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i\alpha} &= \varepsilon_i \cdot \bar{e}_\alpha = \varepsilon_i \cdot [\bar{\gamma} \times (\bar{M} + \bar{\lambda})] / M_\rho = \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \cdot \gamma(M_k + \lambda_k) / M_\rho, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{i\zeta} = \varepsilon_i \cdot \bar{e}_\zeta = \bar{\varepsilon}_i \cdot \gamma = \gamma_i, \quad (9)$$

где ε_{ijk} — символ Леви-Чивита. Входящие в равенства (7)–(9) скалярные произведения в силу их инвариантности можно вычислять в тех системах координат, в которых известны разложения соответствующих векторов. В формулах (5)–(9) выражение $(\bar{M} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{\gamma}$ можно заменить его значением из интеграла площадей в (3). Выберем неподвижную декартовую систему координат таким образом, чтобы ее третья ось была бы направлена вдоль вектора $\bar{\gamma}$. Если \bar{e}_i — базисные векторы этой системы координат, то справедливы равенства:

$$\bar{e}_1 = e_\rho \cdot \cos \alpha - e_\alpha \sin \alpha, \quad \bar{e}_2 = e_\rho \cdot \sin \alpha - e_\alpha \cos \alpha, \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_\zeta = \bar{\gamma}. \quad (10)$$

Чтобы получить выражения для направляющих косинусов $\bar{\varepsilon}_{ij}$, спроектируем векторы ε_i на направление векторов $\bar{\varepsilon}_i$ и учтем соотношения (7)–(10):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \{ (M_1 + \lambda_1 - k\gamma_1) \cos \alpha - [\gamma_2(M_3 + \lambda_3) - \gamma_3(M_2 + \lambda_2)] \cdot \sin \alpha \} / M_\rho, \\ \varepsilon_{21} &= \{ (M_2 + \lambda_2 - k\gamma_2) \cos \alpha - [\gamma_3(M_1 + \lambda_1) - \gamma_1(M_3 + \lambda_3)] \cdot \sin \alpha \} / M_\rho, \\ \varepsilon_{31} &= \{ (M_3 + \lambda_3 - k\gamma_3) \cos \alpha - [\gamma_1(M_2 + \lambda_2) - \gamma_2(M_1 + \lambda_1)] \cdot \sin \alpha \} / M_\rho, \\ \varepsilon_{12} &= \{ (M_1 + \lambda_1 - k\gamma_1) \sin \alpha + [\gamma_2(M_3 + \lambda_3) - \gamma_3(M_2 + \lambda_2)] \cdot \cos \alpha \} / M_\rho, \\ \varepsilon_{22} &= \{ (M_2 + \lambda_2 - k\gamma_2) \sin \alpha + [\gamma_3(M_1 + \lambda_1) - \gamma_1(M_3 + \lambda_3)] \cdot \cos \alpha \} / M_\rho, \\ \varepsilon_{32} &= \{ (M_3 + \lambda_3 - k\gamma_3) \sin \alpha + [\gamma_1(M_2 + \lambda_2) - \gamma_2(M_1 + \lambda_1)] \cdot \cos \alpha \} / M_\rho, \\ \varepsilon_{13} &= \gamma_1, \quad \varepsilon_{23} = \gamma_2, \quad \varepsilon_{33} = \gamma_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные формулы для направляющих косинусов содержат переменные, входящие в уравнения движения (1) и (2). Вывод этих формул не связан со свойствами силового поля, и лишь на этапе вычисления угла α в (6) было использовано допущение об осесимметричности силового поля.

Рассмотрим отдельно случай вращения тела по инерции. Уравнения движения (1) примут вид:

$$\left(\bar{I} + \bar{\lambda} \right)^* + \bar{\omega} \times \left(\bar{I} + \bar{\lambda} \right) = 0. \quad (12)$$

Эти уравнения отражают известный факт: вектор — момент количества движения свободно вращающегося тела сохраняет величину и направление в инерциальном

пространстве. Это позволяет направить одну из осей неподвижной системы координат вдоль вектора $\bar{I} + \bar{\lambda}$. Зададим направление в подвижной системе координат вектора \bar{a}_1 :

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= (\bar{I} + \bar{\lambda})/|\bar{I} + \bar{\lambda}|, \\ \bar{a}_1 &= \overset{\circ}{a}_{11} \bar{y}_1 + \overset{\circ}{a}_{12} \bar{y}_2 + \overset{\circ}{a}_{13} \bar{y}_3\end{aligned}\quad (13)$$

Для определения направления вектора \bar{y}_1 вводим цилиндрическую систему координат с базисом $\bar{a}_1 \zeta = \bar{a}_1, \bar{a}_{\rho_1}, \bar{a}_{\alpha_1}$:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\alpha_1} &= (\bar{a}_1 \times \bar{y}_1)/\sqrt{1 - \overset{\circ}{a}_{11}^2}, \\ \bar{a}_{\rho_1} &= [\bar{y}_1 - (\bar{a}_1 \cdot \bar{y}_1)\bar{a}_1]/\sqrt{1 - \overset{\circ}{a}_{11}^2}.\end{aligned}\quad (14)$$

Угол α_1 между векторами \bar{a}_{ρ_1} и \bar{a}_2 вычислим аналогично тому, как было выведено соотношение (6):

$$\sqrt{1 - \overset{\circ}{a}_{11}^2} \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\bar{y}_1}{dt} \cdot \bar{a}_{\alpha_1} = \frac{(\bar{a}_1 \times \bar{y}_1) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{y}_1)}{\sqrt{1 - \overset{\circ}{a}_{11}^2}}$$

или

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{e_{12}\omega_2 + e_{13}\omega_3}{e_{12} + e_{13}}.\quad (15)$$

Компоненты вектора \bar{y}_1 в неподвижном базисе имеют следующие значения:

$$\dot{y}_{11} = \overset{\circ}{a}_{11}, \quad \dot{y}_{12} = \sqrt{\overset{\circ}{a}_{12}^2 + \overset{\circ}{a}_{13}^2} \cos \alpha_1, \quad \dot{y}_{13} = \sqrt{\overset{\circ}{a}_{12}^2 + \overset{\circ}{a}_{13}^2} \sin \alpha_1.\quad (16)$$

Аналогичную процедуру можно применить для вычисления компонент векторов $\bar{y}_2 \in \bar{y}_3$ в базисе \bar{e}_i . Однако нет необходимости повторять предшествующие вычисления, так как нумерация подвижных осей не была привязана к каким-либо измеряемым величинам. Это позволяет сразу записать выражения для компонент векторов $\bar{y}_2 \in \bar{y}_3$

$$\begin{aligned}\dot{y}_{21} &= \overset{\circ}{a}_{12}, \quad \dot{y}_{22} = \sqrt{\overset{\circ}{a}_{11}^2 + \overset{\circ}{a}_{13}^2} \cos \alpha_2, \quad \dot{y}_{23} = \sqrt{\overset{\circ}{a}_{11}^2 + \overset{\circ}{a}_{13}^2} \sin \alpha_2 \\ \dot{y}_{31} &= \sqrt{\overset{\circ}{a}_{11}^2 + \overset{\circ}{a}_{12}^2} \cos \alpha_3, \quad \dot{y}_{33} = \sqrt{\overset{\circ}{a}_{11}^2 + \overset{\circ}{a}_{13}^2} \sin \alpha_3.\end{aligned}\quad (17)$$

Значения углов $\alpha_2 \in \alpha_3$ получаются из (15) соответствующей заменой индексов у $\overset{\circ}{a}_{1\epsilon} \in \omega_\epsilon$:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{\overset{\circ}{a}_{12} \omega_1 + \overset{\circ}{a}_{13} \omega_3}{\overset{\circ}{a}_{11}^2 + \overset{\circ}{a}_{13}^2} \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \frac{\overset{\circ}{a}_{11} \omega_1 + \overset{\circ}{a}_{12} \omega_2}{\overset{\circ}{a}_{11}^2 + \overset{\circ}{a}_{12}^2}\end{aligned}\quad (18)$$

Условие нормировки матрицы $\|\dot{y}_{ij}\|$ выполняется. Для ортогональности строк необходим определённый выбор постоянных интегрирования в (12). В силу того, что в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{a}_1 , пара ортогональных векторов \vec{a}_2 и \vec{a}_3 выбрана произвольно, постоянная интегрирования в (12) также может принимать произвольные значения, тогда как начальные значения для углов α_2 и α_3 должны определяться через неё.

В реальных условиях инерциальная система координат выбирается заранее, поэтому, может возникнуть необходимость перерасчёта направляющих косинусов \dot{y}_{ij} , заданных в специально выбранной системе координат. Однако произвол в выборе векторов \vec{a}_2 и \vec{a}_3 , даёт возможность упростить матрицу перехода. В рассматриваемой задаче нет необходимости в вычислении компонент \dot{y}_{3j} по формулам (16) и (17), так как можно воспользоваться равенством $\vec{y}_3 = \vec{y}_1 \times \vec{y}_2$. Тогда для решения задачи ориентации твёрдого тела в случае вращения по инерции достаточно вычислить две квадратуры для углов α_1 и α_2 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Longuski J.M. Solution of Euler's equations of motion and Eulerian angles for near symmetric rigid bodies subject to constant moments // AIAA Pap., 1980, № 1642, pp. 117–132.
- [2] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация // М.: Наука, 1976. 670 с.
- [3] Илюхин А.А. Два подхода к определению углового положения твердого тела. // Третье республиканское совещание по проблемам динамики твердого тела. Донецк: 1981, с. 23.
- [4] Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней // Киев: Наукова думка, 1979. 219 с.
- [5] Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела // Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965, 221 с.
- [6] Hess W. Uber die Eulerischen Bewegungsgleichungen und uber eine neue partikulare Losung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Ibid, 1890, B. 37, H. 2, S. 153–181.

Pyukhin A.A. *The differential approach to the solving of orientation problems solving.* The new method of definition of parameters of the orientation, using the differential equations of movement of object is offered. As intermediate variables between measured angular speed of movement and directing cosines, defining angular position of a body, components of the kinetic moment are used.

ОЦЕНИВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛООВОГО ШУМА НА ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ АТОМНО-СИЛОВОГО МИКРОСКОПА

Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Динамическая атомно-силовая микроскопия (ДАСМ) использует взаимодействие вершины зонда микроконсоли с поверхностью исследуемого образца для того, чтобы изменить динамику микроконсоли (амплитуду колебаний, резонансную частоту, фазу) и получить изображение поверхности образца с наномасштабным разрешением.

Расчеты амплитуды свободных колебаний прямоугольной и V-образной форм микроконсолей за счет теплового шума позволили получить оценки для условий применимости малоамплитудных режимов в ДАСМ. Однако в этих расчетах не учтены влияние на вершину зонда внешних (линейных) сил, а также не рассмотрена возможность использования ДАСМ в режиме, когда тепловые флуктуации микроконсоли выполняют роль внешней возмущающей силы. Решению этих задач посвящена данная работа.

Динамическая атомно-силовая микроскопия (ДАСМ) использует взаимодействие вершины зонда микроконсоли с поверхностью исследуемого образца для того, чтобы изменить динамику микроконсоли (амплитуду колебаний, резонансную частоту, фазу) и получить изображение поверхности образца с наномасштабным разрешением. Существует три основных режима ДАСМ: контактный, полуконтактный и бесконтактный. В контактном режиме ДАСМ сканирует заостренным концом зонда поверхность, находясь под действием сил отталкивания. В полуконтактном режиме (*tapping mode*) вершина зонда периодически касается (постукивает) поверхности образца. В бесконтактном режиме вершина зонда совершает колебания в области действия сил притяжения (силы ван дер Ваальса). В первом и третьем режимах амплитуда колебаний предполагается малой (< 1 нм), в то время как в полуконтактном режиме амплитуда колебаний зонда достигает 10 нм. Во всех режимах величина амплитуды колебаний определяется близостью возбуждающей частоты к резонансной частоте микроконсоли. Большая амплитуда колебаний в прерывистом режиме соответствует нелинейному взаимодействию зонд – образец, что приводит к трудностям анализа, которые не всегда удается преодолеть. Что касается малоамплитудных режимов, то они являются линейными и их анализ значительно проще, но имеется препятствие для более широкого их использования в ДАСМ. Это препятствие связано с влиянием тепловых флуктуаций на колебательный режим — «зашумление» малоамплитудного режима, при котором среднеквадратичная амплитуда тепловых флуктуаций 0.1 нм при комнатной температуре и жесткости микроконсоли 0.4 Н/м дает заметный вклад в колебания микроконсоли. Зашумление можно не учитывать при работе микроконсоли в полуконтактном режиме.

Расчеты амплитуды свободных колебаний прямоугольной [1] и V-образной [2] форм микроконсолей за счет теплового шума позволили получить оценки для условий применимости малоамплитудных режимов в ДАСМ. Отметим, что впервые идея об использовании теплового шума для калибровки микроконсолей для

ДАСМ была предложена в [3]. В [4] предложено использовать тепловой шум в качестве единственного источника возмущающей силы, действующей на микроконсоль. Это предложение имеет хорошую перспективу, т. к. позволяет получить минимальную величину амплитуды колебаний (<0.1 нм) при комнатной температуре.

Важный этап в исследовании влияния тепловых шумов связан с обнаружением пространственных мод в микроконсолях на опыте. В [5] экспериментально наблюдались первые 4 моды колебаний, которые обусловлены только тепловым шумом (внешняя возмущающая сила отсутствует). Колебательные моды более высокого порядка на опыте не обнаруживаются потому, что их амплитуда меньше величины приборного фонового шума.

В [1, 2] предполагалась справедливой теорема равномерного распределения для каждой моды колебаний микроконсоли, а спектральная плотность в окрестности резонансных частот имела вид Лоренцевской кривой. Эти предположения позволили получить простые аналитические оценки влияния теплового шума на колебательный режим микроконсоли ДАСМ. Однако в расчетах [1, 2] не учтено влияние на вершину зонда внешних (линейных) сил.

В настоящей работе представлены результаты трехмерного расчета эволюции в бесконтактном режиме прямоугольной в плане микроконсоли ДАСМ методом конечных элементов с учетом действия сил ван дер Ваальса между вершиной зонда и образцом, а также в контактном режиме под действием короткодействующих сил.

Выберем указанные силы аналогично [6]

$$f_n = k_n v, \quad f_t = k_t u. \quad (1)$$

В (1) k_n и k_t — коэффициенты жесткости сил, действующих на вершину зонда по нормали к поверхности образца и вдоль поверхности образца, v, u — вертикальная и горизонтальная компоненты вектора перемещений вершины зонда микроконсоли. Численные значения k_n и k_t даны в таблице 1.

режим	D(нм)	k_n (Н/м)	k_t (Н/м)
нет взаимодействия	1.0	0	0
притяжение	0.5	-7.9	0
отталкивание	0.08	35	58

Таблица 1. Силы взаимодействия зонд–образец. D — расстояние между зондом и образцом.

Другие величины в расчете использованы из [6]: длина микроконсоли $L = 125$ мкм, ширина $w = 30$ мкм, толщина $h = 4$ мкм; материал микроконсоли — кремний (плотность $\rho = 2330$ кг/м³, модуль Юнга $E = 1,5 \cdot 10^5$ МПа).

Расчет предполагает действие теплового шума на микроконсоль за счет случайных тепловых флуктуаций перемещения $\delta u(t)$. Аналогично [7, 8] предположим, что величины флуктуаций $\delta u(t)$ распределены по нормальному закону

$$\delta u = \sqrt{\langle \delta u \rangle^2} N(0, 1) \quad (2)$$

В (2) средний квадрат флуктуации перемещения вычислен как минимальная работа сосредоточенной силы при изгибе балки жестко заземленной на одном из концов [9], $N(0, 1)$ - случайная величина, распределенная по нормальному распределению со средним $M(\delta u) = 0$ и дисперсией $D(\delta u) = 1$. Промежутки между флуктуациями по закону Пуассона с параметром $\tau_0 = 10^{-13}$ с. Эволюция колеблющейся микроконсоли определяется совместным действием внешнего периодического перемещения $u_0(t)$ основания микроконсоли, внешними силами зонд-образец (1) и случайными перемещениями (нормальными к срединной поверхности микроконсоли) $\delta u(t)$. Последняя составляющая перемещения предполагает учет лишь изгибных мод колебаний.

Расчеты показали, что типичные величины $\sqrt{\langle \delta u(t) \rangle^2}$ порядка 0.1 нм существенно влияют на эволюцию микроконсоли ДАСМ и сравнимы с вкладом внешних возмущающих перемещений оснований микроконсоли.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Butt H. J., Jaschke M.* Calculation of thermal noise in atomic force microscopy // *Nanotechnology*, V. 6, (1995), pp. 1–7.
- [2] *Stark R. W., Drobek T., Heckl W. M.* Thermomechanical noise of a free V-shaped cantilever for atomic-force microscopy // *Ultramicroscopy*, V.86 (2001), pp. 207–215.
- [3] *Hutter J., Bechhoefer J.* Calibration of atomic force microscope tips // *Rev. Sci. Instrum.*, V.64, (1993), pp. 1868–1873.
- [4] *Gannepalli A., Sebastian A., Cleveland J., Salapaka M.* Thermally driven non-contact atomic force microscopy // *Appl. Phys. Lett.*, V.87, (2005) 111901.
- [5] *Paolino P., Tiribilli B., Bellon L.* Direct measurement of spatial modes of a microcantilever from thermal noise // *J. Appl. Phys.*, V.106, (2009) 094313.
- [6] *Шишкин А. Н.* Расчет амплитудно-частотных характеристик консоли атомно-силового микроскопа // *Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009 г. Т. II.* Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. С. 196–200.
- [7] *Азаров Д. В., Карпинский Д. Н., Шихман Д. Е.* Исследование влияния тепловых флуктуаций на раскрытие и залечивание трещин методом численного эксперимента // *Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки*, №1, 1989, С. 44–48.
- [8] *Азаров Д. В., Карпинский Д. Н.* Математическая модель эволюции микротрещины под действием тепловых флуктуаций // *Границы раздела, прочность и разрушение композиционных материалов*, Л.: Изд-во ФТИ им. А.Ф.Иоффе АН СССР, 1989. С. 201–206.
- [9] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* *Статистическая физика*. М., 1976. 584 с.

Karpinskiy D. N., Shishkin A. N. *Evaluating the effect of thermal noise on the measurement error of AFM.* The calculations of free oscillations amplitude of microcantilever due to thermal noise do not consider the impact of external forces on the top of the AFM probe. The possibility of using the microscopy in such a mode when thermal fluctuations of the probe act as an external perturbing force, is also not observed. The paper is devoted to the solution of these problems.

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Карякин М. И., Шубчинская Н. Ю.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлены результаты численного анализа нелинейной краевой задачи о равновесии изгибаемой нелинейно-упругой панели. Для рассмотренных моделей материалов установлено, что диаграмма изгиба имеет точку максимума, за которой следует падающий участок. Для изучения устойчивости использован бифуркационный подход, основанный на линеаризации уравнений равновесия. Установлено, что точки бифуркации могут существовать и на возрастающем участке диаграммы изгиба.

Введение. Целью настоящей работы является исследование устойчивости изгибаемого прямоугольного параллелепипеда в цилиндрическую панель. Актуальность исследования связана, прежде всего, с тем, что деформация чистого изгиба (наряду с растяжением и кручением) является одной из базовых при экспериментальном определении и верификации параметров модели упругого, в частности — нелинейно-упругого, поведения материалов. В свою очередь определение характеристик этих моделей — и функциональных зависимостей, и их параметров — особенно актуально в связи с необходимостью разрабатывать адекватные модели механического поведения биоматериалов и их искусственных заменителей из высокоэластичных материалов. Другая причина, объясняющая интерес к классическим, на первый взгляд, задачам, связана с проблемой адекватного описания механических свойств композиционных материалов, представляющих собой матрицу с относительно жесткими волокнами. В этом случае, например, при расчетах на прочность, необходимо учитывать возможность разрушения композита вследствие потери устойчивости, в том числе и при изгибе, отдельными волокнами [1]. Задача о потере устойчивости при изгибе в рамках нелинейной теории упругости может представлять интерес и для тестирования различных теорий и численных схем исследования устойчивости упругих труб, основывающихся, как правило, на различных вариантах теории оболочек [2].

Диаграмма изгиба нелинейно-упругой панели. В рамках плоской деформации рассмотрим задачу об изгибе панели прямоугольного поперечного сечения шириной h и толщиной a торцевыми моментами. Предполагая, что сечением деформированной панели будет сектор кругового кольца, в качестве координат отсчетной конфигурации выберем декартовы координаты (x, y, z) , а текущей — цилиндрические (R, Φ, Z) , зададим деформацию полуобратным представлением вида

$$R = P(x), \quad \Phi = By, \quad Z = z, \quad (1)$$

в котором $P(x)$ описывает изменение толщины сечения панели после деформации, а параметр $B = \gamma h/a$ характеризует соотношение ширины панели и угла раствора γ сектора, в который деформируется панель (рис. 1).

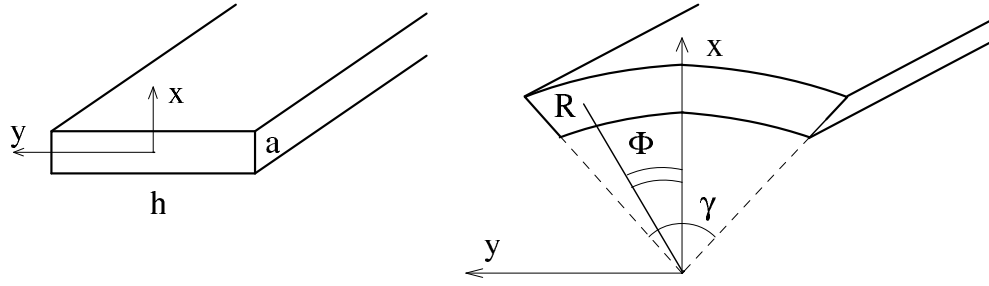


Рис. 1. Деформация панели

Для описания упругих свойств материала панели будем использовать две модели — полуплинейный материал Джона и материал Блейтца и Ко, определяющие соотношения для тензора напряжений Пиола которых имеют соответственно вид [3]:

$$\mathbf{D} = (\lambda s_1 - 2\mu) \mathbf{A} + 2\mu \mathbf{C}, \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \mu \left[(1 - \beta) \left(I_1 \mathbf{G} - \mathbf{G}^2 - I_2 I_3^{-1} \mathbf{E} + I_3^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right) + \beta \left(\mathbf{G} - I_3^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C}. \quad (3)$$

Здесь μ, β, λ — материальные параметры, $I_k = I_k(\mathbf{G})$ — главные инварианты меры деформации Коши $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}$ — градиент деформации Коши, \mathbf{U} — левый тензор искажений, \mathbf{A} — тензор поворота, $s_1 = \text{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{E})$, \mathbf{E} — единичный тензор.

Уравнения равновесия $\dot{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0$, соответствующие полубратному представлению (1), для изотропного материала сводятся к одному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $P(x)$, граничными условиями для которого служат равенства нулю напряжений на боковых поверхностях.

Для полуплинейного материала краевая задача равновесия имеет вид:

$$P'' - B^2 P + 2B \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = 0, \quad (4)$$

$$\lambda(BP + P' - 2) + 2\mu(P' - 1)|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0.$$

Нелинейная краевая задача для материала Блейтца и Ко записывается как:

$$P'' = \frac{(\beta - 1)(P^2 B^2 P'^2 (B^2 P^2 - 2) + P^2 B^2) - \beta B^4 P^4 P'^2}{P(\beta - 1)(P^2 B^2 - 1) + \beta P^2 P^3 B^2}, \quad (5)$$

$$\mu \beta P'^2 B^2 P^2 + \mu + \mu B^2 P^2 - \mu \beta - \mu \beta B^2 P^2 |_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0.$$

Здесь и ниже штрихом обозначено дифференцирование по x . Решение нелинейной краевой задачи (4) может быть найдено аналитически. Уравнение (5) может быть проинтегрировано в квадратурах лишь при $\beta = 0$, но и в этом случае построенное решение не может быть использовано для аналитического решения краевой задачи. Поэтому во всех случаях анализ задачи (5) осуществлялся численно.

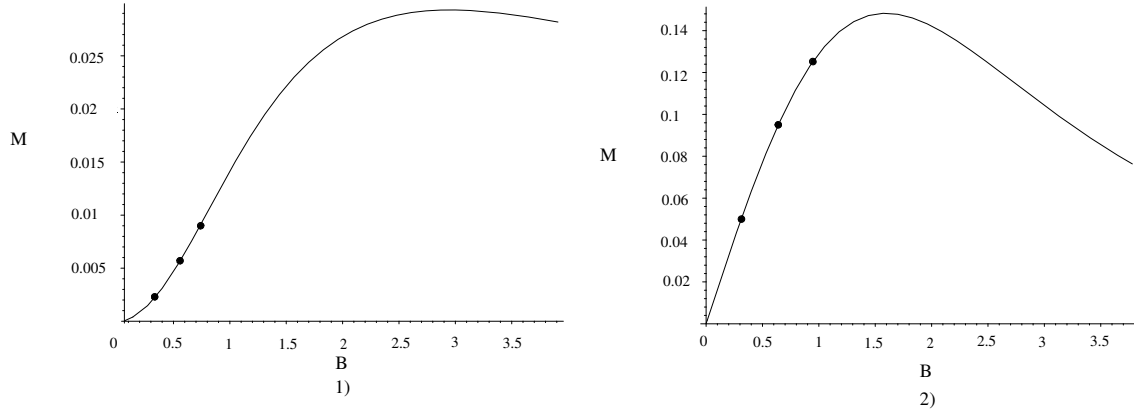


Рис. 2. Зависимость изгибающего момента от параметра, характеризующего отношение ширины панели к углу раствора сектора — деформированной панели для материала Блейтца и Ко при $\beta = 0.8$ 1) и полулунейного материала 2)

На рис. 2 приведены зависимости изгибающего момента

$$M = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} D_{y\Phi} P P' dx \quad (6)$$

от параметра B . На обоих графиках отчетливо видна точка максимума, за которой следует падающий участок, что свидетельствует о возможной потере устойчивости.

Устойчивость изгиба. Сообщим точкам упругого тела малое перемещение $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{w}$ из известного положения равновесия \mathbf{R}_0 путем изменения полубратного представления (1) следующим образом:

$$\begin{cases} R = P(x) + \varepsilon U(x, y), \\ \Phi = By + \varepsilon V(x, y), \\ Z = z, \end{cases} \quad (7)$$

(ε — малый параметр). Уравнения нейтрального равновесия имеют вид

$$\dot{\mathbf{V}} \cdot \dot{\mathbf{D}} = 0, \quad (8)$$

где

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{D}(\mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{w})|_{\varepsilon=0}.$$

Граничные условия для (8) выглядят как:

$$\dot{D}_{xR} \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = 0, \dot{D}_{x\Phi} \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = 0; \quad (9)$$

$$\dot{D}_{yR} \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, V \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = 0. \quad (10)$$

Соотношения (10) означают скользящую заделку на торцах панели.

Система (8) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных. Заменой

$$V(x, y) = v(x) \sin(\alpha_n y), U(x, y) = u(x) \cos(\alpha_n y), \quad (11)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{h}, n \in \mathbf{Z}, \quad (12)$$

она может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, причем благодаря (12) краевые условия (10) выполняются автоматически. В случае полуплинейного материала эта система принимает вид:

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{(P' + BP) [6B\alpha_n v + 3u(\alpha_n^2 + B^2)] - 4\alpha_n(v' + u\alpha_n + Bv)}{3(P' + BP)}, \\ v'' &= \frac{\alpha_n BP [3vPB\alpha_n - 4u(1 + B)] + 4P'[(u' - v)\alpha_n - v'] + 3P^2(B^2 - \alpha_n^2 v)}{3(P' + 2BP) - 4(BP + P') + 3B^2P^2} + \\ &\quad \frac{2\alpha_n BP' [3uP' + 4(u + vB)] + PB^3[v(3PB - 4) + 6\alpha_n uP]}{3(P' + 2BP) - 4(BP + P') + 3B^2P^2} - \\ &\quad \frac{4Bv(P' + P') + 6PBP[2uB\alpha_n + v'(\alpha_n^2 + B^2)]}{3(P' + 2BP) - 4(BP + P') + 3B^2P^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

а краевые условия (9) для нее с учетом (11) запишутся как:

$$\begin{aligned} (P' + BP)(u\alpha_n + Bv + 3v') - 4(u\alpha_n + Bv + v') \Big|_{x=\pm\frac{a}{2}} &= 0, \\ 3u' + v\alpha_n + Bu \Big|_{x=\pm\frac{a}{2}} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для материала Блейтца и Ко аналогичная система очень громоздка и здесь приведена не будет.

Изучение возможности существования нетривиальных решений системы вида (13), (14) проводилось по следующей схеме. Общее решение разыскивалось в виде:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2, \quad v = C_1 v_1 + C_2 v_2, \quad (15)$$

где $u_k, v_k, (k = 1, 2)$ — линейно-независимые функции, представляющие собой решения задач Коши для (13), у которых первая пара начальных условий имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1(-a/2) &= 1, v_1(-a/2) = 0, \\ u_2(-a/2) &= 0, v_2(-a/2) = 1, \end{aligned} \quad (16)$$

а вторая — для производных $u'_k(-a/2), v'_k(-a/2)$ — получается выражением последних из равенств (14) в точке $x = -a/2$ с учетом (16).

Удовлетворение краевым условиям (14) в точке $x = a/2$ приводит к двум равенствам вида

$$\begin{aligned} \left[(3BP + 3P' - 4)v'_1\left(\frac{a}{2}\right) + (BP + P' - 4)\left(\alpha_n u_1\left(\frac{a}{2}\right) + Bv_1\left(\frac{a}{2}\right)\right) \right] C_1 + \\ \left[(3BP + 3P' - 4)v'_2\left(\frac{a}{2}\right) + (BP + P' - 4)\left(\alpha_n u_2\left(\frac{a}{2}\right) + Bv_2\left(\frac{a}{2}\right)\right) \right] C_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\left[3u_1' \left(\frac{a}{2} \right) + Bu_1 \left(\frac{a}{2} \right) + \alpha_n v_1 \left(\frac{a}{2} \right) \right] C_1 + \left[3u_2' \left(\frac{a}{2} \right) + Bu_2 \left(\frac{a}{2} \right) + \alpha_n v_2 \left(\frac{a}{2} \right) \right] C_2 = 0,$$

являющимися линейной системой уравнений для определения C_1 и C_2 . Критические значения параметра B находятся из условия равенства нулю определителя этой системы.

Результаты расчетов по этой схеме представлены на рис. 2, где кружки на графиках соответствуют трем первым (наименьшим) значениям величины критического параметра изгиба B . Видно, что потеря устойчивости при изгибе наступает существенно раньше достижения точки максимума на диаграмме нагружения.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Levy A. J., Shukla A., Xie M.* Bending and buckling of a class of nonlinear fiber composite rods // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. № 54. pp. 1064–1092.
- [2] *Karamanos S. A.* Bending instabilities of elastic tubes // *International Journal of Solids and Structures*. 2002. № 32. pp. 2059–2085.
- [3] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

Karyakin M. I., Shubchinskaya N. U. *Equilibrium and stability of nonlinearly elastic panel under pure bending.* The results of numerical analysis of nonlinear boundary value problem of equilibrium of bending of nonlinearly elastic panel are presented. For all used material models it is found that the diagram of bending has a maximum point, followed by the falling part. To study the stability of the bending deformation the bifurcation approach based on linearization of the equilibrium equations is used. It is found that the bifurcation points may exist at the increasing part of the bending diagram.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ МНОГОСЛОЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБКАХ: АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Кизилова Н. Н., Чистина Э. О.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

В работе исследуется задача о распространении малых возмущений в заполненных вязкой жидкостью трехслойных трубках, образованных анизотропными вязкоупругими слоями с различными толщинами и реологическими свойствами. Представлены результаты расчетов профилей скорости и давления в трубках в виде разложений по малому параметру, который является отношением радиального перемещения стенки ко внутреннему радиусу трубки. Показано, что параметры течения различны для устойчивых и неустойчивых мод и для переходных режимов. Показана возможность слияния мод. Обсуждаются границы применимости полученных результатов к течению крови в артериях как многослойных трубках, а также к течениям жидкостей в биомедицинских устройствах и в трубках технических систем.

Течение вязкой несжимаемой жидкости по деформирующимся трубкам активно исследуется в связи с течением крови в артериях, влиянием гидродинамических параметров на развитие сосудистых патологий, расчетами шунтов и стентов, изготавливаемых из аутотрансплантатов и другими актуальными задачами биологии и медицины [1, 2]. Существенно, что артерии являются многослойными вязкоупругими трубками, причем отдельные слои отличаются по реологическим свойствам и функциям. Средний слой образован механочувствительными клетками, которые реагируют на изменения гидростатического давления и скорости сдвига на стенке. Внутренний слой образован гладкомышечными клетками, сокращение/расслабление которых ведет к уменьшению/увеличению просвета трубки, что приводит к соответствующим изменениям объемного расхода крови. Наружный слой состоит из соединительной ткани и армирован двумя семействами расположенных спирально волокон коллагена. При развитии сосудистых патологий могут изменяться толщины, модули упругости и вязкость слоев [1].

Вопросы устойчивости стационарного течения жидкости по многослойным трубкам исследовались в [3] для случаев закрепленной и ненагруженной стенки. Было показано, что для разных режимов течений и параметров стенки существует по крайней мере одна неустойчивая жидкостная мода, причем за счет надлежащего выбора параметров слоев стенки можно добиться стабилизации этой моды, перевести абсолютную неустойчивость в конвективную и, таким образом, управлять течением [4]. Влияние типа анизотропии слоев и граничных условий на устойчивость системы жидкость-стенка подробно исследовалось в [5].

Исследование течений крови по артериям как многослойным вязкоупругим трубкам привело к важным для технических и биомедицинских приложений решениям по стабилизации течений, устранению нежелательных высокочастотных осцилляций стенки, шумогенерации, снижению производительности системы (объемного расхода при заданном перепаде давлений). Особенности распространения

волн в многослойных трубках исследовались в [3, 6]. Для случая закрепленной стенки выражения для скорости и давления в жидкости, перемещений и давлений в стенке были получены методом разложения по малому параметру для однослойной [6] и многослойной стенки [3]. Для приложений важны исследования переходов от устойчивого к неустойчивому режимам течений и возможности коалесценции мод, продемонстрированной в [4, 5].

В данной работе получено решение задачи о течении жидкости в трехслойной трубке при условии ненагружения внешней поверхности трубки, что соответствует поверхностно расположенным артериям и трубкам многих биомедицинских аппаратов и технических систем.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим трубку кругового сечения с внутренним радиусом R_0 , образованную тремя слоями, толщины которых H_1, H_2, H_3 . Слои испытывают перемещения $\mathbf{u}^{(j)} = (u_r^{(j)}, 0, u_x^{(j)})$, где $j = 1, 2, 3$ — номер слоя. Таким образом, положения слоев в произвольный момент времени описываются радиусами:

$$\begin{aligned} R_1(t, x) &= R_0 + u_r(t, R_0, x), \\ R_2(t, x) &= R_0 + H_1 + u_r(t, R_0 + H_1, x), \\ R_3(t, x) &= R_0 + H_1 + H_2 + u_r(t, R_0 + H_1 + H_2, x), \\ R_4(t, x) &= R_0 + H_1 + H_2 + H_3 + u_r(t, R_0 + H, x) \end{aligned} \quad (1)$$

где $H = H_1 + H_2 + H_3$ — начальная толщина стенки.

Уравнения Навье–Стокса для жидкости и классической теории вязкоупругости для несжимаемой стенки трубки имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{(j)}) &= 0, \quad \rho_s^{(j)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(j)}}{\partial t^2} = -\nabla p^{(j)} + \operatorname{div}(\hat{\sigma}^{(j)}) \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{v} = (v_r, 0, v_x)$ и p — скорость и гидростатическое давление в жидкости, ρ_f и (ρ^j) — плотности жидкости и слоев, $p^{(j)}$ и $\hat{\sigma}^{(j)}$ — гидростатические давления и тензоры напряжений слоев.

Для материала слоев примем реологическую модель Кельвина–Фойхта:

$$\lambda_1^{(j)} \frac{\partial \sigma^{(j)}}{\partial t} + \sigma^{(j)} = 2G^{(j)} \left(e^{(j)} + \lambda_2^{(j)} \frac{\partial e^{(j)}}{\partial t} \right) \quad (3)$$

где $G^{(j)}$ — модуль сдвига, $\lambda_1^{(j)}$ и $\lambda_2^{(j)}$ — реологические коэффициенты, имеющие смысл времен релаксации напряжений и деформаций.

Граничные условия представлены условиями непрерывности скоростей, нормальных и касательных напряжений на границе раздела жидкость–стенка и между слоями стенки:

$$r = 0 : |v_x| < \infty, \quad v_r = 0 \quad (4)$$

$$r = R_1 : \quad v_r = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\left(1 + \lambda_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(p_s^{(1)} - p + 2\nu \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = 2G^{(1)} \left(1 + \lambda_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \quad (6)$$

$$\nu \rho_f \left(1 + \lambda_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = G^{(1)} \left(1 + \lambda_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r}\right) \quad (7)$$

$$r = R_i, i = 2, 3 : \quad u_r^{(i-1)} = u_r^{(i)}, \quad u_x^{(i-1)} = u_x^{(i)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\left(1 + \lambda_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_1^{(i-1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) (p_s^{(i)} - p_s^{(i-1)}) = 2G^{(i)} \left(1 + \lambda_1^{(i-1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \times \\ &\times \left(1 + \lambda_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} - 2G^{(i-1)} \left(1 + \lambda_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_2^{(i-1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_r^{(i-1)}}{\partial r} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &G^{(i-1)} \left(1 + \lambda_2^{(i-1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial u_r^{(i-1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(i-1)}}{\partial r}\right) = \\ &= G^{(i)} \left(1 + \lambda_1^{(i-1)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial r}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

На внешней поверхности трубки задано условие ненагружения

$$\begin{aligned} &\left(1 + \lambda_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) p_s^{(i)} = 2G^{(i)} \left(1 + \lambda_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}, \\ &G^{(i)} \left(1 + \lambda_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial r}\right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

На входе в трубку задана входная волна давления

$$x = 0 : \quad \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r p(t, r, 0) dr = p_0(t) \quad (12)$$

На конце трубки задано условия отражения волны, которые являются следствием условий непрерывности давления и объемного расхода на конце трубки

$$x = L : \quad Y_t \int_0^R r p(t, r, 0) dr = \pi R_1^2 \int_0^{R_1} r v_x(t, r, x) dr, \quad Y_t = \frac{Q}{\langle p \rangle} \quad (13)$$

2. Решение задачи.

Будем считать, что радиальные перемещения слоев малы по сравнению с внутренним радиусом трубки $R_0/L \equiv \varepsilon$, $u_r^*/R_0 \equiv \varepsilon \ll 1$. Решение задачи (1)–(13) будем искать в виде разложений по малому параметру $f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots$,

где $f = \{v_r, v_x, p, u_r, u_x, p_s\}$ — набор неизвестных задачи. Для нулевого приближения в безразмерных переменных получим следующую систему уравнений (значки (0) при неизвестных опущены):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\
\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) &= 0 \\
\frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(j)}}{r} + \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial x} &= 0 \\
\left(1 + \alpha_1^{(j)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p_s^{(j)}}{\partial r} &= 0 \\
\left(1 + \alpha_1^{(j)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho^{(j)} \frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s^{(j)}}{\partial x} \right) &= \frac{\Gamma^{(j)}}{Re} \left(1 + \alpha_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial r} \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

С граничными условиями

$$\begin{aligned}
r = 0 : \quad |v_x| < \infty, \quad v_r &= 0, \\
r = 1 : \quad v_r &= \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t}, \quad \left(1 + \alpha_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \right) (p_s^{(1)} - p) = 0, \\
\Gamma^{(1)} \left(1 + \alpha_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r} &= 0, \\
r = 1 + H_i, \quad i = 1, 2 : \quad u_r^{(i)} &= u_r^{(i+1)}, \quad u_x^{(i)} = u_x^{(i+1)}, \\
\left(1 + \alpha_1^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \alpha_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial t} \right) (p_s^{(i+1)} - p_s^{(i)}) &= 0, \\
\Gamma^{(i)} \left(1 + \alpha_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \alpha_1^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial r} &= \\
= \Gamma^{(i+1)} \left(1 + \alpha_2^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(1 + \alpha_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_x^{(i+1)}}{\partial r}, \\
r = R_4 : \quad u_r^{(3)} &= 0, \quad u_x^{(3)} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Во начальном сечении трубки задана входящая волна, а на конце трубки — условие отражения волн:

$$x = 0 : \quad 2 \int_0^1 r p dr = p_0(t), \quad x = 1 : \quad y_t \int_0^1 r p dr = \int_0^1 r v_x dr$$

Решение задачи (14)–(15) найдено в виде бегущей волны. Выражения для амплитуд неизвестных $f^{(0)}$ вычислены в квадратурах. Выписана также система уравнений для приближений 1-го порядка и получено ее решение в аналитической форме.

3. Анализ результатов численного моделирования.

Путем численных расчетов по полученным выражениям проведены расчеты профиля скорости жидкости в трубке, перемещений слоев стенки, амплитуд падающей и отраженной волн, напряжения сдвига на стенке. Оценена погрешность решения, полученного по компонентам нулевого порядка. Исследованы устойчивые жидкостные и стеночные моды, частоты и волновые числа которых были вычислены в [3, 5, 6]. Получены соответствующие решения для переходных режимов и случаев слияния мод. Показана возможность стабилизации течения за счет подбора модулей сдвига, вязкостей, плотностей и толщин слоев стенки трубки. Проведена оценка влияния реактивных изменений параметров стенки артерий, вызванных развитием различных патологий, на параметры течения и его устойчивость. Полученные результаты могут быть использованы как для лучшего понимания влияния изменений гемодинамических параметров на сердце и сосуда, а также для проектирования оптимальных биомедицинских аппаратов и систем, основанных на прокачивании биожидкостей по вязкоупругим трубкам.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Milnor W. R.* Hemodynamics. Baltimore: Williams and Wilkins. 1989. 408 p.
- [2] *Pedley T. J.* Blood flow in arteries and veins // Perspectives in Fluid dynamics. Batchelor G. K., Mofatt H. K., Worster M. G. (eds.). Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2000. pp. 105–158.
- [3] *Hamadiche M., Kizilova N. N.* Temporal and spatial instabilities of the flow in the blood vessels as multi-layered compliant tubes. //Intern.J.Dynam.Fluids. 2005. Vol.1, N1. pp. 1–23.
- [4] *Kizilova N., Hamadiche M., Gad-el-Hak M.* Flow in Compliant Tubes: Control and Stabilization by Multilayered Coatings // Intern. J. Flow Control. 2009. v.1, N3. pp. 199–211.
- [5] *Hamadiche M., Kizilova N., Gad-el-Hak M.* Suppression of Absolute Instabilities in the Flow inside a Compliant Tube // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2009. vol.25,N5. pp. 505–531.
- [6] *Кизилова Н. Н.* Распространение волн давления в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого материала // Известия РАН. МЖГ. 2006. N3. С. 122–136.

Kizilova N. N., Chistina E. O. *Wave propagation in the fluid-filled multilayer viscoelastic tubes: an asymptotic analysis.* Propagation of small excitations in the fluid-filled three layered viscoelastic tubes composed from anisotropic viscoelastic layers with different thickness and rheological properties is considered. The computation results on the velocity profiles and pressures in the tubes obtained as expansions in terms of the small parameter which is a ratio of the radial displacement of the wall and the inner radius of the tube are presented. It was shown the flow parameters are different for the stable and unstable modes and for the transitional regimes. A possibility of the mode coalescence is shown. Possible applications of the results to the blood flow in the arteries as multilayered tubes as well as to the fluid flows in the biomedical units and in the tubes of technical systems are discussed.

МНОГОФАЗНЫЕ МОДЕЛИ РАСТУЩИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Кизилова Н. Н.^{*}, Штейн А. А.^{**}

^{*}Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

^{**}НИИ механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Обсуждаются методы континуального моделирования растущих биологических тканей как многофазных сред. В частности, рассматриваются дифференциально растущие среды, в которых имеются подсистемы, различающиеся законами роста. При макроскопическом описании соседствующие ткани могут занимать один и тот же пространственный объем. В этом случае необходимо вводить несколько растущих континуумов со своими законами движения и деформационными характеристиками и с обязательным учетом распределенных сил межфазного взаимодействия. На примере среды, образованной двумя клеточными популяциями с разными законами деления, проанализирована задача об устойчивости синхронного роста фаз.

Континуальные модели, используемые для математического описания объемного роста биологических тканей, по большей части однофазные. По существу, это модели вязкоупругих сред максвелловского типа [1, 2], структура которых определяется соотношениями вида

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^e + \mathbf{C}^i, \quad \mathbf{D}^i = \frac{d\mathbf{C}^i}{dt} = \mathbf{D}^i(\mathbf{T}), \quad \mathbf{C}^e = \mathbf{C}^e(\mathbf{T}), \quad (1)$$

где \mathbf{C} , \mathbf{C}_e , \mathbf{C}_i — тензоры полных, упругих и неупругих деформаций соответственно, \mathbf{D}_i — тензор скоростей неупругих (ростовых) деформаций, а \mathbf{T} — тензор напряжений в среде. Присутствие ростовой деформации проявляется двумя принципиальными обстоятельствами: во-первых, активная (энергозатратная) природа деформаций исключает использование стандартных для пассивных вязкоупругих сред термодинамических ограничений на форму определяющих соотношений, и, во-вторых, присутствует объемный приток массы, который может вычисляться с использованием уравнения неразрывности.

Круг задач, решаемых на основе уравнений вида (1) очень ограничен. Физически приток массы означает наличие распределенной доставки материала, обеспечиваемой перемещающимися на микроскопическом уровне жидкостями. В рамках моделей вязкоупругого типа не могут быть проанализированы эффекты, связанные с учетом механизмов массопереноса и структурной неоднородности живой ткани. Анализ взаимодействия транспортных и ростовых процессов требует введения жидких фаз явно. Чтобы рассмотреть соответствующие вопросы, необходимо представить растущую ткань как многофазную, содержащую твердые и жидкие фазы.

Примером такого рода модели может служить трехфазная модель растущей растительной ткани, в которой среда моделируется совокупностью одной твердой

фазы (клеточные стенки) и двух жидких (внутриклеточной и внеклеточной), причем кинематические характеристики, определяющие ростовую деформацию ткани, связываются с твердой фазой. Таким образом, лишь одна фаза оказывается собственно растущей. Общая структура определяющего рост уравнения (1) при этом сохраняется, но теперь закон движения и деформационные характеристики относятся к твердой фазе, а не ко всей среде, и пополняется список аргументов определяющих функций:

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^i(\mathbf{T}, p, \chi_k), \quad \mathbf{C}^e = \mathbf{C}^e(\mathbf{T}, p, \chi_k). \quad (2)$$

Здесь p — давление во внутриклеточной жидкой фазе, а χ_k — дополнительные физико-химические и структурные характеристики ткани, отвечающие за управление ростовой деформацией (в первую очередь к их числу относятся концентрации различных веществ, распределенных в фазах). Присутствие в (2) давления лишь в одной из двух жидких фаз связано с тем, что в растительной ткани внутриклеточное давление намного превосходит внеклеточное и является главным внутренним механическим параметром, управляющим ростом. Разумеется, появление новых аргументов приводит к необходимости включения в рассмотрение уравнений, описывающих течение жидкости в каждой из жидких фаз и массообмен между фазами, который включает в себя регулируемый соотношениями мембранного типа массообмен между внутриклеточной и внеклеточной жидкостями и перенос массы из внутриклеточной жидкости в твердую фазу (откладку нового материала). Уравнения должны раздельно описывать транспорт воды и явно учитываемых химических компонентов (или обобщенного химического компонента). Структура таких моделей описана в [1].

Многофазные модели описанного типа сходны с однофазными в том отношении, что они отслеживают лишь один закон движения

$$x^i = x^i(\xi^k, t),$$

где x^i и ξ^k — координаты частицы твердой фазы в системе наблюдателя и сопутствующие соответственно, а t — время. Перемещение жидких фаз характеризуется полями их скоростей, и судьбу отдельной жидкой частицы (в принципе вычисляемую) не нужно знать для описания ростовой деформации. Таким образом, лишь одна фаза оказывается собственно растущей.

Вместе с тем, при росте часто возникает ситуация, когда различные ткани растут по своим собственным законам, но вынуждены координировать свои перемещения и деформации с соседними тканями. При макроскопическом описании соседствующие ткани могут занимать один и тот же пространственный объем. Примером является система проводящих трубок (жилок) в листе растения, распределенная при достаточно грубом осреднении в том же пространстве, что и внутренняя ткань (паренхима). Другой пример — две перемешанные популяции разных клеток (например, нормальных и злокачественных), сосуществующих в составе одной ткани. В такого рода средах (дифференциально растущих), в отличие от однофазных сред или сред состоящих из единственной «растущей» фазы и заполняющих ее жидкостей, существенны задачи, связанные с взаимным перемещением фаз и возникающими в процессе такого перемещения межфазными силами.

Для дифференциально растущих сред приходится рассматривать несколько растущих континуумов со своими законами движения

$$x_N^i = x_N^i(\xi_N^k, t),$$

где N — номер растущей фазы, и порождаемыми этими законами движения деформационными характеристиками.

Для среды, составленной несколькими твердыми континуумами, каждый из них рассматривается как материал, описываемый уравнениями вида (1) или (2), а межфазная сила упругая или вязкоупругая. В частности, естественно рассмотреть межфазную силу \mathbf{f} «максвелловского» типа, обеспечивающую (при соответствующих ограничениях на коэффициенты) постепенное затухание первоначально возникшей упругой силы из-за тканевой перестройки:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{f} = \mathbf{L}\frac{d\mathbf{w}}{dt},$$

где коэффициенты \mathbf{K} и \mathbf{L} , вообще говоря, тензорные, а \mathbf{w} — вектор относительного смещения фаз.

В других случаях структура модели может быть иной: например, достаточно разреженную клеточную популяцию естественно представить как среду частиц в очень вязкой жидкости, образованной клетками многочисленной популяции.

Рассмотрим среду, состоящую из клеток двух типов (опухолевых и нормальных). Введем два постоянных положительных коэффициента k_i , характеризующих скорость рождения нового объема клеток каждой популяции в единице ее объема. Здесь и далее индекс i равен 1 для опухолевых и 2 для нормальных клеток. Опухолевые клетки растут быстрее, т. е. $k_1 > k_2$. Скорости фаз обозначим \mathbf{v}_i , а их объемные концентрации n_i . Будем считать, что опухолевых клеток первоначально мало, так что они могут быть рассмотрены как частицы в среде, образованной нормальными клетками. Будем учитывать силы сопротивления и выталкивающую в форме традиционной для механики суспензий, а также хаотическое движение клеток («диффузию»). Тогда система уравнений в пренебрежении инерциальными членами и с учетом формы межфазной силы \mathbf{f}_{ij} , действующей со стороны j -ой фазы на i -ую, принимает вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}_i) = k_i n_i,$$

$$n_1 + n_2 = 1,$$

$$-\nabla(pn_1) + \mathbf{f}_{12} - b_1 \nabla n_1 = 0, \quad (3)$$

$$-\nabla(pn_2) + \mu \Delta \mathbf{v}_2 + \mathbf{f}_{21} - b_2 \nabla n_2 = 0,$$

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} = p \nabla n_i + s(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i), \quad i \neq j,$$

где p — давление в несущей фазе, а коэффициенты вязкости несущей фазы μ и межфазного сопротивления s , а также коэффициенты b_i , определяющие силу, смещающую клетки в область их меньшей концентрации, предполагаются положительными константами.

В дифференциально растущих средах возможен новый, принципиально важный биологически, тип неустойчивости. Континуумы, составляющие среду, могут расти синхронно, то есть с совпадающими законами движения и, следовательно, с нулевой относительной скоростью, или асинхронно, проскальзывая один относительно другого. Возможна ситуация, когда граничные условия допускают синхронный рост, а он, тем не менее, оказывается неустойчивым. При таком типе неустойчивости происходит расхождение частиц составляющих континуумов, например, клетки одной из популяций постепенно окружают другую.

Проиллюстрируем возможность такой неустойчивости на примере двух сосуществующих клеточных популяций, описываемых системой (3). Рассмотрим задачу об одномерном росте объекта. Система принимает вид, мало отличающийся от общей формы (3): векторы заменяются на их единственную отличную от нуля проекцию в направлении оси x (в частности, операторы ∇ и div — на частную производную $\partial/\partial x$, а оператор Δ — на вторую производную $\partial^2/\partial x^2$).

Пусть первоначально ткань занимает отрезок длины $2R_0$. Расположим начало координат $x = 0$ в середине этого отрезка и будем рассматривать симметричный процесс, при котором частицы в точке $x = 0$ остаются неподвижными. Таким образом, в этой точке принимаем условия симметрии

$$v_i = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \frac{\partial n_1}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

На внешней (подвижной из-за роста объекта) границе $x = \pm R(t)$ ($R(0) = R_0$) зададим условия заданного внешнего давления и согласованного перемещения популяций

$$p = p_0, \quad v_1 = v_2. \quad (5)$$

Примем, что в начальный момент имело место однородное распределение концентраций $n = n_0$.

Нетрудно видеть что переписанная в одномерной форме система (3) с граничными условиями (4) и (5) всегда допускает решение, в котором имеет место синхронный рост (т. е. $v_1 \equiv v_2$), однородное распределение сохраняется и быстрее растущая диспергированная популяция (опухолевая) замещает медленно растущую несущую: $n_1 \rightarrow 1$, $n_2 \rightarrow 0$. При этом следует помнить, что решение физически описывает только тенденцию, так как при существенном возрастании концентрации опухолевых клеток их уже нельзя рассматривать как среду частиц в несущей фазе, образованной нормальными клетками, и постановка задачи становится неприменимой.

Исследуем устойчивость такого процесса. Для этого переформулируем задачу в системе координат, сопутствующей несущей фазе. В этой системе пространственная координата ξ на границе остается постоянной $\xi = R_0$ и, что особенно важно, синхронное решение оказывается пространственно однородным относительно переменных n_i , p и $x_\xi = \partial x/\partial \xi$.

Преобразования и окончательные соотношения громоздки и здесь не приводятся. Задачу о развитии малых возмущений синхронного решения удастся представить для каждой переменной $A_k(\xi, t)$ в виде тригонометрических рядов вида $\sum_m A_{km}(t) \cos(2\pi m\xi/R)$ или $\sum_m A_{km}(t) \sin(2\pi m\xi/R)$. Для функций времени $A_{km}(t)$ получаются нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения.

Асимптотический анализ этих уравнений показывает, что при $t \rightarrow \infty$ возмущения неограниченно возрастают, причем с разной скоростью возрастания в зависимости от моды, что приводит к формированию неоднородных распределений переменных, т. е. к неустойчивости синхронного роста. Полное представление о поведении объекта требует детального анализа на конечных временах и сопоставления характерных времен развития возмущений с характерными временами возмущаемого процесса. Кроме того, в общем случае может оказаться необходимым исследование решения в случае конечных возмущений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-90403-Укр_ф_а) и ДФФД Украины (проект № Ф28.1/011).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Штейн А. А. Приложение методов механики сплошной среды к моделированию роста биологических тканей // Современные проблемы биомеханики. Вып. 10. М.: Издательство МГУ, 2000. С. 148–173.
- [2] Кантор Б. Я., Кизилова Н. Н. Биомеханика развивающейся растительной ткани // Пробл. машиностроения. 2002. Т. 5. № 2. С. 96–103.

Kizilova N.N., Stein A.A. *Multiphase Models of Growing Biological Continua.* Methods of continuum modeling of growing biological tissues as multiphase media are discussed. In particular, differentially growing media which contain subsystems with different growth laws are considered. Within the framework of macroscopical description, neighboring tissues may occupy the same spatial volume. In this case, several growing continua, with their own laws of motion and deformation characteristics and necessary account for distributed interphase forces, should be introduced. With reference to a medium formed by two cell populations with different division laws, the problem of stability of synchronous phase growth is analyzed.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТЕРМОУПРУГИЙ КОНТИНУУМ КОССЕРА КАК ФИЗИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Ковалев В. А.^{*}, Радаев Ю. Н.^{**}

^{*}Московский городской университет управления Правительства Москвы

^{**}Самарский государственный университет

В рамках классической физической теории поля с помощью теории вариационных геометрических симметрий действия рассматривается построение связанной модели гиперболического термоупругого микрополярного континуума (НМРТЕ, в частности, континуума Коссера) и вывод канонических тензоров энергии—импульса связанного динамического микрополярного G^{III}-термоупругого поля с учетом характерной для микромеханики континуума нелокальности плотности лагранжиана и характерной для G^{III}-термоупругости *конечности* скорости распространения теплового сигнала как волны «второго звука». Сформулирован общий принцип наименьшего действия связанного гиперболического микрополярного термоупругого поля (G^{III}-МРТЕ) и даны канонические уравнения поля в том случае, когда лагранжиан *фактически* зависит от градиентов полевых переменных высокого порядка. Используя методы и алгоритмы группового анализа, в работе проведены вычисления токов Нетер и тензоров энергии—импульса для трех случаев, когда лагранжиан зависит от градиентов полевых переменных порядка, не превосходящего 1, 2, 3. Для каждого из указанных случаев приводятся явные формулы для компонент канонического тензора энергии—импульса. Построен тензор энергии—импульса для микрополярных термоупругих тел, процесс распространения тепла в которых характеризуется обобщенным уравнением теплопроводности гиперболического аналитического типа. В уравнениях микрополярного термоупругого поля выполнен учет возможных ограничений на микроповороты. Найдены инвариантные интегралы, выражающие сохранение энергии—импульса гиперболического связанного микрополярного термоупругого поля.

1. Вводные замечания. Теория поля и методы теории вариационных симметрий [1,2] являются весьма эффективным современным инструментом развития теории и механики сплошных деформируемых сред. В работах [3]– [6] методы теории поля были введены в классические области механики деформируемого твердого тела и применены к исследованию волновых процессов теплопроводности в твердых телах, для полевого описания которых используется схема обобщенной термоупругости [7,8]. Последняя к настоящему времени развита в общей нелинейной форме в трех вариантах G^I, G^{II}, G^{III}: в линейном приближении первый вариант приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности, второй вариант предлагает рассматривать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс и приводит к *гиперболическому* уравнению распространения тепла, третий вариант — смешанный — включает первые два в качестве предельных случаев. Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название «второго звука». Теория G^{III}-термоупругости (G^{III}-ТЕ) была предложена в качестве альтернативного подхода к математическому модели-

рованию процесса теплопроводности в твердых телах с помощью уравнений гиперболического аналитического типа, обеспечивающих конечную скорость распространения теплового сигнала. Теоретико-полевая формулировка связанной GНИ-термоупругости дана в [9]. Целью представляемой работы является построение методами теории поля гиперболических моделей теплопроводности в микрополярных термоупругих телах (GНИ-МРТЕ).

2. Теоретико-полевой подход к построению модели микрополярной гиперболической термоупругости. В микрополярной теории упругости конечная деформация тела, представляемая преобразованием $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ положения \mathbf{X} отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место \mathbf{x} , сопровождается ротационной микродеформацией $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)$, где $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения (полярный вектор, определяющий конечный поворот локального триэдра, связанного с микроэлементом). С дополнительными ротационными степенями свободы, которыми наделяется микроэлемент, связана и дополнительная инерция, импульс $\mathbf{p}_{\text{micro}}$ и кинетическая энергия K_{micro} : $\mathbf{p}_{\text{micro}} = \rho_{\text{R}} \boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}$, $K_{\text{micro}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{R}} \dot{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}$, где $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ — тензор инерции, точкой обозначается частное дифференцирование по времени при фиксированном положении \mathbf{X} .

Ставя своей целью вывод уравнений поля, описывающих деформацию и микродеформацию микрополярного термоупругого тела (МРТЕ) с гиперболическим обобщенным уравнением теплопроводности в духе теории GНИ, воспользуемся принципом наименьшего действия и формализмом теории поля. В качестве определяющих переменных следует принять градиент деформации $\mathbf{F} = \nabla_{\text{R}} \otimes \mathbf{x}$, полярный вектор микровращения $\boldsymbol{\phi}$ и его градиент $\nabla_{\text{R}} \otimes \boldsymbol{\phi}$, градиент температурного смещения $\nabla_{\text{R}} \vartheta$ и скорость температурного смещения $\dot{\vartheta}$. Температурное смещение ϑ вводится как первообразная по времени (при фиксированных Лагранжевых переменных) от температуры θ .

В декартовых Лагранжевых X_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) и Эйлеровых координатах x_j ($j = 1, 2, 3$) естественная плотность (на единицу объема в отсчетном состоянии) микрополярного термоупругого тела имеет форму разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_{\alpha}, \phi_j, \dot{x}_j, \dot{\phi}_j, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha} x_j, \partial_{\alpha} \phi_j, \partial_{\alpha} \vartheta) = & \frac{1}{2} \rho_{\text{R}}(X_{\alpha}) \dot{x}_k \dot{x}_k + \frac{1}{2} \rho_{\text{R}}(X_{\alpha}) \dot{\phi}_j \boldsymbol{\mathcal{J}}_{jk} \dot{\phi}_k - \\ & - \psi(X_{\alpha}, \phi_j, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha} x_j, \partial_{\alpha} \phi_j, \partial_{\alpha} \vartheta). \end{aligned} \quad (1)$$

Вариационный интеграл микрополярного термоупругого действия, следовательно, будет иметь следующий вид ($\alpha = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$):

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(X_{\alpha}, \phi_j, \dot{x}_j, \dot{\phi}_j, \dot{\vartheta}, \partial_{\alpha} x_j, \partial_{\alpha} \phi_j, \partial_{\alpha} \vartheta) dX_1 dX_2 dX_3 dt, \quad (2)$$

где \mathcal{D} — декартово произведение трехмерной области евклидова пространства (отсчетной конфигурации тела) и интервала времени с границами t_1, t_2 .

Прежде чем сформулировать уравнения поля как уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала (2) рассмотрим определяющие уравнения микрополярного термоупругого континуума. В рамках Лагранжева полевого формализма определяющие уравнения выступают просто как *обозначения* для частных производных,

которые вводятся в целях сокращения записи уравнений поля:

$$S_{:j}^{\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial (\partial_{\alpha} x_j)}, \quad \mathcal{M}_{:j}^{\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial (\partial_{\alpha} \phi_j)}, \quad \mathcal{A}_j = -\frac{\partial \psi}{\partial \phi_j}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad j_{\mathbf{R}}^{\alpha} = -\frac{\partial \psi}{\partial (\partial_{\alpha} \vartheta)}, \quad (3)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$; или в «прямой» тензорной записи

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathcal{M} = \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \phi)}, \quad \mathcal{A} = -\frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial \psi}{\partial (\nabla_{\mathbf{R}} \vartheta)}.$$

Укажем на смысл символов, участвующих в записи определяющих уравнений: ψ — плотность свободной энергии Гельмгольца (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии), $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}$ — градиент деформации, \mathbf{S} — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, \mathcal{M} — тензор микронапряжений, \mathcal{A} — момент (сопряженный микровращениям), s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии), $\mathbf{j}_{\mathbf{R}}$ — вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии), ϑ — температурное смещение.

Уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (2) с учетом обозначений (3) естественно разделяются на три группы и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha} S_{:j}^{\alpha} - \rho_{\mathbf{R}} \ddot{x}_j &= 0 & (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_{\alpha} \mathcal{M}_{:j}^{\alpha} + \mathcal{A}_j - \rho_{\mathbf{R}} \mathfrak{J}_{jk} \ddot{\phi}_k &= 0 & (\alpha = 1, 2, 3; j, k = 1, 2, 3), \\ \partial_{\alpha} j_{\mathbf{R}}^{\alpha} + \dot{s} &= 0 & (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что в уравнении баланса энтропии отсутствует производство энтропии.

Уравнения поля (4) в «прямой» тензорной записи имеют форму

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial (\rho_{\mathbf{R}} \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{0}, & \left. \frac{\partial (\rho_{\mathbf{R}} \mathfrak{J} \cdot \dot{\phi})}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathcal{M} &= \mathcal{A}, \\ \dot{s} + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{R}} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью методов теории поля [6] можно вычислить компоненты тензора энергии—импульса; они распадаются на следующие четыре группы:

$$\begin{aligned} \text{i} : & (\lambda, \mu = 1, 2, 3) & T_{:\lambda}^{\mu} &= \mathcal{L} \delta_{\lambda}^{\mu} + S_{:l}^{\mu} (\partial_{\lambda} x_l) + \mathcal{M}_{:l}^{\mu} (\partial_{\lambda} \phi_l) - j_{\mathbf{R}}^{\mu} (\partial_{\lambda} \vartheta); \\ \text{ii} : & (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3) & T_{:4}^{\mu} &= S_{:l}^{\mu} \dot{x}_l + \mathcal{M}_{:l}^{\mu} \dot{\phi}_l - j_{\mathbf{R}}^{\mu} \dot{\vartheta}; \\ \text{iii} : & (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4) & T_{:\lambda}^4 &= -\rho_{\mathbf{R}} (\partial_{\lambda} x_l) \dot{x}_l - \rho_{\mathbf{R}} (\partial_{\lambda} \phi_l) \mathfrak{J}_{lk} \dot{\phi}_k - s (\partial_{\lambda} \vartheta); \\ \text{iv} : & (\lambda = 4; \mu = 4) & T_{:4}^4 &= \mathcal{L} - \rho_{\mathbf{R}} \dot{x}_l \dot{x}_l - \rho_{\mathbf{R}} \mathfrak{J}_{lk} \dot{\phi}_l \dot{\phi}_k - s \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Компоненты группы (i) тензора энергии—импульса поля, взятые с противоположным знаком, формируют тензор напряжений Эшелби $-\mathbf{P} = \mathcal{L} \mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\mathbf{T}} + \mathcal{M} \cdot (\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \phi)^{\mathbf{T}} - \mathbf{j}_{\mathbf{R}} \otimes (\nabla_{\mathbf{R}} \vartheta)$; из компонент (ii) образуется вектор Умова—Пойнтинга $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{M} \cdot \dot{\phi} - \theta \mathbf{j}_{\mathbf{R}}$; компоненты (iii) определяют вектор псевдоимпульса поля $\mathcal{P} = -\rho_{\mathbf{R}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \rho_{\mathbf{R}} (\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \phi) \cdot \mathfrak{J} \cdot \dot{\phi} - s \nabla_{\mathbf{R}} \vartheta$; компонента (iv) тензора энергии—импульса есть (с отрицательным знаком) плотность гамильтониана $T_{:4}^4 = -\mathcal{H}$.

3. Гиперболический термоупругий континуум Коссера. Рассмотрим далее построение тензора энергии—импульса в том случае, когда имеются ограничения на микровращения. Наиболее интересной в этом аспекте представляется гипотеза Коссера: вектор микровращения ϕ совпадает с вектором, определяющим

«конечный» поворот элемента тела при его деформации из отсчетного состояния в актуальное. Ясно, что при этом вектор ϕ однозначно определяется градиентом деформации \mathbf{F} . Лагранжиан в таком случае будет содержать градиенты второго порядка от полевых переменных: $\partial_\mu \partial_\lambda x_k$, $\partial_\lambda \dot{x}_k$.

Плотности кинетической энергии микровращения и свободной энергии задаются в форме $K_{\text{micro}} = \mathcal{K}(X_\alpha, \partial_\alpha \dot{x}_j, \partial_\alpha x_j)$, $\psi = \psi(X_\alpha, \vartheta, \partial_\alpha x_j, \partial_\beta \partial_\alpha x_j, \partial_\alpha \vartheta)$, причем плотность кинетической энергии микровращения квадратично зависит от $\partial_\lambda \dot{x}_k$.

Определяющие уравнения гиперболического термоупругого континуума Коссе́ра имеют вид

$$\begin{aligned} S_{\cdot j}^\alpha &= \frac{\partial \psi}{\partial (\partial_\alpha x_j)}, & \Sigma_{\cdot j}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial (\partial_\alpha x_j)}, & \mathcal{M}_{\cdot j}^{\beta\alpha} &= \frac{\partial \psi}{\partial (\partial_\beta \partial_\alpha x_j)}, & \mathcal{S}_{\cdot j}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial (\partial_\alpha \dot{x}_j)}, \\ s &= -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, & j_{\text{R}}^\alpha &= -\frac{\partial \psi}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$; уравнения поля с учетом (6) находятся в виде

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (S_{\cdot j}^\alpha - \Sigma_{\cdot j}^\alpha) + \partial_\alpha \dot{S}_{\cdot j}^\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta \mathcal{M}_{\cdot j}^{\beta\alpha} - \rho_{\text{R}} \ddot{x}_j &= 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_{\text{R}}^\alpha + \dot{s} &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Компоненты канонического тензора энергии–импульса можно распределить по следующим четырем группам:

$$\begin{aligned} \text{i:} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \quad & T_{\cdot \lambda}^\mu = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{\cdot l}^\mu (\partial_\lambda x_l) - \Sigma_{\cdot l}^\mu (\partial_\lambda x_l) - j_{\text{R}}^\mu (\partial_\lambda \vartheta) + \\ & \quad + \mathcal{M}_{\cdot l}^{\nu\mu} (\partial_\nu \partial_\lambda x_l) - (\partial_\lambda x_l) \partial_\nu \mathcal{M}_{\cdot l}^{\nu\mu}; \\ \text{ii:} \quad (\lambda = 4; \mu = 1, 2, 3) \quad & T_{\cdot 4}^\mu = S_{\cdot l}^\mu \dot{x}_l - \Sigma_{\cdot l}^\mu \dot{x}_l - j_{\text{R}}^\mu \dot{\vartheta} + (\partial_\nu \dot{x}_l) \mathcal{M}_{\cdot l}^{\nu\mu} - \dot{x}_l \mathcal{S}_{\cdot l}^\mu - \\ & \quad - \dot{x}_l \partial_\nu \mathcal{M}_{\cdot l}^{\nu\mu} + \dot{x}_l \dot{S}_{\cdot l}^\mu; \\ \text{iii:} \quad (\lambda = 1, 2, 3; \mu = 4) \quad & T_{\cdot \lambda}^4 = -\rho_{\text{R}} (\partial_\lambda x_l) \dot{x}_l - s (\partial_\lambda \vartheta) - (\partial_\nu \partial_\lambda x_l) \mathcal{S}_{\cdot l}^\nu + (\partial_\lambda x_l) \partial_\nu \mathcal{S}_{\cdot l}^\nu; \\ \text{iv:} \quad (\lambda = 4; \mu = 4) \quad & T_{\cdot 4}^4 = \mathcal{L} - \rho_{\text{R}} \dot{x}_l \dot{x}_l - (\partial_\nu \dot{x}_l) \mathcal{S}_{\cdot l}^\nu - s \dot{\vartheta} + \dot{x}_l \partial_\nu \mathcal{S}_{\cdot l}^\nu. \end{aligned}$$

Канонический тензор энергии–импульса служит источником построения инвариантных интегралов поля. В случае пренебрежимо малой кинетической энергии движения и инерции микровращения и при отсутствии теплопроводности с помощью данной выше теории можно сразу указать инвариантный интеграл для континуума Коссе́ра

$$J_\lambda = \oint (\mathcal{L} \delta_\lambda^\mu + S_{\cdot l}^\mu (\partial_\lambda x_l) + \mathcal{M}_{\cdot l}^{\nu\mu} (\partial_\nu \partial_\lambda x_l) - (\partial_\lambda x_l) \partial_\nu \mathcal{M}_{\cdot l}^{\nu\mu}) n_\mu d\Sigma,$$

который не зависит от выбора в отсчетной конфигурации замкнутой поверхности, охватывающей дефект (или в широком смысле — место в отсчетном состоянии, где нарушается регулярность поля).

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.741.12.2173) и при частичной поддержке РФФИ (проект №10-01-00184-а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Physik. Kl. 2. 1918. pp. 235–257.
- [2] *Olver P. J.* Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press, 1995. 526 p.
- [3] *Радаев Ю. Н.* Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2000. № 4(18). С. 87–113.
- [4] *Радаев Ю. Н.* Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Проблемы механики: Сб. статей. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. (Под ред. акад. Д. М. Климова.) М.: Физматлит, 2003. С. 658–684.
- [5] *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 2. С. 41–94.
- [6] *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
- [7] *Green A. E., Naghdi P. M.* On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. 1992. V. 15. pp. 253–264.
- [8] *Green A. E., Naghdi P. M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. pp. 189–208.
- [9] *Kalpakides V. K., Maugin G. A.* Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation // Reports in Mathematical Physics. 2004. V. 53. pp. 371–391.

Kovalev V. A., Radayev Y. N. *Hyperbolic thermoelastic Cosserat continuum as a field theory.* A hyperbolic micropolar thermoelastic continuum (HMPTE, particularly, the Cosserat micropolar one) is considered as a physical field theory taking account of the Lagrangian non-locality attributed to continuum micromechanics and the wave nature of heat transport (the second sound phenomenon in solids) modelled according to the Green&Naghdi concept. The action integral of GNII-MPTE field is presented. The canonical field equations are then obtained. A derivation of the canonical energy-momentum tensors are given by the standard Noether technique and known from variational symmetry theory algorithms extended to non-local Lagrangians depending on the second and the third order field gradients. Explicit formulae are obtained for energy-momentum tensors of GNII-MPTE fields. Path-independent integrals of a GNII-MPTE field are finally discussed.

ВЫПРЯМЛЕНИЕ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНОЙ КРИВОЙ ТРУБЫ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Колесников А. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В данной работе рассматриваются равновесии высокоэластичной тонкостенной криволинейной трубы, нагруженной внутренним давлением. Кривизна трубы вдоль её образующей постоянна. Труба имеет круговое поперечное сечение. При раздувании труба изменяет форму поперечного сечения и кривизну. Целью работы является изучение влияния внутреннего давления на кривизну надутой трубы.

Конструкцию моделируем оболочкой из высокоэластичного материала. В недеформированном состоянии поверхность оболочки представляет собой сектор тора с круговым сечением. Решение задачи статики осуществляется полуобратным методом. Полагаем, что деформированная конструкция представляет собой сектор тора с новой кривизной. Форма поперечного сечения остаётся неизвестной. Таким образом, задача статики оболочки сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на поперечном сечении. Решение данной системы осуществляется численным методом.

1. Введение

Рассмотрим тонкостенную оболочку, которая представляет собой сектор тора. Поперечное сечение оболочки замкнутое. Такую оболочку будем называть кривой трубой. Материал, из которого изготовлена оболочка, считаем несжимаемым, высокоэластичным и изотропным. Пусть оболочка нагружена только равномерно распределённым внутренним давлением. Под действием давления кривая труба изменяет свою кривизну. Данную деформацию можно отнести к деформации чистого изгиба. Подход к решению задачи чистого изгиба можно найти в работах [1] и [2]. Он основывается на возможности разложения деформации на две составляющих: деформацию поперечного сечения и его поворот относительно некоторой оси. С помощью полуобратного метода Сен-Венана данное разложение позволяет свести уравнения статики оболочки к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью является исследование влияния внутреннего давления на выпрямление кривой трубы.

2. Уравнения равновесия

Обозначим поверхность оболочки в начальной конфигурации o . Радиус-вектор \mathbf{r} точки её поверхности определяется в декартовой системе координат с помощью двух гауссовых координат q^1, q^2 следующим образом

$$\mathbf{r} = \chi_1(q^1)\mathbf{i}_1 + \chi_2(q^1)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 = \sin \beta q^2 \mathbf{i}_2 + \cos \beta q^2 \mathbf{i}_3.$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты декартовой прямоугольной системы координат. Параметр β можно трактовать как кривизну образующей сектора тора, будем его называть кривизной трубы.

Пусть оболочку нагружена равномерно распределённым нормальным давлением ξ , и после деформации поверхность оболочки O представляется сектором тора. Обозначим кривизну деформированной труба B . Тогда, рассматривая параметры q^1 и q^2 как лагранжевы координаты, положение точки деформированной поверхности можно задать радиус-вектором \mathbf{R} следующим образом

$$\mathbf{R} = X_1(q^1)\mathbf{i}_1 + X_2(q^1)\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_2 = \sin Bq^2\mathbf{i}_2 + \cos Bq^2\mathbf{i}_3. \quad (1)$$

Легко видеть, что для такой задачи компоненты метрических тензоров недеформированной и деформированной поверхностей оболочки не зависят от координаты q^2 и образуют диагональную матрицу [3]

$$\begin{aligned} g_{11} &= \chi_1'^2 + \chi_2'^2, & g_{12} &= 0, & g_{22} &= \beta^2 \chi_2'^2, \\ G_{11} &= X_1'^2 + X_2'^2, & G_{12} &= 0, & G_{22} &= B^2 X_2'^2, \\ B_{11} &= \frac{X_1''X_2' - X_2''X_1'}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2}}, & B_{12} &= 0, & B_{22} &= \frac{B^2 X_2' X_1'}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2}}. \end{aligned}$$

В этом случае уравнения равновесия оболочки сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{11}}{\partial q^1} + L^{11}(2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + L^{22}\Gamma_{22}^1 + \xi^1 &= 0, \\ \xi^2 = 0, L^{11}B_{11} + L^{22}B_{22} + \xi &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $L^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора усилий типа Коши, $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ — символы Кристоффеля второго рода [3]. Определяющие соотношения для оболочки постоянной толщины h из несжимаемого гиперупругого изотропного материала можно представить через функцию удельной потенциальной энергии W следующим образом [4]

$$L^{\alpha\beta} = \frac{2h}{\eta} \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{G_{11}G_{22}}} \frac{\partial W}{\partial G_{\alpha\beta}}, \quad \eta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 2, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Введём в рассмотрение функции $\lambda_1(q^1)$, $\lambda_2(q^1)$ и $\psi(q^1)$

$$\lambda_1(q^1) = \sqrt{\frac{G_{11}}{g_{11}}}, \quad \lambda_2(q^1) = \sqrt{\frac{G_{22}}{g_{22}}}, \quad \operatorname{tg} \psi(q^1) = \frac{X_2'}{X_1'}.$$

Тогда уравнения равновесия (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} \lambda_1' - \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \lambda_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right) \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} B \sin \psi + \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right) \frac{g_{22}'}{2g_{22}} &= 0, \\ \lambda_2' - B \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \lambda_1 \sin \psi + \frac{g_{22}'}{2g_{22}} \lambda_2 &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \psi' - B \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \lambda_1 \cos \psi - \frac{\xi}{h} \sqrt{g_{22}} \lambda_1 \lambda_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

В случае замкнутого поперечного сечения граничными условиями на неизвестные функции являются условия их периодичности.

Деформация вида (1) является общим представлением деформации чистого изгиба. Можно показать, что для такой деформации главный вектор и главный момент в поперечном сечении не зависят от координаты q^2 . Более того главный вектор равен нулю, а главный момент относительно центра тяжести поперечного сечения Y_{2C} можно представить в виде [3]

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \oint \sqrt{G_{11}G_{22}} L^{22} (Y_{2C} - X_2) dq^1.$$

По условию внешней нагрузкой является только равномерно распределённое давление на поверхности оболочки, это означает, что главный момент в сечении должен быть равен нулю. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось следующее требование: $M_1 = 0$.

Краевая задача для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (3) решается численно методом пристрелки, использованным ранее для решения задачи больших деформаций чистого изгиба цилиндрической оболочки [3].

3. Результаты

Рассмотрим кривую трубу из неогуковского материала с параметром $\mu = 1$ [3] постоянной толщины $h = 0,001$ кругового поперечного сечения радиуса $r_0 = 1$

$$\chi_1(q^1) = r_0 \sin q^1, \quad \chi_2(q^1) = \beta^{-1} - r_0 \cos q^1, \quad q^1 \in [0; \pi].$$

На рисунке 1 представлена зависимость между кривизной раздутой кривой трубы и внутренним давлением в оболочке. По горизонтальной оси отложена относительная кривизна $B^* = B\beta^{-1}$. По вертикальной оси отложено безразмерное давление $p^* = pr_0 h^{-1} \mu^{-1}$. Результаты представлены для начальных кривизн β равных 0,05, 0,1 и 0,2. Из графика видно, что рост внутреннего давления приводит к выпрямлению трубы, данная зависимость имеет нелинейный характер и

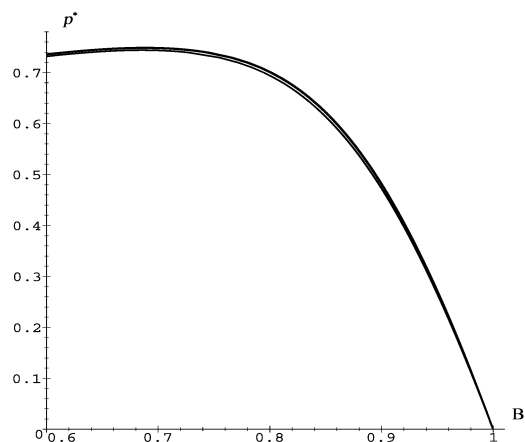


Рис. 1. Зависимость между кривизной раздутой трубы и внутренним давлением.

имеет максимум на величину давления для рассматриваемой модели неогуковско-го материала. Кроме того, для рассмотренных случаев относительное изменение кривизны трубы под действием внутреннего давления практически не зависит от начальной кривизны.

Величина максимального внутреннего давления, которое выдерживает труба из неогуковского материала, и величина её относительной кривизны даны в таблице . Первая строка соответствует задачи о раздувании прямолинейной цилиндрической оболочки кругового поперечного сечения. Для рассмотренных кривых труб при изменении начальной кривизны в 4 раза изменение значений максимального внутреннего давления и относительной кривизны оказываются в пределах 1,5%. С ростом начальной изогнутости наблюдается незначительное уменьшение величины максимального давления.

β	B^*	p_{\max}^*
0	–	0,750
0,05	0,681	0,749
0,1	0,683	0,749
0,2	0,692	0,745

Таблица 1. Максимальное внутреннее давление.

На рисунке 2 представлены графики зависимости усилий в оболочке при давлении $p^* = 0,69$. Номера графиков 1, 2 и 3 соответствуют β равным 0,05, 0,1 и 0,2, соответственно. По вертикальной осям на рисунке 2 отложены обезразмеренные усилия, задаваемые соотношениями

$$L_1^* = \frac{1}{h\mu} \left(\frac{h}{\lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right), \quad L_2^* = \frac{1}{h\mu} \left(\frac{h}{\lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right).$$

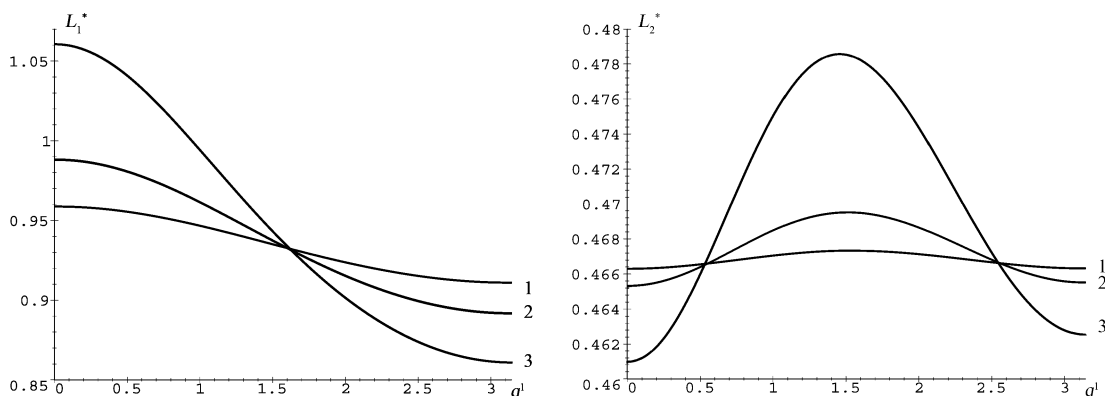


Рис. 2. Усилия в оболочке для различных β при давлении $p^* = 0,69$.

Максимальные усилия L_1^* достигаются в точке $q^1 = 0$. Максимальные усилия L_2^* достигаются в окрестности точки $q^1 = \pi/2$. Характер поведения усилий не

изменяется при изменении начальной кривизны и внутреннего давления. Увеличение начальной кривизны приводит к росту неоднородности усилий в раздутой кривой трубе.

4. Заключение

Рассмотрена задача о раздувании тонкостенной оболочки в виде сектора тора, сделанной из резиноподобного материала. В работе используется неогукковская модель высокоэластичного несжимаемого материала. При отсутствии других внешних воздействий на оболочку, кроме равномерно распределённого нормального давления на её внутренней поверхности, оболочка начинает выпрямляться с ростом величины давления. При этом её поперечное сечение остаётся практически круговым.

Влияние начальной изогнутости трубы на деформацию мало. Размеры деформированного сечения и относительная кривизна (кривизна деформированной трубы, отнесённая к начальной кривизне) практически не зависят от начальной кривизны трубы для рассмотренного диапазона кривизн.

Для неогукковского материала зависимость между относительной кривизной и давлением имеет максимум на величину давления. Данный максимум связан с неустойчивостью материала при двусосном растяжении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00459) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Libai A., Simmonds J. S. *The Nonlinear Theory of Elastic and Shells*. 2nd ed. Cambridge Univ. Press., Cambridge. 1998. 542 p.
- [2] Zubov L. M. Semi-inverse solution in non-linear theory of elastic shells // *Archives of Mechanics*. 53. №4–5. 2001. pp.599–610.
- [3] Kolesnikov A. M., Zubov L. M. Large bending deformations of a cylindrical membrane with internal pressure // *Z. Angew. Math. Mech.* 89. №4. 2009. pp.288–305.
- [4] Зубов Л. М. *Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек*. Ростов-н/Д: Рост. унив., 1982. 144 с.

Kolesnikov A. M. *Straightening of hyperelastic curved tube by internal pressure*. We are study in this paper the nonlinear behavior of curved tubes of circular cross section, subject by internal pressure. In the reference configuration the curved tube is a sector of torus. We assume that the deformed tube is also toroidal. It allows us to decompose the deformation into two parts: an in-plane deformation of meridional cross section, plus a rigid rotation of each of these meridional planes about some axis by linearly varying angels. In this case the equilibrium equations reduce to ordinary differential equations. These equations are solved by numerical method. Our aim in this work is to study the influence of the internal pressure to the bending of curved tubes. The relation between the internal pressure and the curvature of curved tube is obtained.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Колосова Е. М.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

С помощью конечно-элементного пакета ANSYS осуществлено моделирование контактного взаимодействия в подшипнике скольжения с учетом тепловыделения от трения. В качестве математической модели рассматривается статическая задача термоупругости о вдавливании упругого вала в упругий цилиндрический слой, жестко закрепленный по внешней поверхности. В зоне контакта учитывается трение. Приведены результаты расчетов контактных и эквивалентных напряжений и поля температуры в зависимости от коэффициента трения.

1. Постановка контактной задачи. В цилиндрической системе координат $O r \varphi$ рассматривается упругий цилиндрический слой $\{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ и штамп в форме круга радиуса $R_0 = R_1 - h$, центр которого O_1 сдвинут относительно начала координат O на величину h по вертикали. Цилиндрический слой жестко закреплён по границе $r = R_2$. В точке с декартовыми координатами $(0, R_0 - h)$ действует вертикально вниз сосредоточенная сила P , а в точках с декартовыми координатами $(-R_0, -h)$ и $(R_0, -h)$ прикладываются две сосредоточенные силы P_1 , действующие вертикально вниз и вверх соответственно, таким образом, на вал действует момент, равный $M = 2R_0P_1$. Предполагается, что в зоне контакта имеются силы трения с коэффициентом трения μ . На внутренней границе слоя и внешней границе вала заданы условия конвективного теплообмена. Вследствие трения в области контакта происходит выделение количества тепла [1] $Q = v \mu q(\varphi)$, где v — эквивалент линейной скорости точек в зоне контакта, $q(\varphi) = -\sigma_r(R_1, \varphi)$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ — зона контакта) — контактное давление. Постановка задачи приведена на рис. 1а.

2. Конечно-элементное моделирование. В качестве инструментария при моделировании контактного взаимодействия используется конечно-элементный пакет ANSYS и его командный язык программирования APDL. Построение двумерной твердотельной модели осуществляется по технологии моделирования «снизу-вверх», с использованием следующей последовательности действий: задание опорных точек; построение дуг и прямых линий, соединяющих опорные точки; определение областей по опорным точкам; связывание с различными областями заданных физико-механических свойств материалов. Введены следующие обозначения материальных констант: для слоя — коэффициент Пуассона ν_1 , модуль Юнга E_1 , коэффициент трения μ , коэффициент теплопроводности λ_1 , коэффициент теплового расширения α_1 ; для вала — $\nu_2, E_2, \lambda_2, \alpha_2$, соответственно.

Решение задачи можно разделить на три этапа. На первом этапе решается задача упругости, по результатам которой формируется массив контактных дав-

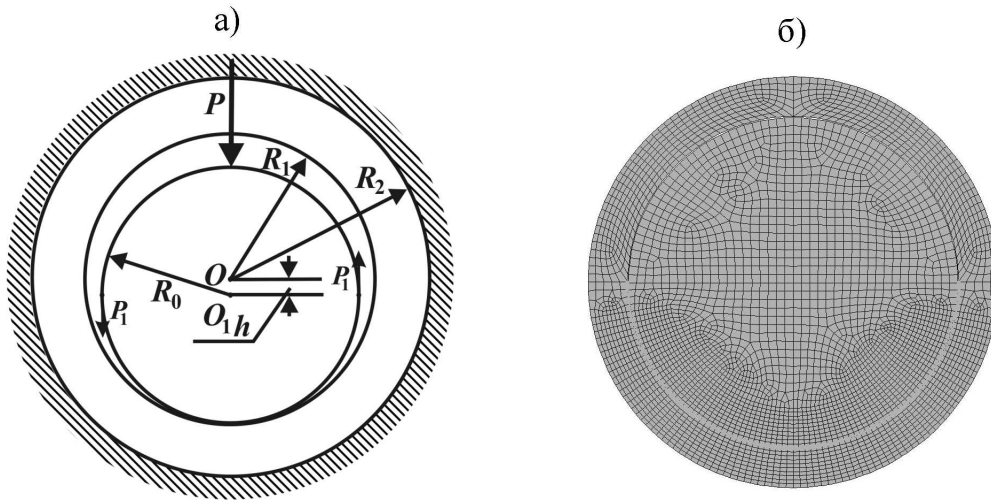


Рис. 1. Постановка задачи и конечно-элементная модель.

лений. На втором этапе решается температурная задача с заданием условий конвективного теплообмена на внутренней границе слоя и внешней границе вала с коэффициентом теплоотдачи α и температурой окружающей среды T_0 и заданием потока тепла в зоне контакта, равному $Q = v\mu q(\varphi)$, где $q(\varphi)$ — контактные давления, вычисленные на первом этапе. Третий этап — это решение задачи упругости с массовыми силами, определяемыми полем температур из второго этапа.

Используя полученную твердотельную модель, осуществлялось автоматическое построение конечно-элементной модели. При этом плоские конечные элементы наследовали физико-механические свойства соответствующих геометрических областей. Для решения упругой задачи в областях, занимаемых упругими материалами вала и слоя, использовались плоские восьмиузловые структурные конечные элементы PLANE82 с опцией плоского деформирования. На границе предполагаемого контакта слоя автоматически формировались контактные конечные элементы CONTA175, а на границе предполагаемого контакта вала — контактные элементы TARGE169 [2]. Для решения тепловой задачи использовались плоские восьмиузловые температурные элементы PLANE77. Для повышения точности результатов в соответствии с методологией решения контактных задач по методу конечных элементов строятся канонические разбиения в предполагаемой зоне контакта слоя и вала. Конечно-элементная модель задачи изображена на рис. 1б.

3. Результаты расчетов. На рис. 2–3 приведены результаты конечно-элементных вычислений контактных напряжений $q(\varphi) = -\sigma_r(R_1, \varphi)$ и эффективных напряжений $\sigma_e(R_1, \varphi)$ при различных значениях коэффициента трения μ в зависимости от угловой координаты φ (на графике $\varphi = 0$ определяет направление r вертикально вниз) в термоупругой (а) и упругой (б) задачах. При расчетах принимались следующие значения: приложенная сила $P = 1$ МН, радиусы $R_1 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ м, $R_2 = 3.1 \cdot 10^{-2}$ м, $R_0 = 2.49 \cdot 10^{-2}$ м; приложенные силы $P_1 = 57150$ Н при $\mu = 0.1$, $P_1 = 151440$ Н при $\mu = 0.3$ и $P_1 = 232650$ Н при $\mu = 0.5$; эквивалент линейной скорости $v = 2$ м/с. Коэффициенты Пуассона и модули Юнга слоя и вала полагались равными соответственно $\nu_1 = 0.3$ и $E_1 = 10^5$ МПа, $\nu_2 = 0.3$ и $E_2 = 2.1 \cdot 10^5$ МПа. Коэффициент теплопроводности для слоя и вала $\lambda_1 = \lambda_2 = 44$ Вт/мК, коэффици-

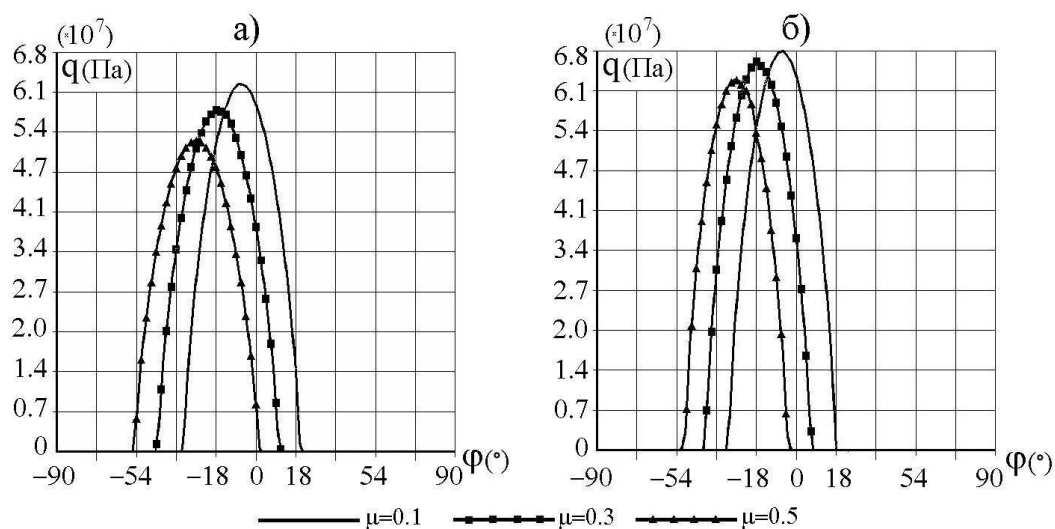


Рис. 2. Графики расчетов контактных напряжений в термоупругой (а) и упругой (б) задачах при различных значениях коэффициента трения μ .

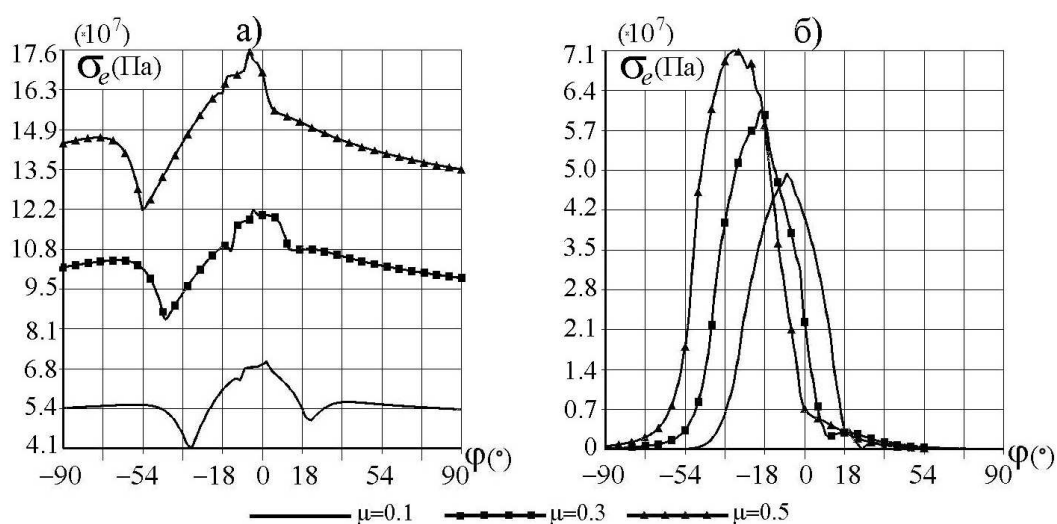


Рис. 3. Графики расчетов эффективных напряжений в зоне контакта в термоупругой (а) и упругой (б) задачах при различных значениях коэффициента трения μ .

ент теплового расширения $\alpha_1 = \alpha_2 = 11.5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$. Из рисунков видно, что при учете тепловыделения от трения концентрация контактных напряжений меньше, а эффективных напряжений больше, чем без учета тепла.

Проанализировав распределения напряжений $\sigma_r(r, \varphi)$ в термоупругой задаче с увеличением коэффициента трения μ , можно сделать вывод, что область с максимальными напряжениями $\sigma_r(r, \varphi)$ смещается с зоны контакта слоя и вала на внешнюю границу цилиндрического слоя и происходит их увеличение в слое по сравнению с аналогичными напряжениями в задаче без учета тепла. В качестве иллюстрации на рис. 4 приведено распределение напряжений $\sigma_r(r, \varphi)$ в термоупругой (а) и упругой (б) задачах, а на рис. 5 — распределение температуры в вале и в слое при коэффициенте трения $\mu = 0.5$.

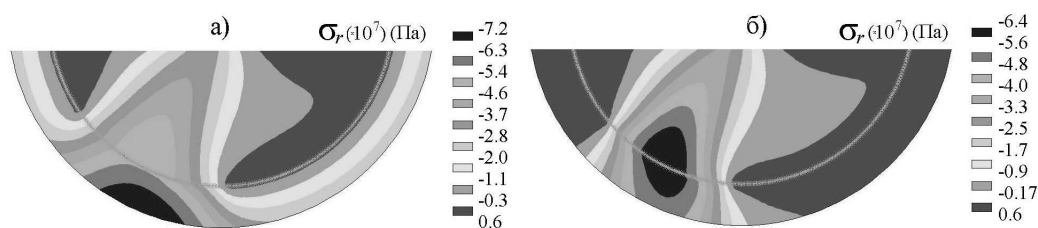


Рис. 4. Распределение напряжений $\sigma_r(r, \varphi)$ в термоупругой (а) и упругой (б) задачах при коэффициенте трения $\mu = 0.5$.

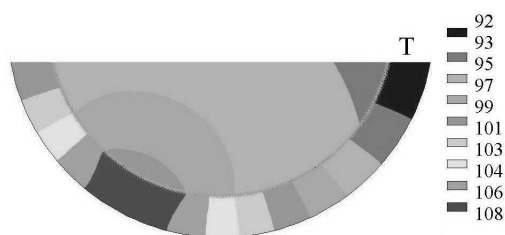


Рис. 5. Распределение температуры в подшипнике при коэффициенте трения $\mu = 0.5$.

Автор выражает благодарность профессору Наседкину А. В. за помощь и внимание к работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П1184).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В. М., Аннакулова Г. К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 1 С. 24–28.
- [2] Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.

Kolosova E. M. *Finite element simulation of contact interaction in the bearing with regard to heat from the friction.* Simulation of the contact interaction in the bearing with regard to heat from friction is effected by means of finite-element package ANSYS. The mathematical model of static thermoelasticity problem of indentation of an elastic shaft in an elastic cylindrical layer, rigidly fixed on the outer surface, is considered. In the zone of contact friction is presented. The results of calculations of contact and equivalent stresses, temperatures, depending on the coefficient of friction are given.

ЗАДАЧА СРЕТЕНСКОГО ДЛЯ ЦИЛИНДРА С УПРУГИМИ ДНИЩАМИ

Кононов Ю. Н., Дидок Н. К.
Донецкий национальный университет

В линейном приближении рассмотрена задача о поперечных колебаниях под действием упругой силы цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими днищами. На основании модального анализа получена счетная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений движения данной механической системы, выведено частотное уравнение и проведено исследование устойчивости положения равновесия.

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях цилиндрического сосуда произвольного сечения Ω с идеальной жидкостью под действием возвращающей силы упругой пружины (задача Л. Н. Сретенского). Боковые стенки сосуда Σ будем считать абсолютно жесткими, а основания — упругими, и моделировать их изотропными пластинками с изгибной жесткостью D_l ($l = 1, 2$). Жидкость полностью заполняет цилиндрический сосуд, днища жестко защемлены по контуру γ и подвержены растягивающим усилиям T_l в срединной поверхности.

Введем систему координат $Oxyz$, жестко связанную с цилиндром. Для этого ось Oz направим вдоль образующей противоположно вектору ускорения силы тяжести \mathbf{g} , а плоскость Oxy расположим посередине между верхним и нижним основаниями в невозмущенном состоянии. Введем также неподвижную систему координат $OXYZ$, совпадающую в положении равновесия с системой координат $Oxyz$ и будем считать, что поперечные колебания происходят вдоль оси OX .

Исходная система уравнений и граничных условий имеет вид [1, 2]

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right|_{\Sigma} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (2)$$

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2 \Delta_2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = -\rho \left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{z=h} + Q - \rho x \ddot{X}, \quad (3)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2 \Delta_2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = \rho \left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{z=-h} - Q - \rho x \ddot{X}, \quad (4)$$

$$W_l < \infty, \quad \nabla W_l < \infty, \quad \int_{\Omega} W_1 d\Omega = \int_{\Omega} W_2 d\Omega, \quad (5)$$

$$W_l|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial W_l}{\partial\nu} \right|_{\gamma} = 0 \quad (l = 1, 2). \quad (6)$$

Здесь φ — потенциал относительных скоростей частиц жидкости, ρ — плотность жидкости; Δ и Δ_2 — трехмерный и двухмерный операторы Лапласа; W_l — динамический прогиб l -й пластинки; $k_{0l} = \rho_{0l}\delta_{0l}$; ρ_{0l} и δ_{0l} — соответственно плотность и толщина l -ой пластинки; Q^* — функция времени в интеграле Коши-Лагранжа; $S = \text{mes } \Omega$.

Общее решение (1) имеет вид

$$\varphi(x, y, z, t) = a_0 + a_1 z + \sum_n [A_n e^{k_n z} + B_n e^{-k_n z}] \psi_n(x, y), \quad (7)$$

где a_0 , a_1 , A_n и B_n — некоторые функции времени, а собственные функции $\psi_n(x, y)$ и соответствующие им собственные числа k_n находятся из решения краевой задачи

$$\Delta_2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = 0. \quad (8)$$

Функции $\psi_n(x, y)$ вместе с произвольной константой образуют на Ω полную ортогональную систему функций [2].

Из условий (2) с учетом (7) следуют соотношения

$$a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \quad A_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{\varkappa_n} - \dot{W}_{2n} e^{-\varkappa_n}}{2k_n \sinh 2\varkappa_n}, \quad B_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{-\varkappa_n} - \dot{W}_{2n} e^{\varkappa_n}}{2k_n \sinh 2\varkappa_n}, \quad (9)$$

$$W_{l0}(t) = \frac{1}{S} \int_{\Omega} W_l d\Omega, \quad W_{ln}(t) = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} W_l \psi_n d\Omega, \quad N_n^2 = \int_{\Omega} \psi_n^2 d\Omega, \quad \varkappa_n = k_n h. \quad (10)$$

Полученные соотношения (9) позволяют записать исходную задачу (3)–(6) в виде обобщенного волнового уравнения [2]

$$A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + CW = f. \quad (11)$$

Здесь A и C соответственно инерционный и упругий операторы, включающие в себя не только дифференциальные уравнения, но и граничные условия (5)–(6) через область определения операторов.

$$A = \begin{pmatrix} k_{01} + \tilde{a}F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n & - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n \\ - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n & k_{02} + \tilde{a}F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix},$$

$$F_0[w] = \frac{1}{S} \int_{\Omega} w d\Omega, \quad F_n[w] = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} w \psi_n d\Omega,$$

$$C = \begin{pmatrix} D_1 \Delta_2^2 - T_1 \Delta_2 + \rho g & 0 \\ 0 & D_2 \Delta_2^2 - T_2 \Delta_2 - \rho g \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} Q - \rho x \ddot{X} \\ -Q - \rho x \ddot{X} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{a} = \rho h, \quad \tilde{b}_n = \frac{\rho}{k_n \sinh 2\chi_n}, \quad \tilde{c}_n = \frac{\rho \coth 2\chi_n}{k_n}.$$

Для векторов $w_j = (w_{1j}, w_{2j})$ введем скалярное произведение по формуле [1]

$$(w_j, w_k) = \int_{\Omega} (w_{1j}w_{1k} + w_{2j}w_{2k}) d\Omega,$$

Краевые задачи для консервативных механических систем всегда описываются самосопряженными операторами [3]. В этом случае, когда оператор C самосопряжен, оператор A положительно определен, все собственные значения ω^2 спектра действительны и изолированы. Собственные формы колебаний, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны по кинетической и потенциальной энергии

$$(Aw_j, w_k) = 0, \quad (Cw_j, w_k) = 0 \quad \text{при } j \neq k \text{ и } (Cw_k, w_k) = \omega_k^2 (Aw_k, w_k). \quad (12)$$

Собственные формы совместных колебаний пластинок и жидкости w_j образуют полный базис, т. е. любую функцию W квадратично интегрируемую, удовлетворяющую краевым условиям и такую, что CW существует почти всюду на Ω , можно представить в виде ряда

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) w_j \quad (13)$$

сходящегося, во всяком случае, по энергетической норме или в среднем [1, 2].

Решение неоднородного уравнения (10) будем искать в виде разложения (13) по собственным функциям w_{ij} .

Подставляя разложение (13) в уравнение (11), получим

$$\mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) = f_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

$$f_k = (f, w_k) = \tilde{\alpha}_k \ddot{X}, \quad \tilde{\alpha}_k = -\rho \int_{\Omega} x (w_{1k} + w_{2k}) d\Omega, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mu_k = (Aw_k, w_k) = (k_{01} + k_{02}) \int_{\Omega} w_{1k} w_{2k} d\Omega + \\ + a \zeta_{1k0} \zeta_{2k0} + \sum_n c_n \zeta_{1kn} \zeta_{2kn} - \sum_n b_n (\zeta_{1kn}^2 + \zeta_{2kn}^2), \end{aligned} \quad (16)$$

$$a = 2S\tilde{a} \quad c_n = 2N_n^2 \tilde{c}_n \quad b_n = N_n^2 \tilde{b}_n, \quad \zeta_{lk0} = F_0[w_{lk}], \quad \zeta_{lkn} = F_n[w_{lk}].$$

Для замкнутости системы (14) воспользуемся теоремой об изменении импульса механической системы

$$M\ddot{X} + \rho \int_V \frac{\partial v_x}{\partial t} dV = -cX, \quad (17)$$

где M — масса системы, v_x — проекция относительной скорости жидкости на ось Ox , c — коэффициент жесткости пружины. Поскольку

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \sum_n \left(\dot{A}_n e^{k_n z} + \dot{B}_n e^{-k_n z} \right) \frac{\partial \psi_n}{\partial x},$$

то, с учетом соотношений (9) и (10), имеем

$$M\ddot{X} + \rho \sum_n \left[\frac{1}{k_n^2} \int_{\Omega} (\ddot{W}_1 - \ddot{W}_2) d\Omega \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} d\Omega \right] = -cX. \quad (18)$$

Подставляя в (18) вместо прогибов W_l их разложение по собственным формам (13), получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) = \tilde{\alpha}_k \ddot{X}, \\ M\ddot{X} + cX = \sum_k \xi_k \ddot{p}_k, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\xi_k = \rho \sum_n \left[\frac{\zeta_{2kn} - \zeta_{1kn}}{k_n^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} d\Omega \right].$$

Положим $X = X_0 e^{i\sigma t}$, $p_k = p_{k0} e^{i\sigma t}$. Тогда из (19) следует частотное уравнение совместных колебаний упругих пластин, жидкости и твердого тела

$$c - M\sigma^2 = \sigma^2 \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_k \xi_k}{\mu_k (\sigma^2 - \omega_k^2)}. \quad (20)$$

Необходимое условие устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы определяется условием положительности корней трансцендентного уравнения (20). Ввиду сложности этого уравнения для исследования устойчивости вычислим потенциальную энергию данной системы

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ cX^2 + \rho g \int_{\Omega} (W_1^2 - W_2^2) d\Omega + \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} [D_l (\Delta_2 W_l)^2 + T_l (\nabla_2 W_l)^2] d\Omega \right\}. \quad (21)$$

Прогибы пластинок W_l представим в виде разложения по собственным формам (13), а сами собственные формы — в виде разложения по ψ_n

$$w_{lj} = \sum_n \zeta_{ljn} \psi_n.$$

Тогда потенциальная энергия (21) примет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} cX^2 + \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k p_k^2(t). \quad (22)$$

Квадратичная форма (22) будет положительно определенной при $c > 0$ и

$$\gamma_k = (Cw_k, w_k) = \sum_{l=1}^2 \sum_n \zeta_{lkn}^2 [(D_l k_n^2 + T_l) k_n^2 + (-1)^{l+1} \rho g] > 0. \quad (23)$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно потребовать, чтобы

$$(D_2 k_n^2 + T_2) k_n^2 > \rho g. \quad (24)$$

Так как собственные числа k_n образуют бесконечно возрастающую числовую последовательность [4], то условие устойчивости положения равновесия (24) можно заменить более простым

$$(D_2 k_1^2 + T_2) k_1^2 > \rho g. \quad (25)$$

Условие (25) не зависит от глубины заполнения и параметров верхнего днища. Из него следует, что неустойчивое положение равновесия рассматриваемой механической системы всегда может быть стабилизировано величинами предварительного натяжения T_2 и изгибной жесткости D_2 . Следует отметить, что в случае абсолютно жесткого нижнего днища ($T_2 = \infty$ или $D_2 = \infty$) положение равновесия данной системы всегда будет устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. 416 с.
- [2] *Докучаев Л. В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 232 с.
- [3] *Михлин С. Г.* Вариационные методы математической физики. М.: Наука, 1970. 512 с.
- [4] *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.

Kononov Yu. N., Didok N. K. *Sretensky's problem for cylindrical vessel with an elastic bottoms*. The problem of transverse vibrations of a cylindrical vessel with an ideal liquid under influence of elastic force is considered in a linear approximation. Research is lead for a case when both bottoms represent an elastic plates, and the liquid completely fills space between them. On the basis of the modal analysis the countable system of the linear ordinary differential equations of the specified oscillations is received, the frequency equation is deduced and carried out research of a stability of an equilibrium position.

ДЕЙСТВИЕ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАГРУЗКИ НА ПРЯМОЙ БОЧКООБРАЗНЫЙ ЗУБ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ПРОФИЛЯ

Короткин В. И., Сухов Д. Ю.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

В ходе решения пространственной симметричной задачи в конечно-элементной среде ANSYS показано, что основное влияние на напряжённо-деформированное состояние в основании прямых эвольвентных бочкообразных зубьев оказывает продольная протяжённость площадки контакта и незначительное — число зубьев и главный приведенный профильный радиус кривизны сопряжённых поверхностей в точке контакта. Приведена зависимость, позволяющая оценить это влияние.

В работе [1] приведены результаты моделирования в конечно-элементной среде ANSYS пространственной задачи напряжённо-деформированного состояния (НДС) в основании прямых эвольвентных бочкообразных зубьев стандартного ($\alpha = 20^\circ$) профиля, находящихся под действием достаточно удалённой от торцов сосредоточенной силы, приложенной к вершине зуба. При этом получены приближённые зависимости, позволяющие определить приведенный объёмный коэффициент формы зуба как функцию от числа z зубьев колеса и смещения x исходной рейки при нарезании.

Поскольку бочкообразный зуб находится в условиях теоретически точечного, а практически локального контакта, действующая нагрузка распределена по контактной площадке, что необходимо учитывать в расчётах.

Если отвлечься от фактора технологических погрешностей, то действующее в основании зуба напряжение σ_F изгиба может быть представлено как

$$\sigma_F = Y_{V_{ec}} Y_{ae} F_t / m^2 \quad (1)$$

где:

m — модуль зацепления;

F_t — окружная сила;

$Y_{V_{ec}}$ — приведенный объёмный коэффициент формы зуба [1];

Y_{ae} — приведенный коэффициент, учитывающий распределение нагрузки вдоль длины бесконечно длинного зуба, или продольную протяжённость площадки контакта.

Форму самой контактной площадки можно считать близкой к эллиптической, с величиной a_H продольной полуоси эллипса.

Если обозначить ρ_α, ρ_β — соответственно профильный и продольный приведенный главные радиусы кривизны контактирующих поверхностей в теоретической точке контакта, то для бочкообразных зубьев $\rho_\beta \gg \rho_\alpha$, отношение $C_{\alpha\beta} = \rho_\alpha / \rho_\beta$ очень мало, а эксцентриситет эллипса близок к единице. Для такого случая нами

предложена приближённая формула определения большой полуоси контактного эллипса (по Герцу):

$$a_H = 2.565 \cdot 10^{-2} C_{\alpha\beta}^{-0.038} (F_t \cdot \rho_\beta / \cos \alpha)^{1/3}. \quad (2)$$

Контактная задача решалась в конечно-элементной среде ANSYS. Достаточная удалённость площадки контакта от торцов зуба позволяла решать задачу как симметричную относительно торцового сечения, в котором расположена теоретическая точка контакта, что существенно упрощало решение и сокращало вычислительное время.

При решении контактной задачи выбрана модель, соответствующая действию ножки зуба сопряжённого (парного) зубчатого колеса на вершинную кромку головки исследуемого зуба с той же силой, под тем же углом и при аналогичной заделке зуба, как это было и при рассмотрении действия на зуб сосредоточенной силы [1].

Поскольку ножка зуба парного колеса претерпевает практически только контактные деформации (изгибными можно пренебречь в силу их ничтожности из-за чрезвычайно малого плеча действующей на ножку силы), то для упрощения модели ножка парного зуба заменена упругим индентором с профильным радиусом ρ_2 кривизны эвольвенты ножки в контактной точке. В продольном направлении, т.е. вдоль длины зуба, индентору придана, соответственно, кривизна радиуса ρ_β .

Как и ожидалось, основное влияние на исследуемый параметр Y_{ae} оказывает величина a_H^* большой полуоси контактного эллипса, рассчитываемая по Герцу. (Здесь и далее звёздочка означает отнесение рассматриваемой величины к модулю).

Отметим следующее обстоятельство. В действительности продольная протяжённость контактной площадки несколько превышает герцевскую величину, что связано с влиянием деформации изгиба зуба. Однако, как показал анализ, корреляция между действительной и расчётной величинами a_H^* настолько тесная, что вполне допустимо параметр Y_{ae} как функцию поставить в зависимость от аргумента a_H^* , вычисление которого по Герцу не вызывает принципиальных затруднений.

Учитывая, что радиус ρ_β , как указывалось выше, значительно превышает радиус ρ_α (и ρ_2), а малая полуось контактного эллипса чрезвычайно мала в сравнении с большой и не оказывает какого-либо влияния на характер распределения нагрузки, последнюю можно считать распределённой только вдоль большой полуоси.

В таблице 1 приведены результаты численного определения искомого параметра $Y_{ae} = f(a_H^*)$ в процессе моделирования при $m = 1$ мм, $\rho_2^* = 4$, длине зуба $b_w = 16 \dots 20$, $x^* = 0$ для различных значений z .

Помимо a_H^* при моделировании исследовалось влияние на коэффициент Y_{ae} таких параметров, как m , F_t , z , x^* , ρ_2 . При этом установлено следующее.

- 1) При изменении силы F_t и модуля m (и, соответственно, пропорциональных модулю параметров x , ρ_2 и ρ_β) таким образом, что отношение F_t/m^2 остаётся неизменным, величина a_H^* и, следовательно, коэффициент Y_{ae} также не изменяются. В этом смысле об отношении F_t/m^2 можно говорить, как о факторе напряжённости.

№ №	z	ρ_β , мм	F_t , Н	a_H^*	Y_{ae}
1	17	50	1	0.109	0.967
2		800		0.304	0.956
3		4000		0.553	0.946
4		10000		0.778	0.931
5		4000	100	2.57	0.664
6		800	1000	3.04	0.589
7		10000	100	3.61	0.538
8		4000	1000	5.53	0.382
9	20	800	1	0.304	0.946
10		10000		0.777	0.920
11		800		3.04	0.567
12		4000	1000	5.53	0.358
13	25	800	1	0.303	0.926
14		10000		0.775	0.899
15		800		3.03	0.552
16		4000	1000	5.51	0.348
17	30	800	1	0.303	0.926
18		4000		0.550	0.912
19		10000		0.774	0.896
20		4000	100	2.55	0.620
21		800	1000	3.03	0.548
22		10000	100	3.59	0.498
23		4000	1000	5.50	0.344
24		60	800	1	0.301
25	4000		0.547		0.913
26	10000		0.769		0.897
27	4000		100	2.54	0.620
28	800		1000	3.01	0.547
29	10000		100	3.57	0.497
30	4000		1000	5.47	0.347
31	100		4000	1000	5.45
32	150	800	1	0.299	0.933
33		4000		0.544	0.915
34		10000		0.765	0.898
35		4000	100	2.53	0.628
36		800	1000	2.99	0.549
37		10000	100	3.55	0.496
38		4000	1000	5.44	0.346
39		200	800	1	0.299

Таблица 1. Результаты расчёта параметра Y_{ae} при $m = 1\text{мм}$, $\rho_2^* = 4$, $b_w^* = 16 \dots 20$, $x^* = 0$

- 2) Параметр x^* практически не оказывает влияния на Y_{ae} (таблица 2).
- 3) Параметры z и ρ_2 оказывают незначительное влияние на Y_{ae} , причём число зубьев это влияние оказывает только в диапазоне $z = 17 \dots 30$ (таблицы 1 и 3).

№ №	z	x^*	ρ_β , мм	F_t , Н	a_H^*	Y_{ae}
1	12	+0.4	4000	1	0.554	0.936
2				1000	5.54	0.371
3	14	+0.4	4000	1	0.554	0.932
4				1000	5.54	0.366
5	17	+0.4	4000	1000	5.52	0.365
6	25	-0.4	10000	1	0.777	0.902
7			4000	1000	5.53	0.332
8		+0.8	10000	1	0.773	0.914
9			4000	1000	5.50	0.348
10	30	-0.6	4000	1	0.551	0.918
11				1000	5.51	0.330
12		+1.2		1	0.548	0.926
13				1000	5.48	0.337
14	60	-0.6	4000	1	0.548	0.916
15				1000	5.48	0.326
16		+1.2		1	0.546	0.916
17				1000	5.46	0.333
18	150	-0.6	40000	1	0.544	0.912
19				1000	5.44	0.334
20		+1.2		1	0.544	0.914
21				1000	5.44	0.337
22	200	-0.6	800	1	0.299	0.924
23		+1.2			0.299	0.927

Таблица 2. Результаты расчёта параметра Y_{ae} при $m = 1$ мм, $\rho_2^* = 4$, $b_w^* = 20$, $x^* \neq 0$

№ №	ρ_2^*	z	x^*	ρ_β , мм	F_t , Н	a_H^*	Y_{ae}
1	1	12	+0.4	4000	1000	5.75	0.378
2		17	0		100	2.66	0.668
3					1000	5.75	0.371
4		25	+0.8		1000	5.74	0.352
5		30	-0.4		1000	5.74	0.333
6		60	0		1000	5.73	0.347
7	2	12	+0.4	4000	1000	5.64	0.376
8		17	0			5.63	0.369
9		25	+0.8			5.61	0.351
10		30	-0.4			5.62	0.333
11		60	0			5.59	0.347
12		8	12			+0.4	5.48
13	17		0	5.47	0.358		
14	25		+0.8	5.41	0.338		
15	30		-0.4	5.44	0.324		
16	60	0	5.37	0.336			

Таблица 3. Результаты расчёта параметра Y_{ae} при $m = 1$ мм, $b_w^* = 16 \dots 20$ и различных значениях ρ_2^* , отличных от значения $\rho_2^* = 4$

Обработка результатов моделирования позволила вывести следующую приближённую (точность приближения 4%) аппроксимационную формулу:

$$Y_{ae} = 1 - 0.97(\rho_{\alpha}^*)^{0.038} \left[\frac{0.12(a_H^*)^2}{1 + 0.21a_H^* + 0.12(a_H^*)^2} + 0.0031(z - 17) \right], \quad 17 \leq z \leq 30. \quad (3)$$

(При $z < 17$ следует в (3) подставлять $z = 17$, а при $z > 30$ — подставлять $z = 30$).

Таким образом, произведение приведенного объёмного коэффициента Y_{Vee} формы зуба [1] на параметр Y_{ae} , вычисляемый по (3), даёт возможность оценить изгибное напряжение (1) в корне прямого бочкообразного зуба стандартного эвольвентного профиля под действием распределённой нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ — гранты 08-08-00873, 10-08-00031 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Короткин В. И., Колосова Е. М., Сухов Д. Ю. Коэффициент формы зуба при расчёте на изломную прочность цилиндрических эвольвентных зубчатых колёс, работающих в условиях локального контакта // Изв. вузов. Сев.-Кав. Регион. Технические науки. 2009. № 5. С. 78–84.
- [2] Короткин В. И., Колосова Е. М., Сухов Д. Ю. К моделированию НДС зубьев эвольвентных зубчатых колёс, находящихся в условиях локального контакта // Труды XIII Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Изд-во ЮФУ. Ростов н/Д, 2009. Т II. С. 113–118.

Korotkin V. I., Sukhov D. Yu. *The action of distributed load applied to spur barrel-shaped tooth of involute profile.* During analysis of symmetric volumetric problem in ANSYS CAE system it was shown that principal influence to stress-strain state in the root of spur barred-shaped tooth is made by longitudinal expansion of the contact area. The influence of teeth number and scaled principal profile curvature radius of mated surfaces in the contact area is low. The dependence for getting such influences' estimations is given.

CONTACT FATIGUE AND ROUGH SURFACES

Kudish I. I.

Kettering University, Flint, MI, 48504, USA

Solution of a contact problem for a rough elastic half-plane is considered. Surface roughness is assumed to be small and stochastic. A perturbation solution of the problem for relatively small roughness is proposed and conveniently expressed in terms of series in Chebyshev polynomials. Mean distribution of pressure and mean size of the contact are obtained analytically. A pitting model for rough surfaces is considered based on a generalization of an earlier proposed contact model with some stochastic parameters. An analytical formula relating fatigue life of rough and smooth surfaces is obtained which shows that fatigue life of rough solids is shorter than of smooth ones. Moreover, the model shows that surface roughness change subsurface initiated fatigue just slightly while it can affect surface and near-surface initiated fatigue significantly.

1. Introduction. For rough contacts there are some analytical models which are based on specific assumptions related to roughness topography and local asperity contacts [1], [2], adhesion effects [3], and some numerical studies [4]. All these studies are either too simplistic due to the assumptions used or too complex due to the stochastic nature of the numerical solutions involved and account for adhesion. The goal of the paper is to get an analytical description of stochastic rough contacts and to determine what impact the geometry of small roughness has on contact fatigue of such surfaces. The effects of asperity adhesion are neglected.

Let us consider a problem about contact fatigue of an elastic solid with rough surface without taking into account the possible competing phenomena such as wear and near surface fatigue damage. We will focus on the influence of surface roughness on subsurface originated contact fatigue - pitting. Let us assume that a rigid parabolic punch $y = \frac{x^2}{2R}$ with radius R is cyclically normally indented with force P in a dry elastic half-plane (with modulus E and Poisson's ration ν) bounded by a rough horizontal line. Adhesion of asperities is neglected. The roughness geometry is described by function $\varphi_*(x)$. We will assume that the cyclic contact of the punch occurs with the same area of the elastic solid so that roughness does not change from one loading cycle to another.

2. Contact Stresses in Rough Contacts. In most cases frictional stress in a contact causes very small changes in contact pressure. Therefore, we will assume that frictional stress can be neglected in determining contact pressure. Also, it is assumed that the applied load P is sufficiently large while the surface roughness is small enough to provide a continuous contact, i.e. $q(x) > 0$ for all $a < x < b$. That leads to the following formulation of the contact problem

$$\varphi(x) + \frac{x^2 - b^2}{2R} + \frac{2}{\pi E'} \int_a^b q(t) \ln \left| \frac{b-t}{x-t} \right| dt = 0, \quad q(a) = q(b) = 0, \quad \int_a^b q(t) dt = P, \quad (1)$$

where $q(x)$ is the contact pressure, a and b are contact boundaries, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ is the effective elastic modulus, and $\varphi(x) = \varphi_*(x) - \varphi_*(b)$. In dimensionless variables

$$\{x', a', b'\} = \frac{1}{a_H} \{x, a, b\}, \quad q' = \frac{q}{p_H}, \quad \omega \varphi'(x') = \frac{2R}{a_H^2} \varphi(x),$$

problem (1) the problem can be rewritten in the form (for simplicity primes are omitted)

$$\omega\varphi(x) + x^2 - b^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^b q(t) \ln \left| \frac{b-t}{x-t} \right| dt = 0, \quad q(a) = q(b) = 0, \quad \int_a^b q(t) dt = \frac{\pi}{2}, \quad (2)$$

where a_H and p_H are the Hertzian half-width and maximum pressure for a smooth contact, ω is a dimensionless constant representing the ratio of the characteristic asperity height and material surface displacement. To simplify problem analysis we will introduce the substitution $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}v$, $-1 \leq v \leq 1$. The well-known exact solution of problem (2) has the form

$$q(v) = \frac{b-a}{2} \sqrt{1-v^2} \left\{ 1 + \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{2}{b-a} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-v)} \right\}, \quad (3)$$

$$\omega \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi \frac{b^2-a^2}{2}, \quad \omega \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t) t dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi \left[\frac{(b-a)^2}{2} - 1 \right]. \quad (4)$$

Obviously, in this solution parameters a and b depend on function $\varphi'(y)$ in some nonlinear fashion. Therefore, it is difficult to extract any useful information from this solution in case of function $\varphi'(v)$ dependent on some random variables.

To do that let us analyze solution (3) and (4) for small roughness, i.e. in the case of $\omega \ll 1$. Expressing the solution in the form of asymptotic power series in ω

$$a = -1 + \omega a_1 + \omega^2 a_2 + \dots, \quad b = 1 + \omega b_1 + \omega^2 b_2 + \dots, \quad (5)$$

$$q(v) = \sqrt{1-v^2} + \omega q_1(v) + \omega^2 q_2(v) + \dots,$$

and substituting it in equations (3) and (4) after simple manipulations we obtain obvious formulas for a_1 , a_2 , $q_1(v)$, and $q_2(v)$.

Let us consider the case of random roughness geometry $\varphi'(v)$ and focus on the mean characteristics of the contact interaction and contact fatigue. Suppose we have an infinite set of independent random variables $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots\}$ with densities of distribution $\{h_0(\xi_0), g_1(\xi_1), \dots, h_k(\xi_k), \dots\}$, respectively. The densities are such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_k(\xi_k) d\xi_k = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi_k h_k(\xi_k) d\xi_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Due to the independence of $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots\}$ its density of the distribution is

$$g(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} h_k(\xi_k). \quad (7)$$

Then the random roughness geometry $\varphi'(v)$ can be represented as follows

$$\varphi'(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k T_k(v), \quad |v| \leq 1, \quad (8)$$

where $T_k(v)$ are Chebyshev orthogonal polynomials of the first kind and

$$\xi_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \xi_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t) T_k(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad k > 0. \quad (9)$$

Series (8) and its derivatives are convergent if its coefficients $\xi_k \rightarrow 0$ sufficiently fast.

The above conditions guarantee that statistically $\varphi'(v)$ varies around $y = 0$, i.e. the surface of a smooth half-plane. Substituting expression (7) in formulas for a_1 , a_2 , $q_1(v)$, and $q_2(v)$ gives

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\xi_0}{2} - \frac{\xi_1}{4}, \quad b_1 = \frac{\xi_0}{2} + \frac{\xi_1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{8}(-\xi_0\xi_1 + \frac{\xi_1^2}{4}) + \frac{\xi_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k \int_{-1}^1 \frac{(1-t)U_{k-1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
 &+ \frac{\xi_1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k \int_{-1}^1 \frac{t(1-t)U_{k-1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad b_2 = -\frac{1}{8}(\xi_0\xi_1 + \frac{\xi_1^2}{4}) + \frac{\xi_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k \int_{-1}^1 \frac{(1+t)U_{k-1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
 &+ \frac{\xi_1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k \int_{-1}^1 \frac{t(1+t)U_{k-1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad q_1(v) = \sqrt{1-v^2} \{ \xi_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k U_{k-1}(v) \}, \quad (10) \\
 q_2(v) &= \frac{\sqrt{1-v^2}}{2} \{ b_2 - a_2 + \frac{\xi_1}{4} [- \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k U_{k-1}(v) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} k\xi_k \int_{-1}^1 \frac{U_{k-1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}] \\
 &+ \frac{1}{2\pi} (\xi_0 + \frac{\xi_1}{2}y) \sum_{k=2}^{\infty} k\xi_k \int_{-1}^1 \frac{U_{k-1}(t)dt}{\sqrt{1-t^2(t-v)}} \}.
 \end{aligned}$$

Let us introduce a weighted average $\langle f(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)f(\xi)d\xi$, where $d\xi = d\xi_0 d\xi_1 \dots d\xi_k \dots$. Then using formulas (6), (7), and (10), it is easy to obtain

$$\langle a_1 \rangle = \langle b_1 \rangle = \langle q_1(v) \rangle = 0, \quad \langle a_2 \rangle = -\frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{32}, \quad \langle b_2 \rangle = \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{32}, \quad \langle q_2(v) \rangle = \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{32} \sqrt{1-v^2}. \quad (11)$$

Therefore, the statistically averaged pressure and contact boundaries are

$$\langle a \rangle = -1 - \omega^2 \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{32} + \dots, \quad \langle b \rangle = 1 + \omega^2 \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{32} + \dots, \quad \langle q(v) \rangle = \langle b \rangle \sqrt{1-v^2}. \quad (12)$$

Formulas (12) show that statistically the size of the contact region and pressure in a rough contact are larger than in a smooth one.

3. Stochastic Loading, Variable Loading Amplitude, Periodic Loading Regimes and Contact Fatigue. Let us consider a generalization of the earlier proposed contact fatigue model [5] on the case of cyclic contacts with some stochastic characteristics. The contact fatigue model from [5] uses the angle of fatigue crack propagation α and the $\max_{-\infty < x < \infty} k_{10}$, where k_{10} is the value proportional to the normal stress intensity factor k_1 at the tip of a fatigue crack, $k_{10} = k_1/\sqrt{l}$ (l is fatigue crack half-length).

Let us consider an extension of contact fatigue model from [5] on a periodic cyclic regime of loading with continuous variation of the amplitude of the maximum contact pressure. In practical cases the period of loading N_0 is negligibly small in comparison with the number of cycles over which the survival probability $P(N)$ changes noticeably. Therefore, with sufficient for practice precision we can introduce averaging over a block/period of loading. Let us consider the case of a stochastic contact pressure distribution $q_\xi(x)$ with the probabilistic density of distribution $g(\xi)$ which changes from one loading cycle to another. Then the equations for the averaged direction of crack propagation and α and stress intensity factor Mk_{10} can be determined as follows [5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_2(\xi, \alpha)g(\xi)d\xi = 0, \quad Mk_{10} = \{ \int_{-\infty}^{\infty} k_{10}^n(\xi)g(\xi)d\xi \}^{1/n}, \quad (13)$$

where $k_{10}(\xi)$ and $k_2(\xi, \alpha)$ are the values of coefficients k_{10} and k_2 for $q(x) = q_\xi(x)$. After that the survival probability $P(N)$ is determined based on the earlier derived formulas [5] and angle α obtained from the solution of the first equation in (13) and k_{10} replaced by Mk_{10} from (13).

Fatigue life (number of cycles to failure) N with probability of survival P_* is [5]

$$N = \left\{ \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g_0 \max_{-\infty < x < \infty, y < 0} Mk_{10}^n \right\}^{-1} \left\{ \exp \left[\left(1 - \frac{n}{2} \right) \left(\ln \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} + \sqrt{2} \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right]} \operatorname{erf}^{-1} (2P_* - 1) \right) \right] \right\}, \tag{14}$$

where g_0 and n are the fatigue parameters involved in Paris's equation for fatigue crack growth [5], μ and σ are the mean half-length and standard deviation of the cracks in the initial crack distribution, respectively, $\operatorname{erf}^{-1}(x)$ is the inverse function to the error integral $\operatorname{erf}(x)$. Here it is assumed that initially the material is free of damage.

4. Modeling Contact Fatigue in Rough Contacts. To consider subsurface originated fatigue in the case of rough surfaces we will follow the approach presented in the preceding section and, more specifically, formulas (13) designed for dealing with statistically distributed parameters of a loaded contact. We will assume that wear and other surface and near surface fatigue phenomena (such as shallow flaking etc.) of rough surfaces do not occur or small enough and can be neglected. In other words, we will be concerned only with subsurface originated pitting. To solve our fatigue problem for a rough contact we need the angle $\langle \alpha \rangle$ of fatigue crack propagation and the value proportional to the stress intensity factor Mk_{10} (see formulas (13)).

First, let us determine the angle $\langle \alpha \rangle$ of fatigue crack propagation. We will search for angle $\langle \alpha \rangle$

$$\langle \alpha \rangle = \alpha^0 + \omega \langle \alpha \rangle_1 + \omega^2 \langle \alpha \rangle_2 + \dots, \quad \omega \ll 1, \tag{15}$$

from solution of the first equation in (13). Here α^0 is the crack propagation angle obtained for smooth surfaces which is calculated according to the formula [5] $\tan 2\alpha^0 = -2y \int_{-1}^1 (t-x) T_2(t, x, y) dt / \left\{ \frac{\pi}{2} q^0 + \int_{-1}^1 [(t-x)^2 - y^2] T_2(t, x, y) dt \right\}$, $T_2(t, x, y) = \frac{yq(t) + (t-x)\tau(t)}{[(t-x)^2 + y^2]^2}$,

while $\langle \alpha \rangle_1$ and $\langle \alpha \rangle_2$ are correction terms which have to be determined (q^0 is the residual stress). To calculate $\langle k_2 \rangle$ we first expand k_2 in the Taylor formula. Then, substituting the expressions for a , b , q , and $\alpha = \langle \alpha \rangle$ from (5)–(10), (15) as well as using the fact that $\langle a_1 \rangle = \langle b_1 \rangle = \langle q_1 \rangle = 0$ and $\langle \left(\frac{b_1 - a_1}{2} \right)^2 \rangle = \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{16}$, $\langle \frac{b_2 - a_2}{2} \rangle = \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{32}$, $\langle \frac{b_1 - a_1}{2} q_1 \rangle = \frac{3\langle \xi_1 \rangle^2}{16} \sqrt{1 - v^2}$ we obtain $\langle \alpha \rangle_1 = 0$ and $\langle \alpha \rangle_2 = -\frac{1}{32} \frac{\langle \xi_1^2 \rangle}{\frac{\partial k_2}{\partial \alpha} |_{\omega=0}} \left\{ \frac{\partial k_2}{\partial \frac{b-a}{2}} \Big|_{\omega=0} + \frac{\partial^2 k_2}{\partial \frac{b-a}{2}^2} \Big|_{\omega=0} + \left[\frac{\partial k_2}{\partial q} \Big|_{\omega=0} + 6 \frac{\partial^2 k_2}{\partial \frac{b-a}{2} \partial q} \Big|_{\omega=0} \right] \sqrt{1 - v^2} \right\}$. Using the expansion of k_{10} in ω and the binomial expansion for $\alpha = \langle \alpha \rangle$, we find the value of Mk_{10} which represents a replacement of k_{10} in a stochastic case

$$Mk_{10} = (\langle k_{10}^n \rangle)^{1/n} = k_{10}(x, y) |_{\omega=0} [1 + \omega^2 \psi(x, y)], \tag{16}$$

where the expression for function $\psi(x, y)$ is obvious from previous formulas. Moreover, function $\psi(x, y)$ as well as its derivatives are of the order of unity for $\omega \ll 1$. The rest of fatigue modeling is done in accordance with [5].

Finally, let us analyze the shift in the material point where fatigue damage occurs due to the surface roughness. Assuming that for smooth surfaces the point of fatigue damage (x^0, y^0) is located beneath the material surface, it can be shown that for a surface with small roughness ($\omega \ll 1$) the point of fatigue damage shifts only by a distance of the order of $\omega^2 \ll 1$.

Let us consider an example when $\varphi'(v) = \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k T_k(v)$, $|v| \leq 1$. Then $\xi_1 = \langle \xi_1^2 \rangle = 0$, $\langle \alpha \rangle = \alpha^0 + o(\omega^2)$, and $Mk_{10} = k_{10} |_{\omega=0} \{1 + \omega^2 \frac{n-1}{8} \sum_{k=2}^{\infty} \langle \xi_k^2 \rangle (\frac{\partial k_{10}}{\partial q} |_{\omega=0} \sqrt{1-v^2} U_{k-1}(v))^2\} + o(\omega^2)$, $\omega \ll 1$. Finally, substituting $\max_{-\infty < x < \infty, y < 0} Mk_{10}^n$ in (14) we obtain the formula

$$N_R = \frac{N_0}{1 + \omega^2 \frac{n(n-1)}{8} \sum_{k=2}^{\infty} \langle \xi_k^2 \rangle (\frac{\partial k_{10}}{\partial q} |_{\omega=0} \sqrt{1-v^2} U_{k-1}(v))^2 + \dots}$$

for the number of loading cycles N_R of a solid with rough surface until fatigue failure which corresponds to the given probability of survival P_* . Here N_0 is the number of loading cycles N_0 of a smooth solid until fatigue failure with the same probability of survival [5], the value of the denominator is calculated at the point at which $\max_{-\infty < x < \infty, y < 0} Mk_{10}^n$ is attained. Therefore, we can conclude that contact fatigue life of rough surfaces is slightly smaller than the one for smooth ones.

Therefore, small surface roughness has little effect on subsurface originated contact fatigue. Local stresses caused by the direct interaction of asperities may be high in the vicinity of the solid surface but vanish fast as a point moves away from the solid surface. Therefore, surface roughness may have a significant effect only on surface and near surface originated fatigue such as wear and shallow flaking.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Greenwood J. A., Tripp J. H. The Elastic Contact of Rough Spheres // ASME J. of Appl. Mech., 1967. Vol.34, pp. 153–160.
- [2] Ciavarella M., Demelio G., Barber J. R., Yong Hoon Jang Linear Elastic Contact of the Weierstrass Profile // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A. 2000. Vol.456, pp. 387–405.
- [3] Johnson K. L., Kendall K., Roberts A. D. Surface Energy and the Contact of Elastic Solids // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A. 1971. Vol.324, pp. 301–313.
- [4] Kalker J. J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Solid Mechanics and Its Applications. 1990. Vol.2. Kluwer Academic Publisher.
- [5] Kudish I. I. A New Statistical Model of Contact Fatigue. 2000. STLE Trib. Trans. Vol.43, pp. 711–721.
- [6] Kudish I. I. Contact Problem of the Theory of Elasticity for Pre-Stressed Bodies with Cracks. 1987. J. Appl. Mech. and Techn. Phys. Vol.28, pp. 144–152.

Кудиш И. И. Контактная усталость и шероховатые поверхности. Рассмотрена контактная задача для стохастически шероховатой упругой полуплоскости. Для малой шероховатости получены аналитически средние значения для давления и размера контакта. Эти результаты применены для анализа усталостной долговечности шероховатой и гладкой поверхностей.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

Липанов А. М.

Институт прикладной механики УрО РАН, Ижевск

Описывается метод численного решения уравнений гидромеханики для сжимаемых сред. Рассматриваются ламинарные и турбулентные потоки в односвязных и многосвязных областях. Показано, как упорядоченное ламинарное течение становится нестационарным и неупорядоченным, превращаясь в турбулентное. Выявлено, что геометрические параметры области интегрирования сильно влияют на ламинарно-турбулентный переход.

1. Введение. Несмотря на то, что ламинарные потоки по сравнению с турбулентными наиболее изучены и экспериментально и теоретически, тем не менее, подробных параметрических исследований особенно для сжимаемых сред не проводилось. Характер течения сильно влияет на работоспособность технических систем и устройств. Процесс потери устойчивости и переход к турбулентному течению происходит практически скачкообразно, следовательно, важно знание тех параметров, при которых происходит этот переход. Значительный интерес представляет теоретическое определение критического числа Рейнольдса перехода от ламинарного движения к турбулентному, что позволит отказаться от затратного физического эксперимента.

Так как в работе рассматриваются стратифицированные отрывные течения с крупномасштабными вихревыми структурами, под ламинарно-турбулентным переходом будем понимать переход от упорядоченного двумерного движения к нестационарному неупорядоченному трехмерному течению.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача о дозвуковом протекании вязкого сжимаемого газа через объем, имеющий форму параллелепипеда. Если задача решалась в односвязной области, то область интегрирования представляла собой прямоугольный канал с непроницаемыми стенками с резким расширением на входе (рис. 1). При рассмотрении многосвязной области в объем добавлялась

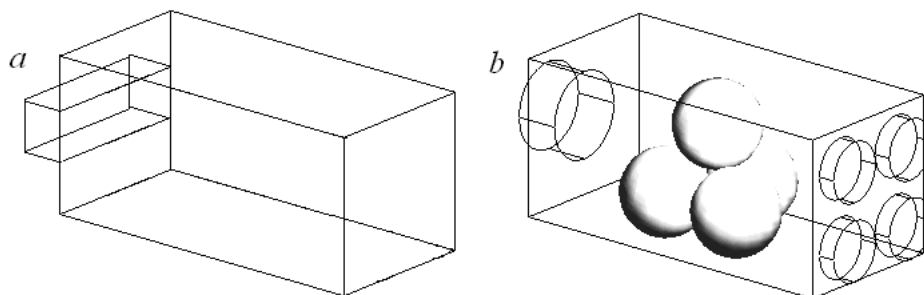


Рис. 1. Объем интегрирования: а — односвязная область, б — многосвязная область.

упаковка шаров, стенки считались перфорированными, вход и выход газа осуществлялись через отверстия на противоположных гранях. Пример многосвязной области показан на рис. 1.

Решалась система трехмерных нестационарных дифференциальных уравнений гидромеханики, записанная в безразмерном виде [1].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{kM^2} + \rho U^2 \right) + \frac{\partial \rho UV}{\partial y} + \frac{\partial \rho UW}{\partial z} = \\ = & \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho UV}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{kM^2} + \rho V^2 \right) + \frac{\partial \rho VW}{\partial z} = \\ = & \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \frac{\partial \rho UW}{\partial x} + \frac{\partial \rho VW}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{kM^2} + \rho W^2 \right) = \\ = & \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{P}{kM^2} + \rho E \right) U \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{P}{kM^2} + \rho E \right) V \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{P}{kM^2} + \rho E \right) W \right] = \\ = & \frac{1}{\text{Re}} \left\{ -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \right. \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[V \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[W \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[W \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] + \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[W \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(W \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[V \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] + \\ & \left. \frac{1}{(k-1)M^2 \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь U, V, W — компоненты вектора скорости, ρ — плотность, E — удельная энергия. Давление P рассчитывалось по формуле

$$P = k(k-1)M^2 \left[\rho E - \frac{(\rho U)^2 + (\rho V)^2 + (\rho W)^2}{2\rho} \right],$$

температура T определялась по формуле

$$P = k(k-1)M^2 \left[\frac{\rho E}{\rho} - \frac{(\rho U)^2 + (\rho V)^2 + (\rho W)^2}{2\rho^2} \right].$$

Уравнения (1)–(5) содержат безразмерные комплексы: $Re = \rho U h / \mu$ — число Рейнольдса, $M = U/c$ — число Маха, $Pr = C_P \mu / \lambda$ — число Прандтля; $c = (kP/\rho)^{1/2}$ — скорость звука, $k = C_P/C_V$ — отношение теплоемкостей. Здесь h — характерный масштаб длины (высота вдува для канала с внезапным расширением, равная высотам обратных ступенек, или диаметр входного отверстия для многосвязной области), μ , λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, принимались постоянными величинами. Число Маха бралось равным 0.6, а число Прандтля — 0.7, отношение теплоемкостей — 1.4. На обтекаемых поверхностях задавались условия прилипания и непротекания. Граничные условия на входе и выходе задавались согласно [2]. В начальный момент времени задавались условия покоя, затем рассчитывалось вторичное течение.

3. Метод интегрирования. При рассмотрении односвязной области уравнения гидромеханики решались в декартовой системе координат на равномерной прямоугольной сетке. Сложная многосвязная область делилась на некоторое количество более простых подобластей. В каждой подобласти вводились собственные локальные декартовы и криволинейные системы координат, в которых формулировалась система уравнений гидромеханики, приведенная выше. Далее система решалась численно во всех подобластях независимо от других [3].

Интегрирование по времени осуществлялось со вторым порядком точности с использованием идеи Лакса–Вендроффа путем разложения получающегося решения в ряд Тейлора. Таким образом, вторая производная по времени от находилась рекуррентно через первую производную.

Производные по пространству во внутренних точках находились с восьмым порядком точности методом центральных разностей на девятиточечном шаблоне. В окрестности границы частные производные по пространству также рассчитывались с высоким (восьмым) порядком с помощью односторонних аппроксимаций, для сохранения высокого порядка вычислительный шаблон расширялся.

4. Анализ численных результатов. Рассмотрим течение в канале, когда расстояние между боковыми стенками в направлении координаты z равно высоте зазора по y (рис. 2). Можно заключить, что потеря устойчивости и переход к нестационарному неупорядоченному турбулентному течению происходит при числе Рейнольдса Re_* из диапазона от 1500 до 1600.

Далее, рассмотрим течение в канале с боковыми стенками на расстоянии трех единиц друг от друга. Влияние вязких сил, обусловленных наличием стенок, несколько ослабевает, поэтому нестационарные трехмерные процессы имеют место при более низких числах Рейнольдса. Это видно из данных рис. 3, упорядоченное течение симметричное относительно плоскости $Z = 0$ при числе $Re = 500$ становится трехмерным турбулентным при $Re = 600$. Симметрия нарушается в нижней части канала на расстоянии $x \approx 8$, разрушается нижняя отрывная зона. Далее по потоку трехмерными нестационарными структурами заполняется весь канал.

Главное число Re определяется по неизменной величине расстояния между обратными ступеньками h , однако, второй линейный размер также сказывается на

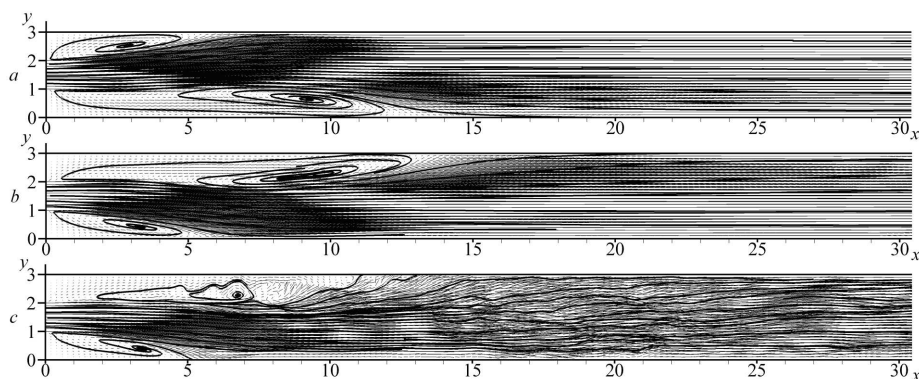


Рис. 2. Течение в прямоугольном канале (векторы скорости в продольном сечении), $H_z = 0.5$: a — $Re = 1200$, b — $Re = 1500$, c — $Re = 1600$

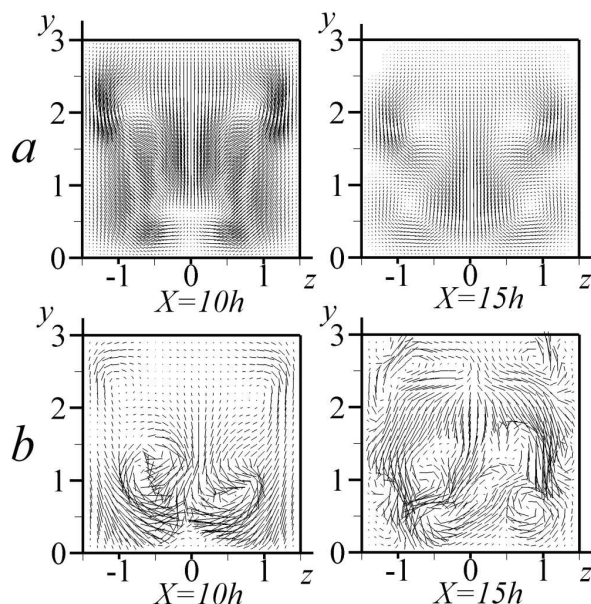


Рис. 3. Течение в прямоугольном канале (векторы скорости в поперечных сечениях), $H_z = 1.5$: a — $Re = 500$, b — $Re = 600$

характере режима течения. Рост числа Re , соответствующего второму линейному размеру входного зазора, интенсифицирует нестационарные вихревые процессы.

Многосвязная область (параллелепипед упакованный сферами) продувалась вязким газом при числах Рейнольдса от 100 до 500. Установлено, что если количество сфер было не больше трех, то с ростом числа Рейнольдса стационарное течение сменялось нестационарным. Стационарная струя, образующая купол при обтекании сфер, с повышением числа Рейнольдса начинает колебаться, усложняется форма контура, образующегося при обтекании. Стационарные отрывные зоны дробятся на более мелкие периодически сливающиеся вихри. Однако, если имеем плотную упаковку обтекаемых тел (количество сфер четыре и более), стационарное течение наблюдается и при числе Рейнольдса, равном 500. В многосвязной области интегрирования на 70% заполненной обтекаемыми телами при умеренных числах Рейнольдса реализовывалось только ламинарное отрывное течение. Стоит отметить, что период установления, однако, значительно возрастает. Кар-

тина течения в продольной плоскости симметрии многосвязного объема показана на рис. 4.

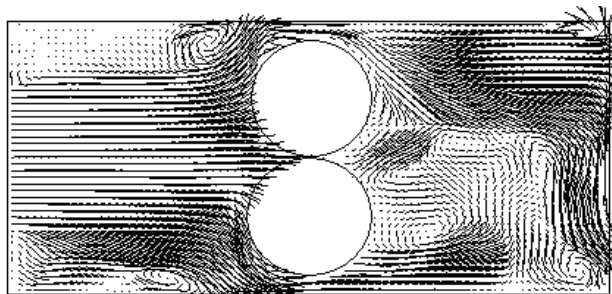


Рис. 4. Течение в многосвязной области (векторы скорости в центральном продольном сечении), $Re = 500$

4. Заключение. Установлено, что на характер стратифицированного отрывного течения влияет не только число Рейнольдса, но и крупномасштабные параметры (например, отношение длин сторон канала). Близкорасположенные обтекаемые поверхности усиливают действие вязких факторов, а рост числа Рейнольдса и размеров вдува интенсифицирует нестационарные трехмерные процессы. Проведенные исследования важны для моделирования процессов и предсказания параметров технических систем, связанных с вихревыми течениями сжимаемых сред и турбулентностью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970.
- [2] Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург: Изд-во УРО РАН, 2001. 162 с.
- [3] Липанов А. М. Метод численного решения уравнений гидромеханики в многосвязных областях (первое сообщение) // Математическое моделирование. 2006. № 12. С. 3–18.

Lipanov A. M. *Theoretical investigation of turbulent flows of compressible medium.* The present paper describes a method for numerical solution of hydromechanics equations for compressible media. Laminar and turbulent flows in simply connected and multiply connected regions are considered. It is shown how an ordered laminar flow becomes a non-stationary and disordered flow turning into a turbulent one. It has been found that the integration-domain geometrical parameters strongly influence the laminar-turbulent transition.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫХ СТРУКТУР С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМИ ЭЛЕКТРОУПРУГИМИ СРЕДАМИ

Лыжов В. А.^{*,}, Тукодова О. М.^{***}, Ворович Е. И.^{***}**

** НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

*** Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

**** Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Исследуются процесс взаимодействия многоэлектродной системы с предварительно напряженной электроупругой средой. Система электродов представляет собой либо однополярную (накоротко соединены все электроды), либо двухполярную (электроды одного знака чередуются с электродами другого знака) структуру из полосовых электродов, весом и жесткостью которых пренебрегаем. Среда представляет собой пьезоактивное полупространство, выполненное из материала гексагональной сингонии класса 6mm, начальное напряженное состояние в среде вызвано действием механических факторов. Проведено детальное исследование влияния начальных механических напряжений на распределение электрической индукции для однополярной и двухполярной системы из 3-х, 5-ти, 7-ми и 9-ти электродов. Показано, что характер влияния начальных напряжений не зависит от количества электродов, но существенно зависит от вида начального напряженного состояния. Наиболее сильное влияние на распределение электрической индукции оказывает трехосное и двухосное напряжение. В качестве примера представлены графики для однополярной системы 5-ти и 9-ти электродов.

Рассматривается задача о взаимодействии системы электродов с преднапряженной электроупругой средой. Система электродов представляет собой либо однополярную (накоротко соединены все электроды), либо двухполярную (электроды одного знака чередуются с электродами другого знака) структуру из полосовых электродов, весом и жесткостью которых пренебрегаем. Среда представляет собой пьезоактивное полупространство, выполненное из материала гексагональной сингонии класса 6mm, начальные напряжения в среде вызваны действием механических факторов. Краевая задача о колебаниях предварительно напряженного электроупругого тела описывается системой уравнений [2]

$$\nabla \cdot \Theta = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1)$$

где ρ — плотность среды; \mathbf{u} — расширенный вектор смещения точек среды; Θ — линеаризованный тензор напряжений, \mathbf{D} — линеаризованный вектор индукции электрического поля электроупругой среды, компоненты которого описываются формулами [2]:

$$\Theta_{ij} = C_{ijkl}^* \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{ijk}^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (2)$$

$$D_i = e_{ijk}^* \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \varepsilon_{ij}^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (3)$$

Здесь φ — потенциал электрического поля, C_{ijkl}^* , e_{ijk}^* и ε_{ij}^* — соответственно упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические коэффициенты материала в начально-деформированном состоянии, которые зависят от вида и величины начальных напряжений; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Будем предполагать, что материал среды подвержен действию однородной начальной деформации с относительными удлинениями волокон δ_i вдоль координатных осей x_i . В этом случае компоненты тензора деформации \mathbf{S} в начально-деформированной конфигурации представляются формулой

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\nu_i^2 - 1) \quad (4)$$

где $\nu_i = 1 + \delta_i$. Тогда коэффициенты C_{ijkl}^* , e_{ijk}^* и ε_{ij}^* определяются выражениями

$$C_{lksp}^* = P_{lp} \delta_{ks} + \nu_k \nu_s C_{lksp}, \quad e_{lsp}^* = \nu_s e_{lsp}, \quad \varepsilon_{lp}^* = \varepsilon_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_l^{-2} \delta_{lp} + \varepsilon_{lp} \quad (5)$$

Здесь P_{lp} — компоненты тензора напряжений в НДС, δ_{lp} — символ Кронекера. При указанных выше предположениях, необходимые для расчета коэффициентов в НДС параметры P_{lp} можно получить в результате решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} P_{lp} &= C_{qjlp} S_{qj} - e_{jlp} W_j \\ d_k &= e_{klm} S_{lm} + (\varepsilon_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_n^{-2} \delta_{nk} + \varepsilon_{nk}) W_n \end{aligned} \quad (6)$$

где W_j — компоненты вектора напряженности электрического поля в НДС.

Задача о взаимодействии системы N электродов, накоротко соединенных между собой, с поверхностью пьезоактивной среды в случае, когда к электродам приложен потенциал φ_0 , сводится к интегральному уравнению

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N \int_{\Gamma} K_{32}(\alpha, x_2, \omega) D_{2m}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

$D_{2m}(\alpha)$ — преобразование Фурье распределения плотности заряда под электродом с номером m . Вид функции $K_{32}(\alpha, x_2, \omega)$ можно найти в [1]. Для решения интегрального уравнения используется предложенный в [1] метод решения интегральных уравнений, позволяющий получать решения с высокой точностью учитывающие динамические свойства среды, в том числе наличие начальных напряжений. Это позволяет проводить широкий спектр исследований влияния различных типов НДС на электродную систему. В качестве примера на рис. 1 и 2 приведены графики расчетов вещественной (сплошные линии) и мнимой (пунктирные линии) составляющих распределения плотности заряда

$$g(x_1) = \int_{\Sigma \Omega_k} D_{2m}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

для 5-ти и 9-ти электродов для полупространства, выполненного из ZnO.

На рис. 3 и 4 приведены графики иллюстрирующие влияние одноосной начальной деформации вдоль оси x_1 ($\nu_1 = 1.03$) на распределение плотности заряда. На рис. 3 представлены графики $Re \tau(x_1)$ и $Im \tau(x_1)$,

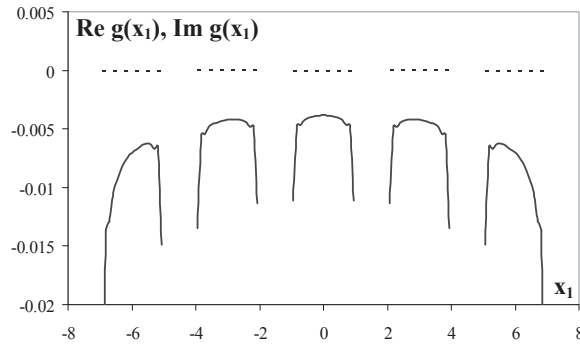


Рис. 1. Распределение плотности заряда для системы 5-ти электродов.

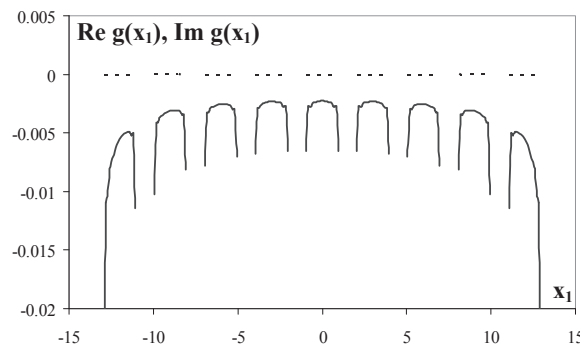


Рис. 2. Распределение плотности заряда для системы 9-ти электродов.

$\tau(x_1) = (g^\sigma(x_1) - g^0(x_1)) \cdot 10^6$, где $g^\sigma(x_1)$ и $g^0(x_1)$ — распределение плотности заряда в напряженном и естественном состояниях, соответственно. На рис. 4 — графики $Re \eta(x_1)$ и $Im \eta(x_1)$ ($\eta(x_1) = \frac{g^\sigma(x_1) - g^0(x_1)}{|g^0(x_1)|}$). Как и ранее, пунктирные линии соответствуют мнимым, сплошные линии — вещественным составляющим приведенных величин.

Как следует из графиков, влияние начальных напряжений носит сложный характер, зависящий от вида и величины начальных напряжений. Необходимо отметить, что изменение плотности заряда под каждым электродом существенно различается. При этом наиболее значительное изменение происходит на крайних электродах, в то время как на внутренних электродах изменение плотности заряда несколько меньше, но характер этого изменения является сложным.

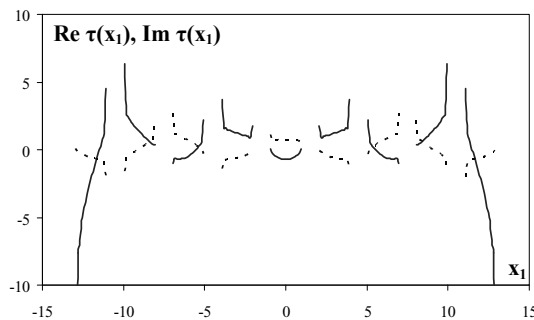


Рис. 3. Влияние начальных напряжений на распределение плотности заряда для системы 9-ти электродов.

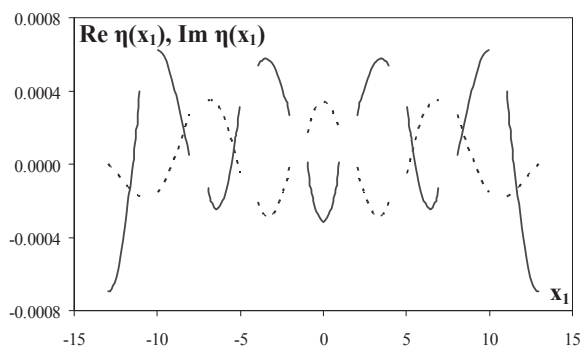


Рис. 4. Влияние начальных напряжений на распределение плотности заряда для системы 9-ти электродов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (09-01-00695, 09-08-01065, 09-08-96527-юг), Президиума РАН (направление № 12 программы № 4П РАН, программы № 11П РАН).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.
- [2] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
- [3] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полугораниченных сред. М. Физматлит, 2002. 240 с.
- [4] Liu H., Kuang Z. B., Cai Z. M. Propagation of Bleustein–Gulyaev waves in a prestressed layered piezoelectric structure // Ultrasonics. V. 41. N. 5. 2003. pp. 397–405.
- [5] Cho Y., Yamanouchi K. Nonlinear, elastic, piezoelectric, electrostrictive and dielectric constants of lithium niobate // J. Appl. Phys. 1987. V. 61. N. 3. pp. 875–887.

Lyjov V. A., Tukodova O. M., Vorovich E. I. *Interaction of multielectrode structures with prestressed electroelastic media.* The interaction process of multielectrode structure and prestressed electroelastic media is investigated. The electrodes system is either unipolar (all electrodes are in a short circuit) or bipolar (electrodes of one sign alternates with electrodes of another sign) structure of stripe electrodes with negligible weight and stiffness. The medium is a piezo-active half-space made of material with the hexagonal symmetry 6mm. The prestress in the medium is caused by mechanical factors. The analysis of initial stresses influence on the distribution of electric induction is carried out in detail for unipolar and bipolar system of 3, 5, 7 and 9 electrodes.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСТУЩИХ ТЕЛ. КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Манжиров А. В.

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

Рассматриваются основные положения математической теории наращиваемых тел при конечных деформациях. Дается классификация возможных способов наращивания деформируемых тел. Подробно исследуется вариант наращивания трехмерного тела двумерными поверхностями при конечных деформациях.

Краевые задачи механики растущих тел, в отличие от задач для тел постоянного состава, содержат тензорное поле дисторсии, которое может быть найдено из дополнительных условий, определяемых параметрами наращивания тела. Если наращивание происходит за счет непрерывного присоединения напряженных материальных поверхностей, то в качестве таких условий могут быть использованы уравнения равновесия границы роста, рассматриваемой как деформируемая материальная поверхность, контактирующая с деформируемым трехмерным телом.

Растущее тело, вообще говоря, не имеет естественной (свободной от напряжений) конфигурации, погружаемой в трехмерное евклидово пространство, однако, таковая имеется в трехмерном пространстве с неевклидовой аффинной связностью. Соответствующий тензор кручения является мерой несовместности деформаций растущего тела. С этих позиций математическое описание напряженно-деформированного состояния растущего тела эквивалентно моделям тел с непрерывным распределением дислокаций.

В работе представлена полностью обоснованная система уравнений механики наращиваемых тел. Рассмотрена кинематика растущего тела и его сложная геометрия. Сформулирован ряд актуальных проблем окончательно сформировавшейся теории и ее приложений при моделировании разнообразных инженерных, технологических и природных процессов.

1. Введение. Непрерывное наращивание тела рассматривается как процесс непрерывного присоединения к нему областей инфинитезимальной меры. В качестве меры используется мера массы. К таким областям могут быть причислены бесконечно тонкие слои, нити, точки. Так как такие области представляют собой непрерывные тела различных размерностей, то они могут переносить напряженно-деформированное состояние, соответствующее их размерности, например, слои могут переносить мембранные напряжения, нити – линейное и т. д. В этой связи характер распределения напряжений в непрерывно растущем теле зависит от геометрического класса присоединяемых областей, что подразумевает построение различных вариантов теории наращивания. В настоящей работе рассматриваются тела, растущие за счет непрерывного присоединения бесконечно тонких двумерных слоев, называемых так же материальными поверхностями.

В качестве геометрического фундамента математической теории растущих тел используется теория расслоений дифференцируемых многообразий. Материальное многообразие \mathcal{M} является геометрической основой так называемого матери-

ального описания движения сплошной среды. В материальном описании определяются непосредственно тела–точки, так же как и в аналитической механике, где рассматриваются конечные множества материальных точек Λ . При этом каждая точка имеет индивидуальную метку $\mathfrak{X}_i \in \Lambda$. В механике сплошной среды тела представляют собой континуальные множества точек, в связи с чем в материальном описании независимыми переменными являются тела–точки $\mathfrak{X} \in \mathbb{R}^n$ и время $t \in \mathbb{R}$.

Представление материального многообразия как расслоения дает естественную интерпретацию результата наращивания, которое реализуется как непрерывный поток материальных поверхностей, осаждаемых на поверхности роста. Здесь может быть уместным образное сравнение с годовыми кольцами на сечениях стволов деревьев. Каждому слою соответствует материальная поверхность, присоединенная в некоторый фиксированный момент времени, следовательно база расслоения \mathfrak{M} одномерна, а каждый слой в отдельности представляет собой двумерное многообразие.

Под телом \mathfrak{B} будем понимать открытое подмножество материального многообразия \mathfrak{M} . В классических монографиях по нелинейной механике, как правило, на выбор подмножества \mathfrak{B} явно накладываются ограничения, обеспечивающие его ограниченность, измеримость и регулярность границы. В рамках приводимых здесь построений все перечисленные условия выполняются автоматически, если рассматривать только такие тела \mathfrak{B} , граница которых $\partial\mathfrak{B}$ образуется двумя несовпадающими слоями \mathfrak{M}_α и \mathfrak{M}_β . В этом случае тело \mathfrak{B} может быть представлено как объединение множества слоев, индексы которых принадлежат открытому интервалу (α, β) . Растущее тело может быть определено как параметрическое семейство таких множеств, а именно

$$\mathfrak{C} = \{ \mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}(\alpha, \gamma) \mid \gamma \in (\alpha, \beta) \},$$

где γ — параметр семейства, причем при $\gamma \rightarrow \alpha$ тело вырождается в бесконечно тонкий слой или точку. При этом γ является параметром, характеризующим эволюцию растущего тела.

Укажем соответствие введенных выше определений с характеристиками процесса роста, которые использовались ранее. Если ввести время t как переменную и рассматривать параметр γ как функцию $\gamma = \Gamma(t)$, то можно вести речь о возрасте t частей \mathfrak{M}_γ растущего тела, а также, при условии существования обратной функции Γ^{-1} , моменте времени τ^* , в который происходит присоединения слоя \mathfrak{M}_γ , т. е.

$$\tau^* = \Gamma^{-1}(\gamma).$$

При этом растущее тело может быть определено как семейство множеств $\tilde{\mathfrak{C}}$:

$$\tilde{\mathfrak{C}} = \{ \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{B}(\alpha, \gamma) \mid \gamma = \Gamma(\tau), \tau \in (t_0, t) \}.$$

При поверхностном наращивании приток материала происходит к поверхности тела, которая называется поверхностью или границей роста. Поверхностному росту соответствуют такие технологические и природные процессы, как намотка, пиролитическое и электролитическое осаждение, возведение массивных сооружений, аккреция планет, рост кристаллов.

Деформация материальной поверхности после вхождения в состав тела определяется градиентом деформаций $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\varkappa_R}$. Таким образом, полный тензор дисторсии $\mathbf{H} = \mathbf{F}_{\varkappa_C}$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F},$$

а упругий потенциал $W_{\varkappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})$ может быть определен относительно конфигурации \varkappa_C только локально, поскольку \varkappa_C не представляет собой связное множество. Глобально упругий потенциал может быть определен относительно конфигурации \varkappa_R , а именно, вводится упругий потенциал W_{\varkappa_R} — запасенная энергия, отнесенная к единице объема в отсчетном состоянии \varkappa_R , которую мы можем трактовать как функцию трех аргументов \mathbf{F} , \mathbf{K} , \mathfrak{X} , т. е.

$$W_{\varkappa_R}(\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathfrak{X}) = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\varkappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X}) = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\varkappa_C}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}, \mathfrak{X}).$$

Отметим, что даже если функционал однороден W_{\varkappa_C} , т. е. он явно не зависит от материальных координат \mathfrak{X} , функционал W_{\varkappa_R} , вообще говоря не будет таковым, поскольку \mathbf{K} зависит от \mathfrak{X} . В этом состоит различие между материальным единовремением (material uniformity) и однородностью (homogeneity).

Напряжения $\mathbf{T}_{\varkappa}^{\varkappa_R}$, преобразованные к конфигурации \varkappa_R , могут быть определены соотношением

$$\mathbf{T}_{\varkappa}^{\varkappa_R} = \frac{\partial W_{\varkappa_R}}{\partial \mathbf{F}^*} = J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\varkappa_C}}{\partial \mathbf{H}^*}.$$

В то же время напряжения $\mathbf{T}_{\varkappa}^{\varkappa_C}$, преобразованные к конфигурации \varkappa_C , (разумеется, они определены послойно) определяются следующим образом:

$$\mathbf{T}_{\varkappa}^{\varkappa_C} = \frac{\partial W_{\varkappa_C}}{\partial \mathbf{H}^*}.$$

Краевая задача для растущего тела определяется уравнениями равновесия, которые выражают закон сохранения количества движения в области физического (евклидова) пространства $V(t)$ с границей $\Omega(t)$, параметрически зависящей от времени, т. е.

$$\nabla_{\varkappa} \cdot \left[J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\varkappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}^*} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\mathbf{F}} \right] + J_{\varkappa} \mathbf{b}_{\varkappa} = \mathbf{0}.$$

Краевые условия статического типа задаются на поверхности $\Omega(t)$ и задают векторное поле поверхностных сил, действующее на границе растущего тела:

$$\mathbf{n} \cdot \left[J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\varkappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}^*} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\mathbf{F}} \right] \Big|_{\Omega(t)} = \mathbf{p}.$$

На первый взгляд формально постановка краевой задачи отличается от классической постановки задачи для гиперупругого тела постоянного состава лишь тем, что граница пространственной области параметрически зависит от времени. Однако имеется и более глубокое отличие, которое состоит в зависимости упругого потенциала от тензорного поля дисторсии, для определения которого требуются дополнительные условия. Формулировка этих условий зависит от геометрической

структуры присоединяемых элементов, т. е., по-существу, от структуры расслоения материального многообразия. Если рост тела происходит за счет непрерывного притока к телу предварительно напряженных материальных поверхностей, то это условие может быть сформулировано в виде

$$\mathbf{P} \cdot \left[J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\mathcal{K}}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}^*} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\mathbf{F}} \right] \cdot \mathbf{P} \Big|_{\Omega(t)} = \mathcal{T}.$$

Здесь $\mathbf{P} = (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ — проектор на касательную плоскость к границе $\Omega(t)$. Записанное соотношение выражает тот факт, что слои присоединяются с заданным натягом, определяемым поверхностным тензором натяга \mathcal{T} , т. е. двумерным тензором второго ранга, заданным в касательном пространстве присоединяемой материальной поверхности.

Следует отметить, что краевое условие и условие для определения тензора дисторсии в совокупности похожи на «тензорное условие на поверхности роста» что может привести к такой его интерпретации. Однако эта интерпретация не только парадоксальна (на двумерной поверхности декларируется задание трехмерного тензора), но и ошибочна, поскольку краевое условие определяется заданным векторным полем в трехмерном евклидовом пространстве, в то время, как тензор натяга определен на материальной поверхности и, вообще говоря, должен определяться из условия контактного взаимодействия материальной поверхности и трехмерного тела.

Определенное таким образом поле дисторсии позволяет задать геометрию на материальном многообразии, определяя связность на нем. Получаемые коэффициенты аффинной связности, вообще говоря, не обладают симметрией и определяют отличный от нуля тензор кручения

$$\mathcal{T}_{\gamma\beta}^{\alpha} = \partial_{\gamma} (\mathbf{K}^{-1})_{\cdot\beta}^{\rho} K_{\cdot\rho}^{\alpha} - \partial_{\beta} (\mathbf{K}^{-1})_{\cdot\gamma}^{\rho} K_{\cdot\rho}^{\alpha}.$$

Таким образом, материальное многообразие становится пространством аффинной связности, причем каждый слой многообразия метризуется в естественном состоянии и напряженно-деформированное состояние тела может быть определено как результат его деформирования в объемлющем пространстве высшей размерности из естественной (т. е. свободной от напряжений) конфигурации, погруженной в подпространство с ненулевым кручением в конфигурацию, погруженную в подпространство с евклидовой структурой. Отличие геометрии такой отсчетной конфигурации от евклидовой, количественно определяемой тензором кручения, характеризует несогласованность напряженных состояний слоев, объединенных в результате процесса наращивания в единое тело. Следует отметить, что подобное отличие естественной конфигурации от евклидовой геометрии в приближении малых деформаций проявляется как несовместность тензорного поля деформаций, что неоднократно отмечалось в литературе как характерное свойство растущих тел.

Полная система уравнений, определяющая взаимодействие растущего пространственного тела и присоединяемой материальной поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [T \cdot (\nabla \otimes v) - (\nabla \cdot v) T + C : \nabla \otimes v] + \rho \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n} \cdot [T \cdot (\nabla \otimes v) - (\nabla \cdot v) T + C : \nabla \otimes v] \Big|_S &= \nabla_S \cdot (V \hat{T}_S) + V \rho \mathbf{b}, \\ \dot{\mathbf{F}} &= (\nabla \otimes v) \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}(\tau^*) = \mathbf{E}, \\ \mathbf{T} &= J_{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{C} = J_{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^*, \\ W &= W(\mathbf{H}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}, \\ \mathbf{T}_S &= J_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{H}}, \quad \hat{W}(\mathbf{H}) = W(f(\mathbf{H})), \\ \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{T}_S \Big|_{\Gamma} &= \mathbf{f}_S. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{v} — скорости материальных частиц в составе тела, ∇_S — поверхностный оператор, заданный на поверхности роста S , V — скорость смещения границы, вызванная притоком нового материала, \mathbf{b} — заданная плотность массовых сил. Положение поверхности S заранее не известно и находится в процессе решения задачи, упругий потенциал W полагается заданным, так же как и линейная плотность сил на границе материальной поверхности \mathbf{f}_S .

Возможны различные постановки задачи.

1. Задан натяг, т.е. тензор натяжения материальной поверхности \mathbf{K} . Это — аналог задания на границе усилий.
2. Задано фиксированное в пространстве положение границы роста $S = S_0$. Это — аналог закрепления границы в классической упругости.
3. Задача может быть сформулирована с заданным соотношением смещения границы от величины ее поверхностного натяжения. Это — аналог упругого закрепления границы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00553-а, 09-08-01194-а, 09-08-01180-а) и Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (Программа №13).

Manzhirov A. V. *Mathematical theory of growing solids. Finite deformations.* Basic fundamentals of the mathematical theory of growing solids with finite deformations are under consideration. The classification of various methods of solids accretion is presented. Special attention is paid to the accretion of 3D solids by 2D surfaces. The paper contains the complete system of equations of the mechanics of growing solids.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УПРУГИХ ТЕЛ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ: ПОСТРОЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ, КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ, ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ

Матвеев В. П.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Рассматривается численный метод и результаты расчета показателей сингулярности напряжений в вершине плоских клиньев из прямолинейно-анизотропного материала и в вершине трехгранных клиньев и конусов. Приводятся постановка и результаты решения задачи оптимизации геометрии упругих тел в окрестности особых точек. Для расчета напряженно-деформированного состояния упругих тел с особыми точками используется метод конечных элементов, в том числе, вариант алгоритма с использованием нового семейства сингулярных элементов.

Одно из наиболее характерных свойств эллиптических краевых задач, к которым относится и задача теории упругости, состоит в гладкости решения, если граница рассматриваемой области и исходные данные, входящие в виде коэффициентов в уравнения и граничные условия, гладкие. При нарушении этих условий в решении могут появляться особенности.

В теории упругости особенность связана с возможностью появления в отдельных точках (линиях) области, называемых особыми, бесконечных значений напряжений. К наиболее распространенным вариантам особых точек в теории упругости относятся точки нарушения гладкости поверхности (в т.ч. поверхности раздела двух материалов), точки смены типа граничных условий, точки поверхности, где имеет место контакт двух материалов.

О природе особенностей в теории упругости известно достаточно много. Так, например, в [1] для уравнений линейной теории упругости получено асимптотическое представление решения в окрестности точек нарушения гладкости поверхности. Одно из направлений исследования сингулярности напряжений в двумерных задачах связано с анализом напряженного состояния в вершине плоских клиньев. Здесь рассмотрены самые различные варианты клиновидных тел. В трехмерных задачах исследование сингулярности напряжений основывается на анализе напряженного состояния в окрестности ребра пространственного клина или в окрестности вершины многогранного клина и конуса. Анализ известных методов и результатов исследования сингулярности напряжений позволяет сделать заключение, что рассматриваемая проблема далека от своего завершения в двумерных задачах для анизотропных материалов, в трехмерных задачах для вершины многогранного клина и конуса.

В работе рассматривается вариант численного метода для расчета показателей сингулярности напряжений в двумерных и трехмерных задачах теории упругости [2, 3] и приводятся результаты расчетов для различных вариантов клиновидных тел и конусов.

Суть численного метода рассмотрим на примере трехмерных задач. Рассматривается полубесконечный клин или конус, у которого вершина совпадает с центром сферических координат. Для анализа сингулярных напряжений необходимо построить собственные решения вида

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^\lambda \xi_k(\theta, \varphi) \quad (1)$$

удовлетворяющие уравнениям равновесия

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

и однородным краевым условиям на боковой поверхности клина или конуса

$$S_\sigma : \quad \frac{\nu}{1 - 2\nu} \mathbf{n} \text{ div } \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

$$S_u : \quad \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали. Точкой обозначается скалярное произведение, а крестиком — векторное.

Особенность напряжений на ребрах многогранного клина или ребрах конуса (конус может быть некруговым) учитывается следующим образом [4]

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^\eta \rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2} \dots \rho_n^{\alpha_n} \xi_k(\theta, \varphi) \quad (5)$$

Здесь $\rho_i(r, \theta, \varphi)$ — эквивалентно расстоянию до i ребра, α_i — собственные значения для плоского клина со сторонами, образованными в результате пересечения плоскости, перпендикулярной i -му ребру, и граней пространственного клина.

Вид функций ρ_i можно получить, исходя из их определения как расстояния до ребра i

$$\rho_i(r, \theta, \varphi) = r \beta_i^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$\beta_i = 1 - [\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i)]^2$$

где прямая $\theta = \theta_i$, $\varphi = \varphi_i$ определяет i ребро.

С учетом (6) выражение (5) примет вид

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^\lambda \beta_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \beta_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \dots \beta_n^{\frac{\alpha_n}{2}} \xi_k(\theta, \varphi) \quad (7)$$

$$\lambda = \eta + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

Подставляя (7) в (2), (3) и (4), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций ξ_k и параметра η

$$L_k(\lambda, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad (8)$$

и соответствующие граничные условия

$$\xi_k = 0, \quad M_k(\lambda, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0 \quad (9)$$

Таким образом, получена задача на собственные значения. По значениям параметра λ можно судить о характере сингулярности напряжений.

В двумерных задачах теории упругости рассматриваются плоские клинья. При использовании полярных координат с центром в вершине клина собственные решения представляются в виде

$$u_k(r, \varphi) = r^\alpha \xi_k(\varphi) \quad k = 1, 2 \quad (10)$$

В этом случае для изотропного материала задача на собственные значения, представляющая собой систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решается аналитическими методами. Для численной реализации представляет интерес вариант прямолинейной анизотропии. В этом случае в качестве задачи на собственные значения будет система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Решение задачи на собственные значения осуществляется следующим образом. Уравнения (8) записываются в слабой форме, для чего они умножаются на соответствующие вариации $\delta \xi_k(\theta, \varphi)$ и интегрируются по области S , вырезаемой клином или конусом на сфере

$$\int_S \left[\sum_{k=1}^3 L_k(\lambda, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \delta \xi_k \right] dS = 0 \quad (11)$$

Для решения уравнений (1) используется метод конечных элементов (МКЭ). В данном случае требуется использование двумерных элементов, обеспечивающих наряду с непрерывностью функций ξ_k , непрерывность их первых производных. В МКЭ нет эффективных вариантов решения этой задачи. В связи с этим, проводятся тождественные преобразования с целью понижения порядка производных функций решения в уравнении (11). После этого можно использовать конечные элементы, обеспечивающие только непрерывность функций ξ_k . В частности, использовались треугольные элементы с линейной аппроксимацией функций ξ_k .

В двумерных задачах аналогом уравнения (1) является уравнение

$$\int_L \left[\sum_{k=1}^2 L_k(\lambda, \xi_1, \xi_2) \delta \xi_k \right] dl = 0 \quad (12)$$

где L — дуга плоского клина. В этом случае можно использовать одномерные конечные элементы с эрмитовой аппроксимацией искомых переменных ξ_k . В частности, использовались двухузловые конечные элементы с кубической аппроксимацией функций ξ_k .

Достоверность рассматриваемого численного метода подтверждена серией численных экспериментов, в т. ч., сравнением на частных примерах аналитических и численных результатов. На основе разработанного численного метода получены решения ряда новых задач о характере сингулярности напряжений в трехгранных клиньях и конусах.

Второе направление работы связано с разработкой на основе МКЭ эффективных численных процедур расчета напряженно-деформированного состояния

в упругих телах с особыми точками. При использовании для этих задач численных методов, в том числе и МКЭ, возникают определенные трудности, связанные с оценкой точности и сходимости решения в окрестности особых точек.

В большинстве существующих алгоритмов МКЭ эти проблемы решаются путем существенного сгущения сетки элементов в окрестности особых точек. Подобные варианты могут быть вполне конструктивны, особенно если эффективно использовать современные возможности коммерческих пакетов программ и использовать предварительно полученную информацию о характере сингулярности напряжений в рассматриваемой особой точке.

Альтернативный вариант связан с использованием сингулярных элементов. Рассматривается новое семейство двумерных и трехмерных сингулярных элементов [5], которые обладают рядом преимуществ по сравнению с известными типами сингулярных элементов: удовлетворяют всем требованиям, обеспечивающим сходимость конечно-элементной процедуры; применимы для различных типов особых точек; легко совмещаются в алгоритмах с обычными типами конечных элементов.

Завершающая стадия работ по исследованию напряженного состояния в упругих телах с особыми точками связана с постановкой и решением оптимизационных задач.

Анализ сингулярных решений и инженерный опыт позволяют говорить о том, что окрестности особых точек, как правило, являются зонами сильной концентрации напряжений, а форма их поверхности и механические характеристики материала существенно влияют на напряженное состояние. Поэтому представляется естественной постановка задачи оптимизации формы поверхности в окрестности особых точек и поиска значений механических характеристик материала, при которых напряженное состояние удовлетворяет заданному критерию.

Рассматривается следующая постановка оптимизационной задачи. Для кусочно-однородного тела объема V и поверхности S в окрестности особой точки t вводится функционал

$$F [S_t, E_{ijk}^t] = \max_{V_t} f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) \quad (13)$$

где S_t , V_t — часть поверхности S и объема V в окрестности особой точки, E_{ijk}^t — значения упругих постоянных в окрестности особой точки, $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ — некоторая функция напряжений и деформаций. На поверхность S_t могут быть наложены ограничения типа равенств и неравенств.

Требуется найти поверхность S_t и характеристики материала E_{ijk}^t , минимизирующие функционал (13).

При численной реализации рассматриваемой оптимизационной задачи решение отыскивается на ограниченном классе поверхностей. В качестве образующих для таких поверхностей используются кусочно-полиномиальные функции, определяемые по значениям координат конечного числа узловых точек, или значениям производных в этих точках. В этом случае задача минимизации функционала (13) сводится к классической задаче нелинейного математического программирования.

Решение оптимизационных задач позволили выявить общие свойства у оптимальных поверхностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-08-99127-р-офи).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кондратьев В. А.* Некоторые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [2] *Матвеевко В. П.* Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел // Изв. АН МГТТ. 1995. № 5. С. 71–77.
- [3] *Матвеевко В. П., Накарякова Т. О., Севодина Н. В., Шардаков И. Н.* . Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // ПММ. М.: Наука. 2008. Т. 72, Вып 3. С. 487–494.
- [4] *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости // М.: Наука, 1981. 688 с.
- [5] *Борзенков С. М., Матвеевко В. П.* Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости // Изв. АН МГТТ. 1995. № 6. С. 48–61.

Matveenko V. P. *Numerical analysis of elastic bodies with singular points: construction of singular solutions, finite-element algorithms, geometry optimization.* The paper is concerned with the analysis of numerical methods and the results of numerical simulations of the stress singularity coefficients at the vertex of plane wedges made of rectilinear-anisotropic material and at the vertex of trihedral wedges and cones. A formulation and solution of the problem on optimization of elastic body geometry in the vicinity of singular points are considered. The stress-strain state of elastic bodies with singular points is calculated by the finite-element method and the variant of the algorithm, in which a new family of singular elements is used.

СПЕКТР КОССЕРА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ СПЛОШНОГО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Мелешко В. В.^{*}, Токовый Ю. В.^{**}, Вилладжио П.^{***}

^{*} *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко*

^{**} *Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов*

^{***} *Пизанский университет*

Исследован спектр Коссера второй основной граничной задачи теории упругости для сплошного изотропного конечного цилиндра в зависимости от соотношения между его длиной и радиусом. Выявлены характерные особенности поведения собственных значений Коссера и соответствующих значений коэффициента Пуассона.

1. Введение. В цикле публикаций 1898–1901 гг., первой из которых была статья [1], а перечень остальных приведен в работе [2], братья Э. и Ф. Коссера предложили оригинальный подход к решению граничных задач теории упругости для изотропных тел. Анализируя векторное уравнение Ламе в области V при наличии, например, внешних силовых нагрузок на ее границе δV была поставлена задача нахождения таких нетривиальных решений этого уравнения, для которых напряжения на границе равны нулю. Было показано, что такие решения существуют для бесконечного дискретного спектра значений величины $\omega = 1/(1 - 2\sigma)$, для которой коэффициент Пуассона σ находится вне пределов $[-1, 1/2]$. Тогда решение исходной задачи с неоднородными граничными условиями для напряжений может быть найдено в виде разложений по собственным функциям, соответствующим найденным значениям ω , названным собственными числами Коссера. Для довольно простого случая задачи для шара братья Коссера [3] установили зависимость $\omega_n = (2n+1)/(2n^2+4n+3)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и привели выражения собственных функций \mathbf{u}_n . В работе [4] было доказано, что $\omega = 1/3$ всегда является собственным числом Коссера указанной задачи.

Хотя работы братьев Коссера были довольно известными, однако до середины 1970 гг. предложенный ими метод практически не развивался. Возможно, причиной тому послужило замечание [5, с. 149]: «... для практического вычисления указанный метод, вообще говоря, не применялся, однако отдельные задачи, которые могут быть решены и другими способами, были при его помощи разобраны.»

Интерес к спектру Коссера возобновился благодаря работам Михлина, перечень которых приведен в [2]. Было показано [2, с. 66], что кроме дискретного спектра ω_n , существуют собственные значения $\omega_{-1} = -1$ и $\omega_{-\infty} = -\infty$, которым соответствует бесконечное множество независимых собственных функций \mathbf{u}_{-1}^k и $\mathbf{u}_{-\infty}^k$ ($k = 1, 2, \dots$) и приведено полное решение задачи с краевыми условиями в терминах напряжений в виде разложения по собственным функциям Коссера [2, с. 70].

Несмотря на такой замечательный результат, полностью отсутствуют сведения о спектре Коссера для сугубо пространственных тел, кроме шара и сферы. В настоящей работе предложена методика нахождения собственных значений Коссера

осесимметричной задачи теории упругости для сплошного конечного цилиндра с граничными условиями в терминах напряжений. Выявлены характерные особенности поведения дискретных собственных значений Косерра в зависимости от соотношения между длиной и диаметром цилиндра.

2. Постановка задачи. Рассматриваем осесимметричную задачу теории упругости для сплошного изотропного цилиндра $V = \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |z| \leq h\}$ в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Векторное уравнение Ламе в этом случае запишем в покомпонентном виде:

$$(\omega + 1) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad (\omega + 1) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Omega)}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

где $\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z}$, $\Omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}$, u и w — соответственно радиальная и осевая составляющая вектора упругих смещений \mathbf{u} . Ставим задачу нахождения таких значений параметра ω , для которых существуют нетривиальные решения уравнений (1) в области V при удовлетворении однородных краевых условий для радиальных σ_r , осевых σ_z и касательных τ_{rz} напряжений:

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad r = a; \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad z = \pm h. \quad (2)$$

3. Построение решения. Нахождение перемещений u и w , а также соответствующих напряжений, можно осуществлять разными способами. В частности, можно использовать функции напряжений Лява, Вебера, Тимпе, Папковича-Нойбера и др., или же применить непосредственное интегрирование уравнений (1). В случае задачи для конечного цилиндра, как и для ограниченных областей в целом, выбор формы общего решения уравнений Ламе является принципиальным лишь с той точки зрения, чтобы полученное решение владело достаточной степенью свободы для удовлетворения всех полного набора граничных условий.

Мы используем подход с применением функции Лява $\chi(r, z)$ [9 § 188], которую, ввиду условий (2) принимаем в виде [6]:

$$\chi(r, z) = B_0 z^3 + D_0 r^2 z + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n R_n(r) \frac{\sin k_n z}{k_n^4} + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j Z_j(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^4 J_0(\lambda_j a)}, \quad (3)$$

где

$$R_n(r) = k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \left(\frac{\omega + 1}{\omega} + k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)},$$

$$Z_j(z) = \left(\frac{\omega - 1}{\omega} + \lambda_j h \operatorname{cth} \lambda_j h \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - \lambda_j z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h},$$

$k_n = n\pi/h$; $\lambda_j > 0$ — корни уравнения $J_1(\lambda_j a) = 0$, J_0 , J_1 и I_0 , I_1 — соответственно обычные и модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, B_0 , D_0 , X_n , Y_j — произвольные коэффициенты. Далее с использованием

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right], \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right], \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right],$$

определяем напряжения, которые должны удовлетворять граничным условиям (2). Здесь ∇^2 — осесимметричный оператор Лапласа. В результате приходим [6] к двум уравнениям для B_0, D_0 :

$$(\omega - 1)B_0 + 2\omega D_0 = 0, \quad (\omega + 1)B_0 + 2(\omega - 1)D_0 = 0 \quad (4)$$

и бесконечной системе для X_n, Y_j :

$$\begin{cases} X_n \left[a^2 \left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) - \frac{1}{k_n^2} \frac{1 + \omega}{\omega} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = 0, & n = 1, 2, \dots, \\ Y_j \frac{h}{\lambda_j} \left[\operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j h} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = 0, & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5)$$

Нетривиальные решения уравнений (4) могут быть найдены только при значении $\omega \equiv \omega_0 = 1/3$, которому соответствует $\sigma \equiv \sigma_0 = -1$. Полученное значение ω_0 не зависит от соотношения между диаметром и длиной цилиндра.

Уравнения второй строки системы (5) не зависят от параметра ω . Определив из указанных уравнений коэффициенты Y_j и подставив их в уравнения первой строки (5), эта система сводится к системе вида:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} X_m = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

где

$$\alpha_{nm} = \left[a^2 \left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) - \frac{1 + \omega}{k_n^2 \omega} \right] \delta_{nm} - \frac{16}{h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 (\operatorname{ch} 2\lambda_j h - 1)}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2 (k_m^2 + \lambda_j^2)^2 (\operatorname{sh} 2\lambda_j h + 2\lambda_j h)},$$

δ_{nm} — символ Кронекера.

Система (6) владеет нетривиальными решениями, если величины ω являются корнями характеристического уравнения

$$\Psi_{\infty} = 0, \quad (7)$$

где $\Psi_{\infty} = \det(\alpha_{nm})_{n,m=1,\infty}$. Выражения, содержащие параметр ω , расположены лишь на главной диагонали определителя Ψ_{∞} , вследствие чего последний является бесконечным полиномом от ω . Поэтому уравнение (7) определяет счетный дискретный спектр собственных значений Коссера $\{\omega_n, n = 1, 2, \dots\}$.

Для практического отыскания собственных значений ω_n из уравнения (7) используем алгоритм простой редукции (идея которого происходит еще от классической работы Ж. Фурье 1807 года), перейдя к уравнению

$$\Psi_N = 0, \quad (8)$$

где $\Psi_N = \det(\alpha_{nm})_{n,m=1,N}$, $N < \infty$. Для каждого конкретного значения N определитель Ψ_N является полиномом N -й степени, а из уравнения (8) можно рассчитывать первых N значений спектра Коссера $\{\omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$, принимая

N как угодно большим. При таком походе интересно исследовать влияние увеличения параметра N на первых M собственных значений ($M < N$), а также установить закономерность поведения собственных значений при $N \rightarrow \infty$.

4. Примеры вычислений. Рассмотрим расчет собственных значений Коссера для «кубообразного» цилиндра $h = a = 1$. Последовательности w_n , найденные при помощи уравнения (8) для различных значений N приведены в Таблице 1. Убеждаемся, что уравнение (8) обеспечивает достаточно стабильные собственные значения при возрастании параметра N .

N	5	6	7	8	9	10
n						
1	0.2902	0.2904	0.2906	0.2907	0.2907	0.2908
2	0.1650	0.1652	0.1654	0.1655	0.1656	0.1656
3	0.1094	0.1096	0.1097	0.1098	0.1099	0.1100
4	0.0815	0.0816	0.0817	0.0818	0.0818	0.0819
5	0.0648	0.0649	0.0650	0.0651	0.0651	0.0652
6		0.0538	0.0539	0.0540	0.0540	0.0541
7			0.0461	0.0461	0.0462	0.0462
8				0.0402	0.0403	0.0403
9					0.0357	0.0358
10						0.0321

Таблица 1.

На рис. 1 точками изображены первых 16 собственных значений Коссера, включая $\omega_0 = 1/3$. Как видим, все они находятся между нулем и $1/3$, стремясь к нулю с увеличением номера. Интересно отметить также поведение коэффициентов Пуассона σ_n , соответствующих полученным значениям ω_n (рис. 2). Эти значения, кроме σ_0 , соответствующего ω_0 , располагаются вдоль прямой, описываемой приблизительно уравнением $\sigma_n = -1.55n + 0.33$ (сплошная линия на рис. 2). Воспользовавшись этим фактом и формулой, связывающей коэффициент Пуассона с параметром ω , находим асимптотическую формулу для собственных значений Коссера $\omega_n = 1/(3.1n + 0.34)$ (сплошная линия на рис. 1).

Влияние отношения $\varepsilon = h/a$ на значения ω_n проиллюстрировано на рис. 3. С уменьшением ε собственные числа скапливаются возле уровня $\omega = 0$, а при возрастании ε — возле уровня $\omega = 1/3$. Коэффициенты Пуассона, кроме $\sigma_0 = -1$,

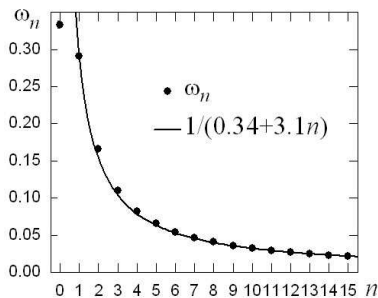


Рис. 1.

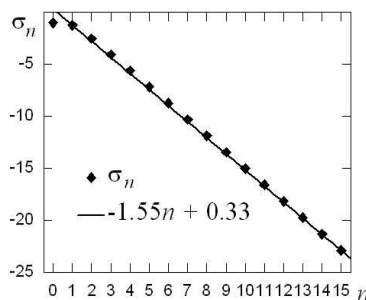


Рис. 2.

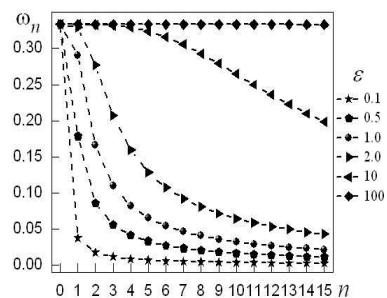


Рис. 3.

расположены вдоль прямых, описывающихся для случаев, показанных на рис. 3, в порядке возрастания ε : $\sigma_n = -15.73n + 2.78$, $\sigma_n = -3.14n + 0.84$, $\sigma_n = -1.55n + 0.33$, $\sigma_n = -0.73n - 0.29$, $\sigma_n = -0.07n - 0.93$, $\sigma_n = 3 \cdot 10^{-5}n - 1$. С увеличением ε коэффициенты Пуассона располагаются вдоль прямой, стремящейся к горизонтальному положению. Расчеты также показали, что увеличение ε способствует улучшению точности расчета собственных значений Коссера для конкретных значений N .

5. Заключение. Предложен подход к практическому вычислению собственных чисел Коссера осесимметричной задачи теории упругости для конечного цилиндра с заданными на его поверхности внешними усилиями. Исследован характер поведения собственных значений в зависимости от формы цилиндра. Соглашаясь с замечанием [5, с. 149], следует отметить, что практическое применение метода братьев Коссера, в частности, к рассмотренной задаче требует разрешения целого ряда теоретических вопросов, одним из которых является алгоритм построения собственных функций Коссера.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Cosserat E., Cosserat F.* Sur les equations de la theorie d'elasticite // C. R. Acad. Sci. Paris. 1898. 126. pp. 1089–1091.
- [2] *Мухлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости // Усп. матем. наук. 1973. 28, №3 (171). С. 43–82.
- [3] *Cosserat E., Cosserat F.* Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. 133. pp. 271–273.
- [4] *Cosserat E., Cosserat F.* Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité dans le cas où les efforts sur la frontière sont données // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. 133. pp. 382–384.
- [5] *Треффц Е.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1934. 172 с.
- [6] *Meleshko V. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // J. Engng Math. 2003. 46. pp. 355–376.

Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V., Villaggio P. *The Cosserat spectrum in the axisymmetric elasticity problem in terms of stresses for a solid isotropic cylinder of finite length.* The Cosserat spectrum in second BVP of elasticity for an isotropic solid cylinder of finite length is investigated with respect to different aspect ratio. The main features of the Cosserat eigen-values and the corresponding Poisson's ratios are elicited.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

Мещерякова Е. Ю.^{*}, Пухначев В. В.^{*,**}

^{*} *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

^{**} *Новосибирский государственный университет*

Рассматриваются неустановившиеся движения несжимаемого вязкоупругого континуума Максвелла с постоянным временем релаксации. Эта система имеет как вещественные, так и комплексные характеристики, что осложняет постановку начально-краевых задач. Изучен класс эффективно одномерных движений, для которых подсистема трех уравнений является гиперболической. Асимптотический анализ последней указывает на возможность образования разрывов в процессе эволюции решения. Общая система уравнений движения допускает бесконечномерную псевдогруппу Ли, которая содержит расширенную группу Галилея. С целью получения точных решений задач со свободными поверхностями, доказана теорема об инвариантности условий на априори неизвестной свободной границе. Построены точные решения задач о заполнении сферической полости и о деформации вязкоупругой полосы.

В экспериментальной работе Р. А. Апакашева и В. В. Павлова [1] изучалось движение по инерции вокруг своей оси вертикального цилиндра, помещенного в сосуд большого диаметра, который заполнен водой. Действие вязкости приводит к уменьшению угловой скорости цилиндра со временем, что и наблюдалось в эксперименте. Однако оказалось, что на заключительной стадии вращения угловая скорость цилиндра изменяется не монотонно. Авторы обнаружили затухающие колебания с периодом около получаса. Позже А. Е. Коренченко и В. П. Бескачко [2] исследовали инерционное вращение свободного твердого диска, первоначально раскрученного вокруг своей оси до некоторой угловой скорости и помещенного затем в цилиндрический сосуд, заполненный водой. Здесь также был обнаружен колебательный режим приближения к состоянию покоя. Такое удивительное поведение дало авторам указанных работ основание предполагать, что существенным фактором, определяющим поведение воды при малых скоростях деформаций сдвига порядка 10^{-3} с^{-1} , наряду с вязкостью, является также и упругость. Иными словами, вода при приближении к состоянию равновесия проявляет вязкоупругие свойства. Для проверки этой гипотезы была выбрана модель Максвелла с неизвестным априори постоянным временем релаксации напряжений сдвига τ . Наилучшее согласие данных эксперимента и расчета было достигнуто при выборе $\tau \approx 1800 \text{ сек.}$, что намного превосходит время релаксации напряжений всестороннего сжатия в воде. Имея целью создание модели для описания поведения воды и близких к ней жидкостей в условиях экспериментов [1, 2] допустимо считать, что в таких ситуациях напряжения сжатия релаксируют мгновенно, и тогда мы приходим к модели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла.

Движение несжимаемой среды Максвелла описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\nabla p + \operatorname{div} S, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \tau(S_t + \mathbf{v} \cdot \nabla S - W \cdot S + S \cdot W) + S &= 2\mu D, \quad \operatorname{Tr} S = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости, p — давление, S — девиатор тензора напряжений, W — антисимметричная часть тензора $\nabla \mathbf{v}$, D — тензор скоростей деформаций, ρ — плотность, μ — динамическая вязкость, τ — время релаксации.

Третье уравнение в (1) является реологическим соотношением в модели Максвелла, а выражение в скобках называется вращательной производной Яуманна. Иногда также используются верхняя или нижняя конвективные производные, и свойство инвариантности системы относительно расширенной группы Галилея выполнено во всех трех случаях. Однако лишь первый выбор, отвечающий вращательной производной Яуманна, ведет к непротиворечивой модели. Это вытекает из анализа эволюционного дифференциального уравнения для следа матрицы S . Оно является однородным в случае производной Яуманна, но в двух других случаях становится неоднородным, не допуская нулевого решения [3].

Квазилинейная система первого порядка (1) не является эволюционной по времени, но относится к типу Ковалевской, если в качестве эволюционной переменной выбрана одна из пространственных координат. Это гарантирует разрешимость задачи Коши в классе аналитических функций. Кроме того, эта система имеет составной тип: она обладает комплексными, траекторной и “звуковыми” характеристиками. Кавычки связаны с тем, что эти характеристики также могут быть комплексными. Это происходит в случае, когда внедиагональные члены тензора напряжений достаточно велики. К настоящему времени, отсутствуют глобальные теоремы существования и единственности для системы (1), что повышает интерес к построению ее точных решений. В данной работе использован теоретико-групповой подход для нахождения точных решений рассматриваемой системы [4].

Подробное исследование математических свойств модели с производной Яуманна сделано для случая плоскопараллельного движения, в котором число искомых функций снижается с девяти до пяти. Введем обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $v_1 = u$, $v_2 = v$, $S_{11} = -S_{22} = A$, $S_{12} = S_{21} = B$. Система для нахождения u , v , p , A , B имеет вид

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0, \quad \rho(u_t + uu_x + vv_y) + p_x - A_x - B_y = 0, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) + p_y - B_x + A_y &= 0, \\ \tau [A_t + uA_x + vA_y + B(v_x - u_y)] - 2\mu u_x + A &= 0, \\ \tau [B_t + uB_x + vB_y - A(v_x - u_y)] - \mu(u_y + v_x) + B &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Изучены групповые свойства системы (2): она допускает бесконечномерную псевдогруппу Ли, базисные операторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v + 2B\partial_A - 2A\partial_B, \\ \langle \alpha(t) \rangle_1 &= \alpha(t)\partial_x + \dot{\alpha}(t)\partial_u - \rho x \ddot{\alpha}(t)\partial_p, \\ \langle \beta(t) \rangle_2 &= \beta(t)\partial_y + \dot{\beta}(t)\partial_v - \rho y \ddot{\beta}(t)\partial_p, \quad \langle \gamma(t) \rangle_3 = \gamma(t)\partial_p, \end{aligned} \quad (3)$$

Построены одно- и двумерные оптимальные системы подалгебр алгебры Ли (3) (определение оптимальной системы подалгебр см. в [4]). Оптимальная система однопараметрических подалгебр имеет вид:

$$X_1 + CX_2, \quad X_2 + \langle \gamma(t) \rangle_3, \quad \langle \alpha(t) \rangle_1 + \langle \beta(t) \rangle_2, \quad \langle \gamma(t) \rangle_3 \quad (4)$$

где C — произвольная константа, α , β , γ — произвольные функции времени.

Оптимальная система двухпараметрических подалгебр имеет вид:

$$\begin{aligned} & [X_1 + x_2 X_2, X_2 + C_1 \langle \sin(x_2 t) \rangle_1 + C_1 \langle \cos(x_2 t) \rangle_2 + C_3 \langle 1 \rangle_3], \\ & [X_1, X_2 + C_1 \langle 1 \rangle_1 + C_3 \langle 1 \rangle_3], \quad [X_2 + \langle \gamma_1 \rangle_3, \langle \gamma_2 \rangle_3], \quad [\langle \gamma_1 \rangle_3, \langle \gamma_2 \rangle_3], \\ & [X_1 + x_2 X_2, \langle e^{kt} (C_1 \cos(x_2 t) + C_2 \sin(x_2 t)) \rangle_1 + \\ & + \langle e^{kt} (-C_1 \sin(x_2 t) + C_2 \cos(x_2 t)) \rangle_2 + C_3 \langle e^{kt} \rangle_3], \\ & [\langle \alpha_1 \rangle_1 + \langle \beta_1 \rangle_2, \langle \alpha_2 \rangle_1 + \langle \beta_2 \rangle_2 + \langle \gamma_2 \rangle_3] \quad \text{при условии} \\ & \dot{\alpha}_1 \alpha_2 - \alpha_1 \dot{\alpha}_2 = \beta_1 \dot{\beta}_2 - \beta_2 \dot{\beta}_1 + C. \end{aligned}$$

где x_2, k, C_i — произвольные константы, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — произвольные функции времени ($i = 1, 2, 3$).

Рассмотрим инвариантное решение ранга 2 относительно подгруппы с оператором $X = \partial_y + \Omega(t\partial_x + \partial_u)$, где $\Omega = \text{const}$ (данный оператор получается из третьего оператора в (4) с $\alpha = \Omega t$, $\beta = 1$). Это решение имеет вид

$$u = \Omega y + f(\xi, t), \quad v = g(\xi, t), \quad p = p(\xi, t), \quad A = a(\xi, t), \quad B = b(\xi, t),$$

где $\xi = x - \Omega y t$. Редуцированная система имеет два интеграла, что позволяет свести ее к системе для определения функций g, a и b :

$$\begin{aligned} g_t &= 2\rho^{-1}\Omega t (1 + \Omega^2 t^2)^{-1} a_\xi + \rho^{-1} (1 - \Omega^2 t^2) (1 + \Omega^2 t^2)^{-1} b_\xi - \\ & \quad - 2\Omega^2 t (1 + \Omega^2 t^2)^{-1} g, \\ a_t &= [2\mu\tau^{-1}\Omega t - (1 + \Omega^2 t^2) b] g_\xi - \tau^{-1} a + \Omega b, \\ b_t &= (\mu\tau^{-1} - a) \Omega + (\mu\tau^{-1} (1 - \Omega^2 t^2) + (1 + \Omega^2 t^2) a) g_\xi - \tau^{-1} b. \end{aligned} \quad (5)$$

Собственные числа характеристического уравнения системы (5) имеют вид:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \rho^{-1/2} [\mu\tau^{-1} (1 + \Omega^2 t^2) + (1 - \Omega^2 t^2) a - 2\Omega t b]^{1/2}. \quad (6)$$

Условием гиперболичности системы (5) является положительность подкоренного выражения в (6). В процессе эволюции это условие может нарушаться.

Полагая в (5) $\Omega = 0$, приходим к замкнутой системе для функций v, A и B , описывающей слоистые движения [3]:

$$\rho v_t = B_x, \quad \tau(A_t + B v_x) + A = 0, \quad \tau(B_t - A v_x) + B = \mu v_x \quad (7)$$

В отличие от исходной системы (2), система уравнений (7) является эволюционной по отношению ко всем искомым функциям. Условием ее гиперболичности является выполнение неравенства $\tau A + \mu > 0$. Для изучения свойств решения системы (7) рассмотрим случай, когда время релаксации τ и динамическая вязкость μ одновременно стремятся к бесконечности, причем $\mu\tau^{-1} = \sigma = \text{const}$.

Проведен асимптотический анализ системы (7) по малому параметру τ^{-1} . Для главного члена асимптотики мы имеем квазилинейную систему

$$\rho v_t = B_x, \quad A_t = -B v_x, \quad B_t = (\sigma + A) v_x, \quad (8)$$

которая в области ее гиперболичности допускает решения в виде простых волн. Получены достаточные условия образования разрывов решения системы (8) за конечное время. При этом остается нерешенным вопрос о выборе условия Гюгонио на

сильном разрыве, которое бы гарантировало единственность решения задачи Коши. Этот вопрос нетривиален, поскольку исходное реологическое соотношение — третье уравнение системы (1) — не имеет форму закона сохранения.

Решена задача о заполнении сферической полости для вязкоупругой несжимаемой среды Максвелла [5]. В этом случае система уравнений движения может быть сведена к одному интегро-дифференциальному уравнению второго порядка для радиуса полости как функции времени и квадратурам. Найдено преобразование, приводящее это уравнение к дифференциальному уравнению 4-го порядка и 5-й степени, что существенно упрощает численное и аналитическое исследование задачи Коши. В это уравнение и начальные условия входят три безразмерных параметра: число Рейнольдса, безразмерное время релаксации и капиллярное число. Оказалось, что при ненулевом значении поверхностного натяжения полость стягивается в точку за конечное время. В отсутствие капиллярных сил возможны два режима, аналогичных тем, которые имеют место для несжимаемой вязкой жидкости. Однако для вязкоупругой среды критическое число Рейнольдса, разделяющее режимы с конечным и бесконечным временем заполнения полости, зависит от времени релаксации и увеличивается вместе с последним. Численное решение задачи для континуума Максвелла обнаружило существование как колебательного, так и монотонного режимов движения. Характерно, что при уменьшении радиуса полости колебания прекращаются. Возможны два асимптотических режима вблизи момента коллапса: инерционный, когда скорость в этот момент обращается в бесконечность, и вязкий, когда скорость стремится к конечному пределу, зависящему от определяющих параметров задачи.

Полученные результаты использованы для построения точных решений задач со свободной границей для системы Максвелла. Их систематический поиск основан на теореме об инвариантности условий на свободной границе. Если свободная граница является инвариантным многообразием подгруппы расширенной группы Галилея, то кинематическое и динамическое условия, выполненные на этой поверхности, также инвариантны относительно этой подгруппы [3].

Важно отметить, что полученные с помощью этой теоремы решения могут быть не только инвариантными, но и частично инвариантными, а также их обобщениями. К последним относится решение задачи о деформации вязкоупругой полосы со свободными границами, движущейся по инерции либо под действием растягивающих или сжимающих продольных напряжений [6], а также сдвиговых напряжений, приложенных к свободной поверхности. В этой задаче обнаружен масштабный эффект коротковолновой неустойчивости, вызванный отсутствием диагонального преобладания девиатора тензора напряжений [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы 14.3 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Апакашев Р. А. Павлов В. В. Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3–7.
- [2] Коренченко А. Е. Бескачко В. П. Определение модуля сдвига воды в экспериментах с плавающим диском // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 100–103.
- [3] Пухначев В. В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 4.
- [4] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 320 с.
- [5] Осипов С. В. Пухначев В. В. Задача о заполнении сферической полости в несжимаемой вязкоупругой среде Максвелла // В сб. «Успехи механики сплошных сред». Владивосток: Дальнаука. 2009. С. 583–591.
- [6] Пухначев В. В. Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 2. С. 16–23.

Meshcheryakova E. Yu., Pukhnachev V. V. *Group analysis of incompressible visco-elastic Maxwell medium equations.* There are considered unsteady motions of incompressible visco-elastic Maxwell medium with a constant relaxation time. This system possesses both real and complex characteristics, which makes it difficult to pose initial-boundary value problems. There is studied a class of efficiently one-dimensional motions, for which the sub-system of three equations is hyperbolic. Asymptotic analysis of the latter shows the possibility of discontinuities formation in the process of solution evolution. General system of equations of motion admits infinite-dimensional Lie pseudogroup, which contains an extended Galileo group. For the purpose of finding exact solutions to problems with free surfaces, there is proved a theorem on invariance of conditions on an a priori unknown free surface. Exact solutions to the problems on filling a spherical cavity and visco-elastic strip deformation were built.

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, СОЗДАВАЕМОГО ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПОГРУЖЕННОГО ШАРА.

Моргулис А. Б.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВШЦ РАН, Владикавказ*

При вращательных колебаниях погруженного шара область течения постоянна, а потому передача момента от шара к жидкости происходит исключительно благодаря силам вязкого трения. Этого, однако, достаточно для возбуждения среднего вихревого потока не только в стоксовом слое, но и во всей области течения даже в случае высокой частоты колебаний. В настоящей статье это явление исследуется при в случае относительно малых колебаний: предполагается, что их амплитуда порядка толщины стоксова слоя. Обсуждается связь полученных результатов с экспериментом.

Рассмотрим обтекание движущегося твёрдого шара вязкой однородной несжимаемой жидкостью. Движение шара задано так, что он периодически поворачивается вокруг своего центра, но в среднем остаётся на месте. Простейший частный случай такого движения — крутильные колебания вокруг неподвижной оси, при этом угол поворота меняется, например, по правилу

$$\varphi(\tau) = \varepsilon_0 \sin \tau; \quad \tau = \Omega t.$$

В настоящей заметке строится асимптотика течения при большой частоте Ω и малой угловой амплитуде ε_0 . Используемый формализм позволяет рассмотреть и более общие вращательные колебания, описываемые, например, семействами ортогональных матриц

$$U(\tau, \varepsilon_0) = E + \varepsilon_0 L_0(\tau) + O(\varepsilon_0^2), \quad \varepsilon_0 \rightarrow +0,$$

где все члены 2π -периодические по $\tau = \Omega t$, матрица $L_0(\tau)$ кососимметрична и имеет нулевое среднее за период, и разложение равномерно по $\tau \in (0, 2\pi)$.

Введём безразмерные переменные. За единицу времени примем Ω^{-1} , длины — радиус шара r_1 , скорости — характерную скорость движения точек твёрдой границы $r_1 \Omega \varepsilon_0$. Соответствующая безразмерная форма системы Навье-Стокса содержит два параметра: угловую амплитуду ε_0 и безразмерную вязкость $\nu_0 = \text{Re}^{-1}$, где $\text{Re} = (\Omega r_1^2) / \nu$. В случае большой частоты и малой амплитуды колебаний (при фиксированной вязкости) оба параметра системы малы. В таком случае для построения асимптотического приближения необходимо указать путь на плоскости (ε_0, ν_0) , вдоль которого $(\varepsilon_0, \nu_0) \rightarrow (0, 0)$. Мы примем, что

$$\varepsilon_0 = a\varepsilon; \quad \nu_0 = \varepsilon^2; \quad a \sim 1, \varepsilon \rightarrow +0. \quad (1)$$

В результате система Навье-Стокса запишется в виде

$$\mathbf{v}_\tau + \nabla P = \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v} - a\varepsilon(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{при } r > 1; \quad \mathbf{v}|_{r=1} = \mathbf{k}(\tau) \times \mathbf{x}, \quad (2)$$

где \mathbf{k} — известная 2π -периодическая вектор-функция с нулевым средним, \mathbf{x} — радиус-вектор точки $x \in \mathbb{R}^3$, и $r = |\mathbf{x}|$. Наша ближайшая цель — асимптотическое интегрирование системы (2) при $\varepsilon \rightarrow +0$. Заметим, что при этом $\varepsilon_0 r_1 \sim \sqrt{\nu\Omega^{-1}}$ и $r_1 \Omega \varepsilon_0 \sim \sqrt{\nu\Omega}$, так что перемещения точек границы порядка толщины стоксова слоя и характерная скорость вибрации границы порядка корня из частоты вибраций. Таким образом, наша асимптотика несколько отличается от обычной вибродинамики, где скорость вибраций считается величиной порядка 1 при стремлении частоты к ∞ , см. [1].

Разыскивается асимптотика 2π -периодического по τ решения системы (2), для чего применяется «гибрид» методов усреднения и Вишика-Люстерника типа [2]. Решение разыскивается в виде

$$(\mathbf{v}, P) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k ((\mathbf{v}_k^o + P_k^o)(x, \tau) + (\mathbf{v}_k^b + P_k^b)(s, \theta, \tau)), \quad \theta = r^{-1}x, \quad r = 1 + \varepsilon s, \quad (3)$$

где верхние индексы «o» и «b» различают поля, относящиеся к внешнему течению и погранслою, соответственно. Как всегда, мы требуем *сверхстепенного затухания погранслойных полей* при $s \rightarrow +\infty$.

Подстановка рядов (3) в (2) приводит к двум связанным итерационным процессам. Введём обозначения: $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(x)$ — радиальный орт в точке x , $S(x)$ — проектор на ортогональную ему плоскость, проведённую через точку x , $u_k^o = \mathbf{v}_k^o \boldsymbol{\theta}$, $u_k^b = \mathbf{v}_k^b \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{w}_k^b = S\mathbf{v}_k^o$, $\mathbf{w}_k^o = S\mathbf{v}_k^o$. Первый из итерационных процессов имеет вид

$$\mathbf{v}_{k\tau}^o + \nabla P_k^o = \mathbf{V}_k(\mathbf{v}_0^o, \dots, \mathbf{v}_{k-1}^o), \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_k^o = 0; \quad u_k^o|_{r=1} = -u_k^b|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

где $\mathbf{V}_0 \equiv 0$. Для существования периодических решений систем (4) необходимо и достаточно равенств средних

$$\nabla \bar{P}_k^o = \overline{\mathbf{V}_k(\mathbf{v}_0^o, \dots, \mathbf{v}_{k-1}^o)}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_k^o = 0; \quad \bar{u}_k^o|_{r=1} = -\bar{u}_k^b|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Второй процесс удобно записать в проекциях на радиальный орт и ортогональные ему плоскости.

$$u_0^b = 0; \quad P_0^b = 0; \quad P_1^b = 0; \quad (6)$$

$$\mathbf{w}_{0\tau}^b - \mathbf{w}_{0ss}^b = 0; \quad \mathbf{w}_0^b|_{s=0} = \mathbf{k}(\tau) \times \boldsymbol{\theta}; \quad (7)$$

$$-u_{m+1,s}^b = \operatorname{div} \mathbf{v}_m^b + U_m(\operatorname{div} \mathbf{v}_0^b, \dots, \operatorname{div} \mathbf{v}_{m-1}^b); \quad (8)$$

$$P_{m+2,s}^b = Q_{m+1}(\mathbf{v}_0^o, \dots, \mathbf{v}_{m+1}^o, \mathbf{v}_0^b, \dots, \mathbf{v}_{m+1}^b, P_{m+1}^b); \quad (9)$$

$$\mathbf{w}_{m\tau}^b - \mathbf{w}_{mss}^b = \mathbf{W}_m(\mathbf{v}_0^o, \dots, \mathbf{v}_{m-1}^o, \mathbf{v}_0^b, \dots, \mathbf{v}_{m-1}^b, P_m^b); \quad (10)$$

$$\mathbf{w}_m^b|_{s=0} + \mathbf{w}_m^o|_{r=1} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{W}_0 = 0; \quad \boldsymbol{\theta} \mathbf{W}_m \equiv 0; \quad U_0 = 0; \quad m = 0, 1, \dots \quad (12)$$

В уравнениях (10) нет радиального переноса (т.е. членов $u_0 \mathbf{w}_{ms}^b$, где $u_0 = u_0^b + u_0^o|_{r=1}$). Это приятное обстоятельство обусловлено тем, что нормальная скорость твёрдой границы равна нулю (см. (4) и (6)). Явные выражения операторов \mathbf{V}_k , Q_{m+1} , U_m и \mathbf{W}_m опустим. Заметим лишь, что все они полилинейны. Кроме того, значения операторов \mathbf{W}_m , Q_{m+1} , $\operatorname{div} \mathbf{v}_m$ и U_m суть поля со сверхстепенным затуханием при $s \rightarrow \infty$, если таким затуханием обладают $\mathbf{v}_0^b, \dots, \mathbf{v}_m^b$ и P_m^b . Отсюда

следует, что уравнения (8) и (9) имеют погранслойные решения при данном m , если построены все предыдущие приближения. Для разрешимости задачи (10–11) необходимо (и достаточно) выполнения равенств

$$-\bar{\mathbf{w}}_{mss}^b = \overline{\mathbf{W}_m(\mathbf{v}_0^o, \dots, \mathbf{v}_m^o, \mathbf{v}_0^b, \dots, \mathbf{v}_{m-1}^b, P_m^b)}; \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{w}}_m^b|_{s=0} + \bar{\mathbf{w}}_m^o|_{r=1} = 0. \quad (14)$$

Погранслойное решение уравнения (13) единственно и не удовлетворяет, вообще говоря, (14). Поэтому (14) надлежит рассматривать как дополнительное граничное условие к уравнению среднего поля (5), при этом поле $\bar{\mathbf{w}}_m^b$ определяется уравнением (13), а уравнения (10) решаются при граничных условиях

$$\mathbf{w}_m^b|_{s=0} = (\bar{\mathbf{w}}_m^o - \mathbf{w}_m^o)|_{r=1} \quad (15)$$

Рассмотрим первые шаги итерационных процессов. Пусть $k = m = 0$. Тогда, в силу (4), (5) (6), $\mathbf{v}_0^o = \bar{\mathbf{v}}_0^o$, $\text{div } \bar{\mathbf{v}}_0^o = 0$, $P_0^o = 0$. На основании (7), можно положить

$$\mathbf{w}_0^b = \mathbf{q}_0(s, \tau) \times \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{q}_{0\tau} = \mathbf{q}_{0ss}, \quad \mathbf{q}_0|_{s=0} = \mathbf{k}(\tau). \quad (16)$$

Заметим, что \mathbf{q}_0 экспоненциально затухает при $s \rightarrow \infty$ (так как $\bar{\mathbf{k}} = 0$). Отсюда следует, что $\bar{\mathbf{w}}_0^b = 0$, при этом $\text{div } \mathbf{w}_0^b = 0$, так что $u_1^b = 0$. Далее,

$$\mathbf{V}_1 = a(\bar{\mathbf{v}}_0^o, \nabla)\bar{\mathbf{v}}_0^o = \bar{\mathbf{V}}_1,$$

а потому $\mathbf{v}_1^o = \bar{\mathbf{v}}_1^o$, $P_1^o = \bar{P}_1^o$. Но \bar{P}_1^o связано с $\bar{\mathbf{v}}_0^o$ равенствами (5), где $k = 1$, так что

$$a(\bar{\mathbf{v}}_0^o, \nabla)\bar{\mathbf{v}}_0^o = -\nabla\bar{P}_1^o; \quad \text{div } \bar{\mathbf{v}}_0^o = 0; \quad \bar{\mathbf{v}}_0^o|_{r=1} = 0,$$

и мы можем положить $\mathbf{v}_0^o = 0$, $P_1^o = 0$. В таком случае рассмотрение (4–5) при $k = 2$ даёт $\mathbf{V}_2 = 0$, $\bar{P}_2^o = 0$, и

$$\tilde{\mathbf{v}}_2^o \stackrel{def}{=} \mathbf{v}_2^o - \bar{\mathbf{v}}_2^o = \nabla\Phi_2, \quad \Delta\Phi_2 = 0; \quad \Phi_{2,r}|_{r=1} = -\tilde{u}_2^b|_{s=0} \stackrel{def}{=} u_2^b - \bar{u}_2^b, \quad (17)$$

при этом $P_2^o = -\nabla\Phi_{2,\tau}$. Теперь уравнение (5) при $k = 3$ позволяет определить среднюю скорость $\bar{\mathbf{v}}_1^o$. Дело сводится (с учётом $\mathbf{v}_0^o = 0$) к системе Навье–Стокса

$$\Delta\bar{\mathbf{v}}_1^o = \nabla H_1 + a(\bar{\mathbf{v}}_1^o, \nabla)\bar{\mathbf{v}}_1^o, \quad \text{div } \bar{\mathbf{v}}_1^o = 0; \quad \bar{\mathbf{v}}_1^o|_{r=1} = -\bar{\mathbf{w}}_1^b|_{s=0}; \quad H_1 = \bar{P}_3^o + \overline{(\nabla\Phi_2)^2}/2. \quad (18)$$

Таким образом, погранслойное течение «экспортирует» завихренность в среднее внешнее течение. В англоязычной литературе это явление называется *steady streaming*, и изучается весьма широко. Применяемые при этом аналитические методы следуют, в основном, статье [3]. Предложенный в ней подход, в отличие от нашего, приводит к неравномерным по области течения приближениям.

Граничные данные задач (17) и (18) выражаются в явной форме через \mathbf{q}_0 в силу (10)–(13)–(15) при $k = 1, 2$ и (8) при $k = 2$. Например, в случае крутильных колебаний, $\mathbf{k} = \sin \tau \bar{\mathbf{k}}$, $|\bar{\mathbf{k}}| = 1$ и

$$\bar{\mathbf{v}}_1^o|_{r=1} = -(a/8) \sin 2\sigma \mathbf{e}_\sigma; \quad \Phi_{2,r}|_{r=1} = (a/8)(1 - 3 \cos^2 \sigma) \sin(2\tau - \pi/4).$$

Здесь $\cos \sigma = (\boldsymbol{\theta}, \bar{\mathbf{k}})$, $\sigma \in (0, \pi)$, \mathbf{e}_σ — орт нормали к координатным поверхностям $\sigma = \text{const}$, ориентированный так, что $\mathbf{e}_\sigma = \bar{\mathbf{k}}$ при $\sigma = \pi/2$. Таким образом, вблизи граничной сферы средняя скорость жидкости направлена от полюсов к экватору. Главная осциллирующая часть внешнего течения $\tilde{\mathbf{v}}_2^o = \nabla \Phi_2$ допускает простое явное выражение

$$u_2^o = a \sin(2\tau - \pi/4)(1 - 3 \cos^2 \sigma)/(8r^4); \quad \mathbf{w}_2^o = -(a \sin(2\tau - \pi/4) \sin 2\sigma/(8r^4))\mathbf{e}_\sigma.$$

В частности, пульсации радиальной скорости внешнего течения имеют удвоенную частоту, причём их амплитуда достигает максимального значения при $\sigma = \pi/2$, т.е. в экваториальной плоскости.

В статье [4] представлены результаты экспериментального исследования течений, вызываемых крутильными колебаниями погруженного шара. Как главные особенности глобального движения жидкости отмечаются возникновение стационарной осесимметричной циркуляции, переносящей жидкость вблизи сферы от полюсов к экватору и периодическое появление радиальной струи вблизи экватора. При этом частота струи оказывается вдвое больше частоты колебаний шара. Обе эти особенности внешнего течения представлены в построенном здесь приближении. Существенное различие состоит в том, что в нашем случае струя мала по сравнению со стационарным течением, тогда как в экспериментах [4] обе компоненты внешнего течения вполне сравнимы. Это различие обусловлено, вероятно, тем, что в эксперименте амплитуды колебаний не были малыми: ε_0 и ε менялись приблизительно в интервалах (1.6, 2.1) и (0.01, 0.05), соответственно, причём при уменьшении ε наблюдалось постепенное ослабление радиальной струи вплоть до невозможности её наблюдения. Возможно, лучшего совпадения с экспериментом можно добиться, продолжая построенное приближение численно в область более высоких амплитуд.

В заключение рассмотрим возможный эффект вибрации твердой границы на среднее движение частиц жидкости. Уравнение движения частиц во внешнем течении запишем в безразмерной форме, используя те же единицы длины и скорости, что и при записи системы (2), но за единицу времени примем $T = \varepsilon_0^{-2} \Omega^{-1}$, $\varepsilon_0 = a_0/r_1$, a_0 — характерная амплитуда вибрации частиц границы. Будем иметь

$$\mathbf{x}_t = \varepsilon_0^{-1} \mathbf{v}^o(x, \varepsilon_0^{-2} t).$$

Пусть скорость $\varepsilon \rightarrow +0$ и поле скорости допускает асимптотику

$$\mathbf{v}^o(x, \tau) = \mathbf{v}_0^o(x, \tau) + \varepsilon_0 \bar{\mathbf{v}}_1^o(x) + \dots, \quad \bar{\mathbf{v}}_0^o = 0; \quad , \quad \varepsilon_0 \rightarrow +0, \quad (19)$$

Тогда главный член асимптотики средней лагранжевой скорости имеет вид

$$\bar{\mathbf{x}}_t = \bar{\mathbf{v}}_1^o(x) + \overline{(\boldsymbol{\xi}, \nabla) \mathbf{v}_0^o}, \quad \text{где } \boldsymbol{\xi}_\tau(\bar{x}, \tau) = \mathbf{v}_0^o(\bar{x}, \tau), \quad \tau = \varepsilon_0^{-2} t.$$

(см. например [1]). Таким образом, имеет место дрейф материальных частиц относительно траекторий эйлера среднего поля (Stokes drift); при этом смещения частиц порядка 1 достигаются на временах порядка T .

Заметим, что асимптотика (19) имеет место, если амплитуда и частота вибрации связаны соотношением (1). В таком случае $T \sim r_1^2/\nu$ — масштаб вязкой

релаксации. Специфика чисто тангенциальных колебаний заключается в том, что $\mathbf{v}_0^o = 0$, а потому дрейф может проявиться лишь в погранслое. В случае вращательных колебаний шара соответствующий дрейфовый член имеет вид

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} \times (\overline{\mathbf{f}_0 \times \mathbf{q}_0})/2, \mathbf{f}_\tau(s, \tau) = \mathbf{q}_0(s, \tau),$$

где \mathbf{q}_0 определён в (16). Нетрудно видеть, что дрейфовая скорость параллельна плоскостям, касательным к граничной сфере. На самой граничной сфере $\mathbf{f}_\tau(0, \tau) = \mathbf{k}_0(\tau) = \mathbf{q}_0(0, \tau)$, и

$$\overline{\mathbf{f}_0 \times \mathbf{q}_0}|_{s=0} = 0.$$

Это равенство вытекает из основного предположения о периодичности вращений шара и о том, что он покоится в среднем. В случае крутильных колебаний дрейфовый член равен нулю.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты 2.1.1/554 и 2.1.1/6095) и РФФИ, проекты 08-01-00895, 07-01-92213.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–129.
- [2] Vladimirov V. A. Viscous flows in a half space caused by tangential vibrations on its boundary // Studies in Appl. Math. 2008. Vol. 121. № 4. pp. 337–367.
- [3] Riley N. Oscillatory viscous flows — Review and extension // J. Inst. Maths. Applics. 1967. Vol. 3. pp. 419–434.
- [4] Hollerbach, R., Wiener, R. J., Sullivan, R. J., Donnelly, I. S., Barenghi, C. F. The flow around a torsionally oscillating sphere // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14, №. 12. pp. 4192–4205.

Morgulis A. B. *High frequency asymptotic for the viscous fluid flow around a rotationally oscillating sphere.* The rotational oscillations do not change the flow domain. Hence, the fluid viscosity is solely responsible for the transfer of the angular momentum to the fluid. Nevertheless, such interaction is able to excite steady vortex flows in the exterior of the Stokes layer even in the case of high frequency. The present paper addresses these features in the case of relatively small oscillations, whose amplitudes are supposed to be as small as the width of the Stokes layer. The relations of the obtained results to the experiments are discussed as well.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается трансверсально изотропная линейно упругая сплошная среда, равномерно сжатая в плоскости изотропии. При достаточно высоком уровне сжатия среда теряет устойчивость, ибо нарушается условие Адамара о положительной определенности акустического тензора. Если модули упругости постоянны, форма потери устойчивости охватывает всю среду. В противном случае форма потери устойчивости локализуется вблизи некоторой плоскости. В докладе с использованием асимптотических приближений построена локализованная форма потери устойчивости и найдена критическая деформация сжатия.

1. Введение. В своих работах И.И. Ворович уделял особое внимание математической строгости анализа исследуемой проблемы [1], поэтому публикация этой статьи в сборнике, посвященном его памяти, представляется уместной. Рассматриваются формы потери устойчивости трансверсально изотропного линейно упругого пространства $x_1x_2x_3$, равномерно сжатого в горизонтальных плоскостях изотропии x_1x_2 [2]– [4]. Потеря устойчивости связана с нарушением условия Адамара [5] о положительной определенности акустического тензора. Если модули упругости постоянны, форма потери устойчивости охватывает все пространство. Ниже предполагается, что упругие модули зависят только от вертикальной координаты $x_3 = z$. В этом случае возможна локализация формы потери устойчивости в окрестности некоторой плоскости $z = z_*$. С использованием асимптотических ВБК-приближений [6, 7] построены локализованные формы потери устойчивости и найдены критические деформации сжатия.

2. Докритическое напряженное состояние и его бифуркация. Упругий потенциал трансверсально изотропного материала возьмем в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 E_{ij} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \sum_{i \neq j} G_{ij} \varepsilon_{ij}^2, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

где u_i — проекции перемещений, ε_{ij} — деформации Коши–Грина, E_{ij} , G_{ij} — модули упругости, удовлетворяющие для трансверсально изотропного материала соотношениям

$$E_{11} = E_{22} = E_{12} + 2G_{12}, \quad E_{13} = E_{23}, \quad G_{13} = G_{23}. \quad E_{ij} = E_{ji}, \quad G_{ij} = G_{ji}. \quad (2)$$

Рассмотрим однородное докритическое состояние:

$$e_i = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ii}^0 = e_i + \frac{1}{2} e_i^2, \quad \sigma_i^0 = \sum_{k=1}^3 E_{ik} \varepsilon_{kk}^0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где u_i^0 — докритические перемещения. Пусть

$$e_1 = e_2 = -e, \quad \sigma_3^0 = 0, \quad \varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0 = -e + \frac{e^2}{2}, \quad \varepsilon_{ij}^0 = 0, \quad i \neq j,$$

$$\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma^0 = \left(E_{11} + E_{12} - \frac{2E_{13}^2}{E_{33}} \right) \varepsilon_{11}^0, \quad e_3 = \sqrt{1 - \frac{4E_{13}}{E_{33}} \varepsilon_{11}^0} - 1,$$

причем параметр равномерного сжатия $e > 0$ является искомым параметром нагружения.

Введем возмущения v_i докритического состояния по формулам

$$u_i = u_i^0 + l_i v_i, \quad l_1 = l_2 = 1 - e, \quad l_3 = 1 + e_3.$$

Тогда деформации (1) переписутся в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2} \left(l_i^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + l_j^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 l_k^2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$$

Разложим потенциал (1) $U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots$ в ряд по степеням v_i . Тогда вариация функционала U_2 приводит к системе уравнений бифуркации. Считая, что модули (2) не зависят от горизонтальных координат x_1 и x_2 , ненулевое решение этой системы ищем в виде их двояко периодических функций

$$v_1(x_1, x_2, z) = v_1(z) \cos(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2),$$

$$v_2(x_1, x_2, z) = v_2(z) \sin(r_1 x_1) \cos(r_2 x_2),$$

$$w(x_1, x_2, z) = w(z) \sin(r_1 x_1) \sin(r_2 x_2), \quad w = v_3,$$

где r_i — искомые волновые числа. Как и в [2, 4], после введения вспомогательных неизвестных функций

$$U(z) = (r_1 v_1 + r_2 v_2)/r, \quad V(z) = (r_2 v_1 - r_1 v_2)/r, \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2$$

система уравнений бифуркации распадается на две подсистемы

$$(G_{13} l^2 V')' - r^2 (G_{12} l^2 + \sigma^0) V = 0, \quad l = l_1 = l_2, \quad ()' = \frac{d()}{dz}; \quad (3)$$

$$(G_{13} l^2 U')' - (E_{11} l^2 + \sigma^0) r^2 U + (G_{13} l_3 r w)' + E_{13} l_3 r w' = 0,$$

$$- (r E_{13} l^2 U)' - G_{13} l^2 U' + (E_{33} l_3^2 w')' - r^2 (G_{13} l_3^2 + \sigma^0) w = 0. \quad (4)$$

Критерием потери устойчивости является существование ненулевых ограниченных решений уравнения (3) или системы (4). В связи с этим возможны две различные формы потери устойчивости. Уравнение (3) описывает вращательные перемещения со смещениями в плоскостях $x_1 x_2$, а решениям системы (4) соответствуют перемещения в трех направлениях. Соответствующие формы потери устойчивости называем формами типа 1 и типа 2. Для формы типа 1 критическое значение $e^{(1)}$ параметра e при постоянных по z модулях (2) определяется из уравнения $G_{12} l^2 + \sigma^0 = 0$, а значение $e^{(2)}$ для формы типа 2 — из уравнения

$G_{13}l_3^2 + \sigma^0 = 0$ (как правило, равенство $E_{11}l^2 + \sigma^0 = 0$, которое также дает потерю устойчивости, наступает при больших деформациях e).

3. Сравнение критических деформаций $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$. Приведенные выше уравнения дают

$$e_n^{(1)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{G_{12}E_{33}}{E_{11}E_{33} - E_{13}^2}}, \quad e_n^{(2)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2G_{13}E_{33}}{(E_{11} + E_{12})E_{33} - 2E_{13}(G_{13} + 2E_{13})}}. \quad (5)$$

От модулей (2) зависит, какая из двух форм потери устойчивости реализуется раньше. В качестве примера зададим модули (2) трансверсально изотропного материала соотношениями [4]:

$$\begin{aligned} \frac{E_{11}}{E} &= \frac{(1 + \eta^2)(1 - 2\nu) + 2\eta((1 - \nu)^2 + \nu^2)}{2(1 + \eta)(1 - \nu^2)(1 - 2\nu)}, & \frac{E_{12}}{E} &= \frac{(1 + \eta^2)\nu(1 - 2\nu) + 2\eta\nu}{2(1 + \eta)(1 - \nu^2)(1 - 2\nu)}, \\ \frac{E_{13}}{E} &= \frac{2\eta\nu}{(1 + \eta)(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, & \frac{E_{33}}{E} &= \frac{2\eta(1 - \nu)}{(1 + \eta)(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ \frac{G_{12}}{E} &= \frac{1 + \eta}{4(1 + \nu)}, & \frac{G_{13}}{E} &= \frac{\eta}{(1 + \eta)(1 + \nu)}, \quad 0 < \eta \leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

причем параметр η описывает степень анизотропии. При $\eta = 1$ формулы (6) соответствуют изотропному материалу, а с уменьшением η степень анизотропии растет. Для материала (6) формулы (5) принимают вид:

$$e^{(1)} = 1 - \sqrt{\frac{1 + \nu}{2}}, \quad e^{(2)} = 1 - \sqrt{\frac{(1 - \eta)^2(1 + \nu)}{(1 + \eta^2)(1 + \nu) + \eta(2 - 6\nu)}}.$$

Видим, что параметр $e^{(1)}$ не зависит от степени анизотропии η , а $e^{(2)} \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$. Поэтому при малой анизотропии реализуется форма потери устойчивости типа 1, а при большой — типа 2. Например, при $\nu = 0.3$ форма типа 1 реализуется при $\eta > 0.172$.

4. Локализованная форма потери устойчивости типа 1. Пусть модули (2) являются гладкими функциями z . Пусть функция $e^{(1)}(z)$, определенная равенством (5), имеет минимум $e_*^{(1)}$ при $z = z_*$, причем $(e^{(1)})''(z_*) = a_1 > 0$. Тогда существуют решения уравнения (3), локализованные вблизи плоскости $z = z_*$ и удовлетворяющие условию затухания $V(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$.

Как показывает приведенный ниже анализ, критическая деформация убывает с ростом r , поэтому построим асимптотическое решение уравнения (3), считая, что $r \rightarrow \infty$. Асимптотические представления локализованных вблизи $z = z_*$ решений уравнения (3) и соответствующих собственных значений равны ($n = 0, 1, 2, \dots$) [6, 7]:

$$V_n(z) = \exp\{-\zeta^2/2\} (H_n(\zeta) + O(r^{-1/2})), \quad e_n^{(1)} = e_*^{(1)} + (n + 1/2)c_1 r^{-1} + O(r^{-2}), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{r} b_1(z - z_*), \quad b_1 = \sqrt{\frac{a_1 f_e}{g_1}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{a_1 g_1}{f_e}}, \quad f(e, z) = -\sigma^0 - l^2 G_{12}, \\ f_e &= \frac{\partial f}{\partial e}, \quad g_1 = l^2 G_{13} \quad \text{при} \quad e^{(1)} = e_*^{(1)}, \quad z = z_*. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $H_n(\zeta)$ — полином Эрмита. Нас интересует наименьшее собственное значение, поэтому в формулах (7) следует считать $n = 0$ и $H_0(\zeta) = 1$.

В качестве примера возьмем модули упругости в виде (6) и предположим, что коэффициент Пуассона ν зависит от z , а параметр η постоянен. Пусть

$$\nu(z) = \begin{cases} \nu_1, & |z| > z_1, \\ \nu_1 + (\nu_0 - \nu_1)(1 - (z/z_0)^2), & |z| \leq z_1, \end{cases} \quad \nu_0 > \nu_1, \quad \eta(z) = \eta_0.$$

Наиболее слабой будет плоскость $z_* = 0$ и формула (7) дает

$$e^{(1)} = 1 - \sqrt{\frac{1 + \nu_0}{2}} + \frac{\sqrt{\eta_0(\nu_0 - \nu_1)(1 - \nu_0)}}{2rz_1(1 + \eta_0)} + O((rz_1)^{-2}).$$

Графики функций $\nu(z)$ и $V(z)$ показаны на рис. 1.

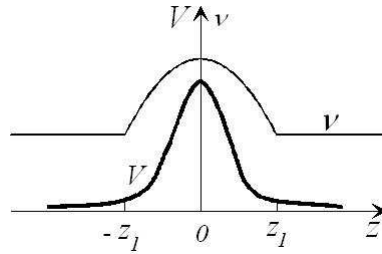


Рис. 1. Зависимости $\nu(z)$ и $V(z)$.

5. Локализованная форма потери устойчивости типа 1. Здесь анализ в значительной степени аналогичен выполненному в п. 4, поэтому остановимся лишь на некоторых отличиях. Как и в п. 4, считаем, что функция $e^{(2)}(z)$ имеет минимум $e_*^{(2)}$ при $z = z_*$. Асимптотическое решение системы (3) таково

$$\begin{aligned} w(z) &= \exp\{-\zeta^2/2\}(1 + O(r^{-1/2})), \quad U(z) = d_2(z - z_*) \exp\{-\zeta^2/2\}(1 + O(r^{-1/2})), \\ e^{(2)} &= e_*^{(2)} + c_2 r^{-1} + O(r^{-2}), \quad \zeta = \sqrt{r} b_2(z - z_*), \end{aligned} \quad (9)$$

где константы b_2, c_2, d_2 заданы явными выражениями, аналогичными (8).

Из вида уравнений (3) и (4) следует, что критическая нагрузка не зависит от волновых чисел r_1 и r_2 по отдельности, а зависит лишь от величины $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. Из формул (7) и (9) следует, что критическая нагрузка убывает с ростом r , т. е. уменьшением длины волны. Следовательно, потеря устойчивости происходит при минимально возможной длине волны и для ее определения следует использовать какие-то другие модели.

Приведем результаты численного эксперимента. Пусть упругие модули заданы соотношениями (6), причем

$$\eta(z) = \begin{cases} \eta_1, & |z| > z_1, \\ \eta_1 + (\eta_0 - \eta_1)(1 - (z/z_0)^2), & |z| \leq z_1, \end{cases} \quad \eta_0 = 0.1, \quad \eta_1 = 0.15, \quad \nu = 0.3. \quad (10)$$

Тогда $z_* = 0$, для принятых в (10) параметров потеря устойчивости происходит по форме типа 2. Разобьем промежуток $|z| \leq z_0$ на N равных частей и заменим

$N =$	11	21	51	101	201	501	1001
$r_* z_1 =$	3.8	7.6	13.5	20.4	31.3	55	87
$e_*^{(2)} =$	0.106	0.088	0.060	0.046	0.037	0.030	0.027

Таблица 1. Функции $e_*^{(2)}(N)$ и $r_*(N)$ для различных N .

гладкую функцию $\eta(z)$ ступенчатой аппроксимацией. Тогда оказывается, что при конечном r существует минимум

$$\min_r e^{(2)}(r, N) = e_*^{(2)}(N) \quad \text{при} \quad r = r_*(N).$$

В таблице 1 приведены значения функций $e_*^{(2)}(N)$ и $r_*(N)$ для ряда значений N . С ростом N величина $r_*(N)$ неограниченно возрастает, а величина $e_*^{(2)}(N)$ стремится к определенному пределу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 10-01-00244-а, 09-01-92002-НС-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
- [2] Морозов Н. Ф., Паужито М. В., Товстик П. Е. Устойчивость поверхностного слоя при термонагрузении // МГТ. 1998. № 1. С. 130–139.
- [3] Товстик П. Е. Объемная и поверхностная устойчивость трансверсально изотропного материала при сжатии // Вестник С.Петербургского ун-та. Сер. 1. 2010. №1.
- [4] Морозов Н. Ф., Товстик П. Е. О формах поверхностной устойчивости // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Казань. 2009. С. 276–279.
- [5] Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
- [6] Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 356 с.
- [7] Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.

Morozov N. F., Tovstik P. E. *Localized buckling modes of a compressed elastic media.* A transversely isotropic linearly elastic uniformly compressed media is studied. For the large enough compression the media loses its stability because the Hadamard inequality about a positive definiteness of an acoustical tensor is not fulfilled. If the elastic modules are constant then the buckling mode occupies all media. In the opposite case the buckling mode is localized near some plane. In this report by using asymptotic expansions the localized buckling mode is built and the corresponding critical compression is found.

РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО ТОЧКИ РЕЗОНАНСА RES 2 В ЗАДАЧЕ КУЭТТА–ТЕЙЛОРА

Овчинникова С. Н., Моршнева И. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Эта статья продолжает серию работ, посвященных бифуркации коразмерности 2 в динамических системах с цилиндрической симметрией (инвариантных относительно действия группы $SO(2) \times O(2)$). Системы с такой симметрией встречаются в различных задачах гидродинамики, нелинейной теории упругости, нелинейной электродинамики и т. д. В качестве примера выбрана задача Куэтта–Тейлора о течении жидкости между соосными бесконечными вращающимися цилиндрами. В данной статье изучается резонансная ситуация Res 2 (всего их семь), которая возникает, когда у нейтральных мод совпадают фазовые частоты и азимутальные квантовые числа, а осевые квантовые числа различны. Исследованы равновесия соответствующих фактор-систем (моторных подсистем). Равновесиям моторной подсистемы отвечают периодические и квазипериодические режимы амплитудной системы, которые при значениях параметров близких к критическим дают ведущие члены асимптотики периодических и квазипериодических режимов уравнений Навье–Стокса.

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя бесконечно длинными соосными твердыми цилиндрами радиусов r_1 , r_2 , вращающимися с угловыми скоростями Ω_1 , Ω_2 . Поля скорости и давления предполагаются периодическими вдоль общей оси цилиндров с заданным периодом $2\pi/\alpha$ (α — безразмерное осевое волновое число).

Безразмерные уравнения движения (уравнения Навье–Стокса) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + A\mathbf{v} &= -\nabla p - R_1 L(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — скорость течения, p — давление, r , θ , z — цилиндрические координаты, ось z направлена вдоль оси цилиндров, $R_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2 / \nu$ — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости, $d = \eta - 1$ — зазор между цилиндрами, $\eta = r_2 / r_1$ — отношение радиусов цилиндров, а выражения для дифференциальных операторов A и L см., например, в [1] (формулы (0.2)).

Система (1) имеет точное решение — течение Куэтта, удовлетворяющее условиям прилипания на стенках цилиндров. Нелинейная задача (1) и линеаризованная на течении Куэтта система Навье–Стокса обладают группой симметрии $\mathcal{G} = SO(2) \times O(2)$ и зависят от четырех параметров α , η , R_1 и R_2 , где $R_2 = \Omega_2 r_2^2 d^2 / \nu$ — второе число Рейнольдса. В силу симметрии относительно сдвигов вдоль и вращений вокруг общей оси цилиндров (оси z) собственные решения (нейтральные моды) линейной задачи устойчивости разыскиваются в виде $e^{i(\omega t - (k\alpha z + m\theta))} \varphi(r)$, где k — осевое, m — азимутальное квантовые числа (целые).

В четырехмерном пространстве параметров имеются такие критические значения параметров α , R_1 , R_2 и η , при которых существуют четыре независимые нейтральные моды:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= e^{i\omega_m t} \Phi_{0m}(r, \theta, z), & \Phi_2 &= e^{i\omega_n t} \Phi_{0n}(r, \theta, z), \\ \Phi_3 &= e^{i\omega_m t} \Phi_{1m}(r, \theta, z), & \Phi_4 &= e^{i\omega_n t} \Phi_{1n}(r, \theta, z),\end{aligned}\quad (2)$$

где $\Phi_{0m} = e^{-i(m\theta+k\alpha z)} \varphi_{0m}(r)$, $\Phi_{1m} = e^{-i(m\theta-k\alpha z)} \varphi_{1m}(r)$, $\Phi_{0n} = e^{-i(n\theta+l\alpha z)} \varphi_{0n}(r)$, $\Phi_{1n} = e^{-i(n\theta-l\alpha z)} \varphi_{1n}(r)$.

Рассматривается малая окрестность критических чисел Рейнольдса R_{1*} , R_{2*} при фиксированных α и η , состоящая из $R_1 = R_{1*} + k_1 \varepsilon^2$ и $R_2 = R_{2*} + k_2 \varepsilon^2$, где ε — вещественный малый параметр, а константы надкритичности k_1 , k_2 подчинены дополнительному условию $k_1^2 + k_2^2 = 1$. В этой окрестности решение задачи (1) разыскивается в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_{00} + \varepsilon(\Phi + \Phi^*) + \dots,$$

где опущены слагаемые степени 2 и выше по параметру ε , \mathbf{v}_{00} — вектор скорости течения Куэтта при критических значениях чисел Рейнольдса, верхний индекс * означает комплексное сопряжение, вектор-функция Φ является линейной комбинацией нейтральных мод (2)

$$\Phi = \xi_{0m}(\tau) \Phi_1 + \xi_{0n}(\tau) \Phi_2 + \xi_{1m}(\tau) \Phi_3 + \xi_{1n}(\tau) \Phi_4,$$

с неизвестными комплексными амплитудами $\xi_{0m}(\tau)$, $\xi_{1m}(\tau)$, $\xi_{0n}(\tau)$, $\xi_{1n}(\tau)$, зависящими от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$.

При малых ε с помощью теоремы о центральном многообразии или метода осреднения [2, 3] строится система комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд ξ_{0m} , ξ_{1m} , ξ_{0n} и ξ_{1n} .

Если выполняются резонансные соотношения $n = m$, $\omega_n = \omega_m$ и $l \neq 3k$ (случай Res 2), то система амплитудных уравнений имеет вид ([4])

$$\begin{aligned}\xi'_{0m} &= \xi_{0m}(\sigma + A|\xi_{0m}|^2 + B|\xi_{1m}|^2 + C|\xi_{0n}|^2 + D|\xi_{1n}|^2) + Q\xi_{1m}^* \xi_{0n} \xi_{1n}, \\ \xi'_{1m} &= \xi_{1m}(\sigma + B|\xi_{0m}|^2 + A|\xi_{1m}|^2 + D|\xi_{0n}|^2 + C|\xi_{1n}|^2) + Q\xi_{0m}^* \xi_{0n} \xi_{1n}, \\ \xi'_{0n} &= \xi_{0n}(\mu + P|\xi_{0m}|^2 + S|\xi_{1m}|^2 + U|\xi_{0n}|^2 + V|\xi_{1n}|^2) + F\xi_{0m} \xi_{1m} \xi_{1n}^*, \\ \xi'_{1n} &= \xi_{1n}(\mu + S|\xi_{0m}|^2 + P|\xi_{1m}|^2 + V|\xi_{0n}|^2 + U|\xi_{1n}|^2) + F\xi_{0m} \xi_{1m} \xi_{0n}^*.\end{aligned}\quad (3)$$

Точки резонанса Res 2 существуют и образуют в пространстве параметров однопараметрическое семейство. В каждой такой точке однозначно определяется осевое волновое число α . Результаты многочисленных расчетов точек Res 2 приведены в [4].

При всех значениях параметров у системы амплитудных уравнений (3) существует тривиальное решение, соответствующее течению Куэтта, асимптотически устойчивое в некоторой области на плоскости параметров надкритичности (k_1, k_2) . На этой плоскости существуют также области, где помимо тривиального могут существовать другие решения амплитудной системы.

Если перейти в (3) к полярным координатам, полагая

$$\xi_{0m} = r_0(\tau)e^{i\varphi_0(\tau)}, \quad \xi_{1m} = r_1(\tau)e^{i\varphi_1(\tau)}, \quad \xi_{0n} = \rho_0(\tau)e^{i\phi_0(\tau)}, \quad \xi_{1n} = \rho_1(\tau)e^{i\phi_1(\tau)},$$

то для модулей комплексных амплитуд r_0, r_1, ρ_0, ρ_1 (вещественных амплитуд), которые являются инвариантами группы симметрии \mathcal{G} , и фазового инварианта $\beta = -\varphi_0 - \varphi_1 + \phi_0 + \phi_1$ получается замкнутая система уравнений пятого порядка (фактор-система или моторная подсистема)

$$\begin{aligned} r'_0 &= r_0(\sigma_r + A_r r_0^2 + B_r r_1^2 + C_r \rho_0^2 + D_r \rho_1^2) + (Q_r \cos \beta - Q_i \sin \beta) r_1 \rho_0 \rho_1, \\ r'_1 &= r_1(\sigma_r + B_r r_0^2 + A_r r_1^2 + D_r \rho_0^2 + C_r \rho_1^2) + (Q_r \cos \beta - Q_i \sin \beta) r_0 \rho_0 \rho_1, \\ \rho'_0 &= \rho_0(\mu_r + P_r r_0^2 + S_r r_1^2 + U_r \rho_0^2 + V_r \rho_1^2) + (F_r \cos \beta + F_i \sin \beta) r_0 r_1 \rho_1, \\ \rho'_1 &= \rho_1(\mu_r + S_r r_0^2 + P_r r_1^2 + V_r \rho_0^2 + U_r \rho_1^2) + (F_r \cos \beta + F_i \sin \beta) r_0 r_1 \rho_0, \\ r_0 r_1 \rho_0 \rho_1 \beta' &= (-2(\sigma_i - \mu_i) + X(r_0^2 + r_1^2) + Y(\rho_0^2 + \rho_1^2)) r_0 r_1 \rho_0 \rho_1 - \\ &\quad - (Q_i \cos \beta + Q_r \sin \beta) \rho_0^2 \rho_1^2 (r_0^2 + r_1^2) - - (F_i \cos \beta - F_r \sin \beta) r_0^2 r_1^2 (\rho_0^2 + \rho_1^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $X = -A_i - B_i + P_i + S_i$, $Y = -C_i - D_i + U_i + V_i$, нижний индекс r означает действительную часть, а индекс i — мнимую часть комплексного числа. Коэффициенты этой системы выражаются через нейтральные моды Φ_{jp} ($j = 0, 1; p = m, n$), собственные решения сопряженной задачи и решения неоднородных систем, правые части которых зависят от тех же нейтральных мод. Если найдено некоторое решение моторной подсистемы (4), то соответствующие вещественным амплитудам фазы легко вычисляются.

Всякое равновесие моторной подсистемы (4) вместе с проходящей через него орбитой действия группы симметрии порождает периодическое или квазипериодическое движение амплитудной системы.

Перечислим решения, отвечающие равновесиям моторной подсистемы, которые могут существовать в малой окрестности точки резонанса Res 2, и условия их существования и устойчивости.

1. Инверсионно-связанные пары спиральных волн. Если выполнено условие $\sigma_r/A_r < 0$, то в окрестности точки Res 2 существует пара инверсионно-связанных спиральных m -волн с осевым квантовым числом k и амплитудами $\xi_{0m} = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\xi_{1m} = \xi_{0n} = \xi_{1n} = 0$ и $\xi_{1m} = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\xi_{0m} = \xi_{0n} = \xi_{1n} = 0$, где $r_0 = \sqrt{-\sigma_r/A_r}$, $\varphi_0 = c_m \tau + \psi_1$, $c_m = \sigma_i + A_i r_0^2$, ψ_1 — произвольная постоянная.

Каждой из этих спиральных m -волн отвечает периодический по t (с периодом $2\pi/\omega_m$) режим системы Навье–Стокса. В физическом пространстве их вектор скорости зависит от времени лишь посредством переменной $\zeta = \omega_m t - m\theta \pm k\alpha z$.

Если $A_r > 0$, то спиральные m -волны неустойчивы. При $A_r < 0$ этот режим устойчив, если $\sigma_r = \sigma_{1r} k_1 + \sigma_{2r} k_2 > 0$, $A_r - B_r > 0$, $\mu_r A_r - \sigma_r S_r > 0$, $\mu_r A_r - \sigma_r P_r > 0$.

Если выполнено условие $\mu_r/U_r < 0$, то в окрестности точки Res 2 существует пара инверсионно-связанных спиральных m -волн с осевым квантовым числом l и амплитудами $\xi_{0m} = \xi_{1m} = \xi_{1n} = 0$, $\xi_{0n} = \rho_0 e^{i\psi_0}$ и $\xi_{0m} = \xi_{1m} = \xi_{0n} = 0$, $\xi_{1n} = \rho_0 e^{i\psi_0}$, где $\rho_0 = \sqrt{-\mu_r/U_r}$, $\psi_0 = c_n \tau + \psi_2$, $c_n = \mu_i + U_i \rho_0^2$, ψ_2 — произвольная постоянная. Условия существования и устойчивости соответствующего $2\pi/\omega_m$ -периодического по t режима, зависящего от времени посредством переменной $\zeta = \omega_m t - m\theta \pm$

$l\alpha z$, имеют вид: $U_r < 0$, $\mu_r = \mu_{1r}k_1 + \mu_{2r}k_2 > 0$, $U_r - V_r > 0$, $\sigma_r U_r - \mu_r D_r > 0$, $\sigma_r U_r - \mu_r C_r > 0$.

2. Азимутальные волны. Если выполняется условие $\sigma_r/(A_r + B_r) < 0$, то существует азимутальная m -волна с осевым квантовым числом k и амплитудами $\xi_{0m} = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\xi_{1m} = r_0 e^{i\varphi_1}$, $\xi_{0n} = \xi_{1n} = 0$, где $r_0 = \sqrt{-\sigma_r/(A_r + B_r)}$, $\varphi_0 = c_m \tau + \psi_0$, $\varphi_1 = c_m \tau + \psi_1$, $c_m = \sigma_i - \sigma_r(A_i + B_i)/(A_r + B_r)$, ψ_0, ψ_1 — произвольные постоянные. Этому решению отвечает инверсионно-симметричный автоколебательный режим системы Навье–Стокса — нелинейная смесь спиральных m -волн, бегущих навстречу друг другу вдоль оси цилиндров.

Если $A_r + B_r > 0$, то такие азимутальные m -волны неустойчивы. При $A_r + B_r < 0$ азимутальная m -волна устойчива, если выполняются условия $\sigma_r > 0$, $A_r - B_r < 0$, $\mu_r(A_r + B_r) - \sigma_r(P_r + S_r + F_r) > 0$ и $\mu_r(A_r + B_r) - \sigma_r(P_r + S_r - F_r) > 0$.

Если выполняется условие $\mu_r/(U_r + V_r) < 0$, то существует азимутальная m -волна с осевым квантовым числом l и амплитудами $\xi_{0m} = \xi_{1m} = 0$, $\xi_{0n} = \rho_0 e^{i\phi_0}$, $\xi_{1n} = \rho_0 e^{i\phi_1}$, где $\rho_0 = -\mu_r/(U_r + V_r)$, $\phi_0 = c_n \tau + \psi_0$, $\phi_1 = c_n \tau + \psi_1$, $c_n = \mu_i - \mu_r(U_i + V_i)/(U_r + V_r)$, ψ_0, ψ_1 — произвольные постоянные. Этому решению отвечает инверсионно-симметричный автоколебательный режим системы Навье–Стокса — нелинейная смесь спиральных m -волн, бегущих навстречу друг другу вдоль оси цилиндров.

При $U_r + V_r < 0$ такая азимутальная m -волна устойчива, если выполняются условия $\mu_r > 0$, $U_r - V_r < 0$, $\sigma_r(U_r + V_r) - \mu_r(C_r + D_r + Q_r) > 0$ и $\sigma_r(U_r + V_r) - \mu_r(C_r + D_r - Q_r) > 0$.

3. Инверсионно-связанные пары двойных спиральных волн. Если положительны правые части выражений

$$r_0^2 = \frac{\mu_r D_r - \sigma_r U_r}{A_r U_r - D_r S_r}, \quad \rho_1^2 = \frac{\sigma_r S_r - \mu_r A_r}{A_r U_r - D_r S_r},$$

то существует пара инверсионно-связанных двойных спиральных волн с амплитудами $\xi_{0m} = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\xi_{1n} = \rho_1 e^{i\phi_1}$, $\xi_{1m} = \xi_{0n} = 0$ и $\xi_{1m} = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\xi_{0n} = \rho_1 e^{i\phi_1}$, $\xi_{0m} = \xi_{1n} = 0$, где $\varphi_0 = c_m \tau + \psi_1$, $\phi_1 = c_n \tau + \psi_2$, $c_m = \sigma_i + A_i r_0^2 + D_i \rho_1^2$, $c_n = \mu_i + S_i r_0^2 + U_i \rho_1^2$, ψ_1 и ψ_2 — произвольные постоянные. Каждому из таких решений отвечает смешанный режим, представляющий собой нелинейную смесь спиральных m -волн, бегущих вдоль оси цилиндров z навстречу друг другу, и зависящих от времени посредством переменных $\zeta = \omega_m t - m\theta \mp k\alpha z$ и $\zeta_1 = \omega_m t - m\theta \pm l\alpha z$, соответственно.

Если $A_r U_r - D_r S_r < 0$, то двойные спиральные волны неустойчивы в области существования. Если же $A_r U_r - D_r S_r > 0$, то они существуют в области на плоскости (k_1, k_2) , где выполняются условия $\mu_r D_r - \sigma_r U_r > 0$ и $\sigma_r S_r - \mu_r A_r > 0$. Для их устойчивости требуется, чтобы были отрицательны вещественные части собственных значений матрицы четвертого порядка, элементы которой выражаются через коэффициенты амплитудной системы, фазовый инвариант $\beta = -\varphi_0 + \phi_1$ и константы надкритичности. Условия существования и устойчивости двойных спиральных волн можно проверить численно для фиксированных значений k_1, k_2 .

Возможно также существование ещё одной пары инверсионно-связанных двойных спиральных волн с амплитудами $\xi_{0m} = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\xi_{0n} = \rho_0 e^{i\phi_0}$, $\xi_{1m} = \xi_{0n} = 0$ и

$\xi_{1m} = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\xi_{1n} = \rho_0 e^{i\phi_0}$, $\xi_{0m} = \xi_{1n} = 0$. Условия их существования и устойчивости аналогичны условиям для первого семейства, надо только заменить ρ_1 на ρ , ϕ_1 на ϕ_0 , а C и D на P и S соответственно. Каждому из таких решений отвечает смешанный режим, представляющий собой нелинейную смесь спиральных m -волн, бегущих вдоль оси цилиндров z в одном направлении, и зависящих от времени посредством переменных $\zeta = \omega_m t - m\theta \mp k\alpha z$ и $\zeta_1 = \omega_m t - m\theta \mp l\alpha z$ соответственно.

4. Суперпозиция азимутальных волн. При выполнении некоторого соотношения для фазового инварианта $\beta = -2(\varphi_0 - \phi_0)$ и условий положительности квадратов вещественных амплитуд возможно существование равновесия, которому отвечает смешанный режим (суперпозиция азимутальных волн с различными осевыми квантовыми числами), вектор скорости которого есть 2π -периодическая функция переменных $\zeta = \omega_m t - m\theta - k\alpha z$, $\zeta_1 = \omega_m t - m\theta + k\alpha z$, $\zeta_2 = \omega_m t - m\theta - l\alpha z$, $\zeta_3 = \omega_m t - m\theta + l\alpha z$. Область существования и устойчивости этого режима изучается численно.

5. Режимы, отвечающие равновесиям общего положения. Моторная подсистема может иметь равновесия, у которых все амплитуды отличны от 0. Их приходится находить численно. Таким решениям отвечают нестационарные квазипериодические режимы системы Навье–Стокса.

Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант № 2.1.1/554).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И., Овчинникова С. Н. Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта–Тейлора. I. Нерезонансный случай // Деп. в ВИНТИ 5.04.2005, № 458-B2005, 33 с.
- [2] Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Шестой все-союзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Аннотации докладов. С. 661.
- [3] Chossat P., Demay Y., Iooss G. Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette-Taylor // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. pp. 213–248.
- [4] Юдович В. И., Овчинникова С. Н. Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта–Тейлора. II. Резонансы Res 1, Res 2 // Деп. в ВИНТИ 17.01.2006, №47-B2006, 32 с.

Ovchinnikova S. N., Morshneva I. V. *Flow regimes near point of Res 2 resonance in the Couette–Taylor problem.* Res 2 situation (there are seven possible resonances) occurs in the point of intersection of bifurcations when the neutral modes' frequencies and azimuthal quantum numbers equal and axial quantum numbers are not equal. Stationary solutions of corresponding «factor-systems» are studied. They correspond to periodic and quasiperiodic regimes of amplitude systems, which produce the main part of asymptotic expression of corresponding periodic and quasiperiodic regimes of Navier–Stokes system if the parameters are near their critical values.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА В РУСЛОВЫХ ПОТОКАХ: ПРОБЛЕМЫ И ПОДХОДЫ

Надолин К. А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе обсуждаются особенности распространения примеси в протяженных русловых потоках и возникающие в связи с этим проблемы. Рассматриваются модельные уравнения, которые описывают течение в русловых потоках как пространственно трехмерный процесс, при этом они существенно проще полных трехмерных уравнений, а в некоторых случаях — и двумерных.

1. Массоперенос в русловых потоках. Классификация потоков.

Моделирование массопереноса в русловых потоках на основе полных уравнений весьма затруднительно. Поэтому необходимо привлекать математические модели упрощенно, но адекватно описывающие процесс.

В основу предлагаемого подхода к выводу модельных уравнений положен тот факт, что русловые потоки характеризуются относительно малой глубиной течения по сравнению с его шириной, а также значительной протяженностью: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от 0.1 до 0.005 [1]. Т.е. упрощение модели и понижение ее размерности может быть основано на методе малого параметра, связанного с геометрией области течения.

Естественные водотоки всегда являются турбулентными, поэтому любая, даже самая упрощенная, математическая модель должна учитывать турбулентность течения. Однако по ряду причин (низкая точность измерений, многообразие влияющих факторов, недостаточность экспериментальных данных и т.п.) можно ограничиться простейшими способами учета турбулентности. При этом важно иметь возможность калибровки модели по имеющимся данным наблюдений.

В работе [2] представлена методика приведения уравнения конвективной диффузии для пассивной примеси и уравнений Рейнольдса для несжимаемой жидкости, замкнутых на основе гипотезы Буссинеска, к безразмерному виду, содержащему параметры мелководности и протяженности потока. Исходя из соотношения этих параметров предложена классификация потоков, включающая 6 типов: мелкий протяженный; очень мелкий протяженный; мелкий сильно протяженный; мелкий широкий; глубокий протяженный; существенно трехмерный поток.

Для моделирования течения и массопереноса предлагается использовать уравнения для старших членов асимптотического разложения неизвестных величин в ряды по параметру мелководности (или протяженности), который считается малым. Дальнейшее относится к первым четырем типам потоков, гидродинамические характеристики которых определяются из решения одномерных задач. Заметим, что глубокий протяженный поток рассматривался в [3].

2. Редуцированные модельные уравнения.

Редуцированная математическая модель перемешивания примеси для первых четырех типов потоков в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \lambda c, \\ c|_{t=0} = c^0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = \pi_0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь c — концентрация примеси; u , v и w — продольная, поперечная и вертикальная компоненты вектора скорости; D и λ — параметры турбулентной диффузии и распада вещества. Известные функции $c^0(x, y, z)$ и $\pi_0(t, y, z)$ задают начальное распределение концентрации и его приток через входное сечение рассматриваемого участка, соответственно. Русло потока описывает уравнение $z = h(x, y)$, где $h(x, y)$ — известная функция, а свободную границу — уравнение $z = \xi(t, x, y)$, где $\xi(t, x, y)$ — неизвестная функция.

Также для первых четырех типов потоков совпадают модельные уравнения для продольной компоненты скорости и давления, которые при отсутствии поверхностных внешних сил имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -GI, \quad u|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = GRe^{-1}, \quad p|_{z=\xi} = 0 \quad (2)$$

Здесь ν — турбулентная вязкость, G — гравитационный параметр, I — уклон потока, Re — число Рейнольдса.

Решение задачи (2) выражается через функцию возвышения свободной поверхности $\xi(t, x, y)$ и имеет вид

$$u = GI (J_2 - \xi J_1), \quad p = GRe^{-1}(z - \xi) \quad (3)$$

где величины $J_1(x, y, z)$ и $J_2(x, y, z)$ следует считать известными функциями, вид которых будет указан ниже. Как и следовало ожидать, давление в потоке оказывается распределено по гидростатическому закону.

Для поперечной компоненты скорости для различных типов потоков имеем разные модельные уравнения. В случае мелкого протяженного потока имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = Re \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0 \quad (4)$$

Решение задачи (4) выражается через функцию возвышения свободной поверхности $\xi(t, x, y)$ аналогично (3)

$$v = G \frac{\partial \xi}{\partial y} (J_2 - \xi J_1) \quad (5)$$

В случаях очень мелкого протяженного и мелкого широкого потоков ставится краевая задача

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad v|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0, \quad (6)$$

решение которой тривиально

$$v = 0 \quad (7)$$

Для поперечной компоненты скорости мелкого сильно протяженного потока имеем модельные уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -G \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y}, \quad v|_{z=h} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

где $\tilde{\xi}$ — поправка к функции возвышения свободной поверхности ξ .

Решение задачи (8) имеет вид

$$v = G \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} (J_2 - \xi J_1) \quad (9)$$

Поперечная скорость потока определяется из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad w|_{z=h} = 0 \quad (10)$$

и имеет вид, соответственно

– для мелкого протяженного потока

$$w = G \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) \quad (11)$$

– для очень мелкого протяженного и мелкого широкого потоков

$$w = GI \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) \quad (12)$$

– для мелкого сильно протяженного потока

$$w = G \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} \right) \right) \quad (13)$$

В формулах (11)–(13) и выше обозначено

$$J_1 = \int_z^{h(x,y)} \frac{d\tau}{\nu}, \quad J_2 = \int_z^{h(x,y)} \frac{\tau d\tau}{\nu}, \quad J_3 = \int_z^{h(x,y)} J_1 d\tau, \quad J_4 = \int_z^{h(x,y)} J_2 d\tau. \quad (14)$$

Поскольку турбулентная вязкость ν согласно гипотезе Буссинеска должна быть задана, величины $J_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3, 4$ следует считать известными функциями.

Таким образом, давление и компоненты скорости (3), (5), (7), (9), (11)–(13) выражаются через возвышение свободной поверхности, которое должно определяться из кинематического краевого условия соответствующей модели потока.

Для мелкого протяженного потока имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = G \left[I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + (J_4 - \xi J_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right] \quad (15) \end{aligned}$$

Для очень мелкого протяженного и мелкого широкого потоков имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = GI \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (16)$$

Для мелкого сильно протяженного потока имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = G \left[I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} \right) \right] \quad (17)$$

при дополнительном условии

$$I \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J_4}{\partial y} - \xi \frac{\partial J_3}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial J_2}{\partial y} - \xi \frac{\partial J_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} \right) = 0 \quad (18)$$

В формулах (15)–(18) функции $J_i, i = 1, 2, 3, 4$ и их производные вычислены на свободной границе (т. е. при $z = \xi$).

3. Анализ и обсуждение редуцированных моделей.

Обсуждая особенности предлагаемых редуцированных моделей русловых потоков, обратим внимание на следующие моменты. Во-первых, хотя задача определения поля скорости не связана с задачей определения поля концентрации (т. н. «пассивная примесь»), они согласованы по точности приближения, что отражается в учете в уравнении (1) диффузии вещества лишь по вертикальному направлению.

Во-вторых, для всех типов потоков продольная скорость определяется из единой краевой задачи. Заметим, что для ответа на многие практически важные вопросы (например, определение расхода для потока или момента достижения примесью заданного сечения русла), требуется знание лишь продольной скорости. Пространственно двумерное моделирование означает выбор варианта очень мелкого протяженного или мелкого широкого потоков, при этом поперечная координата входит в уравнения как параметр. Последнее обстоятельство позволяет применить простой способ расщепления трехмерной задачи на двумерные по продольным сечениям, что может быть удобно при использовании параллельных вычислений.

В-третьих, модельные уравнения позволяют полуэмпирически учитывать турбулентность потока, выбирая в формулах (14) вязкость $\nu(x, y, z)$ исходя из соответствия получаемой скорости имеющимся экспериментальным данным. При этом вид функции $\nu(x, y, z)$ может быть достаточно произвольным (требуется лишь обращение в единицу на поверхности потока и убывание (вместе со скоростью) по направлению ко дну). Вместе с тем, при $\nu \equiv 1$ результаты должны соответствовать ламинарному течению.

Поскольку определение гидродинамических полей сводится к нахождению функции возвышения свободной поверхности (и ее возмущения), важно установить, можно ли предполагать свободную поверхность потока стационарной и плоской. Общий ответ оказывается отрицательным.

Действительно, при $\xi \equiv 0$ из (15) и (16) имеем

$$GI \frac{\partial J_4}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Это возможно только при определенных условиях и геометрии русла, например, при отсутствии уклона ($I = 0$). Другой пример — ламинарный поток постоянной глубины в плоском канале или в канале прямоугольного сечения. В этом случае в формулах (14) надо считать $h = \text{const}$ и $\nu \equiv 1$, откуда $J_4|_{z=0} = 1/2h^3 = \text{const}$ и, следовательно, (19) выполнено.

Для мелкого сильно протяженного потока при $\xi \equiv 0$ из (17) имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(J_4 \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} \right) = -I \frac{\partial J_4}{\partial x}$$

при этом условие (18) выполняется автоматически.

Таким образом, задача нахождения свободной границы является основной для определения гидродинамики потока в рамках каждой модели. Для ее решения требуется задать начальную форму свободной поверхности, а также граничное условие во входном створе $x = 0$ и на берегах потока, которые могут быть либо фиксированными и заданными, либо должны определяться из условия

$$h(x, y) - \xi(x, y, t) = 0,$$

т. е. являются нестационарными и неизвестными.

Работа выполнена при финансовой поддержке АБЦП МО РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (грант РНП.2.2.1.1/7176).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Великанов М.А. Динамика русловых потоков. Т.1. Структура потока. М.: ГТТИ, 1954. 323 с.
- [2] Надолин К. А. Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 2. С. 14–28.
- [3] Надолин К.А. Редуцированная математическая модель переноса вещества в глубоком протяженном русловом потоке // Тр. XII Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону, 1-5 дек. 2008 г. — Ростов-н/Д: Изд. «ЦВВР», 2009. С. 133–138.

Nadolin K. A. *Issues and Approaches in Bed-Streams Mass Transport Modeling.* In the study the admixture transport specificities in lengthy bed-streams are discoursed together with some connected problems. The model equations that describe bed-stream flow as a 3D phenomenon are under consideration but they are more simple then general 3D or 2D (in some cases) equations.

ФОРМИРОВАНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ЗОН НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ГЛУБОКИХ СКВАЖИН В МАССИВАХ ГОРНЫХ ПОРОД

Назарова Л. А.* , Назаров Л. А.* , Эпов М. И.** , Ельцов И. Н.**

* *Институт горного дела СО РАН, Новосибирск*

** *Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, Новосибирск*

Построены модели процессов возникновения и эволюции зон возможных разрушений в окрестности глубоких скважин. Деформирование и разрушение среды описывались упругопластической моделью с дилатансией. Реализация модели осуществлялась методом конечных элементов с использованием оригинального кода. Предложена эффективная схема для расчета геомеханических полей в объектах, линейные размеры которых различаются на несколько порядков. Численные эксперименты показали: 1) в неравнокомпонентном поле внешних напряжений незначительное уменьшение прочностных характеристик среды может привести к кратному увеличению размеров зон возможных разрушений; 2) в окрестности скважины могут возникать необратимые деформации удлинения, вызывающие увеличение проницаемости приконтурной зоны на 5–8%; 3) начиная с определенной глубины впереди забоя скважины существует зона разрушений, которая с одной стороны ускоряет процесс бурения, а с другой — может стать причиной отклонения скважины от заданной траектории.

Введение. Оценка устойчивости призабойной зоны, обоснование способа крепления, интерпретация данных электрического и акустического каротажа — вот далеко не полный перечень проблем, для решения которых необходима информация о геомеханических полях в окрестности добычных скважин, достигающих глубин 4–5 км. Несмотря на то, что бурение ведется в режиме репрессии, в окрестности скважин возникают области концентрации напряжений, которые могут стать причиной разрушения прискважинной зоны. Из решения задачи Кирша [1] можно найти распределение наибольших (кольцевых) напряжений на контуре скважины круглого сечения

$$\Sigma_{\theta\theta} = [q_x + q_y - 2(q_x - q_y) \cos 2\theta]L(z) - L_0(z), \quad (1)$$

где $L(z) = \rho g z$ — литостатическое давление на глубине z ; $L_0(z) = \rho_0 g z$; ρ и ρ_0 — плотности породы и буровой жидкости; q_x и q_y — коэффициенты бокового отпора, характеризующие величину горизонтальных напряжений в естественном поле. Из (1), в частности, следует, что при $q_x = 0.5$ и $q_y = 0.33$ (типичные значения при сбросовом геодинамическом режиме [2]), $\rho = 2800$ кг/м³ и $\rho_0 = 1000$ кг/м³ максимальное значение $\Sigma_{\theta\theta}$ равно 114 МПа, что сравнимо с пределом прочности на сжатие многих горных пород.

В настоящей работе рассмотрены двумерные задачи возникновения и эволюции зон возможных разрушений в окрестности скважин в процессе ее проведения.

Модель среды, постановки и метод решения. Процесс деформирования среды описывается упругопластической дилатантной моделью [3], включающей:

уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \Sigma + \Phi = 0, \tag{2}$$

соотношения Коши для малых деформаций

$$D = 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \tag{3}$$

закон Гука для упругих областей

$$\Sigma = \lambda I_1(D^e)E + 2\mu D^e, \tag{4}$$

критерий Кулона-Мора

$$\sqrt{2J_2(\Sigma)} = I_1(\Sigma) \tan \varphi + 2C, \tag{5}$$

и дилатансионное соотношение

$$I_1(\Delta D^p) = \alpha \sqrt{J_2(\Delta D^p)} \tag{6}$$

для пластических областей (зон необратимых деформаций), причем

$$\Delta D = \Delta D^e + \Delta D^p. \tag{7}$$

В (2)–(7) Σ , D и E — тензоры напряжений, деформаций и единичный; Φ и \mathbf{u} — векторы плотности массовых сил и смещений; I_1 — первый инвариант тензора; J_2 — второй инвариант девиатора; λ и μ — параметры Ламе; φ — угол внутреннего трения; C — сцепление; α — параметр дилатансии; индексы «e» и «p» означают упругую и пластическую составляющие; Δ — приращение.

Рассмотрены двумерные задачи, расчетные области и граничные условия для которых представлены на рис. 1: горизонтальное сечение скважины в неравнокомпонентном поле внешних напряжений ($q_x \neq q_y$, $\Phi = 0$, рис. 1а) и вертикальное сечение (осевая симметрия, $q_x = q_y$, $\Phi_r = \Phi_\theta = 0$, $\Phi_z = \rho g$, рис. 1б). Система (2)–(7) решалась методом конечных элементов (фрагмент дискретизации показан на рис. 1а) с использованием оригинального кода [4].

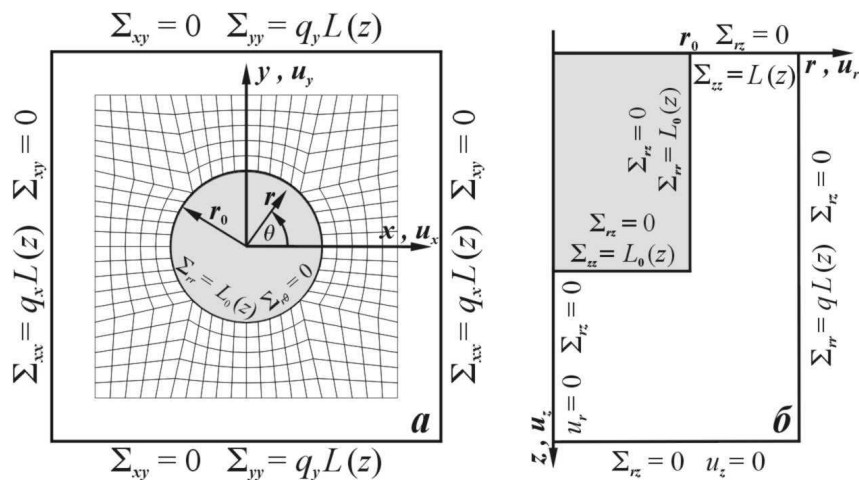


Рис. 1. Расчетные области и граничные условия.

Остановимся подробнее на особенностях реализации алгоритма для второй постановки. Протяженность скважины, как правило, на 3–4 порядка превышает ее радиус r_0 . Для достижения приемлемой точности линейные размеры конечных элементов не должны сильно различаться, поэтому использование традиционного способа описания процесса пошагового продвижения забоя методом начальных напряжений [5] требует несоразмерных вычислительных ресурсов. Здесь предложен иной подход. На основе численных экспериментов оценены размеры «области влияния» зон необратимых деформаций, возникающих в окрестности забоя скважины (при выбранном диапазоне изменения прочностных характеристик среды φ , C и α они оказались равными $20r_0$ и $40r_0$ по вертикали и горизонтали). Теперь конфигурация и дискретизация расчетной области (рис. 1б) остаются неизменными, а продвижение забоя вниз имитируется «смещением вверх» свойств среды, зон необратимых деформаций и соответствующим изменением граничных условий.

Анализ результатов расчетов. Были приняты следующие значения физических свойств среды, типичные для осадочных пород: $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 25 \text{ ГПа}$, $\mu = 20 \text{ ГПа}$, $\varphi = 20^\circ\text{--}30^\circ$, $C = 8\text{--}15 \text{ МПа}$, $\alpha \in [-0.1, 0.1]$. Оказалось, что незначительное уменьшение угла внутреннего трения φ или сцепления C может привести к существенному увеличению размеров зон разрушений F . Численные эксперименты показали, что в неравнокомпонентном поле внешних напряжений в окрестности скважины могут возникать необратимые радиальные D_{rr} и кольцевые $D_{\theta\theta}$ деформации удлинения. Если предположить, что проницаемость k среды обеспечивается хаотически распределенными микротрещинами со средним раскрытием h , то, поскольку $k \sim h^3$, можно оценить относительное изменение k , вызванное такими деформациями. Например, для проницаемости в радиальном направлении $\Delta\bar{k}_r = \Delta k_r/k_r = (1 + D_{\theta\theta})^3 - 1$.

На рис. 2 представлены распределения $\Delta\bar{k}_r$ и $\Delta\bar{k}_\theta$ ($z = 4 \text{ км}$, $q_x = 1$, $q_y = 0.33$, $\varphi = 25^\circ$, $C = 14 \text{ МПа}$ и $\alpha = -0.1$, черная ломаная линия — контур зоны F), из которых видно, что изменение проницаемости непосредственно вблизи контура скважины может достигать 5–8%.

Эволюцию зон необратимых деформаций в окрестности скважины при увеличении ее глубины иллюстрирует рис. 3. Следует отметить, что радиальные раз-

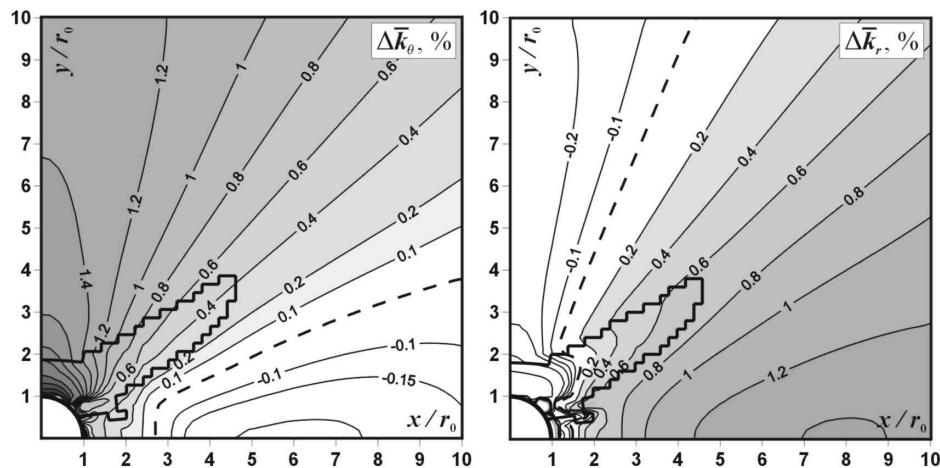


Рис. 2. Изолинии относительного изменения проницаемости.

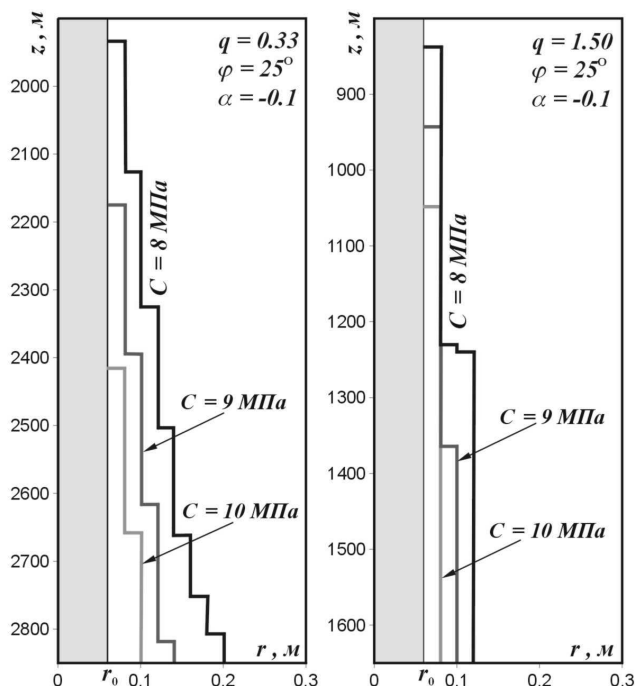


Рис. 3. Эволюция зон необратимых деформаций при продвижении скважины.

меры F в случае $q_x = q_y$ значительно меньше, чем при $q_x \neq q_y$. При взбросовом геодинамическом режиме ($q < 1$) разрушение начинается на меньших глубинах, нежели при сбросовом ($q > 1$).

Аппроксимируя контур F прямой линией, можно оценить порядок величины углового коэффициента 10^{-4} , значение которой уменьшается с ростом прочности среды и коэффициента бокового отпора.

На рис. 4 показаны контуры зон F в окрестности забоя при различных значениях сцепления: начиная с определенной глубины (зависящей от прочностных свойств пород) впереди забоя существует зона разрушений, возникновение которой

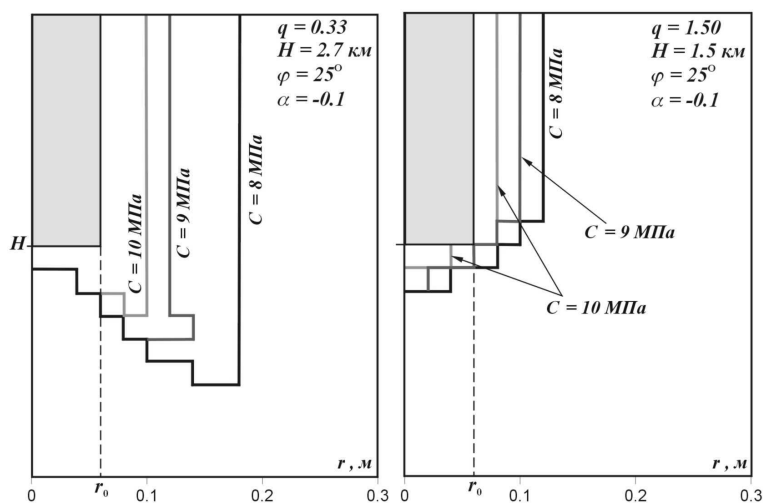


Рис. 4. Конфигурация зон возможных разрушений в окрестности забоя скважины.

вызвано нарушением естественного равновесия среды и последующим перераспределением напряжений.

Такие зоны с одной стороны ускоряют процесс бурения, а с другой — могут стать причиной отклонения скважины от заданной траектории. Этот факт следует учитывать при планировании и проведении буровых работ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-05-00736) и Интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 60.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимошенко С. П. Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
- [2] Назарова Л. А. Использование сейсмоструктурных данных для оценки полей напряжений и деформаций земной коры // ФТПРПИ. 1999. № 1. С. 28–36.
- [3] Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 232 с.
- [4] Назарова Л. А., Назаров Л. А., Козлова М. П. Роль дилатансии в формировании и эволюции зон дезинтеграции в окрестности неоднородностей в породном массиве // ФТПРПИ. 2009. № 5. С. 3–12.
- [5] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

Nazarova L. A., Nazarov L. A., Erov M. I., Eltsov I. N. *Formation and evolution of irreversible deformation zones near deep wells in rocks.* The built-up elasto-plastic model with dilatancy describes formation and development of various deformation and fracture zones in the vicinity of deep wells in a rock mass. The model implementation involves the finite element method by an original code. The offered scheme allows efficient calculation of geomechanical fields in objects differing by a few orders in linear size. The numerical experiments showed that a slight strength loss in a medium in the unequal-component natural stress field can result in a dramatic increase of probable failure areas; irreversible extensive strains can arise in the vicinity of deep wells and cause raise of permeability of the well peripheral zone by 5 to 8%; starting from a certain depth, a fracture zone comes into existence in front of the well bottom, which accelerates boring, on the one hand, whereas on the other, it can cause the well deviation from the assigned trajectory.

МИКРОСТРУКТУРНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЬЕЗОКОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО МЕТОДАМ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Наседкин А. В., Рыбьянец А. Н.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается комплекс вопросов, связанных с исследованием технологии получения и анализа эффективных свойств поликристаллических пьезокомпозиционных материалов на примере композита ЦТС или PZT/ α – Al_2O_3 (корунд). Для исследования эффективных свойств поликристаллических композиционных материалов развивается подход, основанный на методах эффективных модулей, моделировании представительных объемов и применении конечно-элементных технологий.

1. Введение. За последние годы достигнут значительный прогресс в улучшении механических свойств керамических материалов с использованием технологии керамических композитов. Конструкционные керамические композиты с улучшенными механическими и термическими свойствами, включая металлокерамические нанокompозиты $\text{Ti}_3\text{Al-SiC}$, Fe-TiC , $\text{Al-Al}_3\text{Ti-TiB}_2\text{-Al}_2\text{O}_3$, керамические композиты $\text{ZrO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3$, $\text{ZrO}_2\text{-TiB}_2$, $\text{Bi}_2\text{CuO}_4\text{-Bi}_2\text{O}_3$, Si/SiC , $\text{Si}_3\text{N}_4\text{-TiN}$, $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{SiC}$, композиты керамика – стекло, а также упрочненные волокнами композиты с керамической матрицей C/SiC , находят широкое применение в аэрокосмической, автомобильной и энергетической промышленности. В работах [1, 2] также было показано, что малые добавки нанопорошков титаната бария и неодима, танталата лития, а также других сегнето/пьезоэлектрических материалов в Al_2O_3 и другие конструкционные керамики повышают ударную вязкость и прочность керамических композитов в несколько раз.

Функциональные керамические композиты в отличие от конструкционных исследованы значительно меньше и их использование в электронной промышленности весьма ограничено. Сравнительно недавно эффективные механизмы упрочнения конструкционных керамик были перенесены в область функциональных керамик для улучшения их механических и электрических свойств. За последние несколько лет также были предложены новые конструкционные идеи в области функциональной керамики [3, 4].

Ниже на основе предложенной авторами ранее концепции микроструктурного конструирования поликристаллических композиционных материалов [5] представлены технология получения и методы моделирования керамических композитов ЦТС/ α - Al_2O_3 . Получены элементы пьезоактивных композитов с объемной концентрацией α - Al_2O_3 от 0 до 60 об. %. Выполнены измерения и вычислительные эксперименты по определению эффективных упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических параметров, а также проведены микроструктурные исследования полученных керамических композитов.

2. Технология получения. В качестве исходных компонентов для изготовления керамических композитов использовались синтезированный порошок ЦТС и порошок кристаллического α - Al_2O_3 (корунд). Средний размер кристаллитов α - Al_2O_3 составлял 140–150 мкм. Указанный размер был выбран с целью уменьшения контактной поверхности ЦТС/ α - Al_2O_3 для снижения влияния модифицированной контактной области на свойства пьезокомпозита. Относительный объем предполагаемой модифицированной области ЦТС в контактной зоне α - Al_2O_3 при выбранном размере частиц α - Al_2O_3 не превышал 10 % при объемном содержании α - Al_2O_3 до 60 об. %.

Порошки ЦТС и α - Al_2O_3 подвергались специальной предварительной термической и химической обработке с целью пассивации и снижения реакционной способности. Смешивание порошков производилось по методике [5], обеспечивающей гомогенное распределение компонентов без дополнительного измельчения и разрушения кристаллитов α - Al_2O_3 . Полученная шихта гранулировалась с добавлением связки поливинилового спирта и прессовалась в виде заготовок $\varnothing 23 \times 20$ (мм). Режим прессования для каждого состава подбирался индивидуально для обеспечения одинаковой плотности керамической матрицы пресс заготовок с учетом концентрации и плотности α - Al_2O_3 . Спекание проводилось в одинаковом режиме, соответствующем обычному режиму спекания ЦТС. Плотность спеченных заготовок определялась по измерениям веса и объема, а также с использованием гидростатического взвешивания. Из заготовок изготавливались элементы $\varnothing 20 \times 1$ (мм) на основные поверхности которых наносились электроды методом вжигания серебро-содержащей пасты. Поляризация элементов выполнялось в силиконовом масле в одинаковом режиме, соответствующем режиму поляризации ЦТС.

На рис. 1 показаны оптические микрофотографии полированной поверхности композитов ПКР-1/ α - Al_2O_3 при различной объемной концентрации α - Al_2O_3 .

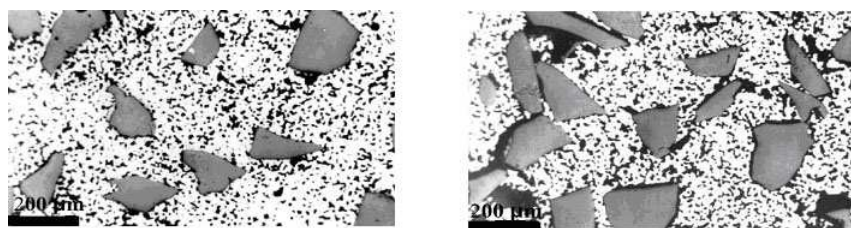


Рис. 1. Оптические микрофотографии полированной поверхности композитов ПКР-1/ α - Al_2O_3 при различных долях включений корунда (слева — 10% , справа — 20%)

Как видно из рис. 1 и других исследований, образцы композита демонстрируют три уровня чёрно-белого контраста: белый — пьезокерамика, серый — частицы оксида алюминия (в зависимости от толщины последних насыщенность серого цвета меняется) и чёрный — поры. Даже при небольшом содержании частиц α - Al_2O_3 (10 об. %) наблюдается существенное увеличение пористости пьезокерамической матрицы. Это происходит как за счёт резкого увеличения количества пор, так и роста их среднего размера (до 10–12 мкм). Наблюдается появление существенно более крупных пор удлинённой формы (до 50 мкм в длину) как на удалении, так и вблизи от частиц оксида алюминия. В последнем случае удлинённые поры довольно часто имеют большую ширину.

С ростом концентрации частиц $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ в композите пористость постепенно возрастает, размер пор увеличивается; кроме того, удлинённые поры становятся разветвленными. При этом частицы $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ располагаются ближе друг к другу. В большинстве случаев при достаточно близком их расположении между ними наблюдаются крупные поры, существенно превосходящие по размеру поры в пьезокерамической матрице.

Таким образом, композит ПКР-1/ $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ должен рассматриваться как трехфазный материал (пьезокерамика — корунд — поры), с возможными различными типами связности включений и пор.

3. Методика измерения. Измерения параметров пьезоэлементов выполнялись по стандартным методикам с использованием методов резонанса–антирезонанса и анализа спектров импеданса. Измерение скорости звука в неполяризованных образцах проводилось ультразвуковым методом на частоте 5 МГц. Микроструктурные исследования выполнялись на полированных срезах образцов с помощью микроскопа отражённого света.

4. Метод моделирования эффективных свойств. Многофазный поликристаллический пьезокомпозиционный материал для реальных применений в пьезоэлектрических преобразователях рассматривается как макрооднородная пьезокерамическая среда с эффективными свойствами: c^{Eff} — эффективные упругие модули, e^{eff} — эффективные пьезомодули, $\epsilon^{S,eff}$ — эффективные диэлектрические проницаемости. Для определения этих эффективных свойств использовался метод эффективных модулей механики композитов, описанный применительно к задачам электроупругости в [6, 7].

Пусть Ω — представительный объем, занимаемый неоднородным телом с пьезоэлектрическими свойствами; $\Gamma = \partial\Omega$ — граница тела; $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — вектор-функция перемещений; $\varphi(\mathbf{x})$ — функция электрического потенциала. Будем использовать стандартные для теории электроупругости обозначения: $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор механических напряжений; \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, \mathbf{D} — вектор электрической индукции.

Рассмотрим следующую статическую задачу электроупругости для представительного объема Ω :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \varphi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0, \mathbf{E}_0 = \text{const}. \quad (4)$$

Решив пять задач электроупругости (1)–(4) с различными граничными условиями для неоднородного объема Ω с матрицей из пьезокерамического материала, поляризованного в направлении оси x_3 , упругими включениями и порами, можно определить полный набор эффективных модулей [6, 7]. В двухиндексных обозначениях Фойхта расчетные формулы для эффективных модулей можно представить следующим образом:

$$\text{I)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{1j}^{Eff} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad e_{31}^{eff} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_0;$$

$$\text{II)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{j3}^{Eff} = \langle \sigma_{jj} \rangle / \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad e_{33}^{eff} = \langle D_3 \rangle / \varepsilon_0;$$

$$\text{III)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{44}^{Eff} = \langle \sigma_{23} \rangle / (2\varepsilon_0), \quad e_{15}^{eff} = \langle D_2 \rangle / (2\varepsilon_0);$$

$$\begin{aligned} \text{IV)} \quad \epsilon_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1 &\Rightarrow e_{15}^{eff} = -\langle \sigma_{13} \rangle / E_0, \quad \epsilon_{11}^{Seff} = \langle D_1 \rangle / E_0; \\ \text{V)} \quad \epsilon_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_3 &\Rightarrow e_{3j}^{eff} = -\langle \sigma_{jj} \rangle / E_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \epsilon_{33}^{Seff} = \langle D_3 \rangle / E_0, \end{aligned}$$

где выражения в угловых скобках обозначают осредненные величины: $\langle (\dots) \rangle = (1/\Omega) \int_{\Omega} (\dots) d\Omega$.

При решении задач (1)–(4) с граничными условиями, конкретизируемыми по I)–V), представительный объем считается неоднородным, состоящим из трех типов качественно различных сред: пьезокерамики, включений корунда и пор. Материал включений (α -Al₂O₃) является кристаллическим класса $\bar{3}m$ с кристаллическими осями, ориентированными случайным образом относительно глобальной декартовой системы координат. В силу этого, множество включений можно считать макроизотропными с эффективными модулями, определяемыми осреднением по всевозможным направлениям кристаллографических осей модулей жесткости $c_{\alpha\beta}$ или модулей податливостей $s_{\alpha\beta}$. Расчетные формулы здесь хорошо известны [8]. Так осреднение по методу Фойгта дает следующие значения для объемного модуля K_V^{eff} и модуля сдвига μ_V^{eff} : $K_V^{eff} = (2c_{11} + c_{33} + 2(c_{12} + 2c_{13}))/9$, $\mu_V^{eff} = (7c_{11} + 2c_{33} - 5c_{12} - 4c_{13} + 12c_{44})/30$. Другое осреднение по методу Рейсса приводит к иным выражениям для объемного модуля K_R^{eff} и модуля сдвига μ_R^{eff} : $(K_R^{eff})^{-1} = 2s_{11} + s_{33} + 2(s_{12} + 2s_{13})$, $(\mu_R^{eff})^{-1} = 2(7s_{11} + 2s_{33} - 5s_{12} - 4s_{13} + 3s_{44})/15$.

В соответствии с подходом Хилла за результирующие примем средние между значениями по Фойгту и по Рейссу: $K_H^{eff} = (K_V^{eff} + K_R^{eff})/2$, $\mu_H^{eff} = (\mu_V^{eff} + \mu_R^{eff})/2$.

В итоге для материала включения получаем эффективные значения для модулей Юнга E_H^{eff} и коэффициента Пуассона ν_H^{eff} : $E_H^{eff} = 9K_H^{eff}\mu_H^{eff}/(3K_H^{eff} + \mu_H^{eff})$, $\nu_H^{eff} = (3K_H^{eff} - \mu_H^{eff})/(6K_H^{eff} + 2\mu_H^{eff})$.

Наконец, для эффективных значений диэлектрических проницаемостей включения ϵ^{eff} можно принять простое осреднение исходных модулей $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$, ϵ_{33} по формуле: $\epsilon^{eff} = (2\epsilon_{11} + \epsilon_{33})/3$.

5. Моделирование представительных объемов. Важным моментом является выбор модели для представительного объема Ω , содержащего набор включений корунда и поры в пьезокерамической матрице. Поскольку задачи (1)–(4) с граничными условиями, конкретизируемыми по I)–V), решались численно по методу конечных элементов с использованием инструментария пакета ANSYS, то моделирование неоднородных сред в объеме Ω можно осуществлять различными способами, учитывающими особенности исследуемого композита. Как показано в [9] для пористых пьезокомпозитов, структуры представительных объемов могут достаточно существенно влиять на значения эффективных модулей.

Здесь при расчетах в качестве представительного объема рассматривался куб, равномерно разбитый на элементарные кубики. В свою очередь элементарный составной куб подразделялся на каркас из пьезокерамического или пористого материала и кубик еще меньшего размера из пьезокерамического материала или из включения. По заданным процентным долям включений и пористости часть маленьких кубиков случайным образом объявлялись включениями, а часть и элементов каркаса — порами. Отметим, что данная модель помимо процентов включений и пористости имеет еще один важный геометрический параметр — отношение толщина каркаса к размеру элементарного составного куба.

6. Обсуждение результатов. Подробный анализ полученных результатов в силу ограниченности объема здесь представлен быть не может. Однако, можно отметить, что при небольших долях включения и пористости пьезомодуль d_{33} не убывает, в отличие от пьезомодуля d_{31} . Сравнивая результаты для поликристаллических и пористых пьезокомпозиатов, можно сделать вывод, что полученные зависимости упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических параметров керамических композиатов от содержания α -Al₂O₃ определяются конкурирующим влиянием увеличения относительной пористости керамической матрицы и роста содержания непьезоэлектрической фазы α -Al₂O₃. В результате можно сделать вывод, что керамические композиаты ЦТС/ α -Al₂O₃ с содержанием пассивной фазы до 20 % обладают улучшенными по сравнению с исходной керамикой электрофизическими и механическими свойствами, позволяющими использовать их в качестве активных элементов пьезоустройств и ультразвуковых датчиков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-00875) и в рамках Госконтракта № П401 ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Yang B., Chen X. M.* Alumina ceramics toughened by piezoelectric secondary phase // J. Eur. Cer. Soc. 2000. V. 20. pp. 1687–1690.
- [2] *Liu Y. G., Jia D. C., Zhou Y.* Microstructure and mechanical properties of a lithium tantalate-dispersed-alumina ceramic composite // Ceramics International. 2002. V. 28. pp. 111–114.
- [3] *Yang B., Chen X. M.* Alumina ceramics toughened by piezoelectric secondary phase // J. Eur. Cer. Soc. 2000. V. 20. pp. 1687–1690.
- [4] *Liu Y. G., Jia D. C., Zhou Y.* Microstructure and mechanical properties of a lithium tantalate-dispersed-alumina ceramic composite // Ceramics International. 2002. V. 28. pp. 111–114.
- [5] *Rybjanets A., Nasedkin A., Turik A.* New microstructural design concept for polycrystalline composite materials // Integrated Ferroelectrics. 2004. V. 63. pp. 179–182.
- [6] *Хорошун Л. Н., Маслов Б. П., Лещенко П. В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композиционных материалов. К.: Наук. Думка, 1989. 347 с.
- [7] *Getman I., Lopatin S.* Theoretical and experimental investigation of the porous PZT ceramics // Ferroelectrics. 1996. V. 186. pp. 301–304.
- [8] *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
- [9] *Bobrov S. V., Nasedkin A. V., Rybjanets A. N.* Finite element modeling of effective moduli of porous and polycrystalline composite piezoceramics // Proc. VIII Int. Conf. Comput. Struct. Techn. CST-2006. Las Palmas, Spain, 12-15 Sept. 2006. B.H.V. Topping, G. Montero and R. Montenegro (Ed.). Civil-Comp Press, UK, 2006. pp. 235–236.

Nasedkin A.V., Rybjanets A.N. *Microstructural designing and modelling for polycrystalline piezocomposite materials by using effective modules method and finite element method.* In this work, the complex problems about development of polycrystalline piezocomposite materials and analysis of their effective properties for example of PZT/ α -Al₂O₃ (corundum) composite are investigated. For analysis of effective properties the approach, basing of effective modules, representative volume modelling and finite element technology, is developed.

КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ И ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Панфилов И. А., Устинов Ю. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

На основе трехмерной теории упругости исследуются особенности распространения гармонических волн в полом цилиндре с винтовой анизотропией. Основное внимание уделено изучению осесимметричных колебаний. Для анализа высокочастотных колебаний разработан и реализован численный метод определения критических частот и построения дисперсионных кривых.

1. Введение.

Основные соотношения линейной теории упругости для тел с винтовой анизотропией и результаты исследований задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией опубликованы в [1]– [3]. В этих работах, в частности, показано, что при растяжении–сжатии цилиндра с винтовой анизотропией помимо продольных деформаций возникают сдвиговые и наоборот.

В [4] приводятся результаты исследований некоторых конкретных задач на основе гипотез Тимошенко–Рейсснера. Настоящая работа посвящена исследованию гармонических волн в полом цилиндре с винтовой анизотропией на основе трехмерных уравнений теории упругости. Исследования проводятся в широком диапазоне изменения параметров задачи, таких как круговая частота ω , относительная толщина цилиндра ε и геометрическая характеристика винтовой анизотропии τ .

2. Основные соотношения теории упругости в винтовой системе координат и постановка задачи.

Обозначим через r_1 , r_2 — внутренний и внешний радиусы цилиндра срединной поверхности оболочки. С центром некоторого поперечного сечения цилиндра свяжем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, направив Ox_3 по оси цилиндра.

Введем винтовую систему координат r , φ , z , связанную с декартовой соотношениями

$$x_1 = r \cos(\varphi + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\varphi + \tau z), \quad x_3 = z, \quad (1)$$

где $r_1 \leq r \leq r_2$; $\tau = \operatorname{tg}(\alpha)/r_2$ — геометрический параметр винтовой анизотропии.

В базисе винтовой системы координат \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_z компоненты тензора деформаций выражаются через координаты вектора смещений

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$$

следующими формулами:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \partial_r u_r, & e_{\theta\theta} &= (u_r + \partial_\theta u_\theta)/r, & e_{zz} &= D u_z, \\ 2e_{r\theta} &= \partial_r u_\theta + (\partial_\theta u_r - u_\theta)/r, & 2e_{rz} &= \partial_r u_z + D u_r, \\ 2e_{z\theta} &= \partial_\theta u_z/r + D u_\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

При переходе от базиса Френе к базису винтовой системы координат, как показано в [1]– [5], для закона Гука получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{C}' \mathbf{e}', \quad \mathbf{C}' = (c'_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, 6, \\ \boldsymbol{\sigma}' &= (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})^T, \\ \mathbf{e}' &= (e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{zz}, 2e_{\theta z}, 2e_{rz}, 2e_{r\theta})^T.\end{aligned}\quad (3)$$

Уравнения движения в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_r(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta\sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} &= -\rho r\partial_t^2 u_r, \\ \partial_r(r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta\sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{\theta z} &= -\rho r\partial_t^2 u_\theta, \\ \partial_r(r\sigma_{rz}) + \partial_\theta\sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} &= -\rho r\partial_t^2 u_z.\end{aligned}\quad (4)$$

В формулах (4) ρ — плотность материала цилиндра;

$$\begin{aligned}\partial_r &= \frac{\partial}{\partial r}, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \\ D &= \partial - \tau\partial_\theta.\end{aligned}$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений

$$\text{при } r = r_\beta \quad (\beta = 1, 2): \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0. \quad (5)$$

Для исследования гармонических волновых процессов в цилиндре будем использовать различные операторные формы [8]. Для этого введем следующие векторы:

$$\boldsymbol{\sigma}_r = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz})^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_\theta = (\sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{z\theta})^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = (\sigma_{rz}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{zz})^T.$$

Используя соотношения (3), (2) и ограничиваясь осесимметричным случаем, представим $\boldsymbol{\sigma}_r$, $\boldsymbol{\sigma}_\theta$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_r &= \partial_z A_r \mathbf{u} + B_r \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\theta = \partial_z A_\theta \mathbf{u} + B_\theta \mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\sigma}_z &= \partial_z A_z \mathbf{u} + B_z \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned}A_r &= \begin{vmatrix} 0 & c'_{14} & c'_{13} \\ c'_{56} & 0 & 0 \\ c'_{55} & 0 & 0 \end{vmatrix}, & B_r &= \begin{vmatrix} c'_{11}\partial_r + c'_{12}/r & 0 & 0 \\ 0 & c'_{66}(\partial_r - 1/r) & c'_{56}\partial_r \\ 0 & c'_{56}(\partial_r - 1/r) & c'_{55}\partial_r \end{vmatrix}, \\ A_\theta &= \begin{vmatrix} c'_{56} & 0 & 0 \\ 0 & c'_{24} & c'_{23} \\ 0 & c'_{44} & c'_{34} \end{vmatrix}, & B_\theta &= \begin{vmatrix} 0 & c'_{66}(\partial_r - 1/r) & c'_{56}\partial_r \\ c'_{12}\partial_r + c'_{22}/r & 0 & 0 \\ c'_{14}\partial_r + c'_{24}/r & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ A_z &= \begin{vmatrix} c'_{56} & 0 & 0 \\ 0 & c'_{44} & c'_{34} \\ 0 & c'_{34} & c'_{33} \end{vmatrix}, & B_z &= \begin{vmatrix} 0 & c'_{56}(\partial_r - 1/r) & c'_{56}\partial_r \\ c'_{14}\partial_r + c'_{24}/r & 0 & 0 \\ c'_{13}\partial_r + c'_{23}/r & 0 & 0 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

3. Гармонические высокочастотные колебания цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией.

Отыскивая решение в виде гармонической волны

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\sigma}_r = e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{b}_r, \quad \boldsymbol{\sigma}_\theta = e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{b}_\theta, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{b}_z, \\ \mathbf{a} &= (a_r, ia_\theta, ia_z)^T, \quad \mathbf{b}_r = (ib_{rr}, b_{r\theta}, b_{rz})^T, \\ \mathbf{b}_\theta &= (b_{r\theta}, ib_{\theta\theta}, ib_{\theta z})^T, \quad \mathbf{b}_z = (b_{rz}, ib_{\theta z}, ib_{zz})^T. \end{aligned}$$

на основании (4), (5) получаем двухпараметрическую спектральную задачу

$$L(k, \omega) \mathbf{a} \equiv -k^2 A_2 \mathbf{a} + ikA_1 \mathbf{a} + A_0 + r\rho\omega^2 I \mathbf{a} = 0 \quad (7)$$

$$\text{при } r = r_\beta : (ikA_r + B_r) \mathbf{a} = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_2 \mathbf{a} &= rA_z \mathbf{a}, \quad A_1 \mathbf{a} = \partial_r(rA_r \mathbf{a}) + SA_\theta \mathbf{a} + rB_z \mathbf{a}, \quad A_0 = \partial_r(rB_r \mathbf{a}) + SB_\theta \mathbf{a}, \\ S &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Для проведения исследований перейдем к безразмерным координатам $\xi = r/r_2$, $\zeta = z/r_2$ и введем параметры: $\gamma = r_2 k$ — безразмерное волновое число, $\Omega = r_2 \omega / c$ — безразмерная частота, $c = (E'/\rho)^{1/2}$ — параметр, имеющий размерность скорости. Все модули отнесем к E' .

Расчеты проводились для условно мягкого материала (биологическая ткань стенки артериального сосуда [6]):

$$E' = 4.905 \cdot 10^8, \quad E = 0.833 \cdot E', \quad G' = E'/6, \quad \nu' = 0.45, \quad \nu = 0.54.$$

Преобразуем задачу (2)–(5) в краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\xi} = G_{11} \mathbf{a} + G_{12} \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{d\xi} = G_{21} \mathbf{a} + G_{22} \mathbf{b}, \quad (9)$$

$$\mathbf{b}(\xi_1) = 0, \quad \mathbf{b}(\xi_2) = 0, \quad (10)$$

где $\mathbf{b} = \xi \mathbf{b}_r$. Выражения для матриц G_{ij} здесь не приводятся ввиду очевидности способа их построения на основе вышеприведенных формул. Из общей теории волноводов [8] и конкретных исследований [9] волновых процессов в упругих цилиндрах из изотропных материалов известно, что спектральные задачи вида (7) для каждого фиксированного значения параметра ω имеет счетное неограниченное множество собственных значений (СЗ) k_n , симметрично расположенное в комплексной плоскости γ , и конечные множества вещественных СЗ $\pm k_s$, $k_s \geq 0$, $s = 1, \dots, N(\omega)$. Вещественным СЗ отвечают однородные элементарные волны, которые переносят волновую энергию вдоль оси цилиндра. Направление потока энергии через поперечное сечение цилиндра определяется средним за период значением проекции на ось цилиндра вектора Умова–Пойнтинга [8,9], который в рассматриваемом случае может быть вычислен по формуле:

$$P_{zs} = \pi \omega \text{Im}(\mathbf{b}_{zs}, \mathbf{a}_s). \quad (11)$$

Здесь \mathbf{a}_s — собственный вектор (СВ) задачи (7), отвечающей спектральной паре (k_s, ω) , $b_{zs} = (ik_s A_z + B_z)\mathbf{a}_s$.

Знак этого вектора определяет направление распространения волновой энергии и является одним из критериев классификации элементарных решений (принцип Мальденштама [8, 10]).

Однако применение этого принципа, как и других [8, 11], наталкивается на определенные трудности в случае «критических частот». Под «критическими частотами» в данном случае понимается множество СЗ ω_l ($l = 1, \dots$) самосопряженной спектральной задачи

$$\begin{aligned} L(0, \omega)\mathbf{a} &\equiv A_0 + r\rho\omega^2 I\mathbf{a} = 0 \\ \text{при } r = r_\beta : B_r\mathbf{a} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

которая является частным случаем задачи (7), если в последней положить $k = 0$. Множество собственных векторов, отвечающих спектральным парам $(0, \omega_l)$, обозначим \mathbf{a}_l^0 . Известно [8], что данным спектральным парам, кроме собственных векторов, отвечают цепочки присоединенных векторов $\mathbf{a}_l^1, \dots, \mathbf{a}_l^p$. Как показано в [8], обычно существует только один присоединенный вектор, который определяется решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} A_0\mathbf{a}_l^1 + r\rho\omega_l^2 I\mathbf{a}_l^1 - iA_1\mathbf{a}_l^0 &= 0 \\ \text{при } r = r_\beta : B_r\mathbf{a}_l^1 + iA_r^0 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Если волновое число $k = 0$ — двукратное, то существуют пара элементарных решений вида

$$\mathbf{u}_l^\pm = (\pm z\mathbf{a}_l^0 + \mathbf{a}_l^1)e^{-i\omega t}.$$

При этом проекции вектора Умова–Пойнтинга $P_z(\mathbf{u}^+) > 0$, $P_z(\mathbf{u}^-) < 0$.

Волновые процессы с круговой частотой $\omega \geq \omega_1$ условно будем называть высокочастотными.

Приведем здесь значения первых трех критических частот, полученных путем численного интегрирования уравнений (9) при $\alpha = 45^\circ$: $\Omega = (2.07, 2.59, 2.77)$. Для оценки точности результатов, полученных численным методом, поставленная задача (2)–(5) при $k = 0$, $\alpha = 0$ (трансверсально-изотропный материал) была решена аналитически. Сравнительный анализ показал полное совпадение результатов, а также позволил идентифицировать типы колебаний, отвечающих каждой из приведенных частот. При изменении параметра α первая частота порождает ветвь квазипродольных колебаний, вторая соответствует квазирадиальным, третья — квазикрутильным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (09-01-00065-а), Южного математического института Владикавказского научного центра РАН, а также в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 году (госконтракт № П596).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Устинов Ю. А. Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // ПММ. 2003. Т.67. Вып. 1. С.89–98.
- [2] Устинов Ю. А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики. 2003. № 4. С.37–62.
- [3] Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.:Наука, 2003. 128 с.
- [4] Панфилов И. А., Устинов Ю. А. Некоторые динамические задачи для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Актуальные проблемы механики. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск. С.97–105.
- [5] Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 3. С.344–348.
- [6] Pedley T. J. Sc. D. The Fluid Mechanics Blood Vessels. Cambridge University Press. Cambridge-London-New York-Rochelle-Melbourne-Sydney, 1980.
Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.:Мир, 1983. 400 с.
- [7] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука, 1977. 415 с.
- [8] Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-н/Д: Изд-во Ростовского университета, 1993. 144 с.
- [9] Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.:Наукова думка. 1981. 283 с.
- [10] Мальденштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.:Наука, 1972. 437 с.
- [11] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1973. 320 с.

Panfilov I. A., Ustinov Yu. A. *Critical frequencies and high-frequency fluctuations for bodies with screw anisotropy.* On the basis of the three-dimensional theory of elasticity features of distribution of harmonious waves in a floor the cylinder with screw anisotropy are investigated. The basic attention is given to studying axisymmetric fluctuations. For the analysis of high-frequency fluctuations the numerical method of definition of critical frequencies and constructions of dispersive curves is developed and realized.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ В СТРУКТУРЕ «СЛОИСТЫЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК — ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОДЛОЖКА»

Пипа В. А., Михайлова И. Б.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

В рамках линеаризованной теории электроупругости рассмотрены задачи о распространении поверхностных волн в преднапряженных слоистых пьезоактивных средах на диэлектрической подложке. Исследовано влияние изменения структуры среды, различных видов начального напряженного состояния составляющих структуры, а также влияния свойств диэлектрической подложки на дисперсионные свойства среды. Изучено влияние изменения геометрии и свойств среды на ее динамические характеристики.

Рассматривается краевая задача о распространении плоских волн по поверхности преднапряженной слоистой пьезоактивной структуры на диэлектрической подложке. Для исследования процессов, происходящих в средах такого типа, рассмотрим колебания структурно-неоднородной пьезоактивной среды, представляющей собой электроупругий слой $0 \leq x_3 \leq h$, $|x_1|, |x_2| \leq \infty$ или пакет пьезоактивных слоев $|x_1|, |x_2| \leq \infty$, $h_{k+1} \leq x_3 \leq h_k$, $k = 1, 2, \dots, M - 1$, жестко сцепленные с диэлектрическим полупространством $x_3 \leq 0$, $|x_1|, |x_2| \leq \infty$. Предполагается, что составляющие структуры могут быть подвержены действию механических деформаций. Все величины в структуре, относящиеся к m -слою обозначим индексом $n = m$, к полупространству — индексом $n = M$, к вакууму — индексом $n = 0$. В качестве материала слоя или пакета слоев и полупространства используем пьезоэлектрик класса $6mm$ гексагональной сингонии, ось симметрии которого совпадает с осью x_2 , векторы поляризации слоев либо сонаправлены, либо противоположны по направлению. Граница раздела нижнего слоя и полупространства $x_3 = 0$ предполагается металлизированной и заземленной ($\varphi|_{x_3=0} = 0$). В сделанных предположениях уравнения движения слоев имеют вид [2, 3]:

$$\nabla_0 \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad \nabla_0 \cdot \Delta^{(n)} = 0, \quad \Delta \mathbf{u}^{e(0)} = 0 \quad (1)$$

Движение подстилающего полупространства определяется уравнением:

$$\nabla_0 \cdot \Theta^{(M)} = \rho^{(M)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(M)}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Граничные условия могут быть записаны в виде:
на поверхности среды:

— отсутствие механических воздействий:

$$x_3 = h_1 : \quad \mathbf{n} \cdot \Theta^{(1)} = 0 \quad (3)$$

— электрически свободная поверхность:

$$x_3 = h_1 : \quad \mathbf{n} \cdot \Delta^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \Delta^{(0)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} \quad (4)$$

— металлизированная поверхность:

$$x_3 = h_1 : \quad \varphi^{(1)} = 0 \quad (5)$$

на границе раздела сред ($m = 1, 2, \dots, M - 1$)

$$x_3 = h_m : \quad \mathbf{u}^{e(m)} = \mathbf{u}^{e(m+1)}, \quad \mathbf{n} \cdot \Theta^{(m)} = \mathbf{n} \cdot \Theta^{(m+1)}, \quad \mathbf{n} \cdot \Delta^{(m)} = \mathbf{n} \cdot \Delta^{(m+1)} \quad (6)$$

Задачу замыкают условия убывания перемещений и потенциала электрического поля на бесконечности:

$$\mathbf{u}^{(M)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_3 \rightarrow -\infty, \quad \mathbf{u}^{e(0)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_3 \rightarrow \infty \quad (7)$$

Здесь ∇_0 — оператор Гамильтона, $\Theta^{(n)}$ и $\Delta^{(n)}$ — линейризованные тензор напряжений Коши и вектор индукции, $\mathbf{u}^{e(n)} = \{u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}\}$ — расширенный вектор смещений пьезоэлектрической среды, $\rho^{(n)}$ — плотность материала, $\mathbf{u}^{e(M)} = \mathbf{u}^{(M)} = \{u_1^{(M)}, u_3^{(M)}\}$ — вектор смещений диэлектрической подложки.

Предполагаем, что начальное напряженное состояние определено формулами

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \quad \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} \nu_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad \nu_i = \text{const} \quad (8)$$

\mathbf{R} , \mathbf{r} — радиус-векторы точки среды соответственно в начально-деформированном и естественном состоянии, $\nu_i = 1 + \delta_i$, δ_i — относительные удлинения волокон, направленных в естественной конфигурации вдоль осей a_i , $i = 1, 2, 3$, совпадающих с декартовыми координатами, δ_{ij} — символ Кронекера.

В этом случае компоненты линейризованных тензора напряжений Θ и вектора индукции Δ в декартовой системе координат представляются в виде:

$$\theta_{lk} = c_{lksp}^* u_{s,p} + e_{lkp}^* \varphi_{,p}, \quad \Delta_l = e_{lsp}^* u_{s,p} - \varepsilon_{lp}^* \varphi_{,p} \quad (9)$$

где

$$c_{lksp}^* = P_{lp} \delta_{ks} + \nu_k \nu_s c_{lksp}^\times, \quad e_{lsp}^* = \nu_s e_{lsp}, \quad \varepsilon_{lp}^* = \varepsilon_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_l^{-2} \delta_{lp} + \beta_{lp} \quad (10)$$

Здесь β_{kn} — константа диэлектрической восприимчивости. Участвующие в представлении (10) компоненты тензора Кирхгофа P_{lp} , а также упругие константы c_{qjlp}^\times зависят как от свойств материала, так и от вида начального напряженного состояния среды [2, 3].

Далее, в зависимости от заданных на поверхности среды условий рассмотрим два типа краевых задач [1–3]:

задача I — со свободной поверхностью, описывается уравнениями движения (1), (2) с граничными условиями (3), (4), (6), (7);

задача II — с металлизированной поверхностью, описывается уравнениями движения (1), (2) с граничными условиями (3), (5)–(7).

Следуя [2, 3], применяем к краевым **задачам I** и **II** одномерное преобразование Фурье по координате x_2 . Решение задач в трансформантах Фурье ищем в виде ($p = 1, 3, 4$, $n = 1, 2, \dots, M - 1$):

для смещений в пьезоэлектрических слоях и вакууме:

$$U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^4 f_{pk}^{(n)} [c_k^{(n)} ch \sigma_k^{(n)} x_2 + c_{k+2}^{(n)} sh \sigma_k^{(n)} x_2], \quad U_4^{(0)}(\alpha, x_2) = c_1^{(0)} e^{-\alpha x_2} \quad (11)$$

для смещений в диэлектрической подложке:

$$U_p^{(M)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^2 f_{pk}^{(M)} c_k^{(M)} e^{\sigma_k^{(M)} x_2} \quad (12)$$

Коэффициенты $f_{pk}^{(n)}$, $p, k = 1, 3, 4$, $n = 1, \dots, M-1$ являются решениями однородной системы уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} H_{1k}^{(n)} & \sigma_k^{(n)} B_{13}^{(n)} & \sigma_k^{(n)} B_{14}^{(n)} \\ -\alpha^2 \sigma_k^{(n)} B_{31}^{(n)} & -\alpha^2 \sigma_k^{(n)} B_{32}^{(n)} & H_{5k}^{(n)} \\ -\alpha^2 \sigma_k^{(n)} B_{41}^{(n)} & -\alpha^2 \sigma_k^{(n)} B_{42}^{(n)} & H_{6k}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Здесь

$$H_{pk}^{(n)} = h_p^{(n)} \left(\sigma_k^{(n)} \right)^2 - P_k^{(n)}, \quad p = 1, 2, \dots, 6$$

$\sigma_k^{(n)}$, $n = 1, \dots, M-1$ являются корнями характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} h_1^{(n)} \left(\sigma_k^{(n)} \right)^2 - P_1^{(n)} & \sigma_k^{(n)} B_{13}^{(n)} & \sigma_k^{(n)} B_{14}^{(n)} \\ -\alpha^2 \sigma_k^{(n)} B_{31}^{(n)} & h_3^{(n)} \left(\sigma_k^{(n)} \right)^2 - P_3^{(n)} & h_5^{(n)} \left(\sigma_k^{(n)} \right)^2 - P_5^{(n)} \\ -\alpha^2 \sigma_k^{(n)} B_{41}^{(n)} & h_6^{(n)} \left(\sigma_k^{(n)} \right)^2 - P_6^{(n)} & h_4^{(n)} \left(\sigma_k^{(n)} \right)^2 - P_4^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} B_{pj}^{(n)} &= \theta_{ppjj}^{(n)} + \theta_{jppj}^{(n)}, \quad p, j = 1, 3; \quad B_{14}^{(n)} = \theta_{1143}^{(n)} + \theta_{3141}^{(n)}, \quad B_{41}^{(n)} = \theta_{3411}^{(n)} + \theta_{1413}^{(n)} \\ h_k^{(n)} &= \theta_{3kk3}^{(n)}, \quad k = 1, 3, 4; \quad h_5^{(n)} = \theta_{3343}^{(n)}, \quad h_6^{(n)} = \theta_{3433}^{(n)} \\ P_p^{(n)} &= \theta_{1pp1}^{(n)} \alpha^2 - \rho^{(n)} \chi_2^2, \quad p = 1, 3, \quad P_4^{(n)} = \theta_{1441}^{(n)} \alpha^2 \\ P_5^{(n)} &= \theta_{1341}^{(n)} \alpha^2, \quad P_6^{(n)} = \theta_{1431}^{(n)} \alpha^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$\sigma_k^{(M)}$ являются корнями характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} \theta_{3113}^{(M)} \left(\sigma_k^{(M)} \right)^2 - P_1^{(M)} & \sigma_k^{(M)} B_{23}^{(M)} \\ -\alpha^2 \sigma_k^{(M)} B_{31}^{(M)} & \theta_{3333}^{(M)} \left(\sigma_k^{(M)} \right)^2 - P_3^{(M)} \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} P_k^{(M)} &= \theta_{1kk1}^{(M)} \alpha^2 - \rho^{(M)} \chi_2^2, \quad B_{pk}^{(M)} = \theta_{ppkk}^{(M)} + \theta_{kppk}^{(M)} \\ f_{1k}^{(M)} &= S_{3k} \left[\sigma_k^{(M)} S_{1k} \right]^{-1} f_{3k}^{(M)}, \quad f_{3k}^{(M)} = 1 \\ S_{1k} &= B_{32}^{(M)} H_{1k}^{(M)} + \alpha^2 B_{12}^{(M)} B_{13}^{(M)}, \quad S_{3k} = B_{12}^{(M)} H_{3k}^{(M)} - \left(\sigma_k^{(M)} \right)^2 B_{13}^{(M)} B_{23}^{(M)} \\ H_{jk}^{(M)} &= \theta_{3jj3}^{(M)} \left(\sigma_k^{(M)} \right)^2 - P_j^{(M)}, \quad j = 1, 3 \end{aligned} \quad (17)$$

Неизвестные коэффициенты $c_k^{(n)}$ определяются из граничных условий, представимых в виде системы алгебраических уравнений с нулевой правой частью ($\mathbf{C} = \uparrow \{c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, c_3^{(n)*}, c_4^{(n)*}, \dots, c_1^{(M)}, c_2^{(M)}, c_1^{(0)}\}$, $c_k^{n*} = \left(\sigma_{k-2}^{(n)}\right)^{-1} c_k^{(n)}$, $k = 3, 4$, $n = 1, 2, \dots, M - 1$):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0 \tag{18}$$

матрица \mathbf{A} в случае *задачи II* представима в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)}(h_1) & 0 \\ \mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M}) & \mathbf{B}^{(M)}(h_M) \end{pmatrix} \tag{19}$$

причем $\mathbf{B}^{(1)}(h_1)$ и $\mathbf{B}^{(M)}(h_M)$ — матрицы размера 4×6 и 6×2 , вид которых полностью определяется свойствами верхнего слоя и подстилающего полупространства соответственно, и не зависит от свойств и количества возможных промежуточных слоев [2, 3]. Матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(1)}(h_{2,\dots,M})$ — квадратные, размер определяется геометрией задачи и равен соответственно $4(M - 1) + 4$ и $4(M - 1) + 2$. Такой подход применяем для построения дисперсионного уравнения *задачи I*.

В качестве слоистого электроупругого полупространства рассматривалось *двухслойное электроупругое полупространство*, представляющее собой пьезоактивный слой $0 \leq x_3 \leq h$, $|x_1, x_2| \leq \infty$ на диэлектрическом полупространстве $x_3 < 0$: PZT5/MgO, BaTiO₃/MgO, BaTiO₃/SiO₂, ZnO/SiO₂ [4].

На рис. 1 представлены графики, иллюстрирующие влияние свойств пьезоэлектрика на относительную фазовую скорость первых мод поверхностных волн.

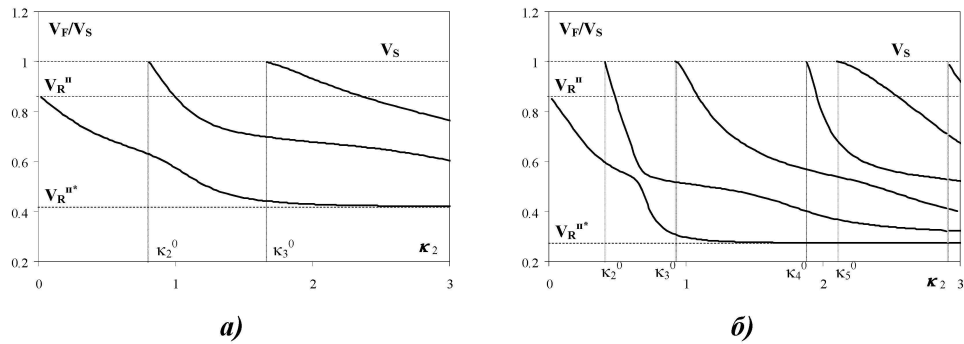


Рис. 1. Влияние свойств пьезоэлектрика на относительные фазовые скорости V_f/V_s : а) структура BaTiO₃/MgO; б) PZT5/MgO.

Как видно из рисунков более сильные пьезоэлектрические свойства слоя обеспечивают более сложную структуру поверхностного волнового поля — большее количество распространяющихся волн, больший диапазон изменения фазовых скоростей, начиная со значения V_R^Π для первой моды — скорость рэлеевской волны полупространства до значения $V_R^{\Pi*}$ — скорость рэлеевской волны полупространства с параметрами слоя.

На рис. 2 представлены графики, иллюстрирующие влияние различных видов начальной деформации на относительную фазовую скорость первых мод поверхностных волн. Цифрами 1 и 2 на рис. 2а отмечены кривые (штриховые и пунктирные линии), соответствующие НДС1 и НДС2, цифрой 3 на рис. 2б отмечены

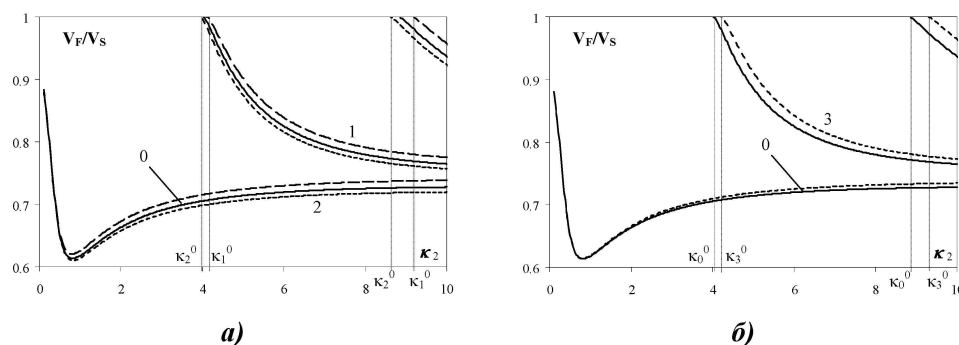


Рис. 2. Влияние начальных напряжений на относительные фазовые скорости V_f/V_s на поверхности структуры ZnO/SiO₂: а) одноосное состояние по осям x_1, x_2 ; б) по оси x_3 .

штриховые линии, соответствующие НДСЗ. Сплошная линия (цифра 0) на обоих рисунках соответствует естественному состоянию.

Как видно из графиков, растяжение по осям x_1 и x_3 приводит к возрастанию фазовых скоростей мод поверхностных волн, при растяжении по оси x_2 фазовая скорость уменьшается.

Представленные графики свидетельствуют о том, что, регистрируя изменение фазовой скорости мод поверхностных волн, можно контролировать изменение напряженного состояния пьезоактивной среды.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (09-01-00695, 09-08-01065, 09-08-96527-юг), Президиума РАН (направление № 12 программы № 4П РАН, программы № 11П РАН).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.
- [2] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
- [3] Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
- [4] Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.

Pipa V. A., Mihailova I. B. *Influence of initial stress state on wave field in structure "layered piezoelectric – dielectric substrate"*. In the framework of linearized electro elasticity theory the problems of surface waves propagation are considered for prestressed layered piezoactive media on a dielectric substrate. An influence of medium structure variation and initial stress state on the dispersion properties of medium is analyzed.

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ СЦЕНАРИЙ ПЕРЕХОДА К ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ В ИОНООБМЕННЫХ МЕМБРАНАХ

Полянских С. В., Гусарчук А. Н., Демехин Е. А.

Кубанский государственный университет, Краснодар

В докладе рассматриваются нестационарные процессы в растворе электролита между двумя параллельными полупроницаемыми электрическими мембранами. Рассматривается одномерное нестационарное решение задачи, потеря гидродинамической устойчивости которого ответственна за появление нового режима электроконвекции в системе. Задача решается в предположении малости дебаевской толщины, основанной на нестационарной толщине диффузионного слоя. Численный и асимптотический анализ задачи показал, что эволюция во времени одномерного решения носит автомодельный характер вплоть до потери им устойчивости и возникновения электроконвекции. Полученные теоретические результаты качественно подтверждаются недавно проведенными экспериментами.

Введение. Мембранные технологии являются одним из наиболее приоритетных направлений современных исследований в области электрохимии. Динамика жидкости в мембранных системах демонстрирует новые типы электрогидродинамической неустойчивости, результате которой могут образовываться микро- и наноструктуры и даже возможны хаотические течения в этих масштабах.

Было показано, что электроконвекция возникает при достаточно больших значениях разности потенциалов между мембранами как следствие потери устойчивости тривиального решения задачи с последующей бифуркацией его в новый периодический режим электроконвективных валов [1].

Стоит особо отметить, что до сих пор исследовалась устойчивость только стационарного одномерного решения задачи, порождающегося балансом электромиграции и электродиффузии [1,2]. Тем не менее, прямой численный счёт [3], подтверждаемый известными экспериментальными данными [4], показал, что неустойчивость наступает задолго установления во времени одномерного решения задачи. Этот факт говорит о первостепенной важности рассмотрения одномерной задачи, изучения свойств её решений и их устойчивости в полной нестационарной постановке.

Целью настоящей работы является теоретическое описание и исследование устойчивости нового класса одномерных нестационарных решений, найденных численно в [3] и отличных от полученных ранее в работах других авторов.

1. Постановка задачи. Поведение простого бинарного электролита в пространстве между двумя электрическими мембранами, $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{y} = \tilde{L}$, описывается системой уравнений Нернста–Планка–Пуассона–Стокса, включающей уравнения переноса ионов, уравнение Пуассона для электрического потенциала, уравнения Навье–Стокса в стоксовском приближении и уравнение неразрывности со стандартными краевыми условиями (см. [2]).

За характерные величины принимаются: термодинамический потенциал, $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$, расстояние между мембранами \tilde{L} , время \tilde{L}^2/\tilde{D} , концентрация ионов

\tilde{c}_0 при $t=0$. Размерные величины помечаются тильдой. Здесь \tilde{D} — коэффициент диффузии ионов, \tilde{F} — число Фарадея, \tilde{R} — универсальная газовая постоянная, \tilde{p} — концентрация положительных ионов на мембране ($p = \tilde{c}^+/\tilde{c}_0 \gg 1$, в настоящей работе $p=5$), $\tilde{\varepsilon}$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, $\varkappa = \tilde{\varepsilon}\tilde{\Phi}_0^2/\tilde{\mu}\tilde{D}$, $\tilde{\mu}$ — динамическая вязкость жидкости.

Полная безразмерная поставка задачи имеет вид

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c^\pm = \pm \nabla \cdot (c^\pm \nabla \Phi) + \nabla^2 c^\pm, \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 \nabla^2 \Phi = c^- - c^+, \quad (2)$$

$$-\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} + \varkappa (c^- - c^+) \nabla \Phi = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (4)$$

$$y=0: \quad c^+ = p, \quad -c^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0, \quad \Phi = 0, \quad \mathbf{U} = 0, \quad (5)$$

$$y=1: \quad c^+ = p, \quad -c^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0, \quad \Phi = \Delta V, \quad \mathbf{U} = 0.$$

В начальный момент времени $t=0$ задано некоторое равновесное распределение концентраций положительных и отрицательных ионов $c^\pm = 1$.

Одномерный вариант задачи, $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$, $\mathbf{U} = 0$, имеет вид

$$\frac{\partial c^\pm}{\partial t} = \pm \frac{\partial}{\partial y} \left(c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 c^\pm}{\partial y^2}, \quad (6)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = c^- - c^+, \quad (7)$$

$$y=0: \quad c^+ = p, \quad -c^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0, \quad \Phi = 0, \quad (8)$$

$$y=1: \quad c^+ = p, \quad -c^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0, \quad \Phi = \Delta V, \quad (9)$$

$$t=0: \quad c^+ = c^- = 1. \quad (10)$$

Ток через мембрану при $y=0$ определяется выражением

$$j = c^+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^+}{\partial y}, \quad y=0.$$

Задача (6)–(10) решалась численно. Так как она содержит малый параметр при старшей производной, то при ее решении возникают известные сложности. Для их преодоления метод работы [3] был обобщен на решение (6)–(10).

2. Численное доказательство автомодельности. Отметим, что при $t \ll t_s$ влияние верхней мембраны пренебрежимо мало и процесс далек от установившегося. С другой стороны, при $t \gg \varepsilon^2$, двойной ионный слой уже не оказывает

существенного влияния на процесс. В этом промежуточном диапазоне времен задача не имеет характерного размера и разумно предположить автомодельность решения, как это было сделано в [3].

В работе [5] для исследования задачи в одномерной автомодельной постановке использовался асимптотический анализ при $\varepsilon \rightarrow 0$, основанный на предположении об автомодельности. Вводились новые переменные

$$\tau = t, \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{t}}.$$

В автомодельной постановке управляющие параметры системы переопределялись следующим образом

$$\nu = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}, \quad J = 2j\sqrt{t}, \quad \Delta V = \Delta\Phi + \frac{j}{2}. \quad (11)$$

В процессе численного интегрирования системы (6)–(10) ее независимые и зависимые переменные переводились в автомодельные согласно (11), учитывая, что $\eta = y/(2\sqrt{t})$.

На рис. 1 изображено распределение концентрации положительных ионов c^+ вдоль переменной y при $\Delta V = 100$, $\varepsilon = 0,001$ в моменты времени, $t = 0.001$, $t = 0.003$, $t = 0.01$ и $t = 0.03$, для которых $\varepsilon^2 \ll t \ll t_s$. Видно отличное совпадение решений, полученного прямым численным счетом (рис. 1а) с автомодельной асимптотикой из [5] (рис. 1б).

Для сверхпредельных режимов при $\nu \rightarrow 0$ автомодельные вольтамперные характеристики зависимости тока J от напряжения $\Delta\Phi$ схлопываются в одну универсальную зависимость,

$$J \operatorname{erfc} \left[\left(\frac{9\Delta F^2}{8J} \right)^{1/3} \right] = J_{lim} \exp \left[- \left(\frac{9\Delta F^2}{8J} \right)^{2/3} \right], \quad J_{lim} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}, \quad (12)$$

где $\Delta F = \nu\Delta\Phi$ (см. [5]). На рис. 2 универсальная зависимость (12) дана сплошной линией. На рис. 2 численные значения при разных $\Delta\Phi$, пересчитанные в автомодельных универсальных переменных, представлены маркерами. Совпадение оказывается удивительно хорошим.

Таким образом, через весьма малый промежуток $t \gg \varepsilon^2$ одномерное нестационарное решение становится автомодельным попадая на двухпараметрическое семейство решений с параметрами ν и $\Delta\Phi$. Решение расширяется в пространстве $y \in [0, 1]$, по корню из времени, пока не почувствует влияние стенки при $t = t_s \simeq 0.1 \div 0.2$.

3. Электроконвективная неустойчивость одномерного решения. Достичь установления одномерному решению мешает неустойчивость, проявляющаяся, как будет показано ниже, на стадии автомодельности и приводящая к двумерному или трехмерному решению, как это имеет место для неустойчивости Бенара–Релея–Марангони.

На решение одномерной задачи c^\pm и Φ накладывались малые синусоидальные возмущения

$$c^\pm \rightarrow c^\pm + \hat{c}^\pm e^{i\alpha x}, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \hat{\Phi} e^{i\alpha x}, \quad \mathbf{U} \rightarrow \hat{\mathbf{U}} e^{i\alpha x}, \quad P \rightarrow P + \hat{P} e^{i\alpha x}, \quad (13)$$

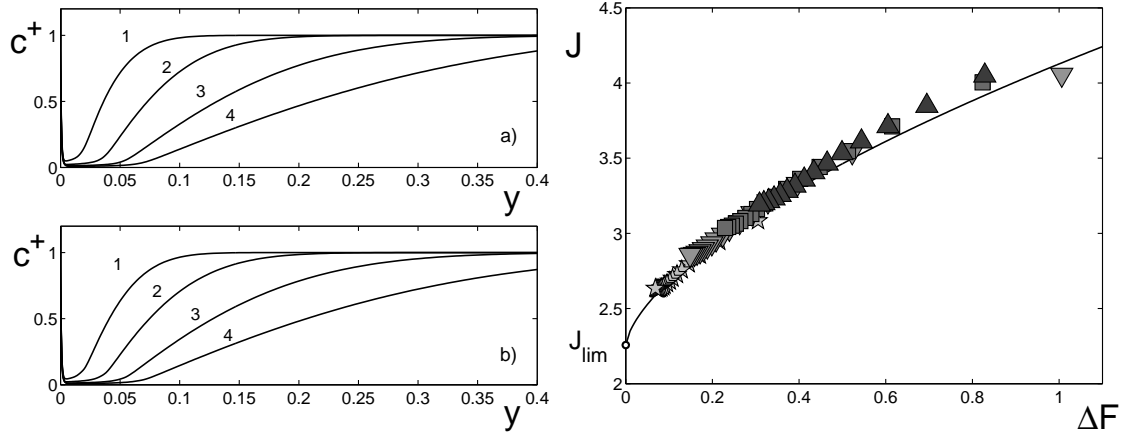


Рис. 1. Профили концентрации положительных ионов при $\Delta\Phi = 100$, $\varepsilon = 0.001$ в различные моменты времени. Нижний рисунок — автомодельное решение, верхний рисунок — численное решение полной одномерной постановки: 1 — $t = 0.001$, 2 — $t = 0.0003$, 3 — $t = 0.01$, 4 — $t = 0.03$.

Рис. 2. Сравнение численного счета (символы) и автомодельной вольтамперной характеристики (сплошная) при $\varepsilon = 0.001$ и различных значениях падения напряжения: звезды — $\Delta\Phi = 50$, нижние треугольники — $\Delta\Phi = 100$, квадраты — $\Delta\Phi = 150$, треугольники — $\Delta\Phi = 200$.

где $\hat{\mathbf{U}} = (\hat{u}, \hat{v})$. Подставляя (13) в полную систему (1)–(5) и пренебрегая квадратами амплитуд возмущений, приходим к следующей задаче для возмущений

$$\frac{\partial \hat{c}^{\pm}}{\partial t} + \hat{v} \frac{\partial \hat{c}^{\pm}}{\partial y} = \pm \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{c}^{\pm} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c^{\pm} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \right) - \alpha^2 c^{\pm} \hat{\Phi} \right\} + \frac{\partial^2 \hat{c}^{\pm}}{\partial y^2} - \alpha^2 \hat{c}^{\pm}, \quad (14)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} - \alpha^2 \hat{\Phi} \right) = \hat{c}^{-} - \hat{c}^{+}, \quad (15)$$

$$-i\alpha \hat{P} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - \alpha^2 \hat{u} + i\alpha \kappa (c^{-} - c^{+}) \hat{\Phi} = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2 \hat{v} + \kappa (c^{-} - c^{+}) \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} + \kappa (\hat{c}^{-} - \hat{c}^{+}) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (17)$$

$$i\alpha \hat{u} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

$$y = 0: \quad \hat{c}^{+} = 0, \quad \hat{c}^{-} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c^{-} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{c}^{-}}{\partial y} = 0, \quad \hat{\Phi} = 0, \quad \hat{\mathbf{U}} = 0, \quad (19)$$

$$y = 1: \quad \hat{c}^{+} = 0, \quad \hat{c}^{-} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c^{-} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{c}^{-}}{\partial y} = 0, \quad \hat{\Phi} = 0, \quad \hat{\mathbf{U}} = 0, \quad (20)$$

которая решалась совместно с системой (6)–(10). При $t = 0$ задавались некоторые малые значения \hat{c}^{-} и \hat{c}^{+} .

Численное интегрирование задачи (14)–(20) совместно с (6)–(10) дало автомодельный (за исключением очень маленьких времен установления) этап эволюции

одномерного решения вплоть до 8–9 секунд, нарушающийся в интервале $6 \div 10$ сек электроконвективной неустойчивостью. Это соответствует полученному в физических экспериментах [6] значению начала неустойчивости в 8 сек.

Заключение. В работе рассмотрены нестационарные процессы в растворе электролита в пространстве между полупроницаемыми мембранами. Показано, что одномерный процесс происходит автомодельным образом. Автомодельное развитие нарушается потерей устойчивости вдоль продольной координаты, приводящей к возникновению электроконвективного движения жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zaltzman B., Rubinstein I. Electroosmotic slip and electroconvective instability // J. Fluid Mech. 2007. № 579, pp.173–226.
- [2] Rubinstein I., Zaltzman B. Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane // Phys. Rev. E. 2000. № 62, p. 2238.
- [3] Демехин Е. А., Шапарь Е. М., Ланченко В. В. К возникновению электроконвекции в полупроницаемых электрических мембранах // Докл. РАН. 2008. Т. 421, № 4. С. 478–481.
- [4] Pismenskaya N. D, Nikonenko V. V., Belova E. I, et. al. Coupled convection of solution near the surface of ion-exchange membranes in intensive current regimes // Rus. J. Electrochem. 2007. № 43, p. 307.
- [5] <http://arxiv.org/arXiv:1001.4502v1>
- [6] Yossifon G., Chang H.-C. Selection of Nonequilibrium Overlimiting Currents: Universal Depletion Layer Formation Dynamics and Vortex Instability // Phys. Rev. E. 2000. Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 254601.

Polyanskikh S. V., Gusagchuk A. N., Demekhin E. A. *Self-similar scenario of transition to Electroconvection in ion-exchange membranes.* Non-stationary processes in the electrolyte solution between two parallel electric semipermeable membranes are under consideration. One-dimensional unsteady solution of the problem loses its stability and bifurcates into a regime of electroconvection. The problem is solved in the assumption that relation of the Debye thickness to the thickness of the diffusion layer is small. Direct numerical and asymptotic analysis of the problem show that the time evolution of one-dimensional solution has self-similar behavior until time when it loses its stability and the regime of electroconvection begins. The theoretical results are in qualitative agreement with recent experimental data.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА, НАГРУЖЕННОГО ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Попов А. В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается задача нелинейной теории упругости об устойчивости цилиндрической оболочки, к внешней боковой поверхности которой приложено равномерно распределенное давление. Оболочка состоит из двух вставленных друг в друга полых круговых цилиндров. В недеформированном состоянии внешний радиус внутреннего цилиндра больше внутреннего радиуса внешнего цилиндра. Таким образом, исследуемая цилиндрическая оболочка состоит из двух предварительно напряжённых слоёв. Требуется определить, как возникающие начальные напряжения влияют на устойчивость данной конструкции. Для решения этой задачи используется модель нелинейно-упругого изотропного несжимаемого материала. Получены уравнения нейтрального равновесия, линеаризованные граничные условия и условия сопряжения на границе между слоями. На основе точного решения нелинейной задачи Ламе для составного цилиндра находится невозмущенное состояние равновесия. Задача устойчивости сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение полученной системы позволяет ответить на вопрос о влиянии начальных внутренних напряжений на величину критического давления, действующего на рассматриваемый составной цилиндр.

1. Постановка задачи.

Полый круговой цилиндр с внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом b_1 вставлен в другой полый круговой цилиндр внутреннего радиуса a_2 и внешнего радиуса b_2 таким образом, что $b_1 > a_2$. На внешнюю поверхность действует равномерно распределённое давление q (Рис.1).

Пусть r_1 — радиальная координата первого цилиндра, r_2 — радиальная координата второго цилиндра. Очевидно, $a_1 \leq r_1 \leq b_1$ и $a_2 \leq r_2 \leq b_2$.

Деформация каждого из цилиндров описывается следующим преобразованием координат:

$$R_k = R_k(r_k), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \lambda_k z, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь r_k, φ, z и R_k, Φ, Z ($k = 1, 2$) — цилиндрические координаты, соответственно, недеформированной и деформированной конфигураций составного цилиндра. Координаты с индексом $k = 1$ относятся к внутренней части, $k = 2$ — к внешней.

Тензор градиента деформации, соответствующий (1):

$$\mathbf{C}_k = R'_k(r_k) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{R_k(r_k)}{r_k} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \lambda_k \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ — ортонормированный векторный базис цилиндрических координат.

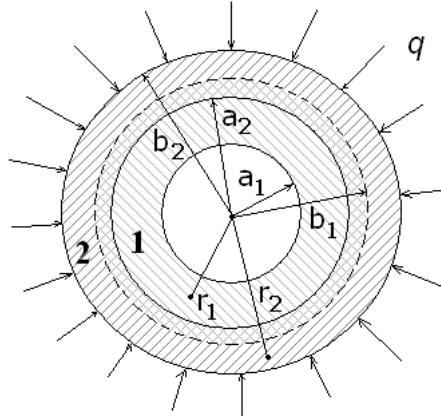


Рис. 1. Общий вид поперечного сечения частей двуслойного цилиндра до вставки.

Используя условие несжимаемости $\det \mathbf{C}_k = 1$, находим выражения $R_k(r_k)$ для каждого цилиндра

$$R_1(r_1) = \sqrt{R_i^2 + \frac{r_1^2 - a_1^2}{\lambda_1}}, \quad R_i = R_1(a_1),$$

$$R_2(r_2) = \sqrt{R_e^2 + \frac{r_2^2 - b_2^2}{\lambda_2}}, \quad R_e = R_2(b_2)$$
(3)

2. Докритическое состояние.

Считаем, что поведение материала цилиндров описывается неогуковской моделью, причём модуль сдвига одинаков для обоих цилиндров:

$$\mathbf{D}_k = \mu \mathbf{C}_k + p_k(r_k) \mathbf{C}_k^{-T}, \quad k = 1, 2.$$
(4)

Здесь \mathbf{D}_k — тензор напряжений Пиолы, μ — модуль сдвига, $p_k(r_k)$ — функции гидростатического давления, \mathbf{C}_k — тензор градиента деформации.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k = 0, \quad k = 1, 2,$$
(5)

где ∇ — набла-оператор в отсчётной конфигурации.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_1|_{r_1=a_1} = 0, \quad \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{D}_2 + q\mathbf{C}_2^{-T})|_{r_2=b_2} = 0,$$

$$\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{C}_1^T \cdot \mathbf{D}_1)|_{r_1=b_1} = \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{C}_2^T \cdot \mathbf{D}_2)|_{r_2=a_2}, \quad R_1(b_1) = R_2(a_2).$$

Из уравнений равновесия (5) находим дифференциальные уравнения для функций гидростатического давления $p_k(r_k)$, $k = 1, 2$; тогда, используя граничные условия, получаем

$$p_2(r_2) = -q - \mu \left[\frac{b_2^2}{R_e^2} + \frac{(R_e^2 - b_2^2)(R_2^2(r_2) - R_e^2)}{2R_e^2 R_2^2(r_2)} + \ln \frac{b_2 R_2(r_2)}{r_2 R_e^2} \right],$$

$$p_1(r_1) = p_2(a_2) - \mu \left[\frac{b_1^2 - a_2^2}{R_1^2(b_1)} + \frac{(R_1^2 - a_1^2)(R_1^2(r_1) - R_1^2(b_1))}{2R_1^2(b_1)R_1^2(r_1)} + \ln \frac{b_1 R_1(r_1)}{r_1 R_1(b_1)} \right]. \quad (6)$$

Четвёртое граничное условие даёт связь между внутренним и внешним радиусами текущей конфигурации, откуда получаем зависимость величины q внешнего давления от внешнего радиуса R_e . Благодаря этому величину R_e можно считать параметром деформации рассматриваемого составного цилиндра, что удобно при решении задачи устойчивости.

3. Нейтральное равновесие.

Пусть равновесное напряженно-деформированное состояние составного кольца, определяемое радиус-вектором \mathbf{r}_k ($k = 1, 2$) частицы, считается докритическим. Предположим, что наряду с ним существует бесконечно близкое равновесное состояние, которое определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_k^* = \mathbf{r}_k + \eta \mathbf{w}_k$, где \mathbf{w}_k — вектор добавочного перемещения, η — малый параметр.

Возмущённое состояние равновесия несжимаемого тела описывается уравнениями [1, 2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k^\bullet = 0, \quad \text{tr}(\mathbf{C}_k^{-1} \cdot \nabla \mathbf{w}_k) = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_k^\bullet = \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{r}_k + \eta \mathbf{w}_k) \right]_{\eta=0}, \quad k = 1, 2$$

Из (4) и (7) получаем запись для возмущённого тензора напряжений Пиолы

$$\mathbf{D}_k^\bullet = \mu \nabla \mathbf{w}_k + p_k (\mathbf{C}_k^{-T})^\bullet + p_k^\bullet \mathbf{C}_k^{-T}, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Линеаризованные граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_1^\bullet|_{r_1=a_1} = 0, \quad \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{D}_2^\bullet + q (\mathbf{C}_2^{-T})^\bullet)|_{r_2=b_2} = 0, \quad (9)$$

$$\left(\mathbf{D}_1 \frac{d\sigma_1}{d\Sigma_1} \right)^\bullet \Big|_{r_1=b_1} = \left(\mathbf{D}_2 \frac{d\sigma_2}{d\Sigma_2} \right)^\bullet \Big|_{r_2=a_2}, \quad \mathbf{w}_1(b_1) = \mathbf{w}_2(a_2). \quad (10)$$

Здесь $d\sigma_k$, $d\Sigma_k$ ($k = 1, 2$) — элементарные материальные площадки в недеформированной и деформированной конфигурации соответственно.

Запишем компонентное представление вектора перемещений \mathbf{w} и тензора \mathbf{D}^\bullet в базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{w}_k = u_k \mathbf{e}_r + v_k \mathbf{e}_\varphi + w_k \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{D}_k^\bullet = D_{k,rr}^\bullet \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + D_{k,r\varphi}^\bullet \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi + \dots; \quad k = 1, 2 \quad (11)$$

Из (7), (8), (11) получаем две системы четырех уравнений. В первую систему входят четыре неизвестные функции $u_1, v_1, w_1, p_1^\bullet$. Во вторую систему входят неизвестные функции $u_2, v_2, w_2, p_2^\bullet$. Поскольку все эти функции периодичны по угловой переменной φ , обе системы допускают решения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_k &= U_k(r_k) \cos(n\varphi + \alpha z), & v_k &= V_k(r_k) \sin(n\varphi + \alpha z), \\ w_k &= W_k(r_k) \sin(n\varphi + \alpha z), & p_k^\bullet &= P_k(r_k) \cos(n\varphi + \alpha z); \end{aligned} \quad (12)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2.$$

Переменная φ отделяется, и возникает краевая задача для двух систем четырех обыкновенных уравнений с неизвестными U_k, V_k, W_k, P_k и граничными условиями (9)–(10).

Применяя конечно-разностную запись [3], данную краевую задачу можно свести к однородной системе линейных алгебраических уравнений [4]. Условие существования нетривиального решения такой системы является характеристическим уравнением для определения критических значений внешнего равномерно распределенного давления q . С помощью данного уравнения находятся значения a_1, b_1, a_2, b_2, R_e , при которых имеет место потеря устойчивости.

5. Результаты.

В ходе численных экспериментов для конкретных значений a_1, b_1, a_2 были получены бифуркационные кривые, показывающие зависимость критических значений внешнего давления от величины натяга для разных значений относительной толщины и высоты внутреннего и внешнего цилиндров. Значение радиуса b_2 принято равным единице. На приведенных графиках (рис. 2–3) по оси абсцисс отложена величина натяга d , равная разности радиусов b_1 и a_2 , а по оси ординат — безразмерное критическое давление $Q^* = q^*/\mu$ (или $Q_0^* = q_0^*/\mu$ для штриховых кривых). Под областью устойчивости понимается часть плоскости параметров (d, Q^*) , лежащая ниже всех бифуркационных кривых. На рис. 2, рис. 3 сплошные кривые соответствуют составному кольцу, штриховые кривые — однородному кольцу, у которого внутренний и внешний радиусы в недеформированном состоянии равны, соответственно, внутреннему R_i и внешнему R_e радиусам составного кольца в состоянии равновесия, соответствующем нулевому внешнему давлению.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

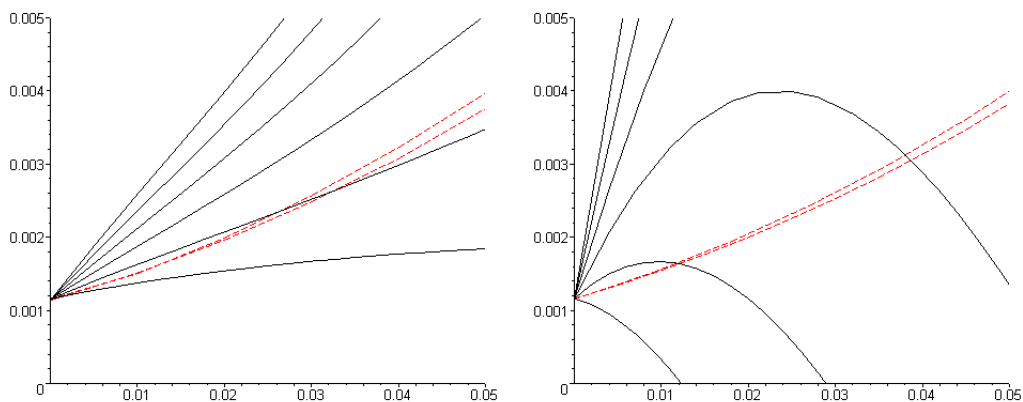


Рис. 2. Бифуркационные кривые для разных значений a_2 : 0 — 0,9; 1 — 0,91; 2 — 0,92; 3 — 0,93; 4 — 0,94; 5 — 0,95. Значения остальных параметров: $\nu = 0,1$; $a_1 = 0,9$; $b_2 = 1,0$; $d = b_1 - a_2$. Справа для сравнения приведены кривые, соответствующие плоским формам потери устойчивости [5].

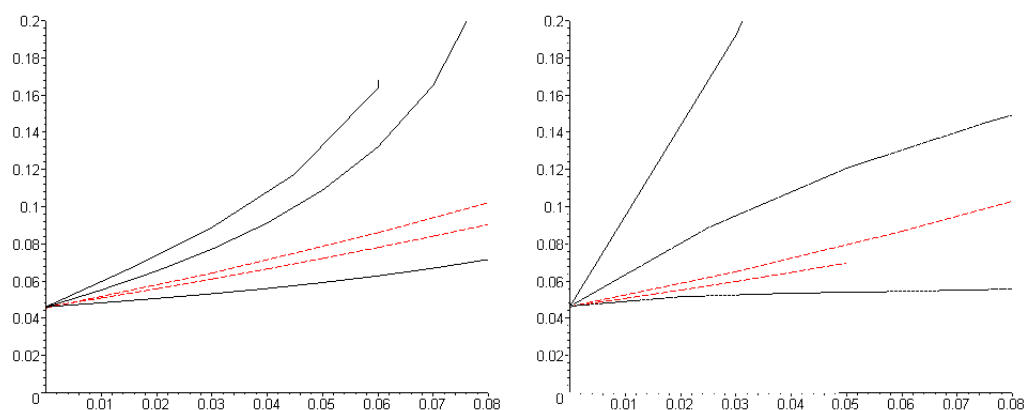


Рис. 3. Бифуркационные кривые для разных значений a_2 : 1 — 0,7; 2 — 0,75; 3 — 0,8. Значения остальных параметров: $\nu = 0.1$, $a_1 = 0,7$; $b_2 = 1,0$; $d = b_1 - a_2$. Справа — кривые, соответствующие плоским формам потери устойчивости [6].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
- [2] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [3] Zubov L. M., Moiseenko S. I. Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №5. С. 78–84.
- [4] Попов А. В. Устойчивость составного цилиндра с предварительным натягом // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X международной конференции. Ростов-на-Дону, 2006 г. С. 227–231.
- [5] Zubov L. M., Popov A. V. Устойчивость кольца с предварительным натягом // Изв. вузов. Северо-Кавказ. Регион. Естественные науки. 2008. № 1. С. 32–36.
- [6] Попов А. В. Исследование устойчивости толстостенного составного кольца // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XI международной конференции. Ростов-на-Дону, 2007 г. С. 210–214.

Попов А. В. *On stability of a double-layer hollow cylinder under external pressure.* The problem of stability of cylindrical shell under external pressure is investigated. The shell consists of two hollow cylinders inserted one into another. The outer radius of inner cylinder is larger than the inner radius of outer cylinder in undeformed state. Thus, cylindrical shell being investigated is made of two initially strained layers. The question is how these initial strains influence on the stability of given body. The model of nonlinearly elastic isotropic incompressible material is used for solving the problem. The equations of neutral balance, linearised boundary conditions and conditions at the border of two cylinders are derived. The subcritical state solution is obtained from the exact solution of a nonlinear Lamé's problem for such a compound cylinder. The problem of stability yields homogenous boundary-value problem for ODE-system. The numerical solution of the system obtained helps answering the question of initial strains influence on the critical values of external pressure.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД С УЧЕТОМ СВЯЗАННОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Пряхина О. Д., Смирнова А. В.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Актуальность исследований, посвященных изучению закономерностей проявления эффектов взаимодействия физических полей (механических, температурных, электрических) в деформируемых средах, обусловлена как широким использованием во многих отраслях науки и техники устройств, функционирующих на их основе, так и развитием новых технологий производства искусственных материалов, обладающих, например, хорошо выраженными пьезоэлектрическими или пирозэлектрическими свойствами. К числу важных проблем, возникающих при проектировании преобразователей различного типа, относятся определение волноводных свойств материалов и конструкций, а также обеспечение их механической и электрической прочности. Одним из подходов к решению указанных проблем является сведение уравнений термоэластостатики со смешанными граничными условиями к системам интегральных уравнений (СИУ). В работе предлагается эффективный метод построения СИУ для слоистых термоэластостатических сред, основанный на использовании фундаментальных результатов научных исследований в области решения статических и динамических смешанных задач классической теории упругости, выполненных академиком РАН И. И. Воровичем и под его руководством.

Постановка задачи. Рассмотрим гармонические с частотой ω колебания пакета N термоэластостатических слоев

$$-2 \sum_{k=1}^N h_k = -H \leq x_3 \leq 0, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty,$$

нижняя грань которого жестко сцеплена с недеформируемым основанием, поддерживается при постоянной температуре, металлизирована и закорочена. Поверхность среды в области Ω_0 подвергается механическому, тепловому и электрическому воздействию, характеристики которого могут быть заданными, либо определяться из решения контактной задачи. На границах смены физико-механических свойств слоев имеются дефекты разных типов — включения, занимающие области Ω_{kp} , и трещины, плоской в плане формы $\tilde{\Omega}_{km}$, $p = 1, 2, \dots, P_k$, $m = 1, 2, \dots, M_k$; P_k и M_k — количество включений и трещин соответственно, расположенных в одной плоскости ($k = 1, 2, \dots, N - 1$). В областях Ω_{kp} задаются векторы перемещений, потенциал электрического поля и температура (прирост температуры от естественного состояния), равные на верхней и нижней границах включения. В областях $\tilde{\Omega}_{km}$ задаются механические напряжения, нормальные составляющие вектора электрической индукции и нормальные составляющие вектора теплового потока, которые принимаются равными на обоих берегах трещины. Среди множеств Ω_{kp} , $\tilde{\Omega}_{km}$ могут быть и пустые.

Везде далее рассматриваются амплитудные значения заданных и искомых функций без учета временного множителя $e^{-i\omega t}$.

Физико-механические свойства среды описываются компонентами тензоров упругих постоянных $c_{ijkl}^{E,\theta}$, пьезомодулей e_{kij}^θ , диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_{ij}^{s,\theta}$, а также температурными коэффициентами механических напряжений λ_{ij}^E , пироэлектрическими коэффициентами p_i^s и плотностью материала ρ . Верхние индексы E, θ, s указывают, что соответствующие величины измерены при постоянном электрическом и температурном поле, а также при постоянном уровне деформаций; в дальнейшем индексы опущены. Система уравнений термоэластоупругости при отсутствии объемных сил и внутренних источников тепла представима в форме

$$\begin{aligned} c_{ijkl} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_l \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} + \rho \omega^2 w_i - \lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} &= 0, \\ e_{ikl} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_l \partial x_i} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} + p_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= 0, \\ k_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + i\omega T_0 \left(\lambda_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - p_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \alpha_* \theta \right) &= 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $w_i(x_1, x_2, x_3)$ — компоненты вектора перемещений, $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ — электрический потенциал, $\theta(x_1, x_2, x_3)$ — относительная температура точек среды с координатами (x_1, x_2, x_3) . Причем, $\theta = T - T_0$, T и T_0 — абсолютная и начальная температура, α_* — коэффициент, который определяется термическими и физическими характеристиками среды.

Оси декартовой системы координат наряду с x_1, x_2, x_3 будем обозначать x, y, z .

Для компактной записи граничных условий введем в рассмотрение расширенный вектор напряжений, компонентами которого являются горизонтальные (t_1, t_2) и вертикальная (t_3) компоненты вектора механических усилий, нормальные составляющие вектора электрической индукции (t_4) и вектора теплового потока (t_5) . Примем следующие обозначения для расширенного вектора напряжений:

- в произвольной точке среды $\mathbf{t}(x, y, z) = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, d_3, g_3\} = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$,
- на верхней грани $\mathbf{t}_0(x, y) = \mathbf{t}|_{z=0} = \{t_{10}, t_{20}, t_{30}, t_{40}, t_{50}\}$,
- в плоскостях раздела слоев $z = \tilde{z}_k = -2 \sum_{n=1}^k h_n$

$$\mathbf{t}_k^+(x, y) = \mathbf{t}|_{z=\tilde{z}_k+0} = \{(t_1)_k^+, (t_2)_k^+, (t_3)_k^+, (t_4)_k^+, (t_5)_k^+\},$$

$$\mathbf{t}_k^-(x, y) = \mathbf{t}|_{z=\tilde{z}_k-0} = \{(t_1)_k^-, (t_2)_k^-, (t_3)_k^-, (t_4)_k^-, (t_5)_k^-\}.$$

Аналогично компонентами расширенного вектора перемещений примем горизонтальные (w_1, w_2) и вертикальную (w_3) составляющие вектора механических перемещений, а также потенциал электрического поля (w_4) и температуру (w_5) :

$$\mathbf{w}(x, y, z) = \{w_1, w_2, w_3, \varphi, \theta\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\},$$

$$\mathbf{w}_0(x, y) = \mathbf{w}|_{z=0},$$

$$\mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}|_{z=\tilde{z}_k+0} = \{(w_1)_k^+, (w_2)_k^+, (w_3)_k^+, (w_4)_k^+, (w_5)_k^+\},$$

$$\mathbf{w}_k^- = \mathbf{w}|_{z=\bar{z}_k-0} = \{(w_1)_k^-, (w_2)_k^-, (w_3)_k^-, (w_4)_k^-, (w_5)_k^-\}.$$

В этих обозначениях смешанные граничные условия на поверхности среды и на границах раздела слоев примут вид

$$\begin{cases} \mathbf{w}(x, y, z)|_{z=0} = \mathbf{w}_0(x, y), & (x, y) \in \Omega_0, \\ \mathbf{t}_0(x, y) = 0, & (x, y) \notin \Omega_0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_{kp}^0, & (x, y) \in \Omega_{kp}, \\ \Delta \mathbf{t}_{kp} = 0, & (x, y) \notin \Omega_{kp}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{t}_{km}^0, & (x, y) \in \tilde{\Omega}_{km}, \\ \Delta \mathbf{w}_{km} = 0, & (x, y) \notin \tilde{\Omega}_{km}, \end{cases} \quad (3)$$

условия на нижней грани пакета слоёв

$$\mathbf{w}(x, y, -H) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{w}_0 , $\mathbf{w}_{kp}^0 = \mathbf{w}_{kp}^+ = \mathbf{w}_{kp}^-$, $\mathbf{t}_{km}^0 = \mathbf{t}_{km}^+ = \mathbf{t}_{km}^-$ — векторы, заданные соответственно в Ω_0 , Ω_{kp} и $\tilde{\Omega}_{km}$; $\Delta \mathbf{t}_{kp}$ — скачок расширенного вектора напряжений при переходе через включение, $\Delta \mathbf{w}_{km}$ — скачок расширенного вектора перемещений на берегах трещины, $p = 1, 2, \dots, P_k$, $m = 1, 2, \dots, M_k$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

$$\Delta \mathbf{t}_{kp}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{t}_{kp}^+ - \mathbf{t}_{kp}^-, & (x, y) \in \Omega_{kp}, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_{kp}, \end{cases} \quad \Delta \mathbf{w}_{km}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{w}_{km}^+ - \mathbf{w}_{km}^-, & (x, y) \in \tilde{\Omega}_{km}, \\ 0, & (x, y) \notin \tilde{\Omega}_{km}. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения (1) с граничными условиями (2)–(4) приводятся к системе интегральных уравнений первого рода относительно расширенного вектора контактных напряжений \mathbf{t}_0 , имеющего носитель Ω_0 , скачков $\Delta \mathbf{t}_{kp}$, $\Delta \mathbf{w}_{km}$ расширенных векторов напряжений и перемещений на границах включений и трещин с носителями Ω_{kp} , $\tilde{\Omega}_{km}$. Для построения СИУ на первом этапе методом интегральных преобразований решаются вспомогательные краевые задачи с граничными условиями, получающимися из смешанных путем допущения, что указанные векторы известны в областях своего определения. В силу линейности дифференциальных операторов, формирующих уравнения движения, и краевых условий задачи ее решение представимо в виде суперпозиции решений вспомогательных задач о колебаниях многослойной термоэластостатической среды, источником которых являются: поверхностный объект, включение или трещина, совокупность включений (задача 1) или трещин (задача 2).

Функционально-матричные соотношения, вытекающие из решения этих задач, связывающие в трансформантах Фурье расширенные векторы напряжений и перемещений произвольной точки среды с заданными поверхностными усилиями, скачками векторов напряжений, перемещений, определяют матрицу-символ Грина краевой задачи.

Вывод функционально-матричных соотношений. Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$x_k = x, \quad y_k = y, \quad z_k = z + 2 \sum_{m=1}^{k-1} h_m + h_k, \quad -h_k \leq z_k \leq h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

При решении вспомогательных задач к уравнениям движения (1) и граничным условиям, описывающим расширенные векторы перемещения $\mathbf{w}_k(x, y, z_k)$ и напряжения $\mathbf{t}_k(x, y, z_k)$ в k -ом слое, применяется интегральное преобразование Фурье по пространственным координатам x, y с параметрами α, β .

Для представления блочной матрицы-символа ядра СИУ $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ в форме, удобной для проведения дальнейшего анализа и допускающей простую интерпретацию результатов, введем специальные матрицы, характеризующие положение дефектов в среде. Для трещины, расположенной в плоскости $z = -2 \sum_{k=1}^p h_k$, вводится матрица

$$\mathbf{S}_{Np} = \mathbf{K}_p^- (h_1, h_2, \dots, h_p) - \mathbf{K}_{N-p} (h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_N),$$

для включения в той же плоскости — матрица

$$\mathbf{G}_{Np} = [\mathbf{K}_p^- (h_1, h_2, \dots, h_p)]^{-1} - [\mathbf{K}_{N-p} (h_{p+1}, h_{p+2}, \dots, h_N)]^{-1}.$$

Здесь \mathbf{K}_p^- — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, \mathbf{K}_{N-p} — матрица Грина пакета $(N - p)$ слоев на жестком основании.

В этих обозначениях блочная матрица-символ $\mathbf{K} = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$ СИУ построена в [1–4].

При наличии в среде только включений (задача 1)

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{G}_{Ni}^{-1}, & i = j, \\ -\mathbf{K}_i^- \mathbf{R}_{ij}^- \mathbf{S}_{Nj}^{-1} \mathbf{K}_{N-j}, & i < j, \\ -\mathbf{K}_{N-i} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{S}_{Nj}^{-1} \mathbf{K}_j^-, & i > j; \end{cases} \quad (5)$$

при наличии в среде только трещин (задача 2)

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{S}_{Ni}^{-1}, & i = j, \\ \mathbf{R}_{ij}^- \mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i < j, \\ \mathbf{R}_{ij} \mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i > j; \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\mathbf{R}_{km} = (-1)^{(k-m)} \prod_{i=k}^{m+1} \mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i) \mathbf{B}_+(-h_i), \quad \mathbf{R}_{km}^- = \prod_{i=k+1}^m \Phi_i^{-1}(h_1, h_2, \dots, h_i) \mathbf{B}_-(h_i).$$

Рекуррентная процедура вычисления матриц $\mathbf{K}_m^- (h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\mathbf{K}_{N-m} (h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N)$, $\Phi_m (h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\mathbf{F}_{N-m} (h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_N)$ приведена в [5, 6]. Вспомогательные матрицы \mathbf{B}_\pm даются в [7].

Соотношения (5), (6) позволяют моделировать любое сочетание неоднородностей в среде, обладающей сложными физико-механическими свойствами. Их использование для построения матриц-символов ядер СИУ на примере ряда динамических задач рассматриваемого класса для упругих изотропных, термоупругих и электроупругих слоистых сред приведено в [8–11].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-3765.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // ДАН. 2006. Т. 411. № 3. С. 330–333.
- [2] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Свойства определителей символов ядер интегральных уравнений, соответствующих простейшим «вирусам» вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 4. С. 18–25.
- [3] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов вибропрочности» // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 2. С. 44–53.
- [4] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Об одном подходе к исследованию динамических задач термоэлектроупругости для анизотропных сред с дефектами различной природы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Спецвыпуск. 2006. С. 30–41.
- [5] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.
- [6] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Рекуррентная процедура вычисления элементов матрицы Грина многослойных сред // Вестник ЮНЦ РАН. Т. 4. № 1. 2008. С. 3–7.
- [7] *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
- [8] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К исследованию волноводных свойств пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 55–65.
- [9] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Динамические задачи для составных пьезоэлектриков с системой электродов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 1. С. 59–65.
- [10] *Качко Д. Л., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Пьезоактивные волны сдвига в двухслойных электропроводящих средах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 1. С. 44–53.
- [11] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Березин Н. С., Качко Д. Л.* К расчету динамических характеристик гексагональных пьезоэлектриков // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2009. № 5. С. 30–33.

Pryakhina O. D., Smirnova A. V. *The integral equations of dynamic problems for multilayered environments taking into account coherence of physical fields.* The effective method construction of matrixes-symbols kernels of the integral equations in dynamic problems of thermoelectroelasticity for layered environments is stated at presence various type of non-uniformity.

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С КРАЕВЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Саакян А. В.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Смешанные, в частности, контактные задачи теории упругости нередко сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши, называемых также уравнениями с неподвижной особенностью. Решение этих уравнений связано с определенными трудностями.

В настоящей работе на примере двух задач с краевыми трещинами показана эффективность применения метода дискретных особенностей для решения подобных уравнений. Получены квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для вычисления раскрытия трещины.

1. Введение. Использование квадратурных формул типа Гаусса для решения сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) с ядром Коши на отрезке представлено в работе [1]. Работа претендует на хрестоматийный характер, поскольку рассматриваются с.и.у. первого рода, второго рода и уравнения с обобщенным ядром Коши. Для каждого типа уравнения предлагается алгоритм решения и представляются результаты решения соответствующих смешанных задач. Однако, к сожалению, в указанной работе отсутствует единая методика: для уравнений первого рода используются корректные квадратурные формулы типа Гаусса и сведение с.и.у. к системе линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) носит обоснованный характер, для уравнений второго рода используется метод ортогональных многочленов, в случае же уравнений с обобщенным ядром Коши для сингулярных интегралов предлагается формально использовать квадратурные формулы типа Гаусса, применимые к обычным интегралам, вследствие чего далее приходится прибегать к определенным ухищрениям, дабы получить стабильные, но отнюдь не гарантированно верные, результаты. Тем не менее, эта работа имеет важное значение в силу обширности представленного материала и удачного подбора задач для представления методов исследования поведения решений в особых точках.

Метод дискретных особенностей (м.д.о.) является универсальным способом решения с.и.у. практически независимо от рода, поскольку основан на квадратурных формулах наивысшей алгебраической точности, выведенных для сингулярных интегралов с весовой функцией $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ без каких-либо ограничений на α и β , кроме необходимого $Re(\alpha, \beta) > -1$. Применение м.д.о. к решению с.и.у. второго рода с действительным коэффициентом при свободном члене показано в работе [2], а с комплексным коэффициентом — в работе [3]. Отметим, что для с.и.у. первого рода получаемая с.л.а.у. полностью совпадает с приведенной в работе [1].

Для иллюстрации эффективности м.д.о. параллельно построим решения двух задач для краевых трещин, сводящихся к одинаковому с.и.у. с обобщенным ядром Коши и рассмотренных ранее другими авторами [1, 6], и проведем их сравнение

с имеющимися. Решения этих задач отличаются друг от друга тем, что в первом случае [1] оно неограничено на обоих концах отрезка интегрирования, а во втором [6] только на одном конце имеет корневую особенность.

Предлагается квадратурная формула для вычисления определенного интеграла с переменным верхним пределом от ядра с весовой функцией Якоби по значениям подинтегральной функции в корнях соответствующего многочлена Якоби, которая позволяет определить раскрытие трещины по найденным из основного уравнения значениям.

2. Определяющие уравнения и численный анализ. Рассмотрим задачу для составной упругой плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, в одной из которых содержится перпендикулярная к линии соединения и выходящая на нее трещина [1] и задачу для упругой полуплоскости с выходящей на границу трещиной [6]. В обеих задачах предполагается, что к берегам трещины приложена нормальная нагрузка, в частности, равномерная.

Согласно работам [1, 6] определяющим уравнением для обеих задач является следующее уравнение относительно производной скачка нормальной компоненты перемещения берегов трещины $F(t)$

$$\int_{-1}^1 \frac{F(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 K(x,t)F(t)dt = \pi f(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (1)$$

где

$$K(x,t) = \frac{c_0}{t+x+2} + c_1(1+x) \frac{d}{dx}(t+x+2)^{-1} + c_2(1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2}(t+x+2)^{-1}.$$

Для первой задачи c_0 , c_1 и c_2 — постоянные, зависящие от отношения модулей сдвига полуплоскостей и их коэффициентов Пуассона, а для второй задачи $c_0 = -1$, $c_1 = -6$, $c_2 = -2$.

При этом для первой задачи к уравнению (1) следует добавить условие непрерывности перемещений в концах трещины, которое выражается равенством:

$$\int_{-1}^1 F(t)dt = 0 \quad (2)$$

Функция $F(t)$ представляется в виде

$$F(t) = (1-t)^{-0.5}(1+t)^\beta g(t) \quad (|t| < 1). \quad (3)$$

В первой задаче β определяется из трансцендентного уравнения

$$2d_1 \cos \pi(\beta + 1) - d_2(\beta + 1)^2 - d_3 = 0;$$

где d_1 , d_2 и d_3 — постоянные, а во второй задаче $\beta = 0$.

Воспользуемся следующей квадратурной формулы для сингулярного интеграла, полученной в [4],

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{x-z} dx \approx \sum_{j=1}^n \frac{w_j \varphi(\xi_j)}{(\xi_j - z)} \left[1 - \frac{q(z)}{q(\xi_j)} \right] \quad (Re[\alpha, \beta] > -1; z \neq \pm 1) \quad (4)$$

где ξ_i ($i = 1, n$) — корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$,

$$q(\zeta) = \begin{cases} -\left(\frac{2}{\zeta-1}\right)^m 2^{\alpha+\beta} B(m+\alpha, m+\beta) F\left[m, m+\alpha; 2m+\alpha+\beta; \frac{2}{1-\zeta}\right] \\ \frac{1}{2}[q(\xi+i0) + q(\xi-i0)] \end{cases} \quad (-1 < \xi < 1)$$

$$w_j = \frac{2}{m+\alpha+\beta} \frac{q(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_j)}, \quad m = n+1.$$

Поскольку формула (4) применима для любой точки комплексной плоскости, кроме $z = \pm 1$, то все интегралы в уравнении (1) могут быть заменены конечными суммами. Уравнение (1) примет вид

$$\sum_{i=1}^n w_i g(\xi_i) \left[\frac{[1 - q_i(x)]}{\xi_i - x} + R(\xi_i, x) \right] = \pi f(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (5)$$

где

$$R(\xi_i, x) = c_0 \psi(x) + c_1(1+x) \frac{d\psi(x)}{dx} + c_2(1+x)^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}, \quad \psi(x) = \frac{[1 - q_i(-x-2)]}{\xi_i + x + 2}$$

Согласно м.д.о., для получения с.л.а.у. относительно $g(\xi_i)$ необходимо функциональное уравнение (5) приравнять в корнях функции $q[x]$, которая для первой задачи имеет $(n-1)$ корень, а для второй задачи n корней. Во избежание необходимости вычисления корней функции $q(x)$, которая не является полиномом, можно в качестве точек коллокации выбрать корни полинома Чебышева $T_{n-1}(x)$ в первой задаче и $T_n(x)$ во второй задаче. Для второй задачи получаем замкнутую с.л.а.у. относительно $g(\xi_i)$, для первой же задачи в качестве n -ого уравнения выступает дискретизированное условие (2)

$$\sum_{i=1}^n w_i g(\xi_i) = 0 \quad (6)$$

Напомним, что в работе [1] уравнения (1), (2) сведены к с.л.а.у. на основе на квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 F(x, t) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \approx \sum_{i=1}^N w_i F(\xi_i, t) \quad \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > -1, \quad (7)$$

которая формально принята верной и для сингулярных интегралов, входящих в уравнение (1).

В работе [6] решение уравнения (1) разыскивается в виде

$$F(t) = \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (8)$$

и уравнение (1) сводится к с.л.а.у. на основе квадратурной формулы, применимой для с.и.у. первого рода, взяв при этом в качестве дополнительного условия условие $v(-1) = 0$.

Для сравнения на (рис. 1) представлены решения уравнения (1), построенные по алгоритмам работ [1, 6] (метки) и по м.д.о. (сплошная линия). Показана лишь окрестность неподвижной особенности, поскольку именно здесь проявляется неточность в подходах. В левой части рисунка кружочками показаны значения $g(t_i)$ [1] при $N = 40$, а крестиками — при $N = 250$, сплошная линия соответствует порядкам $n = 8$ и $n = 20$ м.д.о. В правой части кружочками показаны значения $v(t_i)/\sqrt{1+t_i}$ [6] при $N = 40$, а крестиками — при $N = 80$, сплошная линия соответствует порядкам $n = 12$ и $n = 22$ м.д.о.

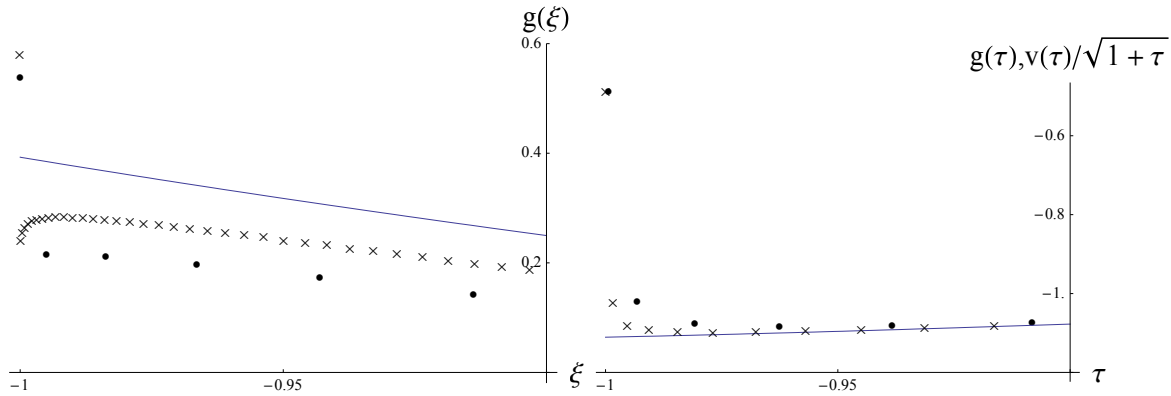


Рис. 1.

Слияние кривых м.д.о, а также приближение меток к сплошным линиям при увеличении порядка интерполяции явно указывают на верность квадратурной формулы (4) и обоснованность м.д.о.

3. Квадратурная формула для определения раскрытия трещины. Для определения раскрытия трещины необходимо вычислить определенный интеграл от искомой функции $F(t)$ с переменным верхним пределом. Построим квадратурную формулу для вычисления этого интеграла по найденным из системы (5) значениям $g(t_i)$.

Рассмотрим следующий интеграл

$$I(y) = \int_{-1}^y f(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \quad (|y| \leq 1, \operatorname{Re}[\alpha, \beta] > -1) \quad (9)$$

Заменим функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом

$$f(x) = \frac{2}{n + \alpha + \beta + 1} \sum_{i=1}^n \frac{f(\xi_i) P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{(x - \xi_i) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}, \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) = 0 \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и пользуясь равенством Кристоффеля–Дарбу для многочленов Якоби [5] и значениями интеграла с переменным верхним пределом от многочлена Якоби и весовой функции, для интеграла $I(y)$ окончательно получим следующую квадратурную формулу

$$I(y) = -\frac{2(1+y)^{\beta+1}}{n + \alpha + \beta + 1} \frac{k_{n+1}h_n}{k_n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\xi_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i) P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(\xi_i)} \left[\frac{2^{-\beta-1} \Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(2 + \beta)} \times \right.$$

$$\times F\left(\beta + 1, -\alpha; 2 + \beta; \frac{1+y}{2}\right) - (1-y)^{\alpha+1} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_i) P_{m-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(y)}{2m h_m} \Bigg]$$

Для часто встречающегося случая $\alpha = \beta = -0.5$ будем иметь:

$$\int_{-1}^y \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \left[\arcsin y + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1-y^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\xi_k) U_{m-1}(y)}{m} \right]$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Erdogan F., Gupta G.D. and Cook T.S.* Numerical solution of singular integral equations // *Mechanics of Fracture*. G.C.Sih ed. V.1, Noordhoff, Leyden, 1973, pp. 368–425.
- [2] *Лифанов И. К., Саакян А. В.* Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения // *ПММ*. 1982. Т. 46. № 3. С. 494–501.
- [3] *Саакян А. В.* Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом, встречающихся в смешанных задачах теории упругости // *Доклады НАН РА*. 1997. Т. 97. № 4. С. 32–36.
- [4] *Саакян А. В.* Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов // *Сб. науч. трудов «Проблемы механики тонких деформируемых тел», посвященный 80-летию академика С. А. Амбарцумяна*. Ереван. 2002. С. 259–265.
- [5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, СМБ, том 2. М.: Наука, 1966. 296 с.
- [6] *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1976. 443 с.

Sahakyan A. V. *Method of discrete singularities in use to solution of the problems for regions with boundary cracks.* The effectiveness of the method of discrete singularities for solution of the singular integral equations with generalized Cauchy kernel is shown on example of two problems with boundary cracks. The quadrature formula of the highest algebraic precision for definition of a crack disclosing is presented.

ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ К УСТОЙЧИВЫМ СТАЦИОНАРНЫМ ТЕЧЕНИЯМ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ

Сазонов Л. И.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ*

Для некоторого класса устойчивых стационарных решений системы Навье–Стокса во внешней области пространства \mathbb{R}^3 установлено существование глобальных по времени возмущений и получены оценки L_p - норм возмущений при $t \rightarrow \infty$.

Введение. Пусть v — стационарное решение системы Навье–Стокса во внешней области Ω пространства \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u, \nabla)u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Будем предполагать, что поле v имеет вид $v = u_\infty e_1 + w$, где $u_\infty = \text{const}$, а w в определенном смысле стремится к нулю на бесконечности.

Собственно для задачи обтекания $f = 0$ и $v|_{\partial\Omega} = 0$, но ниже рассматривается общий случай. Осуществляя замену $u \div u + v$, приходим к уравнению для возмущений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u_\infty \partial_1 u - (w, \nabla)u - (u, \nabla)w - (u, \nabla)u - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем рассматривать возмущения, удовлетворяющие условию $u|_{\partial\Omega} = 0$. Обозначим через $S_p = S_p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) подпространство в $L_p^3(\Omega)$, являющееся замыканием множества всех гладких финитных соленоидальных полей. Применяя к системе (2) гидродинамический проектор $\Pi : L_p^3(\Omega) \rightarrow S_p$ ($1 < p < \infty$), сведем возмущенную систему Озеена к ОДУ в пространстве S_p

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu + Ku, \quad (3)$$

где A, B, K — операторы вида

$$Au = \Pi(\Delta u - u_\infty \partial_1 u), \quad Bu = -\Pi((w, \nabla)u + (u, \nabla)w), \quad Ku = -\Pi((u, \nabla)u). \quad (4)$$

Далее уравнение (3) будем исследовать методами теории полугрупп, следуя методике, развитой В.И. Юдовичем в [1] для исследования гидродинамической устойчивости течений жидкости в ограниченных областях пространства \mathbb{R}^3 . Полугрупповой подход для исследования эволюционных уравнений развивался в работах Э. Хилле, Р. Филлипса, М. А. Красносельского, С.Г. Крейна, П.Е. Соболевского, Т. Като, В.И. Юдовича и многих других авторов. В частности, отметим

работу Т. Като [2], в которой для уравнения (3) при $B = 0$, $u_\infty = 0$ установлены теоремы существования локальных и глобальных при малых начальных данных решений в пространстве $S_n(\mathbb{R}^n)$ и их асимптотика при $t \rightarrow \infty$. Сошлемся также на работу [3], в которой установлена одна абстрактная теорема об устойчивости и доказана асимптотическая устойчивость нулевого равновесия системы Навье–Стокса в пространстве \mathbb{R}^3 . Следует отметить, что полугрупповой подход к системе Навье–Стокса активно развивается в последние десятилетия и в его рамках исследованы вопросы глобальной разрешимости в различных функциональных пространствах (правда, в основном при условии определенной малости начальной скорости и поля внешних сил). По этому поводу смотрите, например, [4] и имеющуюся там библиографию.

В случае $B = 0$ ($w = 0$) главная линейная часть уравнения (3) представлена оператором Озеена A , который в каждом пространстве $S_p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) с областью определения $D(A) = W_p^2(\Omega) \cap S_p(\Omega)$ порождает аналитическую полугруппу Озеена $T(t)$. В [5] для этой полугруппы установлены степенные $L_p - L_q$ — оценки и выполнено обоснование метода линеаризации, включающее, в частности, результаты об устойчивости и неустойчивости стационарных течений трехмерной задачи обтекания. Для возмущенного оператора Озеена $\tilde{A} = A + B$ аналогичные оценки приведены в [6], в [7] на их основе получены условия устойчивости стационарных решений в терминах спектра возмущенного оператора Озеена. Данная работа продолжает указанное направление. Ниже устанавливается существование малых глобальных решений системы (3) в некоторых банаховых пространствах и доказываются оценки L_p –норм решений из этих пространств при $t \rightarrow \infty$ без предположения об их малости.

Существование малых решений. Рассмотрим вопрос о глобальной разрешимости задачи Коши возмущенной системы Озеена (3). Ее решения будем понимать в обобщенном смысле как решения интегрального уравнения для возмущений с начальным условием u_0

$$u(t) = \tilde{T}(t)u_0 + \int_0^t \tilde{T}(t-s)(\nabla, u)u(s) ds. \quad (5)$$

Предварительно сформулируем результат об оценках возмущенной полугруппы Озеена из [7].

Теорема 1. Пусть $w \in L_\rho \cap L_\infty$, $\rho < 3$ и возмущенный оператор Озеена $\tilde{A} = A + B$, где операторы A, B определены в (4), не имеет собственных векторов с собственными числами в полуплоскости $\{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ в одном из пространств $S_p(\Omega)$ ($p > 2$). Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки

$$\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\theta\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq} t^{-|\theta|/2 - (3/2)(1/p - 1/q)} \quad (6)$$

при выполнении следующих условий $|\theta| \leq 1$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $q > 3/2$ при $|\theta| = 0$, $3/2 < p \leq q < \infty$ при $|\theta| = 1$.

Далее условия теоремы 1 предполагаются выполненными.

Введем банахово пространство $X(q, \alpha, \beta)$ вектор-функций из $C((0, \infty), S_q(\Omega))$ с конечной нормой

$$\|u\|_{X(q, \alpha, \beta)} = \sup_t \|t^\alpha(1+t)^\beta u(t)\|_q.$$

Ввиду оценок возмущенной полугруппы Озеена (6) справедлива

Лемма 1. *Для оператора Q , определяемого соотношением*

$$(Qu)(t) = \int_0^t \tilde{T}(t-s)(\nabla, u)u(s) ds \tag{7}$$

при выполнении условий $\alpha < 1/2$, $0 \leq 2/q - 1/p < 1/3$, $q \geq 3$ справедливы оценки

$$\|Qu(t)\|_p \leq c \|u\|_{q, \alpha, \beta}^2 \begin{cases} t^{1/2-(3/2)(2/q-1/p)-2\alpha}(1+t)^{-2\beta}, & \alpha + \beta < 1/2; \\ t^{1/2-(3/2)(2/q-1/p)-2\alpha}(1+t)^{2\alpha-1}, & \alpha + \beta > 1/2. \end{cases}$$

Непосредственно из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Пусть $q > 3$, $0 \leq \alpha \leq (1-3/q)/2$, $(1-3/q)/2 \leq \alpha + \beta \leq (1+3/q)/2$, $\alpha + \beta \neq 1/2$. Тогда оператор Q непрерывно действует из $X_{q, \alpha, \beta}$ в $X_{q, \alpha', \beta'} \subset X_{q, \alpha, \beta}$, причем $\alpha' = 2\alpha + (3/q - 1)/2$, и $\beta' = 2\beta$ при $\alpha + \beta < 1/2$, $\beta' = 1 - 2\alpha$ при $\alpha + \beta > 1/2$.*

Кроме того справедливы неравенства

$$\|Qu(t)\|_{q, \alpha, \beta} \leq c(q, \alpha, \beta) \|u\|_{q, \alpha, \beta}^2, \tag{8}$$

$$\|Qu_1 - Qu_2\|_{q, \alpha, \beta} \leq c(q, \alpha, \beta) \|u_1 - u_2\|_{q, \alpha, \beta} \max \|u_j\|_{q, \alpha, \beta}. \tag{9}$$

Ввиду леммы 2 имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2.*

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, что при выполнении условия $\|\tilde{T}(t)u_0\|_{X_{q, \alpha, \beta}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ интегральное уравнение (5) имеет единственное решение в пространстве $X_{q, \alpha, \beta}$, причем $\|u(t)\|_{X_{q, \alpha, \beta}} \leq c\varepsilon$.

Пусть $u(t)$ – решение из пространства $X_{q, \alpha, \beta}$, тогда

$$\|u(t) - \tilde{T}(t)u_0\|_q \leq ct^{-\alpha'}(1+t)^{-\beta'} \|u\|_{q, \alpha, \beta}^2,$$

где α' , β' определены в лемме 2.

Если $\alpha' + \beta' > \alpha + \beta$ и $\|\tilde{T}(t)u(0)\|_q \geq \eta t^{-\alpha-\beta}$, то

$$\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \{t^{\alpha+\beta} \|u(t)\|_q\} \geq \eta.$$

Эту теорему можно использовать для оценок решений при различных предположениях относительно начального условия u_0 . Ограничимся одним частным случаем. Пусть $u_0 \in S_r(\Omega)$. Из условий леммы 2 следует, что $r = 3$. Поэтому $\tilde{T}(t)u_0 \in X_{q, \alpha(q), 0}$, $(\alpha(q) = (1-3/q)/2)$ при любом $q > 3$. Для решения $u(t)$ интегрального уравнения для возмущений справедлива оценка

$$\|u(t)\|_p \leq ct^{-\alpha(p)} (\|u_0\|_3 + \|u\|_{q, \alpha(q), 0}^2) \tag{10}$$

при выполнении условий $p \geq 3$, $2/q - 1/3 < 1/p \leq 2/q$. В результате приходим к следующему заключению: если $u(t) \in X_{q,\alpha(q),0}$ при некотором $q > 3$, то $u(t) \in X_{q,\alpha(q),0}$ при всех $q \geq 3$.

В частности, из неравенства (10) вытекает

Следствие. Если возмущенный оператор Озеена не имеет собственных значений в полуплоскости $\{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, то стационарное решение устойчиво по Ляпунову в пространстве $S_3(\Omega)$.

Оценки решений. Пусть $u(t)$ — решение интегрального уравнения возмущений с начальным условием $u|_{t=0} = u_0$. Дальнейшей целью является исследование поведения этого решения при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от принадлежности начального условия u_0 тому или иному классу пространств.

Предварительно заметим, что из теоремы 2 следует, что при любом фиксированном $q > 3$ и достаточно малой константе ε_0 существует единственное решение интегрального уравнения возмущений, принадлежащее пространству $X(q, \alpha, \beta)$, если q, α, β удовлетворяют условиям леммы 2.

Далее, не предполагая малости решения $u(t)$, будем считать, что $u(t)$ принадлежит одному из пространств $X(p, \alpha, \beta)$, в котором заведомо существуют решения, хотя бы и малые, и исследовать вопрос о принадлежности этого решения более узкому пространству такого типа, если этому пространству принадлежит поле $\tilde{T}(t)u_0$.

Согласно теореме 2 наиболее широким в этом смысле пространством при $p > 3$ является $X(p, \alpha_*(p), 0)$, где $\alpha_*(p) = 1/2 - n/(2p)$. Однако, в этом случае оператор Q , вообще говоря, не улучшает класс решения (см. лемму 1). Поэтому будем предполагать, что решение $u(t)$ принадлежит более узкому пространству $X(p, \alpha_*(p), \beta)$, где в качестве β можно взять любое сколь угодно малое положительное число.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть выполнено условие

$$u_0 \in S_r(\Omega) \cap S_l(\Omega), \quad 1 \leq r < n \leq l < \infty$$

и $u(t)$ — решение интегрального уравнения возмущений, принадлежащее пространству $X(p, \alpha_*(p), \beta)$ при $p > 3$ и некотором $\beta > 0$. Тогда $u(t)$ принадлежит всем пространствам $X(q, \alpha_*(q), \beta^*(q))$ при $q > \max(r, 3/2)$ и $\beta^*(q) = (3/2)(1/r - 1/3)$, в частности, при больших t справедлива оценка

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-3/2(1/r-1/q)}$$

при $q > \max(r, 3/2)$.

Теорема 4. Предположим, что дополнительно к предположениям теоремы 3 выполнено условие $u_0 = \partial v_0$, где $v_0 \in S_\varrho(\Omega)$, $1/\varrho \leq 1/r \leq 1/\varrho + 1/3$. Тогда при больших t и $q > \max(\varrho, 3/2)$ справедлива оценка

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-1/2-(3/2)(1/\varrho-1/q)}.$$

Отметим, что несмотря на большое количество работ об асимптотике по времени решений системы Навье–Стокса (см., например, [8]), представленные результаты являются новыми, так как получены для возмущенной системы Навье–Стокса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической ведомственной целевой программы развития научного потенциала высшей школы (грант № 211/6095).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону, 1984.
- [2] *Kato T.* Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equation in R^m , with applications to weak solutions // *Math. Z.* 1984. Vol. 187. pp. 471–480.
- [3] *Сазонов Л. И., Юдович В. И.* Устойчивость стационарных решений параболических уравнений и системы Навье–Стокса во всем пространстве // *Сиб. матем. журнал.* 1989. Т. 29, №1. С. 151–158.
- [4] *Biler P., Cannone M., Karch G.* Asymptotic stability of Navier–Stokes flow past an obstacle // *Vanach center publications.* 2004. Vol. 66. pp. 47–59.
- [5] *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1994. Т. 58, №5. С. 85–109.
- [6] *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена // *Владикавказский математический журнал.* 2009. Т. 11, №3. С. 50–61.
- [7] *Сазонов Л. И.* Об устойчивости стационарных решений задачи обтекания // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Актуальные проблемы гидродинамики. Естественные науки. Спецвыпуск.* 2009. С. 195–199.
- [8] *Hyung Ohk Bae, Bum Ja Jin* Temporal and spatial decay rates of Navier–Stokes solutions in exterior domains // *Bull. Korean Math. Soc.* 2007. Vol. 44. pp. 547–567.

Sazonov L. I. *Estimations for convergence of nonstationary solutions to the stable stationary regimes in outer flow problem.* Navier–Stokes equations in the outer region of the space \mathbb{R}^3 is considered. The existence of perturbations that are global in time is established and their L_p -norm estimations are obtained for $t \rightarrow \infty$.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ И ЗВУКОИЗЛУЧЕНИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА

Сафроненко В. Г.* , Трифонов В. В.* , Шутько В. М.**

**НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

***Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматриваются вынужденные гармонические колебания цилиндрической оболочки трехслойной структуры из полимерного композита в акустической среде. Определяющие уравнения полимерного связующего соответствуют теории термовязкоупругости. Для описания процесса распространения акустических волн используется уравнение Гельмгольца. Реализуется численный подход, связанный с использованием метода разложения в Фурье с последующим применением метода прогонки. Исследуются амплитудно-частотные и диссипативные характеристики оболочки, а также дальнее поле звукового давления в зависимости от параметров задачи.

1. Рассмотрим вынужденные колебания произвольной непологой оболочки вращения трехслойной структуры, погруженной в сжимаемую идеальную жидкость. Пусть оболочка отнесена к ортогональной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, при этом координатная поверхность $\alpha_3 = 0$ совпадает со срединной поверхностью заполнителя. В дальнейшем используем гипотезу о ломаной линии для пакета [1], в соответствии с которой кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= u_1 + [1 + k_1(\alpha_3 - c)]c\varphi_1 + \alpha_3\vartheta_1, & u_2^{(1)} &= u_2 + [1 + k_2(\alpha_3 - c)]c\varphi_2 + \alpha_3\vartheta_2; \\ u_3^{(1)} &= w \quad (c \leq \alpha_3 \leq c + h_1); \\ u_1^{(2)} &= u_1 + [1 + k_1(\alpha_3 - c)]c\varphi_1 + \alpha_3\vartheta_1, & u_2^{(2)} &= u_2 + [1 + k_2(\alpha_3 - c)]c\varphi_2 + \alpha_3\vartheta_2; \quad (1) \\ u_3^{(2)} &= w \quad (-c - h_2 \leq \alpha_3 \leq -c); \\ u_1^{(3)} &= u_1 + \alpha_3(\varphi_1 + \vartheta_1), & u_2^{(3)} &= u_2 + \alpha_3(\varphi_2 + \vartheta_2); \\ u_3^{(3)} &= w \quad (-c \leq \alpha_3 \leq c). \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения: u_i, w — перемещения точек отсчетной поверхности, φ_1, φ_2 — углы поворота нормали в заполнителе, дополнительные к углам поворота ϑ_1 и ϑ_2 , k_i, A_i — главные кривизны и коэффициенты Ляме, $h_1, h_2, 2c$ — толщины внешних слоев и заполнителя.

В соответствии с (1) деформационные соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(1)} &= E_{11} + \alpha_3 K_{11} + c\varphi_{11} + (\alpha_3 - c)c\eta_{11} \quad (1 \iff 2); \\ \varepsilon_{12}^{(1)} &= E_{12} + 2\alpha_3 K_{12} + c\varphi_{12} + 2(\alpha_3 - c)c\eta_{12} \quad (c \leq \alpha_3 \leq c + h_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(2)} &= E_{11} + \alpha_3 K_{11} - c\varphi_{11} - (\alpha_3 + c)c\eta_{11}; \\ \varepsilon_{12}^{(2)} &= E_{12} + 2\alpha_3 K_{12} - c\varphi_{12} - 2(\alpha_3 + c)c\eta_{12} \quad (-c - h_2 \leq \alpha_3 \leq -c); \\ \varepsilon_{11}^{(3)} &= E_{11} + \alpha_3(K_{11} + \varphi_{11}), \quad \varepsilon_{12}^{(3)} = E_{12} + 2\alpha_3(2K_{12} + \varphi_{12}), \quad \varepsilon_{13}^{(3)} = \varphi_1, \quad \varepsilon_{23}^{(3)} = \varphi_2.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь E_{ij} ($i, j = 1, 2$) — деформации срединной поверхности; K_{ij} — изменения кривизн и кручения

$$\begin{aligned}E_{11} &= u_1' + k_1 w, \quad E_{22} = u_2^\bullet + \psi u_1 + k_2 w, \quad E_{12} = u_1^\bullet - \psi u_2 + u_2'; \\ K_{11} &= \vartheta_1'; \quad K_{22} = \vartheta_2^\bullet + \vartheta_1 \psi; \quad 2K_{12} = \vartheta_2' - \vartheta_2 \psi + \vartheta_1^\bullet;\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \varphi_1', \quad \varphi_{22} = \varphi_2^\bullet + \psi \varphi_1, \quad \varphi_{12} = \varphi_1^\bullet + \varphi_2' - \psi \varphi_2; \\ \vartheta_1 &= -w' + u_1 k_1, \quad \vartheta_2 = -w^\bullet + u_2 k_2; \\ \eta_{11} &= (k_1 \varphi_1)', \quad \eta_{22} = (k_2 \varphi_2)^\bullet + \psi k_1 \varphi_1, \quad \eta_{12} = k_1 \varphi_1^\bullet + k_1 \varphi_2' - \psi k_2 \varphi_2; \\ \varepsilon_1 &= h_*/R_*, \quad \psi = A_2'/A_2, \quad (\cdot)' = (\cdot)_{,\alpha_1}/A_1, \quad (\cdot)^\bullet = (\cdot)_{,\alpha_2}/A_2.\end{aligned}$$

Уравнения движения оболочки, соответствующие (1)–(3) имеют вид:

$$\begin{aligned}L_1(T_{11}, T_{22}, S) + k_1 Q_{11} + X_1 &= a_1 \ddot{u}_1 + a_2 \ddot{\vartheta}_1 + a_3 \ddot{\varphi}_1; \\ L_2(T_{22}, S) + k_2 Q_{22} + X_2 &= a_1 \ddot{u}_2 + a_2 \ddot{\vartheta}_2 + a_4 \ddot{\varphi}_2; \\ L_3(Q_{11}, Q_{22}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + X_3 + p &= a_1 \ddot{w}; \\ L_1(M_{11}, M_{22}, H) - Q_{11} = 0, \quad L_2(H, M_{22}) - Q_{22} &= 0; \\ L_1(m_{11} + \bar{M}_{11} c k_1, \quad m_{22} + \bar{M}_{22} c k_1; m_{12} + 2\bar{H} c k_1) - Q_{13} &= 0; \\ L_2(m_{12} + 2\bar{H} c k_2, \quad m_{22} + \bar{M}_{22} c k_2) - Q_{23} &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь введены в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}L_1(f_1, f_2, \varphi) &= f_1' + \varphi^\bullet + \psi(f_1 - f_2), \quad L_2(f_1, f_2) = f_1' + f_2^\bullet + 2f_1 f_2 \\ L_3(f_1, f_2) &= f_1' + f_2^\bullet + \psi f_1.\end{aligned}\quad (5)$$

X_r ($r = 1, 2, 3$), p — компоненты внешней нагрузки и нормальной реакции со стороны жидкости. В (5) введены обобщенные усилия, моменты и перерезывающие силы, осредненные по пакету оболочки.

Пусть оболочка находится под воздействием поверхностной нагрузки, циклически изменяющейся во времени:

$$X_k(\alpha_1, \alpha_2, t) = q_k(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\omega t},$$

q_k — интенсивность нагрузки, ω — частота.

В аналогичной форме представим все кинематические, деформационные и силовые факторы. В отношении определяющих соотношений для материалов слоев

примем, что они могут быть описаны с позиций ортотропной термовязкоупругости [2]. В условиях гармонического нагружения и в случае малых колебаний они принимают для k -го слоя вид

$$\sigma_{11}^{(k)} = E_1^{(k)} / (1 - \hat{\nu}_1^{(k)} \hat{\nu}_2^{(k)}) (\varepsilon_{11}^{(k)} + \hat{\nu}_2^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)}) \quad (1 \iff 2);$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \hat{G}_{12}^k \varepsilon_{12}^k, \quad \sigma_{i3}^{(k)} = \hat{G}_{i3}^3 \varphi_i. \quad (6)$$

Здесь представлены комплекснозначные амплитуды напряжений и деформаций, а также комплексные аналоги модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и модулей сдвига. После осреднения (6) по толщине пакета получим связь между амплитудами обобщенных усилий, моментов и деформационных характеристик

$$T_{11} = \hat{B}_{11} E_{11} + \hat{B}_{12} E_{22} + \hat{A}_{11} K_{11} + \hat{A}_{12} K_{22} + \hat{F}_{11} \varphi_{1,\alpha_1} + \hat{F}_{12} \varphi_{2,\alpha_2} + \hat{F}_{13} \varphi_1;$$

$$M_{11} = \hat{A}_{11} E_{11} + \hat{A}_{12} E_{22} + \hat{D}_{11} K_{11} + \hat{D}_{12} K_{22} + \hat{N}_{11} \varphi_{1,\alpha_1} + \hat{N}_{12} \varphi_{2,\alpha_2} + \hat{N}_{13} \varphi_1; \quad (7)$$

$$H = \hat{A}_{33} E_{12} + 2\hat{D}_{33} K_{12} + \hat{N}_{33} \varphi_{1,\alpha_2} + \hat{N}_{44} \varphi_{2,\alpha_1} + \hat{N}_{55} \varphi_2, \quad Q_{i3} = \hat{G}_{i3}^3 \varphi_i;$$

и т. д.

Для замыкания соотношений (1)–(7) необходимо определить динамическую реакцию на оболочку со стороны жидкости, в которую она погружена. Это может быть произведено с помощью метода моделирования локального импеданса [3, 4]. После нахождения полей перемещений и давления на поверхности оболочки можно определить поле динамического давления в жидкости с помощью интеграла Гельмгольца

$$P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[P(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} \right) - \frac{\partial P(\mathbf{r}_1)}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR_1}}{R_1} \right) \right] dS,$$

где S — срединная поверхность оболочки, k_1 — волновое число, \mathbf{r} , \mathbf{r}_1 радиус-векторы точек в жидкости и на оболочке: $R_1 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|$. Для численного исследования используется подход, связанный с модальным представлением искомых функций в виде разложений в комплекснозначные ряды Фурье [5]

$$Y(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_n [Y_{n(-1)}(\alpha_1) \sin n\alpha_2 + Y_{n(1)}(\alpha_1) \cos n\alpha_2].$$

После отделения координаты α_2 и приведения всех соотношений к безразмерному виду формируется квазиодномерная система нормального вида 12 порядка, решаемая методом ортогональной прогонки:

$$\frac{dy_1}{d\alpha_i} = A_i f_1(\alpha_1, m, \bar{y}), \quad \bar{y} = y_i. \quad i = 1..12$$

Используемый метод модального анализа позволяет определять коэффициенты поглощения соответствующие различным модам, а также его суммарное значение.

2. В качестве примера рассмотрим цилиндрическую трехслойную оболочку, колеблющейся в сжимаемой жидкости. Физико-механические характеристики внешних слоев соответствуют стали: $E^{(1)} = E^{(2)} = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0$; $\rho = 7,8$ г/см³.

Уравнения состояния полимерного заполнителя соответствуют модели термовязкоупругого тела [6]. Компоненты комплексной податливости при сдвиге I' , I'' в обозначениях [6] имеют вид:

$$I'(\omega, T) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)}{G(r, \nu, T)} \left[1 - H(r) \frac{\omega^2}{\varphi(r, \nu, T)^2 + \omega^2} \right] dr;$$

$$I''(\omega, T) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C(r)H(r)}{G(r, \nu, T)} \frac{\varphi(r, \nu, T)\omega}{\varphi(r, \nu, T)^2 + \omega^2} dr. \quad (8)$$

Модель предполагает отсутствие объемной релаксации. Граничные условия соответствуют жесткому защемлению торцов. Для определения реакции жидкости на колебания оболочки используется импеданс на бесконечно длинной цилиндрической оболочке. Численные расчеты проводились при следующих геометрических параметрах: $L=350$ мм; $R=100$ мм; $h_1 = h_2 = 0,2$ мм, $2s=1$ мм; $T = 22^{\circ}C$. Нагрузка единичной интенсивности распределена на цилиндрической панели, расположенной в середине образующей. На рис. 1–3 представлены результаты расчетов помодовых и суммарных значений АЧХ нормального перемещения в центре площадки

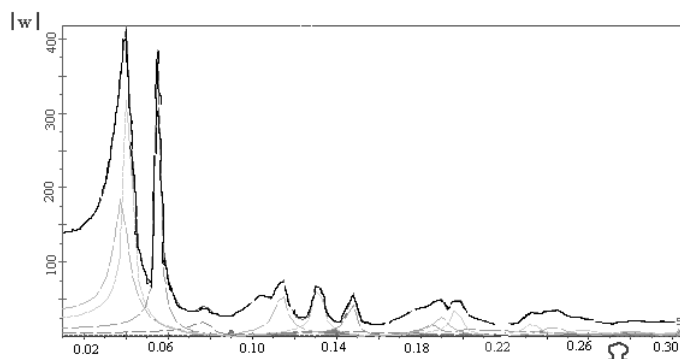


Рис. 1.

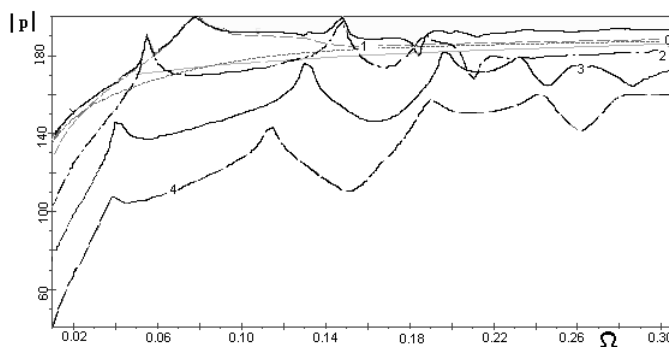


Рис. 2.

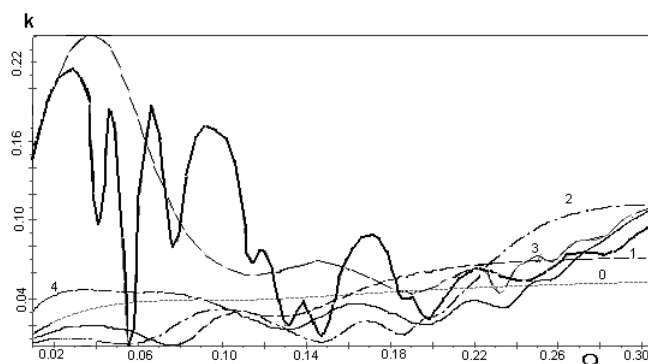


Рис. 3.

нагружения, коэффициента поглощения энергии и поля акустического давления в жидкости на расстоянии 50 радиусов оболочки от ее оси вращения на прямой, проходящей через центр площадки нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., 1973. 172 с.
- [2] Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970. 280 с.
- [3] Chertock G. I. Acoust. Soc. Amer. 1964. V.36. N7. pp. 1305–1313.
- [4] Юдин А. С., Амбалова Н. М. // Прикл. мех., 1989. Т.25. N12. С. 63–68.
- [5] Сафроненко В. Г., Шепелева В. Г., Шутько В. М. // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. Научные труды. Вып.1. Н.Новгород: ННГУ, 1993. С. 144–149.
- [6] Степаненко Ю. П., Исаев К. В., Азаров А. Д. // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды II Международной конференции. Ростов-на-Дону. 19–20 сентября 1996 г. Т.1. С. 118–123.

Safronenko V. G., Trifonov V. V., Shutko V. M. *Numerical solution of vibration and sound irradiation problems in a three-layer cylindrical composite polymeric shell.* Forced harmonic vibrations of a cylindrical shell of a three-layer structure of the polymer composite in the acoustic media are considered. Constitutive equations of the polymer matrix confirm with thermoviscoelasticity theory. To describe the propagation of acoustic waves the Helmholtz equation is used. Numerical approach that uses the method of expansion in Fourier series with the subsequent application of the sweep method is implemented. The amplitude-frequency and dissipation characteristics of the shell, as well as the far of sound pressure depending on the parameters of the problem are investigated.

КОНЦЕПЦИЯ ОСЛАБЛЕННОЙ ЗОНЫ И ПРОЧНОСТЬ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ

Симонов И. В.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва

Предложен дислокационный подход к изучению поведения ослабленной зоны в упругом теле — разреза, по всей поверхности которого действуют ненулевые силы сцепления. Он основан на описании раскрытия разреза некоторой базисной функцией, содержащей произвольные постоянные и удовлетворяющей ряду физических ограничений, включая «правильное» поведение напряжений и смещений у его вершин. Это позволяет рассмотреть общие закономерности эволюции такого дефекта с ростом внешних нагрузок и строить аналитические оценки предельных нагрузок независимо от природы сил сцепления. Указанный подход использован в задачах взаимодействия трещиноподобных дефектов и при анализе прочности поликристалла с применением теории перколяции.

Кинетику зарождения трещин в квазихрупком материале можно рассматривать с разных позиций, в частности исходя из концепции ослабленной зоны (ОЗ) [1]. При этом подразумевается, что исходный высокопрочный материал не содержит микро-нанотрещин, что, собственно, и делает его высокопрочным, а их возникновению при повышенных нагрузках предшествует эволюция ОЗ. Они образуются на стадии формирования композиционного материала или спекания поликристалла, а также в различных процессах нагружения таких материалов. Как известно, межфазные границы притягивают различного рода дефекты в микро-нано масштабе: пористость, дислокации, инородные атомы и молекулы. Тем самым на этих границах образуются участки, поверхности которых связаны между собой силами гораздо более слабыми, чем атомно-молекулярные силы в сплошном материале. Это и есть ослабленные зоны.

При действии относительно небольшой растягивающей нагрузки σ ОЗ не раскрываются — силы сцепления еще достаточны, чтобы удержать их поверхности вместе. В этом состоит коренное отличие ОЗ от идеальной или неидеальной трещины. После преодоления некоторого порога $\sigma > \sigma_{tr}$ начинается раскрытие ОЗ и эволюция сил сцепления. Далее при превышении нагрузкой предельного значения $\sigma > \sigma_c > \sigma_{tr}$ происходит разрыв связей в некоторых точках поверхности ОЗ — силы сцепления обращаются в ноль в этих точках и ОЗ превращается в зародыш неидеальной трещины, что можно трактовать как начало локального разрушения. Поскольку методами лазерной интерферометрии или рентгенографии измерениям поддается именно раскрытие, а не силы сцепления, целесообразно использовать обобщенный дислокационный подход с целью изучения фундаментальных особенностей поведения ОЗ.

В [1] изучено поведение симметричной ОЗ, занимающей участок $-1 < X < 1$ на границе раздела двух упругих полуплоскостей. При этом силы адгезии σ_a были представлены в виде произвольного ряда по четным степеням X , что после удовлетворения асимптотическому требованию слабой сингулярности равносильно разложению раскрытия ОЗ $w(X)$ в ряд по степеням $(1 - X)^{n/2}$, $n = 3, 5, \dots$

Показано, что нельзя ограничиться случаем постоянства σ_a , как в известных моделях неидеальных трещин, так как это приводит к противоречию.

Для рассмотрения взаимодействия близко расположенных дефектов предложена другая базисная модель [2, 3], учитывающая а priori не симметрию раскрытия $w(X)$ и необходимые физические ограничения в виде дислокации специальной формы и переходящей в результат [1] в случае симметрии

$$w = w_0 T^{3/2}, \quad T = T(X, \eta) = \frac{1 - X^2}{(1 + \eta^2 - 2\eta X)}, \quad (1)$$

где w_0 и η — неизвестные амплитуда и величина смещения максимума w от центра зоны $X = 0$. Асимптотика (1) при $X \rightarrow \pm 1 \mp 0$ есть следующий после постоянного слагаемого член разложения раскрытия гриффитсовской трещины у вершины. Качественно эта асимптотика раскрытия ОЗ совпадает с аппроксимацией измеренных в опытах значений скачка смещений в концевой зоне трещины, где действуют силы сцепления [4]. Задание скачка смещений в виде (1) делает задачу о поведении ОЗ гораздо более простой для аналитического решения методами функций комплексного переменного, чем в случае прямого задания закона связи $\sigma_a = \sigma_a(w)$, что приводит к необходимости решения систем сингулярных нелинейных уравнений.

Параметр η определяется из дополнительного условия минимума напряжения сцепления в точке максимума раскрытия $w(x)$. Амплитуда w_0 остается свободным параметром в силу заложенной в модель неопределенности указанного закона. Однако, при наличии априорной информации об этом законе этот произвол можно попытаться ликвидировать, приближенной подгонкой полученного общего решения под конкретный закон. Критерий превращения ОЗ в микротрещину по аналогии с известным δ_c -критерием в теории неидеальных трещин есть обращение в нуль сил сцепления в точке $X = X_m = -\eta$, где раскрытие имеет заданный максимум w_c , параметр материала, и переписывается так

$$w_0 = w_c \iff \sigma_a(X_m) = 0. \quad (2)$$

Условие (2) используется для явного определения предельной нагрузки такого превращения.

По-видимому Броберг первым обратил внимание на механизм образования микродефектов впереди распространяющейся трещины и последующего их слияния [5]. Экспериментальные наблюдения подтвердили эту гипотезу. Взаимодействие длинной трещины и ОЗ малой длины — один из возможных сценариев прерывистого движения трещины, когда оно задерживается прочным элементом микроструктуры, а впереди за барьером формируется ОЗ.

Рассмотрено взаимодействие полубесконечной трещины с короткой ОЗ длины ℓ через разделяющий их барьер малой ширины d [2, 3]. На берега трещины действуют растягивающие силы Σ на «большом» расстоянии L и силы сцепления на «малом» расстоянии ℓ_0 от вершины. Из решения определяются критическая нагрузка превращения ОЗ в трещину Σ_c и минимальная нагрузка Σ_* , при которой происходит разрушение барьера согласно критерию Нейбера–Новожилова. Какой из сценариев реализуется: разрушается барьер и трещина поглощает ОЗ ($\Sigma_c > \Sigma_*$)

или сначала ОЗ трансформируется в трещину и это усиливает воздействие на барьер зависит от набора заданных параметров. По длине адгезионные силы $\sigma_a(x)$ меняются значительно, в несколько раз, если ОЗ расположена близко к вершине трещины, — следствие того, что она погружена в существенно несимметричное внешнее поле напряжений. Это вызывает несимметрию ее раскрытия, что учтено при построении модели ОЗ (1). Максимум $\sigma_a(x)$ в ближайшей к трещине вершине ОЗ слабо зависит от длины ОЗ ℓ и существенно — от ширины барьера d . Из решения можно рассчитать закон деформирования связей $\sigma_a = \sigma_a(w)$. Эта зависимость оказалась близка к линейной с малым искажением вблизи вершин ОЗ.

Рассмотрена также задача о взаимодействии двух межфазных ОЗ разной длины, погруженных во внешнее поле растягивающих напряжений. Она решается с теми же целями и в рамках той же модели ОЗ (1), что и предыдущая задача о взаимодействии трещины и ОЗ. Определению подлежат уже два параметра несимметрии η_1 и η_2 . По ходу решения также определяются критическая нагрузка превращения одной из ОЗ в трещину и предельная нагрузка разрыва барьера между ними.

Мелкозернистые тела и, особенно, наноструктуры интенсивно изучаются в настоящее время из-за их уникальных механических свойств, таких как твердость, прочность, сверхпластичность. Известны различные подходы к моделированию зарождения, накопления и слияния дефектов в таких телах, включая методы молекулярной динамики. Так, например, предложена модель накопления нантрещин при одноосном растяжении поликристалла при условии, что критические напряжения вычисляются как в задаче о единичной трещине отрыва [6].

Другой подход [7] основан на предположении о появлении ослабленных зон на гранях кристаллов в поликристаллическом теле. Рассматривая разные масштабы, в дополнение к результатам [1] вводится степенной закон связи критического раскрытия с полудлиной грани a . Критическая нагрузка перехода ОЗ в трещину дается формулой с той же зависимостью от a : $\sigma_c = ka^{-\gamma}$. Исходя из заданных распределений граней по длинам и по ориентации и используя критерий формирования макротрещины согласно теории перколяции, получены выражения для концентраций трещин отрыва и сдвига при двухосном растяжении и предложен алгоритм расчета прочности поликристалла.

С целью калибровки модели использованы данные о прочности микро-нанокристаллической меди в двух опытах с характерными длинами граней, различающимися на два порядка: $2a_1 = 5$ мкм и $2a_2 = 0.059$ мкм и магниевого сплава Mg 5% Al 5% Nd ($a_1 = 1$ мкм и $a_2 = 0.05$ мкм) при одноосном растяжении [8, 9]. Рассчитанные по экспериментальным данным значения параметра γ для меди и магниевого сплава оказались близкими: $\gamma = 0.25$ и 0.24 .

Итак, предложен общий полуобратный подход к решению задач для упругого тела с ослабленными зонами, в частности, погруженными в существенно несимметричное поле напряжений. Он основан на априорном задании скачка смещений в области ОЗ в виде двухпараметрической базисной функции, учитывающей основные особенности поведения напряжений и смещений в концевых областях и несимметрию. Преимущество этого подхода — независимость от конкретной физической природы сил адгезии, возможность сравнительно простого исследова-

ния закономерностей взаимодействия систем трещиноподобных дефектов. Недостаток — приближенность, устранимая добавлением членов более высокого порядка. Подход апробирован в задачах взаимодействия длинной трещины и малой ОЗ, а также двух ОЗ, где предельными состояниями являются момент перехода ОЗ в иное качество — трещину или состояние, предшествующее разрушению барьера между дефектами. Анализ этих ситуаций полезен для понимания явления прерывистого распространения трещин в материалах со структурой. Важно что при анализе решений этих задач не получено физических противоречий. Следовательно, подход в какой-то мере оправдан. Отметим, что путь прямого задания зависимости сил сцепления от раскрытия приводит к математическим сложностям, к лишению изящности решения и простоты понимания результата.

Работа частично поддержана Программой Президиума РАН № 11.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Simonov I. V., Karihaloo B. L.* When does an adhesively bonded weak zone become the nucleus of a crack? // *Int. J. Solids Struct.* V. 37. № 46-47. pp. 7055–7069.
- [2] *Симонов И. В.* Модель несимметричной ослабленной зоны в задачах взаимодействия трещиноподобных дефектов в упругой среде // *Докл. РАН.* 2004. Т. 398. № 5. С. 625–629.
- [3] *Simonov I. V., Karihaloo B. L.* Dislocation model of an asymmetric weak zone for problems of interaction between crack-like defects // *Philos. Magazin.* 2005. V. 85. № 17. pp. 1847–1864.
- [4] *Вавакин А. С., Козырев Ю. И., Салганик Р. Л.* Напряженно-деформированное состояние вблизи кончика трещины в полиметилкрилате // *Изв. РАН. МТТ.* 1969. № 2. С. 111–120.
- [5] *Broberg K. B.* On behaviour of the process region at a fast running crack tip // *Proc. IUTAM Symposium “High Velocity Deformation of Solids”/ Eds: Kozo Kawata and Jumpei Shiori.* 1977. pp. 182–194.
- [6] *Morozov N. F., Ovidko I. A., Petrov Yu. V., Sheinerman A. G.* Formation and convergence of nanocracks in mechanically loaded nanocrystalline solids // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2003. V. 4. pp. 65–69.
- [7] *Симонов И. В.* Ослабленные зоны и прочность поликристаллического тела // *Докл. РАН.* 2004. Т. 398. № 5. С. 625–629.
- [8] *Bansal S., Saxena A., Hartwig T., Tummala R. R.* // *Proc. Intern. Conf. Fracture.* Turine, Italy. 2005.
- [9] *Yan C., Ye L., Mai Y. W., Lu L., and Lai M. O.* // *Proc. Intern. Conf. Fracture.* Turine, Italy. 2005.

Simonov I. V. *The conception of weakened area and the strength of polycrystalline bodies.* A dislocation approach is proposed to studying the behaviour of a weakened area in an elastic body. The approach is used within problems of cracklike defects interaction and while analyzing the strength of a polycrystal using percolation theory.

ПАТОЛОГИЧЕСКАЯ ИЗВИТОСТЬ АРТЕРИЙ И ВОЗМОЖНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ЕЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Соколов А. В.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Рассмотрено явление патологической извитости позвоночных артерий и возможные механические причины ее возникновения. В качестве одного из методов исследования роли различных механических факторов в процессе возникновения патологической извитости и напряженно-деформированного состояния в стенке сосуда с патологией рассмотрен случай деформации пространственного изгиба полого нелинейно упругого сосуда, нагруженного внутренним гидростатическим давлением.

1. Патологическая извитость позвоночных артерий. Одним из наиболее малоизученных заболеваний сонных и позвоночных артерий является патологическая извитость. У каждого третьего умершего от инсульта находили патологические изгибы сонных или позвоночных артерий. Кроме того, острая и хроническая недостаточность кровообращения головного мозга может быть обусловлена не только атеросклеротическими стенозами, но и наличием перегибов и петель внутренних сонных и (или) позвоночных артерий. Причина извитостей чаще всего врожденная, но нередко удлинение артерии развивается при гипертонической болезни. Среди причин возникновения патологической извитости можно указать следующие [1]:

- сердце не до конца опускается в средостение в период внутриутробного развития;
- компрессия артерии мышечными структурами и соединительнотканными перетяжками, происхождение которых до сих пор не вполне понятно;
- укорочение шеи вследствие остеопороза шейных позвонков и дегенеративных изменений межпозвоночных дисков при остеохондрозе;
- возможен также наследственный характер заболевания.

Различают три вида патологической извитости [2], [3]:

1. Извитость — имеются изгибы артерий С и S-образной формы
2. Кинкинг — имеются перегибы удлиненных артерий под острым углом (ангуляция)
3. Койлинг — имеется удлинение артерий в виде петель и спиралей.

Наиболее опасными видами являются перегиб и петля. В области максимального изгиба возникает хаотичный характер кровотока, что приводит к снижению давления крови ниже перегиба и соответственно к снижению кровотока по мозговым артериям. В тоже время из врачебной практики известно [4], что форма извитости в зависимости от угла зрения в пространстве может плавно меняться от С- и S-образной извитости до сложной полной петли. Угол извитости также меняется в зависимости от фазы пульсовой волны (систола, диастола) и системного давления крови. Из анализа причин возникновения патологической извитости с

точки зрения механики можно сделать вывод, что основным фактором, приводящим к возникновению патологии, являются «поджатие» сосуда вследствие патологических изменений или аномалии развития окружающих его органов и тканей и вызываемая им потеря устойчивости кровеносного сосуда. Изучение напряженно-деформированного состояния пространственного изгиба на модели крупного артериального сосуда должно привести к более глубокому пониманию механизмов процесса образования патологической извитости артерий. В настоящий момент явление образования патологической извитости как процесса упругого деформирования кровеносного сосуда еще недостаточно исследовано. Современные исследования в этой области (например [5]) являются лишь первой ступенью приближения поведения реального объекта в живом организме. В работе [5] не учитываются ни существенная нелинейность упругих свойств артериальной стенки, ни пространственный характер геометрии патологической извитости.

2. Задача пространственного изгиба нелинейно упругого полого цилиндра при наличии внутреннего давления. Рассмотрим упругое тело, в отсчетной конфигурации имеющее форму полого кругового цилиндра внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r_1 . В отсчетной конфигурации введем базис цилиндрических координат $\{r, \varphi, z\}$, ось Oz параллельна образующей цилиндра.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство деформаций, описывающее пространственный изгиб цилиндрического тела [6]:

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1(r, \varphi) + lz \\ X_2 &= u_2(r, \varphi) \cos \omega z - u_3(r, \varphi) \sin \omega z \\ X_3 &= u_2(r, \varphi) \sin \omega z + u_3(r, \varphi) \cos \omega z \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u_k(r, \varphi)$ $k = 1, 2, 3$ — неизвестные функции, ω, l — некоторые заданные параметры. В данном случае тензор градиента деформации \mathbf{C} может быть представлен в виде $\mathbf{C}(r, \varphi, z) = C_{sk}(r, \varphi) \mathbf{e}_s \mathbf{j}_k$, где $s, k = 1, 2, 3$, $\mathbf{j}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2$, $\mathbf{j}_2 = (\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) \cos \omega z + \mathbf{e}_z \sin \omega z$, $\mathbf{j}_3 = -(\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) \sin \omega z + \mathbf{e}_z \cos \omega z$, \mathbf{e}_k — орты базиса цилиндрических координат в отсчетной конфигурации, \mathbf{j}_k — орты базиса декартовых координат в текущей конфигурации.

Очевидно, что мера деформации Коши

$$\mathbf{G}(r, \varphi, z) = G_{sk}(r, \varphi) \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = C_{sm} C_{km} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k$$

не зависит от координаты z .

Так как упругое тело однородно по координате z , то тензор напряжений Кирхгофа, а, следовательно, и тензор напряжений Пиолы $\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}$ будут функциями только координат (r, φ) поперечного сечения цилиндрической трубы. Таким образом, предположения (1) о виде деформации цилиндрического тела приводят исходную пространственную задачу к двумерной нелинейной краевой задаче для сечения бруса.

Для данной задачи уравнение равновесия можно представить в виде системы трех скалярных уравнений относительно трех функций двух переменных $u_k(r, \varphi)$, $k = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{21}}{\partial \varphi} - \omega D_{33} \sin \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial D_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{22}}{\partial \varphi} - \omega D_{33} \cos \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial D_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{23}}{\partial \varphi} + \omega (D_{32} \cos \varphi - D_{31} \sin \varphi) = 0.$$

Рассмотрим случай, когда внешняя поверхность цилиндрической трубы свободна от нагрузок, а внутренняя загружена равномерно распределенным гидростатическим давлением. В этом случае граничные условия записываются в виде:

i) На внешней поверхности:

$$D_{11}|_{\gamma_0} = D_{12}|_{\gamma_0} = D_{13}|_{\gamma_0} = 0.$$

ii) На внутренней поверхности:

$$D_{11}|_{\gamma_1} = -f B_{11}|_{\gamma_1},$$

$$D_{12}|_{\gamma_1} = -f B_{12}|_{\gamma_1},$$

$$D_{13}|_{\gamma_1} = -f B_{13}|_{\gamma_1}.$$

Здесь B_{ij} — компоненты тензора, обратного градиенту деформации; f — величина (интенсивность) внутреннего гидростатического давления; γ_0, γ_1 — внешний и внутренний граничные контуры поперечного сечения соответственно.

Более подробно постановка данной задачи представлена в работе [7].

Рассмотрим краевые условия на торцах бруса. Вычислим главный вектор \mathbf{F} и главный момент \mathbf{M} сил, действующих в произвольном поперечном сечении цилиндрической трубы, испытывающей деформацию вида (1), в случае, когда внешняя ее поверхность свободная от нагрузок, а внутренняя загружена равномерно распределенным гидростатическим давлением. В отсчетной конфигурации введем декартову систему координат, ось x_3 которой параллельна оси цилиндрической трубы.

$$\mathbf{F} = \iint_{\sigma} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} d\sigma + \oint_{\gamma_1} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{D} d\gamma = (F_1 + P_1)\mathbf{i}_1 + (F_2 + P_2)\mathbf{j}_2 + (F_3 + P_3)\mathbf{j}_3,$$

где \mathbf{n}^1 — вектор положительной нормали к внутреннему граничному контуру γ_1 , $F_k = \iint_{\sigma} D_{3k} d\sigma$, $P_k = \oint_{\gamma_1} [-f(n_1^1 B_{1k} + n_2^1 B_{2k})]$, $k = 1, 2, 3$.

Используя необходимое условие равновесия $\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(b)$ части цилиндрической трубы, ограниченной боковыми поверхностями и сечениями $x_3 = a$, $x_3 = b$, где a и b — произвольные действительные числа, получаем следующие соотношения:

$$s_2(F_2 + P_2) - s_3(F_3 + P_3) = 0, s_3(F_2 + P_2) + s_2(F_3 + P_3) = 0, \quad (2)$$

где $s_2 = \cos \omega b - \cos \omega a$, $s_3 = \sin \omega b - \sin \omega a$.

Определитель системы (2) относительно величин $F_2 + P_2$ и $F_3 + P_3$ отличен от нуля, следовательно, $F_2 + P_2 = F_3 + P_3 = 0$. Таким образом, главный вектор сил в сечении при деформации цилиндрической трубы под внутренним давлением вида (1) одинаков для всех сечений $x_3 = const$ и направлен вдоль оси X_1 .

Вычислим главный момент \mathbf{M} сил в сечении $x_3 = const$ относительно некоторой точки на оси $X_2 = X_3 = 0$. Так как, главный вектор параллелен такой оси, момент не зависит от выбора точки приведения на оси X_1 , и может быть вычислен относительно точки $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Учитывая, что $F_2 + P_2 = F_3 + P_3 = 0$, получаем:

$$\mathbf{M}(x_3) = - \iint_{\sigma} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} \times \mathbf{X} d\sigma - \oint_{\gamma_1} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{D} \times \mathbf{X} d\gamma = (M_1 + T_1)\mathbf{i}_1 + (M_2 + T_{12})\mathbf{j}_2 + (M_3 + T_3)\mathbf{j}_3,$$

где

$$M_1 = - \iint_{\sigma} (D_{32}u_3 - D_{33}u_2) d\sigma,$$

$$M_2 = - \iint_{\sigma} (D_{31}u_3 - D_{33}u_1) d\sigma,$$

$$M_3 = - \iint_{\sigma} (D_{31}u_2 - D_{32}u_1) d\sigma,$$

$$T_1 = \oint_{\gamma_1} f [u_3(n_1^1 F_{12} + n_2^1 F_{22}) - u_2(n_1^1 F_{13} + n_2^1 F_{23})] d\gamma,$$

$$T_2 = \oint_{\gamma_1} f [u_1(n_1^1 F_{13} + n_2^1 F_{23}) - u_3(n_1^1 F_{11} + n_2^1 F_{21})] d\gamma,$$

$$T_3 = \oint_{\gamma_1} f [u_2(n_1^1 F_{11} + n_2^1 F_{21}) - u_1(n_1^1 F_{12} + n_2^1 F_{22})] d\gamma.$$

Согласно вышеприведенным соотношениям, величины M_k, T_k ($k = 1, 2, 3$) постоянны. Из условия баланса моментов всех сил, приложенных к участку цилиндра, заключенному между плоскостями $x_3 = a$ и $x_3 = b$, получаем:

$$s_2(M_2 + T_2) - s_3(M_3 + T_3) = 0, s_3(M_2 + T_2) + s_2(M_3 + T_3) = 0.$$

Отсюда следует, что $M_2 + T_2 = M_3 + T_3 = 0$.

3. Заключение. Итак, реализация деформации (1) цилиндрической трубы под действием внутреннего давления требует приложения к ее торцам системы сил, статически эквивалентной силе \mathbf{F}_1 и моменту \mathbf{M}_1 , действующим в точке оси винтовой линии, в которую превращается после деформации образующая цилиндра, и направленным вдоль этой оси.

Сравнительный анализ механических причин возникновения патологической извитости позвоночных артерий человека, среди которых компрессия окружающими внутренними тканями и органами и патологические изменения шейных позвонков и межпозвоночных дисков, и внешних нагрузок при деформации пространственного изгиба полого цилиндра показывает качественную идентичность воздействий. Таким образом, решение задачи пространственного изгиба полого

многослойного нелинейно упругого цилиндра при наличии внутреннего гидростатического давления представляется перспективным в области исследования причин возникновения патологической извитости и напряженно-деформированного состояния стенки кровеносного сосуда с патологиями такого рода.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №09-01-00849-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сокуренок Г. Ю., Крыжановский Д. В., Седов В. М., Лебедев Л. В., Васильев С. Г. Диагностика и хирургическое лечение патологической извитости сонных и позвоночных артерий // Вестник хирургии. 2002. Т. 161. № 3.
- [2] Клиническая ангиология. Руководство для врачей. Под ред. Акад. РАМН А. В. Покровского. Т. 2. М.: Медицина, 2004.
- [3] <http://www.venart-swiss.ru>
- [4] <http://rusmedserv.com> — Русский медицинский сервер
- [5] Han H. C. A biomechanical model of artery buckling // Journal of Biomechanics. 2007. № 6.
- [6] Зубов Л. М. О больших деформациях пространственного изгиба призматических тел // ПММ. 2004. Т. 68 Вып. 3 С. 507–515.
- [7] Соколов А. В. Деформация пространственного изгиба нелинейно упругого полого цилиндра при наличии внутреннего давления // Вестник Южного научного центра РАН. 2007. Т. 3 № 1. С. 6–9.

Sokolov A. V. *Pathological crimpiness of human arteries and methods of mechanical investigation.* A phenomena of pathological crimpiness of human vertebral arteries and some possible causes of it's evolution is considered. The case of spatial bending of non-linear elastic tube under internal pressure is examined as one of methods in evaluation of contribution of mechanical loads in kinkig and investigation of stress-strain distribution in the arterial wall with this kind of pathology.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ВОСПОЛНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Столбова О. С., Роговой А. А.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Для нелинейной задачи рассматривается применение процедуры восполнения напряжений, основанная на определении узловых сил с помощью матрицы жёсткости, полученной методом конечных элементов для вариационного уравнения Лагранжа, записанного в начальной конфигурации. По найденным из решения этого уравнения перемещениям в узлах сетки и при известных матрицах жёсткости элементов строятся векторы приведенных к узлам усилий. С другой стороны, эти узловые силы определяются через неизвестные распределенные по поверхности элемента усилия и заданные функции формы. В результате получается система интегральных уравнений Фредгольма первого рода для нахождения распределенных усилий. При найденных значениях усилий на поверхностях сетки конечных элементов (в том числе и в узлах) с использованием соотношений Коши для начальной конфигурации определяются значения тензора напряжений Пиола–Кирхгофа первого рода в узлах. Линеаризованное представление этого тензора позволяет найти все производные по координатам от приращения вектора перемещений без использования операции дифференцирования.

1. Введение.

В механике деформируемого твердого тела при численной реализации краевых задач методом конечных элементов (МКЭ) в большинстве случаев осуществляется вариационная постановка задачи с использованием функционала Лагранжа. Она имеет минимальное среди всех постановок количество варьируемых параметров и приводит к довольно хорошей аппроксимации поля перемещений, но к значительно худшей аппроксимации поля напряжений, что связано с дифференцированием функций.

В настоящее время существуют различные методы восполнения напряжений (согласно принятой в [1] терминологии) в рамках постановки Лагранжа, неравнозначные как по точности, так и по сложности реализации. Процедура восполнения напряжений, изложенная ранее в [2] и проиллюстрированная на задаче линейной теории упругости, позволяет строить поля напряжений с той же точностью (того же порядка аппроксимации), что и поля перемещений. В данной работе излагаются основные положения этого подхода при решении МКЭ краевых задач нелинейной механики деформируемого твердого тела.

2. Процедура восполнения напряжений.

Рассмотрим вариационную постановку краевой задачи механики деформируемого твердого тела в форме Лагранжа в начальной конфигурации

$$\int_{S_0} \mathbf{Q}_0 \cdot \delta \mathbf{U} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{P}_I \cdot \delta \mathbf{F} dV_0 = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{Q}_0 — вектор сил, приведенных к поверхности S_0 , ограничивающей объем V_0 в начальной конфигурации, \mathbf{U} — вектор перемещений из начальной конфигурации в текущую, ρ_0 — плотность массы в начальной конфигурации, \mathbf{K} — вектор массовых сил, \mathbf{P}_I — тензор напряжений Пиола-Кирхгофа первого рода (несимметричный), \mathbf{F} — градиент места, δ — символ вариации.

Осуществим численную реализацию уравнения (1) методом конечных элементов (см., например, [3]). Аппроксимируем вектор перемещений \mathbf{U} в области V_0 через его значения \mathbf{U}_k в узле k и функции формы $\psi_{(j)}^k$ для того же k -го узла j -го элемента — финитные функции, носителем которых является объем (площадь) конечного элемента с номером j , т. е. $V_0^{(j)}$:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_k \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \in M_k^{V_0}}}^m \psi_{(j)}^k \right). \quad (2)$$

Здесь $M_k^{V_0}$ — множество номеров элементов, содержащих k -й узел в объеме V_0 , n и m — число узлов и конечных элементов. В результате получаем систему нелинейных векторных уравнений для определения перемещений в узлах сетки \mathbf{U}_k .

Выберем внутри тела достаточно гладкую поверхность l_0 , делящую тело на две части и образованную поверхностями примыкающих к ней двух слоев конечных элементов (узлы этих элементов, выходящие на поверхность l_0 , образуют множество N_{l_0}). Одну часть тела отбросим, а ее силовым воздействием на оставшуюся будет вектор неизвестного распределенного усилия \mathbf{P}_{l_0} , который, в соответствии с обычной процедурой МКЭ, приводится к узлам, составляющим множество N_{l_0} (для k -того узла это будет сумма интегралов по поверхностям примыкающих к этому узлу элементов, составляющих поверхность l_0 , с подынтегральными выражениями в виде произведения вектора \mathbf{P}_{l_0} на функцию формы $\psi_{(j)}^k$ для k -того узла j -го элемента). С другой стороны, это приведенное к узлу усилие определяется как произведение матрицы жёсткости для этого узла на найденный в результате решения задачи вектор узловых перемещений. В итоге приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода, определяющей вектор \mathbf{P}_{l_0} .

Для решения полученной системы аппроксимируем искомые подынтегральные функции теми же функциями формы, что и перемещения:

$$\mathbf{P}_{l_0} = \sum_{k \in N_{l_0}} \mathbf{P}_k^{l_0} \sum_{j \in M_k^{l_0}} \psi_{(j)}^k, \quad (3)$$

где $M_k^{l_0}$ — множество номеров элементов, содержащих k -й узел, чьи стороны принадлежат поверхности l_0 . Отметим, что векторы \mathbf{U} (2) и \mathbf{P}_{l_0} (3) имеют одинаковый порядок аппроксимации. Поскольку данная задача некорректная по Адамару, для ее решения использована регуляризация А.Н. Тихонова первого порядка. В результате получены значения $\mathbf{P}_k^{l_0}$ распределенных усилий в каждом узле k на поверхности l_0 .

Поступая аналогично для двух других поверхностей t_0 и m_0 , проходящей через тот же k -тый узел, получаем значение вектора распределенных усилий $\mathbf{P}_k^{t_0}$ и $\mathbf{P}_k^{m_0}$ в этом узле, соответствующее другим поверхностям. Используя соотношения

Коши $\mathbf{P}_k^{l_0} = \mathbf{n}_k^{l_0} \cdot \mathbf{P}_I^k$, $\mathbf{P}_k^{t_0} = \mathbf{n}_k^{t_0} \cdot \mathbf{P}_I^k$ и $\mathbf{P}_k^{m_0} = \mathbf{n}_k^{m_0} \cdot \mathbf{P}_I^k$, где $\mathbf{n}_k^{l_0}$, $\mathbf{n}_k^{t_0}$ и $\mathbf{n}_k^{m_0}$ — внешние единичные нормали к поверхностям l_0 , t_0 и m_0 в k -том узле, \mathbf{P}_I^k — значение тензора напряжений Пиола-Кирхгофа первого рода в k -том узле, получаем систему девяти линейных алгебраических уравнений для определения девяти составляющих тензора напряжений \mathbf{P}_I в k -том узле.

Рассмотренная процедура позволяет строить тензор напряжений Пиола-Кирхгофа первого рода \mathbf{P}_I не используя операцию дифференцирования вектора перемещения, описываемого в рамках МКЭ кусочно-непрерывной функцией. Однако, тензор истинных напряжений \mathbf{T} определяется через \mathbf{P}_I соотношением $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_I$, где \mathbf{F} и J — третий инвариант \mathbf{F} , определяющий относительное изменение объема, являются функциями производных вектора перемещений. Поэтому, даже определив \mathbf{P}_I , не используя операцию непосредственного дифференцирования вектора перемещений, для нахождения \mathbf{T} придется к ней прибегнуть. От этого и от необходимости решать систему нелинейных уравнений при нахождении \mathbf{U}_k можно избавиться, осуществив линеаризацию задачи и используя в вариационном уравнении несимметричный тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, вместо обычно применяемого симметричного.

3. Линеаризация задачи.

Линеаризуем нелинейные уравнения, основываясь на кинематике наложения малых деформаций на конечные [4, 5]. Для этого, вводя три конфигурации — начальную, текущую и промежуточную, близкую к текущей, значения всех кинематических и силовых величин в текущей конфигурации представляются через значения этих величин в промежуточной конфигурации и их приращения при переходе к текущей. Так, вектор перемещений из начальной конфигурации в текущую \mathbf{U} представляется в виде $\mathbf{U} = \mathbf{U}_* + \varepsilon \mathbf{u}$, где \mathbf{U}_* — вектор перемещений из начальной конфигурации в промежуточную, $\varepsilon \mathbf{u}$ — приращение вектора перемещений, ε — малая положительная величина. Массовые и поверхностные силы относительно промежуточной конфигурации примут вид: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_* + \varepsilon \mathbf{k}$, $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_{0*} + \varepsilon \mathbf{q}_0$.

Процесс нагружения разбивается на ряд достаточно малых шагов. На каждом шаге все величины в промежуточной конфигурации известны. Теперь варьируемой величиной является приращение вектора перемещений \mathbf{u} , а вариационное уравнение Лагранжа представляется в следующем виде:

$$\int_{S_0} \mathbf{q}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{V_0} \tilde{\mathbf{p}}_I \cdot \delta \mathbf{h} dV_0 = 0,$$

где $\mathbf{h} = (\nabla_* \mathbf{u})^T$ — градиент приращения перемещений относительно промежуточной конфигурации, $\mathbf{e} = 1/2 (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)$, $\tilde{\mathbf{p}}_I = J_* (\mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \mathbf{L}_*^{\text{IV}} \cdot \mathbf{e})$, \mathbf{L}_*^{IV} — тензор четвертого ранга, определяющий отклик материала на малые деформации относительно промежуточной конфигурации (см. [6]), J_* и \mathbf{T}_* определены в промежуточной конфигурации. В результате решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных на каждом шаге задач. При этом величины в промежуточной конфигурации известны и на каждом шаге необходимо находить приращения перемещений \mathbf{u} .

Численную реализацию линеаризованных уравнений будем осуществлять обычным методом конечных элементов, аппроксимируя теперь вектор \mathbf{u} в области V_0 через его значения \mathbf{u}_k в узле k и функции формы $\psi_{(j)}^k$ (аналогично (2)).

В результате получаем систему векторных уравнений, решив которую, находим приращение узловых перемещений \mathbf{u}_k на каждом шаге.

Процедуру восполнения напряжений теперь необходимо применять на каждом шаге. Вектор неизвестного распределенного усилия \mathbf{P}_{l_0} так же представим относительно промежуточной конфигурации $\mathbf{P}_{l_0} = \mathbf{P}_{l_0*} + \varepsilon \mathbf{p}_{l_0}$, где \mathbf{P}_{l_0*} — усилие в промежуточной конфигурации, а \mathbf{p}_{l_0} — его приращение. Вектор \mathbf{p}_{l_0} аппроксимируем через его узловые значения $\mathbf{p}_k^{l_0}$ и функции формы $\psi_{(j)}^k$ (аналогично (3)). В результате на каждом шаге получаем значения $\mathbf{p}_k^{l_0}$ в каждом узле k на поверхности l_0 , а значит определяем все девять составляющих приращения тензора напряжений Пиола–Кирхгофа первого рода \mathbf{p}_I в узле k .

Для перехода к следующему шагу нагружения нужно найти кинематические величины, в которые входят производные по координатам от вектора приращения перемещения (тензор \mathbf{h}). Избежать при этом непосредственного дифференцирования кусочно-непрерывной сеточной функции (чтобы не потерять точность) можно, используя следующее выражение: $\mathbf{p}_I = \mathbf{P}_{I*} \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon J_* \mathbf{F}_*^{-1} \cdot (\mathbf{L}_*^{IV} \cdot \mathbf{e})$. Из этого тензорного уравнения получаем систему девяти скалярных уравнений для определения девяти составляющих тензора \mathbf{h} — производных приращения вектора перемещений по координатам.

4. Применение процедуры восполнения напряжений.

Применение описанной процедуры демонстрируется на примере плоской задачи линейной теории упругости об одноосном растяжении квадратной пластины, находящейся в условиях плоской деформации (сечение бесконечно длинного стержня), усилиями, приложенными к двум ее противоположным, изменяющимся в процессе деформирования, поверхностям все время по нормали (следящая нагрузка). Касательные усилия на этих поверхностях равны нулю. Поведение материала описывалось упрощенным законом Синьорини [5]. При численном решении использовалась сетка треугольных конечных элементов. Весь процесс растяжения разбивался на 400 шагов. Задача решалась на сетках 5×5 , 10×10 , 20×20 , 40×40 по линейной, квадратичной и кубической аппроксимации поля \mathbf{u} .

Напряжения определялись на основе дифференцирования полученных полей перемещений (обычный метод), снижающим на единицу порядок аппроксимации первых по сравнению с последними. При этом разрывное поле напряжений, соответствующее линейной аппроксимации поля перемещений, приводилось к узлу обычным методом усреднения по элементам, примыкающим к нему (поля напряжений при квадратичной и кубической аппроксимациях поля перемещений — непрерывные). Кроме этого для линейной аппроксимации поля \mathbf{u} строилось поле напряжений, используя изложенную выше процедуру восполнения при найденном в результате численных экспериментов оптимальном значении параметра регуляризации $\alpha = 10^{-6}$. Применение данной процедуры позволило получить поля напряжений той же точности (той же степени аппроксимации), что и поля перемещений. Для границы области, где заданы усилия, использование процедуры восполнения напряжений дает практически точные, в отличие от других методов, значения этих усилий для любой аппроксимации поля перемещений.

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (НШ — 3717.2008.1) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (07-01-96019).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971. 248 с.
- [2] Rogovoy A. A. The stress recovery procedure for the finite element method // *Comp. Struct.* 1997. V. 63. № 6. pp. 1121–1137.
- [3] Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
- [4] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
- [5] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [6] Роговой А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // *ПМТФ*, 2005, Т. 46, № 5, С. 138–149.

Stolbova O. S., Rogovoy A. A. *The application of the stress recovery procedure for solving the nonlinear boundary value problems in the mechanics of deformable solids by the finite elements method.* For the nonlinear problem is considered the application of the stress recovery procedure based on the determination of the nodal forces with the stiffness matrix obtained by finite element method for the variational Lagrange equation, written in the initial configuration. The solution of this equation gives the displacement vector values at the nodes of grid, and knowing the stiffness matrix for elements we can construct the nodal forces. On the other hand, these nodal forces are defined through the unknown distributed over the surface of the element forces and the shape functions. The result is a system of Fredholm integral equations of the first kind to find the distributed forces. At the found values of forces on the surfaces of finite element mesh (including the nodes) using the Cauchy relations for the initial configuration the nodal values of the first kind Piola–Kirchhof stress tensor are defined. The linearized representation of this tensor allows to find all the derivatives on coordinates of the displacement vector increment without using differentiation.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОПАСТИ ТУРБИНЫ ВЭУ

Сумбатян М. А., Бондарчук А. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе исследуется аэродинамика вращающейся лопасти турбины ветроэнергетической установки. Каждое нормальное сечение по размаху лопасти представляет собой плоский аэродинамический профиль одного и того же класса NASA 4412. Сечения могут отличаться друг от друга размерами и углом установки. При этом угол атаки для каждого нормального сечения определяется углом установки профиля, а также углом, который зависит от скорости ветра и является переменным по размаху. Задача решается с учетом следующих допущений: 1) жидкость идеальная (т. е. невязкая); 2) в каждом сечении задача плоская (т. е. двумерная). В рамках принятых физических гипотез получены явные выражения для аэродинамических характеристик лопасти, а также рассчитана энергия, вырабатываемая при вращении лопасти. Дана постановка и намечен алгоритм решения обратной задачи об оптимизации геометрии такой лопасти.

1. Постановка задачи и основные гипотезы.

Мы моделируем вращающуюся лопасть ВЭУ двухсторонней закрученной поверхностью, для которой в каждом сечении, ортогональном размаху, имеем плоский аэродинамический профиль одного и тоже типа. Угол атаки в каждом сечении определяется углом установки лопасти, а также углом, который зависит от скорости ветра. Угол установки изображен на рисунке 1 и отсчитывается от вертикальной оси y . Жидкость считается идеальной, и в каждом сечении задача двумерная.

На рисунке 1 изображен однородный набегающий поток, скорость в котором совпадает со скоростью ветра. Поток ветра приводит к вращательному движению лопасти. Лопасть установлена так, что ее размах направлен вдоль оси z и ортогонален плоскости xy , в которой изображен рисунок. При этом ось вращения параллельна оси x .

Для показанного на рисунке сечения вращение приводит к его вертикальному движению вверх. Если профиль движется вверх, то относительно нее набегающий поток приобретает вертикальную компоненту, направленную вниз. Эта компонента скорости равна произведению угловой скорости вращения ω на расстояние данного сечения от оси вращения z . Т.е. переносная компонента за счет вращения направлена вниз и равна ωz , - так что относительная скорость потока образует угол β с горизонталью. При этом угол атаки $\alpha_{ат}$ становится меньше, чем в случае, когда вращение отсутствует. В свою очередь, угол установки зависит от угла закрутки $\gamma(z)$, который определяет, насколько закручено сечение на расстоянии z от оси вращения по отношению к такому же углу α_0 вблизи оси:

$$v_{отн}^2 = v_{в}^2 + (\omega z)^2, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega z}{v_{в}}, \quad \alpha_{ат} = \pi/2 - \alpha_{уст} - \beta, \quad \alpha_{уст} = \alpha_0 + \gamma(z) \quad (1)$$

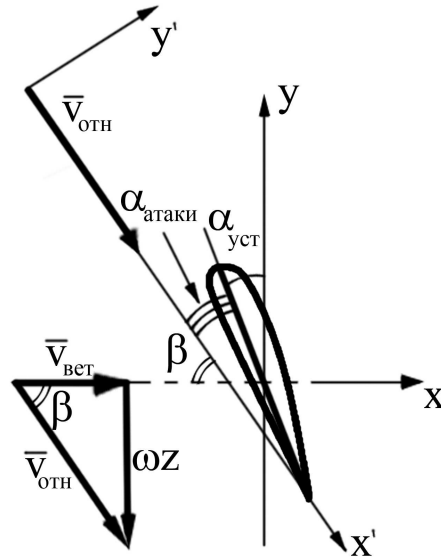


Рис. 1. Схема обтекания сечения лопасти однородным потоком ветра.

2. Основные математические соотношения. Силы, действующие на лопасть в каждом сечении z , в рамках аэродинамической гипотезы плоских сечений раскладываются на составляющие вдоль набегающего потока (сила сопротивления) и ортогонально к нему (подъемная сила):

$$F_{x'} = C_x \rho b \frac{v_{отн}^2}{2}, \quad F_{y'} = C_y \rho b \frac{v_{отн}^2}{2} \quad (2)$$

где $b = b(z)$ – длина хорды профиля, которая в общем случае также может зависеть от расстояния сечения до оси вращения z . Здесь введены следующие безразмерные величины: C_x – коэффициент сопротивления, C_y – коэффициент подъемной силы, причем полные размерные силы в (2) приведены на единицу длины вдоль размаха лопасти [1, 2].

Нас интересует величина, которую производит относительно оси вращения момент результирующей силы, действующей на хорду. Проекцию момента на ось вращения из двух сил $F_{x'}$ и $F_{y'}$ дает лишь $F_{y'}$. При этом

$$\begin{aligned} F_y &= F_{y'} \sin(\alpha_{ат} + \alpha_{уст}) - F_{x'} \cos(\alpha_{ат} + \alpha_{уст}) = F_{y'} \cos \beta - F_{x'} \sin \beta = \\ &= \frac{\rho b}{2} (v_B^2 + \omega^2 z^2) \left(\frac{C_y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} - \frac{C_x \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \right) = \frac{\rho b}{2} \sqrt{v_B^2 + \omega^2 z^2} (C_y v_B - C_x \omega z) \end{aligned} \quad (3)$$

Крутящий момент определяется по формуле

$$M = \int_0^L R_y z dz = \frac{\rho}{2} \int_0^L b(z) \sqrt{v_B^2 + \omega^2 z^2} (C_y v_B - C_x \omega z) z dz \quad (4)$$

где L – длина лопасти.



Рис. 2. Общий вид крылового профиля NASA 4412.

Очевидно, при очень малых ω выражение под интегралом в (4) положительно. Раскручивание приводит к увеличению ω , при этом второе слагаемое, содержащее ω в виде множителя, работает с отрицательным знаком, т. е. против вращения. При достижении критического значения ω интеграл (4) обратится в нуль, и дальнейшее раскручивание станет невозможным. Таким образом, при вращении лопасти ВЭУ существует внутренний механизм, гарантирующий, что лопасть не может набирать угловую скорость неограниченно.

Важной характеристикой ВЭУ является энергия, которая связана с мощностью и равна произведению вращающего момента M на угловую скорость вращения ω :

$$E = M\omega = \frac{\rho\omega}{2} \int_0^L b(z)\sqrt{v_B^2 + \omega^2 z^2} (C_y v_B - C_x \omega z) z dz \quad (5)$$

3. Расчет коэффициентов C_x и C_y методом конечных элементов.

Для нахождения зависимостей коэффициентов C_x и C_y от угла атаки был проведен численный расчет методом конечных элементов в коммерческом программном пакете ANSYS CFX 11.0. Решалась двумерная задача стационарного обтекания крылового профиля равномерным потоком воздуха при заданных углах атаки. Использовалась структурированная гексаэдрическая сетка, построенная в универсальном сеточном пакете ANSYS ICEM CFD. Количество элементов вычислительной сетки составляет 59400. При расчете использовалась модель идеальной несжимаемой жидкости.

Численный расчет проводился для крылового профиля NASA 4412. Ранние профили NASA, к которым относится четырехзначный профиль NASA 4412, строятся по определенным правилам с использованием аналитических выражений, описывающих выпуклость (кривизну) средней линии профиля и его толщину по всей длине [3]. В номере профиля содержится информация о его кривизне m (в первой цифре номера), положении максимального утолщения p (во второй цифре), максимальной толщине t (в двух последних цифрах номера). У профиля NASA 4412, согласно этим правилам, максимальная толщина составляет 12% от его длины, средняя линия имеет выпуклость в 4% длины, максимальное утолщение находится на расстоянии 40% длины от головной части ($m = 0.04b$, $p = 0.40b$, $t = 0.12b$).

Уравнения, описывающие форму средней линии профиля, имеют вид

$$y_c = \begin{cases} \frac{m}{p^2} (2px - x^2), & 0 \leq x \leq p \\ \frac{m}{(1-p)^2} [(1-2p) + 2px - x^2], & p \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

Здесь x – безразмерная координата, изменяющаяся от 0 до 1, ось которой направлена вдоль хорды профиля. Толщина профиля изменяется по закону

$$y_t = \frac{t}{0.2} (0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (7)$$

Тогда в параметрической записи уравнения верхней и нижней линии контура примут вид

$$\begin{aligned} x_U &= x - y_t \sin \theta, & y_U &= y_c + y_t \cos \theta \\ x_L &= x + y_t \sin \theta, & y_L &= y_c - y_t \cos \theta, & \theta &= \arctg \left(\frac{dy_c}{dx} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

В таблице 1 приводятся безразмерные координаты точек профиля, использовавшихся для построения геометрии в ANSYS (для удобства все размеры увеличены в 100 раз). Результаты расчета приведены в таблице 2.

Абсциссы x точек профиля, в %	0	1.25	2.5	5	7.5	10	15	20	25
Ординаты точек верхней линии	0	2.44	3.39	4.73	5.76	6.59	7.89	8.80	9.41
Ординаты точек нижней линии	0	-1.43	-1.95	-2.49	-2.74	-2.86	-2.88	-2.74	-2.50
Абсциссы точек профиля, в %	30	40	50	60	70	80	90	95	100
Ординаты точек верхней линии	9.76	9.80	9.19	8.14	6.69	4.89	2.71	1.47	0.13
Ординаты точек нижней линии	-2.26	-1.80	-1.40	-1.00	-0.65	-0.39	-0.22	-0.16	-0.13

Таблица 1. Профиль НАСА 4412.

$\alpha_{ат}$, град.	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
C_x	0.00852	0.00765	0.00777	0.00878	0.0107	0.0134	0.0169	0.0211
C_y	0.0624	0.139	0.223	0.310	0.400	0.491	0.583	0.673
4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.0260	0.0313	0.0372	0.0433	0.0494	0.0548	0.0590	0.0586	0.0547
0.762	0.849	0.930	1.007	1.075	1.126	1.153	1.126	1.051

Таблица 2. Зависимость коэффициентов C_x и C_y от угла атаки.

Для дальнейшего анализа полезными оказываются аналитические аппроксимации зависимостей $C_x(\alpha_{ат})$ и $C_y(\alpha_{ат})$. Удастся построить аппроксимации с точностью, соответствующей точности расчетов по МКЭ. В простейшем случае приближения с тремя членами степенного и тригонометрического типа имеют вид:

$$C_x(\alpha_{ат}) = 0.0143 + 0.00256\alpha_{ат} + 0.000143\alpha_{ат}^2, \quad C_y(\alpha_{ат}) = 0.444 + 0.091\alpha_{ат} - 0.00252\alpha_{ат}^2 \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
C_x(\alpha_{\text{ат}}) &= 0.0324 + 0.0117 \sin(0.224\alpha_{\text{ат}}) - 0.0229 \cos(0.224\alpha_{\text{ат}}) \\
C_y(\alpha_{\text{ат}}) &= 0.606 + 0.442 \sin(0.224\alpha_{\text{ат}}) - 0.257 \cos(0.224\alpha_{\text{ат}})
\end{aligned}
\tag{10}$$

где угол α — в градусах. При этом приближение (9) обеспечивает точность с относительной погрешностью в 7%, а приближение (10) — в 5%. Более сложные аппроксимации обеспечивают точность с относительной погрешностью менее 1%.

Обратная задача об оптимальной геометрии лопасти турбины ВЭУ состоит в максимизации выражения для энергии (5). При этом C_x и C_y в этом выражении даются приближениями вида (9), (10) или более сложными. В любом случае значения этих коэффициентов в формуле (5) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
C_x &= C_x(\alpha_{\text{ат}}) = C_x(\pi/2 - \alpha_{\text{уст}} - \beta) = C_x\left(\pi/2 - \alpha_0 - \gamma(z) - \arctg\frac{\omega z}{v_B}\right) \\
C_y &= C_y(\alpha_{\text{ат}}) = C_y(\pi/2 - \alpha_{\text{уст}} - \beta) = C_y\left(\pi/2 - \alpha_0 - \gamma(z) - \arctg\frac{\omega z}{v_B}\right)
\end{aligned}
\tag{11}$$

Решение данной оптимизационной задачи возможно как регулярными методами (типа метода Ньютона, секущих, или наискорейшего спуска), так и стохастическими методами (типа генетических алгоритмов).

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Госконтракт П 238.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1996. 448 с.
- [2] *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
- [3] *Jacobs E. N., Ward K. E., Pinkerton R. M.* The characteristics of 78 related airfoil sections from tests in the variable-density wind tunnel // *NACA Report No. 460.* 1933.

Sumbatyan M. A., Bondarchuk A. A. *Inverse problem on optimal blade geometry of a wind turbine.* We study the aerodynamics of the rotating blade of a wind turbine. Every normal section is a plane airfoil of the same class NACA 4412. The sections may differ from each other by their sizes and by angles of incidence. The attack angle for every normal section is defined by the incidence angle as well as by the angle which depends upon the wind speed and varying along the wing span. The problem is solved with the following assumptions: 1) the fluid is nonviscous; 2) at every section the problem is plane (i.e. 2d). In frames of the accepted physical hypotheses we obtain explicit expressions for aerodynamic characteristics of the blade, and for the energy produced by the wind turbine. An inverse problem on optimal blade geometry is formulated and there is described an algorithm to solve this problem.

О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕННОГО ГРАДИЕНТА УПРУГИХ СВОЙСТВ СЛОЯ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ В ОБЛАСТИ ИНДЕНТИРОВАНИЯ

Трубчик И. С.*, **Айзикович С. М.,****, **Евич Л. Н.****

**НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

***Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Рассматриваются особенности решения контактной задачи для неоднородного по толщине слоя в случае, когда производная функции, описывающей закон неоднородности, изменяет знак один или более раз. При решении задачи используется подход, описанный ранее в [1]. Исследуется влияние переменного градиента упругих свойств среды на деформирование поверхностных слоев в области контакта слоя с жестким недеформируемым штампом. Задача поставлена в связи с необходимостью прогнозирования явления отслаивания современных покрытий сложной структуры от недеформируемой подложки.

Введение. Технологические процессы создания материалов с покрытиями сложной структуры предполагают проведение предварительных расчетов, по меньшей мере, на прочность и ресурс. Расчеты на прочность связаны с определением напряженно-деформированного состояния в каждой точке сплошной среды и сравнении его с предельно допустимым. Определение же НДС внутри взаимодействующих тел, невозможно без знания закона изменения контактного давления по области контакта, что приводит, в свою очередь, к необходимости решения контактных задач. Следует отметить, что контактные задачи для неоднородных сред имеют ряд особенностей по сравнению с задачами для однородных сред. Во-первых, при механической постановке следует учитывать качественно новую картину распределения контактных напряжений для существенно неоднородных материалов (эффект отставания основания от штампа при некоторых значениях геометрических и физических параметров и т. д.). Во-вторых, в отличие от однородных сред (полупространство, слой) трансформанты ядер интегральных уравнений в смешанных задачах неоднородных сред имеют сложную структуру, необозримую в аналитическом виде, в общем случае строящиеся только численными методами.

В настоящей работе используется эффективный полуаналитический метод решения статических контактных задач теории упругости для неоднородных сред [1, 2], и в частности, для градиентного слоя. Задачи сводятся к решению парных интегральных уравнений. Трансформанты ядер парных интегральных уравнений строятся численно. На основании установленных аналитических свойств данных трансформант строятся их аппроксимации аналитическими выражениями специального вида. Для этих аппроксимаций парных интегральных уравнений построены замкнутые аналитические решения. Доказывается, что эти решения явля-

ются двухсторонне асимптотически точными относительно безразмерного геометрического параметра задач. Аналитическая форма решений интегральных уравнений удобна для приложений и позволила впервые получить в аналитическом виде решение задачи о внедрении параболического индентора в неоднородный слой, определить в аналитическом виде форму осадки поверхности вне штампа в случае неоднородного основания, получить в аналитическом виде решения задач об изгибе балок и плит на неоднородном основании.

1. Постановка задач. Рассматриваются статические контактные задачи: (I) о сдвиге полосовым штампом с плоским основанием $|x| \leq a$, $-\infty < z < \infty$ неоднородного по глубине слоя, жестко скрепленного с недеформируемым основанием. На каждую единицу длины штампа действует сдвигающее усилие P , параллельное оси z , под действием которого штамп переместится в направлении оси z на величину ε , вызвав в слое деформацию чистого сдвига; (II) о вдавливании недеформируемого штампа шириной $2a$ и нижним основанием, имеющим форму $\gamma(x)$, в верхнюю границу упругой неоднородной по глубине полосы. Под действием силы P штамп перемещается по оси на величину δ . Для обеих задач коэффициент Пуассона $\nu = \nu_0 f(y)$, модуль сдвига слоя $G = G_0 f(y)$, модуль Юнга полосы $E = E_0 f(y)$ с глубиной изменяется по закону $f(y)$, $-h \leq y \leq 0$, где $f(y)$ — произвольная, непрерывная всюду в области определения отличная от нуля функция, градиент изменения упругих свойств слоя (полосы) может быть положительным, отрицательным или менять знак по толщине. Предполагается, что силы трения между штампом и слоем (полосой) отсутствуют. В качестве граничных условий выбраны условия отсутствия напряжений вне штампа, условие жесткого закрепления нижнего основания слоя (полосы), а также усилия напряжения, возникающие на верхней среде в результате воздействия на нее штампа. Требуется определить распределение контактных касательных (I) и нормальных (II) напряжений под штампом

$$\tau_{yz}(x, 0, z) = -\tau(x), \quad \sigma_y(x, 0) = -q(x), \quad |x| \leq a$$

Данные задачи сводятся к решению интегрального уравнения Фредгольма с логарифмическим ядром

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \theta \pi g(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1)$$

где $k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut du$, $\theta = G/(1 - \nu)$, $\varphi(\xi)$ — функция распределения контактных давлений, G и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона слоя. Здесь $\varphi(x') = q(x)/\theta$, $x' = x/a$, $\lambda = h/a$, $g(x') = \varepsilon/a$ (для задачи I), $g(x') = (-\delta + \gamma(x))/a$ (для задачи II), $g(x)$ — контактные напряжения, a — полуширина штампа, h — толщина слоя (полосы). Для численного построения трансформант ядер интегральных уравнений применяется метод интегральных преобразований.

2. Полуаналитический метод решения поставленных контактных задач. В настоящей работе задачи сводятся к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (в антиплоской задаче I) или системы дифференциальных уравнений второго порядка (в плоской задаче II) относительно

трансформант интегрального преобразования Фурье функций перемещений с переменными коэффициентами:

$$\frac{d\mathbf{w}(u, y)}{dy} = \mathbf{A}\mathbf{w}(u, y), \quad y \in [-h; 0] \quad (2)$$

В задаче I ранг матрицы \mathbf{A} равен двум, а в задаче II — равен четырем. Коэффициенты матрицы являются переменными по y . Краевые условия для уравнения (2) выписываются из условий на верхних и нижних гранях слоя (полосы). В частности, в задаче I матрица \mathbf{A} имеет вид:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ u^2 & -\eta(y) \end{array} \right\|, \quad \mathbf{w} = \left\| \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array} \right\|,$$

граничные условия: $w_1(u, -h) = 0$, $w_2(u, 0) = |u|$.

В задаче II,

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u^2 \frac{\chi+1}{\chi-1} & -\eta & -u\eta & -u \frac{2}{\chi-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u\eta \frac{3-\chi}{\chi+1} & u \frac{2}{\chi+1} & u^2 \frac{\chi-1}{\chi+1} & -\eta \end{array} \right\|; \quad \mathbf{w} = \left\| \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \right\|,$$

где $\chi = 3 - 4\nu$, $\eta = G'(y)/G(y) = E'(y)/E(y)$. Граничные условия в данной задаче имеют вид:

$$\begin{aligned} w_1(u, -h) = w_3(u, -h) = 0, \quad w_2(u, 0) + uw_3(u, 0) = 0, \\ (\chi - 3)uw_1(u, 0) + (3\chi - 1)w_4(u, 0) = (\chi - 1)u \end{aligned}$$

Далее, решение системы дифференциальных уравнений представляется в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$\mathbf{w}(u, z) = \sum_{i=1}^4 C_i(u) \mathbf{a}_i(u, z) e^{\gamma_i z}, \quad (3)$$

где $\gamma_{1,2} = -u$, $\gamma_{3,4} = u$.

Здесь векторы $\mathbf{a}_i(u, z)$ изменяются по y с меньшей скоростью, чем экспонента, и определяются из следующих задач Коши при фиксированных значениях u :

$$\frac{d\mathbf{a}_i(u, y)}{dy} = \mathbf{A}\mathbf{a}_i(u, y) - \gamma_i \mathbf{a}_i(u, y), \quad y \in [-h; 0]$$

Начальные условия для $\mathbf{a}_i(u, y)$ определяются, исходя из вида решения уравнения (2) для однородных слоя или полосы на их нижней грани $y = -h$ [2].

Таким образом, получены следующие выражения для численного построения трансформант $L(u)$:

$$\begin{aligned} I : L(u) &= |u| (a_1^1 - a_2^1 e^{-2|u|h}) / (a_1^2 - a_2^2 e^{-2|u|h}), \quad a_i^j = a_i^j(u, 0) \\ II : L(u) &= \sum_{i=1}^4 C_i(u) a_i^3(u, 0) \end{aligned}$$

Исследованы свойства трансформант ядер $L(u)$ интегрального уравнения (1). В частности, для градиентного слоя и клина, жестко закрепленных по нижней грани, трансформанты ядер парных интегральных уравнений обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} L(u) &= A|u| + Bu^2 + o(u^3), \quad u \rightarrow 0; \\ L(u) &= 1 + c_1|u|^{-1} + c_2u^{-2} + o(u^{-3}), \quad u \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (4)$$

Установлено отличие свойств трансформант ядер интегральных уравнений, полученных для многослойного и однородного основания, от аналогичных свойств трансформант ядер интегральных уравнений, полученных для градиентного слоя (полосы). В работе [3] доказана теорема о том, что функцию $L(u)$, обладающую свойствами (4), можно аппроксимировать выражениями вида:

$$L(u) = L_N(u) = \tanh Au \left[\prod_{n=1}^N \frac{u^2 + \delta_n^2}{u^2 + \gamma_n^2} \right] \quad (5)$$

При численной реализации метода для определения коэффициентов δ_n , γ_n используется эффективный алгоритм, описанный в работе [4].

Интегральное уравнение (1) сводится к решению парного интегрального уравнения, решение которого для функции $L(u)$ вида (5) представлено в [2] в случае, когда функция $g(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье и выражается через присоединенные функции Лежандра $P_u^\mu \equiv P_u^\mu(ch\vartheta)$, $Q_u^\mu \equiv Q_u^\mu(ch\vartheta)$, где $\vartheta = \pi/A\lambda$, и интегралы от них.

Установлено, что построенные решения являются двухсторонне асимптотически точными решениями исходного интегрального уравнения как при малых, так и при больших значениях безразмерного геометрического параметра λ . Сравнение полученного аналитического приближенного решения с известными решениями для однородной полосы из монографии [5] показало погрешность менее 1% при $\lambda < 1$ и $\lambda > 2.8$. Наибольшие расхождения (более 10%) наблюдаются при $\lambda = 2$.

При численном исследовании влияния точности аппроксимации трансформанты интегрального уравнения $L(u)$ выражениями (5) на точность построения контактных напряжений было выяснено, что в контактных задачах для однородной среды достаточно аппроксимировать $L(u)$ всего одним сомножителем ($N = 1$). При этом погрешность аппроксимации не превосходит в среднем 3%. Однако, в задаче II самыми лучшими аппроксимациями являются $L_2(u)$. Аналогично ведут себя функции трансформант и для монотонных законов неоднородности $f(y)$. Законы неоднородности $f(y)$, производные которых неоднократно изменяют знак по толщине слоя, что соответствует сложной слоистой структуре среды, вызывают необходимость аппроксимировать трансформанту интегрального уравнения большим количеством сомножителей. При этом количество перемен знака производной по толщине слоя существенно влияет на значение N , доставляющее самую малую погрешность аппроксимации из всех возможных. Однако для каждого закона неоднородности существуют верхние пределы значений N , при превышении которых происходит существенная потеря точности расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-08-011410а, 10-08-00839а), а также программы АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» грант № 2.1.2/5729.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трубчик И. С. Айзикович С. М. Метод сведения к парным интегральным уравнениям контактных задач для полубесконечных областей // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 1. С. 52–59.
- [2] Трубчик И. С. Айзикович С. М. Кренев Л. И. Смешанные задачи теории упругости для градиентных материалов. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2009. 265 с.
- [3] Айзикович С. М. Трубчик И. С. Асимптотические свойства приближенного решения одного класса парных интегральных уравнений // ПММ. 1988. Т. 52, Вып. 5. С. 850–856.
- [4] Айзикович С. М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46, № 1. С. 148–158.
- [5] Ворович И. И. Александров В. М. Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

Trubchik I. S., Aizikovich S. M., Evich L. N. *About influence of the varying gradient of the layer elastic characteristics on the upper layers deforming near the indentation region.* The species of the contact problems for the inhomogeneous layer in the case when the elastic properties of the medium are arbitrary functions of its thickness. The elastic properties gradient can be positive, negative or may change its sign with layer thickness. These problems are based on the method described in [1]. The influence of elastic medium properties changing on the strain state of the layer near indentation region in investigated. These problems were posed in view of necessity of technologic forecasting the modern coatings peeling occurrence from the nondeformable substrate.

ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ, ОСНОВАННАЯ НА МОДЕЛИ РЭЛЕЯ–БИШОПА

Федотов И. А.* , Полянин А. Д.** , Шаталов М. Ю.***,
Тенкам Э. М.*

* *Технологический университет Цване, Претория*

** *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*** *Департамент научного материаловедения и производства*

Совета по научно-техническим разработкам (CSIR) и

Технологический университет Цване, Претория

Рассматриваются продольные колебания осесимметричного стержня с закрепленными концами. Исследование основано на модели Рэлея–Бишопа, которая учитывает как боковые смещения, так и напряжения сдвига в поперечном сечении. Колебания стержня описываются линейным уравнением с частными производными четвертого порядка с переменными коэффициентами, содержащим смешанные производные. Обсуждаются два типа ортогональности собственных функций, соответствующих собственным значениям для гармонических колебаний стержней. Построена функция Грина и получено представление решения общей задачи о колебаниях стержня Рэлея–Бишопа с произвольными начальными условиями в виде ряда по собственным функциям. Рассмотрены колебания цилиндрического и конического стержней. Обнаружено, что простейшая (классическая) модель продольных колебаний стержня, которая описывается волновым уравнением второго порядка, может существенно завышать частоты свободных колебаний стержня, по сравнению с моделью Рэлея–Бишопа. Показано, что собственные функции конического стержня выражаются через обобщенные гипергеометрические функции. В качестве примера рассмотрены свободные колебания стержня, сделанного алюминиевого сплава.

1. Постановка задачи о колебаниях стержня Рэлея–Бишопа. Рассмотрим продольные колебания толстого короткого стержня, представляющего собой тело вращения относительно оси x . Длина стержня l предполагается сопоставимой с его максимальным радиусом. Предположим, что колебания возбуждаются распределенной силой $F(x, t)$. Считаем, что оба конца стержня закреплены. Обозначим продольные смещения стержня через $u = u(x, t)$.

В работе [1] было показано, что классическая модель, основанная на волновом уравнении второго порядка, является неполной и что необходимо учитывать эффекты динамики поперечного смещения стержня. В модели, предложенной Рэлеем, учитываются поперечные колебания, пропорциональные продольной деформации в стержне $\partial u / \partial x$, коэффициенту Пуассона и расстоянию от оси симметрии сечения стержня [2]. Это приводит к появлению дополнительного слагаемого в выражении для кинетической энергии. Позже Бишоп улучшил модель Рэлея, включив в рассмотрение напряжение сдвига поперечного сечения. Это приводит к появлению нового слагаемого в выражении для потенциальной энергии, пропорционального модулю сдвига $\mu = \frac{E}{2(1 + \eta)}$ и второй производной от смещения стержня $\partial^2 u / \partial x^2$, где E — модуль Юнга, а η — коэффициент Пуассона.

Уравнение продольных колебаний стержня для одномерной модели Рэлея–Бишопа имеет вид [2]:

$$\rho S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ES(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \eta^2 I_p(x) \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\mu \eta^2 I_p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \rho S(x) F(x, t), \quad (1)$$

где ρ — массовая плотность стержня, $S(x)$ — площадь поперечного сечения, $I_p(x)$ — полярный момент инерции.

Будем исследовать задачу о колебаниях стержня с закрепленными концами, которая описывается однородными граничными условиями

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \quad (2)$$

Уравнение (1) и граничные условия (2) будем рассматривать с начальными условиями общего вида

$$u \Big|_{t=0} = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = h(x). \quad (3)$$

2. Задача Штурма–Лиувилля для стержня Рэлея–Бишопа. Два типа ортогональности собственных функций. Рассмотрим свободные гармонические колебания стержня, которые описываются соотношениями

$$F(x, t) = 0, \quad u(x, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \varphi(x). \quad (4)$$

Подставив (4) в уравнение (1) и граничные условия (2), получим

$$[\mu \eta^2 I_p(x) \varphi''']' + \{[\omega^2 \rho \eta^2 I_p(x) - ES(x)] \varphi'\}' = \omega^2 \rho S(x) \varphi; \quad (5)$$

$$\varphi = \varphi'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \varphi = \varphi'' = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \quad (6)$$

где штрихами обозначены производные по x .

Пусть ω_m и ω_n — два различных собственных значения задачи Штурма–Лиувилля (5)–(6), а $\varphi_m = \varphi_m(x, \omega_m)$ и $\varphi_n = \varphi_n(x, \omega_n)$ — соответствующие им собственные функции.

Первая ортогональность собственных функций:

$$\int_0^l \rho [S(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) + \eta^2 I_p(x) \varphi_m'(x) \varphi_n'(x)] dx = \|\varphi_n\|_1^2 \delta_{mn}, \quad (7)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера, $\|\varphi_n\|_1^2$ — квадрат первой нормы собственной функции, который определяется по формуле

$$\|\varphi_n\|_1^2 = \int_0^l \rho [S(x) \varphi_n^2(x) + \eta^2 I_p(x) \varphi_n'^2(x)] dx. \quad (8)$$

Вторая ортогональность собственных функций:

$$\int_0^l [ES(x) \varphi_m'(x) \varphi_n'(x) + \mu \eta^2 I_p(x) \varphi_m''(x) \varphi_n''(x)] dx = \|\varphi_n\|_2^2 \delta_{mn}, \quad (9)$$

где $\|\varphi_n\|_2^2$ — квадрат второй нормы собственной функции

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \int_0^l \{ES(x)[\varphi_n'(x)]^2 + \mu\eta^2 I_p(x)[\varphi_n''(x)]^2\} dx. \quad (10)$$

Имеет место следующая связь между нормами (8) и (10): $\|\varphi_n\|_2 = \omega_n \|\varphi_n\|_1$.

3. Решение задачи о колебаниях стержня Рэлея–Бишопа. Функция Грина. Решение задачи о свободных продольных колебаниях стержня Рэлея–Бишопа (1)–(3) при $F(x, t) \equiv 0$ можно представить в следующем виде:

$$u(x, t) = \int_0^l \rho S(y) \left[g(y) \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t} + h(y) G(x, y, t) \right] dy + \int_0^l \rho \eta^2 I_p(y) \left[g'(y) \frac{\partial^2 G(x, y, t)}{\partial t \partial y} + h'(y) \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial y} \right] dy, \quad (11)$$

где $G(x, y, t)$ — функция Грина

$$G(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n \|\varphi_n\|_1^2} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \sin(\omega_n t). \quad (12)$$

Решение задачи о вынужденных продольных колебаниях стержня Рэлея–Бишопа (1)–(3) при $F(x, t) \neq 0$ находится по формулам (11)–(12), причем в правую часть (11) надо добавить слагаемое

$$\int_0^t \int_0^l \rho S(y) F(y, \tau) G(x, y, t - \tau) dy d\tau.$$

4. Колебания цилиндрического стержня Рэлея–Бишопа. Рассмотрим продольные колебания цилиндрического стержня радиуса r длины l . В данном случае площадь поперечного сечения и полярный момент инерции постоянны и определяются по формулам $S = \pi r^2 = \text{const}$, $I_p = \frac{1}{2} \pi r^4 = \text{const}$.

Собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (5)–(6) для цилиндрического стержня имеют вид

$$\varphi_m(x) = \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad m = 1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$\omega_m = \omega_m^\circ \sqrt{\frac{\lambda m^2 + 1}{2(1 + \eta)\lambda m^2 + 1}}, \quad \omega_m^\circ = \frac{\pi m}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \lambda = \frac{\pi^2 \eta^2}{2(1 + \eta) l^2 S}. \quad (14)$$

Величины $\omega_m^\circ = \omega_m|_{\lambda=0}$ определяют собственные значения для классической модели продольных колебаний стержня, описываемой волновым уравнением второго порядка.

Из формулы (13) следует, что для цилиндрического стержня собственные функции одинаковы для классической модели и модели Рэлея–Бишопа. Из формулы (14) видно, что отношение частот удовлетворяет неравенству $|\omega_m/\omega_m^\circ| \leq 1$ и монотонно уменьшается при увеличении спектрального параметра m . Имеет место предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\omega_m}{\omega_m^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \eta)}} \quad (\lambda \neq 0). \quad (15)$$

Из сказанного следует, что различие между классической моделью и моделью Рэлея–Бишопа увеличивается с ростом частоты колебаний (при больших m указанное различие согласно формуле (15) может достигать 40% и более процентов).

5. Собственные функции конического стержня Рэлея–Бишопа. Рассмотрим продольные колебания осесимметричного стержня конической формы единичной длины, поверхность которого задается уравнением

$$r = \alpha \left(x + \frac{1}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где r — поперечная координата, α — угловой коэффициент. В этом случае площадь поперечного сечения и полярный момент инерции определяются по формулам

$$S(x) = \pi \alpha^2 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2, \quad I_p(x) = \frac{\pi}{2} \alpha^4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^4. \quad (16)$$

Подставив (16) в (5) и сделав подстановку

$$z = -\frac{\omega^2 \rho (1 + \eta)}{2E} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2,$$

получим обобщенное гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$\begin{aligned} & \left[z \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) \left(z \frac{d}{dz} + b_2 - 1 \right) \left(z \frac{d}{dz} + b_3 - 1 \right) \right] \varphi - \\ & - \left[z \left(z \frac{d}{dz} + a_1 \right) \left(z \frac{d}{dz} + a_2 \right) \right] \varphi = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$a_{1,2} = \frac{3\alpha\eta \pm \sqrt{8 + 9\alpha^2\eta^2}}{4\alpha\eta}, \quad b_1 = \frac{3}{2}, \quad b_{2,3} = \frac{5\alpha\eta \pm \sqrt{16 + 16\eta + 9\alpha^2\eta^2}}{4\alpha\eta}.$$

Общее решение уравнения (17) имеет вид [3]:

$$\varphi(z) = C_1 \varphi_1(z) + C_2 \varphi_2(z) + C_3 \varphi_3(z) + C_4 \varphi_4(z), \quad (18)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, и

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= {}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z), \\ \varphi_2(z) &= z^{1-b_1} {}_2F_3(1-b_1+a_2, 1-b_1+a_1; 2-b_1, 1-b_1+b_3, 1-b_1+b_2; z), \\ \varphi_3(z) &= z^{1-b_2} {}_2F_3(1-b_2+a_2, 1-b_2+a_1; 2-b_2, 1-b_2+b_3, 1-b_2+b_1; z), \\ \varphi_4(z) &= z^{1-b_3} {}_2F_3(1-b_3+a_2, 1-b_3+a_1; 2-b_3, 1-b_3+b_2, 1-b_3+b_1; z). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция, которая допускает следующее разложение в виде степенного ряда:

$$\begin{aligned} {}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n}{(b_1)_n (b_2)_n (b_3)_n n!} z^n, \\ (c)_0 &= 1, \quad (c)_n = c(c+1) \cdots (c+n-1). \end{aligned} \quad (20)$$

Этот ряд сходится при любых z (за исключением некоторых целых значений параметров a_i и b_j , для которых ряд состоит из конечного числа членов или не имеет смысла).

В качестве примера рассмотрен стержень конической формы с угловым коэффициентом $\alpha = 0.1$, сделанный из алюминиевого сплава.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00553, № 08-08-00530, № 09-01-00343) и гранта NRF № EV2008111100011 (ЮАР).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Стретт Дж.* (лорд Рэлей) Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955. С. 273–274.
- [2] *Rao J. S.* Advanced Theory of Vibration. New York: Wiley, 1992. pp. 158–184.
- [3] *Slater L. J.* Generalized Hypergeometric Function. Cambridge University Press, 1966.

Fedotov O. M., Polyanin A. D., Shatalov M. Yu., Tenkam H. M. *Longitudinal vibrations of rigid rod based on the Rayleigh–Bishop model.* We consider free and forced longitudinal vibration of axisymmetric conic rod with fixed ends. The study is based on the Rayleigh–Bishop model which takes into account both lateral inertia and shear stress in the cross-section. Vibration of the rod is described by a linear partial differential equation with variable coefficients containing a mixed derivative of fourth order. Two types of non-classical orthogonality conditions of the eigenfunctions corresponding to different eigenvalues of harmonic vibration of the rod are discussed. It is shown that the eigenfunctions are expressed in terms of the generalized hypergeometric functions. The Green function is constructed and the exact solution of the problem of vibration of the Rayleigh–Bishop conical rod with fixed ends is obtained. Finally we consider an example of free vibration of the Rayleigh–Bishop conical rod.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, НАСЛЕДУЮЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Цибулин В. Г.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Для решения двумерных и трехмерных задач фильтрационной конвекции Дарси развиты численные схемы, наследующие свойства дифференциальных уравнений. В случае естественных переменных предложены конечно-разностные схемы, основанные на вычислении скорости, температуры и концентрации примесей в узлах смещенных сеток. Для плоской задачи фильтрационной конвекции показано, что метод конечных разностей позволяет получить конечномерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые сохраняют свойство косимметрии исходной задачи.

При дискретизации нелинейных уравнений в частных производных, описывающих фильтрационную конвекцию, важно обеспечить наследование свойств дифференциальных операторов в конечномерных аналогах исходных уравнений. Для численного анализа необходимы методы, позволяющие эффективно рассчитывать различные режимы и учитывать расслоение фазового пространства задачи. Особого внимания требует расчет систем с сильной неединственностью решений.

В задаче фильтрационной конвекции с законом трения Дарси было обнаружено ответвление непрерывного семейства стационарных режимов от состояния механического равновесия [1]. Этот нетривиальный переход был объяснен с помощью теории косимметрии векторных полей [2]. Непрерывные семейства появляются также в задачах с непрерывными группами симметрий, но в косимметричных системах устойчивость стационарных режимов на отдельных участках семейства может меняться [3]. Свойства семейств стационарных решений для задачи фильтрационной конвекции теплопроводной жидкости изучались в ряде работ [4–8]. Случай многокомпонентных сред изучен меньше [9], для двух- и трехкомпонентной жидкостей в плоской задаче конвекции Дарси ответвление семейств стационарных решений было исследовано в [10].

1. Уравнения фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости. В [9] выведены уравнения конвекции многокомпонентной жидкости на основе модели Дарси. В случае конечного числа примесей (S), отсутствия массовых сил и внутренних источников тепла и примесей эти уравнения (после перехода к безразмерным переменным) можно записать в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \mathbf{v} + \sum_{r=1}^{S+1} \lambda_r \theta^r \mathbf{k}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad b_r \frac{\partial \theta^r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta^r = \chi_r \Delta \theta^r + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ — векторное поле скорости, $p(x, y, z, t)$ — давление, $\theta^1(x, y, z, t)$ — температура жидкости, отсчитываемая от среднего значения, $\theta^r(x, y, z, t)$ ($r = 2, \dots, S + 1$) — отклонения массовых концентраций примесей от средних уровней, (x, y, z) — точка области D , занятой жидкостью, t — время, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ — орт, направленный вертикально вверх.

Рассматриваемая задача имеет следующий набор безразмерных параметров: пористость ε , кинетические коэффициенты b_r , числа Прандтля χ_r , фильтрационное λ_1 и концентрационные числа Рэлея λ_r ($r > 1$).

В случае плоских движений ($v^3 = 0$, $\partial_z(\dots) = 0$) уравнения конвекции могут быть записаны через функцию тока ψ , которая вводится соотношениями $v^1 = \partial_y \psi$, $v^2 = -\partial_x \psi$. В случае теплопроводной жидкости без примесей уравнения записываются следующим образом

$$\theta_t = \Delta \theta + \lambda \partial_x \psi - J(\theta, \psi) \equiv F, \quad 0 = \Delta \psi - \partial_x \theta \equiv G. \quad (2)$$

Здесь $J(\theta, \psi)$ — функция Якоби

$$J(\theta, \psi) = \partial_x \theta \partial_y \psi - \partial_y \theta \partial_x \psi. \quad (3)$$

Уравнения (2) получены в предположении несущественности учета инерции движения. Далее рассматривается конвекция в односвязной области D , на границе которой ставятся краевые условия для температуры и функции тока:

$$\theta|_{\delta D} = 0, \quad \psi|_{\delta D} = 0. \quad (4)$$

Начальные условия задаются только для температуры $\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y)$, а функция тока во всей области D находится по заданному начальному распределению температуры θ_0 из задачи Дирихле.

Косимметрией системы (2)–(4) будет векторное поле $(\psi, -\theta)$, ортогональное правой части системы (2),

$$\int_{\mathcal{D}} (F\psi - G\theta) dx dy = 0. \quad (5)$$

В том, что интегральное тождество (5) справедливо, можно убедиться непосредственной подстановкой в него выражений для F и G из (2), интегрированием по частям и учетом краевых условий (4). При этом устанавливаются также следующие тождества для функции Якоби

$$\int_{\mathcal{D}} J(\psi, \theta) \psi dx dy = 0, \quad (6)$$

$$\int_{\mathcal{D}} J(\psi, \theta) \theta dx dy = 0. \quad (7)$$

Будем далее называть (5) условием косимметрии для задачи. При помощи свойства гироскопичности (7) можно установить следующее интегральное тождество. Умножим (2) на θ и проинтегрируем по области \mathcal{D} , с учетом краевых условий получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \frac{\theta^2}{2} dx dy = - \int_{\mathcal{D}} (\lambda \nabla \theta^2 - \nabla \psi^2) dx dy. \quad (8)$$

Отметим также, что для функции Якоби выполняется $J(f, g) = -J(g, f)$.

2. Разностные уравнения конвекции. Анализ фильтрационной конвекции на основе модели Дарси и движений идеальной жидкости на основе уравнений

Эйлера приводят к решению близких систем уравнений. В вычислительной гидродинамике при решении двумерных уравнений Эйлера и Навье-Стокса широко используется схема Аракавы [11]. Для сохранения в разностных уравнениях свойства косимметрии оказалось необходимым использовать специальные формулы, обеспечивающие сохранение разностного аналога интегрального тождества (6).

Дискретизация уравнений фильтрационной конвекции (2) на регулярной сетке описана в [5, 13]. Рассмотрим прямоугольник $\mathcal{D} = [0, a] \times [0, b]$ и представим конечно-разностную аппроксимацию на равномерной сетке $\{(x_n, y_m) | x_n = nh_1, n = 0 \div N + 1, y_m = mh_2, m = 0 \div M + 1\}$. Здесь $h_1 = a/N$, $h_2 = b/M$ — шаги сетки по x и y соответственно, температура θ и функция тока ψ вычисляются в узлах (x_n, y_m) .

На двухточечном шаблоне вводим разностные операторы первых производных и вычисления среднего, охватывающие случаи целых и полуцелых n и m ,

$$\begin{aligned} (\delta_x f)_{n+1/2, m} &= \frac{f_{n+1, m} - f_{n, m}}{x_{n+1} - x_n}, & (\delta_y f)_{n, m+1/2} &= \frac{f_{n, m+1} - f_{n, m}}{y_{m+1} - y_m}, \\ (\delta_{0x} f)_{n+1/2, m} &= \frac{f_{n+1, m} + f_{n, m}}{2}, & (\delta_{0y} f)_{n, m+1/2} &= \frac{f_{n, m+1} + f_{n, m}}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

С использованием (9) задаем первые разностные производные на трехточечном шаблоне и дискретный аналог лапласиана

$$(D_x f)_{n, m} = (\delta_x \delta_{0x} f)_{n, m}, \quad (D_y f)_{n, m} = (\delta_y \delta_{0y} f)_{n, m}, \quad (\Delta_h f)_{n, m} = (\delta_x \delta_x f + \delta_y \delta_y f)_{n, m}.$$

Для вычисления среднего и первых производных в четырехугольнике применяем следующие композиции разностных операторов:

$$d_0 = \delta_{0x} \delta_{0y} \equiv \delta_{0y} \delta_{0x}, \quad d_x = \delta_x \delta_{0y} \equiv \delta_{0y} \delta_x, \quad d_y = \delta_y \delta_{0x} \equiv \delta_{0x} \delta_y.$$

Для аппроксимации якобиана используем формулы [11]

$$J_{n, m}(\theta, \psi) = \beta [D_x(\theta D_y \psi) - D_y(\theta D_x \psi)]_{n, m} + (1 - \beta) [d_x(d_0 \theta d_y \psi) - d_y(d_0 \theta d_x \psi)]_{n, m},$$

которая сохраняет свойство косимметрии для всех значений параметра β и при $\beta = 1/3$ обеспечивает дополнительно сохранение условия гироскопичности (7) для разностного аналога.

В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\theta}_{nm} = F_{nm} \equiv (\Delta_h \theta + \lambda D_x \psi - J)_{nm}, \quad 0 = G_{n, m} \equiv (\Delta_h \psi - D_x \theta)_{n, m}. \quad (10)$$

Конечно-разностный аналог (5) имеет вид

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (F\psi - G\theta)_{nm} = 0. \quad (11)$$

Справедливость тождества (11) устанавливается с использованием дискретных версий формулы Грина и суммирования по частям. Попутно получаем, что для

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) косимметрия дается дискретной версией косимметрии для исходной задачи (2), если выполнено следующее равенство

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M J_{nm}(\theta, \psi) \psi_{nm} = 0. \quad (12)$$

Кроме того, требуем чтобы аппроксимация якобиана удовлетворяла бы свойству кососимметричности и в разностном аналоге интегрального уравнения энергии исчезали бы конвективные члены (гироскопический эффект)

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M J_{nm}(\theta, \psi) \theta_{nm} = 0. \quad (13)$$

В [5] было показано, что отказ от выполнения разностного аналога тождества (13) может приводить к различиям при вычислении семейства равновесий.

Для исследования трехмерных задач конвекции в пористой среде нужно решать уравнения в естественных переменных (1). При конечно-разностном моделировании удобно строить аппроксимации рассматриваемых уравнений с применением смещенных (разнесенных) сеток. В случае теплопроводной жидкости для дискретизации вводятся узлы пяти типов: для температуры θ , давления p и каждой компоненты вектора скорости v .

Чтобы обеспечить отсутствие конвективных членов в разностном аналоге уравнения тепловой энергии, используется следующая аппроксимация

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta^r)_{i,j,k} &\approx J(\theta^r, v)_{i,j,k} = \\ &= \left[\frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 d_s \delta_s \left(\theta^r \prod_{n=1, s \neq n}^3 \delta_n v^s \right) + \frac{2}{3} \sum_{s=1}^3 d_s \prod_{n=1, s \neq n}^3 \delta_n (\delta_0 \theta^r \delta_s v^s) \right]_{i,j,k} \end{aligned} \quad (14)$$

Формула (14) была использована для расчета трехмерной конвекции теплопроводной жидкости в [12], где были вычислены однопараметрические семейства плоских стационарных движений, возникающие из-за сильной неединственности решений задачи. Для плоской задачи из (14) следует формула [13], из которой введением сеточной функции тока получается аппроксимация Аракавы для уравнений Эйлера.

Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/6095).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Любимов Д. В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. № 2. 1975. С. 131–137.
- [2] Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки, Т. 49. № 5. 1991. С. 142–148.

- [3] *Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. 1995. Vol. 5. pp. 402–441.
- [4] *Говорухин В. Н.* Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // *Докл. РАН*. 1998. Т. 363. № 6. С. 772–774.
- [5] *Karasözen B., Tsybulin V. G.* Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // *Physics Letters A*. 1999. Vol. 262. pp. 321–329.
- [6] *Кантур О. Ю., Цибулин В. Г.* Расчет семейств стационарных режимов фильтрационной конвекции в узком контейнере // *ПМТФ*. 2003. Т. 44. № 2. С. 92–100.
- [7] *Говорухин В. Н., Шевченко И. В.* Численное исследование второго перехода в задаче плоской фильтрационной конвекции // *Изв. РАН, МЖГ*. 2003. № 5. С. 115–128.
- [8] *Karasözen B., Tsybulin V. G.* Cosymmetric families of steady states in Darcy convection and their collision // *Physics Letters A*. 2004. Vol. 323. pp. 67–76.
- [9] *Юдович В. И.* Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // *Изв. вузов. Северо-кавказс. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математ. моделир.* 2001. С. 174–178.
- [10] *Кантур О. Ю., Цибулин В. Г.* Численное исследование плоской задачи конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // *Изв. РАН, МЖГ*. 2004. № 3. С. 123–134.
- [11] *Arakawa A.* Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible. Flow. Part 1 // *J. Comput. Physics*. 1966. Vol. 1. pp. 119–143.
- [12] *Karasözen B., Nemtsev A. D., Tsybulin V. G.* Staggered grids discretization in three-dimensional Darcy convection // *Comput. Phys. Comm.* 2008. Vol. 170. pp. 885–893.
- [13] *Karasözen B., Tsybulin V. G.* Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // *Comput. Phys. Comm.*, 2005. Vol. 167. pp. 203–213.

Tsybulin V. G. *Finite-difference schemes that inherit the properties of porous media convection equations.* To study two- and three-dimensional convection of multi-component fluid in a porous medium we derive the methods that inherit the properties of equations. For 3d problem with primitive variables we use the staggered grids with five types of nodes: for the pressure, individual nodes for each velocity and the common nodes for the temperature and all concentrations. In the planar case we apply the finite-difference method and verify that this approach preserves a cosymmetry of underlying problem.

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Чебаков М. И., Колосова Е. М.

*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ,
Ростов-на-Дону*

В докладе изложены некоторые методы решения контактных задач о взаимодействии штампов с двухслойными основаниями: двухслойной полосой, двойным сферическим и цилиндрическим слоями. Предполагается, что внешние поверхности оснований закреплены, слои имеют различные упругие постоянные и между собой жестко соединены, в зоне контакта отсутствуют силы трения. Изучены некоторые свойства интегрального уравнения поставленных задач, построены схемы их решения с помощью асимптотического метода и прямого метода коллокаций [1, 2]. Асимптотический метод позволяет исследовать задачу для относительно малых толщин слоев, а предложенный алгоритм решения задачи методом коллокаций позволяет получать решение задачи практически при любых значениях исходных параметров. С помощью предложенных методов произведен расчет распределения контактных напряжений, параметров области контакта и взаимосвязи перемещения штампа и действующей на него силы. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных этими методами, а для случая, когда материалы слоев одинаковы и их относительная толщина велика, проведено сравнение с результатами, полученными на основе теории Герца [3].

1. Постановка задач и их интегральные уравнения.

Постановку задач опишем на примере контактной задачи для двойного сферического слоя (Задача 1). В сферических координатах (r, θ, φ) рассмотрим два сферических слоя $R_1 \leq r \leq R_2$ (слой 1) и $R_2 \leq r \leq R_3$ (слой 2) с различными упругими постоянными G_i — модуль сдвига, ν_i — коэффициент Пуассона (i — номер слоя) и жестко соединенных по сферической поверхности. Пусть поверхность $r = R_3$ неподвижна, а в поверхность $r = R_1$ вдавлируется силой P штамп в форме шара радиуса $R_0 = R_1 - \Delta$ с точкой первоначального касания $r = R_1, \varphi = 0$. Предполагаем, что трение между штампом и сферическим слоем отсутствует, сила P направлена вдоль прямой $\varphi = 0$, а величина Δ мала.

Решение задачи может быть сведено [4] к исследованию следующего уравнения

$$\int_0^\gamma q(\psi)(k_0(\psi, \varphi) + k_1(\psi, \varphi))d\psi = f(\varphi), (0 \leq \varphi \leq \gamma), \quad (1)$$

$$k_0(\psi, \varphi) = \sin \psi \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \psi) P_k(\cos \varphi), \quad (2)$$

$$k_1(\psi, \varphi) = \sin \psi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L(\alpha_k) P_k(\cos \psi) P_k(\cos \varphi), \quad L(u) = K(u) - 1/u. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_r(R_1, \varphi) = q(\varphi)$ — контактные напряжения.

В интегральном уравнении (1) функция $K(u)$ получена с использованием программы аналитических вычислений MAPLE, она имеет довольно громоздкую структуру, но основные ее свойства изучены, например, $K(u)$ представима в виде

$$K(u) = \frac{G^2 \eta_{12}(u) + G \eta_{11}(u) + \eta_{10}(u)}{G^2 \eta_{22}(u) + G \eta_{21}(u) + \eta_{20}(u)}, \quad (4)$$

где $G = G_2/G_1$, а найденные функции $\eta_{ij}(u)$ содержат степенные и экспоненциальные функции, зависят только от коэффициентов Пуассона материала слоев и отношения радиусов $r_2 = R_2/R_1$, $r_3 = R_3/R_1$. Функция $K(u)$ имеет следующее поведение на бесконечности и в нуле

$$K(u) = 1/u + O(1/u^2)(u \rightarrow \infty), K(0) = A, \quad (5)$$

Ряд (3) сходится при любых значениях параметров, а ряд (2) может быть просуммирован [5, 6].

Можно показать, что

$$k_0(\psi, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \ln |\psi - \varphi| + O(1)(\psi \rightarrow \varphi). \quad (6)$$

Рассмотрим в аналогичной постановке в полярных координатах (r, φ) плоскую контактную задачу о взаимодействии штампа с двойным цилиндрическим слоем (Задача 2). На штамп действует нормальная нагрузка. Обозначения геометрических размеров и механических свойств как и в задаче 1. Относительно контактного напряжения $\sigma_r(R_1, \varphi) = q(\varphi)$ имеем интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} k(t - \varphi) q(t) dt = f(\varphi) \quad (-\theta \leq \varphi \leq \theta) \quad (7)$$

$$k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} K(k) \cos ky, \quad f(\varphi) = \frac{G_1}{R_1(1 - \nu_1)} [(\delta + \Delta) \cos \varphi - \Delta], \quad (8)$$

Здесь $\theta \leq \varphi \leq \theta$ — область контакта, $K(u)$ обладает теми же свойствами (4)–(5), что и в предыдущей задаче, ядро интегрального уравнения (7) можно представить в виде

$$k(t) = -\ln |t| + \frac{A}{2} - \ln \left| \frac{2}{t} \sin \frac{t}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) \cos nt, \quad L(u) = K(u) - 1/u \quad (9)$$

Рассмотрим в прямоугольных координатах (x, y) плоскую контактную задачу о внедрении штампа в поверхность двухслойной полосы (Задача 3). На штамп действует нормальная и тангенсальная силы, толщины слоев h_1 и h_2 , форма подошвы штампа может быть плоской или параболической. С помощью преобразования Фурье поставленные контактные задачи для полосы сводятся относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом $\sigma_y = q(x)$ к следующему интегральному уравнению (ИУ)

$$\int_{-a}^a q(\xi) k \left(\frac{\xi - x}{h_1} \right) d\xi = \pi \theta \delta(x), \quad (-a \leq x \leq b), \quad \theta = \frac{G_1}{1 - \nu_1}, \quad (10)$$

ядро которого

$$k(t) = \int_0^{\infty} K(u) \cos ut du, \tag{11}$$

$$\delta(x) = \delta - \beta x^2 \text{ (задача 3.1), } (\beta = 1/(2R)), \delta(x) = \delta \text{ (задача 3.2)}. \tag{12}$$

Здесь $K(u)$ также представимо в виде (4), $-a \leq x \leq a$ — область контакта.

Как известно [7], ядро интегрального уравнения (10) имеет логарифмическую особенность и может быть представлено в виде

$$k(t) = -\ln |t| + F(t), F(t) = -\int_0^{\infty} \frac{1 - uK(u) - e^{-u}}{u} \cos ut du + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t). \tag{13}$$

2. Асимптотический метод.

В реальных конструкциях, например в самосмазывающихся подшипниках скольжения, толщина слоев мала по сравнению с областью контакта, в этом случае, как показывают расчеты, A является малой величиной ($A < 0.5$) и поэтому асимптотическое решение интегральных уравнений поставленных задач при малых A может быть получено на основе метода, изложенного в [1, 4]. Не останавливаясь подробно на изложении этого подхода, отметим только, что идея метода основана на сведении парных рядов-уравнений к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей и получении ее асимптотического решения при малых A после аппроксимации функции $K(u)$ функцией

$$K^*(u) = u^{-1}thAu. \tag{14}$$

Максимальная относительная погрешность такой аппроксимации, например для задачи 1 при $G = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $r_2 = 1.1$ и $r_3 = 1.4$, не превосходит 8.4%, с увеличением G и уменьшением r_2 и r_3 погрешность аппроксимации будет уменьшаться. При этом полученное асимптотическое решение будет иметь погрешность не превышающую погрешность аппроксимации ядра. Обоснование такого подхода можно найти, например, в [7].

3. Метод коллокаций.

Для решения полученных интегральных уравнений используем прямой метод коллокаций [1, 2], который не требует аппроксимации функции $K(u)$, для чего интегральные уравнения дискретизируем по схеме [1, 2] с учетом логарифмической особенности его ядра при $\psi \rightarrow \varphi$. Для первой задачи получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon \sum_{i=1, i \neq j}^N q_i (a_{ji}^0 + a_{ji}^1) - \frac{\varepsilon}{\pi} \left(\ln \frac{\varepsilon}{2} - 1 \right) q_j = f(\varphi_j), \tag{15}$$

$$a_{ji}^0 = k_0(\psi_i, \varphi_j), a_{ji}^1 = k_1(\psi_i, \varphi_j)$$

где $\varepsilon = \gamma/N$ — интервал коллокации, $\psi_i = \varepsilon/2 + \varepsilon(i - 1)$ и $\varphi_j = \varepsilon/2 + \varepsilon(j - 1)$ — узлы коллокации.

Таким образом, задача сведена к конечной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой можно получить стандартными методами, при этом коэффициенты a_{ji}^0 и a_{ji}^1 системы могут быть вычислены с высокой точностью, имея в виду, что ряд (3) сходится, а функция $L(u)$ - имеет явное аналитическое выражение через элементарные функции.

Аналогичным образом для второй контактной задачи для нахождения значений контактных напряжений $q(\psi)$ в узлах коллокации $\psi = \psi_j = -\theta_1 + \varepsilon/2 + \varepsilon(j-1)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon \sum_{i=1}^N a_{ij} q_j = b_i \quad (i = 1, \dots, N), \quad (16)$$

где

$$a_{ij} = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{\varepsilon(i-j)}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} K(n) \cos n\varepsilon(i-j) \quad (i \neq j),$$

$$a_{ii} = -(\ln \frac{\varepsilon}{2} - 1), \quad b_i = \pi f(\varphi_j). \quad (17)$$

Отличительной особенностью системы (16)–(17) является то, что она имеет диагональную структуру. Между коэффициентами системы существует следующая связь

$$a_{i+1,j+1} = a_{i,j}, \quad (j \geq i), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (18)$$

следовательно достаточно вычислить только коэффициенты первой строки, а именно a_{1j} , все остальные элементы системы будут выражать через них, что значительно сокращает время вычисления всех коэффициентов матрицы a_{ij} системы (16)–(17).

Аналогичным образом для третьей задачи нахождения значений контактных напряжений $q(x)$ в узлах коллокации $x = x_i = -a + h/2 + h(i-1)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} q_j = b_i \quad (i = 1, \dots, N), \quad a_{ij} = a_{ij}^1 - \varepsilon a_{ij}^2, \quad (19)$$

$$a_{ij} = k \left(\frac{\xi_j - x_i}{h_1} \right) \quad (i \neq j), \quad a_{ii} = \ln \frac{\varepsilon}{2h_1} - 1, \quad b_i = \pi \theta \delta(x_i), \quad (20)$$

где $\varepsilon = 2a/N$. Система (19)–(20) также имеет диагональную структуру. Между коэффициентами системы существует следующая связь

$$a_{i+1,j+1} = a_{i,j} \quad (j \geq i), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (21)$$

следовательно достаточно вычислить только коэффициенты первой строки, а именно a_{1j} , все остальные элементы будут их линейными комбинациями, что значительно сокращает время вычисления всех коэффициентов матрицы a_{ij} системы (19)–(20).

4. Числовые расчеты.

Числовые результаты расчетов, полученные изложенными методами, достаточно хорошо согласуются между собой в соответствующем диапазоне исходных параметров, а в предельных случаях, когда материалы слоев одинаковы и область контакта относительно мала, результаты, полученные методом коллокаций, с достаточной точностью совпадают с результатами, полученным на основе формул Герца.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-08-00873, 09-08-12062).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чебаков. М. И. К теории расчета двухслойного цилиндрического подшипника // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 163–170.
- [2] Воронин В. В., Цецехо В. А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 40–53.
- [3] Прочность, устойчивость, колебания. Под ред. И. А. Бургера, Я. Г. Пановко Т. 2. М.: Машиностроение, 1968. 464 с.
- [4] Александров В. М., Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 304 с.
- [5] Карпенко В. А. О замкнутом решении первой краевой задачи теории упругости для пространства с шаровой полостью // ПММ. 1975. Т. 39. № 5. С. 951–955.
- [6] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
- [7] Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

Chebakov M. I., Kolosova E. M. *Contact problems for two-layer basis and methods for their solution.* The report outlines some methods for solving the contact problems of interaction stamps with double-layer base: two-layer stripe, double spherical and cylindrical layers.

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ПОКРЫТИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНОГО МИКРОПОЛЯРНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СЖАТИИ И ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Шейдаков Д. Н.

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

Для случая осевого сжатия и внешнего гидростатического давления проведен подробный анализ устойчивости нелинейно-упругого цилиндрического микрополярного стержня, имеющего составную структуру. Путем численного решения линеаризованных уравнений равновесия, для ряда материалов найдены критические кривые и построены области устойчивости в плоскости параметров нагружения. Проанализировано влияние жесткости и толщины внешнего покрытия на бифуркацию равновесия составного микрополярного стержня.

В современной автопромышленности и авиастроении достаточно часто используются различные высокопористые материалы, в частности металлические и полимерные пены. Конструкции из этих материалов имеют ряд преимуществ: они мало весят, имеют высокую удельную прочность, а также большие возможности для поглощения энергии. Широкое применение обуславливает актуальность исследований данных материалов и конструкций на предмет прочности и устойчивости. При этом классическая модель сплошной среды не способна адекватно описать некоторые важные свойства высокопористых материалов. В связи с этим более целесообразным представляется использование модели микрополярной среды или континуума Коссера для описания свойств упругих высокопористых тел. Также следует отметить, что применяемые на практике элементы конструкций из высокопористых материалов, как правило, имеют составную структуру (металлическая или полимерная пена покрыта твердой и жесткой оболочкой), что необходимо для оптимизации механических свойств при нагружении, а также для защиты от коррозии. Эта особенность структуры в полной мере учитывается в данной работе при анализе устойчивости стержневого элемента конструкций при комбинированном нагружении.

1. Равновесие сжатого составного стержня при внешнем давлении.

Рассмотрим составной упругий стержень длины l и радиуса r_2 . Внутренняя часть стержня ($0 \leq r \leq r_1$) выполнена из высокопористого материала и описывается моделью микрополярного упругого тела. Внешнее покрытие ($r_1 \leq r \leq r_2$) выполнено из классического неполярного материала. Тогда, в случае осевого сжатия стержня в условиях внешнего гидростатического давления, положение частицы в деформированном состоянии задается радиус векторами \mathbf{R} и \mathbf{R}_* (здесь и далее величины со «звездочкой» относятся к внешнему покрытию, а без «звездочки» — к внутренней части стержня):

$$R = \begin{cases} f(r), & 0 \leq r \leq r_1 \\ f_*(r), & r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases}, \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \alpha z \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= f(r) \mathbf{e}_R + \alpha z \mathbf{e}_Z, & 0 \leq r \leq r_1 \\ \mathbf{R}_* &= f_*(r) \mathbf{e}_R + \alpha z \mathbf{e}_Z, & r_1 \leq r \leq r_2\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Φ, Z — эйлеровы цилиндрические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ — ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат, соответственно, α — коэффициент сжатия по оси цилиндра, $f(r)$ и $f_*(r)$ — некоторые функции, характеризующие радиальную деформацию составного стержня и определяемые из уравнений равновесия и граничных условий.

Кроме того, при $r \leq r_1$ задан собственно ортогональный тензор микроповорота \mathbf{H} , который характеризует поворот частицы микрополярной среды и при рассматриваемой деформации имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z \quad (3)$$

Согласно выражениям (1), (2), градиенты деформации \mathbf{C} и \mathbf{C}_* равны

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \text{grad } \mathbf{R} = f'(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{f(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \alpha \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z, & 0 \leq r \leq r_1 \\ \mathbf{C}_* &= \text{grad } \mathbf{R}_* = f'_*(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{f_*(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \alpha \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z, & r_1 \leq r \leq r_2\end{aligned}\quad (4)$$

где grad — градиент в лагранжевых координатах.

Из соотношений (3), (4) следует, что для микрополярной части стержня ($0 \leq r \leq r_1$) тензор изгибной деформации \mathbf{L} равен нулю, а мера деформации типа Коши \mathbf{Y} выражается следующим образом

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T = f'(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{f(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \alpha \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \quad (5)$$

Согласно (4), выражения меры искажения \mathbf{U}_* и тензора макроповорота \mathbf{A}_* для внешнего покрытия ($r_1 \leq r \leq r_2$) имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_* &= (\mathbf{C}_* \cdot \mathbf{C}_*^T)^{\frac{1}{2}} = f'_*(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{f_*(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \alpha \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{A}_* &= \mathbf{U}_*^{-1} \cdot \mathbf{C}_* = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z\end{aligned}\quad (6)$$

Будем считать, что упругие свойства стержня описываются моделью физически линейного изотропного материала, удельная потенциальная энергия деформации которого в случае континуума Коссера имеет вид

$$\begin{aligned}W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) &= \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) + \frac{1}{2} (\mu + \chi) \text{tr} \left((\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{E})^T \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \mu \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E})^2 + \frac{1}{2} \gamma_1 \text{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{1}{2} \gamma_2 \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} \gamma_3 \text{tr} \mathbf{L}^2 \\ \mu + \chi &> 0, \quad \lambda + 2\mu + \chi > 0, \quad \gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > 0\end{aligned}\quad (7)$$

а в случае классической модели сплошной среды записывается как

$$W_*(\mathbf{U}_*) = \frac{1}{2} \lambda_* \text{tr}^2(\mathbf{U}_* - \mathbf{E}) + \mu_* \text{tr}(\mathbf{U}_* - \mathbf{E})^2, \quad \mu_* > 0, \quad \lambda_* + 2\mu_* > 0 \quad (8)$$

Здесь λ, μ и λ_*, μ_* — константы Лямэ, $\chi, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — моментные упругие модули, \mathbf{E} — единичный тензор.

Из выражений (3), (5), (7) следует, что для внутренней части стержня тензор моментных напряжений типа Пиолы \mathbf{G} при деформации осевого сжатия равен нулю, а тензор напряжений типа Пиолы \mathbf{D} равен

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{\partial W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H} = D_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + D_\varphi \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + D_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z \\ D_r &= \lambda s + \chi (f'(r) - 1), \quad D_\varphi = \lambda s + \chi \left(\frac{f(r)}{r} - 1 \right), \quad D_z = \lambda s + \chi (\alpha - 1) \quad (9) \\ s &= f'(r) + \frac{f(r)}{r} + \alpha - 3, \quad \chi = 2\mu + \chi \end{aligned}$$

Согласно (6), (8), выражение тензора напряжений Пиолы \mathbf{D}_* для внешнего покрытия ($r_1 \leq r \leq r_2$) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_* &= \frac{\partial W_*(\mathbf{U}_*)}{\partial \mathbf{U}_*} \cdot \mathbf{A}_* = D_r^* \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + D_\varphi^* \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + D_z^* \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z \\ D_r^* &= \lambda_* s_* + 2\mu_* (f_*'(r) - 1), \quad D_\varphi^* = \lambda_* s_* + 2\mu_* \left(\frac{f_*(r)}{r} - 1 \right), \quad (10) \\ D_z^* &= \lambda_* s_* + 2\mu_* (\alpha - 1); \quad s_* = f_*'(r) + \frac{f_*(r)}{r} + \alpha - 3 \end{aligned}$$

Уравнения равновесия нелинейной моментной теории упругости при отсутствии массовых сил и моментов записываются следующим образом

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0 \quad (11)$$

где div — дивергенция в лагранжевых координатах. Символ \times означает векторный инвариант тензора второго ранга.

Уравнения равновесия классической нелинейной теории упругости при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_* = 0 \quad (12)$$

Граничные условия

$$D_r^*|_{r=r_2} = -\frac{\alpha p f_2(r_2)}{r_2}, \quad D_r^* \Big|_{r=r_1} = D_r|_{r=r_1}, \quad f_*(r_1) = f(r_1), \quad f(0) = 0 \quad (13)$$

выражают действие гидростатического давления p (рассчитанного на единицу площади деформированной конфигурации) на боковой поверхности стержня ($r = r_2$), жесткое сцепление материалов на границе раздела ($r = r_1$) и отсутствие особенностей у смещения в нуле.

Решая краевую задачу (11)–(13) с учетом соотношений (9), (10), находим неизвестные функции $f(r)$ и $f_*(r)$

$$f(r) = c_1 r, \quad f_*(r) = c_1^* r - \frac{c_2^*}{r} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(2\mu_* - \alpha p)((3 - \alpha)(\lambda - \lambda_*) + \chi - 2\mu_*)(r_1^2 - r_2^2) + 2r_2^2(\lambda_* + 2\mu_*)((3 - \alpha)\lambda + \chi)}{(2\lambda + \chi)(2\lambda_* r_2^2 + 2\mu_*(r_2^2 + r_1^2) + \alpha p(r_2^2 - r_1^2)) + 4\mu_*(\lambda_* + \mu_*)(r_2^2 - r_1^2) + 2\alpha p(\lambda_* r_1^2 + \mu_*(r_2^2 + r_1^2))} \\ c_1^* &= \frac{r_1^2(2\mu_* - \alpha p)((3 - \alpha)(\lambda - \lambda_*) + \chi - 2\mu_*) + r_2^2(2(\lambda + \mu_*) + \chi)((3 - \alpha)\lambda_* + 2\mu_*)}{(2\lambda + \chi)(2\lambda_* r_2^2 + 2\mu_*(r_2^2 + r_1^2) + \alpha p(r_2^2 - r_1^2)) + 4\mu_*(\lambda_* + \mu_*)(r_2^2 - r_1^2) + 2\alpha p(\lambda_* r_1^2 + \mu_*(r_2^2 + r_1^2))} \quad (15) \\ c_2^* &= \frac{((1 - \alpha)(\lambda_* \chi - 2\lambda \mu_*) - \alpha p((3 - \alpha)(\lambda - \lambda_*) + \chi - 2\mu_*))r_1^2 r_2^2}{(2\lambda + \chi)(2\lambda_* r_2^2 + 2\mu_*(r_2^2 + r_1^2) + \alpha p(r_2^2 - r_1^2)) + 4\mu_*(\lambda_* + \mu_*)(r_2^2 - r_1^2) + 2\alpha p(\lambda_* r_1^2 + \mu_*(r_2^2 + r_1^2))} \end{aligned}$$

2. Уравнения нейтрального равновесия. Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия составного стержня при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое:

1) для микрополярной части — радиус вектором $\mathbf{R} + \eta\mathbf{v}$, и тензором микроповорота $\mathbf{H} - \eta\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$,

2) для внешнего покрытия — радиус вектором $\mathbf{R}_* + \eta\mathbf{v}_*$.

Здесь η — малый параметр, \mathbf{v} и \mathbf{v}_* — вектора добавочных перемещений, $\boldsymbol{\omega}$ — линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот частиц микрополярной среды, отсчитываемый от начального деформированного состояния.

Возмущенное состояние равновесия микрополярной среды описывается уравнениями:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^\bullet = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G}^\bullet + [\operatorname{grad} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}^\bullet]_{\times} = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta\mathbf{v}, \mathbf{H} - \eta\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}) \right|_{\eta=0}, \quad \mathbf{G}^\bullet = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{G}(\mathbf{R} + \eta\mathbf{v}, \mathbf{H} - \eta\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}) \right|_{\eta=0}$$

Здесь \mathbf{D}^\bullet и \mathbf{G}^\bullet — линейризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, для которых в случае физически линейного микрополярного материала (7) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\bullet &= (\lambda (\operatorname{tr} \mathbf{Y}^\bullet) \mathbf{E} + \mu \mathbf{Y}^\bullet + [\mu + \chi] \mathbf{Y}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{G}^\bullet &= (\gamma_1 (\operatorname{tr} \mathbf{L}^\bullet) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L}^\bullet + \gamma_3 \mathbf{L}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{G} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{Y}^\bullet = (\operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L}^\bullet = \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}^T$$

где \mathbf{Y}^\bullet — линейризованная мера деформации типа Коши, \mathbf{L}^\bullet — линейризованный тензор изгибных деформаций.

Линейризованные уравнения равновесия в рамках классической нелинейной теории упругости имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_*^\bullet = 0, \quad \mathbf{D}_*^\bullet = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}_*(\mathbf{R}_* + \eta\mathbf{v}_*) \right|_{\eta=0} \quad (18)$$

где \mathbf{D}_*^\bullet — линейризованный тензор напряжений Пиолы.

Линейризованные краевые условия на боковой поверхности стержня ($r = r_2$) и на границе раздела сред ($r = r_1$) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_*^\bullet|_{r=r_2} &= -p J_* \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}_*^{-T} \cdot ((\operatorname{Div} \mathbf{v}_*) \mathbf{E} - \operatorname{Grad} \mathbf{v}_*^T), & J_* &= \det \mathbf{C}_* \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_*^\bullet|_{r=r_1} &= \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_*^\bullet|_{r=r_1}, & \mathbf{v}_*|_{r=r_1} &= \mathbf{v}|_{r=r_1}, & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}_*^\bullet|_{r=r_1} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь Div и Grad — дивергенция и градиент в эйлеровых координатах. Будем полагать, что на торцах стержня ($z = 0, l$) отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линейризованным граничным условиям:

1) для микрополярной части стержня ($0 \leq r \leq r_1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_R|_{z=0,l} &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_\Phi|_{z=0,l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}|_{z=0,l} = 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{e}_Z|_{z=0,l} &= \mathbf{e}_R \cdot \boldsymbol{\omega}|_{z=0,l} = \mathbf{e}_\Phi \cdot \boldsymbol{\omega}|_{z=0,l} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

2) для внешнего покрытия ($r_1 \leq r \leq r_2$)

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_*^\bullet \cdot \mathbf{e}_R|_{z=0,l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_*^\bullet \cdot \mathbf{e}_\Phi|_{z=0,l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_*|_{z=0,l} = 0 \quad (21)$$

Выражения (16), (18) представляют собой систему девяти уравнений в частных производных относительно неизвестных компонент векторов добавочных перемещений $\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_R \mathbf{e}_R + v_\Phi \mathbf{e}_\Phi + v_Z \mathbf{e}_Z, & \mathbf{v}_* &= v_R^* \mathbf{e}_R + v_\Phi^* \mathbf{e}_\Phi + v_Z^* \mathbf{e}_Z \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_R \mathbf{e}_R + \omega_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \omega_Z \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (22)$$

Использование специальной подстановки вида

$$\begin{aligned} v_R &= V_R(r) \cos n\varphi \cos \beta z, & v_\Phi &= V_\Phi(r) \sin n\varphi \cos \beta z \\ v_Z &= V_Z(r) \cos n\varphi \sin \beta z, & v_R^* &= V_R^*(r) \cos n\varphi \cos \beta z \\ v_\Phi^* &= V_\Phi^*(r) \sin n\varphi \cos \beta z, & v_Z^* &= V_Z^*(r) \cos n\varphi \sin \beta z \\ \omega_R &= \Omega_R(r) \sin n\varphi \sin \beta z, & \omega_\Phi &= \Omega_\Phi(r) \cos n\varphi \sin \beta z \\ \omega_\Phi &= \Omega_\Phi(r) \cos n\varphi \sin \beta z; & \beta &= \pi m/l, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

приводит к отделению переменных φ, z в уравнениях нейтрального равновесия и позволяет удовлетворить линеаризованным граничным условиям (20), (21) на торцах стержня. Тем самым исследование устойчивости сводится к решению линейной однородной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее разрешимости необходимо дополнительно сформулировать шесть условий в нуле, которые можно получить, потребовав ограниченности неизвестных функций и их производных по r при $r = 0$:

$$\begin{aligned} n = 0 : & \quad V_R(0) = V_\Phi(0) = V_Z'(0) = 0, \quad \Omega_R(0) = \Omega_\Phi(0) = \Omega_Z'(0) = 0 \\ n = 1 : & \quad V_R'(0) = V_\Phi'(0) = V_Z(0) = 0, \quad \Omega_R'(0) = \Omega_\Phi'(0) = \Omega_Z(0) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Путем численного решения линеаризованной краевой задачи (16)–(19), (22)–(24) для ряда конкретных материалов найдены критические кривые и построены области устойчивости; проведен подробный анализ влияния размеров стержня и толщины покрытия на бифуркацию равновесия. Установлено, в частности, что чем больше жесткость покрытия, тем слабее влияние размерного эффекта на потерю устойчивости упругого стержня из микрополярного материала.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант МК-6315.2010.1), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 09-01-00459-а и 09-01-00695-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Sheydakov D. N. *Influence of coating properties on buckling of composite micropolar rod subject to compression and external pressure.* In the case of an axial compression and external hydrostatic pressure, an extensive stability analysis has been carried out for a nonlinearly elastic cylindrical micropolar rod, which has a composite structure. By solving the linearized equilibrium equations numerically for several materials, the critical curves are founded and stability regions are constructed in the plane of loading parameters. The influence of external coating stiffness and thickness on equilibrium bifurcation of a composite micropolar rod is analyzed.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ С ТРЕЩИНОЙ ТРЕХМЕРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Якупов Н. М., Киямов Х. Г.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

Описан эффективный метод расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных оболочечных конструкций, имеющих сложную геометрию, трехмерными элементами. Рассмотрены примеры панели со сквозной и несквозной трещиной, а также лопатка в виде пространственно искривленного тела с трещиной.

В работах [1–3] описан эффективный метод расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных оболочечных конструкций, имеющих сложную геометрию. Метод основан на синтезе идеи предварительной параметризации и метода конечных элементов. Метод, основанный на гипотезе Кирхгоффа–Лява, не позволяет с достаточной степенью точности определить НДС: дефектных областей типа трещин и локальных углублений, области приложения сосредоточенных нагрузок и точечного крепления, области пересечения оболочек и т. д. В связи с этим разработка методов определения напряженно-деформированного состояния на базе объемных элементов является актуальной задачей.

Метод [1–3] развит для трехмерных объектов сложной геометрии. Рассматриваемый участок конструкции, занимающий объем V , задается криволинейными координатами t^1, t^2, t^3 единичного куба V_φ таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области V_φ соответствовала криволинейная пространственная сетка V :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t^1, t^2, t^3). \quad (1)$$

Дифференцированием (1) по t^1, t^2, t^3 определяются координатные векторы $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$, компоненты метрического тензора g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_{jk}^i .

Решение u, v и w в каждом из параллелепипедов представляется в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна трех переменных:

$$\begin{aligned} u &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_U, \\ v &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_V, \\ w &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_W, \end{aligned} \quad (2)$$

где ψ_i — вектор координатных функций, F_j — вектор компонент искомым неизвестных u, v, w и его производных, которые, в частности для u обозначены:

$$\begin{aligned} u_{i,j,k}^{001} &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial t^1} \right)_i; & u_{i,j,ki}^{010} &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial t^2} \right)_i; & u_{i,j,k}^{100} &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial t^3} \right)_i; & u_{i,j,k}^{101} &= \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^3 \partial t^1} \right)_i; \\ u_{i,j,k}^{011} &= \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^1 \partial t^2} \right)_i; & u_{i,j,k}^{110} &= \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^3 \partial t^1} \right)_i; & u_{i,j,k}^{111} &= \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial t^3 \partial t^1 \partial t^2} \right)_i. \end{aligned}$$

Разрешающие соотношения получаются из вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 W \sqrt{g} ds^3 ds^1 ds^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho F^i \delta u_i \sqrt{g} ds^3 ds^1 ds^2 + \int_S \int P^1 \delta u_i dS,$$

где W — удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела; F^i, P^i — контравариантные компоненты вектора массовых и поверхностных сил; ρ — массовая плотность; g — определитель матрицы метрического тензора; S — поверхность боковых граней тела.

В качестве геометрических и физических соотношений взяты линейные соотношения. При формировании матрицы жесткости все операции выполняются в матричной форме, при этом структура интегралов одинакова. Подынтегральные выражения для каждого элемента вычисляются один раз. Все это позволяет экономить ресурсы ПЭВМ.

На базе разработанной программы выполнен анализ панели со сквозной (рис.1) и несквозной трещиной (рис.2), определены распределение НДС в дефектных областях.

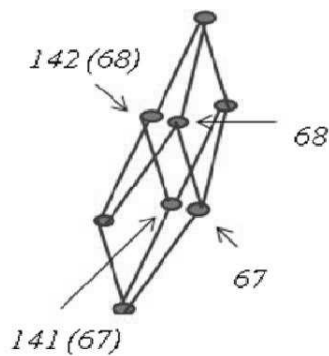


Рис. 1.

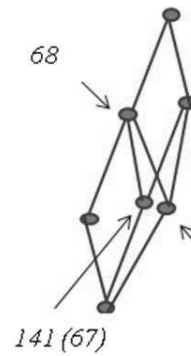


Рис. 2.

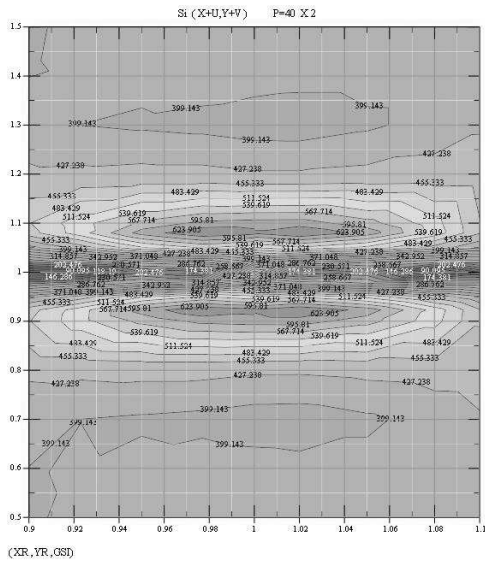


Рис. 3.

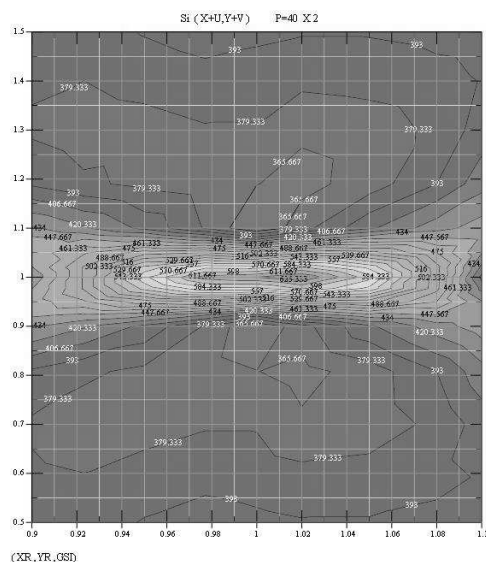


Рис. 4.

Моделирование трещины трехмерными элементами позволяет улавливать особенности деформирования при сквозных и несквозных трещинах. В частности, на рис. 3, 4 и рис. 5, 6 представлены распределения интенсивности напряжений на верхней и нижней поверхностях панели в области трещины при сквозных и несквозных трещинах, соответственно.

Анализ результатов позволяет делать интересные выводы, которые невозможно получить при решении задачи в двухмерной постановке.

Рассмотрена также пространственно искривленная лопатка с несквозной трещиной.

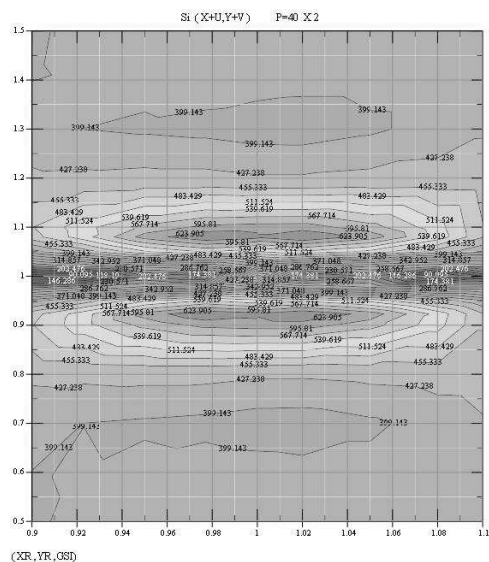


Рис. 5.

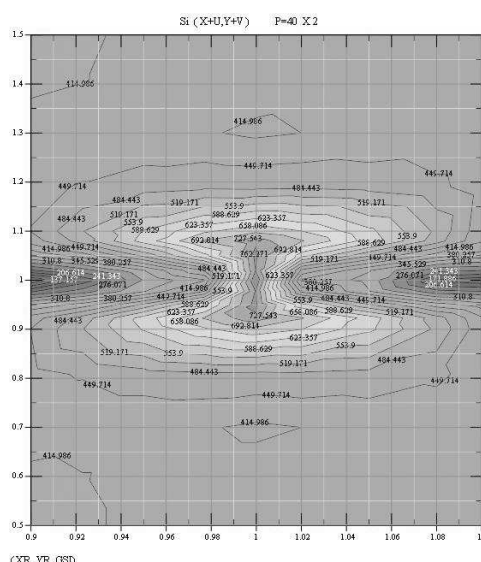


Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Якупов Н. М. Об одном методе расчета оболочек сложной геометрии // Исследования по теории оболочек. Труды семинара. Казань, 1984. № 17. С. 4–17.
- [2] Корнишин М. С., Якупов Н. М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикладная механика. 1987. № 3. С. 38–44.
- [3] Якупов Н. М. Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. Казань: Изд-во ИММ КНЦ РАН, 1994. 124 с.

Yakupov N. M., Kiyamov H. G. *Modelling of thin-walled elements of a design with a crack three-dimensional elements.* The effective method of calculation of the is intense-deformed condition thin-walled cover constructions the designs having difficult geometry, is described by three-dimensional elements. Examples of the panel with a through and not through crack, and also a shovel in the form of spatially bent body with a crack are considered.