

Содержание

Акопьян В.А., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н., Лесных Е.С. Некоторые физико-механические проблемы пьезоэлектрических актуаторов	6
Алтухов А.Е., Алтухова М.Л. Точное решение пространственных задач термоупругости для изотропного слоя с полостью и цилиндра	10
Батищев В.А., Хорошунова Е.В. Вырожденные бифуркации термокапиллярных течений жидкости с примесью в тонком слое	15
Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н., Скалиух А.С. Новые возможности пакета ACELAN для расчета характеристик пьезопреобразователей с неоднородной поляризацией	20
Беркович В.Н. Об одном классе смешанных задач динамики наклонно-слоистой среды	25
Боев Н.В., Троян Э.А. Переотражения произвольное конечное число раз звуковых лучей в акустике помещений неканонической формы . . .	30
Болгова А.И., Боброва А.О. Использование МКЭ для расчета волновых характеристик в акустическом неоднородном слое	34
Бондарчук А.А. Установившиеся горизонтальные течения периодической структуры	39
Буравчук Н.И., Гурьянова О.В., Окороков Е.П., Павлова Л.Н. Физико-механические свойства органо-минеральных композитов на основе промышленных отходов	42
Бызов А.П., Иванова Е.А. Потенциалы взаимодействия частиц с вращательными степенями свободы	47
Ватульян А.О., Чебакова Е.М. О новых граничных уравнениях в задачах о концентрации напряжений.	52
Гвоздев С.А. Методы моделирования тканей в компьютерной графике .	57
Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кваша О.В. Создание направленного излучения бегущих волн системой пьезокерамических накладок на упругом слое	62
Еремеев В.А., Соловьев А.Н. О распространении поверхностных волн в системе подложка–решетка нанокристаллов	67
Еремеев В.А., Сухов Д.А. О распространении поверхностных волн в упругой микрополярированной жидкости	72
Жорник В.А., Рыбинская А.А., Савочка П.А. Влияние теплового нагружения на развитие кольцевых трещин в сплошных цилиндрах . . .	78
Жуков М.Ю., Петровская Н.В. Асимптотический анализ шестимерной модели термогравитационной конвекции в жидком гелии	82
Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Перенос примесей электрическим полем в двумерных каналах сложной формы.	87
Журавлев Г.А., Тварилидзе О.В., Шишлин Д.М. К оценке кинематики торцового пересопряжения зубьев	92
Зеленин А.А., Зубов Л.М., Зеленина А.А. Учет моментных напряжений в нелинейной задаче Сен-Венана для винтовой пружины	97

Зеленцов В.Б., Докучаев С.А., Сахабудинов Р.В. Нестационарная динамическая контактная задача об ударе плоского штампа в ортотропную полуплоскость	102
Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Термокапиллярная колебательная неустойчивость при отрицательных числах Марангони	107
Иванова Е.А., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н. Механические параметры наноразмерных объектов. Теория и эксперимент	112
Игумнов Л.А. Применение МГЭ с преобразованием Лапласа к решению нестационарных задач трехмерной теории вязкоупругости	117
Индейцев Д.А., Семенов Б.Н. Влияние локализации частиц водорода на охрупчивание металлов	122
Кабельков В.А., Кабельков А.Н., Пасенчук А.Э., Федий В.С., Нефедов В.В. Оптимальные управления колебаниями высотных сооружений	128
Калоеров С.А., Баева А.И., Глущенко Ю.А. Электроупругое состояние полуплоскости с криволинейными отверстиями и трещинами	132
Карякин М.И. Об особенностях поведения нелинейно-упругих тел при растягивающих напряжениях	137
Карякин М.И., Пустовалова О.Г. Образование полости на оси изолированного дефекта в псевдоконтинууме Коссера	142
Кизилова Н.Н. О постановках задач механики растущих вязкоупругих сплошных сред	146
Кононов Ю.Н. Устойчивость и стабилизация движения твердого тела с полостью, содержащей многослойную жидкость, разделенную упругими пластинками	151
Кузьменко С.М. Об условиях термодинамического равновесия упругих тел при учете конечности толщины межфазной границы на примере центрально симметричных полей деформаций	154
Ластенко М.С. Растяжение упругого цилиндра на закритическом этапе	159
Лычев С.А., Семенов Д.А. Связанная динамическая задача термовязкоупругости для ограниченного тела	164
Мелехов А.П., Ревина С.В. Длинноволновая асимптотика двумерных вторичных автоколебаний на стационарных пространственно-периодических течениях с нулевым средним	169
Мочалова Ю.А., Индейцев Д.А. Локализация волн в тонких пленках с включениями различной плотности	174
Музыка Т.Н., Юдин А.С. Условия сопряжения на дискретных ребрах для составных оболочек сложной геометрии	179
Нижник М.П., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Исследование волнового поля двухслойного полупространства с жидким включением	184
Никифоров А.Н., Бузало Н.С. Численный алгоритм исследования процессов переноса примеси в мезометеорологическом пограничном слое атмосферы	186
Островская И.В., Юдович В.И. Применение двусторонних оценок присоединенной массы в задаче об ударе пластинки о жидкость	191

Паринов И.А. Воздействие углерода на образование дефектов и разрушение высокотемпературных сверхпроводников	196
Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Евдокимов А.А., Капустин М.С. Анализ контактных напряжений в задаче о действии штампа на упругий слой с вертикально ориентированными включениями	201
Салганик Р.Л., Марков В.Г., Мохель А.Н., Устинов К.Б. Термоупругое изгибное деформирование в многослойной структуре, вызванное образованием тонкого отличающегося от нее по температуре межслойного включения (континуальное приближение)	206
Снопов А.И., Захаренко Е.О. Исследование поля давлений в закрученном потоке вязкого газа между коническими поверхностями	211
Сухов Д.Ю. Использование среды Maple для визуализации решений задач о деформациях нелинейно упругих тел	215
Трубчик И.С. Метод сведения смешанных задач для полубесконечных областей к решению парных интегральных уравнений	219
Углич П.С. Обратная геометрическая задача для упругого слоя с неровной нижней границей.	223
Юдин С.А. Модель формовки оболочки вращения при конечных деформациях	228
Юдович В.И., Гуда С.А. Совместная задача о вращении твердого тела в вязкой жидкости под действием упругой силы	232
Явруян О.В. Обратная задача идентификации трещины в вязкоупругом слое	237

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ ВОРОВИЧА И.И.

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Труды IX Международной Конференции,
посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН

И.И. Воровича

г. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.

II

Издательство ООО «ЦВВР»

Ростов-на-Дону

2006

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ ВОРОВИЧА И.И.

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Труды IX Международной Конференции,
посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН

И.И. Воровича

г. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.

Т. 2

Издательство ООО «ЦВВР»

Ростов-на-Дону

2006

ББК В25

Ответственный редактор

профессор А.В. Белоконь

Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г.Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г. Т. 2. Ростов-на-Дону. Издательство ООО «ЦВВР». 2006 г. 241 с.

ISBN 5-94153-035-8

Сборник содержит научные доклады, представленные на IX-ую Международную конференцию "Современные проблемы механики сплошной среды" (Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.), посвященную 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича.

Научная программа конференции включает разнообразные актуальные разделы механики сплошной среды: математические проблемы механики сплошной среды, математические модели в механике разрушения, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций, связанные физико-механические поля в механике сплошной среды, смешанные задачи механики сплошной среды, вычислительная механика и др.

ISBN 5-94153-035-8

Д – 01(03) – без объявл.

ББК В25

IX Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды" (Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

© НИИ механики и прикладной математики РГУ, 2006г.

Содержание

Акопьян В.А., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н., Лесных Е.С. Некоторые физико-механические проблемы пьезоэлектрических актуаторов	6
Алтухов А.Е., Алтухова М.Л. Точное решение пространственных задач термоупругости для изотропного слоя с полостью и цилиндра	10
Батищев В.А., Хорошунова Е.В. Вырожденные бифуркации термокапиллярных течений жидкости с примесью в тонком слое	15
Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н., Скалиух А.С. Новые возможности пакета ACELAN для расчета характеристик пьезопреобразователей с неоднородной поляризацией	20
Беркович В.Н. Об одном классе смешанных задач динамики наклонно-слоистой среды	25
Боев Н.В., Троян Э.А. Переотражения произвольное конечное число раз звуковых лучей в акустике помещений неканонической формы . . .	30
Болгова А.И., Боброва А.О. Использование МКЭ для расчета волновых характеристик в акустическом неоднородном слое	34
Бондарчук А.А. Установившиеся горизонтальные течения периодической структуры	39
Буравчук Н.И., Гурьянова О.В., Огороков Е.П., Павлова Л.Н. Физико-механические свойства органо-минеральных композитов на основе промышленных отходов	42
Бызов А.П., Иванова Е.А. Потенциалы взаимодействия частиц с вращательными степенями свободы	47
Ватульян А.О., Чебакова Е.М. О новых граничных уравнениях в задачах о концентрации напряжений.	52
Гвоздев С.А. Методы моделирования тканей в компьютерной графике .	57
Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кваша О.В. Создание направленного излучения бегущих волн системой пьезокерамических накладок на упругом слое	62
Еремеев В.А., Соловьев А.Н. О распространении поверхностных волн в системе подложка–решетка нанокристаллов	67
Еремеев В.А., Сухов Д.А. О распространении поверхностных волн в упругой микрополярной жидкости	72
Жорник В.А., Рыбинская А.А., Савочка П.А. Влияние теплового нагружения на развитие кольцевых трещин в сплошных цилиндрах . . .	78
Жуков М.Ю., Петровская Н.В. Асимптотический анализ шестимерной модели термогравитационной конвекции в жидком гелии	82
Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Перенос примесей электрическим полем в двумерных каналах сложной формы.	87
Журавлев Г.А., Тварилидзе О.В., Шишлин Д.М. К оценке кинематики торцового пересопряжения зубьев	92
Зеленин А.А., Зубов Л.М., Зеленина А.А. Учет моментных напряжений в нелинейной задаче Сен-Венана для винтовой пружины	97

Зеленцов В.Б., Докучаев С.А., Сахабудинов Р.В. Нестационарная динамическая контактная задача об ударе плоского штампа в ортотропную полуплоскость	102
Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Термокапиллярная колебательная неустойчивость при отрицательных числах Марангони	107
Иванова Е.А., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н. Механические параметры наноразмерных объектов. Теория и эксперимент	112
Игумнов Л.А. Применение МГЭ с преобразованием Лапласа к решению нестационарных задач трехмерной теории вязкоупругости	117
Индейцев Д.А., Семенов Б.Н. Влияние локализации частиц водорода на охрупчивание металлов	122
Кабельков В.А., Кабельков А.Н., Пасенчук А.Э., Федий В.С., Нефедов В.В. Оптимальные управления колебаниями высотных сооружений	128
Калоеров С.А., Баева А.И., Глущенко Ю.А. Электроупругое состояние полуплоскости с криволинейными отверстиями и трещинами	132
Карякин М.И. Об особенностях поведения нелинейно-упругих тел при растягивающих напряжениях	137
Карякин М.И., Пустовалова О.Г. Образование полости на оси изолированного дефекта в псевдоконтинууме Коссера	142
Кизилова Н.Н. О постановках задач механики растущих вязкоупругих сплошных сред	146
Кононов Ю.Н. Устойчивость и стабилизация движения твердого тела с полостью, содержащей многослойную жидкость, разделенную упругими пластинками	151
Кузьменко С.М. Об условиях термодинамического равновесия упругих тел при учете конечности толщины межфазной границы на примере центрально симметричных полей деформаций	154
Ластенко М.С. Растяжение упругого цилиндра на закритическом этапе	159
Лычев С.А., Семенов Д.А. Связанная динамическая задача термовязкоупругости для ограниченного тела	164
Мелехов А.П., Ревина С.В. Длинноволновая асимптотика двумерных вторичных автоколебаний на стационарных пространственно-периодических течениях с нулевым средним	169
Мочалова Ю.А., Индейцев Д.А. Локализация волн в тонких пленках с включениями различной плотности	174
Музыка Т.Н., Юдин А.С. Условия сопряжения на дискретных ребрах для составных оболочек сложной геометрии	179
Нижник М.П., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Исследование волнового поля двухслойного полупространства с жидким включением	184
Никифоров А.Н., Бузало Н.С. Численный алгоритм исследования процессов переноса примеси в мезометеорологическом пограничном слое атмосферы	186
Островская И.В., Юдович В.И. Применение двусторонних оценок присоединенной массы в задаче об ударе пластинки о жидкость	191

Паринов И.А. Воздействие углерода на образование дефектов и разрушение высокотемпературных сверхпроводников	196
Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Евдокимов А.А., Капустин М.С. Анализ контактных напряжений в задаче о действии штампа на упругий слой с вертикально ориентированными включениями	201
Салганик Р.Л., Марков В.Г., Мохель А.Н., Устинов К.Б. Термоупругое изгибное деформирование в многослойной структуре, вызванное образованием тонкого отличающегося от нее по температуре межслойного включения (континуальное приближение)	206
Снопов А.И., Захаренко Е.О. Исследование поля давлений в закрученном потоке вязкого газа между коническими поверхностями	211
Сухов Д.Ю. Использование среды Maple для визуализации решений задач о деформациях нелинейно упругих тел	215
Трубчик И.С. Метод сведения смешанных задач для полубесконечных областей к решению парных интегральных уравнений	219
Углич П.С. Обратная геометрическая задача для упругого слоя с неровной нижней границей.	223
Юдин С.А. Модель формовки оболочки вращения при конечных деформациях	228
Юдович В.И., Гуда С.А. Совместная задача о вращении твердого тела в вязкой жидкости под действием упругой силы	232
Явруян О.В. Обратная задача идентификации трещины в вязкоупругом слое	237

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АКТЮАТОРОВ

Акопьян В.А.* , Рожков Е.В.* , Соловьев А. Н. , Шевцов
С.Н.** , Лесных Е.С.***

** НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. РГУ*

*** Донской государственный технический университет*

Рассмотрены основные направления и пути развития пьезоэлектрических актюаторов, некоторые электромеханические модели, описывающие поведение слоистых возбуждаемых электрическим полем пластин, основные факторы, влияющие на расчетные характеристики актюаторов и схемы некоторых их конструкций.

Пьезоэлектрические актюаторы в последние годы получили широкое применение в качестве прецизионных приводов малых перемещений в автомобилестроении, аэрокосмической и медицинской технике. Эффективность их применения привела к тому, что в настоящее время были развернуты теоретические и экспериментальные исследования моделей силовых актюаторов, генерирующих большие перемещения и механические усилия, предназначенные для систем поглощения и компенсации колебаний в элементах летательных аппаратов.

Среди основных областей применения пьезоэлектрических актюаторов можно выделить следующие:

- приводы для систем автомобилей (пьезоактюаторы управления инжекторными клапанами впрыска топлива, управления зеркалаами, систем безопасности);
- прецизионные актюаторы для адаптивных оптических систем, спутниковых антенн;
- актюаторы для систем оптического управления лазерным лучом в дальнометрах и системах высокоточного оружия;
- актюаторы для ультразвуковой медицинской техники;
- силовые пьезоэлектрические актюаторы для систем поглощения и компенсации вибраций в тяжело нагруженных элементах летательных аппаратов (лопасти несущих винтов вертолетов, управляемые стабилизаторы самолетов).

По конструктивному исполнению актюаторы можно объединить в две группы: поверхностные, прикрепляемые на поверхности управляемых ими элементов конструкции, и имплантируемые между слоями металлических или композитных конструкций. Каждая из этих групп включает в себя актюаторы, отличающиеся тем, что в пьезоэлементах (ПЭ), являющихся их чувствительным элементом, реализуются различные виды напряженно-деформированного состояния (НДС): растяжение – сжатие, изгиб, кручение или их комбинации.

От принадлежности актюатора к одной из отмеченных выше групп зависит совокупность требований к физико-механическим свойствам материалов, компонентов актюатора.

Одной из основных задач, возникающих при создании силовых пьезоактюаторов, является получение максимальных смещений и механических усилий, передаваемых на управляемый элемент конструкции. Это обусловлено тем, что для

управления аэродинамическими поверхностями, в т. ч. для демпфирования их колебаний, обусловленных, например, резкими эволюциями летательного аппарата, а также флатером или бафтингом, требуются смещения (усилия) на торцах пьезоэлементов, существенно превышающие смещения, получаемые в конструкциях прецизионных актюаторов.

При решении этой задачи необходимо исследовать ряд важных факторов, влияющих на выходные характеристики пьезоактюаторов, в т. ч.:

- максимальный коэффициент электромеханической связи (КЭС) на исследуемой модели колебаний;
- близость модулей упругости и сдвига пьезоэлемента (ПЭ) и подложки;
- расхождение температурных зависимостей модулей упругости и сдвига материалов пьезослоя, подложки и клеевого слоя;
- соотношение коэффициентов линейного расширения материалов ПЭ и подложки;
- корреляция толщины клеевой прослойки и степени адгезии клея с величиной смещений торцов ПЭ;
- влияние однородности поляризации на величину смещений ПЭ.

Некоторые из этих факторов были рассмотрены в [1, 2]. В частности, в [1] приведены результаты исследования деформаций балочной биморфной конструкции консольного типа как электромеханической системы, состоящей из ПЭ состава PZT “Sonex P53” и чисто стальной, а также армированной углеродными волокнами подложки [1]. На консольно закрепленной балочке толщиной t , выполняющей функции подложки, наклеены два пьезоэлектрических пленочных биморфных элемента. Экспериментально были исследованы влияние жесткости и толщины клеевого слоя на смещение торцов подложки и пьезоэлементов. Поперечное смещение измерялось при различных уровнях электрического потенциала, прикладываемого к электродам биморфного ПЭ. Теоретическое описание этой модели представляет собой комбинацию приближенного решения для изгиба композитных многослойных пластин с анализом механизмов передачи напряжений между слоями. Расчет (в чисто линейной постановке) поперечных смещений и напряжений в тонкой пластине был подтвержден результатами МКЭ-анализа. Однако, в [1] рассмотрены только чисто изгибные колебания актюатора, хотя из анализа его НДС и форм колебаний следует, что в исследуемой модели реализуется сложное напряженное состояние. В отличие от [1] в работе [2] учтены как изгибные, так и крутильные напряжения. В [2] приведены результаты теоретико-экспериментальных электромеханических характеристик консольной пластины с наклеенными с двух ее сторон твердотельными пьезоэлементами, основанные на решении связанной электромеханической задачи для слоистой среды, в которой получены аналитические выражения для обобщенных усилий и моментов, зависящих как от продольного $u_0(x, y)$ и поперечного $v_0(x, y)$ смещений в плоскости (x, y) пластины, так и от функции прогиба $w(x, y)$. Т. о. в рассматриваемой постановке задача является связанной – не разделяющейся на плоскую и изгиб. При этом в [1] для создания корректирующих деформаций кручения и(или) изгиба приведены результаты исследований несимметричных слоистых структур со связанными жесткостями: изгиба с кручением, растяжения с кручением. Оценка характеристик такой моде-

ли была выполнена экспериментально на пластинах пьезокерамики толщиной 0,25 мм, которые клеивались в трехслойную структуру квадратной формы: алюминиевый сплав – ПЭ – алюминиевый сплав (модули упругости алюминиевых слоев и ПЭ составляли 70 и 63 ГПа соответственно, а пьезомодули пьезокерамики были равны: $d_{31} = 256$ К/Н и $d_{32} = 256$ К/Н). Прогибы торцов таких пластин размером 50x50 мм под действием электрического поля 550 В/мм оказались равными 141 мкм как в поперечном, так и в продольном направлении. Расчет деформаций этих пластин, базирующихся на значениях d_{31} , показал их удовлетворительную сходимость с данными эксперимента. В работе [2] дано также решение задачи колебаний связанной электромеханической системы, состоящей из упругого тела с включениями пьезоматериала, поперечно поляризуемого и располяризуемого. Уравнения движения для такой среды были получены на основе уравнений Релея-Ритца, дополненные уравнениями связи для упругой среды и пьезоэлектрика. Полученное решение для колебаний электромеханической системы – модели пьезоэлектрического актюатора было использовано для частного случая простой консольной балки с прикрепленными к ней ПЭ, расположенными в двух положениях по длине балки. Эксперимент был проведен на тонкой консольно закрепленной пластинке из алюминиевого сплава (длина 300 мм, ширина 25 мм и толщина 3,2 мм) с приклеенными на верхней и нижней поверхностях ее ПЭ толщиной 0,25 мм из пьезокерамики G 1195 (модули упругости $c_{11}^E = 63$ ГПа, $c_{33}^E = 48$ ГПа, пьезомодули $d_{31} = 276$ К/Н, $d_{33} = 468$ К/Н). Геометрия пластинки и принцип электрического возбуждения колебаний пластинки были подобны тем, которые исследовались в [1]. К сожалению, результаты измерений прогибов в [2] не приведены, отмечено лишь то, что частота первого обертона собственных колебаний пластинки составила 32,16 Гц. Другие моды колебаний пластинки в этой работе, по-видимому, не рассматривались.

Ранее результаты исследований балочных моделей актюаторов были опубликованы также в [3], [4].

Анализ этих работ показал, что диапазон упругого предельного деформирования подобных моделей не превышает 100...200 мкм при длине балочной конструкции 200...300 мм.

Проблема существенного увеличения предельного изгибающего момента (радиуса кривизны), во всяком случае, на порядок может быть решена при использовании новой схемы размещения двух или более ПЭ на противоположных поверхностях оболочечной консольной балочки. В разрабатываемой нами схеме такого актюатора изгибающий момент создается усилиями, генерируемыми двумя противоположно расположенными ПЭ со встречным направлением вектора поляризации. При подаче на электроды ПЭ знакопеременного потенциала на торце модели можно получить значительный по величине изгибающий момент. Другая схема актюатора, предложенная нами, отличается в применении в актюаторах неоднородно электродированных пьезопластин, в которых, как известно [5], можно возбудить колебания на нескольких резонансных частотах, причем коэффициент электромеханической связи пьезокерамики k_{31} при колебаниях на этих частотах приближается к значению k_{31} на основной моде колебаний. Такая схема актюатора позволяет обеспечить демпфирование колебаний элементов

конструкций на нескольких наиболее опасных частотах из общего реального спектра колебаний конструкции. Предварительный анализ параметров такой схемы актюатора показал ее перспективность, во всяком случае, для элементов конструкций летательных аппаратов. Это дает основание для дальнейших детальных исследований характеристик предлагаемой схемы актюатора.

Работа выполнялась в рамках проектов по грантам РФФИ № 04-01-96809, 04-01-96800, 05-01-00690, грантам 04-01-96806, Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *W. Beckert and G. Pfundther* Analysis of the deformational behaviour of a bimorph configuration with piezoelectric actuation //Smart Mater. Struct., v. 11, 2002. p.p. 599–609.
- [2] *Молодцов Г.А., Биткин В.Е., Симонов В.Ф. и др.* Формостабильные и интеллектуальные конструкции из композиционных материалов. М. 2002.
- [3] *Grawley E.F. and de Luis J.* Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures //AIAA J. 1987, v. 25, p.p. 1373–85.
- [4] *Wang X., Ye L., Mai Y.W. and Galea S.C.* Designing for piezoelectric ceramic wafers bonded on structures using force transfer criteria //Smart Mater. Struct., v. 9, 2000. p.p. 157–162.
- [5] *Куричок И.Ф.* Радиальные колебания и разрыв кольцевой пьезопластины при подводе электрического возбуждения к неоднородно электродированным плоскостям //Прикл. мех., 2004. Т. 40, № 3. С. 80–88.

Акопян В.А., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Шевтсов С.Н., Лесник Е.С. *Some physical-mechanical problems of piezoelectric actuators.* Principal directions and ways of development of the piezoelectric actuators, some electromechanical models, factors causing characteristics of actuators and schemes of their construction are considered.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ И ЦИЛИНДРА

Алтухов А. Е.* , Алтухова М. Л.**

* *Донецкий национальный университет*

** *Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк*

Рассматриваются трехмерные задачи термоупругости для изотропного слоя с цилиндрической полостью и цилиндра. Плоские грани слоя и цилиндра покрыты диафрагмой и поддерживаются при нулевой температуре, а цилиндрические поверхности свободны от усилий и неравномерно нагреваются. С использованием однородных решений и учетом ортогональности собственных функций получены точные решения задач. Проведены численные исследования и выявлены закономерности в термонапряженном состоянии слоя и цилиндра.

В цилиндрической системе координат r, x_3 рассмотрим осесимметричные задачи о термоупругом равновесии изотропного слоя с цилиндрической полостью ($1 \leq r < \infty, |x_3| \leq 1$) и цилиндра ($0 \leq r \leq 1, |x_3| \leq 1$) напряженное состояние в которых вызвано изменением температуры $T(r, x_3)$.

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{33}(r, \pm 1) = 0, u_r(r, \pm 1) = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}(1, x_3) = 0, \sigma_{r3}(1, x_3) = 0; \quad (2)$$

$$T(r, \pm 1) = 0, T(1, x_3) = T_0 \tau(x_3). \quad (3)$$

Здесь T_0 и $\tau(x_3) = \tau(-x_3)$ – заданные константа и функция, характеризующие нагрев цилиндрической поверхности.

Для решения рассматриваемых задач используется метод однородных решений [1, 2]. Однородное тепловое состояние в слое, соответствующее краевым условиям (1), (3) примет вид

$$U_r^1 = -(1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_1(tr)}{K_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \cos \delta_k x_3,$$

$$U_3^1 = (1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \sin \delta_k x_3,$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = -(1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{tK_0(tr) + r^{-1}K_1(tr)}{K_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \cos \delta_k x_3,$$

$$\sigma_{rr}^1 = -(1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_1(tr)}{rK_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \cos \delta_k x_3, T(r, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \cos \delta_k x_3,$$

$$\tau_k = T_0 \int_{-1}^1 \tau(x_3) \cos \delta_k x_3 dx_3, t = \delta_k / \lambda, \delta_k = \pi(2k - 1)/2, \quad (4)$$

где $\lambda = h/R$ – относительная толщина слоя.

В задаче равновесия цилиндра имеем

$$\begin{aligned} U_r^1 &= (1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(tr)}{I_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \cos \delta_k x_3, \\ U_3^1 &= (1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \sin \delta_k x_3, \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= -(1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{tI_0(tr) + r^{-1}I_1(tr)}{I_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \cos \delta_k x_3, \\ \sigma_{rr}^1 &= -(1 + \nu)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(tr)}{rI_0(t)} \tau_k \delta_k^{-1} \cos \delta_k x_3, \\ T(r, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \cos \delta_k x_3. \end{aligned} \quad (5)$$

В результате необходимо найти общее решение U_i^0, σ_i^0 однородной системы уравнений равновесия в перемещениях, которое должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{33}^0(r, \pm 1) = 0, u_r^0(r, \pm 1) = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_{rr}^0(1, x_3) = -\sigma_{rr}^1, \sigma_{r3}^0(1, x_3) = 0; \quad (7)$$

Используя метод однородных решений [1], в задаче для слоя получим

$$\begin{aligned} U_r^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left(-A_k^0 t \frac{K_1(tr)}{K_0(tr)} + D_k^0 r \right) \cos \delta_k x_3, \\ U_3^0 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left(A_k^0 t + \left(-r \frac{K_1(tr)}{K_0(tr)} + 4(1 - \nu)t^{-1} \right) D_k^0 \right) \sin \delta_k x_3 \\ \sigma_{rr}^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left(A_k^0 \left(t^2 + \frac{t K_1(tr)}{r K_0(tr)} \right) + D_k^0 \left(\nu_1^{-1} - rt \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \right) \right) \cos \delta_k x_3 \\ \sigma_{\theta\theta}^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left(-A_k^0 \frac{t K_1(tr)}{r K_0(tr)} + D_k^0 \nu_1^{-1} \right) \cos \delta_k x_3 \\ \sigma_{33}^0 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left(A_k^0 t^2 + D_k^0 \left(4 - 2\nu - rt \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \right) \right) \cos \delta_k x_3 \\ \sigma_{r3}^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \left(A_k^0 t^2 \frac{K_1(tr)}{K_0(tr)} + D_k^0 \left(-tr + 2(1 - \nu) \frac{K_0(tr)}{K_0(t)} \right) \right) \sin \delta_k x_3. \end{aligned} \quad (8)$$

В задаче о равновесии цилиндра имеем

$$\begin{aligned}
U_r^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left(A_k^1 t \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} + D_k^1 r \right) \cos \delta_k x_3, \\
U_3^0 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left(A_k^1 t + \left(r \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} + 4(1-\nu)t^{-1} \right) D_k^1 \right) \sin \delta_k x_3 \\
\sigma_{rr}^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left(A_k^1 \left(t^2 - \frac{t}{r} \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} \right) + D_k^1 \left(\nu_1^{-1} + r t \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} \right) \right) \cos \delta_k x_3, \\
\sigma_{\theta\theta}^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left(A_k^1 \frac{t}{r} \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} + D_k^1 \nu_1^{-1} \right) \cos \delta_k x_3, \\
\sigma_{33}^0 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left(A_k^1 t^2 + D_k^1 \left(4 - 2\nu + r t \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} \right) \right) \cos \delta_k x_3, \\
\sigma_{r3}^0 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(tr)}{I_0(t)} \left(A_k^1 t^2 \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} + D_k^1 \left(t r + 2(1-\nu) \frac{I_1(tr)}{I_0(tr)} \right) \right) \sin \delta_k x_3. \tag{9}
\end{aligned}$$

Коэффициенты A_k^i , D_k^i ($i = 0, 1$) в выражениях (8), (9) определяются из граничных условий (6), (7). С учетом ортогональности однородных решений имеем

$$A_k^i = \frac{R_{22}^i F_k^i}{R_{11}^i R_{22}^i - R_{21}^i R_{12}^i}, D_k^i = - \frac{R_{21}^i F_k^i}{R_{11}^i R_{22}^i - R_{21}^i R_{12}^i}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R_{11}^0 &= t \left(t + \frac{K_1(t)}{K_0(t)} \right), R_{12}^0 = 1 - 2\nu - t \frac{K_1(t)}{K_0(t)}, R_{21}^0 = t^2 \frac{K_1(t)}{K_0(t)}, \\
R_{22}^0 &= -t + 2(1-\nu) \frac{K_1(t)}{K_0(t)}, F_k^0 = -(1+\nu)t^{-1} \tau_k \frac{K_1(t)}{K_0(t)}, \\
R_{11}^1 &= t \left(t - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} \right), R_{12}^1 = 1 - 2\nu + t \frac{I_1(t)}{I_0(t)}, R_{21}^1 = t^2 \frac{I_1(t)}{I_0(t)}, \\
R_{22}^1 &= t + 2(1-\nu) \frac{I_1(t)}{I_0(t)}, F_k^1 = (1+\nu)t^{-1} \tau_k \frac{I_1(t)}{I_0(t)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, напряжения и перемещения в слое и цилиндре находятся из выражений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1, U_i = U_i^0 + U_i^1.$$

Некоторые результаты численных исследований представлены на рис. 1–8 для различных λ при $\nu = \frac{1}{3}$. Распределение напряжений в слое, цилиндрическая полость которого нагревается по закону $\cos(\pi x_3/2)$, показаны на рис.1–6. На рис.1, 2 приведены графики распределения напряжений σ_{33} , $\sigma_{\theta\theta}$ на боковой поверхности полости слоя. Характер изменения напряжений σ_{rr} , σ_{33} , $\sigma_{\theta\theta}$ в срединной плоскости слоя ($x_3 = 0$) показан на рис.3–5. На рис.6 приведены графики напряжения σ_{r3} на плоской грани слоя.

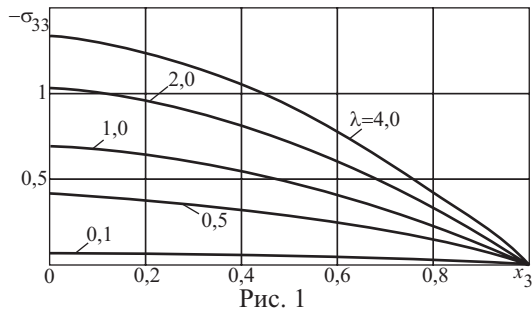


Рис. 1

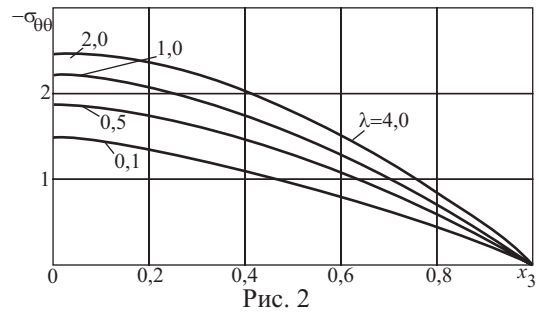


Рис. 2

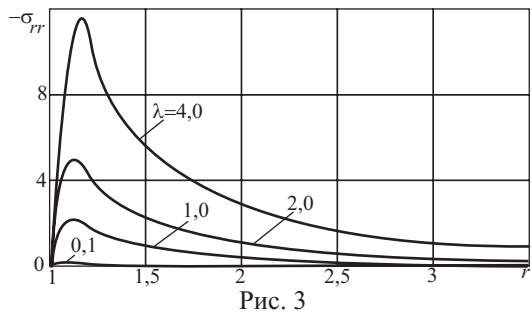


Рис. 3

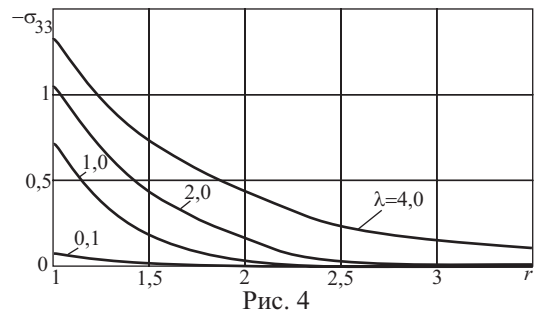


Рис. 4

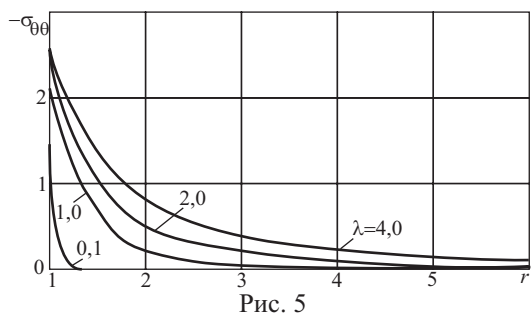


Рис. 5

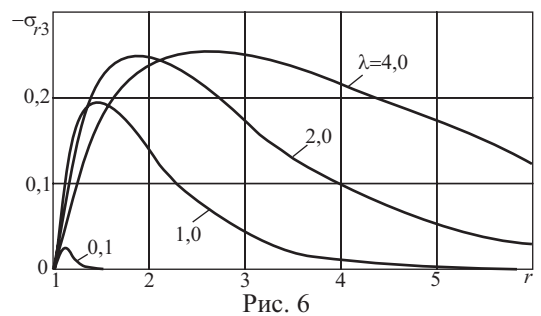


Рис. 6

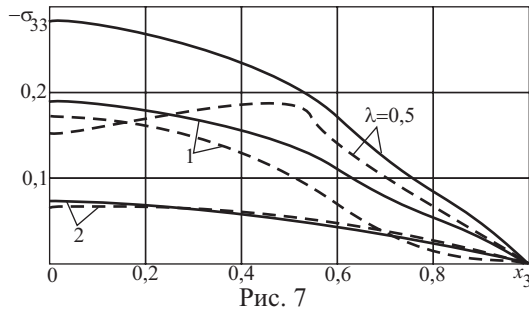


Рис. 7

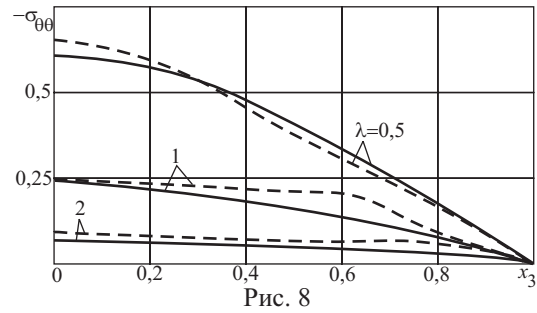


Рис. 8

На рис. 7, 8 приведены графики распределения напряжений $\sigma_{33}, \sigma_{\theta\theta}$ на боковой поверхности цилиндра для различных λ . Температура на боковой поверхности цилиндра изменялась по закону $\cos(\pi x_3/2)$. Сплошные линии соответствуют граничным условиям на торцах цилиндра (1), а штриховые линии — случаю свободных от усилий торцов [3].

Анализ результатов численных исследований показывает, что при неравномерном нагреве напряженное состояние в слое и цилиндре носит пространственный характер и зависит от изменения относительной толщины λ , вида граничных условий на торцах. Поэтому при использовании приближенных теорий невозможно получить реальную картину распределения напряжений при любой относительной толщине λ .

Метод однородных решений позволил естественным образом получить точные решения рассмотренных задач, которые могут быть полезны для оценки погрешности численных методов и приближенных теорий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алтухов Е.В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах // Теорет. и прикладная механика. 1993. Вып 24. С. 3–8.
- [2] Алтухов Е.В. Трехмерные смешанные задачи термоупругости для изотропных пластин // Теорет. и прикладная механика. 1995. Вып 25. С. 3–15.
- [3] Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. Киев: Наукова думка, 1978. 240 с.

Altukhov E.V., Altukhova M.L. *Exact solution space problems of thermoelasticity for isotropic layer with cavity and cylinder.* Three-dimensional problems are consider for isotropic layer with cavity and cylinder. Flat bounds layer and cylinder are coated diaphragm and are maintained at zero temperature and cylindrical surfaces stronger-free and irregularly heat. With using homogeneous solutions and take into account orthogonal property for fundamental functions are found exact solutions problems. Numerical calculations are prepared and are showed regularities in thermostressed state layer and cylinder.

ВЫРОЖДЕННЫЕ БИФУРКАЦИИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С ПРИМЕСЬЮ В ТОНКОМ СЛОЕ

Батищев В. А., Хорошунова Е. В.

Ростовский госуниверситет

Исследованы вырожденные бифуркации, возникающие при термокапиллярном течении жидкости с примесью в тонком горизонтальном слое. Найдены значения параметров, при которых имеются пары близких точек бифуркации, причем с изменением параметров эти точки сливаются, образуя либо точку двусторонней бифуркации, либо точку, в которой ветвление отсутствует. В случае возникновения точки двусторонней бифуркации при дальнейшем изменении параметров эта бифуркация исчезает, причем ветви вторичных режимов отделяются и удаляются от ветви основного режима.

Автомодельные решения, описывающие термокапиллярные течения жидкости при неравномерном распределении температуры вдоль свободной границы изучались во многих работах [1–3]. Анализ ветвления осесимметричных режимов течений жидкости при наличии эффекта Марангони показал, что в общем случае в результате бифуркаций точных решений уравнений движения возникает пара новых вторичных режимов с вращением вокруг оси симметрии. Возникновение «самовращения жидкости» для различных классов течений изучалось аналитически и экспериментально. Это полностью не изученная проблема, связана с появлением смерчей, торнадо и др. Ниже рассмотрены два случая вырожденных бифуркаций, которые возникают при слиянии пары точек ветвления. В первом случае возникает двусторонняя бифуркация, а во втором случае бифуркация исчезает.

Рассмотрим нестационарное термо- и концентрационно-капиллярное осесимметричное течение жидкости в горизонтальном слое, ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху свободной границей при исчезающих коэффициентах вязкости, теплопроводности и диффузии примеси. Толщина слоя предполагается малой порядка $O(\sqrt{\nu})$, так что возникающие пограничные слои заполняют всю область, занятую жидкостью (здесь ν — кинематический коэффициент вязкости). Предполагаем, что поля скорости $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$, давления p , температуры T и концентрации примеси C в цилиндрических координатах (r, θ, z) не зависят от окружной координаты θ . Течение жидкости в тонком слое описываем уравнениями нестационарного пограничного слоя Прандтля с условиями прилипания на твердой стенке, а также динамическими и кинематическими условиями на свободной поверхности. Предполагаем, что на твердой горизонтальной стенке $z = 0$ задан поток тепла q_S и концентрация примеси C_S , а на свободной границе $z = \zeta(r, t)$ потоки тепла и примеси отсутствуют. Коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейной функцией температуры и концентрации примеси.

Рассмотрим случай, когда поток тепла q_S и концентрация примеси C_S на твердой границе зависят только от радиальной координаты и времени по степенному закону

$$q_S = Q_S r^2 (t + t_0)^{-2}, \quad C_S = B_0 + 0,5 B_S r^2 (t + t_0)^{-3/2},$$

где Q_S, B_S, B_0, t_0 постоянные ($t_0 > 0$).

Построим точное решение уравнений Прандтля, для которого начальное поле скорости определяется видом самого решения. Компоненты вектора скорости и функции T, C, p, ζ представим в виде степенных функций от координат r и t

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{r\varphi'(\xi)}{t+t_0}, & v_\theta &= \frac{rG(\xi)}{t+t_0}, & v_z &= -\frac{2\varphi(\xi)\sqrt{\nu}}{\sqrt{t+t_0}}, \\ T &= A_0 + \frac{\rho\sqrt{\nu}r^2T_1(\xi)}{2|\sigma_T|(t+t_0)^{3/2}}, & C &= B_0 + \frac{\rho\sqrt{\nu}r^2S(\xi)}{2\sigma_C(t+t_0)^{3/2}}, \\ p &= c + p - \frac{q\rho r^2}{2(t+t_0)^2}, & \zeta &= h\sqrt{\nu(t+t_0)}, & \xi &= \frac{z}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь h — безразмерный параметр, пропорциональный толщине слоя; c_p — постоянная. Функции (1) описывают осесимметричное термокапиллярное течение жидкости с примесью только вблизи оси симметрии Oz и не распространяются на случай больших значений радиальной координаты r .

Введем преобразование растяжения $\varphi(\xi) = hF(\eta)$, $\xi = \eta h$. Подставляя соотношения (1) в уравнения Прандтля и исключая давление, для функций F, G, T_1, S выводим краевую задачу

$$\begin{aligned} F^{(4)} &= -h^2(2FF^{(3)}) + 1,5F_1'' + 0,5\eta F^{(3)} + 2GG', \\ G'' &= h^2(2F'G - 2FG' - G - 0,5\eta G'), \\ T_1'' &= h^2 \text{Pr}(2F'T_1 - 2FT_1' - 1,5T_1 - 0,5\eta T_1'), \\ S'' &= h^2 \text{Pd}(2F'S - 2FS' - 1,5S - 0,5\eta S'), \\ F &= 0, \quad F' = 0, \quad G = 0, \quad T_1' = \alpha h, \quad S = \gamma, \quad (\eta = 0), \\ F &= -1/4, \quad F'' + hT_1 - hS = 0, \quad G' = T_1' = S' = 0, \quad (\eta = 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Pr, Pd — числа Прандтля и Шмидта соответственно. α, γ — безразмерные параметры, пропорциональные продольным градиентам температуры и концентрации примеси вдоль твердой стенки.

Обозначим через $F_0, T_0, C_0, G_0 = 0$ «основные» решения системы (2), которые описывают течения жидкости без вращения, т.е. с нулевой окружной компонентой скорости ($v_\theta = 0$). Для конечных значений параметров h, α, γ эти решения получены численно методом пристрелки при $\text{Pr} = 0,023; \text{Pr} = 0,05; \text{Pd} \in [10, 100]$, что соответствует полупроводниковым материалам.

Покажем, что при определенных значениях параметров $h, \alpha, \gamma, \text{Pr}, \text{Pd}$ от основного решения F_0, T_0, C_0 ответвляются несколько различных вторичных режимов с ненулевой окружной компонентой скорости $v_\theta \neq 0$ ($G \neq 0$). Для этого рассмотрим краевую задачу на собственные значения, которая получается путем линеаризации задачи (2) вблизи основного режима. Собственные функции этой задачи найдены в виде $G = g(\eta)$, $f_1 = T = S = 0$, причем $g'(0) = 1$. Функция $g(\eta)$ определяется из краевой задачи

$$\begin{aligned} g'' &= h^2(2F_0'g - 2F_0g' - g - 0,5\eta g'), \\ g(0) &= 0, \quad g'(1) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Приведем результаты численных расчетов полученной задачи. Обозначим через h_0 собственное значение параметра h . Очевидно, h_0 — это функция параметров α , γ , Pr , Pd . На рис. 1 изображена зависимость $h_0(\alpha)$, при $\text{Pr} = 0,023$; $\text{Pd} = 10$ и различных значениях γ . На кривых 1 параметр γ равен $\gamma = -1$, на кривых 2 — $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$ на кривых 3 и 4. Отметим две точки A и B на кривых 1, которым соответствуют значения $\alpha_1 = -0,030049$; $h_0(\alpha_1) = 1,1439$ и $\alpha_2 = 0,1443$; $h_0(\alpha_2) = 1,0555$. При $\alpha < \alpha_1$ и $\gamma = -1$ для каждого значения α найдено по два собственных значения $h_0(\alpha)$, которым соответствуют две точки на кривой 1 близкие к точке A . При $\alpha \rightarrow \alpha_1 - 0$ эти близкие точки приближаются к A и при $\alpha = \alpha_1$ сливаются с ней (аналогично и при $\alpha \rightarrow \alpha_2 + 0$). Отметим, что все собственные значения соответствующие точкам ветвей 1–4 простые, за исключением точек A и B , в которых эти значения двукратные. Далее будет показано, что в точке A возникает двустороннее ветвление, а в точке B ветвление отсутствует.

В книге [4] описан метод получения уравнения разветвления, которое приводится к виду $b(\beta, h) = 0$. Параметр β определяется ниже. Функция $b(\beta, h)$ разлагается в конечный ряд Тейлора в окрестности точки $\beta = 0$, $h = h_0$, для коэффициентов которого выводятся краевые и начальные задачи. Используя диаграмму Ньютона, уравнение разветвления приводим к виду

$$(h - h_0)b_h + 0,5\beta^2 b_{\beta\beta} + \dots = 0, \quad \beta \rightarrow 0, \quad h \rightarrow h_0.$$

Коэффициенты b_h , $b_{\beta\beta}$ определяются как частные производные функции $b(\beta, h)$ по параметрам h , β в точке $\beta = 0$, $h = h_0$ и найдены численно. Относительно параметра β последнее уравнение имеет два различных корня, отличающиеся только знаком, что означает возникновение двух вторичных режимов в точках бифуркации. Из формул (3) следует, что эти режимы отличаются от «основных» наличием окружной компоненты скорости.

Рассмотрим случай, когда коэффициент b_h обращается в ноль $b_h = 0$. Это выполняется в точках A и B , принадлежащих ветвям 1 на рис. 1. Отметим, что в этих точках $\partial h_0 / \partial \alpha = \infty$. Можно показать, что $b_{\beta h} = 0$. Уравнение разветвления приводится к виду

$$(h - h_0)^2 b_{hh} + \beta^2 b_{\beta\beta} + \dots = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты b_{hh} , $b_{\beta\beta}$ найдены численно.

При решении уравнения (4) возможны два случая, когда оба коэффициента b_{hh} , $b_{\beta\beta}$ имеют одинаковые или противоположные знаки. В первом случае $b_{hh}b_{\beta\beta} > 0$, уравнение разветвления (4) корней не имеет и при $h = h_0$, $\alpha = \alpha_0$ ветвление отсутствует. Это выполняется для точки B на рис. 1.

Рассмотрим второй случай $b_{hh}b_{\beta\beta} < 0$. Уравнение разветвления (4) имеет два решения при $h > h_0$ и два решения при $h < h_0$. Это означает, что в точке $h = h_0$, $\alpha = \alpha_0$ возникает двусторонняя бифуркация. На рис. 1 точка A — точка двусторонней бифуркации. На рис. 2 на плоскости параметров $(F'(1), h)$ изображена амплитуда радиальной компоненты скорости на свободной границе $F'(1)$ в зависимости от безразмерной толщины слоя h в окрестности точки двусторонней бифуркации A при $\gamma = -0,1$. Для точки двусторонней бифуркации A приведем значения параметров $\alpha_A = 0,04567$; $h_A = 1,1136$; $b_{hh} = -308,45$; $b_{\beta\beta} = 0,02728$. Цифрой 1 изображена ветвь основного режима, а цифрой 2 — ветви вторичных режимов. При значениях

параметра α близких к α_A и при $\alpha < \alpha_A$ имеются две близкие точки бифуркации A_1 и A_2 , что изображено на рис. 3 при $\alpha = 0,01$ и $\gamma = -0,1$. Здесь цифрами 1 и 2 изображены ветви основного и вторичных режимов соответственно. При $\alpha \rightarrow \alpha_A$ и $h \rightarrow h_A$ точки A_1 и A_2 стремятся друг к другу и при $\alpha = \alpha_A$, $h = h_A$ сливаются с точкой A на рис. 2, образуя точку двусторонней бифуркации. При дальнейшем увеличении параметра α при $\alpha > \alpha_A$ точка двусторонней бифуркации исчезает, ветви вторичных режимов отделяются от ветви основного режима и в окрестности точки A (точки двусторонней бифуркации) при $\alpha > \alpha_A$ ветви вторичных режимов не имеют общих точек с ветвью основного режима.

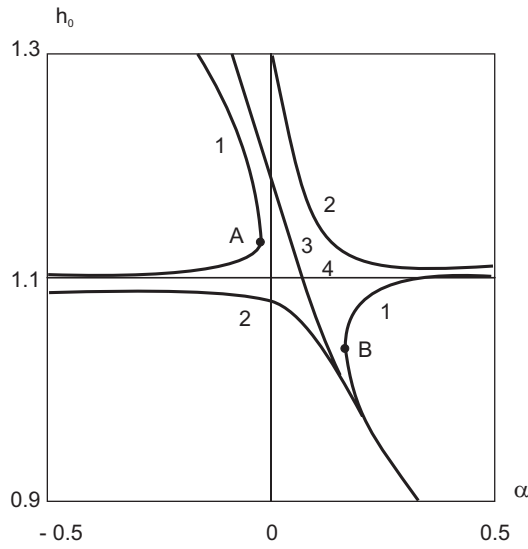


Рис. 1

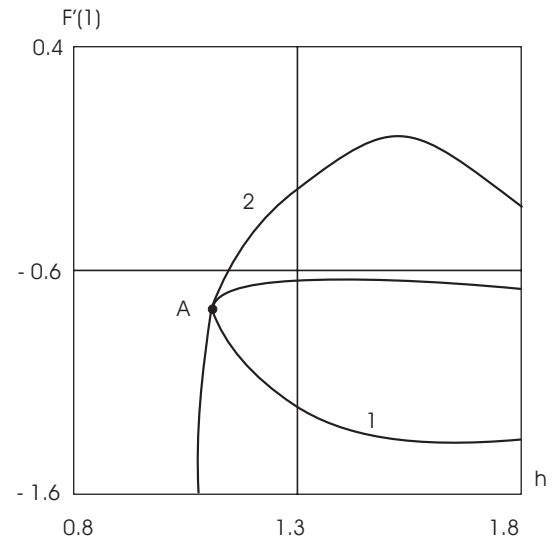


Рис. 2

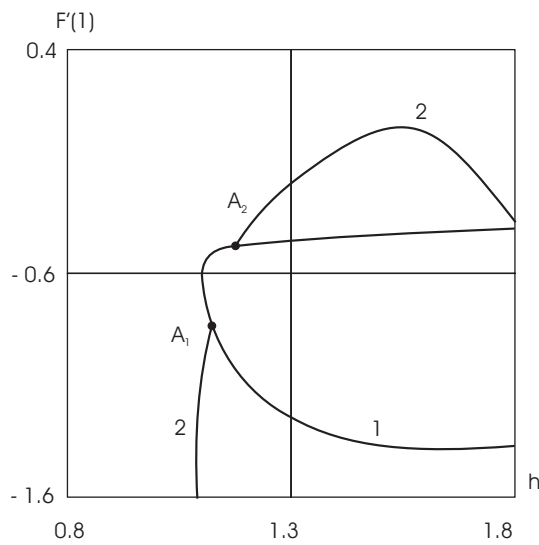


Рис. 3

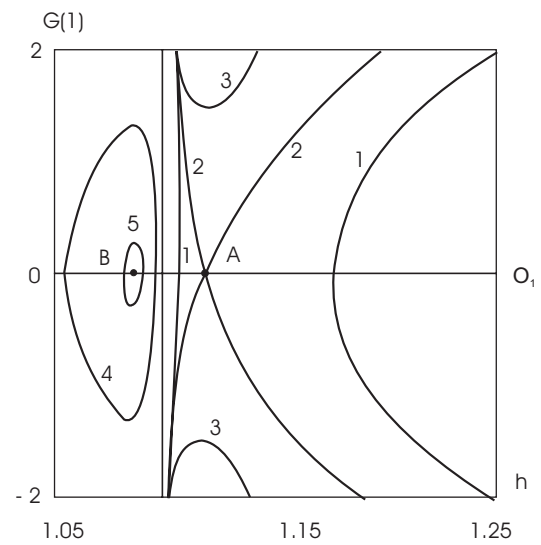


Рис. 4

На рис. 4 изображены значения окружной компоненты скорости на свободной границе $G(1)$ в зависимости от параметра h при $\gamma = -0,1$. Цифрой 1 обозначены вторичные режимы при $\alpha = 0,01$ с точками ветвления, принадлежащими

пересечениям кривых 1 и осью OO_1 . Цифрой 2 отмечены вторичные режимы, ответвляющиеся от точки двусторонней бифуркации A при $\alpha = \alpha_A = 0,04567$. Цифрой 3 обозначены вторичные режимы при $\alpha = 0,07$, не имеющие точек бифуркаций в окрестности точки A при $\alpha > \alpha_A$. Отметим, что при $\alpha_A < \alpha < \alpha_B$, где $\alpha_B = 0,09842$ точки бифуркации отсутствуют. При каждом значении α , удовлетворяющим условию $\alpha > \alpha_B$ имеются две близкие точки бифуркации в окрестности точки B , принадлежащие одному вторичному режиму. Эти вторичные режимы изображены на рис. 4 замкнутыми кривыми 4 и 5 при $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,12$ соответственно. При $\alpha \rightarrow \alpha_B + 0$ эти замкнутые кривые стягиваются в точку B , в которой бифуркация отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. М.: Наука, 1989. 336 с.
- [2] Пухначев В. В. Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1061–1064.
- [3] Batischev V. A. Bifurcations of Steady Thermo-Capillary Flows of a Binary Mixture // 21-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. ICTAM04. CD-ROM Proceedings. 2004. ISBN 83-89697-01-1.
- [4] Келлер Дж., Антман С. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974. 254 с.

Batischev V. A., Khoroshunova E. V. *Degeneration of bifurcations for thermo-capillary flow with admixture in the thin layer.* We study degenerate bifurcations of thermo-capillary flows of the binary mixture in a thin horizontal layer. We study in detail two cases of junction of a pair of close bifurcations points. In the first case, with variance of parameters there appears a point of two-sided bifurcation. With further change of parameters the point of two-side bifurcations disappears with the branches of secondary regimes separating from the «basic» regimes. In the second case, under the junctions of the bifurcation points there appears a point of the bifurcation diagram with no branching.

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПАКЕТА ACELAN ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ С НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

**Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н.,
Скалиух А.С.**

Ростовский госуниверситет, Ростов-на-Дону

Описаны новые функциональные возможности конечно-элементного программного комплекса ACELAN, касающиеся моделирования необратимого процесса поляризации и расчетов некоторых характеристик преобразователей с неоднородно поляризованными пьезокерамическими рабочими элементами. Приведены примеры таких расчетов для осесимметричных областей.

Введение. Несколько лет сотрудники кафедры математического моделирования Ростовского госуниверситета ведут работы по созданию, модернизации и расширению возможностей конечно-элементного пакета ACELAN, предназначенного для расчета физических характеристик систем, состоящих из пьезоэлектрических (в частности, пьезокерамических), упругих и акустических элементов (аббревиатура ACELAN означает акустоэлектрический анализ). Пакет постоянно совершенствуется и дополняется новыми возможностями. В настоящее время с его помощью можно проводить исследования статических и динамических систем: решать комплексные задачи для составных тел, возбуждаемых механическими и электрическими нагрузками, рассматривать процессы взаимодействия упругих и акустических сред. В пакет ACELAN вложены следующие основные разделы исследования:

- анализ статических задач (определение напряженно-деформированного состояния составных элементов конструкций из упругих и пьезоэлектрических тел);
- модальный анализ (нахождение собственных частот и собственных форм колебаний упругих, пьезоэлектрических и составленных из них тел);
- гармонический анализ (исследование физических полей для широкого диапазона частот, в том числе и некоторых амплитудно-частотных характеристик);
- динамический анализ (оценка динамики процесса в широком интервале времен).

Объемы тел можно формировать с помощью соответствующих сечений. Для этого имеется две возможности: непосредственным построением в графическом редакторе или с помощью команд консоли пакета. Оба подхода заложены в препроцессор пакета. На форму электродов не накладывается особых ограничений, за исключением условий сохранения класса задачи (например, плоская или осесимметричная). Соответствующие задачи для анализа разнообразны и решаются в рамках существующих моделей: плоские, осесимметричные и пространственные для тел обобщенной цилиндрической геометрии. Основные теоретические положения электроупругости, используемые в пакете, описаны в [1-2], методика решения

систем алгебраических уравнений – в [3-4], моделирование неоднородной поляризации – в [5-6]. Работа по усовершенствованию пакета идет в нескольких направлениях, среди которых выделяются два основных: внедрение модели необратимого технологического процесса поляризации (переполаризации) пьезокерамических областей с последующим расчетом характеристик систем, имеющих такие неоднородно поляризованные элементы; активное внедрение средств описания и расчета трехмерных областей. В настоящей статье отражены результаты работы авторского коллектива по первому направлению.

Неоднородная поляризация элементов. Поляризация пьезокерамических элементов является основной неотъемлемой частью технологического процесса изготовления преобразователей. В ACELAN моделирование поляризации выделяется в отдельную операцию над образом керамического изделия. Для решения этой задачи необходимо выполнить следующую последовательность действий:

- а) задать геометрию области;
- б) выбрать материал керамики и задать его константы в неполяризованном состоянии (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, диэлектрическую проницаемость), и константы однородно поляризованного состояния (пять упругих модулей, три пьезоэлектрических константы, две диэлектрические проницаемости; для некоторых типов керамики их можно взять из справочников);
- в) задать режим изменения электрического потенциала на электродах (что позволит рассчитывать итоговое поляризованное состояние всего пьезокерамического элемента в несколько этапов, подобно реальному процессу поляризации отдельных частей керамического образца, например, при поляризации поперечно продольных трансформаторов);
- г) описать петлю диэлектрического гистерезиса, т.е. ввести несколько точек - значений электрического поля и соответствующих ему значений поляризации или, что почти то же самое, электрической индукции, $\{E_k, D_k\}_{k=1}^n$ для части петли диэлектрического гистерезиса, полученной экспериментально в однородном электрическом поле при поляризации тонкой пластинки (выбор точек произволен, а их число – порядка двадцати, т.е. $n \approx 20$). Для выполнения данных условий в пакете предусмотрен ввод информации из файла.

Введя всю информацию согласно вышеперечисленным пунктам, можно однозначно найти поле остаточной поляризации при довольно оригинальной геометрии тела и форме электродов.

Примеры расчетов полей остаточной поляризации. Во всех приведенных примерах выбирался материал керамика ЦТС-19. Значения потенциалов на электродах задавались такими, чтобы внутри области электрическое поле превышало коэрцитивное значение, а размеры представленных образцов могут варьироваться от сотых долей до сотен миллиметров (они не конкретизируются, поскольку здесь ставилась цель демонстрации возможностей программного комплекса).

Пример 1. Рассматривается один тип датчиков, применяемых в технике неразрушающего контроля (см. Рис. 1,2). Поляризация таких датчиков осуществляется неоднородным электрическим полем в результате приложения разности потенциалов к электродам, которые закрашены черным цветом. Для таких датчиков важно, чтобы в верхней части конуса поляризация отсутствовала, так как это обеспечи-

вайт затухание принимаемых сигналов. Проведя расчет остаточной поляризации, убеждаемся, что для данной формы электродов указанное требование на характер неоднородности внутреннего поля остаточной поляризации удовлетворяется. Само поле остаточной поляризации в меридиональном сечении датчиков можно видеть на рис. 3,4.



Рис. 1.



Рис. 2.

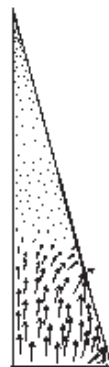


Рис. 3.



Рис. 4.

Пример 2. На рис. 5 представлено поле остаточной поляризации, полученное после переполаризации первоначально однородно поляризованного по толщине тонкого круглого диска (на рисунке показано меридиональное сечение с осью симметрии, совпадающей с левым ребром). Переполаризация осуществлялась в электрическом поле, формируемом разностью потенциалов на центральных круглых электродах, имеющих диаметр, меньший чем у диска.

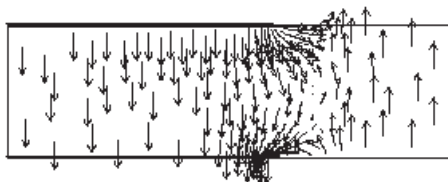


Рис. 5.

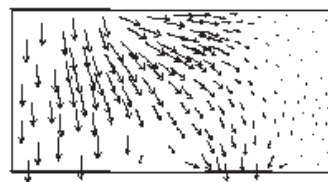


Рис. 6.

Пример 3. На рис. 6 можно видеть поле остаточной поляризации диска, имеющего один верхний круглый электрод и два нижних, круглый и кольцеобразный. При поляризации нижние электроды закорачивались, а между верхним и нижними прикладывалась разность потенциалов.

Пример 4. На рис. 7 представлены результаты расчета поля остаточной поляризации тонкого диска с двумя центральными круглыми и двумя кольцевыми электродами. Между центральными электродами задана разность потенциалов одного знака, достаточная для проведения поляризационного процесса внутри области. На верхнем кольцевом электроде задан нулевой потенциал, а на нижнем значении потенциала совпадает со значением потенциала нижнего центрального электрода.

Пример 5. В этом примере демонстрируется возможность проводить с помощью пакета численные эксперименты для различных типов подключений электродов в

электрическую цепь, в том числе и с пассивными электродами, которые моделируются граничными условиями контактного типа, т.е. на электродах задается значение электрического заряда. Так на рис. 8 рассмотрена задача, совпадающая с предыдущей, с той лишь разницей, что на верхнем кольцевом электроде задан нулевой заряд. Остальные значения электрического потенциала на электродах сохраняются такими же, как в примере 4. Представленные примеры показывают, как

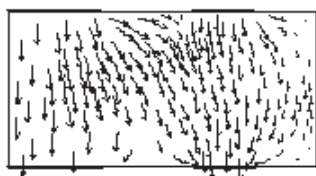


Рис. 7.

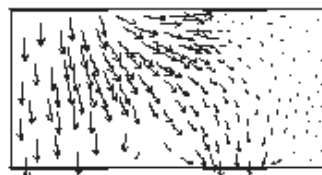


Рис. 8.

может отличаться поле остаточной поляризации при изменении типов граничных условий.

Однако расчет поля остаточной поляризации не является самоцелью, а выступает первой вспомогательной операцией по определению констант локально анизотропного тела, каким является неоднородно поляризованная керамика. В пакете имеется возможность проведения гармонического анализа неоднородно поляризованных элементов. Так на рис. 9, 10 показаны две формы собственных колебаний неоднородно поляризованного преобразователя, рассмотренного в примере 1 (см. рис. 2, 4). Для сравнения рядом на рис. 11, 12 приведены также две формы собственных колебаний геометрически совпадающего преобразователя, но имеющего однородную поляризацию вдоль оси симметрии. Данные рисунки позволяют не

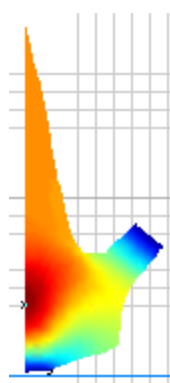


Рис. 9.

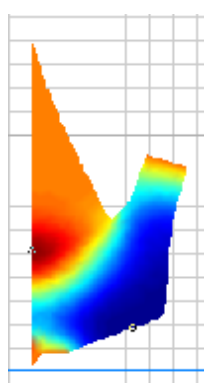


Рис. 10.

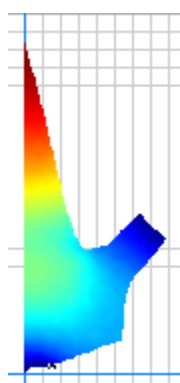


Рис. 11.

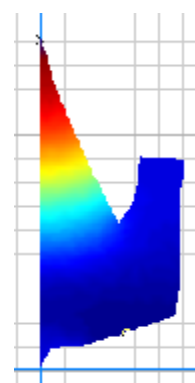


Рис. 12.

только качественно оценить изменение мод колебаний, но и количественно оценить изменяющиеся частоты. Так в представленном случае собственные частоты изменяются на 4% и 9% соответственно.

Необходимо отметить, что ACELAN, по-видимому, является первой конечно-элементной программой, где возможно моделирование неоднородной остаточной поляризации и численный расчет физических характеристик преобразователей,

имеющих неоднородно поляризованные керамические элементы. В известных авторам пакетах таких возможностей нет. Существует несколько подходов к решению задач с неоднородной поляризацией. Один из них заключается в том, что неоднородно поляризованные тела разбивают на несколько частей, на каждой из которых поляризация считается однородной. Другой подход является, в некотором смысле, обобщением первого и заключается в том, что после разбиения на конечные элементы, задается направление остаточной поляризации непосредственно на элементах. Зная тип керамики и направление поляризации на каждом конечном элементе, можно пересчитать модули данного материала в глобальных осях. Но в любом случае возникают дополнительные трудности, связанные с интенсивностью вектора остаточной поляризации. Это можно учитывать некоторым интуитивным способом, но точных подходов здесь нет. Предлагаемая модель позволяет с успехом обходить эти трудности.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 05-01-00752, 03-07-90411, 05-01-00734, 05-01-00690) и программы "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Акопов О.Н., Белоконь А.В., Еремеев В.А., Надолин К.А., Наседкин А.В., Скалиух А.С., Соловьев А.Н. Об опыте разработки конечно-элементного пакета ACELAN для расчета пьезоэлектрических устройств // Тр. Межд. научн.-практич. конф. "Фунд. пробл. пьезоэлектрич. приборостроения" ("Пьезотехника-99"), Ростов-на-Дону, Азов, 14-18 сент. 1999. Ростов н/Д, 1999. Т. 2. С. 241–251.
- [2] Наседкин А.В., Скалиух А.С., Соловьев А.Н. Пакет ACELAN и конечно-элементное моделирование гидроакустических пьезопреобразователей // Изв. ВУЗов, Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2001. Спецвып. Мат. моделирование. С. 122–125.
- [3] Белоконь А.В., Еремеев В.А., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64, № 3, С. 381–393.
- [4] Акопов О.Н., Белоконь А.В., Надолин К.А., Наседкин А.В., Скалиух А.С., Соловьев А.Н. Симметричные седловые алгоритмы конечно-элементного анализа составных пьезоэлектрических устройств // Мат. моделирование. 2001. Т. 13, № 2. С. 51–60.
- [5] Скалиух А.С. К теории поляризации сегнетоэлектрических керамик // Вісник Донецького університету. 2002. Сер. А: Природничі науки. Вип. 1. С. 310–319.
- [6] Скалиух А.С. Об одном алгоритме процесса поляризации сегнетоэлектрических керамик // Теор. и прикл. мех. 2003. Вып. 38. С. 20–28.

Belokon A.V., Nasedkin A.V., Soloviev A.N., Skaliukh A.S. *The new resources of ACELAN package for analysis of piezoelectric devices with nonhomogeneous polarization.* The new functionalities of finite element package ACELAN are described, that concerns modelling of irreversible process of polarization and accounts of some characteristics of transducers with non-uniform polarized piezoelectrics elements. The examples of axisymmetric problems are given.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НАКЛОННО-СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Беркович В. Н.

*Московский госуниверситет технологий и управления, филиал в
г. Ростове-на-Дону, vberkovich@mail.ru*

В настоящей работе предлагается метод исследования неоднородной полубесконечной среды, состоящей из усеченно-клиновидных компонент и находящейся в условиях случайных колебаний антиплоского сдвига генерируемых в полосе S . Задача сведена к граничным интегральным уравнениям относительно неизвестного поля контактных напряжений в S . Изучены вопросы разрешимости полученных уравнений и предложен способ построения приближенного решения.

Будем рассматривать неоднородную полубесконечную среду Ω , состоящую из усеченно-клиновидных компонент $\Omega_n (n = 1, 2, \dots, N)$ с различными геометрическими и упругими характеристиками $\Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$ и находящуюся в условиях нестационарных колебаний антиплоского сдвига. Торцевые границы $\partial\Omega_n$ формируют свободную ломаную поверхность среды (см. рис.1). Источники случайных колебаний задаются в полосе $S = [a, b] \times R^1$ на полубесконечной грани $\partial\Omega_n$, параллельно её ребру. Ставится задача отыскания неизвестного случайного поля контактных напряжений в S для восстановления случайного поля смещений в области Ω .

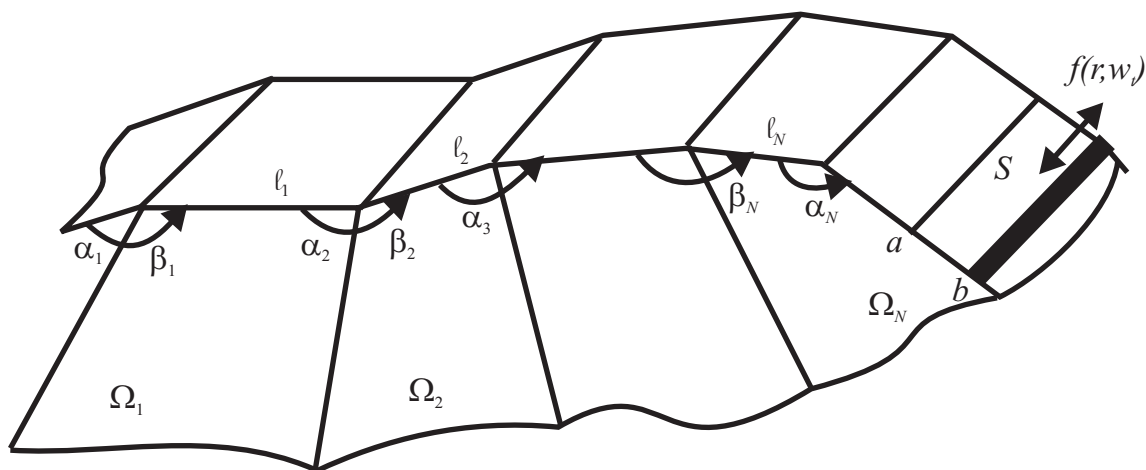


Рис. 1.

Смешанные задачи динамики горизонтально-слоистых и анизотропных сред изучались в работах [1-2] и др. Работы, в которых бы рассматривались аналогичные задачи для наклонно-слоистых сред, рассмотренных в настоящем исследовании, автору неизвестны.

Сформулированная проблема сводится к начально-краевой задаче для волнового уравнения со смешанными граничными условиями на внешней поверхности, частично носящими случайный характер, однородными начальными условиями и условиями сопряжения на границах раздела сред:

$$\nu^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \nu(x, y) = \sum_{n=1}^N \nu_n \chi(\Omega_n) \quad (1)$$

$$u \Big|_{t \leq 0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t \leq 0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega \setminus S} = 0 \quad (2)$$

$$u|_{\partial \Omega \cap S} = f(r, w_t), \quad r \in (a, b)$$

$$[u]|_{\partial \Omega_n \cap \partial \Omega_{n-1}} = \left[\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial \Omega_n \cap \partial \Omega_{n-1}} = 0$$

$$u \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$$

$$\{d(x, y), \mu(x, y)\} = \sum_{n=1}^N \{d_n, \mu_n\} \chi(\Omega_n), \quad \Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$$

$$\nu_n = \sqrt{\mu_n d_n^{-1}} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

В соотношениях (1)-(2) $\chi(\varphi; Q)$ – характеристическая функция усеченно-клиновидной Ω_n компоненты, μ_n, d_n её модуль сдвига и плотность материала соответственно, w_t – винеровский случайный процесс, стартующий в нуле с мгновенным отражением на границе (a, b) интервала, $f(r, w)$ аналитическая функция w , моделирующая источники нестационарных смещений, распределенных в полосе S , третье условие в (2) есть условие сопряжения на границах раздела сред.

На основе применения преобразования Лапласа по времени t , построения функции Грина для каждой усеченно-клиновидной компоненты среды с однородными граничными условиями и удовлетворении условиям сопряжения поставленная выше задача сводится к исследованию следующих интегральных уравнений относительно трансформант Лапласа составляющих $q^{(j)}(\rho)$ случайного поля контактных напряжений $q(\rho) = q^{(1)}(\rho) + q^{(2)}(\rho)$ в полосе S :

$$\mathbf{K}_j q^{(j)} = \int_a^b k_j(r, \rho) q^{(j)}(\rho) d\rho = f(r), \quad a < r < b \quad (3)$$

$$k_j(r, \rho) = m_j(r, \rho) + h_j(r, \rho), \quad j = 1, 2$$

$$m_j(r, \rho) = \frac{1}{\pi^2} \int_{R^1} K_{-i\tau}(kr) K_{-i\tau}(k\rho) M^{(j)}(\tau) \tau \operatorname{sh} \pi \tau d\tau, \quad k = p\nu^{-1}$$

$$h_j(r, \rho) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{R^2} K_{-i\tau}(kr) K_{-i\tau'}(k\rho) H_N^{(j)}(\tau, \tau') \tau \tau' \operatorname{sh} \pi \tau d\tau' d\tau$$

В указанных выше соотношениях $K_{-i\tau}(kr)$ – функция Макдональда, $\nu = \nu_N$ – скорость распространения волн сдвига в N -ой компоненте, p – параметр преобразования Лапласа, $f(r), q^{(j)}(r)$ трансформанты Лапласа случайных смещений сдвига $f(r, w_t)$ и контактных напряжений $q_t(r)$ соответственно. Функции $M^{(j)}(\tau), H(\tau, \tau')$ зависят от геометрических и упругих параметров наклонно-слоистой среды, действительны при $\tau, \tau' \in R^1$, мероморфны в комплексных плоскостях τ, τ' , а также имеют конечную плотность распределения нулей и полюсов. Функция $M^{(j)}(\tau)$ четна и, кроме того, $M^{(j)}(\tau) > 0$ при $\tau \in R^1$. Функция $H_N^{(j)}(\tau, \tau')$ находится из некоторого рекуррентного соотношения и имеет достаточно громоздкий вид.

Отметим, что при $p = -i\omega$ в случае $\ell_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots, N$) уравнение (3) совпадает с уравнением смешанной задачи об установившихся колебаниях клиновидного композита работы [3], а при дополнительном условии $\mu(x, y) = \mu, d(x, y) = d$ с уравнением аналогичной задачи для однородной клиновидной среды.

В процессе сведения исходной краевой задачи к рассматриваемому интегральному уравнению удовлетворение условиям сопряжения на границах раздела сред осуществлялось в обобщенном смысле с точки зрения теории обобщенных функций [5].

Вопросы разрешимости полученного уравнения в пространствах дробной гладкости исследованы в [6]. Метод исследования основан на представлении оператора левой части в виде $\mathbf{K}_j = \mathbf{M}_j + \mathbf{H}_j$ и изучении свойств интегральных операторов $\mathbf{M}_j, \mathbf{H}_j$ порождаемых слагаемыми $m_j(r, \rho), h_j(r, \rho)$ ядра $k_j(r, \rho)$. Изучение свойств оператора \mathbf{M}_j , который оказывается положительно определённым, основано на результатах [3] и позволяет сделать вывод о его однозначной обратимости как оператора, действующего в пространствах Соболева-Слободецкого дробной гладкости. Для исследования свойств оператора \mathbf{H}_j применен метод [4], позволяющий установить его полную непрерывность как оператора, действующего в тех же пространствах.

В работе [3] предложен способ отыскания решения интегральных уравнений (3), которое в несколько изменённой форме имеет следующий вид:

$$q(\rho)\rho = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma_1} F(z)M^{-1}(z)I_{-iz}(k\rho)zdz + \tag{4}$$

$$+ \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma_2} \{X_1(z)I_{-iz}(kz)K_{-iz}(kb)\} \frac{z^2 dz}{M_-(z)} + \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma_2} \{X_2(z)K_{-iz}(kz)I_{-iz}(ka)\} \frac{z^2 dz}{M_-(z)}$$

$$F(z) = \int_a^b f(\rho)K_{-iz}(k\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad M(z) = M_+(z)M_-(z)$$

$$X_{1,2}(z) \in S\sigma(\Gamma_2), \quad \sigma > \frac{3}{2}, \quad \|X\|_{S_\sigma(\Gamma)} = \sup_{z \in \Gamma} |X(z)z^\sigma| < \infty$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |X(z)z^\sigma| = 0, \quad \Gamma_{1,2} \in \Pi \quad (\Gamma_2 \succ \Gamma_1)$$

В рассматриваемом случае неизвестные функции $X_{1,2}(z)$ отыскиваются из некоторой системы интегральных уравнений II рода с вполне непрерывным оператором. Обращая по Лапласу построенное решение (4), можно восстановить случайное поле $q_t(r)$ контактных напряжений, представимое суммой $q_t(r) = q_t^{(1)}(r) + q_t^{(2)}(r)$, каждое слагаемое которой имеют вид:

$$\begin{aligned} q_t^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{4\pi\rho\sqrt{\rho}} \int_0^1 d\tau \int_{\Gamma_1} \frac{F(z, \rho; t - \tau)}{M^{(j)}(z)} z dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi\rho\sqrt{\rho}} \int_0^1 d\tau \int_{\Gamma_2} \xi_\tau^{(j)}(z) Q_{-1/2-iz} \left[\frac{\rho^2 + a^2 - \nu^2(t - \tau)^2}{2a\rho} \right] \frac{z^2 dz}{M^{(j)}(z)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi\rho\sqrt{\rho}} \int_0^1 d\tau \int_{\Gamma_2} \eta_\tau^{(j)}(z) Q_{-1/2-iz} \left[\frac{\rho^2 + b^2 - \nu^2(t - \tau)^2}{2b\rho} \right] \frac{z^2 dz}{M^{(j)}(z)} \\ F(z, \rho; \theta) &= \int_a^b f(r, w_\theta) Q_{-1/2-iz} \left[\frac{r^2 + \rho^2 - \nu^2\theta^2}{2r\rho} \right] \frac{dr}{r\sqrt{r}}, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5)$$

Данное представление единственно с точностью до функций, стохастически эквивалентных случайным функциям $\xi_\tau^{(j)}(z), \eta_\tau^{(j)}(z), j = 1, 2$ из пространства $B\{S_\sigma(\Gamma)\}$, определяемого нормой (E- символ математического ожидания):

$$\|\zeta_\tau(z)\|_{B\{S_\sigma\}}^2 = E \int_{R^1} \|\zeta_\tau\|_{S_\sigma}^2 d\tau, \quad \sigma > 3/2 \quad (6)$$

Методом [5-6] устанавливается, что если функция $f(r, w_t)$, моделирующая источник случайных колебаний, принадлежит пространству $BMO\{W_2^{1/2}(a, b)\}$ средней ограниченной осцилляции над пространством Соболева-Слободецкого, то полученное решение $q_t(r)$ принадлежит пространству $BMO\{W_2^{-1/2}(a, b)\}$ и, следовательно, как функция времени в указанном пространстве является марковским процессом, обладающим мартингалльным свойством [7]. Из последнего рассуждения вытекает, что при $t \rightarrow \infty$ построенное решение (5) будет стремиться в этом пространстве к решению соответствующей стационарной задачи согласно известному в теории распространения волн принципу предельной амплитуды [1], что может быть проверено непосредственно.

С помощью асимптотических оценок [8] для функций Лежандра:

$$Q_{-1/2+iz}(ch\beta_b) = \sqrt{\frac{b\pi\rho}{|z|}} \frac{e^{-i|z|\beta_b}}{\sqrt{b^2 - \rho^2}} [1 + O(|z|^{-1})], \quad |z| \rightarrow \pm\infty$$

$$Q_{-1/2+iz}(ch\beta_a) = \sqrt{\frac{b\pi\rho}{|z|}} \frac{e^{-i|z|\beta_a}}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} [1 + O(|z|^{-1})], \quad |z| \rightarrow \pm\infty$$

можно доказать, что при условии (6) указанное в соотношениях (5) решение $q_t(r) \in ВМО\{c_\gamma(a, b)\}$, $\gamma = 1/2$, а как функция r обладает свойствами, характерными для решений контактных задач теории упругости. Здесь $c_\gamma(a, b)$ – пространство функций ограниченных на отрезке (a, b) со степенным весом $(r - a)^\gamma(b - r)^\gamma$.

Используя решение описанной выше смешанной задачи можно осуществлять постановку и анализ основных задач для рассматриваемой неоднородной среды и восстанавливать случайное поле смещений как внутри области Ω , так и на её свободной поверхности $\partial\Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. Изд. Наука, М., 1989. 343с.
- [2] *Ватульян А.О., Гусева И.А.* О колебаниях ортотропной полосы с полостью. // ПМТФ, 1993. №2.С.123-127.
- [3] *Беркович В.Н.* К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов. // ДАН СССР, 1990.т.314.№3.С.172-174.
- [4] *Беркович В.Н.* Смешанная задача динамики наклонно-слоистой среды с негладкой границей. // В кн.: Математика в образовании. Сб. статей. Изд. Чувашск.ун-та. Чебоксары, 2005. С.171-176.
- [5] *Беркович В.Н.* Смешанная задача динамики наклонно-слоистой среды. // Тр. V Российск. конф. "Смеш. зад. мех. деформ. тела". Изд. СГУ. Саратов, 2005.
- [6] *Беркович В.Н.* Нестационарная смешанная задача динамики неоднородно упругой клиновидной среды. // Экол.Вестн.научн.центров ЧЭС. Изд. КубГУ, Краснодар, 2005. №3.
- [7] *Getoore R.K., Sharpe M.J.* Conformal martingales. // Inventiones math. 1972, v.16, pp. 271-308.
- [8] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции их приложения. М.-Л., Физматгиз, 1963.

Berkovich V.N. *On one type of the dynamic mixed problems for the incline layered medium.* In the paper the dynamic mixed boundary value problem is considered for the heterogeneous half-space elastic medium under the antiplane random vibrations. The problem is reduced to the boundary integral equations about the unknown contact stresses. Solvability problems for the integral equations are studied and the method of estimation of its solution is suggested.

ПЕРЕОТРАЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЕ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО РАЗ ЗВУКОВЫХ ЛУЧЕЙ В АКУСТИКЕ ПОМЕЩЕНИЙ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Боев Н. В., Троян Э. А.

*Ростовский государственный университет,
механико-математический факультет,*

НИИ механики и прикладной математики им. академика И. И. Воровича

Исследуется коротковолновая дифракция звуковых волн с учетом их многократного отражения, от поверхностей системы отражателей, находящихся в концертном зале.

Пусть из точки x_0 акустической среды распространяется высокочастотная монохроматическая сферическая волна. После отделения временного множителя $e^{-i\omega t}$ амплитуда давления в падающей волне в точке y акустической среды имеет вид

$$p^{inc}(y) = |x_0 - y|^{-1} e^{ik|x_0 - y|}. \quad (1)$$

Будем считать, что возможна реализация распространения акустической волны вдоль луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - y_3^* - \dots - y_N^* - x_{N+1}$, где точки зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$ лежат в одной плоскости и могут принадлежать как поверхности одного рассеивателя, так и граничным поверхностям различных N рассеивателей. Волна принимается в точке x_{N+1} акустической среды. В дальнейшем будем рассматривать локальную постановку задачи, в рамках которой в высокочастотном режиме колебаний давление в точке приема определяется отражением волны от малых окрестностей $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$ граничных поверхностей в точках зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$.

Остановимся на формировании интегрального представления давления $p(x_{N+1})$ в отраженной волне в точке приема x_{N+1} на основе модификации [1]. Давление в N раз отраженной волне в точке x_{N+1} будем находить интегрированием по окрестности S_N^* последней точки зеркального отражения y_N^* лучей, полученных при однократном отражении от окрестности S_{N-1}^* предпоследней точки зеркального отражения y_{N-1}^* . Давление в точке приема $p(x_{N+1})$ дается следующей формулой

$$p(x_{N+1}) = \iint_{S_N^*} 2p(y_N) \frac{\partial \Phi(y_N, x_{N+1})}{\partial n_N} dS_N. \quad (2)$$

Здесь Φ – функция Грина, $p(y_N)$ – давление в падающей волне в точке $y_N \in S_N^*$ окрестности y_N^* , которое определяется после отражения на окрестности S_{N-1}^* точки y_{N-1}^* , n_N – нормаль к поверхности S_N^* в точке y_N , направленная в сторону акустической среды.

В то же время давление $p(y_N)$ само выражается в виде интегрального представления через падающую на окрестность S_N^* волну, пришедшую после отражения на

окрестности S_{N-1}^*

$$p(y_N) = \iint_{S_{N-1}^*} 2p(y_{N-1}) \frac{\partial \Phi(y_{N-1}, y_N)}{\partial n_{N-1}} dS_{N-1}. \quad (3)$$

Такой же подход может быть распространен и на формирование отраженного поля на любой окрестности S_N^* ($n = 2, 3, \dots, N$) вдоль рассматриваемого луча.

Продвигаясь вдоль переотраженного луча в обратном направлении, т. е. в направлении луча $x_{N+1} - y_N^* - \dots - y_2^* - y_1^* - x_0$, приходим к рассмотрению формирования падающего поля на окрестности S_2^* .

В точках y_2 окрестности S_2^* второй точки зеркального отражения y_2^* интегральное представление $p(y_2)$ имеет вид:

$$p(y_2) = \iint_{S_1^*} 2p^{inc}(y_1) \frac{\partial \Phi(y_1, y_2)}{\partial n_1} dS_1. \quad (4)$$

Подставляя последующие интегральные представления в предыдущие (1) – (4), получаем для определения $p(x_{N+1})$ $2N$ кратный интеграл

$$p(x_{N+1}) = 2^N \iiint_{S_N^*} \iint_{S_{N-1}^*} \dots \iint_{S_2^*} \iint_{S_1^*} p^{inc} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \dots \frac{\partial \Phi}{\partial n_{N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n_N} dS_1 dS_2 \dots dS_{N-1} dS_N. \quad (5)$$

Асимптотическое решение, построенное ниже, имеет локальный характер и дает главный асимптотический член амплитуды дифрагированного поля в малой окрестности любого луча, вышедшего из точки x_0 , отразившегося от поверхностей рассеивателей последовательно в точках $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$ и пришедшего в точку x_{N+1} . Очевидно, что такие лучи могут существовать только в том случае, если все точки отражения $y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots, y_N^*$, а также точка приема x_{N+1} лежат в области “света”.

Обозначим расстояния $|x_0 - y_1^*| = L_0$, $|y_n^* - y_{n+1}^*| = L_n$, $|y_N^* - x_{N+1}| = L_N$, $n = 1, \dots, N - 1$. После вынесения за знак интеграла (5) медленно меняющихся функций в асимптотических представлениях нормальных производных функций Грина Φ можно выписать следующее интегральное представление для давления в точке приема

$$p(x_{N+1}) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^N L_0^{-1} \prod_{n=1}^N L_n^{-1} \cos \gamma_n \iint_{S_N^*} \iint_{S_{N-1}^*} \dots \iint_{S_1^*} e^{ik\varphi} dS_1 \dots dS_{N-1} dS_N, \quad (6)$$

$$\varphi = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + \dots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}|.$$

В множителях перед интегралом берутся значения $\cos \gamma_n$ для падающего луча в точке зеркального отражения y_n^* .

Окончательный результат для амплитуды давления $p(x_{N+1})$ N раз переотраженной волны в точке приема x_{N+1} может быть получен из (6) применением многомерной ($2N$ -мерной) стационарной фазы [2]

$$p(x_{N+1}) = \frac{1}{L_0} \prod_{n=1}^N \frac{\cos \gamma_n}{L_n} \frac{e \left\{ i \left[k \sum_{n=0}^N L_n + \frac{\pi}{4} (\delta_{2N} + 2N) \right] \right\}}{\sqrt{|\det(D_{2N})|}}, \quad (7)$$

где $\delta_{2N} = \text{sign } D_{2N}$. Матрица гессiana $D_{2N} = (d_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, 2N$ является ленточной (с шириной ленты равной семи) и симметричной $d_{ij} = d_{ji}$ со следующими ненулевыми элементами d_{ij} , $i \leq j$:

диагональные элементы:

$$\left\{ \begin{array}{c} d_{2n-1, 2n-1} \\ d_{2n, 2n} \end{array} \right\} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \alpha_n \\ \sin^2 \beta_n \end{array} \right\} + 2 \left\{ \begin{array}{c} k_1^{(n)} \\ k_2^{(n)} \end{array} \right\} \cos \gamma_n,$$

внедиагональные элементы:

$$d_{2n-1, 2n} = - (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \cos \alpha_n \cos \beta_n,$$

$$d_{2n-1, 2n+1} = L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \alpha_{n+1} - a_{11}^n),$$

$$d_{2n, 2n+1} = L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \alpha_{n+1} - a_{12}^n),$$

$$d_{2n-1, 2n+2} = L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \beta_{n+1} - a_{21}^n),$$

$$d_{2n, 2n+2} = L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \beta_{n+1} - a_{22}^n),$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}^n \\ a_{21}^n \end{array} \right\} = G_n^{-1} \left[\cos \beta_{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \cos \beta_n \\ -\cos \alpha_n \end{array} \right\} - \cos \alpha_{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha_n \\ \cos \beta_n \end{array} \right\} \cos (\gamma_{n-1} + \gamma_n) \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{12}^n \\ a_{22}^n \end{array} \right\} = G_n^{-1} \left[\cos \alpha_{n-1} \left\{ \begin{array}{c} -\cos \beta_n \\ \cos \alpha_n \end{array} \right\} - \cos \beta_{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha_n \\ \cos \beta_n \end{array} \right\} \cos (\gamma_{n-1} + \gamma_n) \right]$$

$$G_n = \sin \gamma_{n-1} \sin \gamma_n$$

Переменная n принимает последовательно натуральные значения $1, 2, 3, \dots$ с условием, что каждый из индексов i и j элементов d_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots, 2N$) не превосходит числа $2N$.

Заметим, что оценка многомерного дифракционного интеграла (7) не сводится к последовательному асимптотическому анализу двукратных интегралов, поскольку структура фазовой функции представляет собой довольно сложную комбинацию, зависящую от всех точек окрестностей $S_1^*, S_2^*, \dots, S_N^*$, участвующих в отражении луча.

Формула (7) для давления $p(x_{N+1})$ в отраженной волне устанавливает его зависимость от параметров задачи, которые определяются главными кривизнами, гауссовыми и средними кривизнами, кривизнами нормальных сечений поверхностей, расстояниями между точками зеркального отражения, удалением источника волны от первой точки отражения, удалением точки приема от последней точки отражения, от направлений падающих волн, а также углами между плоскостями падения лучей в соседних точках зеркального отражения.

Из формулы (7) в предельном случае N -кратного переотражения высокочастотной акустической волны от системы акустически твердых плоских отражателей для амплитуды переотраженной волны получаем известную формулу:

$$p(x_{N+1}) = - \left(\prod_{n=0}^N L_n \right)^{-1} e \left(i k \sum_{n=0}^N L_n \right).$$

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428) и гранта РФФИ № 05-01-00155а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теории дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [2] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Boyev N.V., Trojan E.A. *Arbitrary-order multiple re-reflections of acoustic waves from a system of surface reflectors in a concert hall.* It is studied a short-wave diffraction of acoustic waves, in the case of their multiple re-reflections from a system of complex-shaped reflectors located in a concert hall.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МКЭ ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В АКУСТИЧЕСКОМ НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

Болгова А. И., Боброва А. О.

Ростовский государственный университет

К задаче для трехмерного неоднородного по толщине акустического слоя был применен метод конечных элементов с целью численного построения дисперсионных кривых и потока энергии. В работе проведен качественный анализ распространения волн по дисперсионным кривым, выведены формулы для нахождения перемещения и вычисления потока энергии, произведен их расчет. Теоретические исследования сопровождаются программной реализацией на языке C++. Указанное приложение позволяет строить дисперсионные кривые, находить решение сдвиговой задачи, а также получать значение потока энергии для пространственной задачи вместе с графическим представлением.

1. Введение

При исследовании вопросов распространения волн и потоков энергии в полуграниченных средах важную роль играет поведение дисперсионных кривых рассматриваемой задачи. В большинстве случаев невозможно получить аналитическое решение дисперсионного уравнения, и, следовательно, для построения дисперсионных кривых необходимо привлекать численные методы, одним из которых является метод конечных элементов (МКЭ). В данной работе проиллюстрировано применение МКЭ на примере задачи о распространении волн в трехмерном неоднородном акустическом слое, нижняя граница которого жестко закреплена, а на дневной поверхности осциллирует нагрузка, заданная в конечной области. Построены дисперсионные кривые при различных изменениях физических параметров задачи, а также графики потока энергии. Аналогичная задача для однородного слоя была рассмотрена в [1]. В [2] исследована задача для неоднородного акустического слоя для случая гармонической перемещающейся нагрузки, численные расчеты проведены для двухслойной трехмерной среды. В [3] изучаются спектральные задачи на сечении для упругих и электроупругих волноводов при гармонических источниках и для упругих волноводов при гармонических подвижных источниках волн, в качестве примера рассмотрена спектральная задача с применением МКЭ для упругой однородной изотропной полосы, жестко заземленной по основанию.

2. Алгоритм для численного построения дисперсионных поверхностей и вычисления потока энергии для трехмерного неоднородного слоя

Рассматривается задача о распространении волн в трехмерном акустическом слое, неоднородном по толщине. Волны вызваны неподвижным гармоническим источником. Предполагается, что нижняя граница области закреплена, а на верхней границе заданы следующие граничные условия:

$$\mu(z) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=1} = f(x, y) e^{i\omega t}, \quad f(x, y) = 0, \text{ если } (x, y) \notin S,$$

где S - ограниченная область, $\mu(z)$ - кусочно-непрерывная функция. Решение ищется в виде

$$u = v(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad \omega > 0$$

Тогда формулировка краевой задачи для установившегося режима:

$$\mu(z) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu(z) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} [\mu(z) \frac{\partial v}{\partial z}] + \omega^2 \rho(z) v = 0 \quad (1)$$

$$\mu(z) \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=1} = f(x, y), v \Big|_{z=0} = 0, f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \notin S \\ \neq 0, & \text{если } (x, y) \in S \end{cases} \quad (2)$$

где $\rho(z)$ - кусочно-непрерывная функция.

Применяя к системе (1), (2) двойное преобразование Фурье по переменным x и y получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\mu(z) \frac{\partial b}{\partial z}) + (\mu(z) l^2 + \rho(z) \omega^2) b = 0, \quad (3)$$

$$b \Big|_{z=0} = 0, \quad (4)$$

$$\mu(z) \frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{z=1} = F(\alpha, \gamma), \quad (5)$$

где $b(\gamma, \alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y, z) e^{i\alpha x + i\gamma y} dx dy$.

Тогда решение исходной задачи найдем при помощи обратного преобразования Фурье

$$v(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} b(\gamma, \alpha, z) e^{-i\alpha x - i\gamma y} d\alpha d\gamma.$$

Применим к системе (3), (4) МКЭ, для этого умножим дифференциальное уравнение из (3) скалярно на функцию ϕ , удовлетворяющую главному граничному условию (4) и имеющую необходимую степень гладкости. Интегрируя полученное уравнение по z по отрезку $[0, 1]$ и применяя стандартные преобразования интегрирования по частям с учетом условия (5) будем иметь:

$$\int_0^1 \frac{\partial \mu_1(z)}{\partial z} \frac{\partial b(z)}{\partial z} - l^2 \int_0^1 \mu_1(z) b \phi dz + \Omega^2 \int_0^1 \rho_1(z) b \phi dz = F(\alpha, \gamma) \cdot \phi(1), \quad (6)$$

где $\mu_1(z) = \frac{\mu(z)}{\|\mu(z)\|}$, $\rho_1(z) = \frac{\rho(z)}{\|\rho(z)\|}$, $\Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho(z)}{\|\mu(z)\|}$, $\|f(z)\| = \max_{0 < z < 1} |f(z)|$.

Зададим удовлетворяющую однородному главному граничному условию КЭ аппроксимацию:

$$b = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i, \quad (7)$$

$$\text{где } \phi_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], i = \overline{1, N-1}, \\ 0 & \end{cases} \quad \phi_N = \begin{cases} \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 & \end{cases}$$

Подставляем (7) в (6):

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 \mu_1(z) \phi'_i \phi'_j dz + l^2 \int_0^1 \mu_1(z) \phi_i \phi_j dz - \Omega^2 \int_0^1 \rho_1(z) \phi_i \phi_j dz \right) a_i = F(\alpha, \gamma) \phi_N(1).$$

В результате получаем систему N уравнений:

$$G\vec{a} = \vec{c}, \vec{c} = (0, 0, \dots, F(\alpha, \gamma)), \quad (8)$$

$$\text{где } g_{ij}(l, \Omega) = \int_0^1 \mu_1(z) \phi'_i \phi'_j dz + l^2 \int_0^1 \mu_1(z) \phi_i \phi_j dz - \Omega^2 \int_0^1 \rho_1(z) \phi_i \phi_j dz, \quad i, j = \overline{1, N},$$

причем матрица G трехдиагональная.

Для вывода дисперсионного уравнения находим определитель матрицы и приравняем его нулю:

$$D(l, \Omega) = \det(G(l, \Omega)) = 0 \quad (9)$$

Решая уравнение (9) методом Ньютона для различных значений l , получаем для каждого l N положительных вещественных корней Ω_i , $i = \overline{1, N}$, из которых выбираем те значения, которые при расширении матрицы не меняются.

Построив дисперсионные кривые, переходим к выводу выражений для потока энергии в дальнем поле. Решая систему (8), получаем выражения для перемещений, преобразованные по Фурье. Асимптотика решения в полярной системе координат $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ при больших R получена при помощи теории вычетов, метода стационарной фазы [4] и принципа предельного поглощения [5].

$$\nu(R, \theta, z) \approx -i \sqrt{\frac{l_0}{2\pi R}} \frac{\sum_{i=1}^N a_i(l_0 \cos(\theta), l_0 \sin(\theta)) \phi_i(z)}{D'_i(l_0, \Omega_0) \alpha_0} e^{-i(Rl_0 - \frac{\pi}{4})}$$

Формула для определения потока энергии, осредненного по толщине, имеет вид:

$$P_R = -\frac{\Omega^2 l_0}{4\pi} \frac{\int_0^1 [\sum_{i=1}^N a_i(l_0 \cos(\theta), l_0 \sin(\theta)) \phi_i(z)]^2 dz}{D'_\Omega(l_0, \Omega) D'_l(l_0, \Omega)}.$$

Таким образом, получили расчетную формулу для вычисления потока энергии.

4. Заключение

На основе описанных результатов была составлена программа на языке программирования C++, позволяющая моделировать различные дисперсионные кривые в трехмерном слое при переменных $\mu(z)$ и $\rho(z)$ и вычислять поток энергии. Проведенный анализ показал, что, подбирая соответствующим образом различные функции плотности и жесткости, можем изменять количество распространяющихся волн при фиксированном значении Ω и получать различные значения $\Omega_{кр}$ (Рис. 1), такие что при $\Omega < \Omega_{кр}$ нет распространяющихся волн.

На Рис. 1 в случае а):

$$\begin{aligned} \mu(z) &= 0.9z + 0.1 \\ \rho(z) &= 3.6z^2 - 3.6z + 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \end{aligned}$$

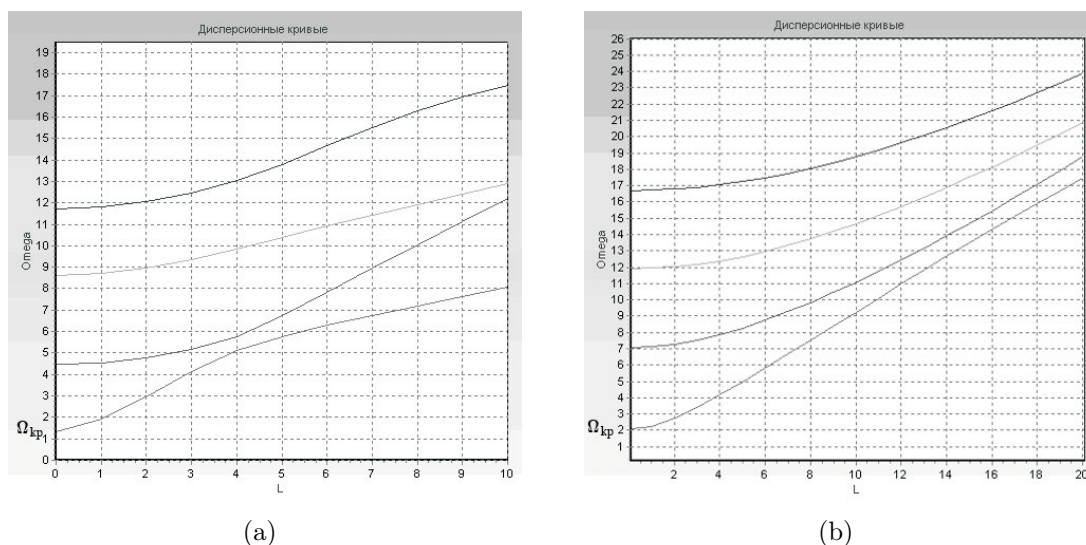


Рис. 1. Примеры графиков дисперсионных кривых

в случае b)

$$\begin{aligned} \mu(z) &= 0.9z + 0.1 \\ \rho(z) &= \begin{cases} 0.4z^2 - 0.4z + 1, & 0 \leq z \leq h, \\ 2z^2 - 2z + 1, & h < z \leq 1 \end{cases} \\ h &= 0.33 \end{aligned}$$

Также при соответствующим образом выбранном $\Omega_{кр}$ можно добиться появления обратных волн, если в этом есть необходимость, и управлять величиной потока энергии. Из изложенного выше следует вывод, что полученные результаты позволяют при помощи математического моделирования конструировать новые неоднородные материалы с заранее заданными волновыми свойствами. Заметим также, что метод, использованный в работе, может получить более широкое распространение при изучении изотропных, анизотропных сред, механические характеристики которых изменяются по толщине.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белоконь А. В., Наседкин А. В. Модельная задача на распространение волн от движущихся пульсирующих нагрузок в упругом слое/ Ростов н/Д ун-т. Ростов н/Д, 1986. 31 с. Деп. в ВИНТИ 29.04.86, № 3359. В56.
- [2] Белоконь А. В., Болгова А. И. Волновые поля в неоднородном трехмерном волноводе при действии на него подвижных пульсирующих нагрузок/ Труды V

Международной конференции. г. Ростов н/Д. 1999. Т. 2. Современные проблемы МСС. С. 20–25.

- [3] *Наседкин А. В.* Конечноэлементный анализ спектральных задач для упругих и электроупругих волноводов с гармоническими подвижными источниками/ Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. № 3. С. 40–46.
- [4] *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн./ М.: Мир, 1978. Т.2. 555 с.
- [5] *Свешников А. Г.* Принцип предельного поглощения для волновода/ Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 1011–1013.

УСТАНОВИВШИЕСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Бондарчук А. А.

Ростовский госуниверситет

Представлено новое точное решение полной системы уравнений движения вязкого теплопроводного газа, описывающее установившееся горизонтальное течение периодической структуры в тропосфере. Предложены два примера течений газа, описываемых найденным решением.

В работах [1], [2], [3] и [4] был представлен ряд точных решений системы уравнений Навье-Стокса для вязкого газа. В настоящей статье представлено новое точное решение описывающее установившиеся горизонтальное течение периодической структуры в тропосфере.

Принимается, что движение тропосферы описывается системой уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= \rho \vec{F} - \nabla p + \nabla(\lambda(\nabla \cdot \vec{V})) + 2(\nabla \cdot (\mu \vec{\epsilon})) \\ \rho \frac{dE}{dt} &= -p(\nabla \cdot \vec{V}) + \lambda(\nabla \cdot \vec{V})^2 + 2\mu \sum_{m,p=1}^3 \epsilon_{mp}^2 + (\nabla \cdot (k\nabla T)) + \rho q\end{aligned}$$

здесь \vec{V} – вектор скорости частицы газа, $\vec{F} = \vec{g}$ – вектор силы тяжести, E – внутренняя энергия, T – температура, p – давление в газе, ρ – плотность, $\vec{\epsilon}$ – тензор скоростей деформаций, ϵ_{mp} – компоненты тензора скоростей деформаций, μ – динамический коэффициент вязкости, λ – коэффициент объемной вязкости, k – коэффициент теплопроводности, q – приток теплового излучения.

Используются общепринятые для совершенного газа связи:

$$p = RT\rho, \quad E = C_v T, \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu, \quad \mu = \mu(T), \quad k = \frac{C_p \mu}{Pr}$$

где C_p коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении, Pr – число Прандтля.

Рассматривается задача об установившемся сдвиговом течении в тропосфере без притока теплового излучения с одной компонентой скорости

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad V_z = V_y = 0, \quad q = 0$$

Найденное решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 V_x &= A \cos(Ky) e^{Kz} \\
 T &= T_0 + \frac{A^2 Pr}{4C_p} + \left(\beta + \frac{A^2 Pr K}{2C_p} \right) z - \frac{A^2 Pr}{4C_p} e^{2Kz} \\
 p &= p_0 e \left(-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dZ}{T(Z)} \right) \\
 \rho &= \frac{p(z)}{RT(z)} \\
 T_0 &= T(0), \quad \beta = \frac{\partial T}{\partial z}(0), \quad p_0 = p(0)
 \end{aligned}$$

здесь A, K – некоторые константы (A имеет размерность [м/с], K – [1/м]).

Отметим, что в данном течении давление, температура и плотность газа зависят только от вертикальной координаты, несмотря на то, что скорость зависит также и от поперечной. Кроме того, как и в решениях представленных в [1], [2], [3] и [4], несмотря на то, что решаются уравнения для вязкого газа, в полученные выражения для скорости, давления, температуры и плотности вязкость в явном виде не входит.

Несмотря на то что давление получено в виде интеграла, затрудняющего обработку результатов, разложение в ряд Тэйлора в окрестности $z = 0$ показывает совпадение первых трех членов разложения с аналогичным разложением для давления в стандартной международной атмосфере для любых значений констант A и K (при $A = 0$ распределения давлений совпадают полностью и представленное решение переходит в известные формулы распределения давления, температуры и плотности для покоящейся тропосферы).

Приведем также компоненты вектора вихря скорости

$$\begin{aligned}
 \Omega_x &= 0 \\
 \Omega_y &= -AK e^{Kz} \cos(Ky) \\
 \Omega_z &= -AK e^{Kz} \sin(Ky)
 \end{aligned}$$

Если ограничить область течения слоем $y = -\pi/2.. \pi/2$ то можно рассматривать полученный поток как течение газа между вертикальными твердыми стенками с условием прилипания на них. Такой поток может возникнуть например в узком ущелье под действием касательной нагрузки приложенной на верхней (для положительных K) или нижней (для отрицательных K) границе области. Такую нагрузку могут дать соответственно ветер над ущельем или текущая по дну ущелья вода. Для первого случая однако условия прилипания на нижней границе выполнены не будут, но в случае достаточно узкого и глубокого ущелья этим можно пренебречь (для ущелья ширины h метров скорость частиц газа будет уменьшаться примерно в 23 раза (e^π) на каждые h метров глубины).

При рассмотрении слоя $y = 0.. \pi$ мы получаем течение в промежутке между двумя параллельными противоположно направленными потоками воздуха. При этом на поверхности Земли условия прилипания снова не выполняются, кроме

того не происходит и быстрого уменьшения скорости частиц газа по вертикали, поскольку в атмосфере, как правило, вертикальный масштаб течения меньше горизонтального. Поэтому при необходимости выполнить условия прилипания на поверхности Земли должен вводиться некоторый тонкий пограничный слой, обеспечивающий их выполнение. Если же пренебречь толщиной пограничного слоя по сравнению с вертикальными масштабами течений в атмосфере, то полученное решение позволяет связать поперечный масштаб потока с темпами роста скорости частиц газа с высотой.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Снопов А.И., Бондарчук А.А.* Некоторые точные решения уравнений движения вязкого газа для тропосферы при адиабатических условиях // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды VII Международной конференции памяти академика РАН И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 2001. Т.1. С. 214–217.
- [2] *Бондарчук А.А.* Точные решения уравнений Навье-Стокса для сдвиговых потоков в тропосфере // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды VIII Международной конференции. Ростов-на-Дону, 2002 г. Т.2. С. 37–40.
- [3] *Бондарчук А.А.* Моделирование тропического урагана // Математические методы в современных и классических моделях экономики и естествознания. Материалы научно-практической конференции 24-25 ноября 2004 г., г. Ростов-на-Дону, “РИНХ” издательство, С. 9–12.
- [4] *Бондарчук А.А.* Вращение тропосферы как твердого тела // XIII международная конференция. Математика. Экономика. Образование. Ростов-на-Дону. 29 мая - 5 июня 2005 г. Тезисы докладов. С. 99–101.

Bondarchuk A.A. *Stationary horizontal flows with periodic structure.* New exact solution of the full system of equations for the viscous gas with thermal conductivity, describing stationary horizontal flow with periodic structure in the troposphere is presented. Two sample flows of gas that can be described by discovered solution are suggested.

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОРГАНО-МИНЕРАЛЬНЫХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОТХОДОВ

**Буравчук Н.И., Гурьянова О.В.,
Окроков Е.П., Павлова Л.Н.**

НИИ механики и прикладной математики им. Ворovichа И.И.

г. Ростов-на-Дону

Показано влияние специфических особенностей материалов из горелых пород на формирование структуры органо-минеральных композитов (асфальтобетонов) и улучшение показателей их физико-механических свойств. Подтверждена целесообразность применения минеральных материалов из горелых пород для устройства конструктивных слоев дорожных одежд.

Получить на основе промышленных отходов асфальтобетонные композиты с высокими показателями физико-механических свойств возможно лишь при создании оптимальной структуры и обеспечении прочного сцепления между органическим вяжущим и минеральными компонентами. Характер связей в органо-минеральном композите определяется физическими, физико-химическими и механическими взаимодействиями на границе раздела фаз. Увеличить адгезионную способность органо-минеральной композиции можно либо повышением качества органического связующего, либо применением нерудных заполнителей и минерального порошка, способных проявлять пуццоланическую активность. В качестве таких материалов были использованы заполнители и микрозаполнители из горелых пород, получаемые при многостадийном дроблении пород шахтных отвалов. Химический состав этих материалов представлен в основном оксидами кремния, алюминия, кальция, железа [1]. Эти заполнители могут иметь меньшую марку по прочности, чем заполнители из изверженных пород, но обладают рядом преимуществ по другим показателям: не содержат илистых и глинистых частиц, глины в комках, имеют улучшенный гранулометрический состав, устойчивы против всех видов распада. Кроме того, из-за микропористости частиц они легче по насыпному весу. Открытых пор в частицах щебня нет и поэтому водопоглощение щебня невысокое.

Еще одна особенность таких заполнителей – наличие скрытой гидравлической активности. Благодаря присутствию активных компонентов, обладающих свободной энергией и способных проявлять вяжущие свойства, заполнители из горелых пород могут самостоятельно, без введения вяжущего, образовывать монолит.

Материалы из горелых пород (фракционированный щебень, смеси щебеночных фракций, отсева дробления) можно использовать для устройства конструктивных слоев дорожной одежды, мелкие фракции пород – в качестве минерального порошка. Эти материалы хорошо уплотняются и склонны с течением времени при определенном увлажнении цементироваться и упрочнять структуру щебеночного

слоя. В этом случае омоноличивание материала происходит за счет наличия в горелых породах активных компонентов, обладающих свободной энергией и способных проявлять вяжущие свойства. Результаты испытаний активности горелых пород показывают, что их можно отнести к активным и высокоактивным. Использование такого материала позволяет создать дорожные конструкции типа шлакобетона повышенной несущей способности, что очень ценно для дорожников.

Одно из преимуществ применения щебня из горелых пород в дорожном строительстве состоит в том, что благодаря его легкой уплотняемости и цементирующей способности пылевидной фракции достигается плотная упаковка зерен заполнителя и создается монолитная конструкция повышенной прочности и устойчивости.

Наличие пористости у горелых пород, с одной стороны повышает их сорбционную способность по отношению к битуму, с другой стороны улучшает их теплоизоляционные свойства. Несущие слои основания с такими заполнителями будут сами обладать теплоизоляционными свойствами и смогут предотвращать промерзание пучинистых грунтов, подстилающих дорожную одежду.

Выполненные исследования по использованию нерудных материалов из горелых пород в составе асфальтобетона показывают хорошее сцепление его с битумом, что противоречит представлениям о взаимодействии битумов с кислыми породами. Адсорбционная активность минерального материала зависит не только от количества диоксида кремния. Немаловажную роль играет природа поверхности минеральных частиц, наличие активных поверхностных центров, отличающихся повышенным энергетическим потенциалом [2]. Появление таких центров на поверхности горелых шахтных пород обусловлено спецификой их происхождения, и связано с наличием ряда структурных дефектов, возникающих при физико-химических процессах, происходящих при высокотемпературном обжиге углесодержащих шахтных пород. Наличие этих активных центров на поверхности частиц положительно сказывается на взаимодействии минеральных компонентов с битумом, а, следовательно, и на основных физико-механических свойствах органо-минерального комплекса (асфальтобетона): повышается прочность, морозостойкость, тепло- и водостойкость, в том числе и длительная. Выносливость асфальтобетона в значительной степени зависит от адгезии вяжущего к поверхности минеральных заполнителей. Адгезия вяжущего к поверхности минеральных горелопородных частиц хорошая, и прочность в зоне контакта является серьезным препятствием на пути формирования микротрещин. Структура органо-минерального асфальтобетона на материалах из горелых пород шахтных отвалов характеризуется смешанным типом связи, т. е. является коагуляционно-конденсационной. Силы сцепления таких связей отличаются более высокой прочностью, чем коагуляционные, а композиционная система с такими связями имеет улучшенные физико-механические и деформационные свойства.

Показатели физико-механических свойств асфальтобетонных композиций на материалах из горелых пород приведены в таблице 1.

Промышленное испытание технологии строительства оснований и покрытий с применением материалов из горелых пород проводилось на опытных участках технологических и подъездных дорог, промплощадок и тротуаров.

Таблица 1

Физико-механические характеристики асфальтобетонов типов Б и Г

Свойства асфальтобетона	Тип Б		Тип Г	
	Требования ГОСТа	Результаты испытаний	Требования ГОСТа	Результаты испытаний
Средняя плотность, г/см ³	-	2,21-2,30	-	2,22-2,37
Пористость минеральной части, %	не более 19,0	15,8-17,3	не более 22,0	15,3-16,0
Прочность при сжатии, МПа: при температуре испытания +50°С +20°С 0°С	не менее 0,8 не менее 2,0 не более 13,0	1,8-2,7 5,5-8,0 11,0-11,2	не менее 0,9 не менее 2,0 не более 13,0	1,7-7,8 8,3-8,7 11,4-11,6
Водонасыщение, в % по объему	от 1,5 до 4,0	1,7-1,9	от 1,5 до 4,0	1,6-1,7
Водостойкость	не менее 0,70	0,99-1,07	не менее 0,70	1,03-1,15
Водостойкость при длительном водонасыщении	не менее 0,60	1,10-1,18	не менее 0,60	1,13-1,23
Сдвигоустойчивость по: -коэф. внутреннего трения -сцеплению при сдвиге при температуре +50°С, МПа	0,79-0,83	0, 81-0,83	0,76-0,82	0,80-0,82
	0,29-0,38	0,35-0,37	0,32-0,38	0,36-0,38
Трещиностойкость по пределу прочности на растяжение при расколе при температуре 0°С и скорости деформирования 50 мм/мин.	не менее 2,0 не более 7,5	4,2-4,6	не менее 2,0 не более 7,5	4,0-4,2

Примечание: Количество битума в составах асфальтобетона составляло 6,5 % от массы минеральной части.

За опытными участками покрытий на материале из горелых пород велись наблюдения и периодически в течение 5 лет выбуривались керны для определения изменений во времени физико-механических свойств асфальтобетона в процессе эксплуатации. Результаты таких определений приведены в таблице 2.

Сравнение физико-механических свойств кернов и переформованных образцов свидетельствует о том, что показатели свойств асфальтобетона в процессе уплотнения при эксплуатации улучшаются.

Таблица 2

Свойства кернов-вырубок из асфальтобетонного покрытия и переформованных образцов

Керны-вырубки					Переформованные образцы				
Средняя плотность, г/см ³	Водонасыщение, %по объему	Прочность при сжатии, МПа (при $t = 20^{\circ}C$)	Водостойкость	Водостойкость при длит. водонасыщении	Средняя плотность, г/см ³	Водонасыщение, %по объему	Прочность при сжатии, МПа (при $t = 20^{\circ}C$)	Водостойкость	Водостойкость при длит. водонасыщении
2,39	2,15	8,8	1,11	0,96	2,23	1,77	8,2	0,98	0,99
2,41	1,93	9,1	1,18	1,03	2,32	1,56	8,5	0,96	1,10
2,42	1,87	9,7	1,27	1,09	2,30	1,70	8,8	1,01	1,13

Примечание: Пробы с опытных участков отбирались в 1, 3, 5 лет соответственно.

Для горелопородного асфальтобетона характерны высокие значения по прочности, морозостойкости, водостойкости и низкие значения по водонасыщению. Это можно объяснить, прежде всего, хорошим сцеплением активных зерен заполнителя с органическим вяжущим. Пленка битума становится более плотной и в меньшей мере подвергается старению от внешних воздействий, чем пленка битума на поверхности традиционного заполнителя. Во-вторых, это связано с отсутствием глинистых и засоряющих примесей, оптимальным зерновым составом. В-третьих, наличие активных компонентов в составе горелых пород, а также их способность проявлять пуццоланическую активность оказывают влияние на дополнительное упрочнение структуры материала, проявляющееся с течением времени, после достижения проектной прочности.

Сравнительные экспериментальные исследования [3] усталостной прочности органо-минеральных композиций на материалах из горелых пород и традиционных асфальтобетонов на щебне, песке и известняковом микрозаполнителе позволили сделать вывод, что асфальтобетоны на материалах из горелых пород по выносливости циклически повторяющимся механическим нагрузкам не только не уступают эталонным, но и превосходят их.

Обследование построенных опытных участков показало повышенную устойчивость покрытий из горелопородного материала к воздействию транспортных нагрузок. Покрытия сохраняют ровность и монолитность, отдельные редкие поперечные трещины не влияют на условия эксплуатации дороги. Результаты изучения состояния экспериментальных участков дороги и испытаний отобранных в разные периоды эксплуатации дорог проб щебня и кернов асфальтобетона с опыт-

ных участков подтверждают пригодность горелых пород к использованию для устройства подстилающих слоев, оснований и покрытий дорог.

На сегодняшний день в отвалах накоплены миллионы тонн шахтных пород. Это приводит к загрязнению воздушной среды, почвы и грунтовых вод, отходами заняты сотни гектаров пахотных земель. Именно поэтому утилизация и комплексное использование шахтных пород имеет важное значение и экологически целесообразно.

С использованием горелых шахтных пород в дорожном строительстве представляется возможность повысить качество асфальтобетона, удлинить срок его службы за счет улучшения его физико-механических свойств, уменьшить расход природных ресурсов и снизить затраты на устройства слоев дорожных одежд, и решить некоторые вопросы защиты окружающей среды от загрязнения.

Целесообразность использования шахтных пород определяется на основании сравнения экономической эффективности вариантов устройства дорожной одежды с применением пород и при использовании традиционных материалов. Так, например, при замене песчано-гравийной смеси на отсева дробления пород экономия только на стоимости материалов составляет не менее 30%.

Разработанные и опробованные технологии строительства конструктивных слоев дорожных одежд автомобильных дорог показали, что использование горелых пород позволяет уменьшить трудоемкость строительства и снизить затраты на работу механизмов и машин, связанных с укладкой дорожного полотна. В целом же повышается долговечность конструкции и уменьшается, с учетом всего срока службы конструкции и невысокой стоимости заполнителей из горелых пород, общая стоимость работ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Буравчук Н.И., Рутыков К.И. Переработка и использование отходов добычи и сжигания углей. Ростов н/Д, 1997. 224 с.
- [2] Ядыкина В.В. Влияние активных поверхностных центров кремнесодержащих минеральных компонентов на взаимодействие с битумом // Изв.вузов. Строительство. 2003. № 9. С. 75–79.
- [3] Миронов А.А., Базуев В.П. Усталостные свойства асфальтобетонов из промышленных отходов // Сб.ст. "Проектирование и строительство автомобильных дорог и мостов в Сибири". Томск: Изд-во Томского ун-та. 1992. С. 80–86.

Buravchuk N.I., Guryanova O.V., Okorokov E.P., Pavlova L.N. *Physico-mechanical properties organo-mineral composites on the basis of industrial wastes.* It is demonstrated the Influence of the specific particularities of materials made from burned rocks on shaping the structure of organic-mineral composites (the asphalt- concrete) and improvement of the factors their physic-mechanical characteristic. Confirmed practicability of the using mineral material from burned rocks for device of the constructive layers of the road cloths.

ПОТЕНЦИАЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Бызов А. П., Иванова Е. А.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Развивается метод описания упругого взаимодействия частиц общего вида, обладающих как поступательными, так и вращательными степенями свободы. Вводится понятие векторов деформации системы двух частиц. Определяется общий вид соотношений упругости. Предлагается конкретный вид парного потенциала взаимодействия, который может использоваться, например, при моделировании кристаллической решетки слоя графита.

Парные потенциалы взаимодействия типа потенциала Леннарда-Джонса широко применяются для моделирования молекулярных систем. Эти потенциалы позволяют правильно описывать многие физические явления. Вместе с тем, парные потенциалы имеют принципиальные недостатки. Одним из главных недостатков является то, что парные потенциалы, как правило, могут обеспечить устойчивость только плотноупакованных кристаллических решеток. Решетки с более низкой плотностью упаковки, такие как простая кубическая решетка, оказываются неустойчивыми для большинства парных потенциалов. Также неустойчивыми оказываются структуры, характерные для ковалентных кристаллов — структура графита на плоскости и структура алмаза в пространстве. Кроме того, парное центральное взаимодействие не может обеспечить устойчивость пространственной структуры и адекватно описать частоты колебаний большинства многоатомных молекул. Примером, иллюстрирующим этот факт, является линейно ориентированная трехатомная молекула (молекула, у которой обе связи лежат на одной прямой). Если потенциальная энергия такой молекулы зависит только от координат входящих в нее атомов, то изгибные колебания такой молекулы будут существенно нелинейными, а соответствующая частота малых колебаний — нулевой, что противоречит экспериментальным данным. Значительные расхождения с экспериментальными данными возникают также и для трехатомных молекул, у которых валентный угол отличен от 180° . Традиционное решение проблемы состоит в применении многочастичных потенциалов взаимодействия [1].

Альтернативный подход состоит в учете моментного вклада в межатомное взаимодействие. В работе [2] показано, что учет парного моментного взаимодействия (дополнительно к парному силовому) может обеспечить устойчивость кристаллических структур с низкой плотностью упаковки. При описании парного силового и моментного взаимодействия возникают две трудности. Первая трудность связана с введением мер деформаций и получением определяющих уравнений. Обсудим эту проблему подробнее. В механике Ньютона силы центральные, поэтому при описании парных силовых взаимодействий между материальными точками требуется задание только величины силы. При этом, согласно принципу материальной объективности, сила не должна изменяться при движении системы как жесткого

целого. Следовательно, сила взаимодействия материальных точек зависит только от расстояния между ними. Таким образом, в случае чисто силовых взаимодействий задание силы сводится к заданию одной скалярной функции одного скалярного аргумента. При учете вращательных степеней свободы взаимодействие частиц характеризуется двумя векторными величинами - вектором силы (который в данном случае не является центральным) и вектором момента (на который также не накладывается никаких ограничений). Векторы силы и момента взаимодействия двух частиц зависят, вообще говоря, от четырех векторных аргументов - векторов положений и векторов поворотов обеих частиц. Принцип материальной объективности сокращает число аргументов сводя их к двум векторным величинам. Итак, при учете вращательных степеней свободы, описание взаимодействия частиц требует задания двух векторных величин в виде функций двух векторных аргументов. Для решения этой задачи плодотворным оказывается использование идеологии механики моментных сплошных сред [3], где выражения для сил и моментов находятся при помощи уравнения баланса энергии, которое считается независимым законом. Вторая трудность, возникающая при описании парных силовых и моментных взаимодействий, связана с заданием внутренней энергии (потенциала взаимодействия) как функции мер деформаций. В линейных и геометрически нелинейных континуальных теориях эта задача решается просто - энергия задается в виде квадратичной формы мер деформаций. В физически нелинейных континуальных теориях вопрос о задании внутренней энергии, вообще говоря, остается открытым, поскольку все известные формулы являются чисто эмпирическими.

В работе [2], решена задача описания парного силового и моментного взаимодействия дискретных частиц в линейном приближении. Ниже результаты работы [2] обобщены на случай не малых перемещений и поворотов применительно к плоскому движению частиц. Введены понятия векторов деформации системы двух взаимодействующих частиц, получены соотношения Коши-Грина, предложены потенциалы взаимодействия. Полученные результаты могут оказаться полезными, в частности, при решении задач диссоциации молекул и разрушения кристаллических решеток методами молекулярной динамики.

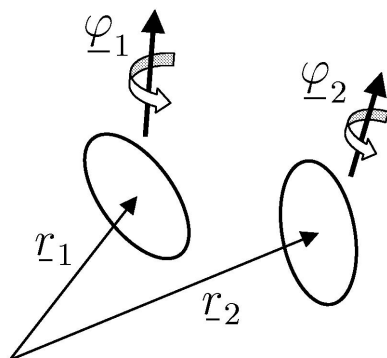


Рис. 1. Моментное взаимодействие двух частиц.

Описание движения системы двух тел-точек. Рассмотрим систему двух тел-точек A и B — Рис. 1. В актуальной конфигурации положение тел-точек зада-

ется радиус-векторами $\underline{R}_1, \underline{R}_2$, ориентация тел-точек — тензорами поворотов $\underline{P}_1, \underline{P}_2$; тела-точки обладают трансляционными скоростями $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ и угловыми скоростями $\underline{\omega}_1, \underline{\omega}_2$. Введем следующие обозначения: $\underline{F}_1, \underline{L}_1$ — сила и собственнo момент, действующие на тело-точку A со стороны тела-точки B ; $\underline{F}_2, \underline{L}_2$ — сила и собственнo момент, действующие на тело-точку B со стороны тела-точки A ; $\underline{F}_1^e, \underline{L}_1^e, \underline{F}_2^e, \underline{L}_2^e$ — внешние воздействия на тела-точки A и B соответственно. Запишем уравнения движения тела-точки A , тела-точки B и системы, состоящей из обоих тел-точек:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{K}}_1(A) &= \underline{F}_1 + \underline{F}_1^e, & \dot{\underline{K}}_2(A) &= \underline{L}_1 + \underline{L}_1^e, \\
 \dot{\underline{K}}_1(B) &= \underline{F}_2 + \underline{F}_2^e, & \dot{\underline{K}}_2(B) &= \underline{L}_2 + \underline{L}_2^e, \\
 [\underline{K}_1(A) + \underline{K}_1(B)]' &= \underline{F}_1^e + \underline{F}_2^e, & (1) \\
 [\underline{R}_1 \times \underline{K}_1(A) + \underline{K}_2(A) + \underline{R}_2 \times \underline{K}_1(B) + \underline{K}_2(B)]' &= \\
 &= \underline{R}_1 \times \underline{F}_1^e + \underline{L}_1^e + \underline{R}_2 \times \underline{F}_2^e + \underline{L}_2^e.
 \end{aligned}$$

Следствием уравнений (1) является третий закон Ньютона для сил и аналог третьего закона Ньютона для моментов [4]:

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0, \quad \underline{R}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{L}_1 + \underline{R}_2 \times \underline{F}_2 + \underline{L}_2 = 0. \quad (2)$$

Приведенное уравнение баланса энергии для системы двух тел-точек.

Запишем уравнение баланса энергии для системы, состоящей из двух тел-точек [4]:

$$[K(A) + K(B) + U]' = \underline{F}_1^e \cdot \underline{v}_1 + \underline{L}_1^e \cdot \underline{\omega}_1 + \underline{F}_2^e \cdot \underline{v}_2 + \underline{L}_2^e \cdot \underline{\omega}_2, \quad (3)$$

где U — внутренняя энергия системы (энергия взаимодействия тел-точек A и B). Принимая во внимание уравнения движения (1), уравнение баланса энергии (3) можно преобразовать к виду

$$\dot{U} = -\underline{F}_1 \cdot \underline{v}_1 - \underline{L}_1 \cdot \underline{\omega}_1 - \underline{F}_2 \cdot \underline{v}_2 - \underline{L}_2 \cdot \underline{\omega}_2. \quad (4)$$

В механике сплошных сред уравнение, аналогичное (4), называется приведенным уравнением баланса энергии. Сохраним эту терминологию и для дискретной системы. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 \underline{R} &= \underline{R}_2 - \underline{R}_1, & \underline{F} &= \underline{F}_1 = -\underline{F}_2, \\
 \underline{M}^C &= \underline{L}_1 - \frac{1}{2}\underline{R} \times \underline{F}_1 = -\underline{L}_2 - \frac{1}{2}\underline{R} \times \underline{F}_2.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \underline{M}^C имеет смысл момента, действующего на тело-точку A со стороны тела-точки B , вычисленного относительно середины отрезка, соединяющего тела-точки. С учетом обозначений (5) приведенное уравнение баланса энергии (4) записывается так:

$$\dot{U} = \underline{F} \cdot \left[\dot{\underline{R}} - \frac{1}{2}(\underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2) \times \underline{R} \right] + \underline{M}^C \cdot (\underline{\omega}_2 - \underline{\omega}_1). \quad (6)$$

Векторы деформации и соотношения Коши-Грина в случае плоского движения тел-точек. Рассмотрим плоское движение системы тел-точек. Используя цилиндрическую систему координат, представим вектор относительного положения тел-точек \underline{R} и векторы угловых скоростей $\underline{\omega}_1, \underline{\omega}_2$ в виде

$$\underline{R} = R \underline{e}_R(\theta), \quad \underline{\omega}_1 = \dot{\varphi}_1 \underline{k}, \quad \underline{\omega}_2 = \dot{\varphi}_2 \underline{k}, \quad \underline{e}_R(\theta) = \cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j}. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение тензор поворота на угол $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ вокруг вектора \underline{k} , обозначив его $\underline{P} = \underline{P}(\frac{1}{2}[\varphi_1 + \varphi_2]\underline{k})$. Введем в рассмотрение также векторы $\underline{\varepsilon}$ и \underline{x} :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{P}^T \cdot \underline{R}, \quad \underline{x} = (\varphi_2 - \varphi_1)\underline{k}. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что в случае плоского движения тел-точек, с учетом обозначений (7), (8), приведенное уравнение баланса энергии (6) можно переписать в форме

$$\dot{U} = \underline{F}_* \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} + \underline{M}_* \cdot \dot{\underline{x}}, \quad \underline{F}_* = \underline{P}^T \cdot \underline{F}, \quad \underline{M}_* = \underline{P}^T \cdot \underline{M}^C \equiv \underline{M}^C. \quad (9)$$

Здесь векторы \underline{F}_* и \underline{M}_* называются энергетическими векторами силы и момента. Векторы $\underline{\varepsilon}$ и \underline{x} , на которых совершают работу энергетический вектор силы \underline{F}_* и энергетический вектор момента \underline{M}_* , называются векторами деформации. Далее будем рассматривать упругое деформирование системы, т. е. будем предполагать, что внутренняя энергия, вектор \underline{F}_* и вектор \underline{M}_* зависят только от векторов деформации и не зависят от скоростей. Тогда имеют место соотношения Коши-Грина

$$\underline{F}_* = \frac{\partial U}{\partial \underline{\varepsilon}}, \quad \underline{M}_* = \frac{\partial U}{\partial \underline{x}}. \quad (10)$$

Поясним геометрический смысл векторов деформации $\underline{\varepsilon}$, \underline{x} . Для этого представим векторы $\underline{\varepsilon}$, \underline{x} в цилиндрической системе координат

$$\underline{\varepsilon} = R \underline{e}_R(\gamma), \quad \underline{x} = \varkappa \underline{k}, \quad \gamma = \theta - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \varkappa = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (11)$$

Величина R характеризует расстояние между телами-точками в актуальной конфигурации. Угол γ представляет собой разность между углом θ , определяющим направление прямой, соединяющей тела-точки, и углом $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, характеризующим ориентацию тел-точек; в механике сплошных сред аналог угла γ называется углом сдвига. Угол \varkappa характеризует относительный поворот тел-точек. Перепишем соотношения Коши-Грина (10) в скалярной форме. В цилиндрической системе координат выражения для векторов силы и момента имеют вид

$$\underline{F} = F_R \underline{e}_R(\theta) + F_\theta \underline{e}_\theta(\theta), \quad \underline{M}^C = M^C \underline{k}, \quad (12)$$

где радиальная F_R и поперечная F_θ составляющие вектора силы и величина вектора момента M вычисляются по формулам

$$F_R = \frac{\partial U}{\partial R}, \quad F_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad M^C = \frac{\partial U}{\partial \varkappa}. \quad (13)$$

Если задана внутренняя энергия системы двух тел-точек U как функция мер деформации R, γ, φ , формулы (12), (13) позволяют вычислить векторы силы и момента. Таким образом задача описания парного силового и моментного взаимодействия тел-точек сводится к заданию внутренней энергии системы (потенциала взаимодействия).

Моментные потенциалы взаимодействия. Очевидно, что конкретный вид моментного потенциала взаимодействия $U(R, \gamma, \varphi)$ зависит от внутренней структуры взаимодействующих частиц (тел-точек). Если тела-точки являются механическими моделями атомов, непосредственно описать их внутреннюю структуру крайне трудно. Однако, геометрия молекулярных соединений и кристаллических решеток, образуемых данным типом атомов, позволяет косвенно судить о том, какой симметрией должны обладать тела-точки, моделирующие атомы. Этой информации оказывается достаточно, чтобы определить общий вид моментного потенциала взаимодействия. В качестве примера приведем потенциал взаимодействия однотипных частиц, способных образовать кристаллическую решетку в плоскости:

$$U(R, \gamma, \varphi) = \Pi_0(R) + \Pi_1(R) \cos(n\gamma) \cos\left(\frac{n\varphi}{2}\right). \quad (14)$$

Здесь n — параметр, характеризующий порядок симметрии частицы, $\Pi_0(R)$ — безмоментный потенциал взаимодействия типа Леннарда-Джонса, $\Pi_1(R)$ — некоторая функция расстояния, которая должна стремиться к нулю при больших R . Для частиц, которые могут образовать квадратную решетку, $n = 4$. Для частиц, образующих структуру графита (шестиугольная решетка в плоскости), $n = 3$. Для частиц, образующих треугольную решетку, $n = 6$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00094.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tersoff J. New empirical approach for the structure and energy of covalent systems // Phys. Rev. B. 1988. **37**. P. 6991–7000.
- [2] Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фурсова А.Д. Описание кристаллической упаковки частиц с учетом моментных взаимодействий // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. № 4. С. 110–127.
- [3] Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек. Тр. ленингр. политехн. ин-та. 1982. Т. 386. С. 29–46.
- [4] Жилин П.А. Теоретическая механика. фундаментальные законы механики. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 340 с.

Byzov A., Ivanova E. *Interaction potentials for particles with rotational degrees of freedom.* Method of description of elastic interaction of particles of general kind (having both translation and rotation degrees of freedom) is developed. Strain vectors of the system of two particles are determined. Structure of relations of elasticity is determined. Pair potential of interaction, which can be used for simulation of crystal lattice of graphite lay, is proposed.

О НОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Ватульян А. О., Чебакова Е. М.

*Ростовский госуниверситет,
механико-математический факультет*

Рассмотрена задача об установившихся колебаниях неограниченной упругой анизотропной плоскости с полостью произвольной формы, свободной от нагрузок, под действием сосредоточенной силы. Построена новая система граничных интегральных уравнений относительно компонент напряжений на полости.

Как известно, наличие отверстий в упругих телах приводит к концентрации напряжений, которая в случае равновесия исследуется методом комплексных потенциалов [1, 2], позволяющим определить коэффициенты концентрации. В случае установившихся колебаний упругих тел с отверстиями круговой формы эта проблема исследована при помощи построения аналитических решений через цилиндрические функции [3]. В случае отверстий произвольной формы и при наличии анизотропии особенности концентрации напряжений могут быть исследованы лишь численно на основе МКЭ или граничных уравнений и их дискретного аналога [4] в зависимости от степени анизотропии и частоты колебаний. Отметим, что обычным способом понижения размерности в задачах о колебаниях упругого тела с отверстием является сведение исходной краевой задачи к системе граничных интегральных уравнений относительно граничных значений перемещений на основе идеологии теории потенциала [5]. Вместе с тем исследование проблемы концентрации напряжений и нахождение точек с максимальным тангенциальным напряжением на контуре отверстия требует дифференцирования граничных полей перемещений и, как следствие, при реализации требует использования высокого порядка аппроксимаций граничных полей на элементе для обеспечения их гладкого сопряжения. Такой подход был реализован в [6].

Настоящая работа посвящена формулировке граничных уравнений, наиболее приспособленных к изучению проблемы концентрации напряжений в анизотропной среде с отверстием. Отметим, что этот подход не требует дифференцирования узловых переменных.

1. Рассмотрим установившиеся колебания упругой анизотропной плоскости с полостью S , ограниченной гладкой замкнутой кривой l , которая свободна от нагрузок. Колебания вызываются сосредоточенной силой с амплитудными значениями $p_i \delta(x - x_0)$, замыкают постановку условия излучения [7]

$$\sigma_{kj,j} + \rho \omega^2 u_k + p_k \delta(x - x_0) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,m},$$

$$\sigma_{ij} n_j |_l = 0, \quad (2)$$

где C_{ijklm} – компоненты тензора упругих постоянных, удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности, n_j – компоненты единичного вектора внутренней нормали к кривой l . Фундаментальные решения для системы (1) построены и изучены в [8] и на их основе сформулированы системы граничных интегральных уравнений. Построим иной тип граничных уравнений, не использующий понятия фундаментального решения, на основании обобщенного преобразования Фурье.

Умножим уравнение (1) на $e^{i(\alpha, x)}$ и проинтегрируем по $R_2 \setminus S$, используя формулу Грина:

$$\int_l \sigma_{ij} n_j e^{i(\alpha, x)} dl_x - i\alpha_j \int_{R_2 \setminus S} \sigma_{ij} e^{i(\alpha, x)} dS_x + \rho\omega^2 \int_{R_2 \setminus S} u_i e^{i(\alpha, x)} dS_x + p_i e^{i(\alpha, x_0)} = 0.$$

Учитывая граничное условие (2), находим

$$-i\alpha_j \tilde{\sigma}_{ij} + \rho\omega^2 \tilde{u}_i + p_i e^{i(\alpha, x_0)} = 0, \quad (3)$$

а также

$$\sigma_{ij} = \int_{R_2 \setminus S} C_{ijklm} u_{k,m} e^{i(\alpha, x)} dS_x = \int_l C_{ijklm} u_k n_m e^{i(\alpha, x)} dl_x - i\alpha_m C_{ijklm} \tilde{u}_k. \quad (4)$$

Находя из (3) компоненты вектора перемещений

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{\rho\omega^2} (i\alpha_s \tilde{\sigma}_{ks} - p_k e^{i(\alpha, x_0)})$$

и подставляя их представление в (4), получим

$$\alpha_s \alpha_m C_{ijklm} \tilde{\sigma}_{ks} - \rho\omega^2 \tilde{\sigma}_{ij} = -i\alpha_m C_{ijklm} p_k e^{i(\alpha, x_0)} - \int_l C_{ijklm} u_k n_m e^{i(\alpha, x)} dl_x$$

или

$$F_{ijks} \tilde{\sigma}_{ks} = B_{ij},$$

$$B_{ij} = -i\alpha_m C_{ijklm} p_k e^{i(\alpha, x_0)} - \int_l C_{ijklm} u_k n_m e^{i(\alpha, x)} dl_x,$$

$$F_{ijks} = \alpha_s \alpha_m C_{ijklm} - \rho\omega^2 \delta_{ik} \delta_{js}$$

откуда находим компоненты напряжений, осуществляя обратное преобразование

$$\sigma_{kr}(\xi) = \frac{1}{(2\pi^2)} \int_{\Gamma_2} F_{ijk_r}^{-1}(\alpha) (-i\alpha_m C_{ijlm} p_l e^{i(\alpha, x_0)} - \int_l C_{ijlm} u_l n_m e^{i(\alpha, x)} dl_x) e^{-i(\alpha, \xi)} d\alpha. \quad (5)$$

Проанализируем структуру представления (5). Первое слагаемое описывает напряженное состояние в среде без полости, создаваемое сосредоточенным источником, а второе описывает влияние границы.

Тогда нетрудно получить выражения для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{kr}(\xi) = \sigma_{kr}^{et}(\xi) - \int_l R_{krl}(x, \xi) u_l(x) dl_x, \quad \xi \in R_2 \setminus S, \quad (6)$$

$$\sigma_{kr}^{et}(\xi) = -\frac{i}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} F_{ijk}^{-1}(\alpha, \omega) \alpha_m C_{ijlm} p_l e^{i(\alpha, x_0)} d\alpha,$$

$$R_{krl}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \frac{D_{krml}(\alpha, \omega) n_m(x)}{D_0(\alpha, \omega)} e^{i(\alpha, x - \xi)} d\alpha, \quad (7)$$

где $D_{krml}(\alpha, \omega)$, $D_0(\alpha, \omega)$ – полиномы, поверхность интегрирования Γ_2 выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [7].

На основании (6), (7) строятся представления

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}(\xi) &= \sigma_{kr}(\xi) n_k(\xi) n_r(\xi), \\ \sigma_{ns}(\xi) &= \sigma_{kr}(\xi) n_k(\xi) s_r(\xi) \\ \sigma_{ss}(\xi) &= \sigma_{kr}(\xi) s_k(\xi) s_r(\xi), \end{aligned} \quad (8)$$

где $s_k(\xi)$ – компоненты единичного вектора касательной к контуру. Осуществляя предельный переход в (6)-(8) при $\xi \rightarrow y \in l$, получаем систему интегральных уравнений относительно $u_k(x)|_l$

$$\begin{aligned} \int_l [K_{11}(x, y) u_1(x) + K_{13}(x, y) u_3(x)] dl_x &= \sigma_{nm}^{et}(y) \\ \int_l [K_{31}(x, y) u_1(x) + K_{33}(x, y) u_3(x)] dl_x &= \sigma_{ns}^{et}(y) \end{aligned} \quad (y \in l) \quad (9)$$

и выражение для $\sigma_{ss}(y)$ в виде

$$\sigma_{ss}(y) = \sigma_{ss}^{et}(y) - \int_l [K_1(x, y) u_1(x) + K_3(x, y) u_3(x)] dl_x, \quad y \in l. \quad (10)$$

В соотношениях (9)-(10) ядра $K_{ij}(x, y)$, $K_j(x, y)$ представляются двукратными интегралами по поверхности Γ_2 . Таким образом, исследование тангенциального напряжения на контуре отверстия l сведено к последовательному решению системы интегральных уравнений (9) и вычислению $\sigma_{ss}(y)$ по формуле (10).

Осуществим решение задачи на основании идей МГЭ для анизотропной среды, реализованных в [9] для граничных уравнений другого типа. Отметим, что в предлагаемом подходе вычисление напряжений на контуре отверстия осуществляется не при помощи операторов дифференцирования граничных значений перемещений, что требует достаточно точной их аппроксимации, а при помощи псевдодифференциальных операторов вида (10). Поэтому достаточно в (9) осуществить

простейшую дискретизацию, применяя, например, концепцию постоянных элементов. В этом подходе считается, что $l = \bigcup_{q=1}^N l_q$, l_q – прямолинейные отрезки, $u_j(x)|_{l_q} = u_{jq}$ ($j = 1, 3, q = 1 \dots N$).

Тогда решение (9) сводится к решению линейной алгебраической системы вида

$$\sum_{q=1}^N (A_{11qp} u_{1q} + A_{13qp} u_{3q}) = f_{1p}, \quad (11)$$

$$\sum_{q=1}^N (A_{31qp} u_{1q} + A_{33qp} u_{3q}) = f_{3p},$$

$$f_{1p} = \sigma_{nn}^{et}(y_p), f_{3p} = \sigma_{ns}^{et}(y_p),$$

$$A_{mnpq} = \int_{l_q} K_{mnq}(x, y_p) dl_x, \quad (12)$$

$$K_{11q}(x, y_p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \frac{D_{kr1m}(\alpha, \omega)}{D_0(\alpha, \omega)} e^{i(\alpha, x-y_p)} d\alpha n_{kp} n_{rp} n_{mq},$$

$$K_{13q}(x, y_p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \frac{D_{kr3m}(\alpha, \omega)}{D_0(\alpha, \omega)} e^{i(\alpha, x-y_p)} d\alpha n_{kp} n_{rp} n_{mq},$$

$$K_{31q}(x, y_p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \frac{D_{kr1m}(\alpha, \omega)}{D_0(\alpha, \omega)} e^{i(\alpha, x-y_p)} d\alpha s_{kp} s_{rp} n_{mq},$$

$$K_{33q}(x, y_p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \frac{D_{kr3m}(\alpha, \omega)}{D_0(\alpha, \omega)} e^{i(\alpha, x-y_p)} d\alpha s_{kp} s_{rp} n_{mq}.$$

Здесь y_p – точки коллокаций, которые, как правило, выбираются в серединах отрезков l_q .

Заметим, что главную техническую сложность при нахождении узловых значений u_{jq} составляет вычисление коэффициентов алгебраической системы (11), представляющие собой трёхкратные интегралы.

Процедура интегрирования может быть значительно упрощена, если для вычисления двукратных интегралов $K_{mnq}(x, y_p)$ ввести в рассмотрение следующую функцию

$$R(x - y_p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{i(\alpha, x-y_p)}}{D_0(\alpha, \omega)} d\alpha,$$

которую будем называть порождающим решением. Этот интеграл с помощью методики, изложенной в [8, 10], преобразуется в однократный интеграл по конечному отрезку. Затем, осуществив соответствие $\alpha_j \rightarrow i \frac{\partial}{\partial y_j}$ в полиномах $D_{krmn}(\alpha, \omega)$, вычисляем производные по y_j .

Представленный подход позволяет исследовать концентрацию напряжений около отверстий произвольной формы в анизотропной среде.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ–112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [2] *Лехницкий С. Г.* Теории упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
- [3] *Гузъ А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 307 с.
- [4] *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [5] *Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 1989. № 2. С. 81–85.
- [6] *Чебакова Е.М.* О реализации МГЭ в задаче о колебаниях ортотропной плоскости с полостью // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VIII Международной конференции. г. Ростов-на-Дону, 14-18 октября 2002 г. 2003. С. 204–208.
- [7] *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [8] *Ватульян А. О., Чебакова Е. М.* Фундаментальные решения для ортотропной упругой среды в случае установившихся колебаний // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 6. С. 131–139.
- [9] *Ватульян А.О., Кацевич А.Я.* Колебания ортотропного слоя с полостью // Прикладная механика и техническая физика. 1991. № 1. С. 95–97.
- [10] *Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкин А.В.* Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэластостатике // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37. № 5. С. 135–142.

Vatulyan A.O., Chebakova E.M. *On the new boundary equations in the problems about the concentration of the stresses.* The problem on the stationary vibrations of the unbounded elastic anisotropic plane with an arbitrary form cavity (free from the loads) under the action of the concentrated force is considered. The new system of the boundary integral equations relative to the stress component on a cavity is constructed.

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТКАНЕЙ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Гвоздев С. А.

Ростовский госуниверситет

В статье описываются методы моделирования гибких тканей в задачах компьютерной анимации. Перечисляются основные проблемы и приводятся эффективные подходы к их решению. Приводится краткое изложение FEMS метода в качестве альтернативы классическим пружинным системам.

1. Введение. Интеграция методов реалистичного моделирования ткани в компьютерных приложениях масштаба реального времени и программах, ориентированных на создание высококачественной компьютерной анимации, - является важной задачей современной компьютерной графики. В статье описываются основные проблемы моделирования тканей и некоторые подходы к их решению. Предложен оригинальный подход к повышению точности расчетов. Приведенные методы можно использовать для расчета динамики абсолютно гибких упругих (упруго-пластических) оболочек.

2. Основные проблемы и методы их решения. Ткань с точки зрения компьютерной графики представляет из себя оболочку с малым модулем упругости, слабо сопротивляющуюся изгибным деформациям. Чаще всего ткань рассматривают в процессе взаимодействия с системой абсолютно-жестких тел (например, моделирующих человека). В общем случае на ткань оказывают воздействие внешние силы (чаще всего моделирующие эффекты ветра и гравитации). Ткань обычно считают хрупким объектом, т.е. под действием больших нагрузок она может разорваться, без пластических деформаций. Несмотря на явно выраженную анизотропию реальных тканей в приложениях компьютерной графики ткань чаще всего интерпретируется как изотропный объект. Масса ткани считается малой по сравнению с массой взаимодействующих с тканью объектов.

Существует немало идеологически схожих методов физически-реалистичного моделирования ткани. Исходная сложная форма ткани аппроксимируется системой точек с сосредоточенными массами. Внутренние упругие усилия транслируются в систему сфокусированных в узлах нагрузок. Симуляция движения ткани достигается за счет интегрирование обычных уравнений движения частиц. В зависимости от конкретной задачи может происходить генерация вспомогательных точек, путем интерполяции (например, B-Сплайнами) для получение визуально приятной анимационной картины. Количество узловых и контрольных точек зависит от конкретных задач. Численные методы также могут варьироваться. Обычно для симуляции ткани применяется либо метод Рунге-Кутты четвертого порядка либо обратный метод Эйлера [1]. Сегодня наиболее популярной технологией считается метод пружинных систем [2-4]. Он сочетает визуальную простоту, легкость алгоритмизации. Метод состоит в замене силового взаимодействия между узлами линейными пружинно-демпферными системами. Пружины можно разделить

на три категории - пружины, моделирующие сдвиг, изгиб и растяжение [2]. Варьирование упругих коэффициентов пружин позволяют имитировать различные материалы. Однако зависимость упругих эффектов от всех трех семейств пружин, плюс естественная анизотропия представленной модели не позволяет создать взаимнооднозначное соответствие между такими структурами и пространством упругих материалов. В большинстве случаев аниматору приходится тратить время на подгонку упругих коэффициентов и коэффициентов демпфирования для получения качественной визуальной картинки.

В процессе движения ткань обычно находится в контактном взаимодействии с системами массивных объектов, например, при математическом моделировании одежды человека. Часто наибольшую трудность представляет проблема быстрой идентификации динамических контактов. Поскольку объект, взаимодействующий с тканью, как правило движется, то применение классических технологий статической идентификации контактов, основанных на AABB (Axis Aligned Boundary Box) деревьях [5] затруднительны. Для тканей с небольшим числом узловых точек, можно использовать модель проникновения [6]. Для его использования необходима выпуклость геометрии массивных объектов. Это в частности справедливо для геометрии человека, так как человек в общем случае легко аппроксимируемой системами цилиндров и параллелепипедов. В этом случае применяется метод разделяющих осей [7]. Для общего случая и для тканей с большим числом узлов рекомендуется использовать методы динамических ориентированных параллелепипедов ([8-9]) и хеширование контактов (из-за малых скоростей часто контактные точки и нормали контактов сохраняются в течение длительного промежутка времени) [8]. Существует немало как коммерческих, так и бесплатных библиотек для ускорения динамического определения контактов (например OPCODE [9]). Подробная информация о методах идентификации динамических контактов дана [8], [10], [5]. В целях оптимизации и в связи с повышенной сложностью считается, что ткани (или фрагменты одной ткани) не взаимодействуют друг с другом. Однако существует круг задач, где это допущение перестает быть справедливым. Методам определения и расчету контакта такого типа посвящается работа [11]. После того как контакты идентифицированы, решается вопрос о силовом взаимодействии тканей с окружающими объектами. Как обычно, контакты между динамическими объектами разделяются на две категории - импульсные контакты и длительные контакты [12-13]. Импульсные контакты возникают при больших скоростях ткани относительно движения контактируемого объекта. Обычно предполагается, что трение между объектами и тканью, мало или незначительно. Трение активируется при длительном контакте.

Масса ткани обычно мала по сравнению с массой человека или других окружающих препятствий. Из-за невысокой скорости импульс узловых точек ткани мал, поэтому можно считать, что ткань не оказывает воздействие на окружающие объекты. Поэтому случай контактного взаимодействия ткани и окружения часто можно рассматривать как контакт точки и статической плоскости. Коэффициент восстановления обычно мал, или вообще равен нулю, что быстро переводит импульсный контакт в категорию длительного. Существует несколько методов решения длительного контакта. В приложениях реального времени ориентирован-

ных на скорость выполнения, можно использовать методы стабилизирующей силы, или жесткого связывания (при этом точке запрещается проникновение в контактируемый объект). Более точные методы основаны на решении систем уравнений статики. В связи с наличием неударживающих связей и сложным поведением контактируемого объекта решение систем уравнений требуют применения методов квадратичного программирования и качественных методов оптимизации. Такие технологии используются преимущественно в задачах статической компьютерной анимации (например, в мультипликации, фильмах и т.п).

3. Применение FEMS метода. Данная работа посвящается моделированию движения ткани с использованием FEMS метода. Исходное деформируемое тело аппроксимируется треугольниками в вершинах, которых находятся материальные точки. Каждый из элементов является обобщенной пружиной, связывающей 3 точки. Предполагается, что в каждом элементе реализуется однородное напряженное состояние. На каждом шаге интегрирования для каждого элемента вычисляется тензор деформации Коши, после чего происходит расчет тензора напряжений. Его действие передается в виде набора сосредоточенных сил. Если напряжения в элементе велики, то на основе известных условий пластичности, включается механизм, в результате элемент стремится принять состояние актуальной конфигурации. Более подробное изложение метода дано в [14].

К достоинствам метода можно отнести высокую точность расчетов; изотропию модели; возможность масштабирования и повышенный контроль времени выполнения. Следствием этих достоинств является более качественная симуляция. Использование естественных упругих констант материала убирает необходимость в подборе пружинных или других параметров. Недостатком метода можно считать отсутствие изгибного сопротивления и осложнение математики. Для статически известной конфигурации ткани (без динамических узлов) можно произвести эффективную оптимизацию, основанную на статически рассчитанных коэффициентах ряда Тейлора. При этом незначительно понижается точность, однако сохраняются все преимущества метода. В разрабатываемом физическом движке SMex представлены модели ткани, основанные как на пружинных схемах, так и на FEMS моделях. Сравнение двумерных FEMS моделей с расчетами в КЭ пакетах (AnSys, FlexPDE) показали хорошую точность. Представленные разработки будут использоваться при создании коммерческого программного обеспечения, ориентированного на специалистов в области компьютерной анимации.

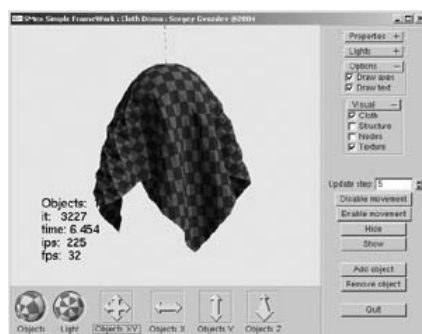


Рис. 1. Контакты пружинной ткани и массивного шара

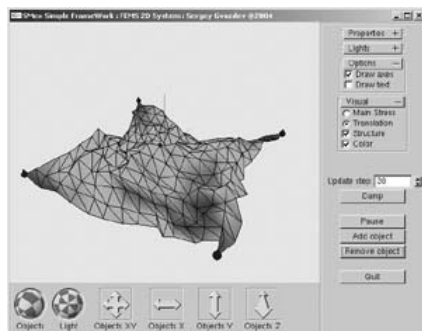


Рис. 2. закрепленная FEMS ткань

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *David Baraff, Andrew Witkin.* Large Steps in Cloth Simulation. Computer Graphics Proceedings // www.cs.brown.edu, 1998.
- [2] *Jeff Lander.* Devil in the Blue-Faceted Dress: Real-Time Cloth Animation. Graphic Content // www.gamasutra.com, 2000
- [3] *Pascal Volino, Nadia Magnenat Thalmann* Implementing Fast Cloth Simulation with Collision Responce // www.gamasutra.com
- [4] *Olaf Eitzmus, Michael Hauth, Michael Keckeisen.* A Cloth Modelling System for Animated Characters // www.gris.uni-tuebingen.de
- [5] *Gino van den Bergen.* Efficient Collision Detection of Complex Deformable Models using AABB Trees // www.libsolid.com, 1998.
- [6] *M. Senin, N. Kojekine, V. Savchenko, I. Hagiwara.* Particle-based Collision Detection // EUROGRAPHICS, www.mech.titech.ac.jp, 2004.
- [7] *David Eberly.* Intersection of Convex Objects: The Method of Separating Axes // www.magic-software.com, 2001.
- [8] *David Eberly.* Dynamic Collision Detection using Oriented Boundary Boxes. // www.magic-software.com, 1999.
- [9] *Pierre Terdiman.* OPCODE - Optimized Collision Detection // www.codercorner.com/Opcode.htm
- [10] *Stephane Redon, Abderrahmane Kheddar, Sabine Coquillart* Fast Continuous Collision Detection between Rigid Bodies // EUROGRAPHICS, 2002.
- [11] *David Baraff, Andrew Witken, Michael Kass.* Untangling Cloth. // ACM SIGGRAPH, 2003.

- [12] *David Baraff*. An Introduction to Physically Based Modeling: Rigid Body Simulation II - Nonpenetration Constraints // www.cs.brown.edu, 1997.
- [13] *Рик Перент*. Компьютерная анимация. Теория и алгоритмы. Изд-во “ОЦ Кудиц-образ”, 554 с.
- [14] *С. Гвоздев*. Метод точного моделирования поведения деформируемых твердых тел в применении к задачам механики и компьютерной физики // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Труды международного школы-семинара. Издательство НПК “Гефест”, 2005 год. 5 с.

S. Gvozdev. *Methods of clothes simulation in computer graphics applications.* In this article you can find the description of clothes simulation methods in computer animation. The main problems and effective methods for their solution are listed here. Short FEMS method’s description presents as an alternative for classic spring’s system.

СОЗДАНИЕ НАПРАВЛЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН СИСТЕМОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ НАКЛАДОК НА УПРУГОМ СЛОЕ

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Кваша О. В.

Кубанский госуниверситет, Краснодар

Рассматривается плоская задача о контактном взаимодействии упругого слоя и нескольких пьезокерамических накладок. Изучаются возможности формирования одномодового направленного излучения в низкочастотном диапазоне путём выбора подходящей конфигурации системы и фазирования управляющих электрических полей.

1. В настоящее время большой интерес представляют электромеханические системы с пьезокерамическими возбудителями или датчиками (сенсорами), выполненными в виде гибких и легких поверхностных накладок или внутренних прослоек в многослойных структурах. Главной особенностью рассматриваемых систем (смарт-структур) является наличие двух взаимосвязанных частей: электрической и механической (вибрация, бегущие волны). В то время как для первой части применимы стандартные методы электротехники, строгий теоретический анализ механического поведения требует рассмотрения сложных волновых и энергетических процессов в упругих телах. Большое значение для таких исследований имеют основополагающие результаты И. И. Воровича по строгой постановке граничных задач для упругих волноводов в неэнергетических пространствах и исследованию их спектральных свойств [1] - [3].

Большинство из известных математических и компьютерных моделей для упругих волноводов с пьезокерамическими накладками или прослойками разработаны в предположении малой толщины упругого волновода по отношению к длине волны (балки, пластины или оболочки) [4, 5]. Однако эти результаты неприменимы, когда длина волны соизмерима с толщиной волновода, и наряду с первой изгибной или продольной модой большой вклад дают и нормальные моды высших порядков.

Здесь требуется рассмотрение волновых процессов в упругом слое, или в общем случае – в многослойном пакете, колебания точек которого описываются уравнениями Ляме. Пьезокерамические накладки предполагаются приклеенными к определенным областям поверхности слоя, их колебания удовлетворяют уравнениям продольных колебаний пластин с дополнительными членами, описывающими электромеханическое взаимодействие. Взаимное волновое взаимодействие вибровозбудителей и/или сенсоров автоматически учитывается при строгом решении соответствующих краевых задач со смешанными граничными условиями. Такая модель была разработана в рамках сотрудничества с немецкими коллегами из института технической механики университета Карлсруэ [6]. Подробное описание модели и полученных численных результатов по ее сопоставлению с упрощенными инженерными подходами и по резонансным режимам излучения даны в депонированной рукописи [7]. Настоящая работа является продолжением этих исследований. Здесь

рассматривается важный для задач дефектоскопии вопрос возбуждения в заданном направлении только одной из бегущих мод упругого слоя.

2. С математической точки зрения задача о контактном взаимодействии M тонких гибких пьезокерамических накладок с упругим слоем сводится к нахождению неизвестных продольных компонент смещения накладок v_m и неизвестных контактных напряжений q_m под ними из следующей системы интегро-дифференциальных уравнений [7]:

$$v_m(x) = \sum_{k=1}^M \mathcal{K}q_k, \quad x \in \Omega_m, \quad \Omega_m = [x_m - a_m, x_m + a_m], \quad (1)$$

$$\frac{d^2 v_m}{dx^2} + \varkappa_m^2 v_m = b_m q_m, \quad (2)$$

$$dv_m/dx|_{x=x_m \pm a_m} = e_m, \quad (3)$$

$$e_m = (1 + \nu_m) d_{31,m} E_{z,m} = |e_m| e^{i\varphi_m}, \quad m = 1, \dots, M,$$

где $\varkappa_m^2 = \omega^2 \rho_m (1 - \nu_m^2) / E_m$, $b_m = (1 - \nu_m^2) / (h_m E_m)$,

$$\mathcal{K}q_k \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Здесь x_m и $2a_m$ – координата центра и ширина m -той накладки, E_m , ν_m , ρ_m , $d_{31,m}$ – её модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала и пьезо-керамическая константа, $E_{z,m} = V_m / h_m$ – напряжённость электрического поля, возникающая при подаче напряжения V_m на её электроды; $K(\alpha)$ – Фурье-символ элемента (1, 1) матрицы Грина упругого слоя $k(x, z)$ при $z = 0$. Выбор контура интегрирования Γ диктуется принципом предельного поглощения [1].

Для решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1) - (3) был использован метод сведения задачи к бесконечной алгебраической системе, возникающей при замене интегральных операторов суммой вычетов в вещественных и комплексных полюсах (см., например, [8, 9]), который позволил провести исследования в широком диапазоне значений параметров слоя и накладок.

В статье [7] получено следующее представление для возбуждаемых пьезоэлементами волн вне накладок:

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{\infty} t_{m,k}^{\pm} \mathbf{a}_k^{\pm}(z) e^{\pm i\zeta_k(x - x_m \mp a_m)}, \quad x \notin \Omega. \quad (4)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $t_{m,k}^{\pm} = i r_k Q_m(\mp \zeta_k) e^{\pm i\zeta_k(x_m \pm a_m)}$, $r_k = \text{res} K(\alpha)|_{\alpha=\zeta_k}$; $\mathbf{a}_k^{\pm}(z) = \mathbf{K}_1(\alpha, z) / K(\alpha)|_{\alpha=\mp \zeta_k}$; верхний знак берётся для точек правее накладок ($x > x_m + a_m$), а нижний для $x < x_m - a_m$, $\mathbf{K}_1(\alpha, z)$ – Фурье-символ первого столбца матрицы Грина для упругого слоя, ζ_k – волновые числа нормальных мод упругого слоя.

Поле смещений под m -й накладкой (в области Ω_m) может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} [p_{m,n}^+ \mathbf{b}_{m,n}^+(z) e^{iz_{m,n}(x - x_m + a_m)} + p_{m,n}^- \mathbf{b}_{m,n}^-(z) e^{-iz_{m,n}(x - x_m - a_m)}] \quad (5)$$

где $\mathbf{b}_{m,n}^{\pm}(z) = \mathbf{K}_1(\alpha, z)/K(\alpha)|_{\alpha=\mp z_{m,n}}$, $u_{m,n} = K(z_{m,n})$. Волновые числа упругого слоя с пьезоплёнкой $z_{m,n}$ (свойства и толщина которой совпадают со свойствами и толщиной m -той наклейки) – корни характеристического уравнения $(K - b_m G_m)_{\alpha=\pm z_{m,n}} = 0$; G_m – Фурье-символ фундаментального решения уравнения (2).

Для осреднённого за период колебаний $2\pi/\omega$ потока энергии E_0 , поступающей от источника (системы полосков) в волновод, имеет место следующее представление [8]:

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \int_{\Omega} v(x) q^*(x) dx = \frac{\omega}{4\pi} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} K(\alpha) Q(\alpha) Q^*(\alpha^*) d\alpha, \quad (6)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} = T_x \mathbf{u} \equiv (\sigma_x, \tau_{xz})$ – вектор напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n} = (1, 0)$; T_x – оператор напряжений для этой площадки; $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = u_x \sigma_x^* + u_z \tau_{xz}^*$; звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

С использованием формулы (4) и теории вычетов можно привести представление (6) к более удобному виду:

$$E_0 = \sum_{k=1}^{N_1} E_k^+ + \sum_{k=1}^{N_1} E_k^-, \quad E_k^{\pm} = \frac{\omega}{4r_k} \left| \sum_{m=1}^M t_{m,k}^{\pm} e^{\mp i\zeta_k(x_m \pm a_m)} \right|^2, \quad (7)$$

где N_1 – число бегущих мод, имеющих в упругом слое на данной частоте. При этом E_k^{\pm} – энергия, переносимая k -той модой упругого слоя на бесконечность вправо или влево от источников. Таким образом, для возбуждения в заданном направлении только одной n -той бегущей моды необходимо получить набор констант $t_{m,k}^{\pm}$, максимизирующее требуемое слагаемое E_n^+ (или E_n^-) и минимизирующие остальные E_k^{\pm} . В рамках рассматриваемого подхода неизвестные векторы $\mathbf{t}_k^{\pm} = (t_{1,k}^{\pm}, t_{2,k}^{\pm}, \dots, t_{M,k}^{\pm})$ определяются из линейной алгебраической системы, к которой сводится исходная краевая задача. Управляющими параметрами здесь являются сдвиги фаз φ_k электрических полей, прикладываемых к полоскам (см. (3)), и расстояния $l_{jk} = |x_j - x_k|$ между центрами полосками.

3. С помощью представления (4) несложно определить параметры, обеспечивающие сложение отдельных мод в фазе или в противофазе. Простое приближенное представление получается, например, в случае двух полосков одинаковой ширины $a_1 = a_2 = a$, работающих в низкочастотном двухмодовом диапазоне $0 < \omega < \pi$. В предположении равенства $|t_{1,k}| = |t_{2,k}|$ для резонансных и антирезонансных расстояний $l = |x_2 - x_1|$ излучения вправо от источника имеем

$$l = (2\pi n + \varphi)/\zeta_k \quad \text{и} \quad l = (2\pi n + \pi + \varphi)/\zeta_k \quad (8)$$

соответственно. В случае сигналов, излучаемых влево от источников, следует заменить знак перед φ на противоположный. Здесь φ – сдвиг фазы управляющего электрического поля второй наклейки. Построив в плоскости (φ, l) прямые вида (8), вдоль которых достигаются максимумы и минимумы функций E_1^+ и E_2^+ , и найдя соответствующие точки их пересечения, не представляет труда получить приближение для такой комбинации параметров l и φ , при которой в заданном направлении будет излучаться преимущественно одна из мод упругого слоя.

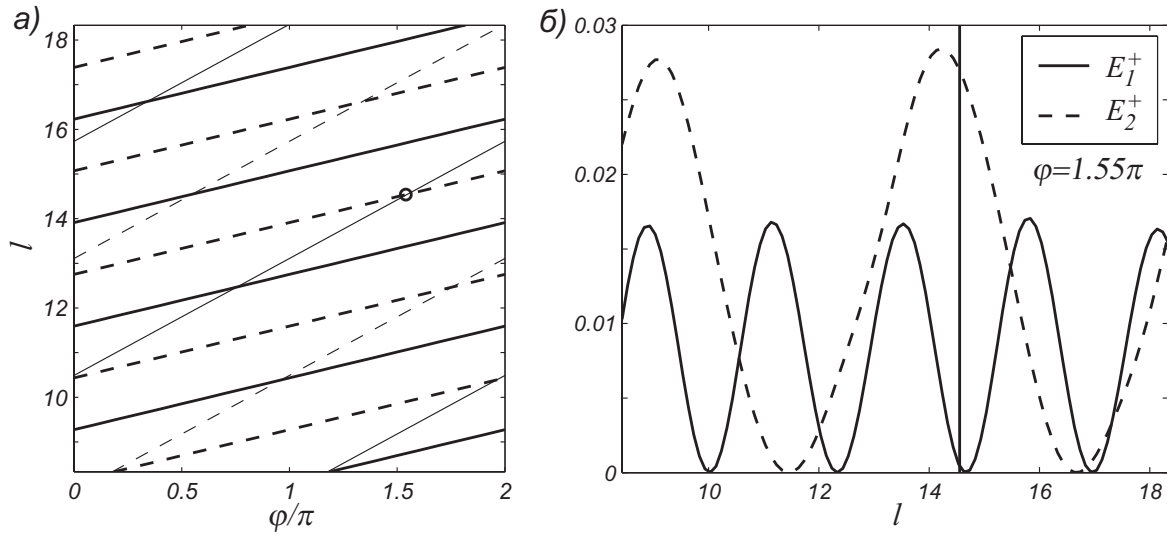


Рис. 1. Линии, вдоль которых функции E_1^+ и E_2^+ достигают максимумов и минимумов (а) и средние за период колебаний потоки энергии, уносимой бегущими модами упругого слоя на бесконечность вправо от источников, в зависимости от расстояния между краями накладок (б).

На рис. 1а для фиксированной частоты $\omega = 2$ построены графики линий, вдоль которых функции E_1^+ (тонкие линии) и E_2^+ (жирные линии) достигают максимумов (сплошная линия) и минимумов (пунктир). Результаты приводятся в безразмерном виде, в единицах, выраженных через три базовые величины: толщину слоя h (для линейных размеров), скорость S -волн v_s и плотность ρ волновода. Полоски взяты одинаковых размеров и свойств, в безразмерном виде $a_m = 4.167$, $h_m = 1/6$, $E_m = 0.866$, $\nu_m = 0.3$, $\rho_m = 0.997$, $|e_m| = 1$, $m = 1, 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$.

Например, если необходимо добиться излучения вправо от источника преимущественно первой симметричной моды s_0 , можно взять следующие значения для расстояния между накладками и сдвига фазы между их управляющими полями: $l = 14.55$, $\varphi/\pi = 1.55$ (на рис. 1а эта точка помечена кружком, а на рис. 1б – вертикальной линией). Для данного значения φ на рис. 1б построены графики средних за период колебаний потоков энергии E_1^+ и E_2^+ , уносимой соответственно антисимметричной a_0 и симметричной s_0 бегущими модами упругого слоя на бесконечность вправо от источников. Эти графики получены путём численного решения задачи (1)–(3). Видно, что они не совсем точно совпадают с экстремальными E_k^\pm , что объясняется взаимным влиянием накладок. Тем не менее, точность приближения (8) достаточно высока. Для данного l $E_1^+ \approx 0.0002$ и $E_2^+ \approx 0.0259$, то есть энергия симметричной моды на два порядка больше, чем антисимметричной.

При нахождении точных оптимальных параметров значения, определяемые формулами (8), служат хорошим начальным приближением. Отметим, что хотя формулы (8) получены из тех же соображений, что и в приближенных технических теориях [4], они применимы в значительно более широком частотном диапазоне, так как в них используются волновые числа упругого слоя, а не пластины или балки. С ростом частоты волновая картина в системе становится значительно

сложнее. В этом случае необходимо решать задачу оптимизации в пространстве фазовых переменных $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_M$ и расстояний l_1, l_2, \dots, l_{M-1} .

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-01-00520.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [2] Ворович И. И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. ДАН СССР, 1979. Том 245, № 4.
- [3] Ворович И. И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. ДАН СССР, 1979. Том 245, № 5.
- [4] Chaundry Z., Rogers C. A. The Pin-Force Model Revisited // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1994. V. 5. P. 347-354.
- [5] Seemann W. A linear ultrasonic traveling wave motor of the ring type // Smart Mater. Struct., 1996, 5, 361-368.
- [6] Glushkov E. V., Glushkova N. V., Kvasha O. V., and Seemann W. The modeling of wave excitation in layered substructures by piezoceramic actuators // II Conference on Mathematical Modelling of Wave Phenomena, Växjö University, Sweden, August 14-19, 2005.
- [7] Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Кваша О. В. Решение динамической контактной задачи для упругого слоя с пьезокерамическими поверхностными накладками. Краснодар: Кубанск. гос. ун-т, 2005. Деп. в ВИНТИ 13.07.05, № 1015-В2005.
- [8] Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих тел. М.: Наука, 1986. 343 с.
- [9] Glushkov E. V., Glushkova N. V. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102(3), PP. 1356-1360.

Glushkov E. V., Glushkova N. V., Kvasha O. V. *Directional radiation of travelling modes in an elastic layer excited by a system of piezoelectric actuators.* The dynamic plane strain contact problem for an elastic layer with surface-bonded piezoelectric actuators is considered. The problem of directional one-mode radiation at low frequencies formed by properly phased driving electric fields is analyzed.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ПОДЛОЖКА–РЕШЕТКА НАНОКРИСТАЛЛОВ

Еремеев В. А.[†], Соловьев А. Н.[‡]

[†] Южный научный центр РАН и Ростовский госуниверситет

[‡] Донской государственный технический университет
и Ростовский госуниверситет

Представлены результаты анализа распространения поверхностных волн в полуплоскости, на поверхности которой задано равномерное распределение одинаковых упругих стержней или осцилляторов. Такая система может служить моделью высокорентрированного массива нанокристаллов или нанотрубок, выращенных на соответствующей подложке. Построено дисперсионное соотношение. Определены условия гашения поверхностной волны.

Развитие нанотехнологии в большой степени зависит от получения новых материалов и исследования их свойств [1]. Перспективными материалами для нанофотоники, наномеханики являются решетки полупроводниковых нанокристаллов, полупроводниковых и углеродных нанотрубок.

В данной работе в рамках линейной теории упругости предложена модель системы микро- и нанокристаллов или нанотрубок, расположенных на подложке. Каждый нанобъект моделируется как упругий стержень или осциллятор (рис. 1). На первом этапе рассматриваются продольные колебания нанобъектов, а также распространение поверхностных волн в системе решетка–упругая полуплоскость. Учет продольно-поперечного изгиба нанобъектов предполагается исследовать в дальнейшем. Рассмотрен случай дискретной системы кристаллов, а как предел большого количества кристаллов изучается случай непрерывного распределения нанобъектов на поверхности полупространства. Задача сведена к изучению распространения поверхностных волн в полуплоскости с краевыми условиями третьего рода на свободной поверхности. Модель сплошной среды с равномерно распределенными по объему осцилляторами была предложена в [2] и нашла применения, например, в геофизике [3]. Распространение поверхностных волн применительно к задачам акустики рассматривалось в обзоре [4].

1. Поверхностная волна в полуплоскости с непрерывно распределенными стержнями.

Пусть на поверхности полуплоскости $z = 0$ в точках $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) закреплены упругие стержни.

Уравнение продольных колебаний и краевое условие на свободном конце k -го стержня имеет вид

$$\rho_k F_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} = E_k F_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial v_k}{\partial z}(l_k, t) = 0. \quad (1)$$

В (1) l_k – длина, F_k – площадь поперечного сечения, E_k и ρ_k – модуль Юнга и плотность k -го стержня.

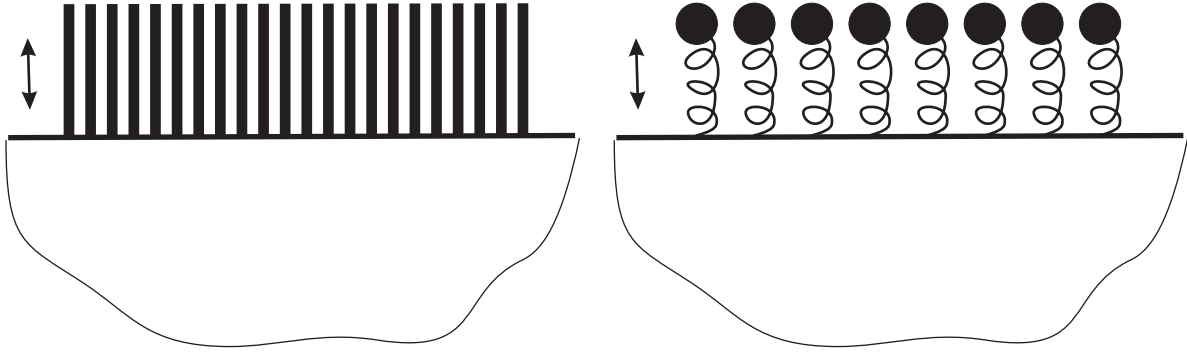


Рис. 1. Упругое полупространство с распределенными стержнями или осцилляторами

Гармонические колебания стержня ($v_k = V_k e^{i\omega t}$), удовлетворяющее (1), даются формулами

$$v_k(z, t) = V_k^0 \left(\cos \omega \sqrt{\frac{\rho_k}{E_k}} z + \operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{\rho_k}{E_k}} l_k \sin \omega \sqrt{\frac{\rho_k}{E_k}} z \right) e^{i\omega t}, \quad (2)$$

где V_k^0 – постоянная интегрирования, ω – частота.

Уравнения движения в полуплоскости имеют вид

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, z, t), \quad (3)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – вектор перемещений, λ и μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность материала полуплоскости.

Условия сопряжения на границе полуплоскости, вместе с условиями затухания на глубине замыкающие краевую задачу (1), (3) могут быть представлены следующим образом

$$\sigma_{12}(x, 0, t) = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{22}(x, 0, t) = 0, \quad x \neq x_k, \quad (k = 1..m), \quad (5)$$

$$\sigma_{22}(x, 0, t) = E_k \frac{\partial v_k}{\partial z}(0, t), \quad u_2(x_k, 0, t) = v_k(0, t), \quad x = x_k. \quad (6)$$

Краевое условие (6) для нормального напряжения σ_{22} с учетом решения для стержней (2) можно привести к виду

$$\sigma_{22}(x, 0, t) = C(\omega) u_2, \quad x = x_k, \quad (7)$$

$$C(\omega) \equiv E_k \omega \sqrt{\frac{\rho_k}{E_k}} \operatorname{tg} \left[\omega \sqrt{\frac{\rho_k}{E_k}} l_k \right].$$

В случае массивов таких нанообъектов как нанокристаллы или нанотрубки на подложке их плотность может быть весьма велика при условии практически одинаковых размеров и механических свойств. Например, плотность нанокристаллов из оксида цинка на подложке сапфира может достигать 10^8 cm^{-1} . Это позволяет предложить модель на основе непрерывного распределения нанообъектов. Далее

будем предполагать, что стержни прикреплены в любой точке поверхности $z = 0$. Это означает, что условие (7) будет выполнено в каждой точке границы $z = 0$. Это соотношение аналогично краевому условию для винклеровского основания, но в данном случае упругий коэффициент C существенно зависит от частоты волны. В частности, он обращается в бесконечность на собственных частотах консольно закрепленного стержня.

Исследование распространение поверхностных волн, описываемых краевой задачей (3), (4), (7) может быть проведено стандартным образом. Будем искать решение (3) в виде

$$u_1 = \phi_{,x} + \psi_{,z}, \quad u_2 = \phi_{,z} - \psi_{,x}. \quad (8)$$

С учетом представления (8) уравнения движения (3) сводятся к соотношениям

$$\begin{aligned} c_1^2 \Delta \phi + \omega^2 \phi, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \phi = \Phi_0 e^{\nu_1 z} e^{i(\omega t - kx)}, \\ c_2^2 \Delta \psi + \omega^2 \psi, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \psi = \Psi_0 e^{\nu_2 z} e^{i(\omega t - kx)}, \end{aligned} \quad (9)$$

откуда может быть получено соотношение, обобщающее уравнение Рэлея на случай краевого условия (7):

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)^2 - 4k^2 \nu_1 \nu_2 + \nu_1 \frac{C(\omega)}{\mu} \frac{\omega^2}{c_2^2} = 0, \quad (10)$$

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}}, \quad \nu_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}.$$

В (10) подчеркнутая часть совпадает со стандартным уравнением Рэлея.

Дисперсионное соотношение, т.е. зависимость частоты ω от волнового числа k в общем случае может описана параметрически уравнениями

$$\omega = \Omega(\eta), \quad k = \frac{\Omega(\eta)}{c_2 \eta^{1/2}}, \quad (11)$$

где

$$\Omega(\eta) \equiv \left\{ \arctan \left[-\frac{(2 - \eta)^2 - 4(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \eta)^{1/2} (1 - \eta)^{1/2}}{C_0 \eta^{3/2}} \right] + \pi n \right\} \frac{1}{\gamma}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_0 = \frac{E_k}{\mu} \sqrt{\frac{\rho_k}{E_k}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\rho_k}{E_k}} l_k.$$

Кривые, соответствующие зависимости (11), представлены на левой части рис. 2. Здесь горизонтальные пунктирные прямые отмечают значения частоты, соответствующие собственным частотам консольно закрепленного стержня ω_n^* , обращающим коэффициент связи $C(\omega)$ в бесконечность. Наклонные линии соответствуют дисперсионным соотношениям для волны Рэлея в полуплоскости, свободной

от стержней ($\omega = c_R k$), и для сдвиговой волны ($\omega = c_2 k$). Здесь c_R и c_2 – скорости волны Рэля и поперечной волны сдвига в полуплоскости. Из (11) и рис. 2 видно, что при стремлении снизу частоты волны к собственной частоте стержня дисперсионная кривая имеет горизонтальную асимптоту $\omega = \omega_n^*$. Это означает, что при частотах, близких к собственным частотам стержней не происходит перенос энергии поверхностной волной, другими словами, происходит гашение волны за счет ее поглощения решеткой нанобъектов. Такое поведение характерно для поверхностной волны типа Рэля. Можно показать, что если рассмотреть распространение объемных волн в полуплоскости, то влияние распределения нанобъектов при физически осмысленных параметрах системы незначительно. Отметим, что эффект затухания волн в среде с объемным распределением осцилляторов на частотах, близких к собственной частоте осциллятора, был обнаружен в [2], где, в частности, было предложено использовать его с целью виброзащиты.

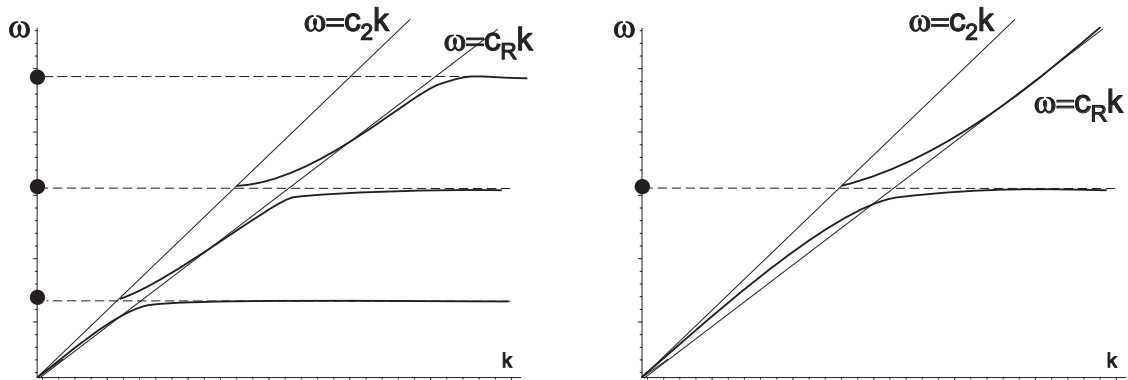


Рис. 2. Дисперсионное соотношение в случае полуплоскости с распределенными стержнями (слева) или осцилляторами (справа)

2. Поверхностная волна в полуплоскости с непрерывно распределенными осцилляторами.

Опуская несложные выкладки, аналогично предыдущему случаю может быть исследовано распространение волны Рэля в полуплоскости с непрерывно распределенными осцилляторами. В этом случае происходит гашение волны на собственной частоте осциллятора. График дисперсионной кривой представлен на рис. 2 справа. Отличие от случая распределенных стержней состоит в том, что здесь дисперсионные кривые имеют только одну горизонтальную асимптоту.

3. Заключение. Полученные результаты представляют интерес в частности для разработки методов экспериментального определения собственных частот нанобъектов по затуханию поверхностной волны на частотах, близких к собственным частотам нанобъекта в системе решетка нанобъектов–подложка.

Отметим, что рассматриваемых наноструктур может оказаться существенным эффекты периодического или почти периодического распределения по поверхности, а также их взаимодействие за счет пьезоэффекта или полупроводниковых свойств, аналогично макроустройствам на поверхностных акустических волнах [4]. Как периодичность распределения, так и влияние электрических полей, не учитывались в данной работе и будут целью дальнейших исследований.

Авторы благодарны академику Н.Ф. Морозову и участникам семинара в Институте проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург) за плодотворное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Springer Handbook of Nanotechnology. *B. Bhushan* (Ed.) Springer. 2004. XXXVI, 1222 p.
- [2] *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 326 с.
- [3] *Николаевский В.Н.* К изучению волн в сейсмоактивных средах// В кн.: Проблемы нелинейной сейсмологии. М.: Наука, 1987. С. 190–202.
- [4] *Гуляев Ю.В., Плесский В.П.* Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах// УФН. 1989. Т. 157. Вып. 1. С. 85–127.

Eremeyev V. A., Soloviev A. N. *On the surface waves propagation in a system of lattice of nanocrystals – substrate.* For the elastic halfspace with uniformly distributed elastic rods or oscillators, surface waves of Rayleigh type are investigated. This problem is useful to understanding of behavior of such nanostructures as a system of nanocrystals on c-plane sapphire or array of multi- or single-walled carbon nanotubes grown on metal substrate. The dispersion relation is obtained and dispersion curves are presented. The results may be used to experimental determination of natural frequencies of nanobject.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

Еремеев В. А.^{† ‡}, Сухов Д. А.[‡]

[†] Южный научный центр РАН

[‡] Ростовский госуниверситет

Исследована задача о распространении поверхностных волн в плоском слое упругой микрополярной жидкости.

Во многих задачах гидродинамики, возникающих в современной технике, например, изучение течения жидкости в тонких капиллярах и зазорах, распространение волн высокой частоты, течение суспензий, стандартной модели вязкой ньютоновской жидкости оказывается недостаточно. Это вызвало развитие математических моделей микроструктурных жидкостей, в частности, модели микрополярной жидкости [1]. Модели жидких сред с микровращениями и моментными напряжениями, получивших название микрополярных жидкостей, ведут свое начало от работ [2, 3]. Гидродинамика микрополярных жидкостей базируется на определяющих соотношениях континуума Коссера с памятью, т.е. неупругой среды с моментными напряжениями, каждая частица которой имеет степени свободы абсолютно твердого тела. Механика упругих сред с моментными напряжениями освещена в [4, 5]. Широкий спектр исследований волновых процессов в микрополярных средах проведен в [6]. В работах [7, 8] предложена общая модель вязкоупругой жидкости. В рамках этой модели в [9]– [11] было проведено исследование конвективных неустойчивостей.

1. Основные соотношения микрополярной жидкости. Уравнения движения среды Коссера, выражающие баланс импульса и момента импульса для произвольной части тела, имеют вид [4]– [8]

$$\text{Div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \text{Div } \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{m} = \gamma \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{T} и \mathbf{M} – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Коши, Div – оператор дивергенции в эйлеровых координатах, ρ – плотность среды, \mathbf{f} и \mathbf{m} – векторы массовой силы и массового момента, γ – скалярная мера вращательной инерции частиц континуума, \mathbf{v} – вектор скорости, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения триэдра \mathbf{D}_k , определяющего ориентацию частиц жидкости в актуальной конфигурации ($d\mathbf{D}_k/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{D}_k$), d/dt – материальная производная по времени, символ \mathbf{T}_\times означает векторный инвариант тензора второго ранга \mathbf{T} .

Уравнения состояния упругой микрополярной жидкости имеет вид [8]

$$\mathbf{M} = \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T, \quad p = \rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad W = W(\rho, \mathbf{B}), \quad (2)$$

где W – массовая плотность свободной энергии, \mathbf{I} – единичный тензор, \mathbf{B} – тензор кривизны микроструктуры в текущей конфигурации $\mathbf{B} = -\frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{D}_k) \times \mathbf{D}_k$.

Полная система уравнений движения упругой микрополярной жидкости в эйлеровых координатах содержит в качестве неизвестных функций плотность ρ , поле скоростей \mathbf{v} , поле угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$, тензорное поле кривизны \mathbf{B} и согласно (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} -\text{Grad } p - \text{Div} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T) + \rho \mathbf{f} &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \mathbf{v} \right), \\ \text{Div } \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T)_{\times} + \rho \mathbf{m} &= \gamma \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\omega} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div} (\rho \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь символ $\frac{\partial}{\partial t}$ означает локальную производную по времени, а величины p и \mathbf{M} предполагаются выраженными через ρ и \mathbf{B} при помощи уравнений состояния (2). Вращательная инерция γ , вообще говоря, может быть заданной функцией плотности ρ . В случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, давление p не выражается через ρ и \mathbf{B} , а является неизвестной функцией координат и времени.

Простейшим примером уравнения состояния в случае несжимаемой жидкости служит квадратичная форма

$$\rho W = \frac{1}{2} [\lambda \text{tr}^2 \mathbf{B} + \mu \text{tr} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) + \nu \text{tr} \mathbf{B}^2], \quad (4)$$

где λ, μ, ν – постоянные, удовлетворяющие неравенствам $3\lambda + \mu + \nu > 0, \mu + \nu > 0, \mu > 0$, следующим из положительной определенности формы (4). Согласно (2) выражению (4) соответствует линейная зависимость тензора моментных напряжений от кривизны структуры $\mathbf{M} = \lambda \mathbf{I} \text{tr} \mathbf{B} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{B}^T$.

Система уравнений движения (1) или (3) должна быть дополнена соответствующими краевыми условиями, которые мы из-за сокращения объема здесь выписывать не будем.

2. Поверхностная волна в полуплоскости со свободной границей. Рассмотрим движение микрополярной жидкости в плоском слое со свободной границей (рис. 1). В случае плоской задачи ориентация частиц микрополярной жидкости определяется одним параметром – углом поворота $\alpha(X, Y, t)$ триэдра \mathbf{D}_k вокруг некоторой оси, для определенности совпадающей с направлением $\mathbf{D}_3 \equiv \mathbf{i}_3$, поля скорости даются формулами $\mathbf{v} \equiv v_1(X, Y, t)\mathbf{i}_1 + v_2(X, Y, t)\mathbf{i}_2$, $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega(X, Y, t)\mathbf{i}_3$, тензор кривизны \mathbf{B} равен $(\text{Grad } \alpha)\mathbf{i}_3$ [8] ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – координатные орты). С учетом сделанных предположений и соотношений (4) уравнения (3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial X} - \mu \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X} \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} \right) &= \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } v_1 \right), \\ -\frac{\partial p}{\partial Y} - \mu \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial X} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} \right) - \rho g &= \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } v_2 \right), \\ \mu \Delta \alpha = \gamma \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{Grad } \omega \right), \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти уравнения являются частным случаем уравнений, полученных в [9, 10].

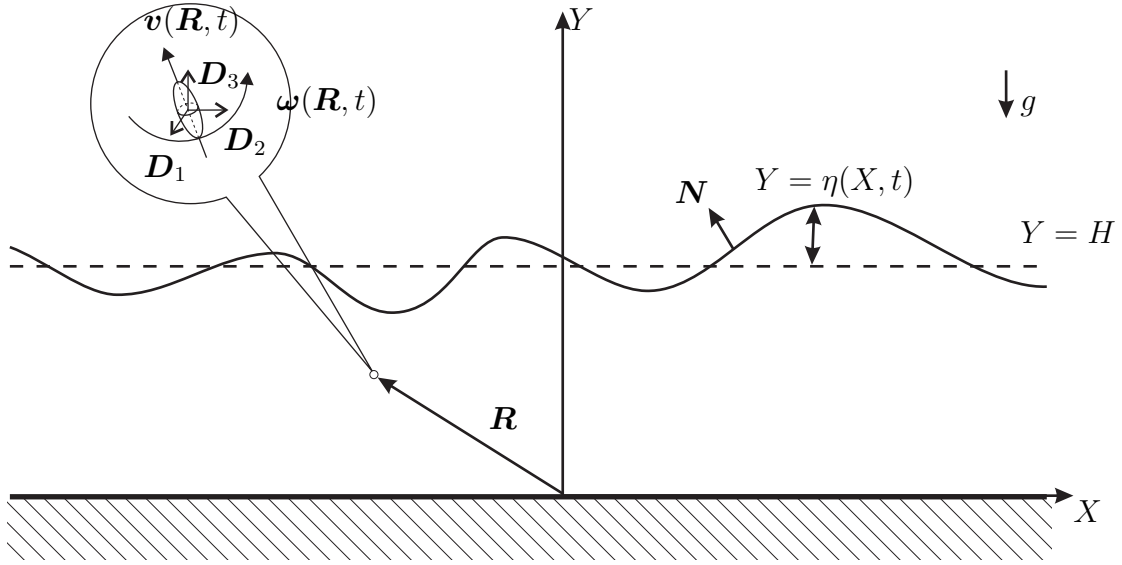


Рис. 1. Слой микрополярированной жидкости со свободной границей.

На нижней границе слоя ($Y = 0$) будем считать выполненными соотношения

$$v_2 = 0, \quad \omega = 0 \quad (\alpha = \text{const}), \quad (6)$$

а на свободной границе ($Y = \eta(X, t)$) потребуем обращения в нуль векторов напряжений и моментов: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = 0$. С учетом формул [12] для вектора нормали $\mathbf{N} = \frac{1}{|\text{Grad}(Y - \eta(X, t))|} (\mathbf{i}_2 - \text{Grad} \eta)$ к свободной поверхности и уравнений состояния (2), (4) получим динамические условия на свободной границе

$$p = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Y} - \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial \alpha}{\partial X} = 0. \quad (7)$$

На свободной границе возможно также задание ориентации частиц жидкости (т.е. задание угла поворота α). Это соотношение аналогично условию сильной ориентации в гидромеханике жидких кристаллов [13]. В этом случае динамические условия принимают вид

$$p + \frac{\mu}{|\text{Grad}(Y - \eta(X, t))|} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} - \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial \alpha}{\partial X} \right)^2 = 0, \quad \alpha = \alpha_H, \quad (8)$$

где α_H известна.

Кинематическое условие, необходимое для определения свободной поверхности (функции $\eta(X, t)$) имеет стандартный вид [12]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \eta}{\partial X} = v_2. \quad (9)$$

Рассмотрим равновесные решения системы (5) при учете краевых условий (6), (9), (7) или (8). Нетрудно убедиться, что при выполнении краевых условий (7)

существует только постоянное решение: $\alpha = \text{const}$, в то время как выполнение (8) приводит к решению для α , зависящему от координат: $\alpha = \alpha_0 + AY$, где $A = (\alpha_H - \alpha_0)/H$, α_0 – значение α при $Y = 0$.

Линеаризованная в окрестности равновесного решения краевая задача (5)–(9) описывает распространение волн бесконечно малой амплитуды в слое упругой микрополярной жидкости и дается формулами

$$-\frac{\partial p}{\partial X} - \mu A \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} = \rho \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial Y} - \mu A \left(2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} \right) = \rho \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\mu \Delta \alpha = \gamma \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \gamma A \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{\partial v_2}{\partial Y} = 0,$$

$$v_2 = 0, \quad \alpha = 0 \quad \text{при } Y = 0,$$

$$p - \rho g \eta = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = 0 \quad \text{или} \quad p - \rho g \eta + 2\mu A \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = 0, \quad \alpha + A \eta = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_2 \quad \text{при } Y = H.$$

Здесь для бесконечно малых возмущений полей линейной и угловой скорости, давления и угла поворота сохранены прежние обозначения. Первая пара краевых условий в (11) соответствует граничным уравнениям (7), для которых начальное решение постоянно ($A = 0$). Вторая пара уравнений в (11) представляет собой линеаризацию (8), где $A \neq 0$.

При $A = 0$ система уравнений (10), (11) распадается на две независимые краевые задачи для p , v_1 , v_2 и α соответственно. Первая из них описывает волны на поверхности несжимаемой жидкости [12], а распространение волны микровращения описывается волновым уравнением. При этом наличие микроструктуры жидкости не оказывает воздействия на поверхностные волны.

Случай $A \neq 0$ оказывается более сложным, здесь поля p , v_1 , v_2 и α определяются совместно. Следуя [12] введем потенциал скорости $\mathbf{v} = \text{Grad } \varphi$. Решение (10), (11) будем искать в виде

$$p = P(Y)e^{i(kX - \Omega t)}, \quad \varphi = \Phi(Y)e^{i(kX - \Omega t)}, \quad \alpha = \Lambda(Y)e^{i(kX - \Omega t)}, \quad \eta = Ne^{i(kX - \Omega t)},$$

где k – волновое число, Ω – частота. Для неизвестных функций $P(Y)$, $\Phi(Y)$, $\Lambda(Y)$ из (10) следует система ОДУ

$$-ikP' - \mu A ik \Lambda' = k \Omega \rho \Phi, \quad (12)$$

$$-P' - \mu A (2\Lambda' - k^2 \Lambda) = -i \Omega \rho \Phi',$$

$$\mu (\Lambda'' - k^2 \Lambda) = -\Omega^2 \gamma \Lambda - i \gamma A \Omega \Phi'.$$

Здесь штрихом обозначена производная по Y .

Краевые условия на дне (при $Y = 0$) сводятся к соотношениям

$$\varphi'(0) = 0, \quad \Lambda(0) = 0, \quad (13)$$

а на свободной поверхности (при $Y = H$) к уравнениям

$$P - \rho g N + 2\mu A \Lambda' = 0, \quad \Lambda + AN = 0, \quad -i\Omega N = \Phi'. \quad (14)$$

Решение (12)–(14) дается формулами

$$\Lambda = \Lambda_0 \operatorname{sh} k Y, \quad \Phi = \frac{i\Omega}{Ak} \Lambda_0 \operatorname{ch} k Y, \quad P = - \left(\mu A k + \frac{\rho \Omega^2}{Ak} \right) \Lambda_0 \operatorname{ch} k Y,$$

где Λ_0 – произвольная постоянная. При этом должно быть выполнено дисперсионное соотношение, связывающее частоту Ω с волновым числом k :

$$\Omega^2 = gk \operatorname{th} k H + \frac{\mu A^2}{\rho} k^2. \quad (15)$$

Сравнивая дисперсионное уравнение (15) с аналогичным уравнением для случая обычной жидкости [12], можно сказать, что влияние сильной ориентации частиц микрополярной жидкости на свободной поверхности эквивалентно действию поверхностного натяжения, равного $\frac{\mu A}{k \operatorname{th} k H}$ и зависящего от волнового числа, т.е. более сложной зависимости поверхностной энергии от микродеформации жидкости в окрестности границы раздела. Дисперсионные кривые и графики отношения групповой скорости C к фазовой c представлены на рис. 2 для разных значений параметра $\vartheta = \frac{\mu A^2}{\rho g H}$. Кривым 1–4 соответствуют значения ϑ , равные 0, 0.01, 0.1 и 1. Значение $\vartheta = 0$ соответствует случаю невязкой несжимаемой жидкости [12]. Из рис. 2 видно, что влияние микрополярных свойств наиболее сильно проявляется для капиллярных волн, длина которых мала ($kH \rightarrow \infty$).

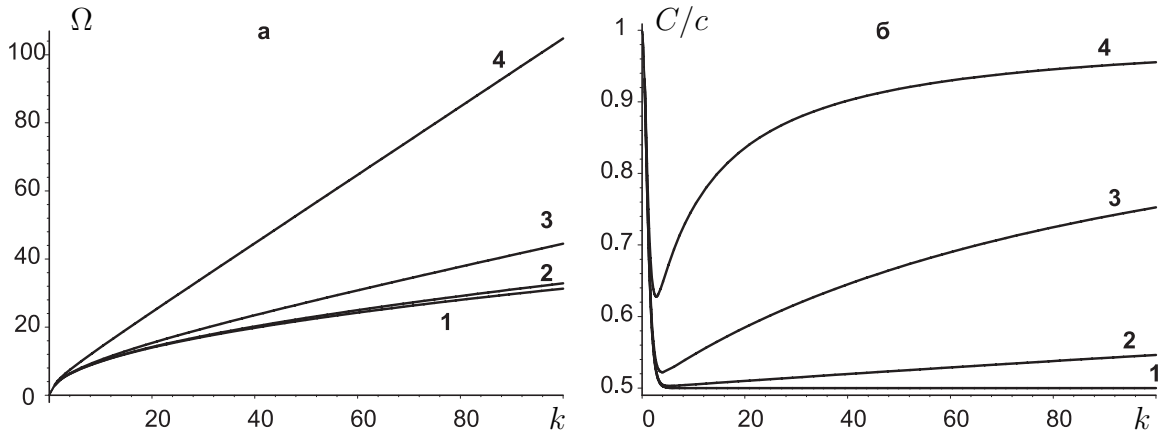


Рис. 2. Дисперсионные кривые (а) и отношение групповой скорости к фазовой (б) для разных значений параметра ϑ .

Заключение. Полученные результаты представляют интерес в частности для разработки ультразвуковых методов экспериментального определения свойств жидкостей и растворов аналогичных описанным в [14].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Мизун Н.П., Прохоренко П.П.* Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск: Наука и техника, 1984. 264 с.
- [2] *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В.* Асимметрическая гидромеханика // ПММ. 1965. Т.29. № 2. С. 297–308.
- [3] *Eringen A.C.* Theory of micropolar fluids// J. Math. Mech. 1966. Vol. 16. № 1. P. 1–18.
- [4] *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New-York, Toronto et al: Pergamon-Press. 1986. 383 pp.
- [5] *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1999. 325 pp.
- [6] *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: МГУ, 1999. 328 с.
- [7] *Зубов Л.М., Еремеев В.А.* Уравнения вязкоупругой микрополярной жидкости// Докл. АН (Россия). 1996. Т. 351. № 4. С. 472–475.
- [8] *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 801–815.
- [9] *Еремеев В.А., Сухов Д.А.* Конвективная неустойчивость плоского слоя вязкоупругой микрополярной жидкости со свободными границами//Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. № 4. С. 24–27.
- [10] *Еремеев В.А., Сухов Д.А.* Конвективная неустойчивость плоского слоя вязкоупругой микрополярной жидкости// Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. С. 101–109.
- [11] *Eremeyev V.A., Sukhov D.A.* Convective instabilities in thermoviscoelastic micropolar fluids// Matemáticas: Enseñanza Universitaria. 2005. Vol. XIII. No 1. P. 31–42.
- [12] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
- [13] *Жен де П.Ж.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
- [14] Физическая акустика. Т. II. Ч. А. Свойства газов, жидкостей и растворов. Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1968. 488 с.

Eremeyev V. A., Sukhov D. A. *On the surface waves propagation in a elastic micropolar liquid.* The micropolar fluid is a fluid each particle of which has a six degrees of freedoms of rigid body. This model possesses a couple stresses and rotational interaction of particles. Like a model of liquid crystals of nematic or smectic type, the constitutive equations of viscoelastic fluids have property of orientation elasticity. The equations of motion of viscoelastic micropolar fluid of differential type are considered. The linearized initial-value boundary problem is deduced and its solutions are obtained. The dispersion curves are presented.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООВОГО НАГРУЖЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ КОЛЬЦЕВЫХ ТРЕЩИН В СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРАХ

Жорник В. А., Рыбинская А. А., Савочка П. А.

Таганрогский государственный педагогический институт

Решается модельная нестационарная задача термоупругости для сплошного неограниченного цилиндра, заключенного в тонкую оболочку, с соосной кольцевой трещиной и свободными от нагрузки торцами. Цилиндр постоянной начальной температуры охлаждается по всей поверхности путем теплообмена со средой постоянной температуры. Рассматриваются предельные случаи “мягкой” и “жесткой” оболочек. В первом случае радиальные напряжения на контакте полагаются равными нулю; во втором – перемещения. Получено аналитическое выражение для коэффициента интенсивности напряжений (КИН); построена серия графиков.

Исследуется развитие кольцевой трещины в сплошном цилиндре неограниченной длины (длина значительно больше радиуса) радиуса r_c . Ненагруженная соосная трещина ($r_d < r < r_c$) расположена в середине цилиндра и выходит на его окруженную тонкой оболочкой поверхность со скользящей заделкой. Полагаем начальную температуру цилиндра T_0 постоянной. При условии охлаждения средой постоянной температуры вблизи поверхности цилиндра возникают растягивающие термоупругие напряжения, которые могут способствовать продвижению трещины. В силу заданного расположения трещины, она не оказывает влияния на распространение радиальных потоков тепла. В связи с этим решение поставленной задачи термоупругости можно представить в виде суммы двух решений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^T + \sigma_{ij}^P \quad (1)$$

$$u_i = u_i^T + u_i^P \quad (2)$$

Система координат (r, φ, z) цилиндрическая с началом в центре кольцевой трещины, время t является параметром.

Первое решение (σ_{ij}^T, u_i^T) , рассматриваемое в предположении отсутствия трещины, удовлетворяет уравнениям термоупругости для цилиндра, находящегося в обобщенном плоскодеформированном состоянии, содержит лишь главные напряжения, зависящие от радиуса и времени. Это решение, полученное в [1], удовлетворяет всем граничным условиям, за исключением граничного условия на берегах трещины, нагруженных нормальной нагрузкой σ_{zz}^T .

Обратим внимание на то, что в плоскости трещины $z = 0$ осевое перемещение равно нулю.

В сумме с первым второе решение изотермической теории упругости (σ_{ij}^P, u_i^P) удовлетворяет всем граничным условиям, в том числе на берегах трещины.

В связи с тем, что задача симметрична относительно плоскости расположения трещины, второе решение рассматривается для полубесконечного цилиндра ($z > 0$) со смешанными граничными условиями на торце ($z=0$). На нем же задается,

исходя из симметрии задачи, сквозное граничное условие для касательного напряжения σ_{rz}^P . Условие скользящей заделки цилиндрической поверхности приводит к равенству нулю радиальной составляющей вектора перемещения и касательной компоненты тензора напряжения.

Вышесказанное приводит к следующей математической постановке задачи:

$$\sigma_{zz}^P = -2\mu F(r) = -\sigma_{zz}^P, r_d < r < r_c, z = 0; \quad (3)$$

$$u_z^P = 0, 0 < r < r_d, z = 0; \quad (4)$$

$$\sigma_{rz}^P = 0, 0 < r < r_c, z = 0; \quad (5)$$

$$\sigma_{rz}^P = 0, r = r_c, 0 < z < \infty; \quad (6)$$

$$u_r^P = 0, r = r_c, 0 < z < \infty. \quad (7)$$

Граничное условие (5) дает возможность воспользоваться решением Буссинеска – Папковича – Нейбера, в котором компоненты напряжений и перемещений выражаются через одну гармоническую осесимметричную функцию χ [2].

С учетом условий при $z \rightarrow \infty$ функцию χ выбирают в виде

$$\chi(r, z) = r_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n J_0 \left(\lambda_n \frac{r}{r_c} \right) e^{-\lambda_n \frac{z}{r_c}}, \quad (8)$$

где λ_n – корни уравнения

$$J_1(\lambda) = 0. \quad (9)$$

Благодаря такому выбору функции $\chi(r, z)$ граничные условия (5), (6) и (7) удовлетворяются тождественно.

Для определения неизвестных B_n в функции $\chi(r, z)$ используется смешанное граничное условие (3) и (4), которое приводит к парным рядовым уравнениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n J_0 \left(\lambda_n \frac{r}{r_c} \right) = 0, 0 \leq r < r_d; \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} B_n J_0 \left(\lambda_n \frac{r}{r_c} \right) = F(r), r_d < r \leq r_c. \quad (11)$$

относительно неизвестной B_n . С использованием разрывного интеграла Вебера – Шафхейтлина уравнения (10) и (11) сводятся к интегральному уравнению Абеля, затем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $g(\tau)$

$$g(\tau) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^1 \xi F(\xi r_c) \arcsin \frac{\alpha}{\xi} d\xi - \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^1 \xi F(\xi r_c) d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\xi F(\xi r_c)}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}} d\xi +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_1(\zeta)}{\zeta I_1(\zeta)} \left[\frac{sh \zeta \alpha}{\alpha} - \zeta ch \zeta \tau \right] d\zeta \int_{\alpha}^1 \xi F(\xi r_c) I_0(\zeta \xi) d\xi +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty g(V) dV \int_0^\infty \frac{K_1(\zeta)}{\zeta I_1(\zeta)} \left[\frac{sh \zeta \alpha}{\alpha} - \zeta ch \zeta \tau \right] ch(\zeta V) d\zeta, 0 < \tau < \alpha. \quad (12)$$

После решения уравнения (12) относительно $g(\tau)$ найдем напряженное состояние цилиндра. В частности, на продолжении толщины $(0, r_d)$ осевое напряжение σ_{zz}^P имеет вид:

$$\sigma_{zz}^P(r, 0) = 2\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^{r_d} \frac{g_0(v) dv}{\sqrt{v^2 - r^2}} \quad (13)$$

Согласно [2] коэффициент интенсивности напряжений (КИН), управляющий ростом трещин, равен

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} = N = \lim_{r \rightarrow r_d} (r_d - r) \frac{1}{2} \sigma_{zz}^P(r, 0) = -2\mu \frac{r_c g(r_d)}{\sqrt{2r_d}} \quad (14)$$

Далее рассматриваем решение интегрального уравнения (12) для трех различных нагрузок, нормально приложенных к берегам трещины. В первом эта нагрузка равна $F(r) = p_0$, во втором $-F(r) = p_2 r^2$, в третьем $-F(r) = p_4 r^4$.

Представив ядро интегрального уравнения (12) в виде степенного ряда

$$\int_0^\infty \frac{K_1(\zeta)}{\zeta I_1(\zeta)} ch(\zeta V) \left[\frac{sh \zeta \alpha}{\alpha} - \zeta ch \zeta \tau \right] d\zeta = \sum_{m=0}^\infty b_{2m}(V) \tau^{2m}$$

и используя численные значения интегралов

$$\int_0^\infty \frac{K_1(\zeta)}{I_1(\zeta)} \zeta^{2n} d\zeta, n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

решим (12) методом последовательных приближений [3] в виде полиномов от τ и α с точностью до 22 степени функций η_0, η_2, η_4 .

Решение имеет вид:

$$g(\tau) |_{\tau=\alpha} = -\frac{p_0}{2\alpha} \frac{1}{\eta_0} - \frac{p_2 r_c^2}{2\alpha} \frac{1}{\eta_2} - \frac{p_4 r_c^4}{2\alpha} \frac{1}{\eta_4}. \quad (16)$$

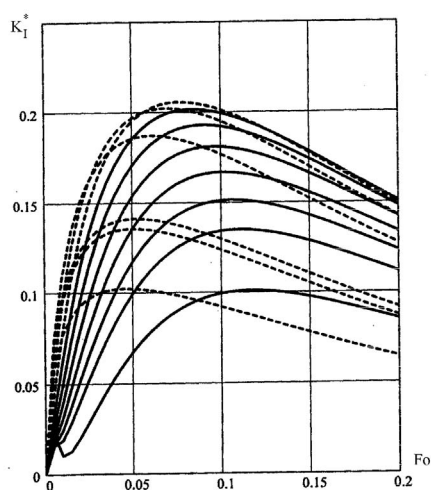
Заметим, что для мелких трещин полиномы дают большую погрешность. При этом в предельном случае при $\alpha \rightarrow 1$ η_0, η_2, η_4 должны давать значения для полупространства с скользящей заделкой поверхностной трещиной длины $r_c \rightarrow r_d$. Для этого случая функции η_0, η_2, η_4 записываются в виде:

$$\eta_0(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^{3/2} \sqrt{1-\alpha}}, \quad (17)$$

$$\eta_2(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^{3/2} \sqrt{1-\alpha} \left[1 - \frac{4}{\pi} (1-\alpha) + \frac{1}{2} (1-\alpha)^2 \right]}, \quad (18)$$

$$\eta_4(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^{3/2} \sqrt{1-\alpha} \left[1 - \frac{8}{\pi} (1-\alpha) + 3(1-\alpha)^2 - \frac{16}{3\pi} (1-\alpha)^3 + \frac{3}{8} (1-\alpha)^4 \right]}. \quad (19)$$

На рисунке изображена зависимость КИН $K_I^* = \frac{2K_I(1-\nu)}{\sqrt{\pi\alpha T E T_0 \sqrt{r_c}}}$ от $Fo = \frac{at}{r_c^2}$ (a - температуропроводность цилиндра)



ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жорник А.И. Термоупругие трещины, присходящие в твердых телах с трещиноподобными дефектами. Таганрог: ТГПИ, 2002. 259 с.
- [2] Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 343 с.
- [3] Жорник А.И., Карташов Э.М. О характере температурных напряжений в бесконечном цилиндре с источниками тепла при наличии внутренней трещины // Прикладная механика, 1989. т.25, № 4. С. 9–16

Zhornik V.A., Rybinskaya A.A., Shavochka P.A. *Thermal Loading Influence on Ring-shaped Crack Propagation in Solid Cylinders.* A model nonsteady problem of thermoelasticity for an infinite solid cylinder with free ends is examined. The unloaded cylinder has a coaxial ring-shaped crack. The cylinder, with a constant initial temperature, is enclosed in a thin powdery shell which is also free of external loads and is cooled over its entire surface. Here, we examine two limiting cases. In the first one we assume that the shell is limitingly “flexible”, i.e., that its elastic modulus approaches to zero. In the second - the shell is limitingly “rigid”, i.e., that its elastic modulus approaches infinity. The expressions obtained are used to calculate the stress intensity factor (SIF) as a crack propagation criterion. Series of graphs are drawn.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШЕСТИМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ

Жуков М. Ю., Петровская Н. В.

Ростовский государственный университет

Рассматривается задача о тепловой конвекции жидкого гелия в подогреваемом снизу цилиндре с горизонтальной осью. Конвективные движения сверхтекучей жидкости описываются математической моделью, альтернативной известной двухжидкостной модели [1]). На ее основе получена шестимерная модель, при выводе которой поля скорости и температуры предполагаются близкими к функциям, линейным по пространственным переменным. Если коэффициенты вязкости и температуропроводности жидкости равны нулю, то решения конечномерной модели определяют точные решения исходной задачи. В работе проведен асимптотический и численный анализ периодических решений шестимерной модельной системы в предельном случае исчезающей диссипации.

1. Основные уравнения и конечномерная модель. В работе [2] предложена математическая модель сверхтекучей жидкости, альтернативная общепринятой двухжидкостной модели (см., например, [1, 3]). Однако [2] не содержит конкретных уравнений, пригодных для описания конвективных движений сверхтекучей жидкости. На основе альтернативной модели [2] в работе [4] выведена замкнутая система уравнений, описывающая тепловую конвекцию в сверхтекучей жидкости в приближении Обербека–Буссинеска. Она может быть записана в следующей безразмерной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} - \left(\mathbf{s} \operatorname{div} \mathbf{s} - \mathbf{s} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \nabla s^2 \right) + \mathbf{k} \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{s} - \alpha_0 \mathbf{s} + \beta \theta \nabla \theta - \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \operatorname{div} (\delta \nabla \theta - k_0 \theta \mathbf{s}) \quad (4)$$

где \mathbf{v} — скорость жидкости, θ — температура, \mathbf{s} — поле внутренних возбуждений [2], p — конвективное давление, μ и δ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, α_0 , β и k_0 — числовые коэффициенты, характеризующие перекрестные эффекты.

Для вывода конечномерной модели используем идеи работ [5, 6]. Пусть жидкость заполняет цилиндр с границей $\Gamma = \{x : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, ось цилиндра совпадает с координатной осью Ox_2 . Движение жидкости предполагается двумерным: $v_2 = 0$, \mathbf{v} , θ и \mathbf{s} не зависят от x_2 .

При $\mu = 0$, $\delta = 0$ на границе цилиндра примем условие

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \Gamma = 0 \quad (5)$$

Легко проверяется, что задача (1)–(5) имеет точные решения, линейные по пространственным переменным (для уравнений Эйлера движения идеальной жидкости такие решения хорошо известны). Поля скорости, температуры и возмущений для таких решений имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\omega(t)x_3, 0, -\omega(t)x_1); & \theta &= \theta_1(t)x_1 + \theta_3(t)x_3 \\ \mathbf{s} &= \nabla \phi, & \phi &= (s_{11}(t)x_1^2 + s_{33}(t)x_3^2)/2 + s_{13}x_1x_3 \end{aligned} \quad (6)$$

(поле скорости является бездивергентным и касательным к границе цилиндра). Подставляя эти выражения в уравнения (2)–(4) и требуя их тождественного выполнения, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $\omega(t)$, $\theta_i(t)$, $s_{i,j}(t)$ (это система (8) при $\mu = 0$, $\delta = 0$).

При $\mu > 0$, $\delta > 0$ на границе цилиндра примем условия

$$\mathbf{v} = 0, \quad \theta = \hat{\theta}x_3 \quad (\hat{\theta} = \text{const}) \quad (7)$$

Очевидно, задача (1)–(4), (7) не имеет решений с линейными полями скорости и температуры, кроме механического равновесия. Предположим, что при малых μ , δ поля скорости и температуры близки к линейным полям вида (6) всюду, кроме тонкого слоя на границе цилиндра. Выведем уравнения для определения коэффициентов этих полей. При подстановке (6) в уравнения (2), (4) слагаемые $\mu \Delta \mathbf{v}$ и $\delta \Delta \theta$ исчезают. Для приближенного учета вязкого трения и теплообмена заменим эти слагаемые в уравнениях (2), (4) соответственно слагаемыми \mathbf{f} и $\delta(\hat{\theta}x_3 - \theta)$, где $\text{rot } \mathbf{f} = -\mu \text{rot } \mathbf{v}$. В результате для определения коэффициентов в выражениях (6) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая после замены параметров и переменных

$$\begin{aligned} M &= \mu/\alpha_0, & D &= \delta/\alpha_0, & Q &= -\hat{\theta}\sqrt{\beta k_0}/\alpha_0 & \varepsilon &= \left(2\alpha_0\sqrt{\beta k_0}\right)^{1/2} \\ t &= \tau/A, & \omega &= -A \cdot x, & (\theta_1, \theta_3) &= 2A^2(y, z), \\ (s_{11}, s_{33}, s_{13}) &= C \cdot (u, v, w), & A &= \alpha_0/\varepsilon, & C &= \alpha_0/k_0 \end{aligned}$$

приводится к следующему виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon Mx + y & \dot{u} &= -2xw - \varepsilon u + \varepsilon y^2 \\ \dot{y} &= -xz - \varepsilon Dy - \varepsilon(y(2u + v) + zw) & \dot{v} &= 2xw - \varepsilon v + \varepsilon z^2 \\ \dot{z} &= xy - \varepsilon D(Q + z) - \varepsilon(z(2v + u) + yw) & \dot{w} &= x(u - v) - \varepsilon w + \varepsilon yz \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) инвариантна относительно преобразования:

$$J : (x, y, z, u, v, w) \mapsto (-x, -y, z, u, v, -w).$$

2. Асимптотика периодических решений. Будем изучать систему (8) в предельном случае, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, а параметры M , D и Q фиксированы. При $\varepsilon = 0$ система существенно упрощается:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -xz, \quad \dot{z} = xy \quad (9)$$

$$\dot{u} = -2xw, \quad \dot{v} = 2xw, \quad \dot{w} = x(u - v) \quad (10)$$

Уравнения (9) образуют замкнутую систему, которая возникает как порождающая при асимптотическом исследовании системы Лоренца в предельном случае больших чисел Рэлея [7]). Она имеет два интеграла

$$H = x^2/2 - z, \quad R = y^2 + z^2 \quad (11)$$

и почти все ее решения - периодические. Характер соответствующих движений жидкости зависит от значений интегралов H, R ($R > 0$). При $H \in (-\sqrt{R}, \sqrt{R})$ среднее значение $\text{rot } \mathbf{v}$ равно нулю - это движения типа либраций, а при $H > \sqrt{R}$ среднее значение $\text{rot } \mathbf{v}$ отлично от нуля - это движения типа вращений (см. [7]).

Общее число независимых первых интегралов системы (9)–(10) равно пяти, три дополнительных имеют вид:

$$S = (u + v)/2, \quad F = yz(u - v) - w(y^2 - z^2), \quad G = (u - v)(y^2 - z^2)/2 + 2yzw \quad (12)$$

Равенства (12) позволяют выразить переменные u, v, w через переменные y, z и значения первых интегралов системы. Таким образом, при $H \in (-\sqrt{R}, \sqrt{R})$ и $H > \sqrt{R}$ решения системы (9), (10) - периодические. Это позволяет использовать метод осреднения для доказательства существования и приближенного вычисления периодических решений системы (8) при малых ε .

Осредненные уравнения первого приближения получим, дифференцируя (11)–(12) в силу системы (6), осредняя правые части полученных уравнений вдоль траекторий порождающей системы (9)–(10) и делая замену времени $t = \varepsilon\tau$:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -2MH + DQ + (D - 2M + 3S + G/R) \langle z \rangle \\ \dot{R} &= -2(D + 3S)R - 2G - 2DQ \langle z \rangle \\ \dot{S} &= -S + R/2 \\ \dot{F} &= -(1 + 2D + 6S)F - 2DQF \langle z \rangle / R \\ \dot{G} &= -(1 + 2D + 6S)G - 2DQG \langle z \rangle / R + R^2/2 - 2(F^2 + G^2)/R \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\langle z \rangle$ - среднее значение за период периодической функции $z(t)$, которое выражается через полные эллиптические интегралы первого и второго рода $K(k)$ и $E(k)$ следующим образом (см. [7, 8]):

$$\langle z \rangle = \sqrt{R} \cdot \left(\frac{2E(k)}{K(k)} - 1 \right), \quad k^2 = \frac{\sqrt{R} + H}{2\sqrt{R}} \quad \text{при } H \in (-\sqrt{R}, \sqrt{R}) \quad (14)$$

$$\langle z \rangle = \sqrt{R} \cdot \left(\frac{2}{k^2} \left(\frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right) + 1 \right), \quad k^2 = \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{R} + H} \quad \text{при } H > \sqrt{R} \quad (15)$$

Если осредненные уравнения первого приближения (13) имеют асимптотически устойчивое равновесие, то в фазовом пространстве системы (8) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл. Система (13) инвариантна относительно преобразования

$$\hat{J} : (H, R, S, F, G) \mapsto (H, R, S, -F, G),$$

следовательно, ее равновесия либо лежат в инвариантной плоскости $F = 0$, либо образуют пары, симметричные относительно этой плоскости. Задача отыскания

равновесий системы (13) удивительным образом в обоих случаях сводится к анализу корней непрерывной функции переменной R , которая исследована в [9]. Существование корней легко устанавливается: можно явно указать интервалы значений R , на которых функция меняет знак. Сами же корни, вообще говоря, приходится находить численно, численно проверяются и условия устойчивости соответствующих равновесий.

В двух предельных случаях исследование устойчивости равновесий удается провести аналитически. При малых $q = Q/\sqrt{D}$ (аналог числа Рэлея) существует ветвь устойчивых равновесий системы (13), лежащих в плоскости $F = 0$ (их координаты разыскиваются в виде рядов по степеням малого параметра q). Соответствующим порождающим циклам отвечают периодические движения жидкости типа либраций. При малых $\varepsilon > 0$ в фазовом пространстве модельной системы (8) существует единственный J-симметричный устойчивый предельный цикл с такими же свойствами.

В предельном случае $q \rightarrow \infty$ ситуация усложняется. При выполнении условия $M - 2D < 4$ система (13) имеет единственное устойчивое равновесие в плоскости $F = 0$. С ростом величины $M - 2D$ это равновесие теряет устойчивость, и от него ответвляется симметричная пара устойчивых равновесий. Каждому из этих равновесий в фазовом пространстве системы (8) соответствует J-симметричная пара порождающих циклов (соответствующие периодические движения жидкости являются вращениями). При $M - 2D < 4$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в фазовом пространстве системы (8) существует J-симметричная пара устойчивых предельных циклов. Если же $M - 2D > 4$, то эти циклы неустойчивы, а кроме них имеются еще две пары устойчивых предельных циклов.

3. Результаты вычислений. Численное исследование модели (8) при малых $\varepsilon > 0$ проводилось для значений параметров, близких к реальным для жидкого гелия II. Периодические движения типа либраций и вращений оказываются устойчивыми в достаточно широких интервалах значений параметра внешнего подогрева: для $Q \in (0, Q_1)$ и $Q \in (Q_2, \infty)$ соответственно. Для малых чисел Прандтля $\sigma = M/D$ ($\sigma \approx 2 - 3$) оказывается, что $Q_1 > Q_2$, так что при всех $Q > 0$ в фазовом пространстве системы (8) есть устойчивые предельные циклы, если ε достаточно мало. Например, для $M = 2.5$, $D = 1$ ($\sigma = 2.5$) анализ равновесий осредненных уравнений дает $Q_1 \approx 2.17$, $Q_2 \approx 2.03$ в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для $Q \in (Q_2, Q_1)$ асимптотика предсказывает, а численный эксперимент подтверждает одновременное существование устойчивого J-симметричного предельного цикла типа либраций и J-симметричной пары предельных циклов типа вращений. На Рис. 1 приведены проекции этих циклов на плоскость переменных x, y при $Q = 2.05$, $\varepsilon = 0.014$.

При больших σ области устойчивости периодических движений типа либраций и вращений не пересекаются: $Q_1 < Q_2$. Для $Q \in (Q_1, Q_2)$ осредненные уравнения не имеют устойчивых равновесий и, соответственно, система (8) не имеет устойчивых однооборотных предельных циклов при достаточно малых ε . В вычислениях устанавливается сложный непериодический режим движения: см. Рис. 1, где приведена проекция фазовой траектории на плоскость переменных x, y . Отметим сходство с системой Лоренца: установившееся конвективное движение состоит из чередующихся серий либраций и вращений.

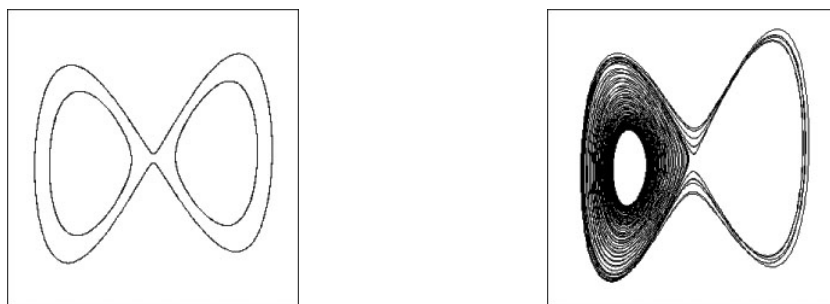


Рис. 1. предельные циклы (слева) и неперiodический режим движения (справа).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-96814-Р2004юг-а и 03-01-00802-а), а также Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.1768.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [2] Эткин Э., Фокс Н. Мультиполярный подход к жидкому гелию II. / Механика, 21. Вихревые движения жидкости. М.: Мир, 1979. С. 301–324.
- [3] Халатников И.М. Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
- [4] Жуков М.Ю., Петровская Н.В. Конвекция в сверхтекучей жидкости. Часть 1. Вывод уравнений; конечномерная модель. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 331-В94. 1994. 24 с.
- [5] Должанский Ф.В. Вынужденная конвекция жидкости внутри эллипсоида // Изв. АН СССР. ФАО. 1973. Т. 9. № 6. С. 163–172.
- [6] Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов Е.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.
- [7] Юдович В.И. Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2611-78. 1978.
- [8] Robbins K.A. Periodic solutions and bifurcation structure at high R in the Lorenz model // SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 36. № 3. P. 457–472.
- [9] Жуков М.Ю., Петровская Н.В. Конвекция в сверхтекучей жидкости. Часть 2. Асимптотика предельных циклов шестимерной модели. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 2046-В94. 1994. 37 с.

Zhukov M. Yu., Petrovskaya N. V. *Asymptotic analysis of 6-D model of the thermal convection in liquid He-II.* To obtain the 6-D generalization of well-known Lorenz system the mathematical model of thermal convection of superliquid helium II is used. The averaging method is applied for the asymptotic analysis of the periodic motions in the limit case of vanishing dissipation.

ПЕРЕНОС ПРИМЕСЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ В ДВУМЕРНЫХ КАНАЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.

Ростовский госуниверситет

Численными методами исследована задача о переносе примесей в двумерных каналах сложной формы. Показано, что в угловых точках каналов возможны сильные искажения профиля концентраций и возникновение конвективного перемешивания жидкости.

При помощи прямых численных методов исследована одна из задач теории электрофореза — метода разделения электрическим полем многокомпонентных смесей на отдельные компоненты. Рассмотрен процесс зонального электрофореза, в основе которого лежит принцип разделения компонент смеси, обладающих различными подвижностями в электрическом поле. Показано, что проведение этого процесса в электрофоретических камерах сложной формы (прямоугольных каналах с угловыми точками) приводит к сильным искажениям профилей концентрации примесей. Наличие особенностей электрического поля в угловых точках, нелинейные миграционные эффекты (образование ударных волн и волн разрежения), а также возникающее конвективное движение смеси может существенно осложнить интерпретацию экспериментов по разделению примесей.

В работе приведена лишь малая, наиболее яркая, часть результатов вычислительных экспериментов. Разработанные эффективные алгоритмы позволяют проводить расчеты в сложных каналах с большим числом угловых точек, например, в литографических массивах (микрочипах), используемых в современных биотехнологиях для идентификации компонент биологически активных смесей.

1. Постановка задачи. Система уравнений в безразмерных переменных, описывающая конвективные процессы в жидкости в приближении Обербека–Буссинеска и перенос примесей под действием электрического поля имеет вид [1, 3]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} - \mathbf{k} \sum_{k=1}^n \beta_k c_k, \quad \text{Div } \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dc_k}{dt} + \text{Div } \mathbf{i}_k = 0, \quad \mathbf{i}_k = -\varepsilon\mu_k \nabla c_k + \mu_k c_k \mathbf{E}, \quad (2)$$

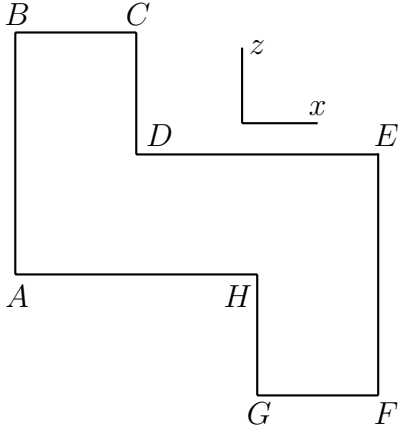
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \text{Div}(s\nabla\varphi) = 0, \quad \mathbf{j} = s\mathbf{E}, \quad (3)$$

$$s = 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k > 0, \quad (4)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, p — давление, \mathbf{E} , φ — напряженность и потенциал электрического поля, c_k — концентрация примеси, \mathbf{i}_k — плотности потока примеси, \mathbf{j} — плотность электрического тока, s — проводимость смеси, μ — кинематическая вязкость

жидкости, μ_k — электрофоретическая подвижность примеси, β_k — коэффициент концентрационного сжатия, α_k — коэффициент влияния примеси на проводимость смеси, \mathbf{k} — единичный вектор в направлении оси z , противоположном действию силы тяжести.

На рисунке показана область, заполненная смесью. Граница области является твердой и непроницаема для жидкости и примесей (\mathbf{n} — нормаль к границе):



$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{n} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

на участках границы BC и GF задан потенциал:

$$\varphi|_{BC} = \varphi_0, \quad \varphi|_{GF} = \varphi_1, \quad (6)$$

а остальная часть границы изолирована:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{CDEF,BAHG} = 0. \quad (7)$$

В начальный момент времени жидкость неподвижна и задано начальное распределение примесей:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0, \quad c_k|_{t=0} = c_k^0(x, z), \quad k = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Основная цель работы — численное исследование поведения примесей под действием электрического поля и поля тяжести для малых параметров диффузии ε .

Хорошо известно, что в областях, содержащих угловые точки, даже в простейшем случае, когда примеси отсутствуют и жидкость неподвижна ($\mathbf{v} = 0$, $c_k = 0$, $s = 1$), при решении уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ с краевыми условиями (6), (7) градиент потенциала $\nabla \varphi$ имеет особенности: $\nabla \varphi = \mathcal{O}(r^{\pi/\alpha-1})$, где r — расстояние до угла с раствором α . В частности, для рассматриваемой области радиальная компонента электрического поля E_r в точках D и H будет велика: $E_r = \mathcal{O}(r^{-1/3})$. Напротив, в точках A и E особенности электрического поля отсутствуют и напряженность поля мала: $E_r = \mathcal{O}(r)$. Пусть например, в начальный момент времени примесь сосредоточена в окрестности границы BC и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_0$ такова, что миграция примесей под действием электрического поля происходит в сторону границы GF . Достаточно очевидно, что перенос примеси в окрестности точек D , H будет быстрым, а в окрестности точек A , E возможно возникновение «застойных» зон. Указанный эффект приведет к сильной деформации первоначального профиля концентрации примесей.

Ситуация становится намного более сложной в случае, когда концентрации примесей сильно влияют на проводимость смеси (см. (4)). Анализ бездиффузионных ($\varepsilon = 0$) квазилинейных гиперболических уравнений переноса (2)–(4) в одномерном случае при $\mathbf{v} = 0$ показывает, что на переднем фронте профиля концентрации c_k при $\alpha_k < 0$ образуется ударная волна (волна разрежения при $\alpha_k > 0$) а на заднем фронте — волна разрежения (ударная волна при $\alpha_k > 0$). Взаимодействие указанных волн с угловыми точками области способно сильно исказить профиль концентрации движущейся примеси.

Наконец, быстрые движения примесей в окрестности точек D , H будут создавать в окрестности этих точек сильную стратификацию плотности жидкости в целом, что при наличии поля тяжести приведет к интенсивному конвективному перемешиванию смеси.

4. Результаты расчетов. Для решения задачи (1)–(7) использовались прямые численные методы — конечно-разностные варианты метода маркеров и ячеек на разнесенных сетках. Вычислительный эксперимент показал, что при малом параметре ε , характеризующем диффузию, для решения уравнений переноса (2) следует использовать псевдонейвные конечно-разностные схемы с разностями «против потока», позволяющие эффективно предотвращать проявления сеточной диффузии. Отметим, что для расчета скорости течения \mathbf{v} достаточно использовать обычные явные схемы. Наконец, для определения давления p и потенциала φ при решении конечно-разностных аналогов эллиптических уравнений хорошо себя зарекомендовал метод последовательной верхней релаксации (ПВР) с параметрами релаксации 1.37 div 1.96. Наличие особенностей $\nabla\varphi$ в окрестности точек D , H потребовало существенной модификации метода ПВР, в частности, разбиения исходных областей на подобласти (5 подобластей для рассматриваемого случая) с условиями сшивки решения на границах подобластей.

Некоторые наиболее типичные результаты расчетов проиллюстрированы на рис. 1–3. В случае легкой одиночной примеси ($\mu = 0.01$, $\beta_1 = -0.1$, $\mu_1 = -0.15$, $\varphi_1 - \varphi_0 = 20$, $\alpha_1 = -0.4$, $\varepsilon = 0.1$) изолинии концентрации $c_1(x, z)$ показаны на рис. 1, а линии тока движения жидкости — на рис. 2 для моментов времени $t = 0.24$, 9.91, 14.66, 26.71, 42.11, 68.50 (рисунки расположены слева направо и сверху вниз). Псевдонейвные схемы позволили использовать для расчетов достаточно крупную сетку 60×60 с шагами $h_x = h_y = 0.167$ (максимальные размеры области 10×10).

Хорошо видно, что в окрестности точек D , H происходят сильные искажения профиля концентрации, а в окрестностях точек A , E примесь застревает в «застойных» зонах. Движение примеси индуцирует движения жидкости. Интересно отметить возникновение трех вихрей (см. момент времени $t = 14.66$) в окрестности точки D и их последующее исчезновение. Наиболее важный результат компьютерного эксперимента — практическое совпадение расчетов при изменении параметра диффузии ε на интервале (0.001 div 0.1). Это подтверждает тот факт, что основная причина нелинейных эффектов — электромиграция, а диффузия способна влиять на перенос примесей лишь при больших временах.

На рис. 3 (c_1 , c_2 — первые две фигуры) показан один из этапов разделения двух тяжелых примесей электрическим полем ($\mu = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$, $\varphi_1 - \varphi_0 = 20$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$, $\mu_1 = -0.15$, $\mu_2 = -0.35$, $\alpha_1 = -0.4$, $\alpha_2 = -0.4$). Интересно отметить, что более быстрая примесь претерпевает в процессе эволюции большие искажения.

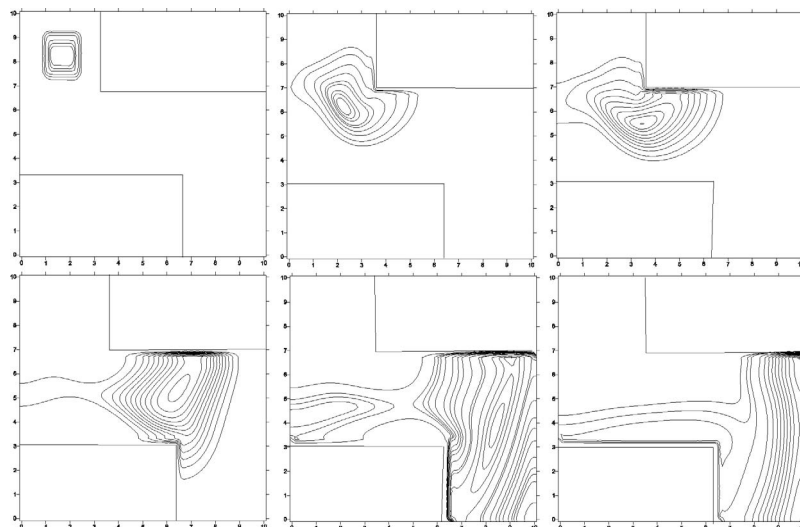
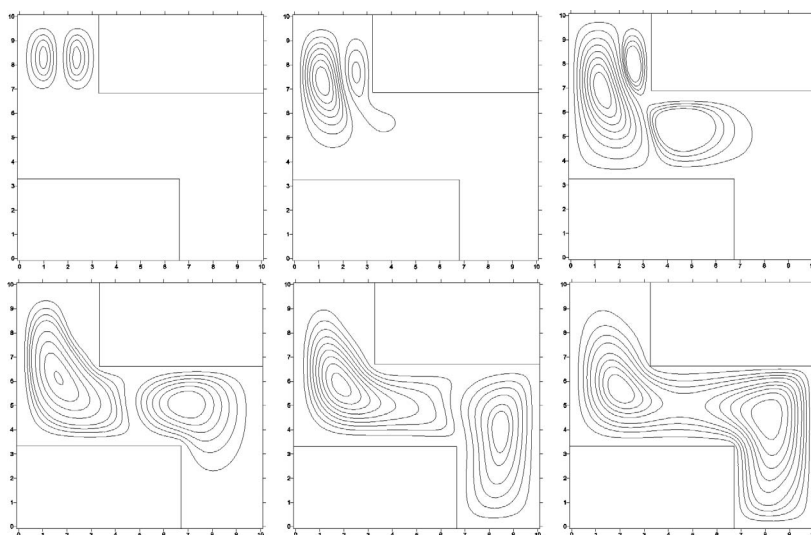
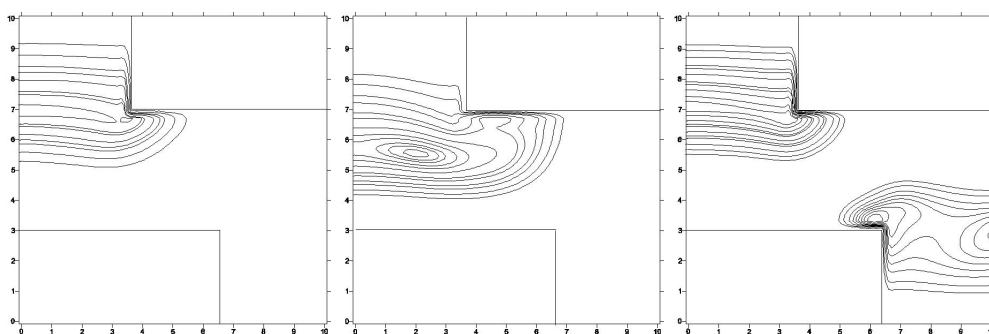
Рис. 1. Изолинии концентрации $c_1(x)$ 

Рис. 2. Функция тока

Рис. 3. Изолинии концентраций $c_1(x, z)$ и $c_2(x, z)$

На рис. 3 (последняя фигура) показан один из этапов эволюции при движении тяжелых примесей навстречу друг другу ($\mu = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$, $\varphi_1 - \varphi_0 = 20$, $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.1$, $\mu_1 = -0.15$, $\mu_2 = 0.15$, $\alpha_1 = -0.4$, $\alpha_2 = -0.4$). Примечательно, что движение примеси $c_2(x, z)$, расположенной внизу канала, вверх (против действия силы тяжести) приводит к более сильным искажениям профиля, по сравнению с движением примеси $c_1(x, z)$, расположенной сверху канала, вниз (в направлении действия силы тяжести).

Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что движение примесей под действием электрического поля в каналах с угловыми точками приводит к сильным искажениям первоначальных профилей концентраций. Именно этим объясняются неудачи в космических экспериментах по зональному электрофорезу на установках типа «Каштан», на которые было обращено внимание в [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (04-01-96814-р2004юг-а) и (03-01-00802-а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.1768.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И. Математическая теория электрофореза. Киев: Наукова думка, 1983, 204 с.
- [2] Жуков М. Ю., Бабский В. Г., Сазонов Л. И., Стоянов А. В. Теоретический анализ процесса изоэлектрофокусирования белков на установке «Каштан» // Космическая наука и техника. 1989. Т. 4. С. 15–19.
- [3] Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Мышкис А. Д., Копачевский Н. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова думка, 1992. 590 с.

Zhukov M. Yu., Shiryaeva E. V. *Electromigration of admixture in a 2-D canals of the complex shape.* The problem of electromigration of admixture in 2-D canals of the complex shape is investigated. It is shown, that an angular points are cause of strong distortion of the concentration profile. In the vicinity of these points the convective motion is possible.

К ОЦЕНКЕ КИНЕМАТИКИ ТОРЦОВОГО ПЕРЕСОПРЯЖЕНИЯ ЗУБЬЕВ

Журавлев Г. А., Тварилидзе О. В., Шишлин Д. М.

Ростовский госуниверситет

НИИ механики и прикладной математики им. Ворovichа И.И.

Показано, что в силовой эвольвентной прямозубой передаче торцовое пересопряжение зубьев сопряжено с действием дополнительных фаз кромочного контакта зубьев, имеющим стохастический характер и влияющим на показатели перекрытия, усталостной выносливости и изнашивания зубьев.

Для анализа фаз кромочного контакта зубьев заданы (с шагом $\Delta\varphi_{1,2}$) координаты i -тых точек боковых сторон торцового эвольвентного профиля зубьев в полярной системе координат, связанной с осью колеса:

$$r_{i1,2} = \sqrt{(y_{ti} + R_{1,2})^2 + x_{ti}^2}; \quad \varphi_{i1,2} = \arctan \frac{x_{ti}}{y_{ti} + R_{1,2}}; \quad R_{1,2} = \frac{mz_{1,2}}{2 \cos \beta} + mx_{1,2},$$

где: $\varphi_{1,2}$ - текущий параметр;

m - модуль зубьев;

$z_{1,2}$ - числа зубьев взаимодействующих колес 1 и 2;

$x_{1,2}$ - коэффициент смещения исходного конура зубьев;

β - угол наклона зубьев;

$\varphi_{o1,2}$ - углы, определяющие некие начальные положения колес 1 и 2 при их правильном зацеплении;

$X_{ti1,2}, Y_{ti1,2}$ - координаты i -тых точек боковых сторон торцового эвольвентного профиля зубьев каждого колеса, соответственно, 1 и 2 в декартовых системах координат, связанных с осями симметрии зубьев (ось OY_t) и с касательными к концентрическим окружностям радиусов;

$$\tau_{1,2} = \frac{2\pi}{z_{1,2}}; \quad u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}; \quad \Delta\varphi_{1,2} = \frac{\tau_{1,2}n_{sh}}{n_{shmax}};$$

то есть: $\Delta\varphi_1 = u\Delta\varphi_2; \quad \varphi_{1,2} = \varphi_{o1,2} + \Delta\varphi_{1,2};$

$\tau_{1,2}$ - угловые шаги зубьев колес 1 и 2;

$\Delta\varphi_{1,2}$ - поворот колес относительно их начального положения на шаге n_{sh} ;

n_{sh} - номер шага;

n_{shmax} - номер последнего шага;

a_w - межосевое расстояние.

Для каждого углового j -того положения выбранной пары зубьев колеса 1 и 2 в каждой i -той точке торцового профиля радиусы r_{1ij} и r_{2ij} соотносятся как:

$$r_{2ij}^2 = a_w^2 + r_{1ij}^2 - 2a_w r_{1ij} \cos(\varphi_{o1} + \Delta\varphi_{1i}).$$

Минимизируя величины угловых расстояний между соответствующими точками торцового профиля $\Delta\varphi_{ij}$, определяем точку касания или точку наименьшего зазора (и его величину δ_j) между рабочими торцовыми профилями взаимодействующих зубьев при заданном положении колеса 1.

Методика оценки силовых зубчатых передач в фазах торцового пересопряжения зубьев применима для зубчатых передач любого типа и с любым профилем зубьев. Для анализа принята эвольвентная цилиндрическая прямозубая пара модуля $m = 2,5$ мм со стандартным исходным контуром зубьев ($\alpha = 20^\circ$), с числами зубьев $z_{1,2} = 10$ ($x_{1,2} = 0,51$) и межосевым расстоянием $a_w = 27,5$ мм.

Результаты анализа сведены в таблицу, в которой показаны фазы однопарного зацепления колес, предшествующие фазе входа расчетной пары зубьев в зацепление - в диапазоне фаз от возможного кромочного контакта в точке K_T (рис.1) этих зубьев в области начальной окружности ведущего колеса $\Delta\varphi_1 = 12,25^\circ$ до входа их в зацепление (рис.2) с $\Delta\varphi_1 = 0$.

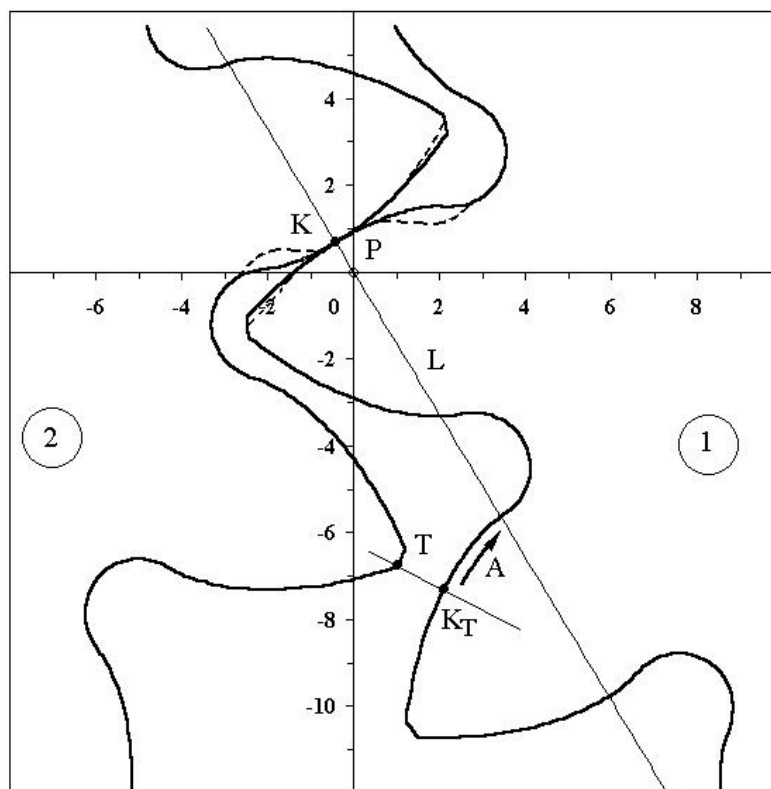


Рис. 1.

Таблица.

Изменение зазора δ_j между точкой T продольной кромки зуба ведомого колеса z_2 и профилем (с нормалью в точке радиуса r_{1j}) зуба ведущего колеса z_1 в некоторых фазах однопарного кинематического зацепления колес, предшествующих фазе входа данной пары зубьев в кинематическое зацепление и удаленных от нее на угловое расстояние $\Delta\varphi_1$.

$\Delta\varphi_1$, град.	Зазор (отвод) δ_j , мм	Радиус r_{1j} , мм
0	0.000	12.155
1	0.008	12.303
2	0.031	12.428
3	0.071	12.565
4	0.128	12.714
5	0.201	12.874
6	0.291	12.986
7	0.398	13,164
8	0.520	13,288
9	0.659	13.417
10	0.812	13.483
11	0.982	13.617
12.25	1.216	13.756

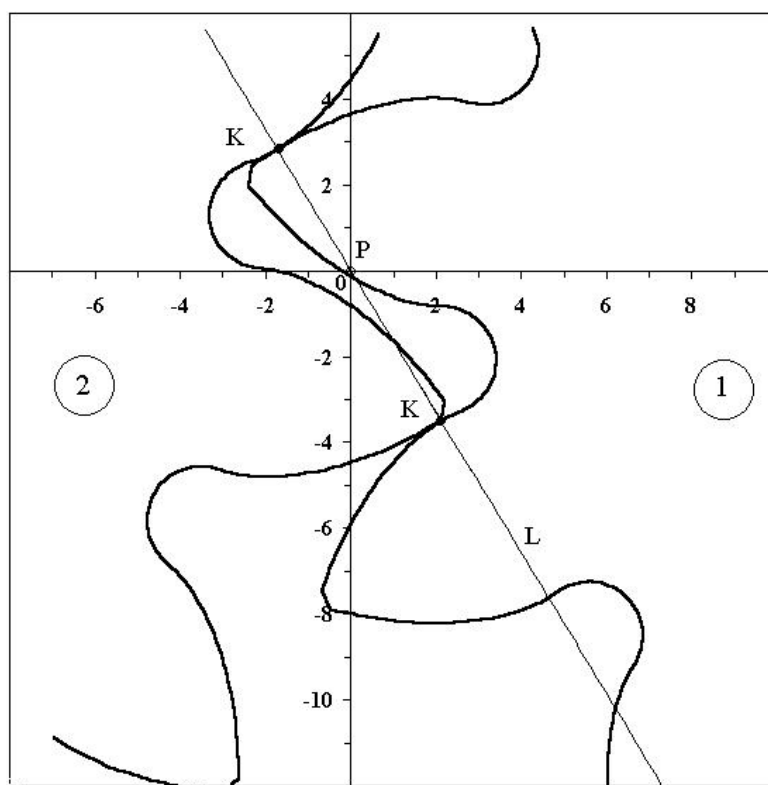


Рис. 2.

Возникающие в кинематическом зацеплении зазоры между рабочими профилями зубьев в силовом зацеплении (при крутящих моментах $T_{1,2} \neq 0$) частично (или полностью) выбираются. В силовой эвольвентной передаче контактные и общие деформации зубьев влияют на геометрию реального зацепления – шаг деформированных зубьев ведущего колеса τ_{1p} уменьшен ($\tau_{1p} < \tau_1$), а шаг зубьев ведомого колеса τ_{2p} увеличен ($\tau_{2p} > \tau_2$). К такому же эффекту (для фаз, предшествующих входу зубьев в зацепление) приводит изнашивание головок зубьев ведущего колеса и ножек зубьев ведомого колеса. В сочетании с технологическими погрешностями эти явления усиливают эффект сближения кромки T зубьев ведомого колеса с эвольвентным профилем зубьев ведущего колеса.

Из таблицы видно, что зазоры кинематического зацепления $\delta_j = K_T T$ монотонно уменьшаются по мере приближения к фазе совпадения точки K_T с линией зацепления L . Анализ величин этих зазоров показывает, что в ряде точек они могут быть соизмеримы с реальными отклонениями зубьев в силовом зацеплении. Из-за этого возникает кромочный (с резко увеличенными, относительно правильного зацепления, приведенными кривизнами и весьма неблагоприятными трибологическими параметрами) контакт зубьев с начальным касанием в точке K_T профиля ведущего зуба, лежащей несколько выше (в зависимости от геометрических параметров, степени износа головок зубьев и уровня нагружения передачи) нижней граничной точки активного профиля.

В любом случае точка K_T перемещается в направлении стрелки A по торцовому профилю зуба с образованием (по мере вращения зубчатых колес) правильного контакта в начальной точке рабочего участка линии зацепления L (с существенно лучшими, чем в кромочном контакте, кривизнами) и изменения направления движения точки касания на противоположное (вверх по торцовому профилю зуба ведущего колеса) и далее - до верхних граничных точек касания эвольвентных участков. Аналогичная картина возникает и в противоположной фазе пересопряжения зубьев.

На определенном уровне изнашивания зубьев дополнительные фазы кромочного контакта увеличивают перекрытие зубьев. Из описанных в литературе результатов экспериментов известно, что наиболее типичный характер изменения формы торцового профиля изнашиваемых зубьев прямозубой эвольвентной передачи обусловлен увеличением кривизны (без изменения ее знака) профиля у головки и изменением знака кривизны (на рис.1 показаны пунктирными линиями) у ножки зубьев. Можно предположить, что такое изнашивание зубьев обусловлено дополнительным кромочным контактом, а именно его дальнейшее развитие приводит к уменьшению рабочего участка линии зацепления и снижению уровня торцового сопряжения зубьев, вплоть до полной потери взаимосопряженности и работоспособности зубчатых колес эвольвентной прямозубой передачи.

Увеличение и последующее снижение продолжительности фаз двухпарного зацепления и величины торцового перекрытия зубьев эвольвентной передачи носит стохастический характер и может быть учтено в уточненных усталостных расчетах по методике [1]. Уточнение контактных расчетов эвольвентных передач, например - на базе [2, 3], также связано с учетом выявленных особенностей кромочного контакта зубьев.

Приведенный здесь анализ кинематики эвольвентного зацепления в фазах пересопряжения зубьев позволяет связать характер изнашивания зубьев у их ножек (с изменением знака кривизны профиля) именно с явлением действия дополнительных фаз кромочного зацепления.

ВЫВОДЫ

1. В силовой эвольвентной прямозубой передаче торцовое пересопряжение зубьев сопряжено с появлением дополнительных фаз кромочного контакта зубьев и с увеличением колебаний коэффициента торцового перекрытия в области $\varepsilon_\alpha > \varepsilon_{\alpha nom}$.
2. Дополнительные фазы кромочного контакта увеличивают интенсивность изнашивания эвольвентных зубьев у их ножек и определяют тенденцию к изменению знака кривизны изнашиваемого участка торцового профиля с постепенным уменьшением коэффициента торцового перекрытия до $\varepsilon_\alpha < \varepsilon_{\alpha nom}$, ростом динамических нагрузок и высокочастотной (зубцовой частоты) вибрации в зацеплении, вплоть до $\varepsilon_\alpha < 1$ и полной потери работоспособности эвольвентной прямозубой передачи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Журавлев Г.А., Прокотьев П.С. К оценке влияния условий многопарного зацепления на усталостную прочность зубчатых колес // Вестник машиностроения. 1989 № 6. С. 25–28.
- [2] Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении // Машиностроение. М. 1986. С. 202.
- [3] Журавлев Г.А. Эффекты кривизны упругих тел с близким к начально-линейному касанием // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием, г.Ростов-на-Дону-Азов, 13-16 октября 2003. Изд. "Новая книга", г.Ростов-на-Дону, 2004. С. 163–165.

Zhuravlev G.A., Tvarilidze O.V., Shishlin D.M. *To the ESTIMATION of the TOOTH OVER-CONJUGATION KINEMATIC.* It is shown, that the tooth over-conjugation in power involute spur gearings is connected to action of additional phases of edge teeth contact, having stochastic character and influencing on parameters of overlapping, fatigue and wear teeth processes.

УЧЕТ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ВИНТОВОЙ ПРУЖИНЫ

Зеленин А. А.^{*}, Зубов Л. М.^{**}, Зеленина А. А.^{***}

^{*} РФ МГТУГА

^{**} Ростовский госуниверситет

^{***} Ростовский госуниверситет путей сообщения

В настоящем сообщении на основе трехмерных нелинейных уравнений статики континуума Коссера рассмотрена задача Сен-Венана для стержня в форме винтовой пружины. Решение задачи Сен-Венана достигается путем использования полуобратных решений уравнений нелинейной эластостатики моментной среды, которые позволяют свести исходную пространственную задачу к двумерным краевым задачам для плоской области в форме поперечного сечения витка пружины.

1. Кручение и растяжение-сжатие кривого стержня в форме винтовой пружины.

Система уравнений статики нелинейно упругой среды Коссера при отсутствии массовых сил и моментов состоит [1,2] из уравнений равновесия для напряжений

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0, \quad (1.1)$$

определяющих уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{P} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}}, \quad W = W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

и геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k \\ \mathbf{L} \times \mathbf{E} &= -(\operatorname{grad} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{D} и \mathbf{G} – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, \mathbf{P} и \mathbf{K} – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Кирхгофа, \mathbf{C} – градиент деформации, \mathbf{H} – собственно ортогональный тензор микроповорота, характеризующий вращательные степени свободы частиц континуума Коссера, X_k ($k = 1, 2, 3$) – декартовы координаты деформированного тела (эйлеровы координаты), \mathbf{i}_k – координатные орты, \mathbf{Y} – мера деформации, \mathbf{L} – тензор изгибной деформации, \mathbf{E} – единичный тензор, W – удельная свободная энергия упругого материала, div и grad – операторы дивергенции и градиента в лагранжевых координатах. Индекс \times означает векторный инвариант тензора второго ранга.

Рассмотрим упругое тело, имеющее в отсчетной конфигурации форму винтовой пружины с произвольным поперечным сечением. Тело образовано винтовым

движением вдоль оси x_3 плоской фигуры σ , которая расположена в плоскости, проходящей через ось x_3 . Уравнение контура $\partial\sigma$, ограничивающего область σ , запишем в параметрической форме: $\rho = \rho(t)$, $\zeta = \zeta(t)$, где ρ – расстояние от оси x_3 , ζ – расстояние, отсчитываемое вдоль оси x_3 . Винтовую поверхность, образованную винтовым движением кривой $\partial\sigma$ вдоль оси x_3 , будем называть боковой поверхностью пружины. При описании деформации упругой среды в качестве лагранжевых координат будем использовать неортогональные криволинейные координаты ρ, φ, ζ , связанные с декартовыми координатами отсчетной конфигурации x_1, x_2, x_3 соотношениями

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad x_3 = \zeta + \mu\varphi \quad (1.4)$$

Здесь μ – действительное число, характеризующее угол наклона витков пружины к плоскости x_1x_2 . При $\mu = 0$ указанная система координат переходит в систему круговых цилиндрических координат ρ, φ, x_3 . Считая параметры t, φ гауссовыми координатами поверхности, уравнение боковой поверхности пружины запишем в виде

$$\mathbf{r}(t, \varphi) = \rho(t)(\mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi) + \zeta(t)\mathbf{i}_3 + \mu\varphi\mathbf{i}_3 \quad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{r} = x_m \mathbf{i}_m$ – радиус-вектор точки поверхности. При помощи (1.5) находится единичный вектор нормали к боковой поверхности ($s = 1, 2, 3$)

$$\mathbf{n} = \frac{-\rho\zeta'\mathbf{e}_1 - \mu\rho'\mathbf{e}_2 + \rho\rho'\mathbf{e}_3}{\sqrt{(\rho\zeta')^2 + (\mu\rho')^2 + (\rho\rho')^2}} = n_s(t)\mathbf{e}_s \quad (1.6)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3$$

В (1.6) штрихом обозначена производная по переменной t . Из (1.6) вытекает соотношение

$$n_2 = -\mu\rho^{-1}n_3 \quad (1.7)$$

В рассматриваемых ниже задачах напряженно-деформированное состояние одинаково для всех витков пружины. Поэтому можно считать, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Деформацию микрополярного упругого тела, имеющего описанную выше геометрическую форму, зададим в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1(\rho, \zeta) \cos \varkappa\varphi - \alpha_2(\rho, \zeta) \sin \varkappa\varphi \\ X_2 &= \alpha_1(\rho, \zeta) \sin \varkappa\varphi + \alpha_2(\rho, \zeta) \cos \varkappa\varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$X_3 = \alpha_3(\rho, \zeta) + \nu\varphi; \quad \varkappa, \nu = const$$

$$\mathbf{H} = H_{mn}(\rho, \zeta)\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{f}_k$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \varkappa\varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varkappa\varphi, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{i}_1 \sin \varkappa\varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varkappa\varphi, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{i}_3$$

Здесь H_{mn} – элементы собственно ортогональной матрицы.

Условиям $H_{mk}H_{nk} = \delta_{mn}$ и $\det(H_{mn}) = 1$ можно удовлетворить, выразив функцию $H_{mn}(y_1, y_2)$ через три функции $\Theta_s(y_1, y_2)$ ($s = 1, 2, 3$) по формулам

$$H_{mn} = (4 + \Theta^2)^{-1}[(4 - \Theta^2)\delta_{mn} + 2\Theta_m\Theta_n + 4e_{mns}\Theta_s] \quad (1.10)$$

где δ_{mn} – символ Кронеккера, e_{mns} – символ Леви-Чивиты.

Формулы (1.8), (1.9) обобщают предложенное ранее [3] представление деформации растяжения и кручения винтовой пружины из простого материала на случай микрополярного материала.

На основании (1.8), (1.9) градиент деформации \mathbf{C} и меры деформации \mathbf{Y} , \mathbf{L} принимают вид

$$\mathbf{C} = C_{mk}(\rho, \zeta)\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}_k, \quad \mathbf{Y} = C_{mk}H_{sk}\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{L} = L_{ms}(\rho, \zeta)\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s$$

Микрополярным телом, однородным по координате φ , будем называть материал, удельная свободная энергия которого W , рассматриваемая как функция компонент Y_{ms} , L_{ms} мер деформации в ортонормированном базисе \mathbf{e}_m , не зависит явно от координаты φ . Для такого материала в силу (1.2) тензоры напряжений и моментных напряжений будут иметь следующие представления

$$\mathbf{D} = D_{mn}(\rho, \zeta)\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}_n, \quad \mathbf{G} = G_{mn}(\rho, \zeta)\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}_n \quad (1.12)$$

Из (1.1), (1.12) следуют уравнения равновесия для напряжений и моментных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho D_{11})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho D_{31})}{\partial\zeta} &= \mu \frac{\partial D_{21}}{\partial\zeta} + \varkappa D_{22} \\ \frac{\partial(\rho D_{12})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho D_{32})}{\partial\zeta} &= \mu \frac{\partial D_{22}}{\partial\zeta} - \varkappa D_{21} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial(\rho D_{13})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho D_{33})}{\partial\zeta} = \mu \frac{\partial D_{23}}{\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial(\rho G_{11})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho G_{31})}{\partial\zeta} = \mu \frac{G_{21}}{\partial\zeta} + \varkappa G_{22} + \rho(C_{m3}D_{m2} - C_{m2}D_{m3})$$

$$\frac{\partial(\rho G_{12})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho G_{32})}{\partial\zeta} = \mu \frac{G_{22}}{\partial\zeta} - \varkappa G_{21} + \rho(C_{m1}D_{m3} - C_{m3}D_{m1})$$

$$\frac{\partial(\rho G_{13})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho G_{33})}{\partial\zeta} = \mu \frac{G_{23}}{\partial\zeta} + \rho(C_{m2}D_{m1} - C_{m1}D_{m2}) \quad (1.14)$$

Граничные условия на боковой поверхности пружины, которая предполагается свободной от нагрузки, в соответствии с (1.6), (1.7), (1.12) приводятся к краевым условиям на границе плоской области σ :

$$n_1 D_{1k} + n_3 (D_{3k} - \mu \rho^{-1} D_{2k}) = 0, \quad (1.15)$$

$$n_1 G_{2k} + n_3 (G_{3k} - \mu \rho^{-1} G_{2k}) = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

Здесь $n_1\mathbf{e}_1 + n_3\mathbf{e}_3$ – нормаль к плоской кривой $\partial\sigma$. Поскольку величины D_{mn} , G_{mn} выражаются через функции $\alpha_k(\rho\zeta)$, $\Theta_k(\rho\zeta)$ ($k = 1, 2, 3$), уравнения (1.13), (1.14) и условия (1.15) образуют краевую задачу для плоской области σ . Для единственности решения этой задачи необходимо наложить дополнительные условия

$$\iint_{\sigma} (\alpha_3 - \zeta) d\rho d\zeta = 0 \quad \iint_{\sigma} (H_{kk} - 3) d\rho d\zeta = 0 \quad (1.16)$$

Используя условие равновесия произвольной части витка пружины, заключенной между полуплоскостями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, где φ_1, φ_2 – произвольные числа, доказывается, что реализация деформации (1.8), (1.9) требует приложения к концам пружины системы сил, статически эквивалентной силе и моменту, действующим в точке оси пружины. Векторы силы и момента направлены по оси пружины. Растягивающая (сжимающая) сила F_3 и крутящий момент M_3 подчиняются энергетическим соотношениям

$$F_3(\nu, \varkappa) = \frac{\partial \Pi(\nu, \varkappa)}{\partial \nu}, \quad M_3(\nu, \varkappa) = \frac{\partial \Pi(\nu, \varkappa)}{\partial \varkappa} \quad (1.17)$$

$$\Pi(\nu, \varkappa) = \iint_{\sigma} \rho W d\rho d\zeta$$

Если $\mu = 0$, то формулы (1.8), (1.9) описывают деформацию сектора тела вращения, т.е. сектора кругового кольца, при которой каждая окружность $\rho = const$, $\zeta = const$ после деформации превращается в простую винтовую линию, осью которой является прямая $X_1 = X_2 = 0$.

Случай, когда выполняются равенства

$$\nu = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) \cos \xi(\rho, \zeta) +$$

$$+(\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{f}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{i}_3) \sin \xi(\rho, \zeta) + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_2 \quad (1.18)$$

соответствует чистому изгибу кругового бруса в плоскости X_1X_2 .

2. Изгиб винтовой пружины. Здесь рассматривается следующее двухпараметрическое семейство конечных деформаций винтовой пружины, ось которой в отсчетной конфигурации имеет направление орта \mathbf{i}_3

$$X_1 = \beta_1(\rho, \zeta) \cos \chi\varphi + \beta_3(\rho, \zeta) \sin \chi\varphi$$

$$X_2 = \beta_2(\rho, \zeta) + \eta\varphi; \quad \eta, \chi = const \quad (2.1)$$

$$X_3 = \beta_3(\rho, \zeta) \cos \chi\varphi - \beta_1(\rho, \zeta) \sin \chi\varphi$$

$$\mathbf{H} = H_{sk}(\rho, \zeta) \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{t}_k \quad (2.2)$$

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \chi\varphi - \mathbf{i}_3 \sin \chi\varphi, \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{i}_2,$$

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{i}_1 \sin \chi\varphi + \mathbf{i}_3 \cos \chi\varphi$$

После указанной деформации боковая поверхность пружины превращается в винтовую поверхность с осью, параллельной вектору \mathbf{i}_2 .

При $\chi = 0$ формулы (2.1), (2.2) описывают выпрямление винтовой пружины в призматический брус. В этом случае каждая винтовая линия $\rho = const$, $\zeta = const$ после деформации превращается в прямую линию, параллельную оси X_2 .

Рассуждения и выкладки, связанные с формулировкой двумерной краевой задачи для сечения витка пружины при ее изгибе аналогичны приведенным в разделе 1.

Для реализации деформации вида (2.1), (2.2) к каждому концу пружины требуется приложить систему сил и моментов, статически эквивалентную равнодействующей, приложенной в точке прямой $X_1 = X_3 = 0$ и действующей параллельно этой прямой, и моменту, вектор которого параллелен орту \mathbf{i}_2 .

Нелинейная задача Сен-Венана об изгибе призматического тела с учетом моментных напряжений рассмотрена ранее [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00638) и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Rat. Mech. Anal. 17, 5. 1964. P. 85–112.
- [2] *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Springer. Berlin, 1997.
- [3] *Зубов Л.М.* Точная нелинейная теория растяжения и кручения винтовых пружин // Доклады РАН. 2002. Т. 385. № 5. С. 628–630.
- [4] *Зеленина А.А.* Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел с моментными напряжениями // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. 2003. С. 207–211.

Zelenin A.A., Zubov L.M., Zelenina A.A. *The accounting of couple stresses in the nonlinear Saint-Venant problem for spiral spring.* In the paper the problem of a bar in the form of spiral spring is considered on the basis of three-dimensional Cosserat continuum nonlinear static equations. Solution of the Saint-Venant problem is achieved by using the semi-inverse solutions of nonlinear elastostatic equations of media with couple stresses. Due to the using of semi-inverse solutions, the above enumerated spatial problem of nonlinear elastostatic with couple stresses is reduced into the two-dimensional boundary-valued problem for plain domain in form of spring turn cross-section.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА В ОРТОТРОПНУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Зеленцов В. Б., Докучаев С. А.* , Сахабудинов Р. В.

*Ростовский военный институт ракетных войск,
344 027, Россия, Ростов-на-Дону, просп. М. Нагибина, 24.*

e-mail: zelentsov@mail.ru

e-mail: sahabudinov@mail.ru

* *Северо-Кавказский филиал Московского технического университета связи и
информатики*

344 006, Россия, Ростов-на-Дону, ул. Серафимовича, 2.

e-mail: docs2000@mail.ru

Рассматриваемая задача сведена к решению интегрального уравнения, приближенное решение которого получено с помощью специальной аппроксимации символа ядра в комплексной плоскости.

1. Постановка задачи. Рассматривается нестационарная динамическая контактная задача об ударе жесткого плоского штампа ширины $2a$ ($|x| \leq a$) в упругую ортотропную полуплоскость ($|x| < \infty, 0 \leq y < \infty$). Полуплоскость в начальный момент времени $t = 0$ и до него находится в покое, так что ее горизонтальные $u(x, y, t)$ и вертикальные $v(x, y, t)$ смещения и их скорости при $t = 0$ равны нулю. Штамп движется вдоль оси Oy , его начальная скорость или скорость удара штампа в полуплоскость в момент начала контакта $t = 0$ равна v_0 , масса штампа m . Вне области контакта штампа с упругой полуплоскостью поверхность свободна от напряжений, силы трения и сцепления в области контакта отсутствуют. Смешанные граничные условия задачи имеют вид

$$v(x, 0, t) = \varepsilon(t) \quad |x| \leq a, \quad \sigma_{yy}(x, 0, t) = 0 \quad a \leq |x| < \infty, \quad \sigma_{xy}(x, 0, t) = 0 \quad |x| < \infty \quad (1)$$

где $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}(x, y, t)$ – нормальные и касательные напряжения упругой среды [1]. На бесконечности ортотропной среды при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ смещения $u, v(x, y, t)$ и напряжения исчезают. Постановку нестационарной динамической контактной задачи об ударе плоского штампа замыкают дифференциальное уравнение движения жесткого штампа при внедрении его в ортотропную полуплоскость. При этом движение штампа рассматривается, как движение материальной точки вдоль оси Oy

$$m\ddot{\varepsilon}(t) = Q(t) \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = v_0 \quad (3)$$

где $Q(t) = -P(t)$ – сила сопротивления ортотропной среды внедрению штампа равная с противоположным знаком силе контактного воздействия штампа на упругую

ортотропную среду $P(t)$. Таким образом, дифференциальное уравнение (2) является дополнительным условием, из которого определяется закон движения штампа $\varepsilon(t)$.

Дифференциальные уравнения движения упругой ортотропной полуплоскости в отсутствие массовых сил принимаются в виде [1]

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 + a_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1 + a_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

где $c_2^2 = \mu_{12}/\rho$, ρ – плотность ортотропного материала полуплоскости. Условия податливости ортотропного материала упругой среды определяются соотношениями

$$\sigma_{xx} = \mu_{12} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_{yy} = \mu_{12} \left(a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_{xy} = \mu_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5)$$

где в (4), (5) $a_{ij} = C_{ij}/C_{33}$ ($i, j = 1, 2$), $\mu_{12} = C_{33}$, C_{ij} – коэффициенты тензора Коши. Связь a_{ij} ($i, j = 1, 2$) с физическими постоянными материала осуществляется по формулам

$$a_{11} = E_1 \left[\mu_{12} (1 - \nu_{12}^2 E_2/E_1) \right]^{-1}, \quad a_{22} = a_{11} E_2/E_1, \quad a_{12} = \nu_{12} a_{22} = \nu_{21} a_{11} \quad (6)$$

При выполнении условий $C_{11} = C_{22}$, $C_{11} - C_{12} = 2C_{33}$ или $a_{11} = a_{22}$, $a_{11} - a_{12} = 2$ уравнение (4), а также соотношения (5), (6) превращаются в формулы для изотропного материала.

2. Интегральное уравнение. После применения интегральных преобразований Лапласа (по времени t) и Фурье (по координате x) к (1), (4) с учетом (5) получим безразмерное интегральное уравнение поставленной нестационарной динамической контактной задачи

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k \left(\frac{\xi - x}{\Lambda} \right) d\xi = 2\pi \Delta \varepsilon^L(p) \quad |x| \leq 1 \quad (7)$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u) e^{iut} du, \quad K(u) = \varkappa \frac{\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5}{R(u) + r(u)}, \quad \varkappa = \frac{4}{\Delta_1} \sqrt{\frac{2}{a_{22}}}, \quad \Lambda = \frac{c_2}{ap} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{\frac{2}{a_{11}} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \frac{\mu_{12}}{a}}, \quad \Delta_1 = \Delta_+ + \Delta_-, \quad \Delta_{\pm} = \sqrt{\Delta_2 \pm \Delta_3}, \quad \Delta_0 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \\ \Delta_2 &= \Delta_0 - 2a_{12}, \quad \Delta_3 = \sqrt{\Delta_2^2 - 4a_{11} a_{22}}, \end{aligned}$$

$$R(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4\eta u^2 \sigma_1 \sigma_2, \quad \eta = \sqrt{a_{11}/a_{22}}, \quad (9)$$

$$r(u) = b_0 u^4 + b_1 u^2 + b_2 + b_3 \sigma_1 \sigma_2 + b_4 \sigma_2 / \sigma_1 + b_5 u^2 \sigma_3 \sigma_4 + b_6 \sigma_3 \sigma_4 + b_7 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 / \sigma_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sqrt{u^2 + \beta_k^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad \beta_1^2 = 1, \quad \beta_2^2 = a_{11}^{-1}, \quad \beta_3^2 = \beta_+, \quad \beta_4^2 = \beta_-, \\ \beta_{\pm} &= (1 - a_{22}^2) \left[-\Delta_2 + a_{22}(2a_{11} + 2(1 + a_{12}) - \Delta_0) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 2(1 + a_{12})\sqrt{a_{22}\sqrt{a_{11} + a_{22} - \Delta_2}} \right]^{-1}, \\ \sigma_5 &= \gamma_1/\sigma_1, \quad \gamma_{1,2} = \sqrt{(-b \pm \sqrt{d})/2a_{22}}, \quad b = (2a_{12} - \Delta_0)u^2 - (1 + a_{22}), \\ &\quad d = b^2 - 4a_{11}a_{22}\sigma_1^2\sigma_2^2, \quad b_0 = (2\Delta_2 - 4a_{22})/a_{22}, \\ b_1 &= 2(\Delta_0 - 2a_{22}(a_{12} + a_{11}))/a_{22}\Delta_0, \quad b_2 = (2(a_{22} - 1) - \Delta_0)/\Delta_0, \\ b_3 &= 2(\Delta_2 - 2a_{22})\eta/\Delta_0, \quad b_4 = 2(-\Delta_0 + 2a_{12} + a_{22} + 1)\eta/\Delta_0, \quad b_5 = 2\Delta_3/a_{22}, \\ &\quad b_6 = 2\Delta_3/\Delta_0, \quad b_7 = 2\eta\Delta_3/\Delta_0, \end{aligned}$$

относительно неизвестной трансформанты Лапласа $\varphi^L(x, p)$ контактных напряжений $\varphi(x, t)$.

Контур интегрирования Γ в (8) проходит под углом $-\arg p$ к положительному направлению действительной оси в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. При получении интегрального уравнения (8) использовалось важное свойство $\gamma_{1,2}$

$$\gamma_1\gamma_2 = \eta\sigma_1\sigma_2, \quad (11)$$

где $\gamma_{1,2}$ даны в формулах (10), так же как и σ_1, σ_2, η .

3. Решение интегрального уравнения и поставленной задачи. Решение интегрального уравнения задачи (7) представляется в виде суперпозиции [2]

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_-^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) - \varphi_\infty^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) \quad (12)$$

решений интегральных уравнений

$$\int_{-1}^{\infty} \varphi_+^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi\Delta\varepsilon^L(p) \quad -1 \leq x < \infty \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^1 \varphi_-^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi\Delta\varepsilon^L(p) \quad -\infty < x \leq 1 \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\infty^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi\Delta\varepsilon^L(p) \quad -\infty \leq x < \infty \quad (15)$$

Решение интегрального уравнения (15) с помощью обобщенного преобразования Фурье дается формулой

$$\varphi_\infty^L(x, p) = \Delta\Lambda^{-1}\varepsilon^L(p)K^{-1}(0), \quad (16)$$

а решения интегральных уравнений (13), (14) строятся методом Винера-Хопфа [2, 3] и имеют вид

$$\varphi_{\pm}^L(x, p) = -\frac{\Delta}{\Lambda} \frac{\varepsilon^L(p)}{K_-(0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux}}{K_+(u)iu} du \quad 0 \leq x < \infty \quad (17)$$

$$v_{\mp}^L(x, p) = \frac{\varepsilon^L(p)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{K_-(u)} - \frac{1}{K_-(0)} \right] \frac{K_-(u)}{iu} e^{-iux} \quad -\infty < x < 0 \quad (18)$$

где $v_{\mp}^L(x, p)$ трансформанта Лапласа вертикальных смещений поверхности ортотропной полуплоскости вне области контакта штампа с упругой средой.

Для эффективного вычисления квадратур (17), (18) предлагается специальная аппроксимация символа ядра интегрального уравнения (8) в комплексной плоскости следующего вида [2]

$$K(u) = \frac{\sigma_2}{u^2 + \eta_R^2} e \left\{ 0,5 \sum_{k=0}^N d_k (M_k^+(\beta_1, \beta_2, u) + M_k^-(\beta_1, \beta_2, u)) \right\} \quad (19)$$

$$M_k^{\pm}(\alpha, \beta, u) = (\sqrt{\alpha \mp iu} - \sqrt{\beta \mp iu})^{2k+2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N;$$

все основные свойства которой совпадают со свойствами $K(u)$ из (8). Аппроксимация $K(u)$ вида (19) позволяет провести факторизацию $K(u) = K_+(u)K_-(u)$ элементарными средствами

$$K_{\pm}(u) = \frac{\sqrt{\beta_2 \mp iu}}{\eta_R \mp iu} e \left\{ 0,5 \sum_{k=0}^N d_k M_k^{\pm}(\beta_1, \beta_2, u) \right\}, \quad (20)$$

что и позволяет эффективно вычислить квадратуры (17), (18). После вычисления и обращения полученных $\varphi_{\pm}^L(x, p)$, $\varphi_{\infty}^L(x, p)$ в (12) по Лапласу получим скалярное поле контактных напряжений под штампом $\varphi(x, t)$, являющиеся решением поставленной задачи

$$\varphi(x, t) = \varphi_+ \left(\frac{1+x}{c_2} a, t \right) + \varphi_- \left(\frac{1-x}{c_2} a, t \right) - \varphi_{\infty} \left(\frac{x}{c_2} a, t \right) \quad (21)$$

$$\varphi_{\pm}(u, t) = \frac{\Delta a}{c_2} \left[-\frac{1}{\pi K_-(0)} \frac{1}{\sqrt{u}} \int_0^{t-\beta_2 u} \dot{\varepsilon}(\tau) q(t-\tau, u) m_*(\frac{t-\tau}{u}) d\tau + \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{K(0)} \right] \quad (22)$$

$$\varphi_{\infty}(u, t) = \frac{\Delta a}{c_2} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{K(0)}, \quad q(t, u) = \frac{\eta_R u - t}{t\sqrt{t-\beta_2 u}}, \quad (23)$$

$$m_*(\xi) = \begin{cases} e(\psi_1(\xi)) \cos \zeta_1(\xi), & \beta_1 \leq \xi \leq t/u, \quad u = (1 \pm x)a/c_2 \\ e(\psi_2(\xi)) \cos \zeta_2(\xi), & \beta_2 \leq \xi \leq \beta_1 \end{cases}$$

$$\psi_1(\xi) = -0,5 [-d_0 \omega(\xi) + d_1 \omega^2(\xi)], \quad \zeta_1(\xi) = 0, \quad \omega(\xi) = (\sqrt{\xi - \beta_1} - \sqrt{\xi - \beta_2})^2,$$

$$\psi_2(\xi) = -0,5 \left[-d_0(2\xi - \beta_1 - \beta_2) + d_1 \left((\xi - \beta_1)^2 + (\beta_2 - \xi)^2 - 6(\xi - \beta_1)(\beta_2 - \xi) \right) \right]$$

$$\zeta_2(\xi) = \left(d_0 - 2d_1(2\xi - \beta_1 - \beta_2) \right) \sqrt{\xi - \beta_2} \sqrt{\beta_1 - \xi}$$

Одной из важнейших характеристик процесса удара является длительность контакта штампа с ортотропной средой, совпадающая по величине с временем отрыва штампа от упругой среды. В качестве условия отрыва штампа от упругой среды можно взять обнуление коэффициента при постоянной особенности в формуле для напряжений $\varphi(x, t)$ (21)

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp 0} \sqrt{1 - x^2} \varphi(x, t) = 0. \quad (24)$$

После вычисления предела в (24) получается уравнение

$$\int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = 0$$

для определения времени отрыва штампа от упругой среды.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Л.: Гостехиздат, 1950. 299 с.
- [2] *Зеленцов В.Б.* Об одном асимптотическом методе решения нестационарных динамических контактных задач. // ПММ, 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 317-326.
- [3] *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Zelentsov V.B., Dokuchaev S.A., Sakhabudinov R.V. *Nonstationary dynamic contact problem about plane die impact into orthotropic half-plane.* The considered problem has been reduced to the decision of the integral equation, approximated solution of which was received by means of special approximation of a kernel symbol in a complex plane.

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ

Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л.

Ростовский госуниверситет

Исследуется термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое со свободной деформируемой границей. Другая граница может быть мягкой или твердой стенкой. Построена длинноволновая асимптотика критических значений чисел Марангони и частоты нейтральных колебаний. Приведены результаты вычислений нейтральных кривых.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение в слое вязкой несжимаемой однородной теплопроводной жидкости, ограниченной свободной деформирующейся поверхностью $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ и твердой (или “мягкой”) стенкой $z = H$. Под мягкой понимается свободная недеформируемая поверхность. Учитываются деформируемость свободной поверхности и силы поверхностного натяжения с коэффициентом $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$. Конвекция под действием сил поверхностного натяжения называется конвекцией Марангони, так как в этом случае появляется безразмерный параметр Ma , который называется числом Марангони.

Уравнения термокапиллярной конвекции имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla T) = \chi \Delta T. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость, p — давление, T — температура, ρ_0 — плотность, ν , χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; $\mathbf{g} = \gamma \mathbf{g}$, ось z направлена вертикально вниз. Если же рассматривать перевернутый слой, то нужно заменить g на $-g$.

Краевые условия на свободной границе $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{l}) &= \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \tau_{ik} n_k - p n_i = -\sigma \varkappa n_i - \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} n_k n_i, \quad i, k = 1, 2, 3, \\ \tau_{ik} &= \nu \rho_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad \mathbf{l} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi}{\partial x_2}, 1 \right), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}, \quad k_1 \frac{\partial T}{\partial n} - b_1 T = \delta_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{l} — нормаль к свободной границе, \mathbf{n} — ее орт, τ_{ik} — тензор вязких напряжений, \varkappa — средняя кривизна. Будем считать среднюю толщину слоя равной H , а также плоскостью $z = 0$ — невозмущенную свободную поверхность. На твердой стенке зададим краевые условия:

$$\mathbf{v} = 0, \quad k_2 \frac{\partial T}{\partial z} + b_2 T = \delta_2. \quad (3)$$

Если же $x_3 = H$ — мягкая стенка, то на ней должны для скорости быть выполнены условия:

$$v_3 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0. \quad (4)$$

Условие переноса тепла остается тем же, что и в (3).

2. Равновесное решение. Задача устойчивости. Будем считать, что условия теплообмена заданы таким образом, что задача (1)–(4) имеет равновесное решение

$$\mathbf{v}^0 = 0, \quad p^0 = \rho_0 g z, \quad \xi^0 = 0, \quad T^0 = Az. \quad (5)$$

Здесь $A = \frac{b_1 \delta_2 + b_2 \delta_1}{k_1 b_2 + k_2 b_1 + b_1 b_2 H}$ — равновесный градиент температуры. Исследуя устойчивость решения (5), полагаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{u}, \quad p = p^0 + q, \quad \xi = \xi^0 + \eta, \quad T = T^0 + \theta.$$

Для возмущений \mathbf{u} , q , η , θ получим линейную задачу. После стандартных упрощений, отделение переменных x_1 и x_2 , для амплитуд нормальных возмущений скорости $v(z)$, температуры $\theta(z)$ и возвышения свободной границы δ получается спектральная задача [1].

$$\begin{aligned} \lambda(D^2 - \alpha^2)v &= (D^2 - \alpha^2)^2 v, \\ \lambda \text{Pr} \theta &= (D^2 - \alpha^2)\theta - v. \end{aligned} \quad (6)$$

Краевые условия при $z = 0$ имеют вид:

$$v = \lambda \text{Pr} \delta, \quad D^2 v + \alpha^2 v = \text{Ma} \alpha^2 (\theta + \delta), \quad (7)$$

$$\text{Cr}[(3\alpha^2 + \lambda)Dv - D^3 v] = \alpha^4 \text{BO}, \quad D\theta - \text{Bi}(\theta + \delta) = 0. \quad (8)$$

При $z = 1$ имеем условия:

$$v = 0, \quad Dv = 0, \quad D\theta + \text{V}\theta = 0, \quad D^2 v = 0. \quad (9)$$

Здесь $\lambda = ic$, где c — частота нейтральных колебаний, $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ — квадрат длины волнового вектора, Pr — число Прандтля, Ma — число Марангони, Cr — капиллярный параметр, BO — число Бонда, Bi и V — числа Био, $D \equiv \frac{d}{dz}$. Заметим, что при $\text{V} = \infty$ имеем изотермическую, а при $\text{V} = 0$ — нетеплопроводную твердую или мягкую стенку.

3. Длинноволновая асимптотика. Известно, что деформация свободной границы больше всего сказывается при малых волновых числах. Поэтому исследуем асимптотику неизвестных λ , Ma , $\theta(z)$, δ задачи (6)–(9) при малых значениях параметра α . Остальные параметры считаем фиксированными. Предварительно исключим функцию $v(z)$ и получим следующую спектральную задачу:

$$L^3 \theta - \lambda(\text{Pr} + 1)L^2 \theta + \lambda^2 \text{Pr} L \theta = 0, \quad (10)$$

$$z = 0 : \quad L\theta - \lambda \text{Pr}(\theta + \delta) = 0, \quad (11)$$

$$(D^2 + \alpha^2)L\theta - \lambda \text{Pr}(D^2 + \alpha^2)\theta = \text{Ma} \alpha^2 (\theta + \delta), \quad (12)$$

$$\text{Cr}[(3\alpha^2 + \lambda)(DL\theta - \lambda \text{Pr} D\theta) - D^3 L\theta + \lambda \text{Pr} D^3 \theta] = \alpha^2 (\alpha^2 + \text{BO})\delta, \quad (13)$$

$$D\theta - \text{Bi}(\theta + \delta) = 0. \quad (14)$$

$$z = 1 : \quad L\theta - \lambda \text{Pr} \theta = 0, \quad DL\theta - \lambda \text{Pr} D\theta = 0, \quad (15)$$

$$D\theta + \text{V}\theta = 0, \quad D^2 L\theta - \lambda \text{Pr} D^2 \theta = 0. \quad (16)$$

При малых α будем разыскивать неизвестные задачи (10)–(16) в виде:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \lambda_1\alpha + \dots, & \text{Ma} &= \frac{\text{Ma}_0}{\alpha^2} + \text{Ma}_1 + \dots, \\ \theta(z) &= \theta_0(z) + \theta_1(z)\alpha + \dots, & \delta &= \delta_0 + \delta_1\alpha + \dots.\end{aligned}\quad (17)$$

Подставляя эти разложения, для главных членов λ_0 , Ma_0 , $\theta_0(z)$, и δ_0 получим задачу:

$$D^6\theta_0 - \lambda_0(\text{Pr} + 1)D^4\theta_0 + \lambda_0^2\text{Pr}D^2\theta_0 = 0, \quad (18)$$

$$z = 0: \quad D^2\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}(\theta_0 + \delta_0) = 0, \quad (19)$$

$$D^4\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}D^2\theta_0 = \text{Ma}_0(\theta_0 + \delta_0), \quad (20)$$

$$\lambda_0(\text{Pr} + 1)D^3\theta_0 - \lambda_0^2\text{Pr}D\theta_0 - D^5\theta_0 = 0, \quad (21)$$

$$D\theta_0 - \text{Bi}(\theta_0 + \delta_0) = 0. \quad (22)$$

Здесь мы рассмотрим два варианта краевых условий при $z = 1$, которые соответствуют изотермической мягкой стенке ($B = \infty$) и нетеплопроводной твердой ($B = 0$). Далее будет ясно, почему выбраны именно эти два случая.

В первом случае краевые условия при $z = 1$ имеют вид:

$$D^2\theta_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad D^4\theta_0 = 0. \quad (23)$$

Во втором случае при $z = 1$ должны выполняться условия:

$$D^2\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}\theta_0 = 0, \quad D^3\theta_0 - \lambda_0\text{Pr}D\theta_0 = 0, \quad D\theta_0 = 0. \quad (24)$$

Далее полагаем $\lambda = ic$ и составим трансцендентные уравнения для нахождения частоты нейтральных колебаний c и выведем формулу для параметра Ma_0 .

Рассмотрим случай $\text{Pr} \neq 1$. Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$\theta_0(z) = A_0 + A_1z + A_2\text{ch}p_1z + A_3\text{sh}p_1z + A_4\text{ch}p_2z + A_5\text{sh}p_2z, \quad (25)$$

где $p_1 = P\sqrt{\lambda_0}$, $p_2 = \sqrt{\lambda_0}$, $P = \sqrt{\text{Pr}}$. Подставляя $\theta_0(z)$ в краевые условия (19)–(24), получим две системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных δ_0 , A_0, \dots, A_5 , которые соответствуют двум рассматриваемым случаям граничных условий. Из условия нетривиальной совместности каждой из этих систем, получаем два трансцендентных уравнения для частоты c . Они имеют вид

$$F(c) \equiv \text{Im} K(c) = 0. \quad (26)$$

Подробно это проделано в работе [1]. Мы здесь приведем основные формулы. В случае мягкой изотермической стенки имеем

$$K \equiv K_1^{01} = -\frac{\text{sh}p_2(p_1\text{ch}p_1 + \text{Bi}\text{sh}p_1)}{\text{sh}p_2(\text{Bi}\text{Pr}^{-1}\text{sh}p_2 + p_2\text{sh}p_2)}. \quad (27)$$

Для твердой нетеплопроводной стенки

$$K \equiv K_2^{01} = -\frac{\text{ch}p_2(p_1\text{sh}p_1 + \text{Bi}\text{ch}p_1)}{\text{ch}p_1(\text{Bi}\text{Pr}^{-1}\text{ch}p_2 + p_2\text{sh}p_2)}. \quad (28)$$

Число Марангони Ma_0 выражается через параметр K по формуле [1]

$$Ma_0 = \frac{Pr(Pr - 1)c^2}{(1 + Pr K^{-1})}. \quad (29)$$

Из этой же формулы можно выразить K через Ma_0 и убедиться, что K — вещественное число. Поэтому и возникает уравнение (26) для частоты c .

Далее рассмотрим случай $Bi = 0$. Тогда из формулы (27) получаем:

$$K_1^{01} = -P \frac{ch p_1 sh p_2}{ch p_2 sh p_1}, \quad (30)$$

и из формулы (28) имеем

$$K_2^{01} = -P \frac{ch p_2 sh p_1}{ch p_1 sh p_2}. \quad (31)$$

В результате получаем соотношение $K_1^{01} K_2^{01} = Pr$.

Отсюда получаем, что уравнение (26) в этих двух случаях будет одно и то же (!):

$$sh Px \sin x - \sin Px sh x = 0, \quad (32)$$

где $x = \sqrt{2c}$, $c^2 = x^2/2$. Легко убедиться, что для корней этого уравнения выполняется соотношение

$$x \left(\frac{1}{P} \right) = Px(P). \quad (33)$$

Это означает, что достаточно, например, найти корни при $P > 1$. Из этой формулы, в частности, следует, что частота c нейтральных колебаний при $Pr < 1$ больше, чем при $Pr > 1$, так что $c(\frac{1}{P}) = Pr c(P)$. В работе [1] доказано, что при $P = 2, 3, \dots$ — целом, уравнение (32) имеет корни $x_l = l\pi$, $l = 1, 2, \dots$, и только такие.

Если известен параметр $K(x)$, то по формуле (29) находим соответствующие значения Ma_0 . В результате полученных выше соотношений для двух рассматриваемых случаев получаем зависимость между Ma_{01}^{01} и Ma_{02}^{10}

$$Ma_{02}^{10} = - \frac{c^2 Pr [c^2 Pr (1 - Pr) + Ma_{01}^{01}]}{Ma_{01}^{01} + c^2 Pr}. \quad (34)$$

Это означает, что при $\alpha \rightarrow 0$ достаточно провести вычисления для одного случая, а затем по этой формуле пересчитать Ma_0 для другого.

4. Результаты вычислений. Спектральные задачи (6)–(9) решались сведением к трансцендентному уравнению. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $Bo = 0$, $Cr = 0.01$, $Bi = 0$, $Pr = 0.01$ и $Pr = 100$. В результате получено, что уже при $\alpha = 0.01$ численные значения и асимптотические, соответствующие формулам (17), совпадают с хорошей точностью. Кроме того, в случае изотермической мягкой стенки численно обнаружена еще одна асимптотика при $\alpha \rightarrow 0$: $Ma = -12.03 + \dots$, $c = 34.69\alpha + \dots$. Соответствующие нейтральные кривые $Ma(\alpha)$ и $c(\alpha)$ приведены на Рис. 1, 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00567-а, № 04-01-96802-р2004юг-а) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-1768.2003.1).

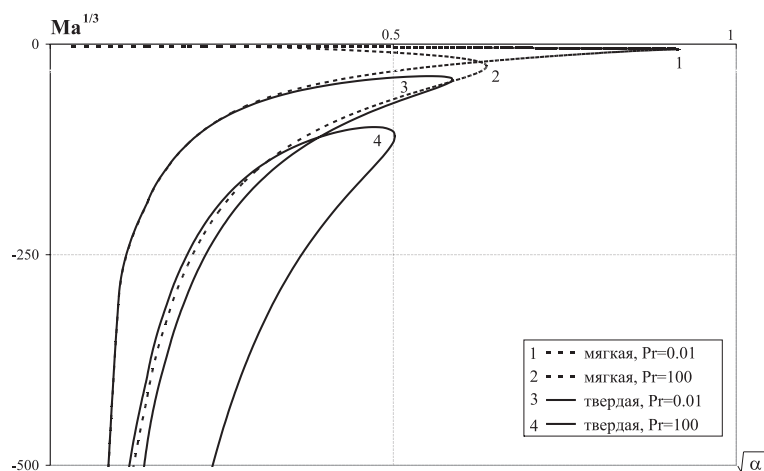


Рис. 1.

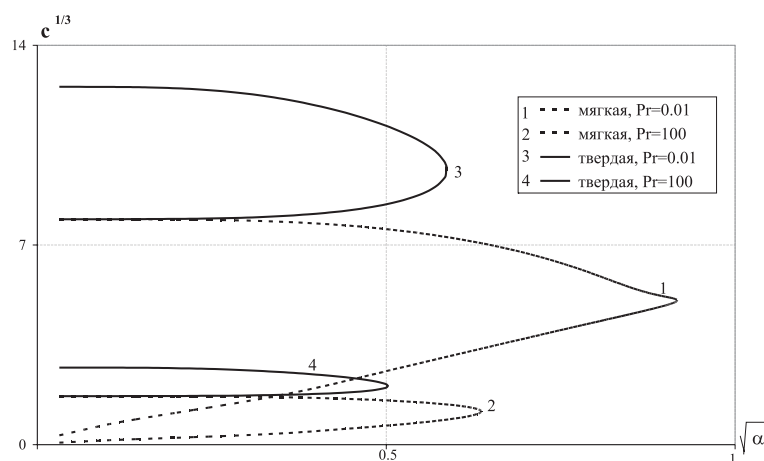


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зеньковская С. М. Длинноволновая колебательная неустойчивость термокапиллярных течений в горизонтальном слое // М., 2005. 21 с. – Деп. в ВИНТИ

Zenkovskaya S.M., Shleykel A.L. *Oscillatory thermocapillary instability at negative Marangoni numbers* Thermocapillary convection in horizontal layer with free deformable boundary is investigated. The other boundary can be soft or hard wall. Long-wavelength asymptotics for critical Marangoni numbers and frequency of neutral oscillations is derived. The results of computation of neutral curves are presented.

МЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НАНОРАЗМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

**Иванова Е. А., Индейцев Д. А., Морозов Н. Ф.,
Семенов Б. Н.**

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Целью данной работы является разработка теоретической основы экспериментального определения параметров жесткости нанообъектов. Один из наиболее эффективных методов определения упругих модулей, используемых в макромеханике, основан на измерении собственных частот исследуемого объекта. В работе обсуждаются нюансы, возникающие при использовании этого метода применительно к нанообъектам. Рассматриваются задачи определения изгибной жесткости наноболочек и наностержней.

В настоящее время актуальной является задача определения упругих модулей объектов наноразмерного масштабного уровня. Многими исследователями отмечалось несоответствие между значениями модулей упругости, полученными из микро- и макроэкспериментов. В работах [1], [2] на примере двумерной монокристаллической полосы теоретически исследована зависимость значений модуля Юнга и изгибной жесткости от числа атомарных слоев монокристалла. Сравнение результатов работ [1], [2] показывает, что три выражения для изгибной жесткости стержня: выражение, известное из континуальной теории, выражение, полученное путем подстановки в формулу континуальной теории модуля Юнга, вычисленного для дискретной модели [1], и выражение, полученное непосредственно для дискретной модели [2], при малом числе атомарных слоев существенно различаются. Таким образом, важной задачей является разработка методов непосредственного определения упругих характеристик тонкостенных нанообъектов, без использования каких-либо формул, связывающих упругие модули нанообъекта с его толщиной и модулем Юнга материала. В частности, актуальной является задача экспериментального определения механических характеристик нанообъектов.

Особую трудность представляет экспериментальное определение изгибной жесткости наноразмерных оболочек. Это связано с тем, что при произвольном деформировании таких распространенных нанообъектов, как нанотрубки и фуллерены, материал работает и на изгиб, и на растяжение одновременно. Поэтому все величины, которые могут быть непосредственно измерены (например, собственные частоты), будут зависеть сложным образом и от изгибной жесткости, и от жесткости на растяжение. В последние годы, наряду с нанотрубками и фуллеренами, были получены нанообъекты более сложной конфигурации. С точки зрения возможности экспериментального определения изгибной жесткости особый интерес представляют наноразмерные цилиндрические спирали [3]. Это связано с тем что, во-первых, при произвольном деформировании спиральных оболочек материал работает, главным образом, на изгиб и при интерпретации экспериментальных данных эффектами растяжения материала можно пренебречь.

Во-вторых, собственные формы колебаний спиральной оболочки наблюдать значительно легче, чем связанные с чистым изгибом материала собственные формы колебаний цилиндрической оболочки. Последнее утверждение иллюстрирует Рис. 1, где приведены первые четыре формы колебаний спиральной оболочки. Исследование динамики спиральных оболочек может послужить теоретической

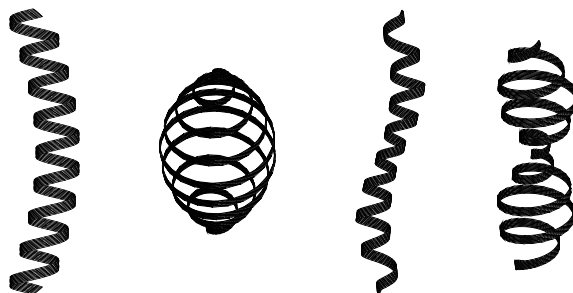


Рис. 1. Формы колебаний спиральной цилиндрической оболочки.

основой для экспериментального определения изгибной жесткости оболочек наноразмерного масштабного уровня. Введем в рассмотрение безразмерную частоту Ω :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho R^4}{D}} \omega, \quad (1)$$

где ρ — поверхностная плотность массы, D — изгибная жесткость, R — радиус спиральной оболочки, ω — собственная частота. Показано, что безразмерные частоты Ω_n зависят от номера частоты и трех безразмерных параметров

$$\Omega_n = \Omega_n \left(\alpha, \frac{l}{R}, \frac{a}{R} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

где α — угол подъема витков, l , a — длина и ширина полосы формирующей спираль. Рассмотрим две тонкие спиральные оболочки с различными физическими и геометрическими характеристиками, но с одинаковыми безразмерными параметрами α , l/R , a/R . Будем считать что оболочки имеют одинаковые условия закрепления. В этом случае, согласно формуле (2), спектры безразмерных собственных частот рассматриваемых оболочек совпадают

$$\forall n : \quad \Omega_n^{(1)} = \Omega_n^{(2)}. \quad (3)$$

Тогда, в соответствие с формулой (1), отношение собственных частот $\omega_n^{(1)}/\omega_n^{(2)}$ не зависит от их порядкового номера n

$$\frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} = \sqrt{\frac{D_1 \rho_2 R_2^4}{D_2 \rho_1 R_1^4}}. \quad (4)$$

Соотношение (4) может послужить теоретической основой для экспериментального определения изгибной жесткости оболочки наноразмерного масштабного уровня. Для определения изгибной жесткости необходимо провести следующие измерения и вычисления:

- 1) измерить первую собственную частоту спиральной оболочке $\omega_1^{(1)}$;
- 2) измерить массу m_1 и геометрические размеры l_1 , a_1 , R_1 оболочке и вычислить ее поверхностную плотность $\rho_1 = m_1/(l_1 a_1)$;
- 3) взяв для сравнения макроскопическую спиральную оболочку с такими же безразмерными параметрами α , l/R , a/R и условиями закрепления, как у исследуемой оболочке, определить ее характеристики $\omega_1^{(2)}$, D_2 , ρ_2 , R_2 ;
- 4) вычислить значение изгибной жесткости оболочке D_1 , воспользовавшись формулой (4).

Исследование свойств нанобъектов, в том числе измерение их собственных частот, в настоящее время осуществляется с помощью зондовой микроскопии. В частности, для этих целей широко используется атомный силовой микроскоп (АСМ). Основной проблемой, возникающей при измерении частот исследуемого объекта с помощью АСМ, является известное в механике перераспределение собственных частот колебаний системы кантилевер – поверхность между собственными частотами каждого из них в отдельности [4]. Причем характер смещения спектра существенно зависит от расстояния между острием иглы и поверхностью. Вышесказанное указывает на принципиальное отличие условий, в которых проводятся эксперименты с нанобъектами, от условий экспериментов с макрообъектами. При исследовании макрообъектов размеры измерительных приборов (например, тензодатчиков) существенно меньше размеров исследуемого объекта. При исследовании объектов наноразмерного масштабного уровня используется микро-размерное оборудование. Поэтому важное значение приобретает задача исследования взаимодействия нанобъектов с измерительным оборудованием. Ниже эта проблема обсуждается применительно к задаче экспериментального определения упругих характеристик нанобъектов с помощью АСМ. Фактически, возникают две задачи, лежащие на стыке механики и экспериментальной физики.

Первая задача – это определение упругих модулей нанобъектов по частотам системы нанобъект – кантилевер.

Вторая задача – это разработка условий эксперимента, при котором из спектра системы нанобъект – кантилевер можно выделить собственные частоты нанобъекта.

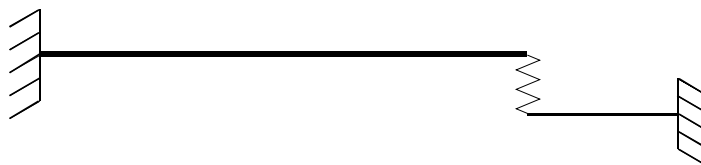


Рис. 2. Кантилевер (слева) и наностержень (справа).

Постановка задачи и описание исследуемой системы кантилевер – поверхность в настоящей статье является естественным продолжением работы [5]. Основное отличие заключается в изучении поверхности, обладающей собственной динамикой. В качестве механической модели последней могут рассматриваться элементы тонкостенных (наноразмерных) конструкций, таких как: стержни, оболочки, спирали. Ниже приводится теоретическая основа определения собственных частот колеба-

ний стержневых конструкций с помощью АСМ. Итак, рассмотрим следующую механическую модель объекта исследования (Рис. 2). Стержень, изображенный слева, моделирует кантилевер. Используются обозначения: L_1 — длина кантилевера, D_1 и ρ_1 — его изгибная жесткость и погонная плотность. Стержень, изображенный справа, моделирует исследуемый объект, изгибную жесткость которого требуется определить [3]. Правый конец стержня жестко закреплён, левый конец взаимодействует с кантилевером. Приняты обозначения: L_2 — длина наностержня, D_2 и ρ_2 — его изгибная жесткость и погонная плотность. Полевое взаимодействие между наностержнем и кантилевером моделируется линейной пружиной жесткостью C , что соответствует линеаризации потенциала Леннарда-Джонса в области статически равновесного состояния. В отсчетной конфигурации стержни считаются недеформированными, а пружина — ненапряженной. Решение задачи о свободных колебаниях описанной системы приводит к следующему частотному уравнению

$$\left[1 + \cos(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) + \frac{C}{D_2 \mu^3} (\sin(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2) - \cos(\mu L_2) \operatorname{sh}(\mu L_2))\right] (1 + \cos(\lambda L_1) \operatorname{ch}(\lambda L_1)) + \frac{C}{D_1 \lambda^3} [\sin(\lambda L_1) \operatorname{ch}(\lambda L_1) - \cos(\lambda L_1) \operatorname{sh}(\lambda L_1)] (1 + \cos(\mu L_2) \operatorname{ch}(\mu L_2)) = 0. \quad (5)$$

Здесь использованы обозначения $\lambda^2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{D_1}} \omega$, $\mu^2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{D_2}} \omega$, где ω — собственная частота системы. Как видно из уравнения (5), все собственные частоты зависят от всех параметров системы и из частотного спектра системы невозможно выделить собственные частоты наностержня. Рассмотрим вынужденные гармонические колебания системы. Пусть перемещение u левого конца кантилевера имеет вид

$$u(0, t) = A \sin(\Omega t), \quad A = \text{const}. \quad (6)$$

Экспериментально можно фиксировать не только резкое возрастание амплитуды колебаний, но и обращение амплитуды колебаний в ноль. В системах с распределенными параметрами, состоящими из нескольких тел, обращение амплитуды колебаний в ноль может иметь место в двух случаях: когда точка, в которой измеряется амплитуда, является узлом данной формы колебаний и когда происходит динамическое демпфирование колебаний одного тела на парциальной частоте другого тела (зачастую это явление называют “антирезонанс”). Поставим вопрос так: существуют ли частоты вынужденных колебаний Ω , при которых правый конец кантилевера, контактирующий с нанообъектом, остается неподвижным в любой момент времени? Ответом на этот вопрос будет решение уравнения

$$u(L_1, t) = 0. \quad (7)$$

Решив уравнение (7), можно определить частоты Ω_n , при которых амплитуда колебаний правого конца кантилевера обращается в ноль. Можно показать, что уравнение (7) распадается на два независимых уравнения. Первое уравнение зависит только от параметров кантилевера и не представляет интереса. Второе уравнение имеет вид

$$1 + \cos(\mu_* L_2) \operatorname{ch}(\mu_* L_2) + \frac{C}{D_2 \mu_*^3} [\sin(\mu_* L_2) \operatorname{ch}(\mu_* L_2) - \cos(\mu_* L_2) \operatorname{sh}(\mu_* L_2)] = 0. \quad (8)$$

Изгибную жесткость наностержня можно определять как по резонансным частотам, воспользовавшись уравнением (5), так и по “антирезонансным” частотам, воспользовавшись уравнением (8). Оба уравнения содержат два неизвестных параметра: изгибную жесткость наностержня D_2 и жесткость связи иглы кантилевера с наностержнем C . (Параметры кантилевера известны; массу m_2 и длину L_2 наностержня можно измерить, погонная плотность для однородного стержня вычисляется по формуле $\rho_2 = m_2/L_2$.) Если измерены две частоты (резонансные или “антирезонансные”), их значения можно подставить в соответствующие уравнения (5) или (8), в результате чего задача определения изгибной жесткости наностержня сведется к решению системы двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных. Следует отметить, что уравнение (8) для “антирезонансных” частот проще уравнения (5), и в отличие от уравнения (5), уравнение (8) не содержит малого параметра $\frac{C}{D_1\lambda^3}$. Таким образом, с вычислительной точки зрения метод определения изгибной жесткости наностержня по “антирезонансным” частотам имеет преимущество.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 03-01-00721 и 05-01-00094.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // ДАН. 2001. Т. 381, № 3, С. 825–827.
- [2] Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Особенности расчета изгибной жесткости нанокристаллов // ДАН. 2002. Т. 385, № 4. С. 494–496.
- [3] Принц В.Я. Трехмерные самоформирующиеся наноструктуры на основе свободных напряженных гетеропленок // Известия ВУЗов. Физика. 2003. № 6. С. 35–43.
- [4] Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: 1970.
- [5] Rabe U., Janser K., Arnold W. Vibrations of free and surface-coupled atomic force microscope cantilevers: Theory and experiment // Rev. Sci. Instrum. Vol. 67, № 9. September 1996. P. 3281–3293.

Ivanova E.A., Indeitsev D.A., Morozov N.F, Semenov B.N. *Nanosize objects mechanical parameters. Theory and experiment.* Theoretical foundation of the experimental determination of stiffness parameters is carried out. One of the most effective methods of elastic modulus determination, used in macromechanics, is based on measuring of eigenfrequencies of the investigated object. Nuances, taking place when the method is used for determination of nanoobject stiffness parameters, is discussed in the presented paper. Problems of determination of bending stiffness of nanoshells and nanorods are considered.

ПРИМЕНЕНИЕ МГЭ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Игумнов Л. А.

НИИ Механики Нижегородского госуниверситета

Работа посвящена расчету методом граничных элементов начально-краевых задач трехмерных теорий упругости и вязкоупругости. Использована прямая формулировка метода в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа по времени на основе схемы Дурбина. Вязкоупругие свойства материалов описываются соотношениями классических регулярных или модифицированных слабосингулярных моделей. Результаты расчетов для упругого случая сравниваются с соответствующими результатами, полученными методом граничных элементов в явном времени с использованием шаговых процедур.

1. Постановка задачи. Рассматривается кусочно-однородное тело $\Omega = \bigvee_{k=1}^K \Omega_k$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ в R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Предполагается, что Ω_k являются изотропными вязкоупругими телами [1, 2]. Для каждой однородной части Ω_k заданы: ρ^k — плотность материала, $\lambda^k(t)$ и $\mu^k(t)$ — функции Ламе материала. Динамическое состояние каждой части вязкоупругого тела описывается соответствующей системой дифференциальных уравнений в перемещениях Ламе. Рассматривается случай пропорциональных функций памяти, поэтому достаточно описать физические соотношения, к примеру, для $i = j$:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} = 2 \int_0^t G(t - \tau) d\varepsilon_{ij}(\tau),$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = -R(t), R(t) = K(t) - \int_0^t K(t - \tau)K(\tau)d\tau + \dots, J(t) = K(t),$$

где $G(t)$ — функция памяти материала, $R(t)$, $K(t)$ — ядра релаксации и ползучести материала. Берутся функции памяти классических вязкоупругих моделей (Максвелла, Кельвина-Фойгта, стандартного вязкоупругого тела), а также функции памяти модифицированной теории вязкоупругости, для которой ядра имеют вид:

$$\varphi(t) = \ln \frac{1}{t_+}, \quad \varphi(t) = \frac{t_+^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Вектор напряжений $t_n(x, t)$ в обозначим через $t^k(x, t)$. Типы граничных условий для Ω_k :

$$u_l^k(x, t) = f_l^k(x, t), \quad x \in \Gamma^u \cap \Gamma_k; \quad t_l^k(x, t) = g_l^k(x, t), \quad x \in \Gamma^\sigma \cap \Gamma_k; \quad u_l^k(x, t) = u_l^s(x, t),$$

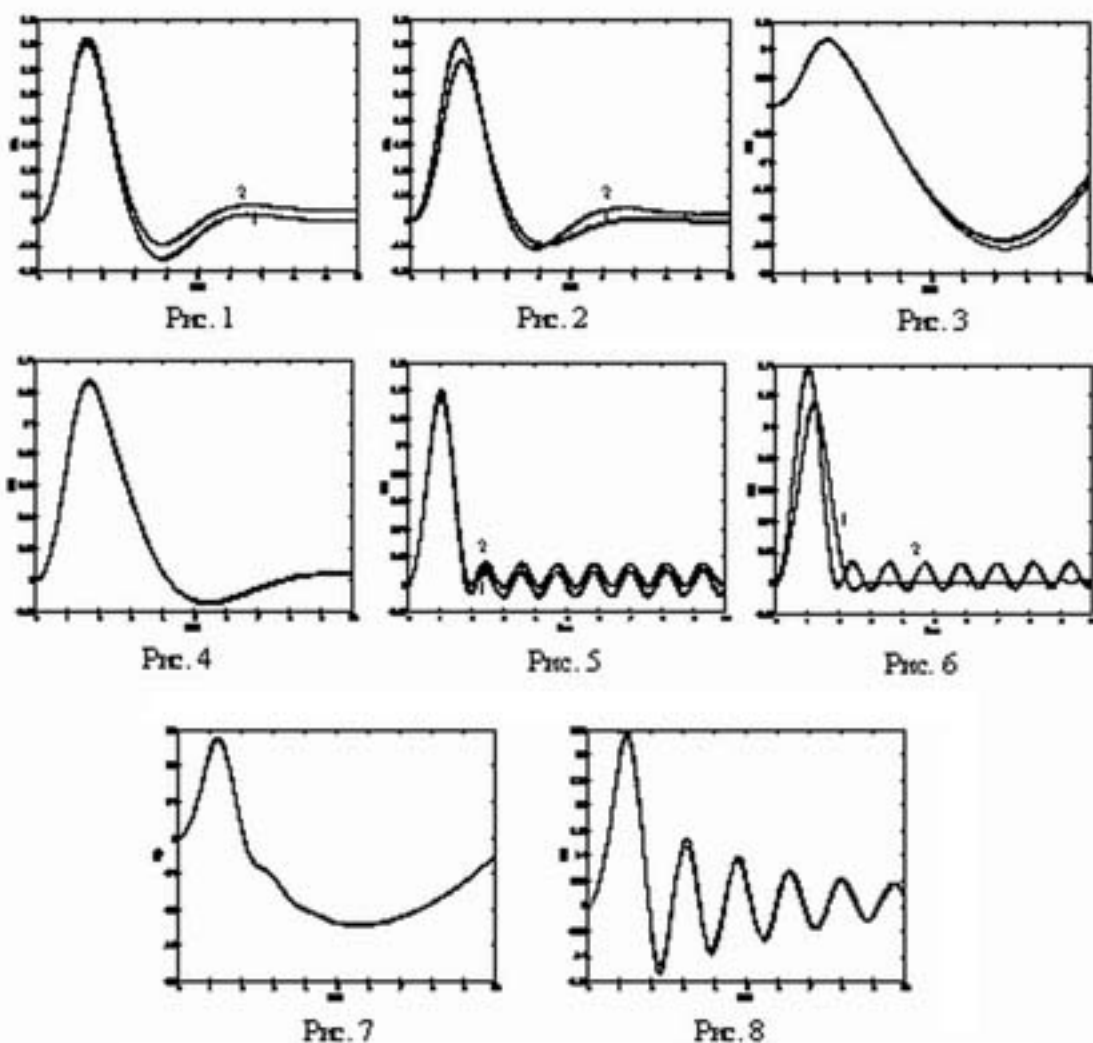
$$t_l^k(x, t) = -t_l^s(x, t), \quad x \in \Gamma'_{ks}; \quad \Gamma^u \cup \Gamma^\sigma = \Gamma \cap \Gamma'_{ks} = \Omega_k \cap \Omega_s$$

В дальнейшем интегральные представления рассматриваются в терминах преобразования Лапласа с параметром p . Для расчета задач в явном времени применяется процедура обратного преобразования Лапласа.

2. Интегральная формулировка и дискретизация. В качестве метода решения используется прямая формулировка метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) [1,3]. Для каждой из Ω_k можем записать

$$c_{lj}(x)\bar{u}_j^k(x,p) + \int_{\Gamma_k} T_{lj}^k(x,y,p)\bar{u}_j^k(y,p)d_yS = \int_{\Gamma_k} U_{lj}^k(x-y,p)\bar{t}_j^k(y,p)d_yS,$$

$$l = 1, 2, 3, x \in \Gamma. c_{lj}(x) = \delta_{lj}/2$$



Здесь T_{lj}^k и U_{lj}^k – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения движения. Граница Γ_k тела Ω_k аппроксимируется совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы. Для аппроксимации граничных перемещений применяются билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоян-

ные элементы. Дискретный аналог ГИУ строится методом коллокаций. За узлами коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. При вычислении коэффициентов дискретных аналогов используется прием устранения особенности подынтегральных выражений. Численное интегрирование построено на основе квадратурных формул Гаусса.

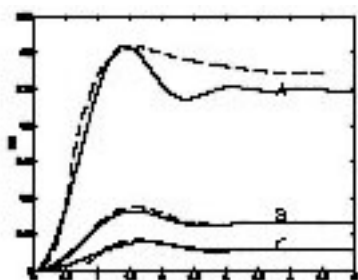


Рис. 9

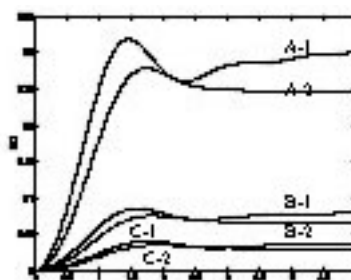


Рис. 10

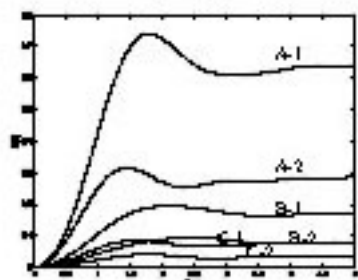


Рис. 11

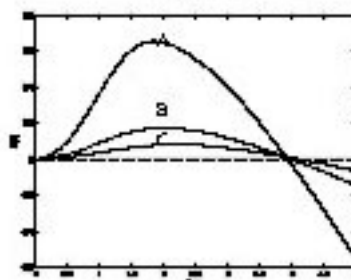


Рис. 12

3. Численные эксперименты. На рис. 1-8 приводятся результаты расчета задач о действии нестационарной нагрузки (треугольного вида – единичной высоты и основания 2) на сферическую полость и шар. Результаты расчетов сравнива-

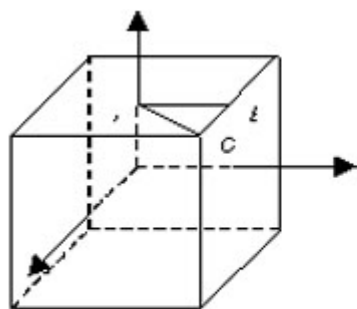


Рис. 13

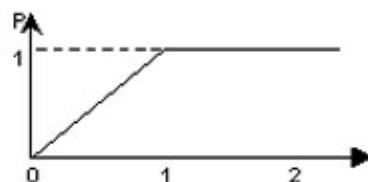
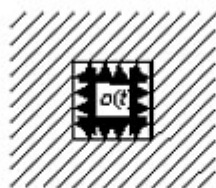
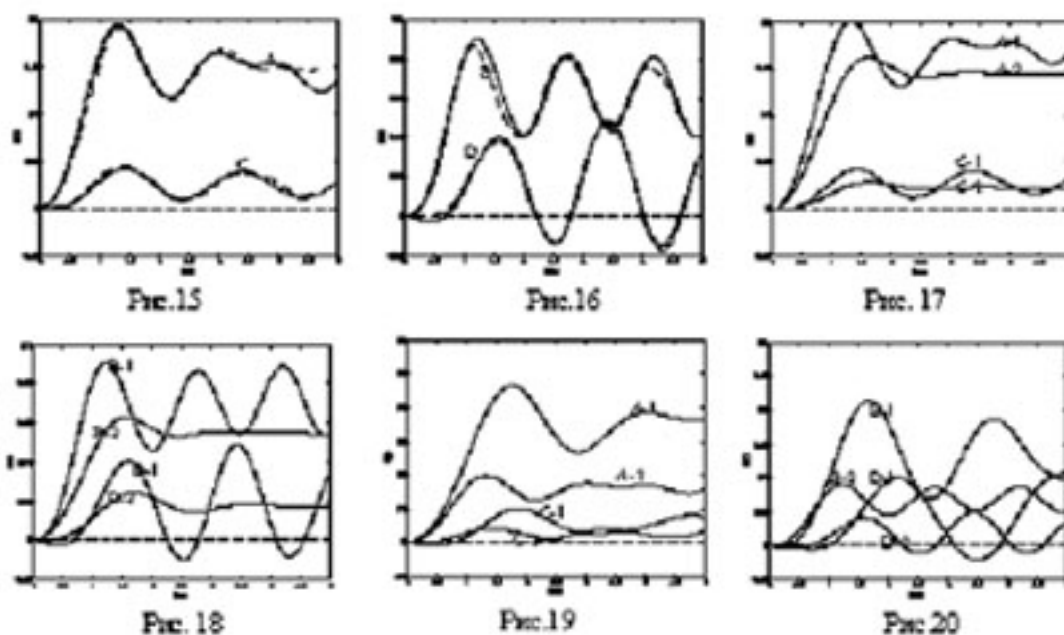


Рис. 14

ются как с аналитическим решением (для сферической полости), так и с результатами других авторов [1, 3], полученными с использованием шаговых процедур. Для задачи о единичной сферической полости (шаре) граница аппроксимируется 384 биквадратичными элементами. Дискретные аналоги ГИУ строились с учетом трех плоскостей симметрии ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Величины, обратные характерным временам релаксации и ползучести для классических моделей, выбираются

сле



дель стандартного вязкоупругого тела $\gamma = 0,05$ (при этом длительный модуль составляет четверть мгновенного). Кроме того $\alpha = 0,9$. Значения мгновенного модуля выбирались из условий, что в задаче о сферической полости: $C_1 = 1.309307$, $C_2 = 0.6546537$, $\rho = 7.0$, в задаче о шаре: $C_1 = 2.0$, $C_2 = 1.0$, $\rho = 1.0$, в задаче о кубической полости: $C_1 = 2.0$, $C_2 = 1.0$, $\rho = 1.0$. На рис. 1-4 изображены решения задачи о сферической полости (отличие аналитического решения от численного не различимы на рисунках). На рис. 1 кривая 1 соответствует упругой модели, кривая 2 – модели Максвелла. На рис. 2 кривая 1 соответствует модели Кельвина-Фойгта, кривая 2 – модели стандартного вязкоупругого тела. Рис. 3,4 соответствуют решениям для логарифмической и степенной моделей. На рис. 5-8 изображены решения задачи о шаре.

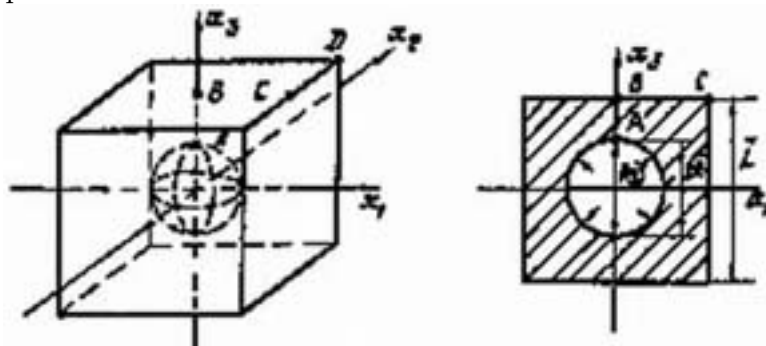


Рис.21

На рис. 5 кривая 1 соответствует упругой модели, кривая 2 – модели Максвелла. На рис. 6 кривая 1 соответствует модели Кельвина-Фойгта, кривая 2 – модели

стандартного вязкоупругого тела. Рис. 7 и 8 соответствуют решениям для логарифмической и степенной моделей. На рис. 9-12 приведены графики перемещений граничных точек кубической полости от нагрузки (рис. 14). Буквами A , B , C отмечены графики, относящиеся соответственно к точкам A , B , C (рис. 13). Граница полости аппроксимировалась 1176 элементами/ Параметры моделей сохранены из предыдущей задачи. Подобная упругая задача решалась в [1] (использовалась четырехшаговая численная схема). Результаты из [1] приведены в виде пунктирных линий.

Задача о давлении (рис. 14) на границе сферической полости, расположенной в кубе (рис. 21) решалась в безразмерных величинах. Безразмерные параметры задачи были выбраны следующими: $\bar{L} = 2$, $\bar{R} = 0,5$, $\bar{c}_1 = 2$, $\bar{c}_2 = 1$. Учитывались пять плоскостей симметрии. При этом на всей поверхности тела порождалась сетка, состоящая из 1200 элементов. На рис. 15 представлены графики изменения во времени перемещений для упругой модели в точках A и C . На рис. 16 представлены соответственно графики изменения во времени компонент перемещений в точках B и D грани куба. На рис. 17,18 кривые 1 соответствуют модели Максвелла, кривые 2 – модели Кельвина-Фойгта. На рис. 19,20 кривые 1 соответствуют модели стандартного вязко-упругого тела, кривые 2 – степенной модели. Подобная упругая задача решалась в [3] с помощью шаговой схемы (порядок шаговой схемы $s = 14$). Результаты из [3] приведены в виде пунктирных линий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ. 1986. 296 с.
- [2] Локшин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 152 с.
- [3] Хуторянский Н.М., Турилов В.В., Игумнов Л.А. Разработка метода гранично-временных элементов для решения трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. М., 1995. № 53. С. 186–201.

Igumnov L.A. *Application of boundary-element method with Laplas transformation to e decision of unsteady problems of three-dimensional theory of viscoelasticity* . The paper deals with analysing 3-D initial boundary-value problems of elasticity and visco-elasticity using the boundary-element method. A direct formulation of the method in combination with the Laplace integral transformation in time based on Durbin's scheme is used . The visco-elastic properties of the materials are described in terms of the relations of classical regular or modified weakly singular models. The results computed for an elastic case are compared with the corresponding results obtained with the help of the boundary -element method in explicit time using stepped procedures.

ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЧАСТИЦ ВОДОРОДА НА ОХРУПЧИВАНИЕ МЕТАЛЛОВ

Индейцев Д. А., Семенов Б. Н.

ИПМаш РАН, Санкт-Петербургский государственный университет

Водородное охрупчивание материалов является одним из важных факторов при оценке работоспособности конструкций. Несмотря на то, что исследованию влияния водорода на свойства металлов и сплавов посвящено много работ, в этой проблеме еще достаточно "белых" пятен. К их числу относится вопрос о влиянии кинетических процессов внутри материала, приводящих к перераспределению водорода, на основные прочностные характеристики при статическом и динамическом нагружении. Отсутствие достоверной механической модели, описание которой базируется на основных фундаментальных принципах рациональной механики делает проблему весьма актуальной, т.к., по своей сути, наличие такой модели позволило бы описывать влияние внутренней кинетики на макропараметры материала. В рамках данной работы предлагается модель, базирующаяся на физических экспериментах, указывающих на снижение энергии разрыва межатомных связей при посадке частиц водорода на последнюю, т.е. снижение уровня свободной энергии. Предложенная модель позволяет объяснить локализацию водорода в областях повышенной концентрации напряжений.

Общепризнано, что водород – одна из наиболее опасных примесей для подавляющего большинства металлов и сплавов. Неудивительно, что изучению вопросов влияния водорода на различные служебные свойства материалов посвящено огромное количество работ. И все же в этой проблеме еще достаточно "белых" пятен. К их числу относится вопрос о влиянии кинетических процессов внутри материала, приводящих к перераспределению водорода, на основные прочностные характеристики при статическом и динамическом нагружении. Отсутствие достоверной механической модели, описание которой базируется на основных фундаментальных принципах рациональной механики делает проблему весьма актуальной, т.к., по своей сути, наличие такой модели позволило бы описывать влияние внутренней кинетики на макропараметры материала, что сегодня исключительно важно ввиду огромного количества гипотез, которые готовы подтвердить лишь конкретные эксперименты и не позволяют их использовать в других случаях.

Основная гипотеза, заложенная в основу предлагаемой модели, базируется на физических экспериментах, указывающих на снижение энергии разрыва межатомных связей при посадке частиц водорода на последнюю, т.е. снижение уровня свободной энергии. Надо сказать, что этот эффект имеет место и для скопления дефектов решетки: дислокаций, вакансий и т.п. Таким образом, основные уравнения, которые будут приводиться ниже, можно ожидать, будут справедливы и в других случаях, связанных с описанием ослабления межатомных связей решетки.

Вполне естественно продемонстрировать упомянутую выше гипотезу на примере одномерной цепочки, состоящей из одинаковых частиц – точечных масс m_0 (масса атома кристаллической решетки материала), соединенных одинаковыми нелинейными пружинами длины a .

Основное уравнение движения в длинноволновом приближении имеет вид [1]

$$m_0 \ddot{u} = -a[f(a(1 + u'))]' \quad (1)$$

Для малых деформаций $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ естественно приходим к уравнению вида

$$\ddot{u} - \vartheta_0^2 u'' = 0, \quad \vartheta_0^2 = \sqrt{\frac{c}{m}} a \quad (2)$$

т.к. $f[a(1 + \varepsilon)] \approx -Ca\varepsilon = -Ca\frac{\partial u}{\partial x}$.

Ослабление межатомной связи, вызванное "посадкой" на нее либо частиц водорода либо иных подвижных внутренних элементов структуры, можно представить следующей схемой образования новой межатомной связи как последовательные соединения упругих связей основной решетки и внедренных упругих связей новых элементов (на примере частиц водорода).

Естественно, такая схема справедлива при предположении малости массы частиц подвижной структуры, т.е. $m_0 \gg m_H$.

Эквивалентная жесткость новой связи очевидно может быть найдена из уравнения

$$\frac{N_\Sigma}{C_\Xi} = \frac{N_0}{C_0} + \frac{N_H^+}{C_H} \quad N_\Sigma = N_0 + N_H^+ \quad (3)$$

Или, записывая последние выражения в привычных обозначениях для сплошной среды, т.е. выводя эффективный модуль упругости, получим

$$\sigma^{(1)} = E_\Xi \varepsilon, \quad E_\Xi = \frac{E_0 E_H}{n_0 E_H + n^+ E_0}, \quad n_0 = \frac{N_0}{N_\Sigma}, \quad n^+ = \frac{N_H^+}{N_\Sigma}, \quad n_0 + n^+ = 1. \quad (4)$$

Здесь N_Σ — полное число частиц в элементарном объеме

N_0 — число частиц, соединенных неиспорченными связями,

N_H^+ — число частиц водорода, присоединенного к решетке со своими связями жесткостью C_H .

Соответственно n_0, n^+ - концентрации указанных выше частиц. В уравнении (1) нелинейную силу f теперь можно принять в виде (для малых деформаций)

$$f = -C_\Xi a \varepsilon = -E_\Xi \varepsilon \quad (5)$$

Очевидно, а это следует из (4), эквивалентный модуль, иначе говоря, жесткость решетки может существенно уменьшиться, т.к. $E_H \ll E_0$ ($c_H \ll c_0$), и имеет сильную зависимость от концентрации присоединенных частиц n^+ .

Понимая, что число частиц водорода, осевших на решетку, зависит от напряженного состояния последней неоднородно по координатам, а в общем случае зависит от времени, для E_Ξ имеем пока неизвестную функциональную зависимость от $n^+(\varepsilon, x, t)$, которую определим исходя из модели двухкомпонентной сплошной среды. Основные положения теории двухкомпонентных сред можно найти в работе, поэтому приведем здесь лишь окончательные уравнения с соответствующими пояснениями сценария происходящих процессов. Ограничиваясь рассмотрением

одномерного случая, для первой компоненты (в последующем к ней будем относить основную несущую конструкцию, т.е. кристаллическую решетку с присоединенными частицами водорода либо иными подвижными элементами внутренней структуры, уравнение динамики (первое уравнение Эйлера) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial x} = \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + J_{12} v^{(1)} + R_{12} \quad (6)$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(0)} + \rho_H^{(1)}$$

Уравнение (6) в отличие от классической сплошной среды в правой части имеет новые силовые слагаемые. Как указывалось выше, присоединение подвижных частиц практически не влияет изменение инерционных характеристик несущей среды, т.е. $\rho_H^+ = m_H \cdot N^H \ll \rho_0^{(0)}$ – плотность сплошной среды, но скорость изменения этой характеристики J_{12} приводит к появлению реактивной силы $J_{12} \cdot V^{(1)}$, которой в общем случае пренебрегать нельзя.

Внутренняя сила R_{12} определяет реакцию взаимодействия между первой и второй компонентами рассматриваемой сплошной среды и ее определение существенно зависит от характера процессов протекающих внутри структуры материала.

Ко второй компоненте отнесем подвижный состав внутренней структуры материала, в нашем случае – это неприсоединенные частицы.

Уравнение, определяющее динамику таких частиц, имеет вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + J_{21} v^{(2)} + R_{21}, \quad \rho^{(2)} = \rho_H^- = m_H \cdot N^- \quad (7)$$

Здесь N^- – число подвижных частиц водорода.

По аналогии со сжимаемой жидкостью, уравнение состояния определяет связь между давлением p и плотностью $\rho_H^{(-)}$ [2]

$$\tilde{p} = p - p_0 \cong \rho_H^{(-)} c_H^2 = m_H N^- c_H^2 \quad (8)$$

К уравнениям (6) и (7) необходимо добавить уравнение баланса массы, именно,

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^{(1)} v^{(1)})}{\partial x} = J_{12} \quad (9)$$

или учитывая неизменность $\rho^{(0)}$

$$\frac{\partial \rho_H^+}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H^+ v^{(1)})}{\partial x} = J_{12} \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет баланс частиц водорода, присоединенных к решетке несущего материала

$$\frac{\partial N_H^+}{\partial t} + \frac{\partial(N_H^+ v^{(1)})}{\partial x} = J_{12}/m_H$$

Выражение для баланса массы неприсоединенных частиц имеет вид

$$\frac{\partial \rho_H^-}{\partial t} + \frac{\partial \rho_H^{(-)} v^{(1)}}{\partial x} = J_{21} \quad (11)$$

или

$$\frac{\partial N_H^-}{\partial t} + \frac{\partial N_H^{(-)} v^{(1)}}{\partial x} = J_{21}/m_H$$

Остаются пока неопределенными реакции $R_{12} = -R_{21}$, а также источники члены $J_{12} = -J_{21}$.

Принимая модель обтекания потоком неприсоединенных частиц водорода решетки несущей конструкции аналогичную модели обтекания сжимаемой жидкостью [2], для R_{12} примем следующие представления

$$R_{12} = k \frac{\rho_H^-}{D(\varepsilon)} [v^{(2)} - v^{(1)}] \quad (12)$$

Эта формула аналогична часто используемой в гидравлике формуле [2], только там принимается квадратичный закон сопротивления, здесь же проведена линеаризацию и введен коэффициент k .

Важным моментом является введение в (12) выражения $D(\varepsilon)$ — размер проходного сечения, который зависит от деформации ε .

Источниковые члены $J_{12} = -J_{21}$ примем по аналогии с работой [3], т.е.

$$J_{12} = \alpha N_H^- - \beta N_H^+ \quad (13)$$

где α и β — положительные коэффициенты, определяющие взаимодействие между присоединенными и свободными частицами водорода. Их роль нетрудно установить из следующих модельных уравнений баланса частиц в конструкции

$$\frac{dN_H^+}{dt} = \alpha N_H^- - \beta N_H^+ \quad (14)$$

$$\frac{dN_H^-}{dt} = -\alpha N_H^- + \beta N_H^+$$

Начальные условия

$$N_H^+(0) = 0, \quad N_H^-(0) = \Psi,$$

Решением системы (14) будет

$$N_H^+ = \frac{1}{\alpha + \beta} \alpha \Psi (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \quad (15)$$

$$N_H^- = \Psi \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \right]$$

Параметры α и β необходимо брать их экспериментов, ибо они определяют скорость насыщения несущей конструкции водородом, а также скорость ее обезводороживания.

Следует заметить, что уравнение (14) описывает взаимообмен частиц водорода (связанных и несвязанных) при условии отсутствия скорости перемещения частиц несвязанного водорода.

Последнее реализуется, как это следует из (12), при условии $D(\varepsilon) = 0$, т.е. свободные проходы для частиц несвязанного водорода закрыты. Очевидно, в этом

случае весь несвязанный водород переходит в связанное состояние. Параметры α и β таковы, что $\alpha \gg \beta$.

Полученная система уравнений (4)-(14) является полной и сильно нелинейной, поэтому ограничимся рассмотрением простейшего случая: статика при заданном одноосном растяжении-сжатии, когда первая (основная) компонента испытывает деформацию ε .

Основной интерес представляет значение напряжения σ . В случае отсутствия водорода в структуре материала, для линейно-упругого его поведения $\sigma_{st} = E \cdot \varepsilon_{st}$. При наличии последнего из-за изменения размеров проходных сечений $D(\varepsilon)$, происходит его перераспределение по структуре материала, т.е. из состояния несвязанного водород переходит в связанное, что приводит к изменению эффективного модуля, а значит и самого значения напряжения. Именно из уравнения состояния $\sigma = \sigma(\varepsilon, n^+(\varepsilon, x, t))$, которое можно представить в виде

$$\sigma = E_0 \varepsilon \left[1 - \frac{n^+}{n^+ + n^{(0)} E_H / E_0} \right] \quad (16)$$

Видна существенная зависимость напряженного состояния от концентрации связанного водорода.

Сразу необходимо отметить, что понятие статического напряженного состояния достаточно условно и его необходимо отнести к несущей компоненте среды, т.е. к уравнению (6), т.к. движение второй компоненты определяется своей кинематикой. Иначе говоря, перестройка структуры материала на своем временном уровне обладает своей динамикой. Поэтому естественно искать решение поставленной задачи в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_{st} + \tilde{\varepsilon}(x, t), \quad v^{(1)} = 0 + \tilde{v}^{(1)}, \quad v^{(2)} = 0 + \tilde{v}^{(2)} \quad (17)$$

Здесь ε_{st} однородное статическое поле деформаций. Очевидно, что $N^+ = N^+(x, \varepsilon, t)$ может быть представлено в виде

$$N^+(x, \varepsilon_{st} + \tilde{\varepsilon}, t) = N^+(x, \varepsilon_{st}, t) + \left. \frac{\partial N^+}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_{st}} \tilde{\varepsilon}(x, t), \quad (18)$$

Естественно и напряжения σ представить в виде

$$\sigma = \sigma + \tilde{\sigma} = E_0 \varepsilon_{st} - E_0 \varepsilon_{st} \left(\frac{n^+}{n^+ + n^{(0)} E_H / E_0} \right) + O(\tilde{\varepsilon}) \quad (19)$$

Здесь специально выделены слагаемые с $\tilde{\varepsilon}$, подчеркивая тем самым, что есть индуцированные деформации, связанные с перестройкой внутренней структуры, порождающие напряжения $\tilde{\sigma}$.

Оставляя лишь старшие члены в (7)-(8), после несложных преобразований

$$v^{(2)} = -\frac{1}{k \cdot n_H^-} c_H^2 D(\varepsilon_{st}) \frac{\partial n_H^-}{\partial x} \quad (20)$$

Здесь $\rho_H = m_H \cdot N_H$ плотность водорода, N_H — общее число частиц водорода в элементарном объеме, n_H^- — концентрация несвязанного водорода, $n_H^- = N_H^- / N_H$, $N_H = N_H^- + N_H^+$.

Уравнения баланса частиц связанного и несвязанного водорода могут быть с учетом (20) сведены к одному уравнению относительно n_H^+

$$\frac{\partial^2 n_H^+}{\partial t^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial n_H^+}{\partial t} - A \cdot D(\varepsilon_{st}) \left[\beta \frac{\partial^2 n_H^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 n_H^+}{\partial t \partial x^2} \right] = 0 \quad (21)$$

Уравнение (21) – уравнение смешанного типа, оно содержит слагаемые присущие гиперболическому уравнению, т.е. $\partial^2 n_H^+ / \partial t^2$, $\partial^2 n_H^+ / \partial x^2$, а также члены параболического вида $\partial n_H^+ / \partial t$, $\partial^3 n_H^+ / \partial t \partial x^2$.

Последнее означает, что при детальном анализе нестационарной задачи, при задании финитного начального вомущения следует ожидать характерный фронт движения увеличения (или уменьшения концентрации связанного водорода), подвергающейся сильной дисперсии.

Анализ решения уравнения (21) при простейших случаях начального распределения несвязанного водорода в металле (весь находящийся в металле водород находится в несвязном состоянии) показывает, что при определенных начальных деформациях за счет перехода водорода в связанное состояние нарушается условие устойчивости деформирования, т.е. разрушение материала.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-96653p2003юг-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Krivtsov A.M., Morozov N.F.* Anomalies in mechanical characteristics of nanometer-size objects. // *Doklady Physics*. Vol.40, No 11, 2001, pp.825-827.
- [2] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. / "Наука", М., 1978.
- [3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. / "Мир", М., 1977.

Indeizev D.A., Semenov B.N. *Influence of localization of hydrogen particles on embrittlement of metals.*

Hydrogen embrittlement of materials is one of the important factors at an estimation of serviceability of designs. In spite of the fact that many works are devoted to research of influence of hydrogen on properties of metals and alloys, there are a lot of "white" spots in this problem. To their number concerns the question on influence of kinetic processes inside a material, resulting to redistribution of hydrogen, on the basic strength characteristics at static and dynamic loading. Absence of authentic mechanical model, which description is based on the basic fundamental principles of rational mechanics makes a problem rather actual, because presence of such model would allow to describe influence internal kinetics on macroparameters of a material. Within the framework of the given work the model basing physical experiments, specifying on decrease in energy of break of internuclear bounds is offered at planting particles of hydrogen to last, i.e. decrease in a level of free energy. The offered model allows to explain localization of hydrogen in the field of the increased concentration of stresses.

ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ВЫСОТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Кабельков В. А., Кабельков А. Н., Пасенчук А. Э.,
Федий В. С., Нефедов В. В.
ЮРГТУ (НПИ) г. Новочеркасск

На основе уравнений Эйлера-Лагранжа получены оптимальные управления при квадратичном критерии качества. Управления использованы для активного гашения колебаний n -этажного здания.

1. Устройства активного гашения колебаний. Устройства активного гашения колебаний можно разбить на следующие группы: аэродинамические, гидравлические, гироскопические, инерционные и электромеханические. В аэродинамических устройствах гашение кинетической энергии сооружения производится за счёт ветрового напора: во время отклонения конструкции в направлении порыва ветра жалюзи системы открыты; при возвратном движении закрыты. Весьма экономичными являются гидравлические и инерционные устройства, которые обеспечивают гашение колебаний за счёт несовпадения периодов колебаний соответственно жидкости в ёмкости и инерционного груза на последнем этаже здания. Электромеханические устройства создают управляющие моменты на одном или нескольких этажах здания. В литературе указывается на перспективность гироскопических устройств.

2. Оптимальное управление линейными детерминированными системами. Расчёт оптимальных управлений детерминированными системами зарубежные и отечественные авторы проводят на основе теоремы Летова-Калмана [1,2]. При этом задача сводится к нелинейным уравнениям типа Риккати. Существенное упрощение алгоритмов обеспечивает введение критерия «обобщённой работы» А.А.Красовского [3], приводящего задачу к линейным уравнениям при односторонних граничных условиях. В настоящей работе использована методика [4] расчёта оптимальных управлений с учётом возмущающих воздействий. Уравнения управляемой системы имеют вид

$$\dot{\mathbf{X}}(T) = \mathbf{A}(T)\mathbf{X}(T) + \mathbf{B}_F(T)\mathbf{F}(T) + \mathbf{B}_G(T)\mathbf{G}(T), \quad (1)$$

где $\mathbf{X}(T) \in R^N$, $\mathbf{G}(T) \in R^\nu$, $\mathbf{F}(T) \in R^\mu$ векторы соответственно переменных состояния, управляющих воздействий и возмущающих воздействий; $\mathbf{A} (N \times N)$, $\mathbf{B}_F(T) (N \times \mu)$ и $\mathbf{B}_G (N \times \nu)$ – заданные, в общем случае, переменные матрицы. Средства наблюдения моделируем выражением

$$\mathbf{Z}(T) = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (2)$$

где матрица наблюдений \mathbf{C} ($M \times N$) удовлетворяет условию наблюдаемости [1]. Оптимальные управления наблюдаемой системы доставляют минимум квадратичному функционалу качества.

$$2\phi = \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{X}^* \mathbf{V}_1 \mathbf{X} + \mathbf{G}^* \mathbf{V}_2, \mathbf{G}) DT \quad (3)$$

где: $[T_1, T_2]$ – период управления; \mathbf{V}_1 – неотрицательно определённая, \mathbf{V}_2 – определённо положительная симметричные матрицы. Оптимальные управления определяются равенством

$$\mathbf{G} = -\mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{B}_G^* \mathbf{L}, \quad (4)$$

где $\mathbf{L} \in R^N$ – вектор неопределённых множителей Лагранжа, определяемый совместно с \mathbf{X} из системы линейных уравнений

$$\frac{D}{DT} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}_G \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{B}_G^* \\ -\mathbf{C}^* \mathbf{V}_1 \mathbf{C} & -\mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_F \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Граничные условия, соответствующие уравнениям (5), зависят от класса решаемых задач: заданы T_1, T_2 и начальное состояние системы; заданы T_1, T_2 и конечное состояние; заданы T_1, T_2 , но неизвестны начальное и конечное состояния; T_1 и T_2 неопределённые (задача с подвижными концами).

3. Управление N -этажным зданием. Рассмотрим управление относительным движением N -этажного здания, основание которого движется с ускорением $\ddot{\delta}(T)$. На рис. 1 обозначено $Q_J(T)$, $F_J(T)$, $G_J(T)$ – составляющие соответствующие

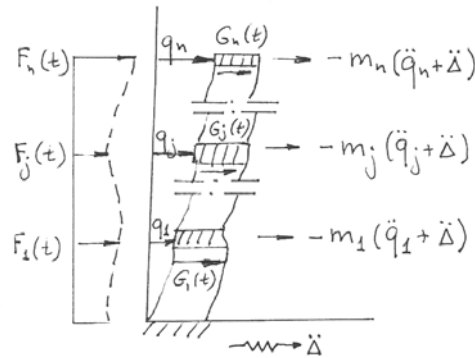


Рис. 1.

щих векторов перемещений $\mathbf{Q}(T) \in R^N$, возмущающей нагрузки $\mathbf{F}(T)$ и управляющих воздействий $\mathbf{G}(T)$; M_J – компоненты инерционной матрицы. При составлении уравнений движения здания вводим следующие предположения: жёсткости ригелей многократно превосходят жёсткости стоек EJ , поэтому ригели считаем абсолютно жёсткими; стойки считаем безмассовыми, а массу каждого из перекрытий полагаем равной M ; высоту каждого из перекрытий считаем равной L ; управляется движение перекрытия E , номер которого выбираем из условия управляемости здания; средствами измерения оснащено перекрытие E , влиянием продольных

ЛИТЕРАТУРА

- [1] 1. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.:Наука, 1977. 384 с.
- [2] 2. *Kalman R.E.* Mathematical description of linear dynamical system. J.Soc.Indnst. Appl.Math. Series A: OnControl. Vol.1, pp.152-192; 1963.
- [3] 3. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления. М.: Наука. 1977. 272 с.
- [4] 4. *Воронцов Г.В., Кабельков А.Н.* Линейные краевые задачи об оптимальных управлениях многомерными электромеханическими системами. //Изв. вузов. Электромеханика. 1992. № 5 С. 27-32.

Kabelkov V.A., Kabelkov A.N., Pasenchuk A.E., Fedij V.S., Nefedov V.V. *Optimum managements of fluctuations of high-altitude constructions.* On the basis of Euler-Lagrang's equations optimum managements are received at square-law criterion of quality. Managements are used for active clearing fluctuations of a n -storeyed building.

ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

Калоеров С. А., д-р физ.-мат. наук, Баева А. И., канд. физ.-мат. наук, Глуценко Ю. А., канд. физ.-мат. наук
Донецкий национальный университет

С использованием обобщенных комплексных потенциалов, интегралов типа Коши, конформных отображений и метода наименьших квадратов решена задача об определении электроупругого состояния полуплоскости с криволинейными отверстиями и трещинами. Приведены результаты численных исследований для полуплоскости с треугольным, квадратным и ромбическим отверстиями и трещиной.

В работах [1, 2] изложены основы электроупругости, даны методы решения частных задач, обобщены критерии разрушения для случая пьезоэлектрических тел, а в статьях [3–5] предложена методика решения двумерных и плоских задач электроупругости для тел с отверстиями и трещинами. В данной статье с использованием последней методики решена задача об электроупругом состоянии полуплоскости с трещинами и отверстиями, когда последние являются криволинейными.

Постановка задачи. Рассмотрим находящуюся в условиях обобщенного плоского электроупругого состояния анизотропную нижнюю полуплоскость S^- , ограниченную прямолинейной границей L_0 и ослабленную криволинейными отверстиями и трещинами. Трещины будем рассматривать, как эллиптические отверстия, у которых одна из полуосей весьма мала (в предельном случае равна нулю). Контуры криволинейных отверстий будем аппроксимировать дугами эллипсов, в частном случае прямолинейных разрезов. В связи с этим для решения исходной задачи достаточно рассмотреть случай полуплоскости с конечным числом произвольно расположенных эллиптических отверстий. Обозначим их контуры и полуоси через

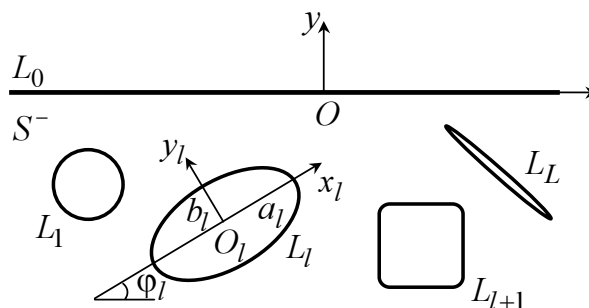


Рис. 1

$L_l, a_l, b_l, (l = \overline{1, L})$ (рис. 1). Прямолинейная граница L_0 и контуры отверстий свободны от внешних усилий и неэлектропроводны. Полуплоскость на бесконечности

находится под действием растягивающих усилий $\sigma_x^\infty = p$ или электростатического поля с постоянной напряженностью $E_x^\infty = \varepsilon$.

Построение решения. Определение электроупругого состояния рассматриваемой полуплоскости сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ из граничных условий на контурах отверстий L_l [3]

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

где g_{ki}^0 — известные постоянные, зависящие от электроупругих свойств материала полуплоскости; $\delta_k = dz_k/ds$; s — длина дуги контура. При этом функции $\Phi'_k(z_k)$ определены и голоморфны в областях S_k , получаемых из S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$, где μ_k — корни известного характеристического уравнения, точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе и имеют вид [5]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \{a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) - \bar{r}_k \bar{a}_{kln} \bar{\varphi}'_{kln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1,ln} \bar{\varphi}'_{k+1,ln}(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2,ln} \bar{\varphi}'_{k+2,ln}(z_k)\}. \quad (2)$$

Здесь Γ_k — постоянные, определяемые из системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, \lambda_{8k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (p, 0, 0, \varepsilon, 0, 0); \quad (3)$$

$\bar{r}_k, \bar{s}_{k+1}, \bar{e}_{k+2}$ — известные величины, зависящие от электроупругих свойств материала;

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad (4)$$

$$\bar{\varphi}'_{k+j,ln}(z_k) = -\frac{n}{\bar{\zeta}_{k+j,l}^{n-1} \bar{R}_{k+j,l} (\bar{\zeta}_{k+j,l}^2 - \bar{m}_{k+j,l})} \quad (j = \overline{0, 2}); \quad (5)$$

$\zeta_{kl}(z_k)$ и $\bar{\zeta}_{k+j,l}$ — переменные, вычисляемые из конформных отображений

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}); \quad (6)$$

$$z_k = \bar{z}_{0,k+j,l} + \bar{R}_{k+j,l} (\bar{\zeta}_{k+j,l} + \bar{m}_{k+j,l}/\bar{\zeta}_{k+j,l}) \quad (7)$$

внешности единичного круга на внешности эллипсов L_{kl} нижней полуплоскости и эллипсов $L_{k+j,l}^+$ верхней полуплоскости, получаемых из $L_{k+j,l}$ зеркальным их отражением относительно прямолинейной границы L_0 ; a_{kln} — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах отверстий.

Определение неизвестных постоянных в комплексных потенциалах. Исходя из граничных условий (1), составим функционал

$$J = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 \left| \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_{km}) + \bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k \overline{\Phi'_k(t_{km})} \right|^2, \quad (8)$$

где t_m ($m = \overline{1, M}$) - точки, выбираемые на контурах L_l . Удовлетворив условиям минимума функционала (8) $\partial J / \partial a_{kln} = 0$ ($k = \overline{1, 3}, l = \overline{1, L}, n = 1, 2, 3, \dots$) для определения неизвестных коэффициентов a_{kln} получаем систему линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы комплексные потенциалы (2) станут известными, что позволит вычислять основные характеристики электроупругого состояния (напряжения, деформации, индукцию и напряженность поля), плотность внутренней энергии в любых точках тела, а в случае трещин - и коэффициенты интенсивности напряжений, индукции и напряженности поля (КИНИН) [3]

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} [\sigma_x \sin^2 \varphi_l + \sigma_y \cos^2 \varphi_l - 2\tau_{xy} \cos \varphi_l \sin \varphi_l], \\ k_2^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} [(\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi_l \cos \varphi_l + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)], \\ k_D^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (D_y \cos \varphi_l - D_x \sin \varphi_l), \\ k_E^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (E_y \cos \varphi_l - E_x \sin \varphi_l). \end{aligned} \quad (9)$$

Анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования электроупругого состояния полуплоскости с трещиной и отверстиями в виде треугольника, квадрата и ромба (рис. 2). Ниже описаны некоторые из полученных результатов для КИНИН, которые даны с точностью до интенсив-

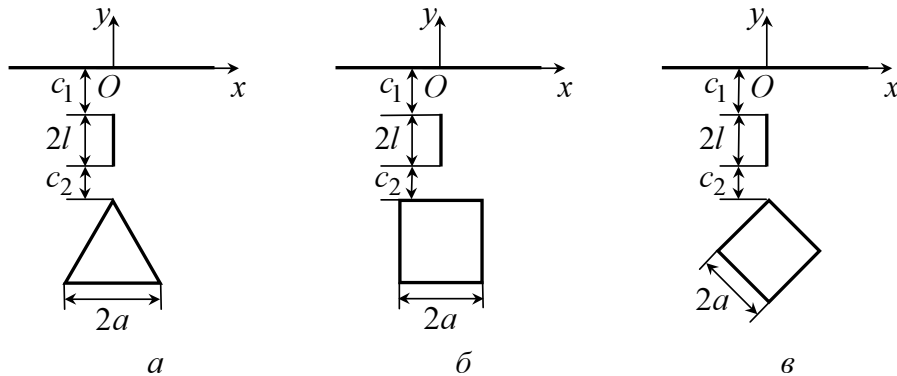


Рис. 2

ности приложенной нагрузки (p или ε) в качестве множителя. Стороны треугольника, квадрата и ромба считались равными $2a$, где a — геометрический масштаб. При проведении расчетов в приведенных формулах для треугольного отверстия параметр L (количество эллиптических отверстий, моделирующих криволинейное отверстие и трещину) был равен 4, для квадратного и ромбического — 5. В качестве материалов полуплоскости выбирались бифталат калия (материал М1), ниобат бария-натрия (материал М2) [6], принадлежащие к классу $mt2$ ромбической системы. Количество членов в рядах (2) и точек M на контурах отверстий, в которых составлялись квадраты невязок при построении функционала (8), увеличивались до тех пор, пока граничные условия не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (погрешность граничных значений основных характеристик по отношению к интенсивности приложенной нагрузки составляла не более 10^{-3}). Для такого удовлетворения граничным условиям в зависимости от расположения отверстий и трещин друг относительно друга и прямолинейной границы

достаточно было брать членов в рядах от 15 до 30, количество точек на контурах отверстий — от 60 до 90.

В табл. 1 для полуплоскости с криволинейным отверстием и центральной трещиной в перемычке даны значения коэффициентов интенсивности напряжений k_1^\pm и индукции k_D^\pm для вершин трещины в зависимости от полудлины трещины l . При этом длина перемычки между контуром отверстия и прямолинейной границей считалась равной a , т.е. длины перемычек между трещиной и прямолинейной границей и между трещиной и контуром отверстия $c_1 = c_2 = a/2 - l$. У КИНИН верхний индекс «+» соответствует верхней вершине трещины, «-» — нижней вершине. В табл. 2 для полуплоскости с криволинейным отверстием и вертикальной краевой трещиной длины $2l = a$, выходящей на контуры отверстий ($c_2 = 0$), приведены значения КИНИН для конца трещины в зависимости от расстояния c_1 между вершиной трещины и прямолинейной границей.

Позиция рис.2	Материал	Действие усилий $\sigma_x^\infty = p$				Действие поля $E_x^\infty = \varepsilon$					
		k_1	l				k_D	l			
			0,1	0,2	0,3	0,4		0,1	0,2	0,3	0,4
а	М1	k_1^+	0,417	0,604	0,814	1,192	k_D^+	2,961	4,271	5,595	7,734
		k_1^-	0,460	0,725	1,043	1,591	k_D^-	3,107	4,703	6,472	9,402
	М2	k_1^+	0,435	0,625	0,828	1,184	k_D^+	110,574	159,336	208,231	286,297
		k_1^-	0,471	0,729	1,028	1,537	k_D^-	115,911	175,187	240,394	347,698
б	М1	k_1^+	0,530	0,793	1,107	1,665	k_D^+	3,150	4,605	6,097	8,500
		k_1^-	0,558	0,870	1,244	1,866	k_D^-	3,179	4,681	6,224	8,670
	М2	k_1^+	0,536	0,784	1,067	1,573	k_D^+	126,005	182,614	240,130	331,827
		k_1^-	0,571	0,878	1,229	1,805	k_D^-	129,705	192,660	257,250	354,909
в	М1	k_1^+	0,422	0,598	0,799	1,179	k_D^+	3,322	4,801	6,313	8,791
		k_1^-	0,494	0,802	1,190	1,872	k_D^-	3,480	5,269	7,258	10,572
	М2	k_1^+	0,463	0,652	0,851	1,215	k_D^+	126,541	182,125	239,340	331,492
		k_1^-	0,524	0,830	1,198	1,837	k_D^-	133,055	201,411	278,632	406,462

Таблица 1. Значения КИНИН для вершин трещины в полуплоскости с криволинейным отверстием и центральной трещиной в перемычке.

Из табл. 1, 2 и других полученных результатов следует, что при увеличении длины центральной трещины и уменьшении длины перемычки между краевой трещиной и границей полуплоскости значения электроупругих характеристик и КИНИН увеличиваются. Особенно больших значений характеристики достигают в точках перемычек. Выход трещины на контур отверстия значительно увеличивает значения КИНИН. Анизотропия материала существенно влияет на значения основных характеристик. Это влияние особенно значительно в случае электрических воздействий. Так, для материала М2 значения коэффициентов интенсивности индукции k_D^\pm в сотни раз выше, чем для материала М1.

Позиция рис. 2	КИНИН	Материал	c_1				
			2	1	0,5	0,25	0,1
Действие усилий $\sigma_x^\infty = p$							
<i>a</i>	k_1^+	M1	1,333	1,506	1,733	1,986	2,555
		M2	1,323	1,420	1,541	1,716	2,536
<i>б</i>		M1	1,575	1,752	1,944	2,164	2,405
		M2	1,431	1,508	1,796	1,969	2,318
<i>в</i>		M1	1,571	1,740	1,925	2,169	2,808
		M2	1,559	1,681	1,898	2,138	2,661
Действие поля $E_x^\infty = \varepsilon$							
<i>a</i>	k_D^+	M1	8,212	8,664	9,521	10,714	13,364
		M2	313,817	332,671	367,604	427,881	510,757
<i>б</i>		M1	8,134	8,649	9,378	11,140	14,417
		M2	316,623	333,428	368,790	421,133	532,055
<i>в</i>		M1	9,057	9,665	10,853	12,538	16,280
		M2	348,801	369,750	410,686	474,275	604,163

Таблица 2. Значения КИНИН для вершины трещины в полуплоскости с криволинейным отверстием и вертикальной краевой трещиной из контура отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. К., 1989. 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т.; Т. 5).
- [2] Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М., 1988. 472 с.
- [3] Kaloerov S. A., Baeva A. I., Glushchenko Yu. A. Two-dimensional electroelastic problem for a multiply connected piezoelectric body // Intern. Appl. Mech. 2003. Vol. 39, № 1. P. 84–91.
- [4] Баева А. И. Электроупругое состояние пластинки с криволинейными отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. 2004. Вып. 39. С. 127–133.
- [5] Калоеров С. А., Глущенко Ю. А. Двумерная задача электроупругости для много-связного полупространства // Теорет. и прикл. механика. 2001. Вып. 33. С. 83–90.
- [6] Акустические кристаллы: Справ. / А. А. Блистанов, В. С. Бондаренко, В. В. Чкалова и др.; Под ред. М. П. Шаскольской. М., 1982. 632 с.

Kaloerov S. A., Baeva G. I., Glushchenko Yu. A. *The electroelastic state of half-plane with curvilinear holes and cracks.* Using the complex potentials, the Cauchy integrals method, conformal mappings and the least squares method the solution of electroelastic state problem for piezoelectric half-plane with curvilinear holes and cracks are given. The results of numeric researches for half-plane with triangle, square, rhomb holes and crack are described.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ РАСТЯГИВАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Карякин М. И.

Ростовский государственный университет

Проводится анализ применимости некоторых общепотребительных моделей сжимаемых нелинейно-упругих материалов к задачам, в которых большими являются деформации растяжения.

Введение. В работах Л.М. Зубова и его учеников – В.А. Еремеева, А.Ю. Краснова, М.С. Ластенко, А.Н. Рудева, Д.Н. Шейдакова (см., например, [1,2], а также работы, представленные в настоящем сборнике) – построена теория потери устойчивости упругих тел при растягивающих нагрузках, применимая для несжимаемых материалов. Одним из основных ее результатов является доказательство того факта, что потеря устойчивости при растяжении возможна лишь при наличии падающего участка диаграммы растяжения. Целью представленного исследования является ответ на вопросы о том, присуще ли подобное поведение сжимаемым материалам, какова и насколько существенна роль гипотезы несжимаемости в этих задачах.

Решение данной проблемы затрудняется тем обстоятельством, что использование моделей сжимаемых материалов даже в случае канонических деформаций требует нахождения решения нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка, которая в общем случае не имеет аналитического решения. Это означает, в частности, что при начальном состоянии, отличном от аффинного, даже уравнения нейтрального равновесия нельзя записать в аналитической форме.

Потеря устойчивости при растягивающих нагрузках может проявляться и в форме неустойчивости вычислительных схем, применяемых при анализе тех или иных задач деформирования нелинейно-упругих тел. Возможность подобного эффекта отмечалась, например, в [3] при анализе задачи о стесненном (плоском) кручении кольца из сжимаемого нелинейно-упругого материала.

Еще один аспект анализа данной проблемы связан с тем, что каждая модель нелинейно-упругого поведения материала основывается либо на некоторой математической экстраполяции линейной теории, либо на аппроксимации какого-то конкретного эксперимента или набора экспериментов. Очень важно поэтому уметь достаточно надежно определять степень применимости модели к более широкому по сравнению с использованным для определения материальных параметров классу задач.

Одноосное растяжение. Задача одноосного деформирования прямоугольного параллелепипеда равномерно распределенной на его торцах нагрузкой подробно проанализирована в [4] на примере трех определяющих соотношений: материала

Синьорини, упрощенного варианта материала Блейтца и Ко и полулинейного (гармонического) материала. Показано, в частности, что поведение рассмотренных моделей при больших деформациях растяжения является принципиально различным, как в смысле достижимости произвольной наперед заданной деформации, так и монотонности движения к этой деформации. В работе [5] в рамках плоской деформации проанализирован общий случай трехконстантной модели материала Блейтца и Ко и определена область параметров, в которой нарушается монотонность зависимости приложенной нагрузки от удлинения и в которых, таким образом, возможна потеря устойчивости при растяжении.

Рассмотрим для этой же модели материала, описываемой функцией удельной потенциальной энергии

$$W = \frac{1}{2}\mu\beta \left(I_1 + \frac{1}{\alpha}(I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right) + \frac{1}{2}\mu(1 - \beta) \left(I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha}(I_3^\alpha - 1) - 3 \right), \quad (1)$$

(I_k – главные инварианты меры деформации Коши, α , μ , β – материальные параметры) задачу об одноосном растяжении сплошного цилиндра. Соответствующее преобразование отсчетной конфигурации в актуальную с использованием цилиндрических координат имеет вид

$$R = Ar, \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \lambda z. \quad (2)$$

Здесь λ – коэффициент осевого удлинения, а константа A определяется через λ из граничных условий соотношением

$$A = \lambda^{-\frac{\alpha}{1+2\alpha}}.$$

Уравнения равновесия удовлетворяются в этом случае автоматически.

Процесс поиска экстремальных точек на графике зависимости напряжений от деформации аналогичен описанному в [5]. Область материальных параметров α , β , при которых на диаграмме растяжения существуют экстремальные точки, находится ниже кривой, изображенной на рис. 1.

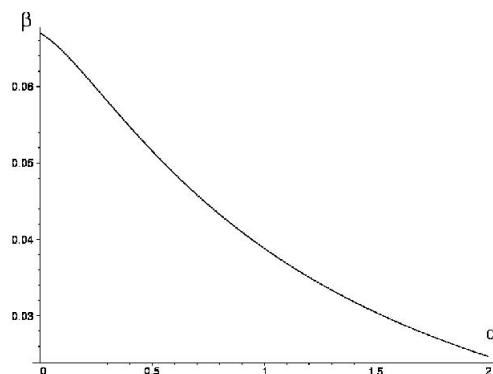


Рис. 1.

Заметим, что построенная кривая качественно аналогична приведенной в [5], однако количественно достаточно сильно от нее отличается. Это означает, что

существуют такие значения материальных параметров, при которых растяжение прямоугольника будет устойчиво при любых значениях осевого удлинения, а процесс растяжения цилиндра станет рано или поздно неустойчивым, и наоборот.

Задачи Ляме. Рассмотрим теперь задачи Ляме для полого цилиндра и сферической оболочки. В обоих случаях полуобратное представление деформации будет содержать одну неизвестную функцию $R(r)$, описывающую зависимость радиуса точки цилиндра или сферы в деформированном состоянии от этого же радиуса до деформации. Уравнения равновесия в этом случае сводятся к одному дифференциальному уравнению второго порядка для определения функции $R(r)$, которое в общем случае достаточно громоздко и не имеет аналитического решения. Ниже в качестве примера приведено уравнение раздувания цилиндра для случая, когда материальный параметр α равен $1/2$:

$$R'' = \frac{R^3 r + \beta R'^3 R^4 + 2\beta R' R^2 r^2 - \beta R'^4 R^3 r - \beta R^3 r - R'^3 r^4 - 2\beta R'^2 R r^3}{R^2 r^2 (2\beta R' r - 3\beta R + \beta R R'^4 + 3R)}.$$

Краевыми условиями для этого уравнения будут выражения, означающие, например, равенство радиальных напряжений приложенному давлению на внутренней поверхности цилиндра и отсутствие давления на внешней.

В приведенной ниже таблице содержатся определенные численно значения критических деформаций раздувания цилиндра и сферической оболочки различной толщины (т.е. с различными значениями внутреннего радиуса r_0) для различных значений параметра β .

Таблица 1. Критические деформации при раздувании

r_0	Раздувание цилиндра			Раздувание сферы		
	$\beta = 0$	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0$	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.5$
0.25	116%	160%	252%	104%	116%	128%
0.5	74%	104%	166%	60%	66%	72%
0.9	53%	78%	131%	41%	44%	49%

Из приведенной таблицы видно, что форма деформируемой конструкции оказывает существенное влияние на значение критических деформаций. Кроме того, по сравнению со случаем одноосного удлинения резко расширилась область материальных параметров, при которых эти критические деформации существуют.

Стесненное кручение. Может показаться, что деформации такого порядка, как приведены в Табл. 1 являются трудно реализуемыми. Примером показывающим возникновение таких деформаций в некоторых точках конструкции при достаточно «разумных» внешних воздействиях является задача о т.н. плоском или стесненном кручении.

Рассмотрим кольцо из упругого материала, жестко насаженное на ось и заключенное в жесткую обойму, которая поворачивается на заданный угол ψ . Полуобратное представление, описывающее деформирование такой конструкции будет содержать две подлежащие определению функции:

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi + F(r), \quad Z = z, \quad (3)$$

удовлетворяющие очевидным граничным условиям

$$R(r_0) = r_0, \quad F(r_0) = 0, \quad R(r_1) = r_1, \quad F(r_1) = \psi.$$

На рис. 2 приведены зависимости радиального удлинения кольца с внутренним радиусом $r_0 = 0.5$ от положения точки вдоль радиуса для различных значений материального параметра β при повороте внешней обоймы на угол 15° . Видно, что при таком небольшом повороте деформации на внутренней поверхности кольца могут достигать 40%. Интересной особенностью данной задачи является факт существенной зависимости деформаций от материальных параметров: хотя нагружение является «жестким», т.е. с точки зрения внешнего наблюдателя состояние кольца одинаково, внутреннее деформированное состояние в некоторых областях в зависимости от значения констант материала может отличаться в несколько раз.

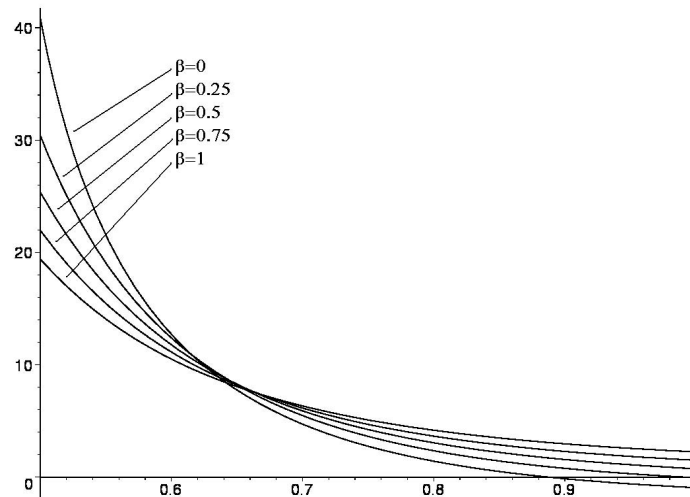


Рис. 2.

Другим свойством данной задачи, по-видимому напрямую связанным с достижением области неустойчивости на диаграмме растяжения, является невозможность проведения численных расчетов, начиная с некоторого значения параметра ψ , зависящего от материальных параметров и геометрических размеров. Заметим, что причина численной неустойчивости связана именно с природой исследуемой задачи, а не с методикой ее исследования, поскольку для численного анализа краевой задачи был использован целый ряд подходов (метод пристрелки, метод конечных разностей, метод продолжения по параметру в различных модификациях), которые привели к практически идентичным результатам как в области, где расчеты были возможны, так и в смысле определения границы применимости методов.

Данная задача является важным примером такого использования полуобратного метода, когда (если говорить о плоской постановке) точно, а не в интегральном смысле, удовлетворяются все граничные условия. Тем не менее, может возникнуть мнение, что причиной возникающих проблем является выбранное представление (3), которое, может перестать работать при некоторых значениях параметров задачи. Для подтверждения справедливости использованного полуобратного

подхода данная задача без каких-бы то ни было полуобратных гипотез была проанализирована и с помощью пакета конечно-элементного анализа FlexPDE.

Типичная расчетная сетка содержала порядка пяти-шести тысяч узлов и двух-трех тысяч конечных элементов. Существенное ускорение сходимости было достигнуто за счет выбора начальной сетки с квадратичным сгущением вблизи внутренней поверхности кольца. Проведенные расчеты показали практически полное совпадение с результатами, полученными на основе полуобратного метода во всем рассмотренном диапазоне материальных параметров и параметров нагружения. Главным же подтверждающим фактором оказалась невозможность проведения расчетов при значениях параметров, превосходящих критические значения, определенные на основе полуобратного метода.

Выводы. Величины критических деформаций существенно зависят от типа деформируемой конструкции. Критические усилия при растяжении зависят от геометрических характеристик тела аналогично сжатию. Критическая деформация – свойство, зависящее от комбинации «материал» + «конструкция».

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00638).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О неустойчивости растянутого нелинейно-упругого бруса. // ПММ. 1996. Т.60, вып.5. С. 786–798.
- [2] *Зубов Л.М., Ластенко М.С.* О неустойчивости равновесия при растяжении цилиндра из упрочняющегося материала. // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 3. С 135–143.
- [3] *Гавриляченко Т.В., Карякин М.И.* Об особенностях нелинейно-упругого поведения сжимаемых тел цилиндрической формы при кручении // ПМТФ. 2000. 41(2). С. 188–193
- [4] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [5] *Горин Ю.Н., Карякин М.И.* Одноосное растяжение нелинейно-упругих образцов. Ч.1. Однородная деформация // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VIII-й V Международной конференции. Ростов-на-Дону, 14-18 октября 2002 года. Т. 2. Ростов-на-Дону: Новая книга, 2003. С. 56-60.

Karyakin M.I. *On some behavior features of nonlinear elastic bodies at extending stresses.* The results of analysis of applicability of some wide-spread models of compressible nonlinearly elastic materials to the problems encountering large extending strains is presented.

ОБРАЗОВАНИЕ ПОЛОСТИ НА ОСИ ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕФЕКТА В ПСЕВДОКОНТИНУУМЕ КОССЕРА

Карякин М. И., Пустовалова О. Г.

Ростовский госуниверситет

Для клиновой дисклинации и винтовой дислокации исследована задача об образовании полости на оси изолированного дефекта с учетом моментных напряжений. Для конкретного вида определяющего соотношения нелинейно-упругого несжимаемого псевдоконтинуума Коссе́ра проанализирована зависимость радиуса образующейся полости от параметра дефекта.

1. Постановка задачи. В работах [1-4] показано, что задачи о равновесии нелинейно-упругих тел с дислокациями и дисклинациями могут иметь т.н. “сингулярные” решения, описывающие образование полости вдоль оси дефекта в деформированном теле. В [2,3] выведено интегральное соотношение, позволяющее определять радиус образующейся полости в зависимости от модели материала и параметров дефекта. Установлено, что состояние с полостью является энергетически более выгодным.

В задачах об образовании полости актуальным является учет структуры материала в окрестности сингулярности. Простейшим способом учета микроструктуры в рамках механики сплошной среды является использование модели среды Коссе́ра. Целью настоящей работы является анализ влияния моментных характеристик на радиус образующейся полости и саму возможность ее образования.

В модели континуума Коссе́ра [5,6] каждая частица сплошной среды имеет степени свободы абсолютно твердого тела. Положение частицы в деформированной конфигурации определяется радиусом-вектором \mathbf{R} и собственно ортогональным тензором \mathbf{H} , называемым тензором микроповорота. Упругий потенциал W является функцией двух тензоров второго ранга — мерой деформации \mathbf{Y} и тензора изгибной деформации \mathbf{L} . Тензоры \mathbf{Y} и \mathbf{L} определяются соотношениями

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = -\mathbf{L} \times \mathbf{I}, \quad (2)$$

\mathbf{I} — единичный тензор. Псевдоконтинуум Коссе́ра предполагает наличие связи [7]

$$\mathbf{Y}_{\times} = 0, \quad (3)$$

означающей совпадение собственных поворотов частиц сплошной среды с их поворотами вследствие деформации тела.

2. Винтовая дислокация. Деформация сплошной среды при винтовой дислокации задается с помощью полуобратного представления

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = a\varphi + z.$$

Тензорные характеристики (градиент деформации, мера деформации Коши, тензор искажений и тензор поворота) определяются выражениями [3]

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \frac{a}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{G} &= R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R^2 + a^2}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{a}{r} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{U} &= R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{r}{\sqrt{(R+r)^2 + a^2}} \left(\frac{R^2 + a^2 + Rr}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{a}{r} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi) + \frac{R+r}{r} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right), \\ \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{R+r}{\sqrt{(R+r)^2 + a^2}} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z) + \frac{a}{\sqrt{(R+r)^2 + a^2}} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi).\end{aligned}$$

Из предположения несжимаемости материала $\det \mathbf{C} = 1$ определяется функция радиального смещения точки $R(r)$

$$R(r) = \sqrt{r^2 + C^2}, \quad (4)$$

причем для сплошного цилиндра $C = R(0)$ имеет смысл радиуса образующейся полости. Тензор \mathbf{H} зададим с помощью полуобратного представления

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \cos \chi(r) (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z) + \sin \chi(r) (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi), \quad (5)$$

здесь $\chi(r)$ — пока неизвестная функция.

Тензоры \mathbf{Y} , \mathbf{L} определяются из (1), (2)

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} (R \cos \chi)(r) + a \sin \chi(r) + \frac{1}{r} (a \cos \chi(r) - R \sin \chi(r)) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + \\ &\quad + \sin \chi(r) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi + \cos \chi(r) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{L} &= \chi' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\sin \chi(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{\cos \chi(r) - 1}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Из (3) получаем функцию $\chi(r) = \arctg \frac{a}{r+R}$.

Повторяя рассуждения, приведенные в [4], получаем, что полная энергия деформированного цилиндра является функцией одной вещественной переменной C . Исследование возможности порообразования осуществлялось в [4] на основе вариационного принципа Лагранжа, путем нахождения стационарных точек функционала энергии, то есть решения уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C} = 2\pi \int_0^{r_1} r \frac{\partial W}{\partial C} Dr = 0.$$

Применим аналогичный подход для материала, упругий потенциал которого определяется соотношением

$$W = 2\mu \operatorname{tr} (\mathbf{Y} - \mathbf{I}) + \eta \operatorname{tr} \mathbf{L}, \quad (6)$$

Зависимость радиуса образующейся полости от мощности дислокации для различных значений моментного материального параметра η приведены на Рис. 1, где большему значению η соответствует ниже расположенная кривая.

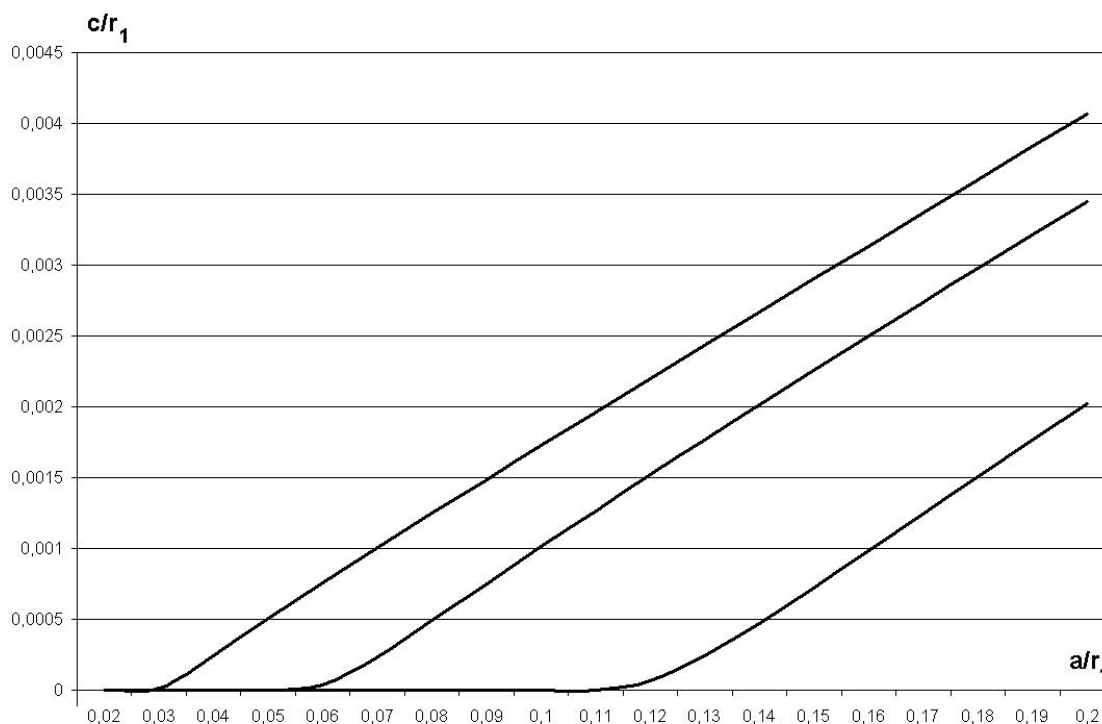


Рис. 1. Зависимость радиуса полости C от параметра дислокации a

Из представленного графика видно, что учет моментных напряжений приводит к уменьшению радиуса образующейся полости вплоть до полного отсутствия этой полости.

3. Клиновая дисклинация. Для исследования образования полости вокруг оси клиновой дисклинации, воспользуемся полуобратным представлением [3]:

$$R = R(r), \quad \Phi = \varkappa\varphi, \quad Z = z$$

В этом случае характеристики деформации принимают вид

$$\mathbf{C} = R'\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \varkappa\frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z,$$

$$\mathbf{G} = R'^2\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \left(\varkappa\frac{R}{r}\right)^2\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \quad (7)$$

$$\mathbf{U} = R'\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \varkappa\frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z,$$

Условие несжимаемости приводит к следующему выражению для функции $R(r)$:

$$R(r) = \sqrt{(r^2 + C^2)/\varkappa}.$$

Разыскивая тензор \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{H} = \cos \chi(r)(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi) + \sin \chi(r)(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_R) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z,$$

получим, что функция $\chi(r)$ тождественно равна нулю, а

$$\mathbf{L} = \frac{\varkappa - 1}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z$$

Таким образом, учет моментных напряжений путем использования псевдоконтинуума Коссера с упругим потенциалом (6) не приводит к качественно новым результатам по сравнению с решением данной задачи без учета моментных напряжений, приведенной в [3]. С учетом (7), (8), потенциал (6) превращается в потенциал Бартенева-Хазановича и график зависимости радиуса образующейся полости от параметра дисклинации совпадает с приведенным в [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Еремеев В.А., Зубов Л.М., Карякин М.И., Чернега Н.Я. Образование полостей в нелинейно-упругих телах с дислокациями и дисклинациями // Доклады РАН. 1992. Т. 326. № 6. С. 968–971.
- [2] Карякин М.И., Пустовалова О.Г. Образование полости вокруг оси клиновой дисклинации в несжимаемых материалах. – В сб. Механика деформируемых тел. ДГТУ, Ростов-н/Д, 1994. С. 75–78.
- [3] Карякин М.И., Пустовалова О.Г. О сингулярных решениях задач нелинейной теории упругих дислокаций // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 5. С. 173–180.
- [4] Карякин М.И. О влиянии учета поверхностного натяжения на образование полости вокруг оси изолированной дисклинации. // "Интегрально-дифференциальные операторы и их приложения". Межвузовский сб-к. Ростов н/Д. Изд-во ДГТУ. 1996. С. 80-83.
- [5] Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. 1965. № 3(91). С. 89-112
- [6] Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т.28, вып.6. С. 1117-1120.
- [7] Зубов Л.М., Карякин М.И. Мнозначные смещения и дислокации Вольтерра в плоской нелинейной теории упругости // ПМФТ. 1987. № 6. С. 146-152.

Karyakin M.I., Pustovalova O.G. *Hole formation at the dislocation axis in the Cosserat pseudo-continuum.* The problem on hole formation was studied for wedge disclination and screw dislocation with account for couple stresses. For specific type of constitutive equation the dependence of the cavity radius upon the defect parameter was investigated.

О ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ РАСТУЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Кизилова Н.Н.

Харьковский национальный университет

В работе приведен обзор моделей механики растущих сплошных сред, которые исследуются в рамках моделей вязкоупругих максвелловских жидкостей с источниками массы. Получены условия совместности деформаций и условия Бельтрами-Мичелла для случая растущих сред, которые представляют собой условия для тензорных реологических параметров модели. Обсуждаются постановки задач в напряжениях, скоростях перемещений и со смешанными условиями. Из общих термодинамических условий получены условия для компонент тензорных реологических параметров модели.

Механика растущих сплошных сред представляет собой новый раздел современной механики, который имеет важные и перспективные приложения в технике, медицине, биологии, биотехнологии [1]. В растущих материалах происходит необратимое изменение массы (объема), которое сопровождается изменениями пористости и плотности материала и появлением механических напряжений. Примеры растущих материалов дают биологические ткани, а также композитные материалы, в которых приращение массы происходит за счет адсорбции нового вещества на поверхностях тела в ходе химических реакций [2]. Биологические материалы рассматриваются как двухфазные сплошные среды, состоящие из пористого упругого каркаса и заполняющей поры жидкости. Системы дальнего транспорта жидкостей в тканях растений и животных обеспечивают непрерывную доставку растворенных компонент, которые в ходе биохимических реакций откладываются на внутренних поверхностях пор (внутренний рост), на наружных поверхностях материала (поверхностный рост) или во всем объеме ткани, вызывая ее ростовые деформации (объемный рост). При этом биологические материалы проявляют оптимальные свойства, обладая максимальной прочностью к действующим нагрузкам при минимальном весе. Изменение внешней нагрузки вызывает внутренние перестройки, которые обеспечивают оптимальность конструкции при новых внешних условиях. В настоящее время наиболее изучены механические свойства и внутренние перестройки костной ткани, исследование которых способствовало активному развитию механики адаптивных материалов. В растущих биологических тканях отложение нового вещества твердой фазы определяется главными направлениями тензора напряжений, что делает возможной задачу управления ростом посредством внешнего нагружения, полным или частичным ограничением роста [3–6]. Принципы оптимальности, реализованные в природе, могут быть использованы в технике и медицине при создании волокнистых армированных композитов с заданными оптимальными свойствами, заменителей тканей и имплантантов для последующей пересадки [3]. В данной работе представлен обзор моделей растущих континуумов и рассматриваются различные постановки задач и реологические свойства растущих вязкоупругих материалов.

Система уравнений для растущих сред включает законы сохранения массы и импульсов. Приток вещества вместе с доставляющей жидкостью описывается источником массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = -\vartheta \quad (1)$$

где $\theta = -\operatorname{div}(\rho_f(\vec{v}_f - \vec{v}))$ [1], ρ_f, ρ – плотности жидкой фазы и среды в целом, \vec{v}_f, \vec{v} – скорости жидкой и твердой фазы, причем последняя принимается за скорость роста материала. В силу больших характерных времен роста уравнения движения рассматриваются в квазистатической постановке:

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \vec{f} = 0 \quad (2)$$

где $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений, \vec{f} – вектор плотности внешних объемных сил.

Принимая аддитивность тензоров упругих и ростовых деформаций $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^g$ полагая, что упругие деформации подчиняются закону Гука $\hat{\sigma} = \hat{E}\hat{\varepsilon}$, где \hat{E} – тензор модулей упругости материала, а скорости ростовых деформаций линейно зависят от напряжений $\hat{\varepsilon} = \hat{A} + \hat{B}\hat{\sigma}$, что соответствует результатам экспериментов с различными биологическими материалами, получим реологический закон в виде:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{A} + \hat{B}\hat{\sigma} + \frac{d}{dt}(\hat{E}^{-1}\hat{\sigma}) \quad (3)$$

Здесь \hat{A} и \hat{B} – реологические коэффициенты модели. Компоненты матрицы \hat{A} соответствуют собственным скоростям роста материала (при отсутствии напряжений), а компоненты матрицы \hat{B}^{-1} имеют размерность вязкости. Поскольку закон (3) соответствует вязкоупругим жидкостям максвелловского типа, величины \hat{B} соответствуют ростовым вязкостям растущего материала.

Граничные условия в смешанной постановке имеют вид:

$$\vec{\sigma}_n|_{\Gamma_1} = \vec{\sigma}_0, \quad \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{v}_0 \quad (4)$$

Для случая ненапряженного роста ($\hat{\sigma} = 0$) задача (1)–(4) рассматривалась в плоском случае при $\vec{\sigma}_0 = 0, \vec{v}_0 = 0, \vec{f} = 0$ при моделировании роста двумерных объектов (листьев растений) [4–5].

В случае ненапряженного роста соотношения (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= A_{jj}, \quad j = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} &= 2A_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку в (5) три компоненты вектора скорости связаны 6-ю соотношениями, то из (5) следуют условия на компоненты \hat{A} , которые являются обобщением условий совместности деформаций в теории упругости:

$$\frac{\partial^2 A_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 A_{jj}}{\partial x_i^2} = 2 \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \quad (6)$$

Из (6) следует, что собственные скорости \hat{A} могут быть выражены через производные образующей функции Φ :

$$A_{jj} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2}, \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7)$$

При выполнении условий (7) соотношения (6) превращаются в тождества. В качестве примера выполнения условий (7) можно привести соотношения для изотропного роста:

$$A_{jj} = A_j(t), \quad A_{ij} = 0$$

При этом ростовые деформации представляют собой преобразования подобия и исходная форма образца сохраняется, что соответствует, например, росту листьев растений разных типов [7]. Листья представляют собой армированные волокнами анизотропные слоистые биоконпозиты с определенным типом анизотропии, обладающие изотропным ростом. Возможность изотропного роста анизотропных материалов является предметом активного исследования [5,8].

Поскольку мгновенными упругими деформациями растущего образца можно пренебречь [1], соотношения (3) часто рассматриваются в пренебрежении последним слагаемым. При этом для случая напряженного роста из (3) следуют аналогичные условия совместности, которые являются обобщением условий Бельтрами-Мичелла для растущей сплошной среды:

$$\frac{\partial^2 (B_{ii}\sigma_{ii} + B_{ij}\sigma_{jj} + B_{ik}\sigma_{kk})}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 (B_{ji}\sigma_{ii} + B_{jj}\sigma_{jj} + B_{jk}\sigma_{kk})}{\partial x_i^2} = 2 \frac{\partial^2 (B_{mm}\sigma_{ij})}{\partial x_i \partial x_j} \quad (8)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k, \quad m = 4, 5, 6$.

В случае, если граничные условия заданы в напряжениях ($\Gamma_2 = 0$), соответствующая постановка задачи представлена соотношениями (2), (8).

Если через каждую точку тела проходят три взаимно ортогональные плоскости ростовой симметрии, которые перпендикулярны к соответствующим направлениям криволинейных координат (главные оси анизотропии ростовых свойств совпадают с направлением координатных линий), то матрица B_{ik} имеет 12 независимых постоянных:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{66} \end{pmatrix}$$

При этом (3) можно разрешить относительно напряжений: $\hat{\sigma} = \hat{C} (\hat{\epsilon} - \hat{A})$, при-

чем

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{11}}{b} & \frac{\Delta_{21}}{b} & \frac{\Delta_{31}}{b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_{12}}{b} & \frac{\Delta_{22}}{b} & \frac{\Delta_{32}}{b} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_{13}}{b} & \frac{\Delta_{23}}{b} & \frac{\Delta_{33}}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_{66}} \end{pmatrix}$$

где $b = \det |b_{ik}|$, $b_{ik} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}$, Δ_{ij} – определитель минора матрицы b_{ik} ,

который получается из нее путем вычеркивания компонент, стоящих в i -й строке и k -м столбце. Подставляя выражение для напряжений в (2), получим уравнения в скоростях перемещений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{b} \sum_{j=1}^3 \Delta_{j1} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} - A_{jj} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2b_{rr}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - A_{ij} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2b_{ll}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - A_{ik} \right) \right] + f_i = 0 \end{aligned}$$

где $l = k + 2$, $r = k + 3$

которая может быть решена, если граничные условия (4) также заданы в скоростях перемещений ($\Gamma_1 = 0$).

Существуют модели, в которых ростовые деформации рассматриваются в рамках моделей термоупругости [9] и адаптивных упругих материалов [10], однако решение обратных задач с целью идентификации реологических параметров моделей растущих континуумов дает лучшее соответствие с результатами экспериментов для моделей максвелловского типа. Кроме этого, модели термоупругости не содержат возможности регуляции ростовых процессов посредством поля механических напряжений, что свойственно биологическим материалам. Модели термоупругости удовлетворительно работают только в случае ненапряженного роста изотропных материалов.

Моделирование вязкоупругих сред связано с необходимостью оценки числа необходимых для однозначного решения задачи граничных условий [11]. Оценки, аналогичные проведенным в [11], показывают, что для рассмотренных выше случаев роста число граничных условий совпадает с необходимым для решения соответствующих задач теории упругости, которые определяются соотношениями (4). Проводя оценки выражения для свободной энергии растущего материала в соответствии с [11] можно получить также оценки для реологических параметров \hat{A} , \hat{B} модели. Some estimations of the tensor rheological parameters of the model have been obtained from the general thermodynamic conditions.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Механика роста и морфогенеза*. Современные проблемы биомеханики. Вып.10. М.:Изд-во МГУ. 2000. 412 с.
- [2] *Арутюнян Н.Х.* Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.:Наука. 1987. 471 с.
- [3] *Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н.* Механика растущего биологического континуума //Доповіді НАН України. 2003. № 2. С. 56-60.
- [4] *Кантор Б.Я., Кизилова Н.Н.* Деформации круглой пластины из растущего биоматериала при ограничении роста // Теоретич. и приклад. механика. 2003. № 37. С. 130-135.
- [5] *Кизилова Н.Н., Кравченко Е.П.* Исследование напряжений и деформаций в двумерных растущих континуумах //Механика твердого тела. 2003. № 33. С. 158–168.
- [6] *Kizilova N.N., Egorova E.S.* Modelling of laminated growing biological materials. //J.Mech.Eng. 2005. № 5(56).
- [7] *Кизилова Н.Н., Попова Н.А.* Исследование транспортных систем листьев растений //Проблемы бионики. 1999. № 51. С. 71–79.
- [8] *Menzel A.* Modelling of anisotropic growth in biological tissues. A new approach and computational aspects. //Biomechan. Model. Mechanobiol. 2005. v. 3. P. 147–171.
- [9] *Epstein, M., and Maugin, G.A.* Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies. //Intern. J. Plasticity. 2000. v. 16. P. 951–978.
- [10] *Klisch S.M.* A theory of volumetric growth for compressible elastic biological materials. //Math. Mech. Solids. 2001. v. 6. P. 551–576.
- [11] *Ворович И.И.* О некоторых свойствах операторов вязкоупругости. Избранные проблемы прикладной механики: Сборник работ, посвящ. 60-летию акад. Челомея В.В. М. 1974. С. 225-244.

Kizilova N.N. *The problems on mechanics of growing continuous media.* The review of the models of mechanics of growing continuous media which are modeled as viscoelastic Maxwell-type liquids with mass sources is presented. The compatibility conditions for the deformations and Beltrami-Michell compatibility equations for the case of the growing media as the relationships for the tensor rheological parameters of the model have been obtained. The problems in stresses and strain rates and the mixed boundary conditions are discussed.

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ МНОГОСЛОЙНУЮ ЖИДКОСТЬ, РАЗДЕЛЕННУЮ УПРУГИМИ ПЛАСТИНКАМИ

Кононов Ю. Н.

Донецкий национальный университет, Украина

Выведена счетная система линейных дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания твердого тела с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения, содержащей многослойную идеальную жидкость, разделенную упругими пластинами. Рассмотрена задача о поперечных колебаниях под действием упругой силы твердого тела с многослойной жидкостью и упругими пластинами. Из положительной определенности потенциальной энергии получены условия устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы. Обобщены известные условия устойчивости для однородной жидкости на случай многослойной жидкости, разделенной упругими пластинами.

В рамках линейной теории уравнения поступательного движения твердого тела с многослойной жидкостью и упругими пластинами имеют вид

$$\begin{cases} M\ddot{X}_0 = K_x - \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{ij}\ddot{p}_j, \\ M\ddot{Y}_0 = K_y - \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{ij}\ddot{p}_j, \\ M\ddot{Z}_0 = K_z, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu_j(\ddot{p}_j + \sigma_j^2 p_j) = - \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i [(a_{31}g + \ddot{X}_0)\tilde{\alpha}_{ij} + (a_{32}g + \ddot{Y}_0)\tilde{\beta}_{ij}]. \quad (2)$$

Здесь

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \int_S x w_{ij} ds = \sum_n C_n \xi_{inj},$$

$$\tilde{\beta}_{ij} = \int_S y w_{ij} ds = \sum_n D_n \xi_{inj},$$

$$\xi_{inj} = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{ij} \Psi_n ds, \quad N_n^2 = \int_S \Psi_n^2 ds,$$

$$C_n = \int_S x \Psi_n ds, \quad D_n = \int_S y \Psi_n ds,$$

$$\mu_j = \sum_{i=1}^m \sum_n N_n^2 (a_{in}^* \xi_{inj} - b_{in} \xi_{i+1nj} - b_{i-1n} \xi_{i-1nj}) \xi_{inj},$$

$$a_{in}^* = a_{in} + k_{0i}, \quad a_{in} = \rho_{i-1} \coth \rho_{i-1} + \rho_i \coth \rho_i, \quad \bar{v}_0(t) = (\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0),$$

$$Z = Z_0 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

$$b_{in} = \rho_i / \sinh \alpha_{in}, \quad \alpha_{in} = h_i k_n, \quad \Delta \rho_i = \rho_i - \rho_{i-1} \quad (\rho_0 = 0), \quad i = \overline{1, m}$$

w_{ij} и σ_j — собственные формы и соответствующие им собственные числа колебаний многослойной жидкости и упругих пластинок [2]; Ψ_n и k_n — собственные формы и соответствующие им собственные числа колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде сечения S [1]; $M = M_0 + M_2$ — масса механической системы.

Из уравнений (1)-(2) следует, что присоединенная масса многослойной жидкости вычисляется по формуле

$$M_{2x} = M_2 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \left(\sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \tilde{\alpha}_{ij} \right)^2,$$

$$M_{2y} = M_2 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \left(\sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \tilde{\beta}_{ij} \right)^2,$$

где M_2 — масса многослойной жидкости, M_{2x} и M_{2y} — присоединенная масса многослойной жидкости, разделенной упругими пластинками при движении соответственно вдоль осей Ox и Oy . Так как $\mu_j > 0$, то $0 < M_{2x} < M_2$, $0 < M_{2y} < M_2$. При абсолютно жестких пластинках $M_{2x} = M_{2y} = M_2$.

Таким образом, если абсолютно жесткие пластинки становятся упругими, то это приводит к уменьшению присоединенной массы многослойной жидкости.

Если собственные функции Ψ_n ортогональны функциям x и y ($\tilde{\alpha}_{ij} = \tilde{\beta}_{ij} = 0$), то колебания многослойной жидкости и упругих пластинок не влияют на горизонтальные движения твердого тела. При поступательном движении это те формы главных колебаний многослойной жидкости и упругих пластинок, которые не изменяют положения центра тяжести механической системы.

Пусть твердое тело с многослойной жидкостью и упругими пластинками совершает малые плоские колебания под действием упругой силы $F_y = -CY$.

Потенциальная энергия рассматриваемой механической системы будет иметь вид

$$\Pi = \frac{1}{2} CY^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j p_j^2(t). \quad (3)$$

Квадратичная форма (3) будет положительно определенной при $C > 0$ и

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^m \sum_n \xi_{inj}^2 N_n^2 [g \Delta \rho_i + (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2] > 0. \quad (4)$$

Здесь D_i и T_i — изгибная жесткость и коэффициент растягивающего усилия i -ой пластинки.

Так как собственные числа k_n образуют бесконечно возрастающую числовую последовательность, то для выполнения неравенства (4) достаточно потребовать, чтобы

$$(D_i k_1^2 + T_i) k_1^2 > g(\rho_{i-1} - \rho_i) \quad (5)$$

Условие (5) не зависит от глубин заполнения жидкостей h_i и от массовых характеристик пластинок k_{0i} . При "естественной" стратификации многослойной жидкости ($\rho_i \geq \rho_{i-1}$) это условие всегда выполнено. Неустойчивость может возникнуть если i -ая более тяжелая жидкость находится выше менее тяжелой $i - 1$ -ой жидкости. Из формулы (5) следует, что в этом случае предварительным натяжением T_i и величиной изгибной жесткости D_i можно можно стабилизировать неустойчивое положение равновесия твердого тела с многослойной жидкостью.

Из неравенства (5) также следует, что если упругая пластинка или мембрана ($D_i \equiv 0$) находится только на свободной поверхности ($D_i = 0, T_i = 0$ при $i \neq 1, \Delta\rho_i = \rho_i$), то при "естественной" стратификации многослойной жидкости ($\Delta\rho_i \geq 0$) положение равновесия данной системы будет устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кононов Ю.Н. О колебании и устойчивости положения равновесия цилиндрического сосуда, содержащего многослойную жидкость, разделенную упругими мембранами // Совр. пробл. мех. сил. среды. Тр. VII Межд. конф. Ростов-на-Дону, 22-24 окт. 2001 Ростов н/Д: Изд-во ООО "ЦВВР". 2002. Т. 2 с. 101-104.
- [2] Кононов Ю.Н. Колебания пластин, разделяющих многослойную жидкость разной плотности // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. Ростов-на-Дону-Азов, 13-16 окт. 2003: Изд-во "Новая книга". 2004. с. 227-229.
- [3] Кононов Ю.Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Прикл. гідромеханіка. 2003. т. 5(77), N 3. с. 48-54.

Kononov Y.N. *Stability and stabilizing of motion rigid body with cavity containing multilayered liquid parted by resilient plates.* The account system of linear differential equalizations, describing the small vibrations of rigid body with the cylindrical cavity of arbitrary crossrunner, containing the multilayered ideal liquid parted by resilient plates, is shown out. A task is considered about the transversal vibrations under the action of resilient force of solid with by a multi-layered liquid and resilient plates. From positive definiteness of potential energy and terms of reality roots of frequency equalization the terms of stability are got positions of equilibrium of the examined mechanical system. The known terms of stability are generalized for a homogeneous liquid on a case to the multilayered liquid parted by resilient plates.

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ УЧЕТЕ КОНЕЧНОСТИ ТОЛЩИНЫ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ НА ПРИМЕРЕ ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ

Кузьменко С. М.

Ростовский госуниверситет

В работе вариационным методом рассмотрены условия равновесия при декомпозиции бинарного сплава, в предположении о существовании между фазами переходного слоя, положение которого заранее неизвестно. Поля перемещений каждой из фаз и положение переходного слоя находятся из условия стационарности функционала свободной энергии при однородном и постоянном поле температур.

Необходимость адекватного описания поведения новых конструкционных материалов в критических условиях (большие нагрузки, высокие температуры и т. п.) объясняет неослабевающий в последние годы интерес физики и механики твердого тела к исследованию фазовых переходов мартенситного типа, вызванных механической активацией. Задачи механики двухфазных тел исследовались в [1, 3, 6] для однокомпонентных и в [2, 4, 5] для многокомпонентных сред.

В данной работе предложена модель переходного слоя при распаде бинарного сплава линейно упругих материалов. Условия равновесия фаз получены вариационным методом, на основе принципа стационарности свободной энергии. Они включают в себя уравнения равновесия в объемах каждой из фаз, а также условия совместности на границах фаза-переходный слой. Последние состоят из условий баланса сил, кинематических условий совместности для перемещений, а также дополнительных термодинамических условий, необходимых для определения заранее неизвестного положения и толщины переходного слоя.

Рассмотрим тело, сферической формы, состоящее из двух фаз. Внутренняя область тела состоит из фазы «0», а внешняя - из фазы «1». Предположим, что между данными областями существует переходный слой ненулевой толщины, состоящий из сплава данных веществ.

Зададим систему сферических координат с началом совпадающим с центром тела. Будем считать, что области расположены концентрично, и обозначим их V_0 и V_1 , для фаз «0» и «1» соответственно. Область толщины $h_1 - h_0$, занятую переходным слоем, обозначим через V_h .

Для простоты будем исследовать задачу при отсутствии объемных и поверхностных сил, считая на поверхности тела заданным постоянное поле радиальных перемещений Δ . Тогда вектор перемещений \mathbf{u} будет иметь только радиальную компоненту $u(r)$, а три ненулевые компоненты линейного тензора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ в сферических координатах примут вид

$$\varepsilon_r = \frac{du(r)}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u(r)}{r}. \quad (1)$$

Будем считать, что фазы «0» и «1» представляют собой линейные изотропные тела с разными постоянными Ламе. Обозначим их через λ_0, μ_0 и λ_1, μ_1 . Для промежуточного же слоя V_h зададим зависимость материальных констант от концентрации компоненты «1» сплава, по аналогии с [5]:

$$\lambda(c) = \lambda_1 c + \lambda_0(1 - c), \quad \mu(c) = \mu_1 c + \mu_0(1 - c) \quad (2)$$

где $c \in [0, 1]$ - концентрация вещества «1».

Тогда удельная энергия деформации тела может быть записана в виде суммы энергий каждой из фаз и переходного слоя

$$W = W_0 + W_1 + W_h \quad (3)$$

где

$$W_0 = \frac{1}{2} (\lambda_0 I_0^2 + 2\mu_0 II_0), \quad W_1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 I_1^2 + 2\mu_1 II_1), \quad W_h = \frac{1}{2} (\lambda(c) I_h^2 + 2\mu(c) II_h), \quad (4)$$

а

$$I_i = \frac{du_i(r)}{dr} + 2\frac{u_i(r)}{r}, \quad II_i = \frac{du_i(r)^2}{dr} + 2\frac{u_i(r)^2}{r}, \quad (i = 1, 2, h)$$

соответственно первый и второй инварианты тензоров деформации соответствующих слоев тела.

Переходный слой ограничен двумя концентрическими сферами радиусов h_0 и h_1 соответственно. Тогда условие неразрывности поля перемещений примет вид

$$u_0(h_0) = u_h(h_0), \quad u_1(h_1) = u_h(h_1). \quad (5)$$

Условия на внешней границе ($r = 1$) и в центре принимают соответственно вид

$$u_1(1) = \Delta. \quad (6)$$

$$u_0(0) = 0. \quad (7)$$

Запишем полный функционал потенциальной энергии тела:

$$\begin{aligned} 2\Psi = & \iiint_{V_0} (\lambda_0 I_0^2 + 2\mu_0 II_0) dV + \\ & + \iiint_{V_1} (\lambda_1 I_1^2 + 2\mu_1 II_1) dV + \iiint_{V_h} (\lambda(c) I_h^2 + 2\mu(c) II_h) dV \end{aligned} \quad (8)$$

Предположим теперь, считая переходный слой достаточно тонким, что концентрация линейно зависит от радиуса:

$$c = c_0 r + c_1 \quad (9)$$

Тогда выполняются соотношения

$$c(h_0) = 0; \quad c(h_1) = 1$$

или, учитывая (9)

$$c_0 h_0 + c_1 = 0; \quad c_0 h_1 + c_1 = 1$$

откуда следуют равенства

$$c_0 = -\frac{c_1}{h_0}; \quad c_1 = \frac{h_0}{h_0 - h_1}.$$

Таким образом, концентрация c определяется соотношением

$$c(r) = \frac{-1}{h_0 - h_1} r + \frac{h_0}{h_0 - h_1} = \frac{h_0 - r}{h_0 - h_1} \quad (10)$$

а постоянные Ламе переходного слоя даются формулами

$$\lambda(c) = \lambda_1 \frac{h_0 - r}{h_0 - h_1} + \lambda_0 \left(1 - \frac{h_0 - r}{h_0 - h_1}\right) \quad \mu(c) = \mu_1 \frac{h_0 - r}{h_0 - h_1} + \mu_0 \left(1 - \frac{h_0 - r}{h_0 - h_1}\right) \quad (11)$$

Заменив тройные интегралы в (8) повторными получим:

$$\begin{aligned} \Psi = 2\pi & \left(\int_0^{h_0} W_0(r, u_0, u'_0) r^2 dr + \right. \\ & \left. + \int_{h_0}^{h_1} W_h(r, u_h, u'_h, \alpha, h) r^2 dr + \int_{h_1}^1 W_1(r, u_1, u'_1) r^2 dr \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению поля перемещений, сообщающих минимум функционалу (12) при условиях (5)–(6). Введем для краткости обозначения $\Pi_i = 2W_i r^2$, и запишем первую вариацию функционала Ψ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \delta\Psi = & \int_0^{h_0} \left[\frac{\partial \Pi_0}{\partial u_0} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial u'_0} \right) \right] \delta u_0 dr + \frac{\partial \Pi_0}{\partial u'_0} \Big|_{h_0} \delta u_0 + \\ & + \int_{h_0}^{h_1} \left[\frac{\partial \Pi_h}{\partial u_h} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \right) \right] \delta u_h dr + \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_1} \delta u_h - \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_0} \delta u_h + \\ & + \int_{h_1}^1 \left[\frac{\partial \Pi_1}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial u'_1} \right) \right] \delta u_1 dr - \frac{\partial \Pi_1}{\partial u'_1} \Big|_{h_1} \delta u_1 + \Pi_0|_{h_0} \delta h_0 - \Pi_h|_{h_0} \delta h_0 + \\ & + \Pi_h|_{h_1} \delta h_1 - \Pi_1|_{h_1} \delta h_1 + \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_0} \delta h_0 dr + \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_1} \delta h_1 dr \end{aligned} \quad (13)$$

Три первых подынтегральных выражения дадут нам три уравнения равновесия (уравнения Лагранжа) в сферических координатах для каждой из областей тела в виде

$$\frac{d\Pi_i}{du_i} - \frac{d\Pi_i}{du'_i} = 0. \quad (14)$$

Решая полученные уравнения, мы найдем значения перемещений выраженные через шесть произвольных постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} u_0(r) &= \frac{C_1}{r^2} + C_2 r, & u_1(r) &= \frac{C_3}{r^2} + C_4 r, \\ u_h(r) &= C_5 F_1(\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1, h_0, h_1, r) + C_6 F_2(\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1, h_0, h_1, r), \end{aligned} \quad (15)$$

где $F_1(\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1, h_0, h_1, r)$ и $F_2(\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1, h_0, h_1, r)$, выражаются через обобщенные гипергеометрические функции и здесь не приводятся в целях сохранения объема статьи.

Выпишем вариации на границах между областями:

$$\delta(u_0(h_0)) = \delta u_0(h_0) + u'_0(h_0)\delta h_0, \quad \delta(u_h(h_0)) = \delta u_h(h_0) + u'_h(h_0)\delta h_0$$

приравнивая, с учетом неразрывности, получим:

$$\delta u_0(h_0) = \delta u_h(h_0) + \delta h_0 (u'_h(h_0) - u'_0(h_0)); \quad (16)$$

аналогично этому, на другой границе выполняются соотношения

$$\delta(u_1(h_1)) = \delta u_1(h_1) + u'_1(h_1)\delta h_1, \quad \delta(u_h(h_1)) = \delta u_h(h_1) + u'_h(h_1)\delta h_1$$

а следовательно,

$$\delta u_1(h_1) = \delta u_h(h_1) + \delta h_1 (u'_h(h_1) - u'_1(h_1)) \quad (17)$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые в (13); получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pi_0}{\partial u'_0} \Big|_{h_0} \delta u_0 + \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_1} \delta u_h - \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_0} \delta u_h - \frac{\partial \Pi_1}{\partial u'_1} \Big|_{h_1} \delta u_1 + \Pi_0|_{h_0} \delta h_0 - \Pi_h|_{h_0} \delta h_0 + \\ & + \Pi_h|_{h_1} \delta h_1 - \Pi_1|_{h_1} \delta h_1 + \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_0} \delta h_0 dr + \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_1} \delta h_1 dr = 0 \end{aligned}$$

отсюда, учитывая (16) и (17), получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pi_0}{\partial u'_0} \Big|_{h_0} [\delta u_h(h_0) + \delta h_0 (u'_h(h_0) - u'_0(h_0))] + \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_1} \delta u_h(h_1) - \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_0} \delta u_h(h_0) - \\ & - \frac{\partial \Pi_1}{\partial u'_1} \Big|_{h_1} [\delta u_h(h_1) + \delta h_1 (u'_h(h_1) - u'_1(h_1))] + \Pi_0|_{h_0} \delta h_0 - \Pi_h|_{h_0} \delta h_0 + \quad (18) \\ & + \Pi_h|_{h_1} \delta h_1 - \Pi_1|_{h_1} \delta h_1 + \delta h_0 \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_0} dr + \delta h_1 \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_1} dr = 0 \end{aligned}$$

Приравнивая нулю в (18) выражения при независимых вариациях получим четыре уравнения:

$$\delta u_h(h_0) : \quad \frac{\partial \Pi_0}{\partial u'_0} \Big|_{h_0} - \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_0} = 0 \quad (19)$$

$$\delta u_h(h_1) : \quad \frac{\partial \Pi_h}{\partial u'_h} \Big|_{h_1} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial u'_1} \Big|_{h_1} = 0 \quad (20)$$

$$\delta h_0 : \quad \frac{\partial \Pi_0}{\partial u'_0} \Big|_{h_0} (u'_h(h_0) - u'_0(h_0)) + \Pi_0|_{h_0} - \Pi_h|_{h_0} + \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_0} dr = 0 \quad (21)$$

$$\delta h_1 : \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial u'_1} \Big|_{h_1} (u'_h(h_1) - u'_1(h_1)) + \Pi_h|_{h_1} - \Pi_1|_{h_1} + \int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial h_1} dr = 0 \quad (22)$$

Уравнения (5)–(7) и (19)–(20), после подстановки в них решений дают нам систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_i , ($i = 1..6$), решая которые и подставляя найденные значения в уравнения (21)–(22) мы получаем соотношения, определяющие положение переходного слоя в сфере.

Таким образом, в случае центрально симметричных полей деформаций, на основе вариационного метода, возможно определение переходного слоя между разными фазами в материале, испытывающем фазовое превращение. Детальный анализ полученных соотношений и решений на их основе, как и более общий случай деформированного состояния, предполагается обсудить в следующих публикациях.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Еремееву за внимание к работе и ценные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гринфельд М. А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [2] *Еремеев В. А., Кузьменко С. М.* О термодинамическом равновесии фаз двухкомпонентных линейно-упругих сред // Известия высших учебных заведений Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. № 1 (13) 2004. С. 17–22.
- [3] *Кристиан Дж.* Теория превращений в металлах и сплавах. М.: Мир, 1978. – Ч. 1. 806 с.
- [4] *Устиновщиков Ю. И.* Выделение второй фазы в твердых растворах. М.: Наука, 1988. 170 с.
- [5] *Fosdick R., Royer-Carfagni G. F.* Alloy separation of a binary mixture in a stressed elastic sphere // J. Elasticity. 1996. V. 42. P. 49–77.
- [6] *Garcke H.* On mathematical models for phase separation in elastically stressed solids, habitation thesis, University Bonn, 2000. 96 p.

Kuzmenko S. M. *About a conditions of thermodynamic balance of elastic bodies with taking into account an interface layer finiteness, by the example of centrally symmetric fields of deformations.*

In this paper we consider the conditions of balance of phases in a decomposing binary alloy by the variational method in the case of small deformations. It is supposed that phases are divided by a interface layer which position is a-priory unknown. Displacement fields of each phase and interface layer position can be found from a stationariness condition of the free-energy functional.

As an example the problem about phase decomposition in an elastic sphere is considered.

РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА НА ЗАКРИТИЧЕСКОМ ЭТАПЕ

Ластенко М. С.

*Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики
имени Воронича И.И. РГУ, Ростов-на-Дону*

В рамках нелинейной теории упругости на основе точных трехмерных уравнений исследована устойчивость равновесия кругового цилиндра из однородного изотропного материала при одноосном растяжении. С использованием энергетического метода исследования устойчивости изучено закритическое деформирование растягиваемого цилиндра. Установлено, что ниспадающий участок диаграммы растяжения характеризуется потерей устойчивости однородного состояния цилиндра, которое сменяется неоднородным осесимметричным напряженно-деформированным состоянием. Определена форма тела в указанном состоянии, и проанализировано его развитие в процессе растяжения цилиндра.

Будем считать материал цилиндра однородным, изотропным и несжимаемым. За лагранжевы координаты примем цилиндрические координаты r , φ , z , в которых область, занимаемая телом, задается неравенствами $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq l$, где r_0 и l - радиус и длина цилиндра соответственно. Цилиндр испытывает конечную осесимметричную деформацию, которая описывается соотношениями $R = R(r, z)$, $\Phi = \varphi$, $Z = Z(r, z)$, где R , Φ , Z - цилиндрические координаты точек тела после деформации.

Система уравнений, описывающих деформацию несжимаемого изотропного упругого тела при отсутствии массовых сил, состоит [1] из уравнений равновесия для тензора напряжений Пиолы \mathbf{D}

$$\operatorname{div} \mathbf{D} \equiv \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

и определяющих соотношений

$$\mathbf{D} = (d\Pi/d\mathbf{H}) \cdot \mathbf{C}^{-T} - p\mathbf{C}^{-T}, \quad (2)$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z - ортонормированный базис цилиндрической системы координат; Π - удельная потенциальная энергия деформации; $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{G}$ - логарифмическая мера деформации; $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$ - мера деформации Коши-Грина; $\mathbf{C} = \operatorname{grad} \mathbf{R}$ - градиент деформации, $\mathbf{C}^{-T} \equiv (\mathbf{C}^T)^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^T$; $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_r + Z\mathbf{e}_z$ - вектор положения частицы тела в деформированном состоянии; p - давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию. Условие несжимаемости материала имеет вид $\det \mathbf{C} = 1$.

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузки, а на торцах отсутствуют силы трения, т.е. касательные напряжения, и задано постоянное нормальное перемещение, что соответствует нагружению стержня в жесткой испытательной машине. В результате получим следующие граничные условия

$$D_{rr}(r_0, z) = D_{rz}(r_0, z) = D_{zr}(r, 0) = D_{zr}(r, l) = 0, \quad Z(r, 0) = 0, \quad Z(r, l) = \lambda l, \quad (3)$$

где λ – заданная положительная постоянная (коэффициент растяжения по оси цилиндра).

Рассматривается модель материала со степенным упрочнением, для которой упругий потенциал имеет вид

$$\Pi = A\Gamma^\beta, \quad A > 0, \quad \beta > 1, \quad (4)$$

где A , β – постоянные, $\Gamma = \sqrt{\text{tr}\mathbf{H}^2}$. Данная модель удовлетворительно описывает [2]- [4] поведение ряда упруго-пластических конструкционных материалов (сталь, медь, некоторые другие пластичные металлы и сплавы) при активном нагружении и может служить обобщением деформационной теории пластичности на случай больших деформаций.

Однородное напряженно-деформированное состояние цилиндра, являющееся решением краевой задачи (1), (3), описывается следующим образом

$$R = \lambda^{-1/2}r, \quad Z = \lambda z, \quad p = p_0 = -0.5A\beta (1.5)^{\beta/2-1} \ln^{\beta-1}\lambda. \quad (5)$$

Растягивающая сила, приложенная к торцам цилиндра, выражается соотношением

$$P = \pi r_0^2 A \beta (1.5)^{\beta/2} \lambda^{-1} \ln^{\beta-1} \lambda.$$

Данная зависимость имеет одну точку максимума $\lambda_* = e(\beta - 1)$. Из многочисленных опытов на простое растяжение хорошо известно [2]- [4], что после достижения максимума на диаграмме растяжения стержня процесс однородного деформирования становится неустойчивым, образуется шейка.

Воспользуемся бифуркационным критерием устойчивости равновесия [1,5], который состоит в решении линеаризованной краевой задачи. Рассмотрим осесимметричную форму равновесия упругого цилиндра, мало отличающуюся от однородного одноосного растяжения

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{w}, \quad p(r, z) = p_0 + \varepsilon p_1(r, z),$$

$$\mathbf{R}_0 = \lambda^{-1/2}r \mathbf{e}_r + \lambda z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{w} = u(r, z)\mathbf{e}_r + w(r, z)\mathbf{e}_z. \quad (6)$$

Здесь ε – малый параметр, \mathbf{w} – вектор добавочного перемещения. Подставляя (6) в (1)-(4) и отбрасывая члены второго и более высокого порядков относительно ε , получим линейную краевую задачу с неизвестными функциями $u(r, z)$, $w(r, z)$ и $p_1(r, z)$. Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(r, z) = U(r) \cos\left(\frac{n\pi}{l}z\right), \quad w(r, z) = W(r) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right), \quad p_1(r, z) = AQ(r) \cos\left(\frac{n\pi}{l}z\right),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Тогда задача об исследовании устойчивости сводится к одному обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка с четырьмя линейными однородными краевыми условиями. В результате мы приходим к задаче о нахождении спектра критических значений параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения, и к определению собственных функций – мод выпучивания.

Полученная задача решена численно [6, 7] конечно-разностным методом для различных значений параметра упрочнения β . Критические значения параметра λ существуют только на ниспадающем участке диаграммы растяжения, т. е. при $\lambda > \lambda_*$. Для каждого значения параметра волнообразования вдоль оси цилиндра $n = 1, 2, 3, \dots$ существует критическое значение λ_n , причем с ростом n монотонно растёт и λ_n . Первое значение λ_1 расположено очень близко к λ_* , все последующие значения λ_n также близки друг к другу.

Определены собственные функции линеаризованной задачи – моды выпучивания \mathbf{w}_n . Установлено, что с ростом n увеличивается осцилляция решения по радиальной координате. Характер осцилляции решения зависит от параметра упрочнения β . С ростом β осцилляция уменьшается. Подробное описание особенностей спектра критических значений λ_n и мод выпучивания содержится в [7].

Таким образом, каждому λ_n однозначно соответствует вектор добавочного перемещения \mathbf{w}_n , определенный численно по r и аналитически по z .

Поскольку решение линейной однородной задачи определено с точностью до произвольного постоянного множителя, амплитуда выпучивания ϵ и число закритических форм равновесия не могут быть найдены из линеаризованной краевой задачи устойчивости. Для анализа закритического поведения цилиндра необходимо обратиться к нелинейным уравнениям (1)-(4), описывающим деформацию упругого тела.

Обратимся к вариационному принципу Лагранжа, согласно которому выполнение уравнений равновесия, записанных в перемещениях, и граничных условий эквивалентно стационарности потенциальной энергии тела [1]. Основываясь на этом принципе, будем считать равновесное состояние устойчивым, пока потенциальная энергия имеет в нём минимальное значение. Если же в процессе нагружения возникает возможность существования равновесного состояния с потенциальной энергией меньшей, чем в текущем состоянии, то текущая форма равновесия теряет устойчивость, сменяясь более выгодной с энергетической точки зрения новой формой равновесия. Такой подход к исследованию устойчивости позволяет, в отличие от линеаризованной задачи, не ограничиваться лишь малыми отклонениями от однородного деформированного состояния.

Воспользуемся методом Ритца. Рассмотрим однородное напряженно-деформированное состояние цилиндра (5), на которое накладываются M полученных при решении линеаризованной задачи мод выпучивания \mathbf{w}_n , начиная с первой. Тогда осесимметричная форма упругого цилиндра задаётся следующим образом

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \sum_1^M c_n \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{w}_n = U_n(r) \cos\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \mathbf{e}_r + W_n(r) \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \mathbf{e}_z, \quad (7)$$

где неизвестными являются только амплитуды наложенных мод выпучивания c_n .

Подставляя в выражение для потенциала (4) форму цилиндра из (7), получим потенциал, как функцию $M + 3$ переменных $\Pi = \Pi(\lambda, r, z, c_1, c_2, \dots, c_M)$.

Таким образом, с учетом граничных условий (3), потенциальная энергия тела

приобретает вид

$$V = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^l \Pi(\lambda, r, z, c_1, c_2, \dots, c_M) r dr d\varphi dz$$

и при фиксированном λ оказывается нелинейной функцией M переменных c_n . Задача сводится к поиску таких значений этих переменных, которые доставляли бы функции $V(c_1, c_2, \dots, c_M)$ стационарные значения, т.е. возникает система нелинейных алгебраических уравнений относительно c_n

$$\begin{cases} V_1 = V_1(c_1, c_2, \dots, c_M) = 0 \\ V_2 = V_2(c_1, c_2, \dots, c_M) = 0 \\ \dots \\ V_M = V_M(c_1, c_2, \dots, c_M) = 0 \end{cases}, \quad V_n = \frac{\partial V}{\partial c_n} = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{\partial \Pi}{\partial c_n} r dr d\varphi dz. \quad (8)$$

Ввиду громоздкости опустим запись уравнений (8) в явном виде.

Параметр модели β определяет коэффициент растяжения $\lambda_* = e(\beta - 1)$, соответствующий точке максимума на диаграмме растяжения стержня. В данной работе мы ограничимся рассмотрением случаев $\beta \in [1.005..1.1]$, что соответствует интервалу $\lambda_* \in [1.005..1.105]$.

Процесс растяжения цилиндра исследовался следующим образом: последовательно, с определенным шагом возрастания задавались значения λ , начиная от 1.0, что соответствует исходному недеформированному состоянию тела. Для каждого фиксированного значения λ производился поиск решений системы уравнений (8) с помощью специально разработанного итерационного метода. Наибольшее количество наложенных мод, для которого был проведен подробный анализ решения задачи, равно семи.

Отметим закономерности, общие для всех значений $\beta \in [1.005..1.1]$. Установлено, что на возрастающем участке диаграммы растяжения цилиндра существует только тривиальное решение системы (8) $c_n = 0$, $n = 1..M$, то есть однородное напряженно-деформированное состояние сохраняет устойчивость.

Ниспадающий участок диаграммы растяжения характеризуется наличием шести решений помимо тривиального. Из найденных нетривиальных решений системы (8) только два соответствуют неоднородному состоянию тела, в котором потенциальная энергия меньше, чем в однородном состоянии. Значения амплитуд четных мод в обоих решениях одинаковы, тогда как значения амплитуд нечетных мод различаются только знаком. Формально эти два решения различны, однако они описывают одно и то же напряженно-деформированное состояние цилиндра, а значит можно ограничиться рассмотрением только одного из них, которое и определит текущее состояние тела на ниспадающем участке диаграммы растяжения.

Рассмотрим особенности полученного решения. Все значения амплитуд наложенных мод выпучивания c_n положительны. Установлено, что c_n убывают с ростом порядкового номера моды. С ростом коэффициента растяжения, начиная от λ_* , значения амплитуд постепенно возрастают и, по достижении коэффициентом растяжения некоторого значения, существенно удаленного от λ_* , начинают убывать. Причем, по мере увеличения λ первыми начинают убывать амплитуды мод

более высоких порядков, и последней достигает максимума амплитуда первой моды. Вероятно, применительно к эксперименту начало убывания значений амплитуд можно интерпретировать, как разрушение образца. Отмечено, что увеличение параметра упрочнения β приводит к уменьшению максимальных значений амплитуд, достигаемых в процессе растяжения цилиндра.

В табл. 1 приведены для двух значений β значения коэффициента растяжения, при которых достигает максимума амплитуда моды с наибольшим номером, λ_{sup} и соответствующие этому коэффициенту растяжения амплитуды мод выпучивания. Приведенные в табл. 1 решения системы (8) соответствуют случаю $M = 7$.

β	λ_{sup}	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
1.02	1.240	0.01390	0.01318	0.01210	0.01079	0.00940	0.00804	0.00678
1.06	1.272	0.01249	0.01162	0.01038	0.00896	0.00753	0.00621	0.00507

Таблица 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00638).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: ИЛ, 1954. 648 с.
- [3] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [4] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [5] Еремеев В.А., Зубов Л.М. Некоторые проблемы устойчивости трехмерных нелинейно упругих тел // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. 1999. № 1. С. 42–47.
- [6] Ластенко М.С. Неустойчивость цилиндра из материала со степенным упрочнением при растяжении // Труды аспирантов и соискателей Ростовского государственного университета. Том VIII. Ростов-на-Дону, 2002. С. 25–27.
- [7] Lastenko M.S., Zubov L.M. A model of neck formation on a rod under tension // Revista Colombiana de Matematicas. 2002. Vol. 36. P. 49–57.

Lastenko M.S. *Tension of an elastic cylinder at the aftercritical stage.* A stability of equilibrium of circular cylinder made of homogeneous isotropic material is investigated during uniaxial tension within the frame of nonlinear elasticity on the basis of exact three-dimensional equations. Aftercritical deformation of the cylinder under tension is studied with use of stability investigation method based on the energy analysis. It is found that the descending part of the stretching diagram is characterized by the loss of stability of the homogeneous state of the cylinder, which is replaced by an inhomogeneous axisymmetric stress-strain state. A shape of the body in this state is found, and its evolution is examined.

СВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА

Лычев С. А., Семенов Д. А.

Самарский государственный университет

Построено замкнутое аналитическое решение связанной динамической задачи термовязкоупругости для конечных тел канонической формы. Решение представлено в форме спектральных разложений по биортогональной системе собственных функций несамосопряженного пучка дифференциальных операторов, порождаемых рассматриваемой задачей. Спектральные разложения получены с помощью специального класса несимметричных интегральных преобразований.

При исследовании нестационарных динамических вязкоупругих процессов необходимо учитывать взаимосвязь тепловых и механических полей, в том числе при описании механизма диссипации [1]. В наиболее строгом виде это удается осуществить на основе соотношений неравновесной термодинамики и, в частности, теории внутренних переменных состояния [2]. Преимущество таких моделей состоит в том, что они позволяют связать механическое поведение тел с рядом микроструктурных процессов, протекающих на молекулярном и субмолекулярном уровнях. К примеру, внутренние параметры можно отождествить с плотностью точечных дефектов, плотностью дислокаций, концентрациями химически реагирующих компонентов и т. д. Вместе с тем соответствующее математическое описание даже в линейной постановке приводит к сложным начально-краевым задачам, лишенным энергетической симметрии, и, как следствие, несамосопряженным.

В статье [3] построено представление решений несимметричных начально-краевых задач в форме спектральных разложений по полной системе собственных и присоединенных функций несамосопряженного пучка дифференциальных операторов. В настоящей работе эта техника применяется к пространственной линейаризованной задаче динамической термовязкоупругости.

Кратко изложим схему построения разрешающих уравнений и краевых условий. Линейаризованные уравнения движения и теплового баланса имеют вид:

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} + \rho \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0, \quad \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}^*, \quad \rho \theta_0 \dot{s} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho h = 0; \quad \hat{\mathbf{T}} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (1)$$

Здесь ∇ – оператор Гамильтона, $\hat{\mathbf{T}}$ – тензор напряжений, ρ – плотность, \mathbf{f} – заданное поле массовых сил, \mathbf{u} – искомое поле перемещений, θ_0, θ_t температуры среды в отсчетном и актуальном состояниях, $\theta = \theta_t - \theta_0$, s, h – энтропия и мощность внутренних источников тепла, отнесенные к единице массы, \mathbf{q} – тепловой поток, ψ – плотность свободной энергии, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)$ – тензор малых деформаций. Производные по времени обозначаются точкой, звездочкой – транспонирование.

Полагаем, что плотность свободной энергии ψ аппроксимируется следующей квадратичной зависимостью

$$\psi = \frac{9}{2}K_\infty e^2 + \frac{9}{2} \sum_{q=1}^n K_q (e - \eta_q)^2 + \mu_\infty \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D + \sum_{q=1}^n \mu_q (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D - \hat{\boldsymbol{\eta}}_q^D) : (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D - \hat{\boldsymbol{\eta}}_q^D) - 3\gamma_\infty e\theta - 3 \sum_{q=1}^n \gamma_q (e - \eta_q)\theta - \frac{c_\varepsilon}{2\theta_0} \theta^2. \quad (2)$$

Здесь $\hat{\mathbf{T}}^D$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D$ – девиаторные, s , e – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций, η_q , $\hat{\boldsymbol{\eta}}_q^D$ – шаровые и девиаторные составляющие тензоров скрытых параметров, K_∞ , μ_∞ , γ_∞ имеют смысл длительных модулей всестороннего сжатия, сдвига, термомеханической постоянной, c_ε – теплоемкость при постоянной деформации. Аппроксимация (2) согласно (1)₃, (1)₄ определяет законы состояния:

$$t = 3K_\infty e + 3 \sum_{q=1}^n (K_q (e - \eta_q) - \gamma_q \theta), \quad \hat{\mathbf{T}}^D = 2\mu_\infty \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D + 2 \sum_{q=1}^n \mu_q (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D - \hat{\boldsymbol{\eta}}_q^D), \\ s = 3\gamma_\infty e + 3 \sum_{q=1}^n \gamma_q (e - \eta_q) + \frac{c_\varepsilon}{\theta_0} \theta. \quad (3)$$

Внутренние (скрытые) переменные η_q , $\hat{\boldsymbol{\eta}}_q^D$ в линейном приближении удовлетворяют уравнениям эволюции (ξ_q , ς_q – диссипативные характеристики среды):

$$\dot{\eta}_q = \xi_q \frac{\partial \psi}{\partial \eta_q} \Rightarrow \dot{\eta}_q = \xi_q (3\gamma_q \theta - 9K_q (e - \eta_q)), \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_q^D = \varsigma_q \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D} \Rightarrow \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}_q^D = -2\varsigma_q \mu_q (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D - \hat{\boldsymbol{\eta}}_q^D).$$

Исключив с их помощью из (3) скрытые переменные, приходим к соотношениям:

$$\mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{T}}^D = 2\mathcal{L}_2 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^D, \quad \mathcal{L}_3 t = 3\mathcal{L}_4 e - \mathcal{L}_5 \theta, \quad \mathcal{L}_3 s = 3\mathcal{L}_6 e + \mathcal{L}_7 \theta, \quad \mathcal{L}_k = \sum_{n=0}^N l_k^n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \quad (4)$$

где коэффициенты l_k^n обозначают соответствующие алгебраические комбинации введенных выше параметров среды. Зависимости (4) в совокупности с линейным законом теплопроводности $\mathbf{q} = -\lambda \nabla \theta$ позволяют сформулировать уравнения движения и теплового баланса, связывающих перемещение и температуру:

$$\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \nabla^2 \mathbf{u} + (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_4 + \frac{1}{3} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 (\mathbf{k} - \ddot{\mathbf{u}}) - \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_5 \nabla \theta = 0, \\ \mathcal{L}_3 \nabla^2 \theta - \alpha \mathcal{L}_7 \dot{\theta} - \alpha \mathcal{L}_6 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \beta \mathcal{L}_3 h = 0. \quad (5)$$

Запишем краевые условия, соответствующие упругому закреплению тела:

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} + \hat{\boldsymbol{\Xi}} \cdot \mathbf{u} \Big|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} + \chi \theta \Big|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ – тензор упругих параметров закрепления границы Γ , χ – характеристика ее теплопроводности. С учетом (4) краевые условия принимают вид:

$$\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*) + \mathbf{n} [(3\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_4 - 2\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3) \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_5 \theta] + \hat{\boldsymbol{\Xi}} \cdot \mathbf{u} \Big|_\Gamma = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \theta + \frac{\chi}{\lambda} \theta \Big|_\Gamma = 0. \quad (6)$$

Указание начальных данных замыкает начально–краевую задачу, которая теперь может быть представлена как задача Коши с операторными коэффициентами:

$$\sum_{q=0}^{2(n+1)} \mathcal{A}_q \frac{\partial^q}{\partial t^q} \mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \frac{\partial^q}{\partial t^q} \mathbf{y} \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0^q, \quad q = 0, \dots, 2n + 1. \quad (7)$$

Здесь введены обозначения \mathcal{A}_q для дифференциальных операторов по пространственным переменным (полагаем $l_n^k = 0$, если $k < 0$ или $k > n$):

$$\mathcal{A}_q = \sum_{p=0}^q \begin{pmatrix} l_2^p l_3^{q-p} \nabla^2 + (l_1^p l_4^{q-p} + 1/3 l_2^p l_3^{q-p}) \nabla \nabla \cdot - \rho l_1^{p-1} l_3^{q-p-1} & -l_1^p l_5^{q-p} \\ -\alpha l_6^{p-1} & l_3^p - \alpha l_7^{p-1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для построения решения задачи (7) предлагается использовать специальный класс несимметричных интегральных преобразований [3]. При этом прямое преобразование \mathcal{F}^* и обращение \mathcal{F} представляют собой линейные операторы, действующие в пространствах $L^2(\Omega)$ и l^2 соответственно:

$$\left\{ \varphi_j \right\}_{j=0}^{\infty} = \mathcal{F}^* \mathbf{u} = - \left\{ \frac{1}{\nu_j} \int_{\Omega} \mathcal{K}_{1j}^* \mathcal{A}_0 \mathbf{u} dV \right\}_{j=0}^{\infty}, \quad \mathbf{u} = \mathcal{F} \left\{ \varphi_j \right\}_{j=0}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}_{1j} \mathcal{Q}_{1j} \varphi_j, \quad \mathcal{F} \mathcal{F}^* = \mathcal{J},$$

где \mathcal{J} – тождественный оператор, \mathcal{K}_{s-i} , \mathcal{K}_{s-i}^* – дуальные ядра преобразования

$$\mathcal{K}_{s-i} = (\mathbf{G}_s \quad \mathbf{G}_{s-1} \quad \dots \quad \mathbf{G}_i), \quad \mathcal{K}_{s-i}^* = (\mathbf{G}_s^* \quad \mathbf{G}_{s-1}^* \quad \dots \quad \mathbf{G}_i^*),$$

определяемые собственными и присоединенными функциями сопряженной пары операторных пучков

$$\mathcal{L} = \sum_{q=0}^{2(n+1)} \mathcal{A}_q \nu^q, \quad \mathcal{L}^* = \sum_{q=0}^{2(n+1)} \mathcal{A}_q^* \bar{\nu}^q; \quad (9)$$

\mathcal{Q}_{1j} – нормирующие матрицы, процедура вычисления которых изложена в [3].

Из конструкции прямого преобразования вытекает операционное свойство

$$\sum_{i=0}^m \left[\bar{\Lambda}^T \right]^i \mathcal{F}_{\lambda}^* \mathcal{A}_i = 0. \quad (10)$$

Здесь Λ – жордановы матрицы, которые после соответствующей перестановки строк приводятся к каноническому виду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к построению решения задачи Коши с операторными коэффициентами (7). Сначала рассмотрим задачу первого порядка по переменной времени

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \mathcal{A}_1 \partial_t \mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \partial_t \mathbf{y} \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0. \quad (11)$$

Действуем на левую и правую части равенства (11)₁ прямым преобразованием \mathcal{F}^* ,

$$\mathcal{F}^* \mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \partial_t \mathbf{y} = \mathcal{F}^* \mathbf{f} \Rightarrow (\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T) \varphi = \Phi,$$

где $\varphi = \mathcal{F} \mathcal{A} \mathbf{y}$, $\Phi = \mathcal{F} \mathbf{f}$. Обращая оператор $(\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)$, приходим к

$$\varphi = (\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)^{-1} \Phi.$$

Если теперь принять во внимание обратимость интегрального преобразования, то решение задачи (11) можно представить в виде

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} (\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)^{-1} \mathcal{F}^* \mathbf{f}.$$

Формулируя оператор $(\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)^{-1}$ в терминах матричной экспоненты и учитывая начальные условия для трансформанты $\varphi_0 = \mathcal{F}^* \mathcal{A} \mathbf{y}_0$, окончательно получим следующее представление решения

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[e^{(\bar{\Lambda}^T t)} \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{[\bar{\Lambda}^T (t - \tau)]} \mathcal{F}^* \mathbf{f}(\tau) d\tau \right]. \quad (12)$$

В общем случае задача (7) может быть сведена к (11), если сформулировать расширенную систему операторных уравнений и начальных условий:

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{y}_1 + \sum_{i=1}^m \mathcal{A}_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}_i = \mathbf{f}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_i = 0, \quad \mathbf{y}_i \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{y} \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0^{(i-1)}.$$

Этой начально-краевой задаче соответствует линейный пучок $\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1$, действующий в расширенном пространстве вектор-функций $L_2(\Omega) \otimes \dots \otimes L_2(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопряженный пучок $\mathcal{H}_0^* + \lambda \mathcal{H}_1^*$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{H}_0^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_1^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^* & I & \dots & 0 \\ \mathcal{A}_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{m-1}^* & 0 & \dots & I \\ \mathcal{A}_m^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Повторяя построения для линейного пучка, получим представление решения:

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[e^{(\bar{\Lambda}^T t)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m \bar{\Lambda}^{T(j-i)} \mathcal{F}^* \mathcal{A}_j \mathbf{y}_0^{(i-1)} + \int_0^t e^{[\bar{\Lambda}^T (t - \tau)]} \mathcal{F}^* \mathbf{f}(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

Спектральное разложение представляет замкнутое решение начально-краевой задачи, если возможно в аналитическом виде представить решения краевых задач

для ядер преобразования. В рассматриваемом случае это удастся осуществить, по крайней мере для тел с границей, допускающей разделение переменных в скалярном волновом уравнении. При этом ядровая задача

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_2 \tilde{\mathcal{L}}_3 \nabla^2 \mathbf{K} + (\tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_4 + \frac{1}{3} \tilde{\mathcal{L}}_2 \tilde{\mathcal{L}}_3) \nabla \nabla \cdot \mathbf{K} - \nu^2 \rho \tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_3 \mathbf{K} - \tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_5 \nabla \Theta = 0, \\ \tilde{\mathcal{L}}_3 \nabla^2 \Theta - \nu \alpha \tilde{\mathcal{L}}_7 \Theta - \nu \alpha \tilde{\mathcal{L}}_6 \nabla \cdot \mathbf{K} = 0; \quad \tilde{\mathcal{L}}_k = \sum_{n=0}^N l_k^n \nu^n \end{aligned} \quad (14)$$

может быть сведена к скалярным уравнениям Гельмгольца.

Имеем: $\begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \\ \Theta \end{pmatrix}$, $\nabla \cdot \Psi = 0$, что позволяет выполнить декомпозицию системы уравнений (14)

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_4 + \frac{4}{3} \tilde{\mathcal{L}}_2 \tilde{\mathcal{L}}_3) \nabla^2 \Phi - \nu^2 \rho \tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_3 \Phi - \tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_5 \Theta = 0, \\ \tilde{\mathcal{L}}_3 \nabla^2 \Theta - \nu \alpha \tilde{\mathcal{L}}_7 \Theta - \nu \alpha \tilde{\mathcal{L}}_6 \nabla^2 \Phi = 0, \quad \tilde{\mathcal{L}}_2 \tilde{\mathcal{L}}_3 \nabla^2 \Psi - \nu^2 \rho \tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_3 \Psi = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

и доказать, что фундаментальная система ее решений имеет вид:

$$\mathcal{Y} = \{ \nabla \mathcal{A}_{1,2}, \nabla \mathcal{B}_{1,2}, \nabla \times (\mathbf{r} \mathcal{C}_{1,2}), \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \mathcal{C}_{1,2}) \}, \quad (16)$$

$$\nabla^2 \mathcal{A}_{1,2} - \varrho_1 \mathcal{A}_{1,2} = 0, \quad \nabla^2 \mathcal{B}_{1,2} - \varrho_2 \mathcal{B}_{1,2} = 0, \quad \nabla^2 \mathcal{C}_{1,2} - \rho \nu^2 \frac{\tilde{\mathcal{L}}_3}{\tilde{\mathcal{L}}_2} \mathcal{C}_{1,2} = 0, \quad (17)$$

где $\varrho_{1,2}$ – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \varrho \left(\tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_4 + \frac{4}{3} \tilde{\mathcal{L}}_2 \tilde{\mathcal{L}}_3 \right) - \nu^2 \rho \tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_3 & -\tilde{\mathcal{L}}_1 \tilde{\mathcal{L}}_5 \\ -\varrho \nu \alpha \tilde{\mathcal{L}}_6 & \varrho \tilde{\mathcal{L}}_3 - \nu \alpha \tilde{\mathcal{L}}_7 \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные значения могут быть вычислены как корни уравнения $|\mathcal{B}[\mathcal{Y}]| = 0$ (\mathcal{B} – оператор краевых условий (6)); им соответствуют собственные функции $\mathcal{Y}_{k \in \ker \mathcal{B}[\mathcal{Y}]}$. В случае кратного значения аналогично определяются присоединенные функции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [2] Петров Н., Бранков Й. Современ. проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 285 с.
- [3] Лычев С.А., Семицкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. Специальный выпуск. С. 16–38.

Lychev S.A., Semenov D.A. *Coupled dynamics thermoviscoelastic problem for a finite body.* In the present study a closed solution of coupled dynamics thermoviscoelastic problem for finite body is obtained. The solution is of the form of spectral expansion to the biorthogonal eigenfunction system of non-self-adjointed differential pencil, generated by the studying initial-boundary value problem. The representation of spectral expansion is obtained by means of special non-symmetrical integral transformation.

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ДВУМЕРНЫХ ВТОРИЧНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ НА СТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ

Мелехов А. П., Ревина С. В.

Ростовский госуниверситет

Изучается длинноволновая асимптотика вторичного режима, ответвляющегося от двумерного стационарного пространственно-периодического течения $\mathbf{v} = (\alpha v_1(z), z_2(x_1))$, когда один из периодов стремится к бесконечности (волновое число α стремится к нулю), в случае $\langle v_2 \rangle = 0$. Для главных членов асимптотики получены явные формулы.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости на плоскости $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ под действием поля внешних сил $\mathbf{F}(x, t)$, периодического по пространственным переменным x_1 и x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно, причем $L_2 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \rightarrow 0$. Поле скоростей \mathbf{v} и давление p удовлетворяют системе уравнений Навье–Стокса и условию несжимаемости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} &= -\nabla p + \mathbf{F}(x, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

где ν — безразмерная вязкость. В качестве краевых условий задается условие периодичности поля скорости \mathbf{v}

$$\mathbf{v}(x_1 + L_1, x_2, t) = \mathbf{v}(x_1, x_2, t), \quad \mathbf{v}(x_1, x_2 + L_2, t) = \mathbf{v}(x_1, x_2, t).$$

Всюду в дальнейшем через $\langle f \rangle$ обозначается среднее по переменной x_1 , а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по прямоугольнику периодов ($z = \alpha x_2$):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} f(x_1, z) dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x_1, z) dx_1 dz, \quad \Omega = [0, L_1] \times [0, 2\pi].$$

Среднее значение скорости \mathbf{v} считается заданным: $\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}$.

Длинноволновая асимптотика ($\alpha \rightarrow 0$) задачи устойчивости двумерных параллельных течений $\mathbf{v} = (0, v_2(x_1))$ получена в [1]. Показано, что если $\langle v_2 \rangle \neq 0$, то при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости, а если $v_2(x_1)$ — нечетная, то — монотонная. В [2] построена асимптотика автоколебаний, возникающих при потере устойчивости параллельных течений.

Задача устойчивости пространственно-периодических стационарных трехмерных течений вида $\mathbf{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, v_3)$, $\langle v_3 \rangle \neq 0$ рассмотрена в [3]. Показано, что при уменьшении вязкости происходит колебательная потеря устойчивости. Изучение автоколебаний, возникающих при потере устойчивости двумерных и трехмерных

стационарных течений относительно длинноволновых возмущений было продолжено в [6–14]. В [7], [8] изучалось поведение частиц во вторичных автоколебательных потоках.

Настоящая работа посвящена отысканию асимптотики автоколебаний, отвечающих от стационарного пространственно-периодического течения

$$\mathbf{v} = (\alpha v_1(z), v_2(x_1)), \quad \langle v_2 \rangle = 0, \quad (1)$$

при уменьшении вязкости ν . Задача устойчивости течения (1) была рассмотрена в [9]. Были найдены первые члены асимптотики критического значения вязкости, собственных значений и собственных функций. Показано, что в отсутствие вырождений, происходит колебательная потеря устойчивости.

2. Основные результаты. Через δ обозначим надкритичность: $\delta = \nu_c - \nu$. Полагая $\delta = \varepsilon^2$, будем разыскивать \mathbf{u} , p и неизвестную частоту колебаний ω в виде рядов по степеням параметра ε :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{u}_k(x_1, x_2, \tau); \quad p(x_1, x_2, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x_1, x_2, \tau); \quad \omega = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k.$$

Тогда $\mathbf{u}_1 = \eta_1(\boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \boldsymbol{\varphi}^* e^{-i\tau})$, где вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}(x_1, z)$ определяется как решение линейной спектральной задачи. Для $\boldsymbol{\varphi}$, ω_0 и ν_c главные члены асимптотики были найдены в [9].

Далее рассматривается невырожденный случай $\langle \theta \theta'^2 \rangle \neq 0$, где функция $\theta(x_1)$ определяется из уравнений: $\theta''(x_1) = v_2(x_1)$, $\langle \theta \rangle = 0$.

Возмущение скорости при ε^2 имеет вид: $\mathbf{u}_2 = \eta_1^2(\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_2 e^{2i\tau} + \mathbf{z}_2^* e^{-2i\tau})$. Разыскивая \mathbf{z}_0 в виде ряда по степеням параметра α

$$(z_0)_i = (z_0)_i^0 + \alpha (z_0)_i^1 + \alpha^2 (z_0)_i^2 + \dots, \quad i = 1, 2,$$

приходим к следующим выражениям:

$$(z_0)_1^0(z) = -\frac{2}{3\nu^*} \frac{\langle \theta^2 \rangle}{\langle \theta \theta'^2 \rangle} \theta'_1(z),$$

$$(z_0)_2^0(x_1, z) = \frac{1}{\nu^*} (z_0)_1^0(z) \theta'(x_1) + \frac{2}{\nu^{*2}} \theta(x_1), \quad (z_0)_1^1(x_1, z) = -\frac{1}{\nu^*} \frac{d(z_0)_1^0}{dz} \theta(x_1) + \langle (z_0)_1^1 \rangle, \quad (2)$$

Теперь представим \mathbf{z}_2 в виде ряда:

$$(z_2)_i = (z_2)_i^0 + \alpha (z_2)_i^1 + \alpha^2 (z_2)_i^2 + \dots, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $(z_2)_1^0(z)$ находится из уравнения:

$$2im^3 (z_2)_1^0(z) - \frac{d^3 (z_2)_1^0}{dz^3} = \tilde{f}, \quad (3)$$

где $\tilde{f} = \frac{1}{3\langle \theta \theta'^2 \rangle \nu^*} \left[8im^3 e^{-2imz} \langle \theta(G + S') \rangle + \frac{d}{dz} [(v'_1 - 4imv_1) e^{-2imz}] \langle \theta^2 \rangle \right]$, и имеет вид

$$(z_2)_1^0(z) = - \left[\int_0^z \frac{\tilde{f}(s)e^{\lambda_1(z-s)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} ds + \frac{1}{e^{-2\lambda_1\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(s)e^{\lambda_1(z-s)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} ds + \right. \\ \left. + \int_0^z \frac{\tilde{f}(s)e^{\lambda_2(z-s)}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} ds + \frac{1}{e^{-2\lambda_2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(s)e^{\lambda_2(z-s)}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} ds + \right. \\ \left. + \int_0^z \frac{\tilde{f}(s)e^{\lambda_3(z-s)}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} ds + \frac{1}{e^{-2\lambda_3\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(s)e^{\lambda_3(z-s)}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} ds \right], \quad (4)$$

где $\lambda_{1,2} = \frac{m}{\sqrt[3]{4}}(i \pm \sqrt{3})$, $\lambda_3 = -im\sqrt[3]{2}$.

Далее находим:

$$(z_2)_2^0(x_1, z) = \frac{1}{\nu^*} (z_2)_1^0(z) \theta'(x_1) + \frac{1}{\nu^{*2}} e^{-2imz} \theta(x_1),$$

$$(z_2)_1^1(x_1, z) = -\frac{1}{\nu^*} \frac{d(z_2)_1^0}{dz} \theta(x_1) + \frac{2im}{\nu^{*2}} e^{-2imz} F'(x_1) + \langle u_1^1 \rangle,$$

$$(z_2)_2^1(x_1, z) = \frac{1}{\nu^{*2}} \frac{d(z_2)_1^0}{dz} G(x_1) + \frac{1}{\nu^{*2}} (z_2)_1^0(z) v_1(z) \theta(x_1) + \frac{\langle (z_2)_1^1 \rangle}{\nu^*} \theta'(x_1) + \\ + \frac{2}{\nu^{*3}} [-im(R'(x_1) + S(x_1)) + v_1(z)F'(x_1) + \nu^*c(z)\theta(x_1)] e^{-2imz},$$

где $S(x_1)$ известно [9].

Из условия разрешимости уравнения при ε^3 находим нулевой член разложения амплитуды η_1 и разложение по α коэффициента ω_2 .

$$\eta_1^2 = \frac{\nu^{*3}}{\langle\langle \theta^2 \rangle\rangle}, \\ \omega_2 = \omega_2^0 + \alpha\omega_2^1 + \alpha^2\omega_2^2 + \dots; \quad \omega_2^0 = \omega_2^1 = \omega_2^2 = 0.$$

Следовательно, основное течение (1) устойчиво при $\nu > \nu_c$ и неустойчиво при $\nu < \nu_c$, происходит мягкая потеря устойчивости, и вторичное течение устойчиво при $\nu < \nu_c$.

3. Примеры. Рассмотрим два примера основных течений, которые отличаются друг от друга только средним значением второй компоненты скорости.

Пример 1. $\mathbf{v} = (-\alpha \sin(z), -\cos(x_1) - 4 \cos(2x_1))$.

Средние значения: $\langle \theta \theta^2 \rangle = 3/4$, $\langle v_2 \rangle = 0$. Асимптотика критического значения вязкости и частота:

$$\nu_c = \sqrt{\frac{5}{2}} - \alpha^2 \sqrt{10} \left(\frac{149m^2}{180} + \frac{1}{50} \right) + O(\alpha^3), \quad \omega = \alpha^3 \frac{9m^3}{10} + O(\alpha^4 + \varepsilon^2 \alpha^3 + \varepsilon^4). \quad (5)$$

Возмущенное течение имеет вид (при $m = 1$):

$$\begin{aligned}
 v_1 + u_1 &= -\alpha \sin(\alpha x_2) + \varepsilon \eta \left[2 \cos(\alpha x_2 - \tau) + \frac{2}{585} \alpha \sqrt{10} \times \right. \\
 &\times \left(11 \sin(2\alpha x_2) \cos(\alpha x_2 - \tau) - 2 \cos(2\alpha x_2) \sin(\alpha x_2 - \tau) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + 117 \sin(\alpha x_2 - \tau) (\cos(2x_1) + \cos(x_1)) \right) \right] + \\
 &\quad - \varepsilon^2 \eta^2 \frac{4}{15} \sqrt{10} \left[\frac{2}{3} \cos(\alpha x_2) + \frac{1}{5} \cos(3\alpha x_2 - 2\tau) + \cos(\alpha x_2 - 2\tau) \right]; \\
 v_2 + u_2 &= -\cos(x_1) - 4 \cos(2x_1) - \varepsilon \eta \frac{2}{5} \sqrt{10} (\sin(x_1) + 2 \sin(2x_1)) \cos(\alpha x_2 - \tau);
 \end{aligned}$$

где $\eta^2 = \frac{5}{4} \sqrt{10}$, $\tau = \alpha^3 \frac{9m^3}{10} t$.

Пример 2. $\mathbf{v} = (-\alpha \sin(z), -\cos(x_1) - 4 \cos(2x_1) + \langle v_2 \rangle)$.

Средние значения: $\langle \theta \theta'^2 \rangle = 3/4$, $\langle v_2 \rangle \neq 0$. Асимптотика критического значения вязкости и частоты:

$$\nu_c = \sqrt{\frac{5}{2}} - \alpha^2 \frac{149m^2 \sqrt{10}}{180} + O(\alpha^3), \quad \omega = \alpha m \langle v_2 \rangle + \alpha^3 \frac{9m^3}{10} + O(\alpha^4 + \varepsilon^2 \alpha^3 + \varepsilon^4). \quad (6)$$

Возмущенное течение (при $m = 1$):

$$\begin{aligned}
 v_1 + u_1 &= -\alpha \sin(\alpha x_2) + \varepsilon \eta \left[2 \cos(\alpha x_2 - \tau) + \frac{2}{5} \alpha \sqrt{10} \sin(\alpha x_2 - \tau) (\cos(x_1) + \cos(2x_1)) \right]; \\
 v_2 + u_2 &= -\cos(x_1) - 4 \cos(2x_1) + \langle v_2 \rangle - \\
 &\quad - \varepsilon \eta \frac{2}{5} \sqrt{10} (\sin(x_1) + 2 \sin(2x_1)) \cos(\alpha x_2 - \tau) + \frac{4}{5} \varepsilon^2 \eta^2 (\cos(x_1) + \cos(2x_1));
 \end{aligned}$$

где $\eta^2 = \frac{5}{4} \sqrt{10}$, $\tau = \alpha m \langle v_2 \rangle t$.

Из (5), (6) видно, что выражения критической вязкости отличаются, начиная со второго порядка по α , а выражения ω_0 — начиная с первого порядка.

4. Заключение. Сравним результаты данной работы с аналогичными для ненулевого среднего продольной компоненты скорости [4].

В случае $\langle v_2 \rangle \neq 0$ из уравнения $\langle v_2 \rangle \frac{d(z_0)_1^0}{dz} = 0$ было найдено, что $(z_0)_1^0 = 0$. Для $(z_0)_2^0$ и $(z_0)_1^1$ получались те же выражения, что и в (2), но без слагаемых содержащих $(z_0)_1^0$.

Функция $(z_2)_1^0 = e^{-2imz}$ в случае $v_2 = v_2(x_1)$, $\langle v_2 \rangle \neq 0$ была найдена из уравнения:

$$\langle v_2 \rangle \left(2im(z_2)_1^0 + \frac{d(z_2)_1^0}{dz} \right) = 0.$$

Если же $\langle v_2 \rangle = 0$, то уравнение имеет вид (3), а его решение вид (4). В случае нулевого среднего главные члены асимптотики автоколебаний находятся из разложений более высокой степени по α , чем в невырожденном случае $\langle v_2 \rangle \neq 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00567-а) и гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-1768.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 242–249.
- [2] Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
- [3] Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 31–35.
- [4] Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости двумерного стационарного пространственно-периодического течения относительно длинноволновых возмущений // Совр. пробл. мех. спл. среды. Тр. V Межд. конф. Ростов-на-Дону: 2000. Т. 1. С. 119–123.
- [5] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости трехмерных стационарных пространственно-периодических течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Совр. пробл. мех. спл. среды. Тр. V Межд. конф. Ростов-на-Дону: 2000. Т. 1. С. 157–161.
- [6] Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 29–41.
- [7] Мелехов А. П. Движение частиц жидкости во вторичном потоке, ответвляющемся от двумерного стационарного течения // Совр. пробл. мех. спл. среды. Тр. VI Межд. конф. Ростов-на-Дону: 2001. Т. 2. С. 110–113.
- [8] Мелехов А. П. Движение частиц вязкой несжимаемой жидкости во вторичном автоколебательном потоке // Вестник молодых ученых. Прикладная математика и механика. 2002. № 1. С. 62–71.
- [9] Мелехов А. П., Ревина С. В. Неустойчивость двумерных стационарных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. С. 170–173.

Melekhov A.P., Revina S.V. *Long-wave asymptotic of two-dimensional auto-oscillations due to the loss of stability by spatially-periodic flow with $\langle v_2 \rangle = 0$.* We consider the long-wave length asymptotic behavior of secondary flow forking from stationary spatially-periodic stream $\mathbf{v} = (\alpha v_1(z), v_2(x_1))$, $\langle v_2 \rangle = 0$, when one of the periods goes to infinity. The explicit formulas for the main asymptotic terms are obtained.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЛН В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

Мочалова Ю. А., Индейцев Д. А.

Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Рассмотрен пример существования в тонкой пленке волн, локализованных вблизи островков-включений, возникающих и растущих в результате диффузии. Тонкая пленка моделируется слоем жидкости с инерционной свободной поверхностью, которая представляет собой упругую мембрану с переменной плотностью распределения массы. Показано, что при отсутствии в системе диссипации, возбуждаемая на поверхности пленки локализованная мода колебаний не затухает бесконечно долго.

1. Введение. Рассмотрим волновод с некоторыми включениями или неоднородностями. Пусть волновод имеет по крайней мере одну границу бесконечной протяженности. Локализованные или «ловушечные» волны — это свободные колебания волновода, для которых движение среды сосредоточено вблизи включений, и таким образом имеет конечную энергию. Математически это эквивалентно существованию дискретного спектра в соответствующей спектральной задаче. Цель данной работы изучить особенности нестационарной граничной задачи, когда в соответствующей спектральной задаче есть дискретный спектр. В качестве физической модели рассматривается тонкая пленка, на поверхности которой образуются и растут островки новой фазы [1]. В большинстве теоретических работ пленку обычно моделируют упругим или жидким слоем, лежащим на твердой подложке, поведение которого описывается эволюционными уравнениями (см. статью [2] и ссылки к ней). Следует отметить, что при этом динамические волновые процессы, которые могут возникать в тонкой пленке не учитываются. В данной работе тонкая пленка рассматривается как волновод с островками-включениями (масса которых, вообще говоря, меняется во времени), в котором возможно существование стоячих волн, локализованных вблизи островков. Показано, что при определенных условиях нестационарное внешнее воздействие приводит к возбуждению на поверхности пленки локализованных волн, которые не затухают бесконечно долго, если в системе нет диссипации. Таким образом, незатухающие стоячие волны, локализованные вблизи островков могут оказывать значительное влияние на эволюционные процессы, происходящие в пленке.

2. Постановка задачи. Предлагается рассматривать пленку как двумерный смачивающий слой, заполненный идеальной несжимаемой тяжелой жидкостью, лежащий на твердой плоской подложке. Свободная поверхность жидкости моделируется упругой мембраной с коэффициентом поверхностного натяжения T и плотностью распределения массы m . Декартова система координат (x, y) выбрана так, что ось y направлена вертикально вверх, а ось x совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, таким образом, жидкость ограничена твердым плоским дном $y = -h$ и свободной поверхностью, которая описывается уравнением $y = \eta(x, t)$.

Движение жидкости будем предполагать безвихревым, определяемым потенциалом скоростей $\Phi(x, y, t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty, \quad -h < y < 0 \quad (1)$$

и условию непротекания на дне

$$\Phi_y = 0 \quad \text{при} \quad y = -h. \quad (2)$$

Линеаризованные условия на свободной поверхности связывают потенциал скоростей $\Phi(x, y, t)$ и функцию $\eta(x, t)$ следующим образом

$$\eta_t = \Phi_y \quad \text{и} \quad T\eta_{xx} - (m\eta_t)_t = \rho\Phi_t + \rho g\eta + P(t)\delta(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (3)$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Предположим, что движение жидкости вызвано внешней силой $P(t)\delta(x)$, приложенной в начале координат ($\delta(x)$ – дельта-функция Дирака), а потенциал скоростей и его производная удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$\Phi(x, 0, 0) = \Phi_t(x, 0, 0) = 0. \quad (4)$$

Нас интересуют локализованные колебания жидкости, поэтому для фиксированного момента времени потенциал скоростей Φ удовлетворяет следующему условию на бесконечности

$$\nabla \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Пусть на инерционной свободной поверхности имеются два массовых включения в точках $x = \pm l$ и плотность распределения массы m определяется следующим образом

$$m(x) = m_0 + M[\delta(x - l) - \delta(x + l)], \quad (6)$$

где m_0 – некоторая константа, M – масса включений. Заметим, что в общем случае массы островков-включений и соответственно поверхностная плотность переменны во времени, однако далее будем считать M постоянной величиной.

Таким образом, линейная задача динамики малых движений жидкости с учетом переменной плотности свободной поверхности и поверхностного натяжения определяется системой уравнений (1)–(6). Рассматриваемый слой жидкости моделирует тонкую пленку и толщина его незначительна, поэтому далее будем пользоваться приближением мелкой воды. Введем потенциал $\bar{\Phi}(x, t) \equiv \int_{-h}^0 \Phi(x, y, t) dy$, тогда исходная граничная задача (1)–(6) принимает вид

$$T\bar{\Phi}_{xxxx} - m_0\bar{\Phi}_{xxtt} + \frac{\rho}{h}\bar{\Phi}_{tt} - \rho g\bar{\Phi}_{xx} = M[\delta(x - l) + \delta(x + l)]\bar{\Phi}_{xxtt} + P(t)\delta(x) \quad (7)$$

$$\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_x \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{для фиксированного } t \quad (8)$$

$$\bar{\Phi}(x, 0) = \bar{\Phi}_t(x, 0) = 0 \quad (9)$$

Рассмотрим сначала соответствующую спектральную задачу и покажем, что она имеет дискретный спектр, то есть существуют собственные частоты которым соответствуют собственные формы колебаний свободной поверхности, представляющие собой локализованные вблизи включений стоячие волны.

3. Свободные колебания. Рассмотрим свободные колебания жидкости $\bar{\Phi}(x, t) = \text{Re}\{\varphi(x)e^{-i\omega t}\}$. Тогда соответствующая граничной задаче (7)–(9) спектральная задача для потенциала $\varphi(x)$ принимает вид

$$T\varphi_{xxxx} - (\rho g - m_0\omega^2)\varphi_{xx} - \frac{\rho}{h}\omega^2\varphi = -M\omega^2[\delta(x-l) + \delta(x+l)]\varphi_{xx} \quad (10)$$

$$\varphi, \varphi_x \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Далее будем рассматривать только симметричные формы колебаний. Особенность задачи (10)–(11) заключается в том, частота отсечки равна нулю и дискретный спектр, если он существует, будет лежать на оси непрерывного. Используя преобразование Фурье, получим следующее выражение для потенциала $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = -M\omega^2\varphi_{xx}(l)[G(|x-l|, \omega) + G(|x+l|, \omega)]. \quad (12)$$

Здесь $G(|x|, \omega)$ функция Грина

$$G(|x|, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\Delta(k, \omega)} dk = \frac{1}{2(k_0^2 + k_1^2)} \left[\frac{ie^{ik_0|x|}}{k_0} - \frac{e^{-k_1|x|}}{k_1} \right], \quad (13)$$

где $\pm k_0, \pm ik_1$ – корни дисперсионного соотношения $\Delta(k, \omega) = Tk^4 + (\rho g - m_0\omega^2)k^2 - \rho\omega^2/h$. Подставляя (13) в выражение (12) нетрудно убедиться, что волны, описываемые потенциалом скоростей, представляют собой бегущую волну и стоячую волну, исчезающую на бесконечности. Условие отсутствия бегущей волны имеет вид $\cos k_0 l = 0$. Таким образом, для того чтобы потенциал (12) описывал волну локализованную в области включений необходимо чтобы

$$k_{0n} = \left[n - \frac{1}{2} \right] \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее используя дисперсионное соотношение, определим частоты ω_n при которых нет волн при $|x| > l$

$$\omega_n^2 = \frac{(Tk_{0n}^2 + \rho g)k_{0n}^2}{\rho/h + m_0k_{0n}^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Частоты ω_n будем называть ловушечными. Заметим, что найденный спектр ловушечных частот размещается на оси непрерывного спектра. В случае когда ловушечная частота становится собственной частотой, соответствующей ей потенциал (12) есть локализованная мода колебаний. Для того чтобы ловушечная частота (14) стала собственной необходимо, чтобы масса включений M удовлетворяла частотному уравнению

$$1 = -M\omega^2[G_{xx}(|x-l|, \omega) + G_{xx}(|x+l|, \omega)] \quad \text{при} \quad \omega = \omega_n \quad (15)$$

или используя (13) и (14), получим

$$M_n = \frac{2T(k_{0n}^2 + k_{1n}^2)}{\omega_n^2 k_{1n}(1 + e^{-2k_{1n}l})}, \quad k_{1n} = \left[\frac{\rho}{Th} \right]^{1/2} \frac{\omega_n}{k_{0n}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Итак, если масса включений совпадает с M_n , определяемой (16), то соответствующая ловушечная частота (14) будет собственной частотой спектральной задачи (10)-(11). Собственная локализованная мода колебаний $\varphi(x, \omega_n)$ соответствующая ω_n принимает вид

$$\varphi(x, \omega_n) = \frac{A}{(k_{0n}^2 + k_{1n}^2)} \begin{cases} \frac{\cosh k_{1n} e^{-k_{1n}|x|l}}{k_{1n}} & |x| > l \\ \frac{\cos k_{0n}x}{k_{0n}} + \frac{e^{-k_{1n}l} \cosh k_{1n}x}{k_{1n}} & |x| < l \end{cases} \quad (17)$$

Потенциал скоростей $\varphi(x, \omega_n)$ вычисляется с точностью до постоянной A .

4. Вынужденные колебания. Вернемся к нестационарной задаче (7)-(9). Пусть внешняя сила $P(t) = P_0 \delta(t)$. Выполняя двойное преобразование Лапласа и Фурье получим решение задачи в изображениях

$$\bar{\Phi}^{LF}(k, p) = \frac{P_0}{\Delta(k, p)} \left[1 - \frac{Mp^2 J_1(p, l)}{\pi + Mp^2 J_2(p, l)} \cos kl \right],$$

где

$$J_1(p, l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{\Delta(k, p)} e^{ikl} dk, \quad J_2(p, l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 \cos kl}{\Delta(k, p)} e^{ikl} dk$$

и $\Delta(k, p) = Tk^4 + (\rho g + m_0 p^2)k^2 - \rho p^2/h$. Выполняя обратное преобразование Фурье, получим

$$\bar{\Phi}^L(x, p) = \frac{P_0}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikl}}{\Delta(k, p)} dk - \frac{Mp^2 J_1(p, l)}{\pi + Mp^2 J_2(p, l)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x+l)} + e^{ik(x-l)}}{\Delta(k, p)} dk \right],$$

или

$$\bar{\Phi}^L(x, p) = \bar{\Phi}_1^L + \bar{\Phi}_2^L = P_0 \left\{ G(|x|, p) - \frac{Mp^2 J_1(p, l)}{\pi + Mp^2 J_2(p, l)} \left[G(|x-l|, p) + G(|x+l|, p) \right] \right\}. \quad (18)$$

При $p = i\omega$ функция $G(|x|, p)$ совпадает с функцией Грина (13) соответствующей спектральной задаче. Функция $G(|x|, p)$ представляет собой регулярную функцию, не имеющую особых точек на мнимой оси и $\lim_{p \rightarrow 0} pG(|x|, p) = 0$, тогда используя предельные теоремы операционного исчисления, получим что для оригинала первого слагаемого в выражении (18) справедливо

$$\bar{\Phi}_1(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Заметим, что при $M = 0$ потенциал скоростей $\bar{\Phi}(x, t) = \bar{\Phi}_1(x, t)$ и в силу (19) представляет собой бегущие волны, распространяющиеся от точки приложения силы $P(t)$ и затухающие на бесконечности.

Рассмотрим второе слагаемое в выражении (18). Проверим имеет ли оно особенности при $p = i\omega$, то есть найдем корни уравнения

$$\pi - M\omega^2 J_2(i\omega, l) = 0.$$

Нетрудно показать, что последнее уравнение можно переписать в следующем виде

$$1 + M\omega^2 [G_{xx}(|x-l|, \omega) + G_{xx}(|x+l|, \omega)] = 0$$

Заметим, что это частотное уравнение (15) соответствующей спектральной задачи (10)-(11), подробно рассмотренной выше. Мнимая часть в последнем уравнении равна нулю, если $\omega = \omega_n$, где ω_n – ловушечные частоты (14) и ловушечная частота ω_n является корнем последнего уравнения (а $p = i\omega_n$ полюсом второго слагаемого в (18)), если

$$M = \frac{1}{\omega_n^2 [G_{xx}(|x-l|, \omega_n) + G_{xx}(|x+l|, \omega_n)]}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть $\bar{\Phi}_2^L(x, p)$ имеет полюс в точке $p = \pm i\omega_*$ (ω_* – одна из ловушечных частот, например первая) при $M = M_*$, тогда по теореме о вычетах обратное преобразование Лапласа второго слагаемого в выражении (18) имеет вид

$$\bar{\Phi}_2(x, t) = \text{res} [\bar{\Phi}_1^L(x, p)e^{pt}, i\omega_*] + \text{res} [\bar{\Phi}_1^L(x, p)e^{pt}, -i\omega_*]$$

После вычисления вычетов и выполнения ряда преобразований, получим

$$\bar{\Phi}_2(x, t) = A\varphi(x, \omega_*) \sin \omega_* t.$$

Здесь $\varphi(x, \omega_*)$ – собственная локализованная мода колебаний (17). Потенциал $\bar{\Phi}_2(x, t)$ представляет собой волну, не затухающую на бесконечности и следовательно, для общего потенциала скоростей $\bar{\Phi}(x, t)$ справедливо следующее приближение

$$\bar{\Phi}(x, t) \rightarrow A\varphi(x, \omega_*) \sin \omega_* t \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Таким образом, внешнее воздействие возбуждает на свободной поверхности пленки не только затухающие бегущие волны, но и при определенном значении M стоячую волну, локализованную вблизи островков-включений и не затухающую с течением времени (при условии, что в системе нет диссипации).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кужушкин С.А., Осипов А.В. Процессы конденсации тонких пленок // Успехи физических наук. 1998. Т. 168. № 10. С. 1083–1114.
- [2] Sultan E., Boudaoud A., Ben Amar M. Diffusion-limited evaporation of thin polar liquid films // J. Engineering Mathematics. 2004. V. 50. № 2-3. P. 209–222.

Mochalova Yu.A., Indeitsev D.A. *Waves localization in a thin film with inclusions of different density*. Annotation. The existence of wave trapped by islands on the surface of a thin film is established. The thin film is modeled as a fluid layer covered by an inertial surface with variable density of mass and surface tension. For the time-domain problem it is shown that the trapped wave does not decay at time.

УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ НА ДИСКРЕТНЫХ РЕБРАХ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Музыка Т. Н. *, Юдин А. С. **

* Ростовский государственный строительный университет

** НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
г. Ростов-на-Дону

Выведены условия перехода через дискретные ребра подкрепленных оболочек сложной геометрии. Условия используются в алгоритмах перевода краевых задач в задачи Коши. Изложение опирается на статьи [1, 2] и продолжает [3].

Рассмотрим ребро, сопрягающее две секции оболочки, обозначаемые знаками «-» и «+». Считаются известными кинематические и силовые компоненты для секции с индексом «-». Необходимо выразить через них аналогичные компоненты с индексом «+».

Обобщенные перемещения линии стыка оболочки и ребра и перемещения осевой линии (ОЛ) ребра в силу недеформируемости контура поперечного сечения ребра связываются соотношениями:

$$\begin{aligned} -h_{11}\psi_2 + h_{12}\varphi + h_{13}\psi_1 &= v^1, -h_{21}\psi_2 + h_{22}\varphi + h_{23}\psi_1 = v^2, \\ -h_{31}\psi_2 + h_{32}\varphi + h_{33}\psi_1 &= v^3; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} h_{11}u_p + h_{12}v_p + h_{13}w_p &= u^1 - [\beta_3(h_{11}\varphi + h_{12}\psi_2) + \beta_1(h_{12}\psi_1 - h_{13}\varphi)], \\ h_{21}u_p + h_{22}v_p + h_{23}w_p &= u^2 - [\beta_3(h_{21}\varphi + h_{22}\psi_2) + \beta_1(h_{22}\psi_1 - h_{23}\varphi)], \\ h_{31}u_p + h_{32}v_p + h_{33}w_p &= u^3 - [\beta_3(h_{31}\varphi + h_{32}\psi_2) + \beta_1(h_{32}\psi_1 - h_{33}\varphi)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Считая, что коэффициентам и компонентам перемещений оболочки соответствует индекс «-», т.е. величины v^k , u^k , $k = 1, 2, 3$, известны, разрешим (1) и (2) как системы относительно ψ_2 , φ , ψ_1 , u_p , v_p , w_p .

Из (1) следует:

$$\psi_2 = \Delta_{\psi_2}/\Delta_{\psi}, \varphi = \Delta_{\varphi}/\Delta_{\psi}, \psi_1 = \Delta_{\psi_1}/\Delta_{\psi}, \quad (3)$$

где:

$$\begin{aligned} \Delta_{\psi_2} &= C_{11}v^1 + C_{12}v^2 + C_{32}v^3, \Delta_{\varphi} = C_{21}v^1 + C_{22}v^2 + C_{23}v^3, \\ \Delta_{\psi_1} &= C_{31}v^1 + C_{32}v^2 + C_{33}v^3; \end{aligned}$$

$$C_{11} = h_{33}h_{22} - h_{23}h_{32}, C_{12} = h_{13}h_{32} - h_{33}h_{12}, C_{13} = h_{23}h_{12} - h_{13}h_{22}$$

$$C_{21} = h_{33}h_{21} - h_{23}h_{31}, C_{22} = h_{13}h_{31} - h_{33}h_{11}, C_{23} = h_{23}h_{11} - h_{13}h_{21},$$

$$C_{31} = h_{31}h_{22} - h_{21}h_{32}, C_{32} = h_{11}h_{32} - h_{31}h_{12}, C_{33} = h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22};$$

$$\Delta_{\psi} = h_{33}h_{12}h_{21} + h_{22}h_{13}h_{31} + h_{23}h_{32}h_{11} - h_{33}h_{22}h_{11} - h_{13}h_{32}h_{21} - h_{12}h_{23}h_{31}.$$

Тогда правые части в (2) становятся известными, откуда определяются u_p , v_p , w_p :

$$u_p = \Delta_{up}/\Delta_\psi, \quad v_p = \Delta_{vp}/\Delta_\psi, \quad w_p = \Delta_{wp}/\Delta_\psi, \quad (4)$$

где:

$$\begin{aligned} \Delta_{up} &= -C_{11}b_1 - C_{12}b_2 - C_{13}b_3, \\ \Delta_{vp} &= C_{21}b_1 + C_{22}b_2 + C_{23}b_3, \\ \Delta_{wp} &= C_{31}b_1 + C_{32}b_2 + C_{33}b_3; \\ b_1 &= u^1 - [\beta_3(h_{11}\varphi + h_{12}\psi_2) + \beta_1(h_{12}\psi_1 - h_{13}\varphi)], \\ b_2 &= u^2 - [\beta_3(h_{21}\varphi + h_{22}\psi_2) + \beta_1(h_{22}\psi_1 - h_{23}\varphi)], \\ b_3 &= u^3 - [\beta_3(h_{31}\varphi + h_{32}\psi_2) + \beta_1(h_{32}\psi_1 - h_{33}\varphi)]. \end{aligned}$$

Компоненты перемещений ОЛ ребра в соотношениях (3), (4) можно выразить как через величины с индексом «-», так и с индексом «+». Поэтому:

$$\Delta_{\psi_{2+}} = K_\Delta \Delta_{\psi_{2-}}, \quad \Delta_{\varphi_+} = K_\Delta \Delta_{\varphi_-}, \quad \Delta_{\psi_{1+}} = K_\Delta \Delta_{\psi_{1-}}, \quad (5)$$

$$\Delta_{up_+} = K_\Delta \Delta_{up_-}, \quad \Delta_{vp_+} = K_\Delta \Delta_{vp_-}, \quad \Delta_{wp_+} = K_\Delta \Delta_{wp_-}, \quad K_\Delta = (\Delta_{\psi_+}/\Delta_{\psi_-}). \quad (6)$$

Здесь учтем, что $v^3 = 0$, и развернем первые два соотношения из (5):

$$C_{11+}v_+^1 + C_{12+}v_+^2 = K_\Delta(C_{11-}v_-^1 + C_{12-}v_-^2),$$

$$C_{21+}v_+^1 + C_{22+}v_+^2 = K_\Delta(C_{21-}v_-^1 + C_{22-}v_-^2),$$

где:

$$d_{1-} = K_\Delta(C_{11-}v_-^1 + C_{12-}v_-^2), \quad d_{2-} = K_\Delta(C_{21-}v_-^1 + C_{22-}v_-^2).$$

Отсюда:

$$v_+^1 = \Delta_{v1}/\Delta_{C+}, \quad v_+^2 = \Delta_{v2}/\Delta_{C+},$$

где:

$$\Delta_{v1} = C_{22+}d_{1-} - C_{12+}d_{2-}, \quad \Delta_{v2} = -C_{21+}d_{1-} + C_{11+}d_{2-},$$

$$\Delta_{C+} = C_{11+}C_{22+} - C_{12+}C_{21+}.$$

При раскрытии выражения (6), последовательно имеем:

$$\begin{aligned} b_{1+} &= u_+^1 - [\beta_{3+}(h_{11+}\varphi + h_{12+}\psi_2) + \beta_{1+}(h_{12+}\psi_1 - h_{13+}\varphi)], \\ b_{2+} &= u_+^2 - [\beta_{3+}(h_{21+}\varphi + h_{22+}\psi_2) + \beta_{1+}(h_{22+}\psi_1 - h_{23+}\varphi)], \\ b_3 &= u_+^3 - [\beta_{3+}(h_{31+}\varphi + h_{32+}\psi_2) + \beta_{1+}(h_{32+}\psi_1 - h_{33+}\varphi)], \quad (\dots)_+ \rightarrow (\dots)_-; \\ \psi_2 &= \Delta_{\psi_{2-}}/\Delta_{\psi_-}, \quad \varphi = \Delta_{\varphi_-}/\Delta_{\psi_-}, \quad \psi_1 = \Delta_{\psi_{1-}}/\Delta_{\psi_-}, \\ \Delta_{\psi_{2-}} &= C_{11-}v_-^1 + C_{12-}v_-^2, \\ \Delta_{\varphi_-} &= C_{21-}v_-^1 + C_{22-}v_-^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta_{\psi_{1-}} = C_{31-}v_{-}^1 + C_{32-}v_{-}^2; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\psi_{-}} = & h_{33-}h_{12-}h_{21-} + h_{22-}h_{13-}h_{31-} + h_{23-}h_{32-}h_{11-} - h_{33-}h_{22-}h_{11-} - \\ & - h_{13-}h_{32-}h_{21-} - h_{12-}h_{23-}h_{31-}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} C_{11+}u_{+}^1 + C_{12+}u_{+}^2 + C_{13+}u_{+}^3 &= P_1, \\ C_{21+}u_{+}^1 + C_{22+}u_{+}^2 + C_{23+}u_{+}^3 &= P_2, \\ C_{31+}u_{+}^1 + C_{32+}u_{+}^2 + C_{33+}u_{+}^3 &= P_3. \end{aligned} \quad (10)$$

где, ввиду громоздкости, приведем только выражение для P_1 :

$$\begin{aligned} P_1 = & C_{11+}[(h_{13+}\beta_{1+} - h_{11+}\beta_{3+})\varphi - h_{12+}\beta_{1+}\psi_1 - h_{12+}\beta_{3+}\psi_2] + \\ & + C_{12+}[(h_{23+}\beta_{1+} - h_{21+}\beta_{3+})\varphi - h_{22+}\beta_{1+}\psi_1 - \\ & - h_{22+}\beta_{3+}\psi_2] + C_{13+}[(h_{33+}\beta_{1+} - h_{31+}\beta_{3+})\varphi - h_{32+}\beta_{1+}\psi_1 - h_{32+}\beta_{3+}\psi_2] - \\ & - K_{\Delta}\{C_{11-}[(h_{13-}\beta_{1-} - h_{11-}\beta_{3-})\varphi - h_{12-}\beta_{1-}\psi_1 - h_{12-}\beta_{3-}\psi_2 - u_{-}^1] + \\ & + C_{12-}[(h_{23-}\beta_{1-} - h_{21-}\beta_{3-})\varphi - h_{22-}\beta_{1-}\psi_1 - h_{22-}\beta_{3-}\psi_2 - u_{-}^2] + \\ & + C_{13-}[(h_{33-}\beta_{1-} - h_{31-}\beta_{3-})\varphi - h_{32-}\beta_{1-}\psi_1 - h_{32-}\beta_{3-}\psi_2 - u_{-}^3]\}. \end{aligned}$$

Так как правые части P_j в силу (7)–(9) определены через перемещения контура оболочки «-», то решение системы (10) даст через них выражения перемещений на сечении «+»:

$$u_{+}^1 = \Delta_{C_{1+}}/\Delta_{C_{+}}, u_{+}^2 = \Delta_{C_{2+}}/\Delta_{C_{+}}, u_{+}^3 = \Delta_{C_{3+}}/\Delta_{C_{+}},$$

где:

$$\begin{aligned} \Delta_{C_{1+}} &= (C_{33+}C_{22+} - C_{23+}C_{32+})P_1 + (C_{13+}C_{32+} - C_{33+}C_{12+})P_2 + \\ & + (C_{12+}C_{23+} - C_{13+}C_{22+})P_3, \\ \Delta_{C_{2+}} &= (C_{23+}C_{31+} - C_{33+}C_{21+})P_1 + (C_{33+}C_{11+} - C_{13+}C_{31+})P_2 + \\ & + (C_{21+}C_{13+} - C_{23+}C_{11+})P_3, \\ \Delta_{C_{3+}} &= (C_{32+}C_{21+} - C_{31+}C_{22+})P_1 + (C_{31+}C_{12+} - C_{32+}C_{11+})P_2 + \\ & + (C_{22+}C_{11+} - C_{12+}C_{21+})P_3, \\ \Delta_{C_{+}} &= C_{33+}C_{22+}C_{11+} + C_{12+}C_{23+}C_{31+} + C_{13+}C_{32+}C_{21+} - \\ & - C_{23+}C_{32+}C_{11+} - C_{22+}C_{13+}C_{31+} - C_{33+}C_{12+}C_{21+}. \end{aligned}$$

Далее необходимо выразить силовые компоненты с индексом «+». Для этого привлекаются уравнения колебаний ребра с учетом реакций примыкающих секций [3]. Введем обозначения:

$$F_1 = Q_{1p,2} + [t_p + \omega^2(b_p u_p + c_1 \varphi)]A_p,$$

$$F_2 = T_{p,2} + [k_p Q_{3p} + K_1 T_p - K_2 M_{1p} + s_p + \omega^2(b_p v_p + c_3 \psi_1 + c_1 \psi_2)]A_p,$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= Q_{3p,2} + [-k_p T_p + q_p + \omega^2(b_p v_p + c_3 \psi_1 + c_1 \psi_2)] A_p, \\
F_4 &= H_{p,2} + [k_p M_{3p} + m_p + \omega^2(c_1 u_p + (d_1 + d_3) \varphi - c_3 w_p)] A_p, \\
F_5 &= M_{3p,2} + [-Q_{1p} + K_{1p} M_{3p} + m_{3p} + \omega^2(d_3 \psi_1 + c_1 \psi_2 + c_3 v_p)] A_p, \\
F_6 &= M_{1p,2} + [-Q_{3p} + K_{1p} M_{1p} + m_{1p} + \omega^2(d_{13} \psi_1 + c_1 v_p + d_1 \psi_2)] A_p.
\end{aligned}$$

Тогда на основе уравнения колебаний ребра с учетом реакций смежных секций оболочки [3] можно записать:

$$R_{j+} = (R_{j-} D_- - F_j) / D_+, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Подставляя в выражения R_{j+} , получим систему:

$$\begin{aligned}
G_{11+} T_+^{11} + G_{12+} T_+^{12} + G_{13+} T_+^{13} &= P_{1+}, \\
G_{21+} T_+^{11} + G_{22+} T_+^{12} + G_{23+} T_+^{13} &= P_{2+}, \\
G_{31+} T_+^{11} + G_{32+} T_+^{12} + G_{33+} T_+^{13} &= P_{3+}; \tag{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{1+} T_+^{11} + \Phi_{2+} T_+^{12} + \Phi_{3+} M_+^{11} + \Phi_{4+} T_+^{13} + \Phi_{5+} M_+^{12} &= P_{4+}, \\
\Psi_{11+} T_+^{11} + \Psi_{12+} T_+^{12} + \Psi_{13+} M_+^{11} + \Psi_{14+} T_+^{13} + \Psi_{15+} M_+^{12} &= P_{5+}, \\
\Psi_{21+} T_+^{11} + \Psi_{22+} T_+^{12} + \Psi_{23+} M_+^{11} + \Psi_{24+} T_+^{13} + \Psi_{25+} M_+^{12} &= P_{6+}, \tag{12}
\end{aligned}$$

где:

$$G_{k1+} = g_{11+} h_{1k+} + g_{12+} h_{2k+}, \quad G_{k2+} = g_{12+} h_{1k+} + g_{22+} h_{2k+}, \quad G_{k3+} = h_{3k+}, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$P_{j+} = (R_{j-} D_- - F_j) / D_+, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Коэффициенты Φ и Ψ с индексами определены в [3]. Вначале разрешается независимая система (11) относительно T_+^{11} , T_+^{12} , T_+^{13} . Затем из двух независимых уравнений (12) находятся M_+^{11} , M_+^{12} :

$$\begin{aligned}
T_+^{11} &= \Delta_{G1+} / \Delta_{G+}, \quad T_+^{12} = \Delta_{G2+} / \Delta_{G+}, \quad T_+^{13} = \Delta_{G3+} / \Delta_{G+}, \\
\Delta_{G+} &= G_{13+} G_{22+} G_{31+} - G_{22+} G_{33+} G_{11+} - G_{23+} G_{12+} G_{31+} + G_{33+} G_{12+} G_{21+} + \\
&\quad + G_{32+} G_{23+} G_{11+} - G_{13+} G_{32+} G_{21+}, \\
\Delta_{G1+} &= (G_{32+} G_{23+} - G_{22+} G_{33+}) P_{1+} + (G_{33+} G_{12+} - G_{13+} G_{32+}) P_{2+} + \\
&\quad + (G_{13+} G_{22+} - G_{23+} G_{12+}) P_{3+}, \\
\Delta_{G2+} &= (G_{33+} G_{21+} - G_{23+} G_{31+}) P_{1+} + (G_{13+} G_{31+} - G_{11+} G_{33+}) P_{2+} + \\
&\quad + (G_{23+} G_{11+} - G_{13+} G_{21+}) P_{3+}, \\
\Delta_{G3+} &= (G_{22+} G_{31+} - G_{32+} G_{21+}) P_{1+} + (G_{11+} G_{32+} - G_{12+} G_{31+}) P_{2+} + \\
&\quad + (G_{21+} G_{12+} - G_{11+} G_{22+}) P_{3+}; \\
\Phi_{3+} M_+^{11} + \Phi_{5+} M_+^{12} &= B_{M1}, \quad \Psi_{13+} M_+^{11} + \Psi_{15+} M_+^{12} = B_{M2}, \\
\Psi_{23+} M_+^{11} + \Psi_{25+} M_+^{12} &= B_{M3}.
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} B_{M1} &= P_{4+} - (\Phi_{1+}T_+^{11} + \Phi_{2+}T_+^{12} + \Phi_{4+}T_+^{13}), \\ B_{M2} &= P_{5+} - (\Psi_{11+}T_+^{11} + \Psi_{12+}T_+^{12} + \Psi_{14+}T_+^{13}), \\ B_{M3} &= P_{6+} - (\Psi_{21+}T_+^{11} + \Psi_{22+}T_+^{12} + \Psi_{24+}T_+^{13}). \end{aligned}$$

Авторы благодарят грантодержателей за поддержку работы по грантам 04-01-96806 и РИ -112/001/428.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кривошеева Т.Н., Юдин А.С.* Параметризация составной оболочки сложной геометрии // Изв. Вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2000. № 1. С. 37–40.
- [2] *Музыка Т.Н., Юдин А.С.* Уравнения вибрации оболочек сложной геометрии // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. VIII Междунар. конф. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во «Новая книга». 2003. С. 104–109.
- [3] *Музыка Т.Н., Юдин А.С.* Уравнения колебаний ребра на стыке оболочек сложной геометрии // Современ. пробл. мех. сплош. среды. Тр. VIII Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во «Новая книга». 2003. Т. 2. С. 138–143.

Muzika T.N., Yudin A.S. *Transitional conditions on the discrete ribs for constitutive shells of difficult geometry.* Conditions of transition through discrete ribs of the supported shells of complex geometry are deduced. Conditions are used in algorithms of reduction of edge problem to Cauchy problems. Relation base on articles [1, 2] and continues [3].

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖИДКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Нижник М. П., Павлова А. В., Рубцов С. Е.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Исследуются колебания двухслойного полупространства, содержащего жидкое включение, под действием гармонической сосредоточенной нагрузки. Предложенный подход позволяет выявить качественные явления, характерные для деформированного состояния изучаемой системы.

Многие задачи геофизики, геологии, материаловедения, механики разрушений и др. приводят к необходимости построения математических моделей структурно-неоднородных сред и изучения на их основе различных динамических эффектов.

Широкое распространение получили численные методы исследования задач для неоднородных сред. Однако такой подход связан с преодолением трудностей дискретизации и учета фактора времени вычислений, в этом плане более предпочтительным является использование приближенных полуаналитических методов.

В настоящей работе рассматривается модель геологической среды, состоящей из двух упругих сред (слоя и полупространства) и расположенного между ними слоя жидкости. Подобными структурами могут моделироваться, например, межпластовые воды, встречающиеся на приподнятых междуречных массивах.

Задача решается в плоской постановке. Движение точек жидкости описывается потенциалом скоростей $\varphi(x, z, t)$, удовлетворяющим волновому уравнению, перемещения точек упругой среды – вектором $\mathbf{u}(x, z, t) = (u(x, z, t), w(x, z, t))^T$, который удовлетворяет уравнениям Ляме [1]. Колебания в упругой системе возбуждаются гармоническим сосредоточенным источником на частоте ω , расположенным на поверхности упругого слоя, и предполагаются установившимися, т.е. зависимость всех неизвестных и заданных функций от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$.

Касательные напряжения на поверхности системы равны нулю, нормальные определяются следующим образом: $\sigma_z|_{z=0} = A\delta(x - x_0)e^{-i\omega t}$, $A = \text{const}$.

При $R = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$, $\mathbf{u} \rightarrow 0$, и выполняется условие излучения типа Зоммерфельда [2].

На границах раздела сред $z = h_l$ для неизвестных амплитуд нормальных напряжений введены обозначения q_l , $l=1,2$. Касательные напряжения на границах раздела слоев отсутствуют

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz}|_{z=h_1} = 0, \\ \sigma_z|_{z=h_1} = q_1(x) e^{-i\omega t}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz}|_{z=h_2} = 0, \\ \sigma_z|_{z=h_2} = q_2(x) e^{-i\omega t}. \end{array} \right.$$

Взаимодействие сред определяется равенством вертикальных составляющих скоростей точек жидкости и упругой среды в зоне контакта

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} = 0.$$

Для исследования задачи применяется метод интегральных преобразований, который позволяет уменьшить размерность задачи и, в конечном счете, определить амплитудно-частотные характеристики волнового поля.

Учитывая гармоническую зависимость параметров задачи от времени и применяя экспоненциальное преобразование Фурье, решение исходных задач сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В результате получены соотношения для интегральных характеристик компонент вектора перемещений и исследованы дисперсионные свойства изучаемой среды. После применения обратного преобразования Фурье с использованием аппарата теории вычетов, получено аналитическое представление для функций контактных напряжений на границе раздела сред

$$q_k(x) = i \sum_{j=1}^N \operatorname{res}_{\alpha=\xi_j} Q_k(\alpha) e^{i\xi_j x} + \int_{\Sigma_1^\pm} Q_k(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \int_{\Sigma_2^\pm} Q_k(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad k=1,2.$$

Здесь

$$Q_1 = -\frac{a_0 \rho_0 \omega^2 (\rho_0 \omega^2 \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \sigma_1(\alpha^2 - \eta) - 2\mu \sigma_0 \Delta \operatorname{ch}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \Omega_-)}{\Theta}, \quad Q_2 = \frac{2\mu \sigma_0 a_0 \rho_0 \omega^2 \Omega_-}{\Theta},$$

$$\Theta = -\rho_0^2 \omega^4 \sigma_1(\alpha^2 - \eta) \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1)) g_1 + 2\mu \sigma_0^2 \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \Delta^2 \Omega_- - \sigma_0 \rho_0 \omega^2 \operatorname{ch}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \Delta (\sigma_1(\alpha^2 - \eta) - 2\mu g_1 \Omega_-),$$

$$a_0 = 4\sigma_1(\alpha^2 - \eta) A e^{-i\alpha x_0} (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h_1) - \eta^2 \operatorname{sh}(\sigma_2 h_1)),$$

$$\Omega_+ = \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 + \eta^2, \quad \Omega_- = \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - \eta^2,$$

$$\Delta = 4\mu [\operatorname{ch}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1)) \Omega_+^2 - \operatorname{ch}(h_1(\sigma_2 + \sigma_1)) \Omega_-^2 - 4\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \eta^2],$$

$$g_1 = 2\sigma_1(\alpha^2 - \eta) (\operatorname{sh}(h_1(\sigma_1 - \sigma_2)) \Omega_+ + \operatorname{sh}(h_1(\sigma_1 + \sigma_2)) \Omega_-), \quad \sigma_k^2 = \alpha^2 - \alpha_k^2, \quad k = 1, 2, \\ \alpha_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \alpha_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \eta = \alpha^2 - \frac{1}{2} k_2^2,$$

где ρ – плотность упругой среды, λ , μ – константы Ляме, c – скорость звука в жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, α – параметр преобразования Фурье, ξ_j – нули функции Θ . Значения интегралов по разрезам Σ_1^+ , Σ_2^+ находятся численно.

Предложенный подход позволяет выявить качественные явления, характерные для деформированного состояния изучаемой системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ р2003 юг-а (030196587) и гранта Президента РФ НШ-2107.203.1

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [2] Бабешко В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. М.: Наука, 1979. 320 с.

Nignik M.P., Pavlova A.V., Rubtsov S.E. *Study of wave field of two-layer half-space with liquid inclusion.* Vibrations of a two-layer half-space with liquid inclusion caused by the harmonic point load are investigated. Proposed approach enables to recognize descriptive effects, typical for strain state of investigated system.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Никифоров А. Н., Бузало Н. С.

*Южно-Российский Государственный Технический Университет
(Новочеркасский Политехнический Институт)*

Приведена математическая модель рассеивания примесей в мезометеорологическом пограничном слое атмосферы. Предложен численный конечно-разностный алгоритм решения поставленной задачи.

Дифференциальная задача определения нестационарных полей скорости движения воздуха, температуры, влагосодержания, концентрации примеси поставлена в области $\Omega \cup \Omega^*$:

$$\Omega = \{ \mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2; z_0(x_1, x_2) < x_3 < l_3 \};$$

$$\Omega^* = \{ \mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2; z_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq z_0(x_1, x_2) \}.$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (x, y, z)$, $z_0(x, y)$ – функция высоты подстилающей поверхности, $z_1(x_1, x_2) = z_0(x, y) - h_1$ – граница деятельного слоя (слоя почвы или воды, температура которого испытывает суточные и годовые колебания).

Система уравнений для мезометеорологического пограничного слоя с учетом конвекции имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \bar{v} \times \bar{f} + \beta (T - T_0) \bar{g} - \nabla P + \Delta_\tau \bar{v}, \mathbf{x} \in \Omega; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \mathbf{x} \in \Omega; \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) T \right) = \Delta_\lambda T + Q_V - \frac{\partial q_s}{\partial z}, \mathbf{x} \in \Omega; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{1}{c_w \rho_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial z} \right) + F_w(t, z), \mathbf{x} \in \Omega^*; \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\nabla \bar{v} c) = \Delta_c c - \sigma c + Q_c - \frac{\partial Q_k}{\partial z}, \mathbf{x} \in \Omega; \quad (5)$$

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} + \frac{\partial u c_w}{\partial x} + \frac{\partial v c_w}{\partial y} + \frac{\partial w c_w}{\partial z} = \Delta_c c_w, \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6)$$

Здесь $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \leftrightarrow (u, v, w)$ – поле скорости движения воздуха, \bar{f} – параметр Кориолиса; $P = \frac{p}{\rho}$, p – давление, ρ – плотность, T_0 – среднее значение абсолютной температуры, T – температура атмосферного воздуха, β – коэффициент объемного расширения, \bar{g} – вектор ускорения свободного падения, c_p – удельная теплоемкость

при постоянном давлении, Q_V – объемные антропогенные источники тепловыделения, q_s – поток лучистой радиационной энергии в направлении оси OZ , T_W – температура почвы, c_W – удельная теплоемкость почвы, ρ_W – плотность почвы, λ_W – коэффициент теплопроводности почвы, $F_W(t, z)$ – источник тепловыделения в результате поглощения солнечной радиации в деятельном слое, в почве: $F_W(t, z) = 0$, в воде: $F_W(t, z) = (I'(t) + i(t))(1 - r(t))e^{az}$, $I'(t)$ – поток прямой солнечной радиации на водную поверхность, $i(t)$ – поток рассеянной солнечной радиации, $r(t)$ – альbedo водной поверхности, a – множитель, характеризующий скорость убывания потока солнечной радиации с глубиной, c – концентрация компоненты примеси, Q_c – объемные антропогенные источники примеси, Q_k – поток частиц (капель), движущихся под влиянием силы тяжести, $Q_k = -w_g c$, w_g – средневзвешенная скорость падения частиц, σ – скорость трансформации примеси, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1 = \sigma_1(c_w)$ – скорость влажного осаждения, $\sigma_2 = \sigma_2(c_w)$ – скорость химической трансформации примеси, c_w – удельное влагосодержание атмосферного воздуха.

Дифференциальные операторы в уравнениях имеют вид:

$$\Delta_\tau = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad i = \overline{1,3}; \quad \Delta_\lambda = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\lambda + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right];$$

$$\Delta_c = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left((k + k_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где $\nu_{ij}(x, y, z, t)$ – коэффициенты турбулентного обмена, ν – кинематический коэффициент вязкости, λ – коэффициент теплопроводности, $\lambda_j(x, y, z, t)$ – коэффициенты турбулентной диффузии тепла, k – коэффициент диффузии в воздухе; $k_j(x, y, z, t)$ – коэффициенты турбулентной диффузии примеси.

Граничные условия для системы уравнений (1)–(6) следующие.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } z = z_0(x, y), \quad (7)$$

$$u = u_G, \quad v = v_G, \quad w = 0 \quad \text{при } z = l_3, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x \in \Sigma, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial c_w}{\partial n} = 0 \quad \text{при } z = l_3 \vee x \in \Sigma, \quad (10)$$

$$\alpha_{w1} \frac{\partial c_w}{\partial n} + \alpha_{w2} c_w + \alpha_{w3} = 0 \quad \text{при } z = z_0(x, y), \quad (11)$$

$$(I' \varphi_\alpha + i)(1 - r) - B^* + (\lambda + \lambda_z) \frac{\partial T}{\partial z} - \lambda_W \frac{\partial T_W}{\partial z} + q_A = 0 \quad \text{при } z = z_0(x, y) \quad (\text{почва}), \quad (12)$$

$$-(\lambda + \lambda_z) \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_W \frac{\partial T_W}{\partial z} = -B^* \quad \text{при } z = z_0(x, y) \quad (\text{вода}), \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_W}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = z_1(x, y), \quad (14)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial c}{\partial n} + \alpha_2 c + \alpha_3 \varphi(x, y) = 0 \quad \text{при } z = z_0(x, y), \quad (15)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \text{ при } x \in \Sigma \wedge v_n \geq 0, \quad c = c_\Sigma \text{ при } x \in \Sigma \wedge v_n < 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \text{ при } z = l_3, \quad (16)$$

где $z_0(x, y)$ – функция высоты подстилающей поверхности, $\alpha_{w1}, \alpha_{w2}, \alpha_{w3}$ – функции, определяющиеся условиями взаимодействия влаги с подстилающей поверхностью, φ_α – коэффициент изменения потока прямой солнечной радиации при наклонной поверхности; $B^* = B_0 - \delta B_A$ – эффективное излучение поверхности (баланс длинноволновой радиации при $z = 0$), B_0 – собственное излучение земной поверхности, B_A – поток инфракрасной радиации от атмосферы (встречного излучения атмосферы), δ – относительный коэффициент поглощения земной поверхности, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – функции, определяющиеся условиями взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью, Σ – боковая поверхность цилиндрической области Ω , v_n – нормальная составляющая вектора скорости ветра; c_Σ – фоновое значение концентрации примеси.

Уравнение теплового баланса в форме (12) используется в качестве граничного условия при исследовании термического режима атмосферы и почвы, а в форме (13) – атмосферы и воды.

В качестве начальных условий берутся фоновые значения метеополей:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_\Phi(x), \quad \bar{v}(x, 0) = \bar{v}_\Phi(x), \quad c_w(x, 0) = c_{w\Phi}(x), \\ c(x, 0) &= c_\Phi(x), \quad x \in \Omega \cup \partial\Omega; \\ T_W(x, 0) &= T_{W\Phi}(x), \quad x \in \Omega^* \cup \partial\Omega^*, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\partial\Omega$ и $\partial\Omega^*$ – границы областей Ω и Ω^* .

Общий алгоритм численного решения краевой задачи распространения примеси (1)–(17) основан на расщеплении исходной задачи на части, описывающие: распределение температуры в почве; в атмосфере; движение воздуха; изменение поля влагосодержания; распространение примеси в атмосфере и последовательном их решении на одном малом временном интервале.

В основе решения поставленной задачи (1)–(17) лежит расчет поля скорости движения воздуха, которое описывается краевой задачей (1), (2), (7)–(9). Для численного решения уравнение движения воздуха (1) записывается в виде

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \vartheta(\bar{v})\bar{v} + P\bar{v} + N\bar{v} = \bar{\Theta}. \quad (18)$$

Здесь $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}(x, t) = \bar{\Theta}(T(x), x, t)$ – вектор объемных сил, N – оператор вязких сил и турбулентного обмена, через $P\bar{v}$ обозначен градиент давления; $\vartheta(\bar{v})$ – оператор конвективного переноса. Используется кососимметричная форма записи конвективных слагаемых в виде полусуммы слагаемых в дивергентной и недивергентной форме.

В основе алгоритма решения задачи (1), (2), (7)–(9) лежит принцип построения разностных схем расщепления для расчета нестационарных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных предложенный Патанкарком С. и получивший развитие в работах Самарского А.А., Вабищевича П.Н [1]. Данный метод видоизменен для использования в задаче с переменными коэффициентами турбулентности в трехмерной области сложной конфигурации. Использована частично разнесенная сетка: компоненты скорости и значения температуры относятся к узлам сетки (множество узлов ω), а давление – к центрам ячеек (ω_P).

Задаче (18), (2), (7)–(9) ставится в соответствие дифференциальная по времени и разностная по пространству задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v(v)v + \mathbf{P}v + \mathbf{N}v &= \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad \text{div}_h v = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega_P \quad 0 < t \leq t_k; \\ v(\mathbf{x}, 0) &= v_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где v , \mathbf{P} и \mathbf{N} , div_h – разностные операторы.

$$\begin{aligned} v(v)\xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j,k}\xi_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}\xi_{i-1,j,k}}{2h_1} + \frac{u_{i,j,k}(\xi_{i+1,j,k} - \xi_{i-1,j,k})}{2h_1} + \right. \\ &+ \frac{v_{i,j+1,k}\xi_{i,j+1,k} - v_{i,j-1,k}\xi_{i,j-1,k}}{2h_2} + \frac{v_{i,j,k}(\xi_{i,j+1,k} - \xi_{i,j-1,k})}{2h_2} + \\ &\left. + \frac{w_{i,j,k+1}\xi_{i,j,k+1} - w_{i,j,k-1}\xi_{i,j,k-1}}{2h_3} + \frac{w_{i,j,k}(\xi_{i,j,k+1} - \xi_{i,j,k-1})}{2h_3} \right); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\xi &= - \left(\left(\nu_{x\xi_{i+\frac{1}{2},j,k}} (\xi_{i+1,j,k} - \xi_{i,j,k}) - \nu_{x\xi_{i-\frac{1}{2},j,k}} (\xi_{i,j,k} - \xi_{i-1,j,k}) \right) / h_1^2 + \right. \\ &+ \left(\nu_{y\xi_{i,j+\frac{1}{2},k}} (\xi_{i,j+1,k} - \xi_{i,j,k}) - \nu_{y\xi_{i,j-\frac{1}{2},k}} (\xi_{i,j,k} - \xi_{i,j-1,k}) \right) / h_2^2 + \\ &\left. + \left(\nu_{z\xi_{i,j,k+\frac{1}{2}}} (\xi_{i,j,k+1} - \xi_{i,j,k}) - \nu_{z\xi_{i,j,k-\frac{1}{2}}} (\xi_{i,j,k} - \xi_{i,j,k-1}) \right) / h_3^2 \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где ξ – искомая функция.

При аппроксимации по времени используется схема расщепления на равномерной по времени сетке с шагом τ . Чисто неявная факторизованная схема с линеаризованными конвективными слагаемыми:

$$\text{div}_h v^{n+1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega_P; \quad (21)$$

$$\frac{v^{n+\frac{1}{2}} - v^n}{\tau} + (v(v^n) + \mathbf{N})v^{n+\frac{1}{2}} + \text{grad}_h p^n = f^n, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad (22)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} + (v(v^n) + \mathbf{N})v^{n+\frac{1}{2}} + \text{grad}_h p^{n+1} = f^n, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad (23)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (24)$$

Схема (21)–(24) имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени. Вычислительные эксперименты показали, что разностная схема является условно устойчивой. Сходящиеся разностные решения получаются, в случае, когда длина шагов в горизонтальном направлении превышает длину шага по z не более чем в 60 раз.

Дифференциальные уравнения энергии, распространения примеси и влаго-содержания являются уравнениями конвекции-диффузии, поэтому для решения этих задач был использован один и тот же численный алгоритм. Краевая задача, описывающая перенос примеси, задается уравнениями (5), (15), (16), причем уравнение (5) записывается в кососимметричной форме, также как это было сделано для уравнения (1). Для решения задачи используется чисто неявная разностная,

схема имеющая второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени и являющаяся абсолютно устойчивой.

$$(C^{m+1} - C^m)/\tau + (v(v^n) + N)C^{m+1} = F^n, \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (25)$$

Здесь v – разностный оператор, определяемый выражением (19), N – отличается от оператора определяемого (20) наличием слагаемого $\sigma_{ijk}C_{ijk}$.

Часто для решения задач конвекции диффузии используются более экономичные разностные схемы, основанные на расщеплении. Несмотря на это, сделан выбор в пользу схемы без расщепления, так как она позволяет удобно учитывать рельеф [2]. Кроме того, предложенная разностная схема обладает рядом преимуществ: во-первых, приводит к двукратной экономии оперативной памяти по сравнению с разностной схемой расщепления по пространственным переменным; во-вторых, операторы, описывающие конвекцию и диффузию, строились аналогично операторам конвекции и турбулентной вязкости в уравнениях движения. Это позволяет для всех уравнений системы использовать один и тот же вычислительный алгоритм. Схема (25) является условно монотонной (при ограничениях на сеточные числа Пекле: $Re_{mijk} < 4$, $m = 1, 2, 3$). Для получения безусловно монотонной схемы применена регуляризация. Регуляризация также используется для разностного уравнения (22).

Решение задачи распространения тепла в почве, основано на неявной разностной схеме с аппроксимацией по пространству центральными разностями.

Описанный численный алгоритм позволяет исследовать процесс распространения загрязняющих примесей любого типа (газообразных, аэрозолей, твердых частиц) во влажном неизотермичном пограничном слое атмосферы для областей протяженностью от единиц до нескольких сотен километров при нестационарных условиях. С его помощью возможно одновременно учитывать химические трансформации примесей, орографическую неоднородность подстилающей поверхности, горизонтальную и вертикальную неоднородность турбулентно-диффузионных свойств воздуха, влияние конвективно-стратификационных процессов и влажности на распространение примеси.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самарский А. А., Вабичевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 1999. 320 с.
- [2] Никифоров А. Н., Бузало Н. С. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2002. Спецвыпуск: Математическое моделирование и компьютерные технологии. С. 52–59.

Nikiforov A. N., Bouzalo N. S. *Numerical algorithm for analysis of admixture dissipation processes in mezometeorological boundary atmosphere layer.* The mathematical model of admixture dissipation in mezometeorological boundary atmosphere layer is described. Numerical finite-difference procedure for solution of stated problem is proposed.

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНОК ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ В ЗАДАЧЕ ОБ УДАРЕ ПЛАСТИНКИ О ЖИДКОСТЬ

Островская И.В., Юдович В.И.

Ростовский государственный университет

В работе рассмотрена задача удара пластинки произвольной формы об однородную жидкость. Получены общие двусторонние оценки присоединенной массы в случае слоя конечной глубины. Исследовано влияние глубины слоя на присоединенную массу. Результаты конкретизированы для случая эллиптического диска.

Постановка задачи.

Рассматривается задача об ударе пластинки об однородную жидкость (плотность $\rho = 1$), заполняющую слой $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq h\}$. Для потенциала φ скорости течения жидкости (φ — импульсивное давление), создаваемого ударом, возникает смешанная краевая задача Дирихле–Неймана

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\varphi \Big|_{S_f} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{S_r} = -V, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{S_b} = 0 \quad (4)$$

Здесь $S_r = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ — смоченная жидкостью поверхность пластинки — ограниченная область; S_f — свободная поверхность жидкости; $S_b = \{z = h\}$ — твердое дно. Через V обозначена скорость пластинки в направлении жидкого слоя.

Введем в рассмотрение интеграл Дирихле $D(\varphi)$:

$$D(\varphi) = \int_D (\nabla\varphi)^2 dx. \quad (5)$$

Известно, что присоединенная масса m пластинки равна интегралу Дирихле $D(\varphi)$ от решения краевой задачи (1)–(4). Согласно результатам, изложенным в работе [1] для нее имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{\left(\int_{S_r} \varphi_1 V dS \right)^2}{D(\varphi_1)} \leq m \leq D(\varphi_2). \quad (6)$$

Здесь φ_1 и φ_2 — пробные функции из $W_2^{(1)}$, удовлетворяющие следующим условиям

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 \Big|_{S_f} = 0 \quad (7)$$

и

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \Big|_{S_r} = -V, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \Big|_{S_b} = 0, \quad (8)$$

а в остальном произвольные.

В данной работе изложены двусторонние оценки присоединенной массы твердой пластинки произвольной формы на границе слоя однородной несжимаемой жидкости глубины h . В частности оценено влияние дна на присоединенную массу — поправка затухает, как $\frac{1}{h^3}$ при $h \rightarrow \infty$. Результаты конкретизированы для случая эллиптического диска.

Оценка снизу. Дополнив задачу (7) краевым условием на пластинке S_r , получим для определения пробной функции φ_1 задачу Дирихле

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 \Big|_{S_f} = 0, \quad \varphi_1 \Big|_{S_r} = \phi_1(x, y), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \Big|_{S_b} = 0, \quad (9)$$

где ϕ_1 может быть выбрана достаточно произвольно.

Решение задачи (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \frac{\text{ch}((h-z)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\text{ch}(h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ f(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{S_r} \phi_1(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dS. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в левую часть неравенства (6), получим оценку присоединенной массы снизу

$$m \geq \frac{\left[\int_{S_r} V \phi_1(x, y) dS \right]^2}{D(\varphi_1)} \quad (11)$$

Вычислим интеграл Дирихле $\mathcal{D}(\varphi_1)$:

$$\mathcal{D}(\varphi_1) = - \int_{S_r} \phi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} dS = 4\pi^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha, \beta)|^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{th } h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha d\beta \quad (12)$$

Задание в качестве функции ϕ_1 точного значения потенциала φ при $h = \infty$ дает соотношения

$$\begin{aligned} m_* &= \mathcal{D}(\varphi_*) = \int_{S_r} V \phi_1(x, y) dS, \\ \mathcal{D}(\varphi_1) &= m_* - 8\pi^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f_*(\alpha, \beta)|^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \frac{e^{-2h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 + e^{-2h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

где m_* присоединенная масса при ударе пластинки о жидкое полупространство, а φ_* — соответствующий потенциал скорости, а $f_*(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta)$ в случае, когда ϕ_1 — точное значение потенциала на S_r при $h = \infty$.

Сделав в последнем интеграле замену $\alpha h \rightarrow \alpha$, $\beta h \rightarrow \beta$ и положив $\varepsilon = 1/h$, запишем его в виде

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f_*(\alpha, \beta)|^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-2h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 + e^{-2h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} d\alpha d\beta = \varepsilon^3 \iint_{-\infty}^{\infty} |f_*(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)|^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 + e^{-2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} d\alpha d\beta$$

Предельное значение функции $f_*(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ непосредственно определяется:

$$f_*(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S_r} \phi_1(x, y) e^{-i\varepsilon(\alpha x + \beta y)} dS \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{S_r} \phi_1(x, y) dS = \frac{1}{4V\pi^2} \mathcal{D}(\varphi_*).$$

В результате получаем асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathcal{D}(\varphi_1) \sim \mathcal{D}(\varphi_*) - \varepsilon^3 \frac{1}{V^2\pi} \mathcal{D}^2(\varphi_*) \int_0^{\infty} \frac{r^2 e^{-2r}}{1 + e^{-2r}} dr = \mathcal{D}(\varphi_*) - \varepsilon^3 \frac{3\zeta(3)}{16\pi V^2} \mathcal{D}^2(\varphi_*), \quad (13)$$

Здесь ζ — функция Римана, $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202056903$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива асимптотическая оценка:

$$m \gtrsim m_* + \varepsilon^3 m_*^2 \frac{0.07174248673}{V^2}. \quad (14)$$

Оценка сверху. Для получения оценки присоединенной массы сверху, согласно неравенству (6), надо выбрать пробную функцию φ_2 и вычислить интеграл Дирихле $\mathcal{D}(\varphi_2)$.

Функцию φ_2 определим посредством задачи Неймана

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right|_{S_r} = -V, \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right|_{S_f} = \phi_2(x, y), \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right|_{S_b} = 0, \quad (15)$$

где ϕ_2 должна удовлетворять лишь условию разрешимости задачи Неймана, а в остальном произвольна.

Решение задачи (15) имеет вид

$$\varphi_2(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_2(\alpha, \beta) \frac{\text{ch}(h-z)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\text{ch}h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad (16)$$

$$f_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\text{cthh}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\int_{S_f} V e^{-i(\alpha x + \beta y)} dS + \int_{S_f} \phi_2(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dS \right].$$

При $h = \infty$ решение задачи (15) определено равенством

$$\varphi_2(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_{\infty}(\alpha, \beta) e^{-z\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad (17)$$

$$f_{\infty}(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\int_{S_r} V e^{-i(\alpha x + \beta y)} dS + \int_{S_f} \phi_2(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dS \right]$$

Функция f_2 выражается через f_{∞} равенством

$$f_2(\alpha, \beta) = \operatorname{cth} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} h \cdot f_{\infty}(\alpha, \beta)$$

Если в качестве функции ϕ_2 возьмем точное значение вертикальной компоненты скорости $v_3 = -\frac{\partial \varphi_*}{\partial z}$ на свободной границе S_f в случае $h = \infty$, то

$$f_2(\alpha, \beta) = \operatorname{cth} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} h \cdot f_*(\alpha, \beta). \quad (18)$$

Вычислим теперь интеграл Дирихле $\mathcal{D}(\varphi_2)$

$$\mathcal{D}(\varphi_2) = \mathcal{D}(\varphi_*) + 8\pi^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |f_*(\alpha, \beta)|^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \frac{e^{-2h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 - e^{-2h\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} d\alpha d\beta$$

Замена $h\alpha \rightarrow \alpha$, $h\beta \rightarrow \beta$ и обозначение $\varepsilon = \frac{1}{h}$ приводят последнее равенство к виду

$$\mathcal{D}(\varphi_2) = m_* + 8\pi^2 \varepsilon^3 \iint_{-\infty}^{\infty} |f_*(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)|^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \frac{e^{-2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 - e^{-2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} d\alpha d\beta \quad (19)$$

Подставив вместо функции $f_*(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)$ ее предельное значение при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим соотношение

$$\mathcal{D}(\varphi_2) \sim m_* + \frac{\varepsilon^3}{\pi V^2} m_*^2 \int_0^{\infty} \frac{r^2 e^{-2r}}{1 - e^{-2r}} dr = \mathcal{D}(\varphi_*) + \frac{\varepsilon^3 \zeta(3)}{4\pi V^2} m_*^2. \quad (20)$$

Окончательно, асимптотическая оценка присоединенной массы сверху имеет вид

$$m \lesssim m_* + \frac{\varepsilon^3}{V^2} m_*^2 \cdot 0.09565664898 \quad (21)$$

Таким образом, присоединенная масса при $h \rightarrow \infty$ стремится к ее значению m_* при $h \rightarrow \infty$, а поправка затухает как $\frac{1}{h^3}$.

Оценка присоединенной массы при ударе эллиптической пластинки.

Рассмотрим теперь случай, когда пластинка S_r имеет эллиптическую форму

$$S_r = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

Потенциал скорости φ на границе S_r при ударе эллиптической пластинки о жидкое полупространство определяется равенством

$$\varphi_* \Big|_{S_r} = \frac{abV}{E(\epsilon)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad \epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad (22)$$

где $E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Присоединенная масса m_* при ударе о жидкое полупространство определена равенством

$$m_* = \int_{S_r} \varphi V dS = \frac{a^2 b^2 V^2}{E(\epsilon)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{2\pi a^4 (1 - \epsilon^2) V^2}{3E(\epsilon)} \quad (23)$$

Перейдем теперь к оценке присоединенной массы в случае конечного слоя. Она удовлетворяет соотношениям (14) и (21). Подставив в них выражение (23), получим

$$m \gtrsim \frac{2\pi a^4 (1 - \epsilon^2)}{3E(\epsilon)} + \epsilon^3 \frac{a^8 (1 - \epsilon^2)^2 V^2}{E(\epsilon)^2} \cdot 0.3146977613 \quad (24)$$

$$m \lesssim \frac{2\pi a^4 (1 - \epsilon^2) V^2}{3E(\epsilon)} + \epsilon^3 \frac{a^8 (1 - \epsilon^2)^2}{E(\epsilon)^2} \cdot 0.4195970151 \quad (25)$$

Данная статья есть часть работы, выполняемой при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00567), гранта поддержки ведущих научных школ (ПИ 112/001/273), гранта EPSRC GR/S96616/01 и гранта INTAS Ref. no. 04-80-7297.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. О двусторонних вариационных оценках присоединенных масс и моментов инерции // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического Сообщества. 2005.

Ostrovskaya I.V. Yudovich V.I. *Application of two-sided variational estimates of virtual mass in the problem of impact of a plate on a fluid.* In this paper the problem of impact of a plate on a homogeneous fluid layer is considered. We present upper and lower estimates for the virtual mass in the case of a plate of arbitrary and, in particular, elliptic shape and investigate their dependence on the layer depth.

ВОЗДЕЙСТВИЕ УГЛЕРОДА НА ОБРАЗОВАНИЕ ДЕФЕКТОВ И РАЗРУШЕНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

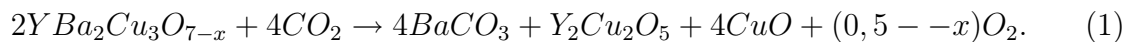
Паринов И.А.

*НИИ механики и прикладной математики им. И.И.Воровича Ростовского
государственного университета*

Представлено моделирование разрушения ВТСП вследствие выделения углерода и сопутствующих процессов в объеме сверхпроводника. В первой части рассмотрен механизм, предполагающий одновременное проявление: а) диффузии углерода, б) осаждения карбоната, в) потока немеханической энергии и г) деформации материала. Во второй части представлены модели медленного и быстрого равновесного роста трещины, а также ее устойчивого распространения при наличии экранирующего поля дислокаций.

Известно, что процессы выделения углерода в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП), обладающих хрупкой оксидной структурой и сверхмалой длиной когерентности – пространственной характеристикой сверхпроводящих электронов (порядка нескольких нанометров) с одной стороны, формируют центры пиннинга магнитного потока, что может обусловить улучшение сверхпроводящих свойств, а с другой – приводят к охрупчиванию интеркристаллитных границ (ИГ) и созданию слабых связей [1, 2]. Последнее обстоятельство, подтвержденное результатами экспериментов, ухудшает сверхпроводящие свойства и токопроводящую способность ВТСП.

Целью настоящей работы является моделирование осаждения углерода и сопутствующих процессов. Выделение углерода – сложный механизм, предполагающий одновременное проявление: а) диффузии углерода, б) осаждения карбоната, в) потока немеханической энергии и г) деформации материала. Одна из стандартных реакций, описывающих взаимодействие сверхпроводящего иттриевого купрата ($YBCO$) с углекислым газом в процессе спекания, которая приводит к образованию купрата и карбоната, имеет вид:



Определяющие уравнения, описывающие углеродное охрупчивание и разрушение $YBCO$ при действии напряжений и температур, могут быть получены в рамках термодинамической теории необратимых процессов с учетом термодиффузии углерода (эффекта Соре). При этом замедленное разрушение карбоната моделируется с помощью модели декогезии, учитывающей изменение во времени энергии декогезии вследствие зависящего от времени процесса осаждения карбоната. В настоящей работе определяющие уравнения получены с учетом действия напряжений и температурного градиента для системы “сверхпроводник/углерод”, в которой хрупкие карбонаты могут осаждаться и приспособляться упругим

образом, образуя композит “купрат/карбонат”. В этом случае определяющее уравнение, описывающее диффузию углерода, получим в форме [3]:

$$\frac{dC^{CT}}{dt} = -\frac{\partial J_k^{CT}}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Здесь t и x_k – время и компоненты декартовых координат; полная концентрация углерода C^{CT} определяется только концентрацией углерода в карбонате C^C в связи с отсутствием углерода в купрате: $C^{CT} = fC^C$, где f – объемная доля карбоната в композите “купрат/карбонат”. Полный поток углерода в материале J_k^{CT} находится в виде: $J_k^{CT} = fJ_k^C$, где поток углерода J_k^C удовлетворяет соотношению:

$$J_k^C = -\frac{D^C C^C}{RT} \left(\frac{\partial \mu^C}{\partial x_k} + \frac{Q^C \partial T}{T \partial x_k} \right). \quad (3)$$

если углерод и сверхпроводник формируют карбонат; R – газовая константа; T – абсолютная температура; D^C и Q^C – соответственно, коэффициент диффузии и тепловой поток углерода, обусловленный его транспортом в карбонате. Химический потенциал углерода в карбонате под напряжением μ^C имеет вид:

$$\mu^C = \mu_0^C + \bar{V}^C \left(\frac{1}{2} M_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \right). \quad (4)$$

где μ_0^C – химический потенциал углерода в карбонате при отсутствии напряжения; \bar{V}^C – парциальный молярный объем углерода в карбонате, M_{ijkl} – тензор упругих податливостей сверхпроводника и σ_{ij} – тензор приложенных напряжений.

Определяющее уравнение, описывающее поток немеханической энергии, получено в виде [3]:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \frac{\Delta \bar{H}^{car}}{\bar{V}^{car}} \frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - J_n^C \frac{\partial \mu^C}{\partial x_n}, \quad (5)$$

где ρ – массовая плотность материала; c_p – удельная теплоемкость сверхпроводника при постоянном давлении, $\Delta \bar{H}^{car}$ – энтальпия, соответствующая формированию моля карбоната; \bar{V}^{car} – молярный объем карбоната и k – коэффициент температуропроводности сверхпроводника.

Полученные определяющие уравнения (2), (5) могут быть реализованы численно с помощью разработанной схемы метода конечного элемента [4].

Далее, процессы выделения углерода могут быть изучены с помощью микроскопических моделей медленного и быстрого равновесного роста трещины, а также ее устойчивого распространения при наличии экранирующего поля дислокаций [5]. Медленное разрушение имеет место, когда процесс осаждения углерода достаточно быстр для того, чтобы установить одинаковые химические потенциалы между интеркристаллитной границей и берегами трещины, а быстрое разрушение происходит, в условиях одинаковой концентрации углерода на берегах трещины и ИГ. Устойчивый рост трещины происходит при ее распространении с постоянной скоростью. В случае равновесного роста трещины, экранированной дислокациями, предполагаем, что вершина трещины сохраняется острой на атомном уровне в

присутствии экранирующих дислокаций, обеспечивающих также локальное условие равновесия. Последнее состоит в том, что трещина должна экранироваться полем дислокаций, при этом устанавливается зона длиной d , свободная от дислокаций. Нагруженная система “трещина - два массива дислокаций” (с соответствующей длиной $2a$ и r_y) обуславливает локальное напряжение σ_d в зоне, свободной от дислокаций, и создает интенсивность напряжений, задаваемую соотношениями Хатчинсона-Райса-Розенгрена:

$$\sigma_{yy} = \sigma_d, a < |x| < a + d \quad (6)$$

$$\sigma_{yy} = \beta \sigma_y (K_a / \sigma_y)^{2n/(n+1)} (|x| - a)^{-n/(n+1)}, a + d < |x| < a + d + r_y \quad (7)$$

где K_a – интенсивность приложенных напряжений; σ_y – предел текучести; n – коэффициент рабочего упрочнения; β – коэффициент, зависящий от свойств упругой и пластической деформаций. Процесс осаждения углерода соотносится с профилем вершины трещины и полем напряжений впереди нее. Химические потенциалы углерода и сверхпроводника могут быть определены в различных областях интеркристаллитной границы и поверхности трещины: I – область, не зависящая от приложенных напряжений ($|x| > a + d + r_y$); II – область, занимаемая экранирующими дислокациями ($a + d < |x| < a + d + r_y$), III – область впереди вершины трещины, свободная от дислокаций ($a < |x| < a + d$), IV – область аркообразной вершины трещины ($a - q < |x| < a$) и V – область, параллельная берегам трещины ($|x| < a - q$). При равновесии химические потенциалы углерода и сверхпроводника должны совпадать между собой во всех областях. Таким образом, равновесное осаждение углерода зависит от энергии связей и условий в вершине трещины. Основным допущением модели является то, что охрупчивание интерфейсов выражается в уменьшении поверхностной и зернограничной энергий вследствие выделения углерода. Тогда из термодинамического анализа Си-Райса-Хета можно получить удельную энергию, израсходованную при медленном (γ^s) и быстром (γ^f) разрушении, в виде:

$$\gamma^s = \gamma_0 - RT(2C_V/\Omega_s - C_{III}^s/\Omega_b); \quad (8)$$

$$\gamma^f = \gamma_0 - (C_{III}^f/\Omega_b)\Delta\mu, \quad (9)$$

здесь равновесные концентрации углерода в зонах III и V определяются в явном виде; C_{III}^s и C_{III}^f – критические значения концентрации углерода в зоне III, необходимые, соответственно, для медленного и быстрого разрушения; γ_0 – удельная энергия интеркристаллитного разрушения в отсутствие углерода; $1/\Omega_i$ – покрытие интерфейсов углеродом; $\Delta\mu = RT \ln(2C_V/C_{III}^f)$ – разность химических потенциалов на поверхности трещины и нагруженной границе зерна. Соотношение между критической интенсивностью напряжений, необходимой для развития трещины (при медленном, быстром или устойчивом характере разрушения), и энергией, затраченной в процессе выделения углерода, устанавливается с помощью локального условия энергетического баланса:

$$-(1 - \nu)K_d^2/2G + \gamma^c \leq 0, \quad (10)$$

где верхний индекс соответствует конкретному состоянию разрушения; K_d – локальный коэффициент интенсивности напряжений (КИН), обусловленный длиной зоны, свободной от дислокаций, впереди вершины трещины d ; ν – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига. При этом КИН K_d и напряжение σ_d в этой зоне связаны соотношением, получаемым приближенно из условия силового баланса, которое устанавливается между трещиной с линейной интенсивностью напряжений и аналогичной трещиной, находящейся под действием локального нагружения, определяемого размером пластической зоны: $\pi d = (K_d/\sigma_d)^2$. Кроме того, используем соотношение между σ_d , K_d , и δ_c , которое следует из условия совпадения скорости освобождения энергии деформации с соответствующим J -интегралом:

$$\sigma_d = K_d[2(1 - \nu^2)/\delta_c]^{1/2}.$$

Затем пороговое значение КИН задается соотношениями (7) и (10):

$$K_{th}^c = K_c^0(\gamma^c/\gamma_0)^{(n+1)/4n}(\delta_{c0}/\delta_c^c)^{(1-n)/4n}, \quad (11)$$

где K_c^0 – трещиностойкость сверхпроводника; δ_c^c – критическое перемещение при раскрытии трещины, соответствующее определенному процессу разрушения (обозначенному верхним индексом c), и δ_{c0} – тот же параметр в отсутствие углерода, определяемый в форме:

$$\delta_{c0} = \frac{[4G(1 + \nu)\gamma_0]^{(n+1)/(1-n)}}{[2\pi(1 - \nu^2)]^{2n/(1-n)}\beta^{2(n+1)/(1-n)}\sigma_y^2 K_0^{4n/(1-n)}}. \quad (12)$$

Система уравнений (7)-(12) полностью описывает процессы равновесного медленного и быстрого роста интеркристаллитной трещины при осаждении углерода. Численные результаты показывают, что в условиях трещины, экранированной дислокациями, осаждение углерода способствует медленному росту трещины с большей вероятностью, чем быстрому разрушению.

В предположении, что диффузия углерода вдоль напряженных границ и берегов трещины является механизмом, контролирующим охрупчивание ИГ и определяющим скорость разрушения, при сохранении геометрических и силовых условий рассмотренного выше равновесного роста трещины, случай устойчивого состояния разрушения демонстрирует докритический интеркристаллитный рост трещины с постоянной скоростью ν_c .

Потоки углерода J_i^j в различных областях ИГ и поверхности трещины определяются в виде:

$$J_i^j = -\frac{D_i C_i^j}{RT} \frac{d\mu_i^j}{d(xors)}, \quad (13)$$

где D_i – коэффициент диффузии углерода; C_i^j – концентрация углерода (нижний индекс i соответствует ИГ или поверхности трещины; верхний индекс j показывает различные зоны интерфейса); μ_i^j – соответствующие химические потенциалы. Дифференцирование по s выполняется только в зоне вершины трещины, при этом

s – переменная длина дуги на соответствующей части аркообразной вершины трещины. Уравнение непрерывности потоков есть:

$$\frac{dC_i^j}{dt} + \frac{dJ_i^j}{d(xors)} = 0, \quad (14)$$

где t – время. Далее находятся дифференциальные уравнения для потока и диффузии углерода в различных областях ИГ и поверхности трещины. В предположении, что устойчивое состояние роста трещины устанавливает равновесные значения в центре трещины и в ближайшей тройной точке ИГ впереди трещины, получены условия на интерфейсе, определяющие совпадение химических потенциалов и потоков углерода на каждом интерфейсе для поддержания непрерывности потока углерода. Таким образом, установлена краевая задача для системы дифференциальных уравнений второго порядка, при решении которой используются некоторые соотношения, полученные для равновесного роста трещины.

Работа выполнена в рамках гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований N04-01-96800.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Паринов И. А. Микроструктура и свойства высокотемпературных сверхпроводников. Ростов-на-Дону: РГУ, 2004. Т. 1. 416с.
- [2] Паринов И. А. Микроструктура и свойства высокотемпературных сверхпроводников. Ростов-на-Дону: РГУ, 2004. Т. 2. 368с.
- [3] Паринов И. А. Углеродное охрупчивание и разрушение сверхпроводника $YBCO$. I. Определяющие уравнения // МКМК. 2005. Т. 11, N2. С. 242-257.
- [4] Паринов И.А. Углеродное охрупчивание и разрушение сверхпроводника $YBCO$. II. Схема МКЭ // МКМК. 2005. Т. 11, N3.
- [5] Parinov I. A., Parinova L. I., Rozhkov E. V. Modeling of carbon segregation and accompanying processes during HTSC manufacture // Phys. C. 2002. V. 377. N1-2. P. 114-120.

Parinov I. A. *Carbon effect on formation defects and fracture of high-temperature superconductors..* Modeling of the HTSC fracture is presented due to the carbon segregation and accompanying processes into superconductor volume. In first part, it is considered a mechanism assuming simultaneous manifestation (i) carbon diffusion, (ii) carbonate segregation, (iii) non-mechanical energy flow and (iv) material strain. In second part the models of slow and fast equilibrium crack growth and also stability crack propagation under shielding dislocations are presented.

АНАЛИЗ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДЕЙСТВИИ ШТАМПА НА УПРУГИЙ СЛОЙ С ВЕРТИКАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Евдокимов А. А.,
Капустин М. С.**

Кубанский госуниверситет, Краснодар

Исследована осесимметричная контактная задача о колебаниях круглого штампа на поверхности слоя с вертикально-ориентированными включениями, при отсутствии трения в области контакта. Получены интегральные уравнения и их приближенные решения, проведены численные расчеты и анализ полученных результатов. Изучено влияние вертикально ориентированных включений на контактные напряжения под штампом.

Рассмотрим осесимметричную задачу о колебаниях абсолютно жесткого невесомого круглого штампа на поверхности упругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием. На штамп радиуса a действует гармоническая вертикальная нагрузка $\mathbf{P} = \{0, Pe^{-i\omega t}\}$, приложенная в центре (ω – частота колебаний, t – время). В области контакта $\{r \leq a, z = 0\}$ трение отсутствует. Свойства слоя $\{0 < r < \infty, -h < z < 0\}$, характеризуются плотностью ρ_c , скоростью продольных c_1 и поперечных c_2 волн. На поверхности слоя по окружности радиуса r_0 расположена система заглублённых вертикально-ориентированных включений длины h_0 , совершающих (в общем случае) вертикальные и горизонтальные колебания. Распределённая по глубине нагрузка на включениях моделируется компонентами локализованной объемной силы: $X_r = f_r(z)\delta(r - r_0)$, $X_z = f_z(z)\delta(r - r_0)$ ($\delta(r)$ – дельта-функция Дирака). Перемещения точек упругого слоя определяются вектором $\mathbf{u} = \{u_r(r, z), u_z(r, z)\}$.

С помощью аппарата интегральных преобразований, методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная краевая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно неизвестного напряжения $q(r)$ в области контакта [1–3]:

$$\int_0^a k(r, \rho)q(\rho)\rho d\rho = u_z(r, 0) - A, \quad 0 \leq r \leq a, z = 0; \quad (1)$$

где

$$k(r, \rho) = \int_{\sigma_0} K(\alpha)J_0(\alpha\rho)J_0(\alpha r)\alpha d\alpha,$$
$$A = \int_0^{\infty} Q_2(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha d\alpha,$$

$Q_2(\alpha)$ - трансформанта Бесселя от перемещений, обусловленных наличием включений,

σ_0 - контур интегрирования, определяемый в соответствии с принципом предельного поглощения [2].

Используя решение, построенное методом фиктивного поглощения в работе [3], интегрального уравнения

$$\int_0^a k(r, \rho) q_*(\rho, \eta) \rho d\rho = J_0(\eta r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad z = 0, \quad (2)$$

установим связь между решением $q_*(\rho, \eta)$ и решением следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^a k(r, \rho) q_2(\rho) \rho d\rho = - \int_0^\infty Q_2(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha. \quad (3)$$

Умножая (2) на $-Q_2(\eta)\eta$ и интегрируя по η от 0 до ∞ , получим

$$\int_0^a k(r, \rho) \int_0^\infty Q_2(\eta) q_*(\rho, \eta) \eta d\eta \rho d\rho = - \int_0^\infty Q_2(\eta) J_0(\eta r) \eta d\eta. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем $q_2(\rho) = - \int_0^\infty Q_2(\eta) q_*(\rho, \eta) \eta d\eta$.

Вычисление интеграла проводится с помощью теории вычетов, используя процедуру замыкания контура интегрирования [1–3].

Предположим, что $q_1(r)$ – напряжения под штампом без учета влияния включений, когда $u_z(r, 0) = 1$. В этом случае имеем $q_1(r) = q_*(r, 0)$.

Таким образом, решением исходной задачи (1) является $q(r) = q_1(r) + q_2(r)$.

Численные расчеты проводились для слоя с параметрами, соответствующими почве, с нагрузкой вдоль включений, равной приложенной к штампу нагрузке и противоположной по направлению. Функция контактных напряжений для жесткого включения получена в работе [4] и вычисляется по следующей формуле:

$$f_z(z) = z + h_0 + e^{z-h_0} + \frac{1}{\sqrt{-z}} + \frac{1}{\sqrt{z+h_0}}.$$

При переходе через собственные частоты $\omega_0 = 2,5; 4,7$ Гц, контактные напряжения под штампом, без влияния включений, меняют знак, что подтверждается в работе [1]. Контактные напряжения, создаваемые штампом и включениями, меняют знак не только при переходе через собственные частоты, но и при изменении характеристик источников (размеров, распределения нагрузки). На рис. 1 приведены графики действительной части $q_1(r)$, характеризующие изменение амплитуды контактных напряжений с ростом частоты $\omega = 6,1; 6,6; 6,8$ Гц. На рис. 2 приведены графики действительной части $q_2(r)$, характеризующие изменение амплитуды контактных напряжений с ростом частоты $\omega = 2,1; 2,2; 2,3$ Гц. Для рис. 1 и рис. 2 использовались следующие входные параметры $a = 2$ м, $h = 20$ м,

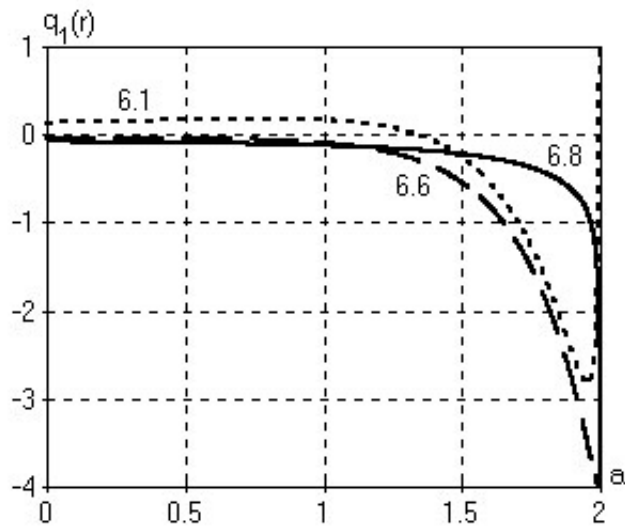


Рис. 1. Изменение $q_1(r)$ с ростом частоты

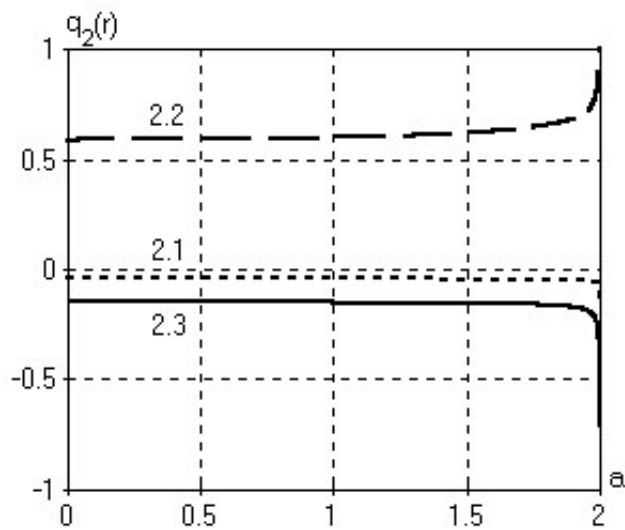
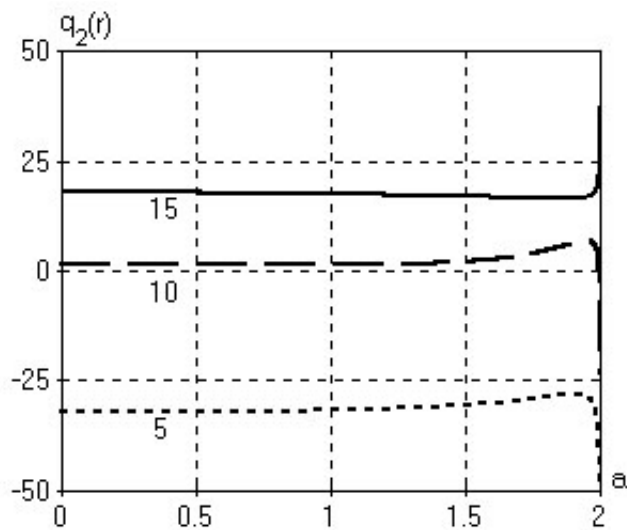
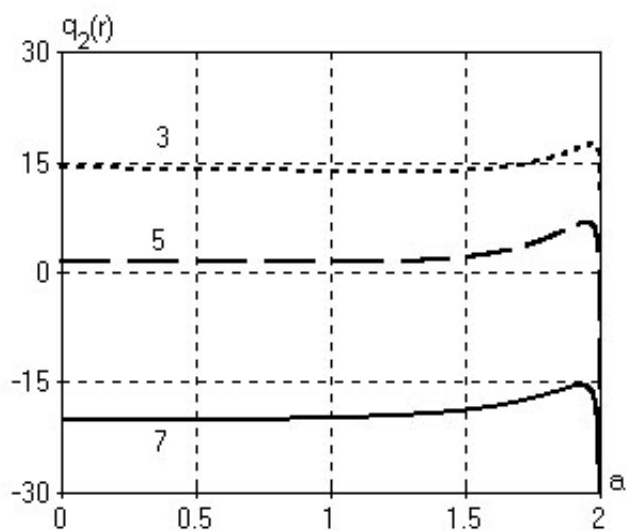


Рис. 2. Изменение $q_2(r)$ с ростом частоты

Рис. 3. Изменение $q_2(r)$ с увеличением длины включенийРис. 4. Изменение $q_2(r)$ с увеличением радиуса расположения включений

$r_0 = 5$ м, $h_0 = 10$ м, $N = 8$ (количество включений). На рис. 3 приведены графики действительной части $q_2(r)$, характеризующие изменение амплитуды контактных напряжений с увеличением длины включений $h_0 = 5; 10; 15$ м, для частоты $\omega = 6$ Гц, остальные параметры не изменялись. На рис. 4 приведены графики действительной части $q_2(r)$, характеризующие изменение амплитуды контактных напряжений с увеличением радиуса расположения включений $r_0 = 3; 5; 7$ м, для частоты $\omega = 6$ Гц, остальные параметры не изменялись. Увеличение частоты колебаний, при больших значениях радиуса штампа, приводит к увеличению осцилляции амплитуд контактных напряжений, что подтверждается в работе [3].

Полученные результаты позволяют утверждать, что с ростом частоты вертикально-ориентированные включения с заданной функцией распределения контактных напряжений, усиливают контактные напряжения под штампом и оказывают значительное влияние на характер их распределения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ р2003юг(03-01-96645), ФЦНТП (РИ-112/001/301).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [2] Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
- [3] Ворович И.И., Бабешко В.А., Прякина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
- [4] Евдокимов А.А. Динамические задачи о жестких включениях в упругом полупространстве: Дис. канд. физ.-мат. наук: К 063.52.03 / Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону, 1987. 155 с.

Pryakhina O.D., Smirnova A.V., Evdokimov A.A., Kapustin M.S. *Analysis of the contact stresses in problem about action of the stamp on elastic layer with vertically oriented inclusions.* Axis symmetrical contact problem about fluctuation of the round stamp on surfaces layer with vertically oriented inclusions, with the absence of friction in the field of contact, was explored. Integral equations and their approximate solutions were received, numerical calculations and analysis of this results were organized. Influence of vertically oriented inclusions on contact stresses under stamp was elaborated.

ТЕРМОУПРУГОЕ ИЗГИБНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ В
МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ, ВЫЗВАННОЕ
ОБРАЗОВАНИЕМ ТОНКОГО ОТЛИЧАЮЩЕГОСЯ ОТ НЕЁ ПО
ТЕМПЕРАТУРЕ МЕЖСЛОЙНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ
(КОНТИНУАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Салганик Р. Л., Марков В. Г., Мохель А. Н., Устинов К. Б.
Институт проблем механики РАН, Москва

Рассматривается, в континуальном приближении и в условиях плоской деформации, термоупругое изгибное деформирование в многослойной структуре, вызванное образованием отличающегося от неё по температуре тонкого межслойного включения. Сначала находится решение задачи в предположении о чисто упругом изгибном деформировании. Затем решается, как квазистатическая, задача о термоупругом изгибном деформировании слоёв. При этом предполагается, что включение образуется мгновенно и имеет температуру, настолько сильно отличающуюся от начальной температуры структуры, что может растечься вдоль межслойной границы. Поэтому создание включением упругой изгибной деформации происходит лишь в меру некоторой доли его толщины. Поскольку, в указанном решении о термоупругом деформировании структуры прогиб всюду непрерывен, окончательное решение получается сложением вышеупомянутых решений задач упругости и термоупругости. Проведены расчёты. Обсуждаются возможные применения полученных результатов.

1. Задача упругости. (а) Основные уравнения. Рассмотрим, для условий плоской деформации, континуум, эквивалентный указанной многослойной структуре, работа слоёв которой на изгиб обеспечивается либо их взаимным проскальзыванием, либо наличием между ними достаточно податливых прослоев, изгибной жёсткостью которых можно пренебречь. Слои предполагаются изотропными, обладающими каждый постоянными толщиной h , модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Введём декартову систему координат x, y с осью y , перпендикулярной слоям. Обозначим через $w(x, y)$ прогиб слоя, усреднённый по достаточно большому числу слоёв, считая $w(x, y)$ достаточно плавной функцией. Тогда, в рассматриваемом континуальном приближении, основанном на подходе Зонга, предложенном в [1] и развитом в [2, 3], считая объёмные силы и продольные нагрузки в слоях пренебрежимо мало влияющими на прогиб, имеем для условий равновесия [2]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - h E_a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1)$$

По сути, это уравнение Зонга. Здесь D – изгибная жёсткость, E_a – эффективный (в том смысле, что он учитывает шероховатость контактов между слоями при их непосредственном контакте или деформационное сопротивление достаточно податливых прослоев) модуль упругости, предполагаемый значительно меньшим E . Для напряжения на межслойных границах имеем

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + \sigma_{yd}, \quad \sigma_{yd} = E_a \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2)$$

Давление $q_0 = -\sigma_{y0}$ предполагается достаточно большим для того, чтобы можно было считать отслоения отсутствующими.

(б) Решение задачи для включения. Включение моделируется посредством некоторого заданного распределения скачка прогиба на оси x , который, принимая во внимание отмеченное выше относительно растекания включения вдоль межслойной границы, предполагается составляющим лишь определённую долю k от того скачка прогиба, который был бы в отсутствие указанного растекания. Принимается, что $k = const$. Рассмотрение эффекта растекания включения, которое позволило бы определить величину k , представляет собой отдельную задачу, выходящую за рамки данной работы. Будем считать скачок прогиба, задающий форму включения, симметричным относительно оси x . Последнее обстоятельство позволяет рассматривать задачу лишь в верхней полуплоскости, т. е. при $y > 0$. Таким образом, при наличии включения имеем для уравнения (1), рассматриваемого при $y > 0$, следующее граничное условие на оси x :

$$w(x, +0) = \{kw_0(x), \quad |x| < a; \quad 0, \quad |x| \geq a \} \quad (3)$$

где $w_0(x)$ – заданное распределение скачка прогиба, который был бы в отсутствие растекания. На бесконечности ставится условие исчезновения возмущения напряжённо-деформированного состояния.

Искомое решение задачи получается при помощи решения задачи для специального случая включения, имеющего ступенчатый профиль и соответствующего межслойной краевой дислокации [2] и имеет вид:

$$w(x, y) = \frac{k}{2} \int_{-a}^a \frac{dw_0(\xi)}{d\xi} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi - x}{2\sqrt{\beta y}} \right) \right] d\xi, \quad w_0(\pm a) = 0, \quad \beta = \sqrt{\frac{D}{hE_a}}, \quad (4)$$

$$\sigma_{yd}(x, y) = -\frac{kE_a}{4(\pi\beta)^{1/2}y^{3/2}} \int_{-a}^a \frac{dw_0(\xi)}{d\xi} (x - \xi) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\beta y} \right] d\xi \quad (5)$$

В частности, отсюда видно, что, чем больше отношение $\chi = (\beta/h) \cong 0.3\sqrt{E/E_a}$, тем лучше выполняются условия применимости уравнения (1). При небольшой величине χ , что соответствует случаю более или менее непосредственного контактирования слоёв друг с другом, описание, получаемое на основе уравнения (1), должно рассматриваться лишь как весьма приближённое (оценочное).

Отметим, что в случае

$$w_0(x) = \frac{s}{2E_a\beta} (x^2 - a^2), \quad |x| \leq a; \quad w_0(x) = 0, \quad |x| > a \quad (6)$$

где $s = const.$, (см. [3])

$$\sigma_{yd}(x, 0) = s, \quad |x| \leq a; \quad w(x, 0) = 0, \quad |x| > a \quad (7)$$

т.е. связанное с изгибом слоёв давление $p = -s$ на включение, постоянно. Это позволяет рассмотреть случай, когда включение жидкое (соответствующее решение см. в [3]).

2. Задача термоупругости. (а) Основные уравнения. Они получены в [4]. Уравнение квазистатического равновесия в своей левой части совпадает с (1), а в правой – содержит член типа некоторой эквивалентной объёмной силы, учитывающей термоупругий эффект. Соответствующим образом обобщаются и формулы для напряжений. При этом предполагается, что распределение температуры не испытывает влияния на него напряжённо-деформированного состояния.

(б) Распределение температуры. Оно находится на основе известного нестационарного решения задачи теории теплопроводности в предположении о том, что среда бесконечна и (для простоты) однородна и изотропна. При этом принимается, что на отрезке, занятом включением, мгновенно (что означает пренебрежение временем “внедрения” включения по сравнению с характерным временем прогрева структуры) возникает импульсное тепловыделение, которое распределено по указанному отрезку в соответствии с распределением скачка прогиба, моделирующего включение.

(в) Решение задачи термоупругости. Используется решение, полученное в [4] для бесконечной среды при произвольном распределении температуры с подстановкой в него распределения температуры, указанного в п. (б). Это решение построено аналогично тому, как это сделано в [5] для другой задачи. При этом использовано фундаментальное решение (для уравнения (1), содержащего в правой части член, соответствующий наличию сосредоточенной силы), которое может быть выведено из упомянутого выше решения для дислокации [2] и получено путём перехода к автомодельным переменным в [6].

3. Вся задача. Очевидно, решение задачи термоупругости даёт симметричное относительно оси x распределение прогиба, не имеющего скачка. С учётом этого обстоятельства, решение всей задачи получается суммированием распределений прогиба для задачи упругости и для задачи термоупругости. Исходя из этого находят и напряжения.

4. Результаты. Качественный характер полученных результатов показан на Рис. 1 и Рис. 2.

5. Возможности приложений. Области приложения полученных результатов могут быть механика композитов, где включение может представлять собой достаточно сильно нагретый флюид, проникший по трещине, и геомеханика. В последнем случае интерес представляет проблема складкообразования и изменения напряжённо-деформированного состояния в массиве горизонтальных геологических слоёв вследствие образования межслойного внедрения, в частности магматического интрузива типа силла. В этом отношении данная работа продолжает предыдущие исследования авторов [7, 8]. Отметим, что получаемое на основе результатов настоящей работы теоретическое знание изменений напряжённо-деформированного состояния, с учётом роли температуры и термонапряжений, может быть использовано для оценок ожидаемого развития нарушенности (повреждённости) в массиве геологических слоёв, в том числе происходящего по механо-стимулируемому термоактивационному механизму, а также для оценок областей

возможного выхода деформирования за пределы упругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00954).

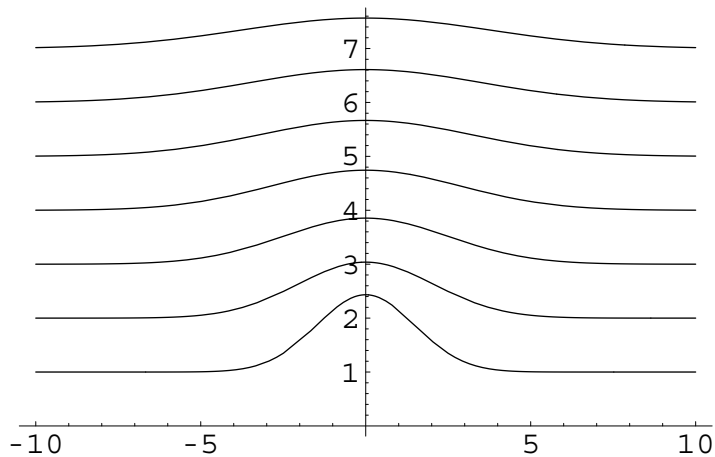


Рис. 1. Прогибы слоев спустя определенное время после момента внедрения включения; по оси абсцисс – безразмерная координата x , по оси ординат – безразмерный прогиб (числа условные).

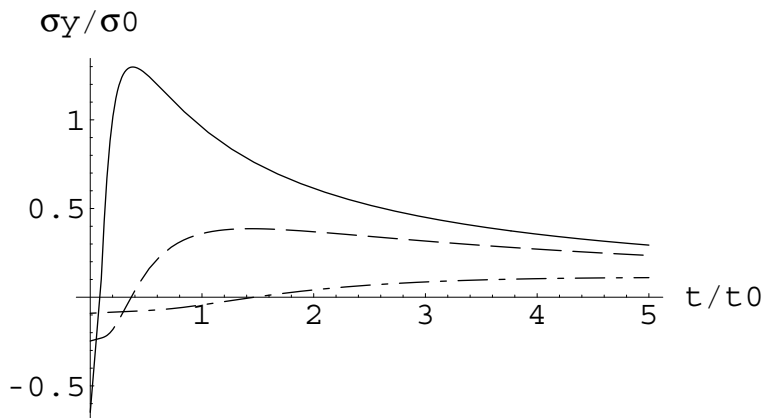


Рис. 2. Зависимость температурных напряжений (ось ординат) при $x=0$, на различных расстояниях от оси включения от времени (ось абсцисс); сплошная линия соответствует минимальному расстоянию, пунктирная линия – среднему, штрихпунктирная линия – максимальному (числа условные).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sonntag G. Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung // Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1957. Bd. 23. № 1/2. С. 3–8.
- [2] Салганик Р.Л. Приближение сплошной среды для описания деформированного слоистого массива // Изв. РАН, Механика твёрдого тела - МТТ. 1987. № 3. С. 48–56.
- [3] Салганик Р.Л. Смешанные статические граничные задачи для многослойных упругих структур, образованных работающими на изгиб слоями (континуальное приближение) // Известия РАН, Механика твёрдого тела - МТТ. 2004. № 1. С. 88–97.
- [4] Салганик Р.Л. Термо- и пороупругое деформирование многослойной структуры, слои которой работают на изгиб (континуальное приближение) // Известия РАН, Механика твёрдого тела - МТТ. 2005. № 3. С. 60–65.
- [5] Salganik R.L., Ustinov K.B. Crack-like formation of failure-decided angle points on middle planes of the layers resisting to bending in multi-layer structure - a continuum model // International Journal of Fracture, 2004. vol. 128, С. 41–48.
- [6] Устинов К.Б. Салганик Р.Л. Сингулярности в упругом континууме, эквивалентном многослойной структуре, слои которой работают на изгиб. Препринт ИПМ РАН №734, 2003. 34 с.
- [7] Салганик Р.Л., Мохель А.Н. Континуальный подход к описанию изгибного деформирования и складкообразования в пачках геологических слоёв. Препринт ИПМ РАН №771, 2004. 40 с.
- [8] Марков В.Г., Устинов К.Б. Задача складкообразования с точки зрения механики сплошных сред. Пример решения задачи о начальной стадии складкообразования. Препринт ИПМ РАН №760, 2004. 25 с.

Salganik R.L., Markov V.G., Mokhel A.N., Ustinov K.B. *Thermoelastic bending deformation in a multilayer structure caused by emerging of a thin interlayer inclusion whose temperature differs from the environmental one (a continuum approach)*. Thermoelastic bending deformation in a multilayer structure caused by emerging of a thin interlayer inclusion whose temperature differs from the environmental one is considered in the plain strain frame. At first, the solution of a problem on purely elastic deformation is obtained. Next, the thermoelastic problem is solved as a quasi-static one. Since the deflection is continuous everywhere in the latter solution, the final result is obtained as a sum of both above solutions. The inclusion is assumed emerging instantaneously, and its temperature being so high that the inclusion is able to flow between the adjacent layers. Thus, the bending deformation due to presence of the inclusion is controlled only by a small fraction of its thickness, which is regarded as a given constant. The corresponding calculations have been performed, and possible applications of the results are discussed.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЙ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ КОНИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Снопов А. И., Захаренко Е. О.

Ростовский госуниверситет

В работе [1] изложен метод расчета однорядных конических подшипников без учета вращения. Ниже предлагается метод расчета таких подшипников с учетом закрученности потока газа за счет вращения вала на основе алгоритма, изложенного в [2] для расчета цилиндрических газостатических подшипников с дискретным поддувом.

Предполагается, что оси шипа и подшипника параллельны, газ в смазочный слой подается через один ряд питателей диаметра d , давление в смазочном слое подшипника определяется из уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(h^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) = 2\Lambda e^{2\tilde{\xi} \sin \Phi} \frac{\partial (h\sqrt{\Pi})}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi|_{\Gamma} = p_1^2, \text{ на торцах,} \\ \frac{1}{\pi d_j} \int_{\Gamma_j} \Pi d\Gamma = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \text{ на выходе из питателя} \end{array} \right. \quad (2)$$

где

$$\Pi = \frac{p^2}{p_s^2}, \quad \tilde{\xi} = \frac{1}{\sin \Phi} \ln \frac{r}{R_B}, \quad h = \frac{H}{H_0} = (1 - \varepsilon \cos \varphi), \quad \Lambda = \frac{6\mu\omega R_B^2 \sin^2 \Phi}{p_s H_0},$$

Φ — угол полураствора конуса, R_B и R_H — радиусы торцов, N — количество питателей в ряду поддува, $p_1 = p_a/p_s$, $x_j = p_{dj}^2/p_s^2$, p_{dj} — давления на выходных кромках питателей, подлежащие определению в процессе решения задачи с учетом условий баланса расходов для каждого питателя. Для случая питателей типа «кольцевая диафрагма» эти условия имеют вид

$$M_j = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

для случая питателей типа «простая диафрагма» :

$$\begin{array}{l} \tilde{M}_j = M_j, \\ M_j = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{array}$$

где $\tilde{M}_j = \tilde{\alpha} \left(\frac{2}{\varkappa + 1} \right)^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}} \frac{\varkappa p_s \tilde{A}_j}{a_s} q \left(\frac{\tilde{p}_j^2}{p_s^2} \right)$ — секундный массовый расход газа через j -ю диафрагму; $M_j = \alpha \left(\frac{2}{\varkappa + 1} \right)^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}} \frac{\varkappa p_s A_j}{a_s} q \left(\frac{p_j^2}{\tilde{p}_j^2} \right)$ — секундный массовый расход газа через j -й карман; $Q_j = -\frac{\varkappa}{24\mu a_s^2} \int_{\Gamma_j} h^3 \frac{\partial p^2}{\partial \nu} d\Gamma$ — секундный массовый расход

газа через смазочный слой в окрестности j -го питателя. $\tilde{A}_j = \frac{\pi \tilde{d}_0^2}{4}$, $A_j = \pi d H_j$; \tilde{d}_0 — диаметр минимального сечения питателя, \tilde{p}_j — давление в кармане, p_j — давление в слое на кромке питателя.

В случае, когда $\omega = 0$ и $\varepsilon = 0$ система уравнений (1)–(2) имеет точное решение [1], из которого следует, что давление на кромке питателя p_{d_0} связано со среднеквадратичным давлением на линии расположения питателей p_{m_0} зависимостью

$$\bar{p}_{m_0}^2 = p_1^2 + \frac{x_0 - p_1^2}{E} \lambda_1 N,$$

где $x_0 = p_{d_0}^2/p_s^2$, $\bar{p}_{m_0} = p_{m_0}/p_s$, точные значения величины E представлены в [1].

При $\varepsilon \neq 0$ решение уравнений (1)–(2) затруднительно, поэтому будем полагать, что при $\varepsilon \neq 0$ и $\omega \neq 0$ для каждого участка линии непрерывного поддува ($\varphi_j - \pi/N, \varphi_j + \pi/N$) справедливо равенство

$$\bar{p}_{m_j}^2 = p_1^2 + \frac{x_j - p_1^2}{E} \lambda_1 N,$$

где $\bar{p}_{m_j} = p_{m_j}/p_s$, $\bar{p}_{m_j} = \frac{N}{2\pi} \int_{\varphi_j - \frac{\pi}{N}}^{\varphi_j + \frac{\pi}{N}} \Pi d\varphi$ при $\tilde{\xi} = \lambda$. Такой способ моделирования

приводит к эквивалентности по расходам (а не по давлениям) рядов питателей и линии поддува на каждом участке.

Допустим, что давление на линии непрерывного поддува распределено по закону

$$\Pi^2 = \bar{p}_{m_0}^2 + \varepsilon \operatorname{Re}(T e^{-i\varphi}) + o(\varepsilon^2),$$

где T — комплексный параметр, подлежащий определению.

Сделав замену $\xi = \frac{L(k-1) - \tilde{\xi}}{(-1)^k \lambda_k}$, $k = 1, 2$, $L = \lambda_1 + \lambda_2$, перепишем систему (1)–(2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right) + \lambda_k^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) = 2\lambda_k^2 \Lambda e^{2L_k(\xi)} \frac{\partial(h\sqrt{\Pi})}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

где $L_k(\xi) = [L(k-1) - (-1)^k \lambda_k \xi] \sin \Phi$, $k = 1, 2$.

$$\Pi(0, \varphi) = p_1^2, \quad \Pi(1, \varphi) = \bar{p}_{m_0}^2 + \varepsilon \operatorname{Re}(T e^{-i\varphi}). \quad (4)$$

Функцию $\Pi(\xi, \varphi)$ будем искать в виде ряда

$$\Pi(\xi, \varphi) = \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi, \varphi) + o(\varepsilon^2).$$

$\Pi_0(\xi)$ — решение краевой задачи (3)–(4) при $\varepsilon = 0$, имеющее вид

$$\Pi_0(\xi) = (\bar{p}_{m_0}^2 - p_1^2)\xi + p_1^2.$$

Функция $\Pi_1(\xi, \varphi)$ определяется как решение краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \xi^2} + \lambda_k^2 \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi^2} &= 2\lambda_k^2 \Lambda e^{2L_k(\xi)} \left(\sin \varphi \sqrt{\Pi_0} + \frac{1}{2\sqrt{\Pi_0}} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi} \right), \\ \Pi_1(0, \varphi) &= 0, \quad \Pi_1(1, \varphi) = \operatorname{Re}(T e^{-i\varphi}), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Представим $\Pi_1(\xi, \varphi)$ в виде

$$\Pi_1(\xi, \varphi) = \operatorname{Re}(y(\xi)e^{-i\varphi}),$$

при этом $y(\xi)$ является решением краевых задач

$$\begin{aligned} y''(\xi) - \lambda_k^2 \left(1 - \frac{\Lambda e^{2L_k(\xi)} i}{\sqrt{\Pi_0}} \right) y(\xi) &= 2\lambda_k^2 \Lambda e^{2L_k(\xi)} i \sqrt{\Pi_0}, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = T, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (6)$$

Функцию $y(\xi)$ будем искать в следующем виде

$$y(\xi) = T(\xi + w_1(\xi)) + w_2(\xi), \quad k = 1, 2.$$

Тогда система (6) может записана следующим образом

$$\begin{aligned} w_i''(\xi) - \lambda_k^2 \left(1 - \frac{\Lambda e^{2L_k(\xi)} i}{\sqrt{\Pi_0}} \right) w_i(\xi) &= g_i, \\ w_i(0) &= 0, \quad w_i(1) = 0, \quad i = 1, 2 \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $g_1 = \lambda_k^2 \left(1 - \frac{\Lambda e^{2L_k(\xi)} i}{\sqrt{\Pi_0}} \right) \xi$, $g_2 = 2\lambda_k^2 \Lambda e^{2L_k(\xi)} i \sqrt{\Pi_0}$.

Для решения уравнений (7) используем метод Бубнова-Галеркина. Полагаем

$$w_i = \sum_{s=1}^S a_{is} \varphi_s, \quad i = 1, 2,$$

где φ_s — линейно-независимые функции, удовлетворяющие условиям $\varphi_s(0) = 0$, $\varphi_s(1) = 0$, a_{is} — коэффициенты, определяемые из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^S a_{is} A_{sj} = B_{ij}.$$

Таким образом, чтобы полностью определить функцию $y(\xi)$ нужно из условий баланса расходов определить T .

Несущая способность подшипника определяется по формуле

$$F = \frac{1}{2} \sin 2\Phi \int_{RB}^{RH} r \int_0^{2\pi} p_s \sqrt{\Pi} \cos \varphi d\varphi dr.$$

На рисунке представлены результаты расчета коэффициента несущей способности для подшипника со следующими параметрами: $R_B = 0.005$ м, $R_H = 0.025$ м, $\Phi = 12^\circ$, $\varepsilon = 1.4$, $\mu = 1.8 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $p_a = 0.098$ МПа, $p_s = 0.419$ МПа, $d = 0.0006$ м, $n = 12$.

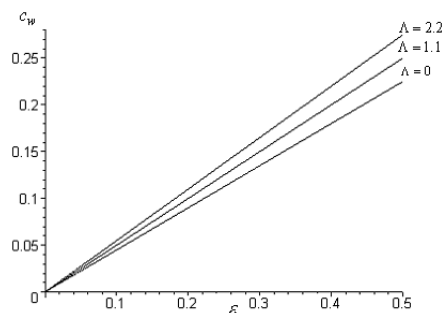


Рис. 1. График зависимости безразмерной нагрузки от относительного эксцентриситета

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Снопов А. И. К теории полноохватных газостатических подшипников // Механика деформируемых тел: Межвузовский сборник научных трудов. ДГТУ, Ростов-на-Дону. 1994. С. 89–96.
- [2] Захаренко Е. О., Снопов А. И., Мордвинкин В. А. Обобщенный алгоритм расчета статических характеристик радиальных газостатических подшипников // Вестник Донского государственного технического университета. Серия «Вопросы машиноведения и конструирования машин», Ростов-на-Дону. 1999. С. 122–129.

Snopov A. I., Zakharenko E. O. *The investigation of the pressure field in a viscous gas between conical surfaces in the rotated stream.* It is proposed a hydrodynamic model on calculation of pressure fields and their integral characteristics arising in conical stationary gas bearings.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДЫ MAPLE ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ О ДЕФОРМАЦИЯХ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛ

Сухов Д. Ю.

НИИ МхПМ РГУ (НИИ Механики и Прикладной Математики РГУ)

Описаны процесс работы и структура программы, использующей полуобратный метод для решения задач о деформациях нелинейно упругих тел канонической формы. Работа программы проиллюстрирована примером решения задачи о кручении и растяжении полого цилиндра при наличии винтовой дислокации.

В настоящее время при решении различных теоретических и прикладных задач механики сплошной среды большую популярность получила программная среда Maple. Однако, чтобы с успехом работать в ней, нынешний исследователь должен совмещать навыки как математика, так и программиста.

Целью представленной работы являлось создание полностью самостоятельного программного продукта, который позволял бы пользователю осуществить анализ возможно более широкого класса задач о конечных деформациях нелинейно упругих тел канонической формы. Для выбранной конкретной задачи необходимо было получить уравнение равновесия и граничные условия, автоматически решить эту систему и в качестве результата получить зависимости между параметрами данной краевой задачи. Также необходимо было предусмотреть возможность фиксировать доступные параметры, свободно выбирать материал тела и т.д. Подобная система уже разрабатывалась ранее в работах [4,5], но была практически лишена стандартного пользовательского интерфейса.

В версии Maple 8, вышедшей в апреле 2002 года, появилась возможность построения графического интерфейса – технология Maplelets, реализованная с применением технологии Java. Она является удобным средством для использования именно в среде пошагового интерпретатора Maple, так как не создает отдельного исполнимого модуля и способна работать независимо от шагов, выполненных на предыдущем этапе вычислений. Теперь с помощью обычного интерфейса среды Windows можно организовать получение от пользователя любой необходимой информации; существует возможность выдачи результатов (например, графиков) на экран также внутри стандартного окна Windows-интерфейса.

Во время работы программы у пользователя запрашиваются следующие ключевые элементы:

◇ Комбинация отсчетной и текущей систем координат (каждая из них может быть цилиндрической, сферической или декартовой).

◇ Вид деформации (полуобратное представление), доступной для данной комбинации систем координат.

◇ Вид упругого потенциала энергии (на текущий момент в систему включены полный материал Блейтца и Ко и отдельно два его частных случая: упрощенная и гипотетическая модель, а также материал Мурнагана).

◇ Доступные для изменения параметры, зависящие от конкретной задачи.

В качестве “рабочего примера” программы, а также для тестирования и отладки интерфейсной и вычислительной части, была рассмотрена задача об одновременном кручении и растяжении полого цилиндра.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} D &= 0 \\
 D_{rR}|_{r=r_0} &= 0, D_{r\Phi}|_{r=r_0} = 0, D_{rZ}|_{r=r_0} = 0 \\
 D_{rR}|_{r=r_1} &= 0, D_{r\Phi}|_{r=r_1} = 0, D_{rZ}|_{r=r_1} = 0 \\
 \int_S T_{rR} dS &= 0 \\
 \int_S T_{\varphi\Phi} dS &= 0 \\
 \int_S T_{ZZ} dS &= Q \\
 \int_S RT_{r\Phi} dS &= 0 \\
 \int_S RT_{rZ} dS &= 0 \\
 \int_S RT_{\varphi Z} dS &= M
 \end{aligned} \tag{1}$$

Полубратное представление для этой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} R = P(r) \\ \Phi = \varphi + \psi z \\ Z = \lambda z \end{cases} \tag{2}$$

где λ – коэффициент относительного удлинения, ψ – относительный угол закручивания.

Данная задача имеет известное аналитическое решение, если в качестве материала цилиндра использовать упрощенный материал Блейтца и Ко, упругий потенциал которого имеет следующий вид:

$$\frac{\mu}{2} \left(\frac{I2}{I3} + 2\sqrt{I3} - 5 \right) \tag{3}$$

Результатом работы программы является зависимость между относительным углом закручивания и коэффициентом относительного удлинения, графически представленная пользователю. В качестве промежуточных результатов пользователь получает сгенерированную краевую задачу – уравнение равновесия и граничные условия.

Полученное численное решение сравнивалось с аналитическим решением для функции радиальной деформации $P(r)$. Расхождение менее 0.003% дало возможность убедиться в хорошей работе вычислительного ядра программы и перейти к решению более сложных задач, не имеющих аналитического решения.

Для более общего варианта модели Блейтца и Ко с упругим потенциалом вида

$$\frac{\mu\beta}{2} \left(I1 + \frac{2}{\sqrt{I3}} - 5 \right) + \frac{\mu(1-\beta)}{2} \left(\frac{I2}{I3} + 2\sqrt{I3} - 5 \right) \quad (4)$$

был исследован случай кручения и растяжения нелинейного упругого цилиндра при наличии винтовой дислокации.

Полуобратное представление выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} R = P(r) \\ \Phi = \varphi + \psi z \\ Z = a\varphi + \lambda z \end{cases} \quad (5)$$

где λ – коэффициент относительного удлинения, ψ – относительный угол закручивания, a – параметр дислокации.

Для данной задачи были получены зависимости между относительным углом закручивания, относительным удлинением и параметром дислокации, а также графики зависимостей относительного удлинения и относительного угла закручивания от параметра дислокации для разных значений материального параметра β .

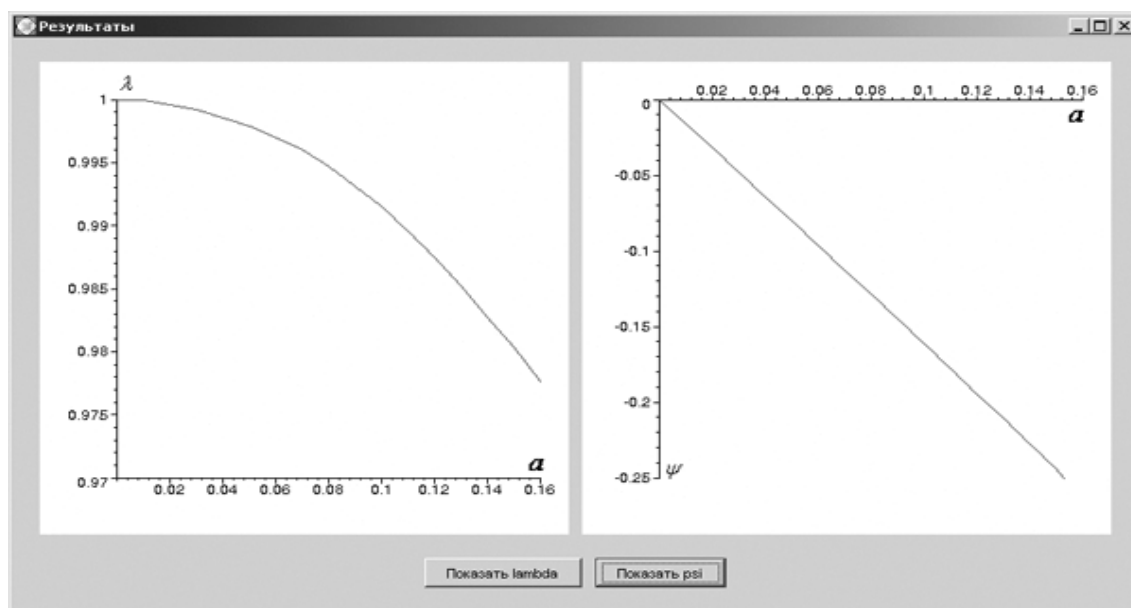


Рис. 1. Результаты, выдаваемые программой

Полученные результаты можно кратко изложить следующим образом: при отсутствии дислокации после приложения момента в ту или иную сторону цилиндр начинает закручиваться в эту же сторону, при этом удлиняясь. В случае наличия дислокации цилиндр при нулевом моменте уже является закрученным; при приложении момента в одну сторону он сразу начинает закручиваться далее и удлиняться, а в другую – сначала укорачивается и раскручивается, а при дальнейшем увеличении момента – закручивается в другую сторону и удлиняется.

В дальнейших планах работы, прежде всего – расширить программу на более широкий класс задач, в том числе не сводимых к одномерным; добавление блоков, связанных с автоматическим выводом и последующим численным анализом

линеаризованных уравнений нейтрального равновесия для исследования устойчивости. Также весьма желательно предоставить пользователю выбор из нескольких альтернативных комбинаций материальных параметров, а в перспективе - все математически интересные варианты построения зависимостей для данного вида деформации. В настоящий момент ведется работа по выносу ряда вычислительных операций из среды Maple во внешнюю среду с использованием языка C# (технология Microsoft .Net), что позволит существенно ускорить работу вычислительного блока.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] В.Говорухин, В.Цибулин Компьютер в математическом исследовании. Maple, MATLAB, LaTeX. С.-П.: Питер, 2001. 624 с.
- [3] Справочная система Maple 8.00, Waterloo Maple Inc., 2002.
- [4] Гавриляченко Т. В., Карякин М. И. Методы компьютерной алгебры в задачах нелинейной теории упругости // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 2-й Международной конференции. Т. 1 Ростов н/Д.: МП Книга, 1996. С. 30-34.
- [5] Гавриляченко Т. В., Карякин М. И. Об особенностях нелинейно-упругого поведения сжимаемых тел цилиндрич. формы при кручении // ПМТФ 2000 41(2) С. 188-193.

Sukhov D. Y. *Using the Maple environment for visualisation of solutions of nonlinear elastic bodies deformation problems.* In this paper the process of work and program structure are described. The program uses semi-inverse method to solve elastic nonlinear bodies deformation problems. Examples of twist and stretch of a hollow cylinder with and, separately, without presence of screw dislocation are demonstrated.

МЕТОД СВЕДЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ К РЕШЕНИЮ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Трубчик И. С.

Ростовский госуниверситет

НИИ механики и прикладной математики

344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1
e-mail: trubchik@math.rsu.ru

Излагается метод сведения к решению парных интегральных уравнений смешанных задач для полубесконечных упругих областей, неоднородных по одной из координат. Изменение упругих характеристик среды по координате, нормальной к поверхности воздействия нагрузки, носит общий характер. При построении трансформант ядер интегральных уравнений используется метод моделирующих функций. Построенные численно трансформанты аппроксимируются выражениями специального вида, что позволяет получить замкнутое решение приближенных интегральных уравнений. Построенные приближенные решения являются асимптотически точными при малых и больших значениях безразмерного параметра.

Как известно, смешанные задачи теории упругости для полуограниченных областей сводятся к решению интегральных уравнений с помощью интегральных преобразований для известных на границе и искомым величин напряжений или перемещений. Выбор типа интегрального преобразования зависит от геометрии упругой области. Для решения полученных интегральных уравнений необходимо построить функцию трансформанты ядра. Данная функция может быть либо найдена аналитически, либо построена с помощью численных методов.

В данной работе предлагается полу-аналитический метод сведения смешанных задач для полубесконечных неоднородных по какой-либо одной координате областей (слой, пространственный клин, цилиндр, конус) к парным интегральным уравнениям.

Для построения парного интегрального уравнения, соответствующего задаче, используются уравнения пространственной теории упругости в декартовой, цилиндрической или сферической системе координат. Подставляя в него соотношения закона Гука и интегрируя, получаем систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно функций – трансформант интегрального преобразования. Так как данные функции представляют собой координаты вектор-функции перемещений (в контактных задачах) или напряжений (в задачах о равновесных трещинах в упругой среде), то очевидно, данную систему удобно было бы представить в векторном виде:

$$\frac{d\tilde{Y}}{dx} = A\tilde{Y} \quad (1)$$

Причем размерность вектор-функции $\vec{Y}(\alpha x)$ увеличивается в двое по сравнению с рангом вектор-функции трансформанты вследствие необходимости учета первых производных от данных функций в краевых (граничных) условиях. Вид и ранг матрицы \mathbf{A} обусловлен геометрией неоднородной среды и был приведен в работах [12]– [10]. Краевые условия для уравнения (1) выписываются из условий на границе неоднородной области.

Решение векторного дифференциального уравнения (1) строится методом модулирующих функций, разработанным на основе метода, предложенного в работе [1], для решения задач динамики для неоднородных стратифицированных сред, который предполагал выделение экспоненциальных составляющих при построении матрицы Грина, что позволило получить устойчивый алгоритм численной реализации решения, так как проблема сводилась к отысканию некоторых модулирующих функций ограниченной вариации.

Далее, вектор-функция решения уравнения (1) представляется в виде линейной комбинации векторов фундаментальной системы решений:

$$\vec{Y}(\alpha, x) = \sum_{i=1}^r a_i(\alpha) \vec{\Psi}_i^F(\alpha, x) \quad (2)$$

где r – ранг вектор-функции $\vec{Y}(\alpha x)$, векторы фундаментальной системы решений в (2) представимы в виде:

$$\vec{\Psi}_i^F(\alpha, x) = \mathbf{T}_i(\alpha, x) \vec{\Psi}_i(\alpha, x),$$

где \mathbf{T}_i – диагональные матрицы, на диагонали которых расположены компоненты векторов $\vec{\mathbf{t}}_i(\alpha, x)$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Векторы $\vec{\Psi}_i$ являются собственными векторами матриц \mathbf{A} для случая однородной среды, $\vec{\mathbf{t}}_i$ – векторы модулирующих функций, связанных с неоднородностью среды, $a_i(\alpha)$ – некоторые коэффициенты, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений, выписываемой из краевых условий. Данный прием позволяет выделить в выражении (2) составляющие $\vec{\Psi}_i$, затрудняющие процесс численной реализации решения. Компоненты векторов $\vec{\Psi}_i$ могут быть как экспоненциальными, так и тригонометрическими функциями (а также гипергеометрическими и цилиндрическими функциями) в зависимости от геометрии среды. Векторы модулирующих функций $\vec{\mathbf{t}}_i(\alpha, x)$ определяются из задач Коши при фиксированных значениях α .

$$\frac{d\vec{\mathbf{t}}_i}{dr} = \mathbf{B}_i \vec{\mathbf{t}}_i, \quad (i = 1, \dots, r) \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad (3)$$

где элементы матрицы \mathbf{B}_i имеют вид:

$$B_{ij} = (\Psi_i^j)^{-1} \left[\sum_{k=1}^6 A_{jk} t_i^k \Psi_i^k - \frac{d\Psi_i^j}{dr} \right]$$

Начальные условия для $\vec{\mathbf{t}}_i$ определяются видом решения векторного уравнения (1) для случая однородной среды.

Окончательно компоненты вектора решений $\vec{Y}(\alpha x)$ можно выписать в виде:

$$Y^k = \sum_{i=1}^r a_i t_i^k \Psi_i^k \quad (4)$$

Подставив трансформанты в виде (4) в формулу интегрального преобразования, получим значения искомых в задаче величин перемещений либо напряжений.

В работах [12]– [10] было показано, что в для таких неоднородных областей, как полоса, клин, цилиндр, построенная функция трансформанты интегрального уравнения $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= A\alpha + O(\alpha^3), \quad \alpha \rightarrow 0 \\ L(\alpha) &= 1 + B\alpha^{-1} + C\alpha^{-2} + O(\alpha^{-3}), \quad \alpha \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5)$$

В [9] показано, что функцию, обладающую свойствами (5), можно аппроксимировать выражениями вида

$$L(\alpha) = thA\lambda\alpha(L_{\Pi}^N(\alpha\lambda) + L_{\Sigma}^M(\alpha\lambda))$$

$$L_{\Pi}^N(\alpha\lambda) = \prod_{n=1}^N \frac{\alpha^2 + \delta_n^2 \lambda^{-2}}{\alpha^2 + \gamma_n^2 \lambda^{-2}},$$

$$L_{\Sigma}^M(\alpha\lambda) = \sum_{k=1}^M \frac{B_k}{\alpha^2 + \eta_k^2 \lambda^{-2}}$$

здесь $\delta_n, \gamma_n, \eta_k$ – коэффициенты аппроксимации.

Интегральное уравнение смешанной задачи сводится к решению парного интегрального уравнения, решение которого для функции вида (5) найдено в аналитическом виде [9] и является асимптотически точным при $0 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^0$, где λ^*, λ^0 – некоторые фиксированные значения λ .

Автор благодарит проф. В.М.Александрова и д.ф.-м.н. С.М.Айзиковича за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-96551-р2003юга.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и матем. физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.

- [2] Трубчик И.С. Внедрение штампа в неоднородный клин // Труды VI международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды". Ростов-на-Дону. 12–14 июня 2000г. СКНЦ ВШ. Ростов-на-Дону. 2001. Т. 1. С. 216–220.
- [3] Айзикович С.М., Трубчик И.С., Шклярова Е.В. Внедрение штампа в неоднородную по глубине полосу // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 61–71.
- [4] Айзикович С.М., Трубчик И.С. Контактная задача для упругого цилиндра, неоднородного по радиусу // Труды VII международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды" Ростов-на-Дону, 2001 г. СКНЦ ВШ. Ростов-на-Дону. 2002. С. 8–13

Trubchik I.S. *The method of reduction of mixed problems for half-infinite areas to the solution of dual-integral equations.* The method of reduction of mixed problems to the solution of dual-integral equations is set out for half-infinite areas which are non-homogeneous with someone coordinate. Change of medium elastic characteristics is arbitrary with the coordinate, which is normal to loaded surface. The method of modelling functions is used for construction of kernel transforms of integral equations. Transforms constructed numerically are approximated by special expressions. This fact permits to obtain closed solution of approximate integral equations. It is proved that the constructed approximate solutions are asymptotically accurate as for small as for large values of the dimensionless parameter.

ОБРАТНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ С НЕРОВНОЙ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Углич П. С.

*Ростовский государственный университет,
механико-математический факультет.*

Рассматривается плоская задача о вынужденных установившихся колебаниях упругой полосы с неровной нижней границей с неровностью, локализованной на конечном отрезке. Для решения прямой задачи предлагаются три метода: метод линеаризации, метод граничного элемента, а также приближение Борна. Сформулирована обратная задача об определении формы неровного участка границы по информации о поле перемещений на верхней части границы. На основе метода линеаризации обратная задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром, которое решается с помощью метода регуляризации Тихонова.

Введение.

Задачи о колебаниях слоистых структур с неровностями часто возникают в акустике, сейсмологии, технической диагностике и физике твердого тела ([1]- [8]).

В настоящей работе рассматривается плоская задача о вынужденных установившихся колебаниях упругой полосы с неровной нижней поверхностью. Построены граничные интегральные уравнения для решения прямой задачи, а также соотношения, позволяющие по перемещениям на неровном участке границы найти перемещения в любой точке полосы. Затем ставится обратная задача: найти по информации о перемещениях на некотором участке верхней границы форму неровного участка нижней границы. В рамках метода линеаризации она сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Для решения уравнения используется метод регуляризации Тихонова (см. [9], [10]).

Постановка задачи.

Рассмотрим установившиеся колебания упругой полосы $|x_1| < \infty$, $\varepsilon f(x_1) \leq x_2 \leq h$ с неровной нижней границей. В дальнейшем считаем, что $f(x_1) = 0$ при $x \notin [a, b]$, $f(x_1) \in C^1[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$. Обозначим область, занятую полосой через S , верхнюю поверхность полосы через L_+ , нижнюю — через L_- , неровный участок — Γ_f .

В случае вынужденных колебаний для полосы выполняются следующие уравнения [11]:

$$(1 - 2\nu)^{-1} u_{i,i j} + \Delta u_j + \varkappa_2^2 u_j = 0 \quad (1)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, $\varkappa_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ — волновое число поперечных волн, G — модуль сдвига, ρ — плотность полосы.

$$\sigma_{12}|_{x_2=1} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=1} = q(x_1), \quad \sigma_{n\tau}|_{x \in L^-} = \sigma_{nn}|_{x \in L^-} = 0 \quad (2)$$

Замыкают постановку задачи условия излучения, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [12].

Формулировка системы граничных интегральных уравнений для задачи.

Пусть $U_i^{(m)}$ - фундаментальное решение для слоя, границы которого свободны от напряжений. Используя формулы Сомильяны [11] и принимая во внимание краевые условия и условия излучения, получаем:

$$u_m(\xi) = u_m^{et}(\xi) - \int_{\Gamma_f} u_k(x) \sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi) n_l dl_x \quad (3)$$

где $u_k^{et}(\xi)$ — поле смещений в полосе с ровными границами от действия нагрузки $q_j(x)$, $j = 1, 2$.

Устремляя в (3) $\xi \rightarrow y \in \Gamma_f$ и используя теоремы о предельных значениях потенциала двойного слоя [?], получаем систему граничных уравнений относительно компонент вектора перемещений на неровной части границы:

$$c_{mi} u_i(y) = u_m^{et}(y) - \text{v.p.} \int_{\Gamma_f} u_i(x) \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j dl_x, \quad y \in \Gamma_f \quad (4)$$

Здесь $c_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$, если точка y является внутренней точкой кривой Γ_f , а интеграл в (4) понимается в смысле главного значения по Коши.

Полученная система (4) может быть исследована численно на основе идей метода граничного элемента [13].

Обратная задача.

Предположим, что известно поле перемещений на некотором конечном участке верхней границы. Исходя из этой информации, определим неизвестную форму неровного участка нижней границы. Границы неровного участка считаются известными. Предположим также, что $\varepsilon \ll 1$

Разложим граничные значения $u_i(x_1, x_2)$ и при $x_2 = \varepsilon f(x_1)$ в ряд Тейлора по x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, \varepsilon f(x_1)) &= u_i(x_1, 0) + \varepsilon f(x_1) u_{i,2}(x_1, 0) + \dots \\ \sigma_{ij}(x_1, \varepsilon f(x_1)) &= \sigma_{ij}(x_1, 0) + \varepsilon f(x_1) \sigma_{ij,2}(x_1, 0) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Вектор нормали представляется в виде:

$$\bar{n} = \{\varepsilon f'(x_1), -1\}$$

В работе [7] построено формальное решение задачи в виде ряда по степеням ε . Аналогично будем искать решение исходной задачи (3)-(2).

$$u_i = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \dots \quad (6)$$

$u_i^0 = u_i^{et}$ — совпадает с «эталонным» решением для ровного слоя. Исходя из соотношений Сомильяны (2), найдем:

$$\begin{aligned} u_m^1(\xi) &= \int_a^b \{u_1^0(x_1) [f(x_1) \sigma_{12,2}^{(m)}(x_1, 0; \xi) - f'(x_1) \sigma_{11}^{(m)}(x_1, 0; \xi)] + \\ &\quad + u_2^0(x_1) f(x_1) \sigma_{22,2}^{(m)}(x_1, 0; \xi)\} dx_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее равенство после некоторых преобразований представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с гладким ядром относительно функции

f . Решение такого уравнения, как известно, является некорректной задачей и требует использования специальных численных методов. В настоящей работе для его решения использован метод регуляризации Тихонова [9], [10].

Численные результаты.

На рисунке 1. показан результат численного решения интегрального уравнения (4) при $\alpha_2 = 1$ и $\varepsilon = 0, 2$. Сплошной линией показана вещественная часть горизонтального перемещение, точками — его мнимая часть. Здесь и всюду в дальнейшем $f(x_1) = \sin(\pi x_1)$.

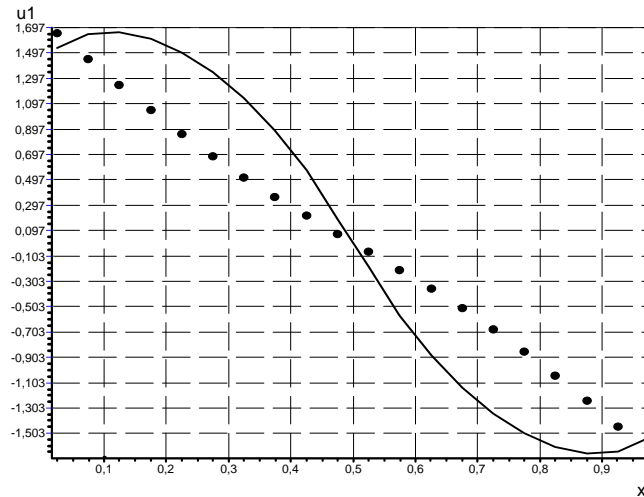


Рис. 1. Решение прямой задачи.

На рисунке 2. показан график величины $\delta = Re(u_1 - u_1^0)$ на верхней поверхности слоя. Сплошной линией показана δ , найденная из решения системы (4) с использованием формул Сомильяны (3). Точками показана δ , полученная методом линеаризации из соотношения (7), крестами показана δ , найденная с помощью приближения Борна (эталонное решение u^0 подставлялось в формулу (3)).

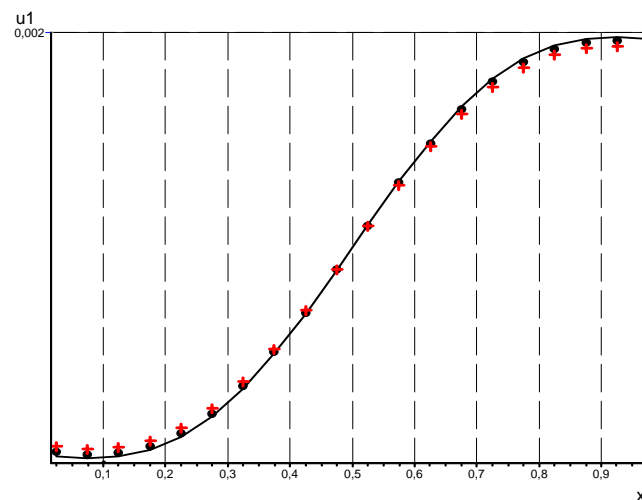


Рис. 2.

Далее представлены результаты численного эксперимента по восстановлению формы неровности. Численные эксперименты производились следующим образом: сначала для

отыскания неизвестных перемещений на неровном участке границы решалась система интегральных уравнений (4), затем для найденных перемещений с помощью соотношений Сомильяны (3) найдены поля перемещений на $[c, d]$ — участке верхней поверхности полосы. Найденные перемещения использованы в качестве исходной информации для решения обратной задачи (в линеаризованной постановке — для решения интегрального уравнения (7)). Принято $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$, в качестве правой части (7) используется вещественная часть u_1 .

На рис. 3 приведены результаты расчета при $\alpha_2 = 5$, $\varepsilon = 0.01$, для решения СЛАУ использовался метод Воеводина с автоматическим подбором параметра регуляризации по критерию обобщенной невязки. Параметр регуляризации $\alpha = 1,2537 \cdot 10^{-10}$. Сплошной линией изображена восстановленная форма неровности, точками — точная.

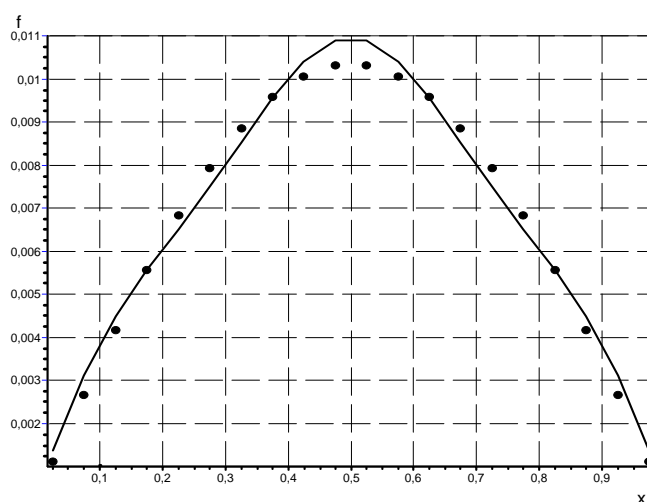


Рис. 3. Решение обратной задачи.

Заключение. В рамках метода линеаризации обратная геометрическая задача об определении формы неровного участка границы сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Численные эксперименты показывают, что данный подход эффективен только при малой амплитуде неровности, не превышающей одну десятую ширины полосы. При большей амплитуде неровности следует использовать итерационные схемы решения обратных задач [15].

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущей научной школы НШ - 2113.2003.1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981, 288 с.
- [2] Ляпин А.А. О возбуждении волн в слоистой среде с локальным дефектом. // Прикл. мех. и тех. физика. 1994. №5. С. 87-91.

- [3] *Мухсичаочян А., Белубекян М.* Распространение SH-волн в упругом слое с неровной поверхностью. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Зб. мистить праці. Т.2. Ін-т прикл. пробл. мех. і мат. НАН України. Львів, 2000. С. 212-215.
- [4] *Roberts R.A.* Elastodynamic scattering by a surface-breaking void // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85, №2.
- [5] *Ватульян А.О., Коренский С.А.* Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости. // ПММ, 1997, т. 61, в. 4, С. 639-646.
- [6] *Ватульян А.О., Коренский С.А.* О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве. // Доклады РАН, 1995, т. 334, №6. С. 53-755
- [7] *Ватульян А.О., Углич П.С.* Определение формы неровной границы раздела между упругой и жидкой средами. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский Регион 2001 г., Спецвыпуск Математическое моделирование. С. 44-46
- [8] *Углич П.С.* Об антиплоских колебаниях слоя с неровной нижней границей. Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика. Труды III-й школы-семинара, Ростов-на-Дону, 15-19 ноября, 2004. С. 137-139.
- [9] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [10] *Тихонов А.Н., Степанов В.В., Гончарский А.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
- [11] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1980. 872 с.
- [12] *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 320 с.
- [13] *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
- [14] *В.Т. Гринченко, В.В Мелешко.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка. 1981. 284 с.
- [15] *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988 г. 288 с.

Ugлич P.S. *An inverse geometrical problem for elastic layer with rough bottom surface.* Flat problem of the enforced oscillations of elastic layer with rough bottom surface is considered. Solution of the form reconstruction problem for the bottom surface is developed. To solve the direct problem, three following techniques are used: the small parameter method, the boundary elements method, and Born approximation. Inverse problem solving is reduced to solving of Fredholm integral equation of the first kind with smooth kernel. Results of numerical experiments are depicted.

МОДЕЛЬ ФОРМОВКИ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Юдин С. А.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.
г. Ростов-на-Дону*

Обсуждаются аспекты выбора модели пластической формовки оболочек, настраиваемых на заданную нагрузку потери устойчивости. Задача относится к классу существенно геометрически и физически нелинейных. Рассмотрен вариант задания определяющих уравнений на основе специальной нормировки, позволяющий относить результаты к группам материалов.

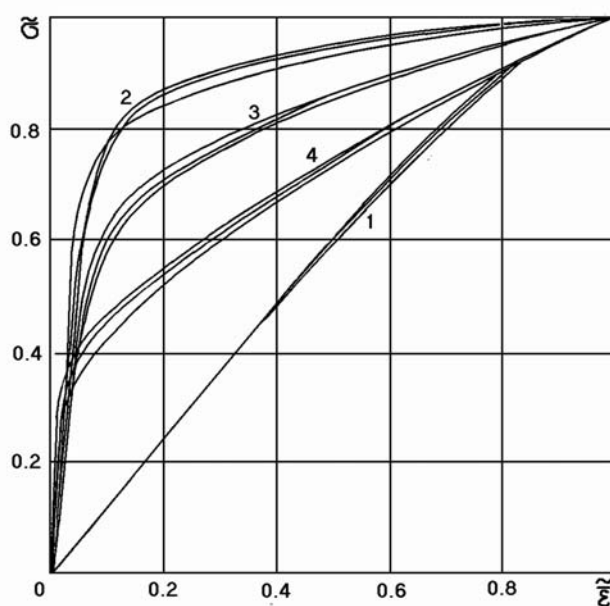
При изготовлении оболочек из листовых материалов распространен способ формовки методом свободной вытяжки. Листовая заготовка зажимается между двумя круглыми фланцами и нагружается с одной из сторон давлением воздуха или жидкости, вызывающим превращение пластинки в куполообразную оболочку за счет пластических деформаций. Этот способ используется также для построения диаграмм растяжения, определяющих свойства материала, и для испытаний листовых материалов на предел деформируемости [1, 2]. Существует аналогичный метод формовки оболочек вращения из цилиндрических заготовок. Имеется также множество других технологических приемов пластического формоизменения: штамповка, раздача, обкатка, гибка и др. [3].

При постановке задач о поведении материалов и конструкций за пределом упругости важной составляющей моделей являются представления о кривых упрочнения, определяющих пластические свойства. В деформационной теории пластичности широко используется физическая зависимость между интенсивностью напряжений и истинных (логарифмических) деформаций для описания сложных нелинейных напряженно-деформированных состояний. Многочисленными опытами для металлов подтверждается единство таких зависимостей, полученных при простом растяжении, сжатии и кручении образцов.

Существуют многочисленные способы аппроксимаций зависимости $\sigma_{int} = F(\bar{\varepsilon}_{int})$ для достаточно узких классов материалов. При этом диаграммы деформирования могут отличаться не только для разных материалов, но и для конкретной заготовки из данного материала. Наибольшее применение для аппроксимаций находят степенной и линейно-степенной законы параболического типа. Используются и другие функции.

Обычно определение констант аппроксимаций требует наличия полной диаграммы растяжения, сжатия или кручения. Однако в работах [4, 5] развит подход, который рационален и удобен для практического применения. Он позволяет строить весьма универсальные аппроксимации без необходимости иметь полные диаграммы испытаний материалов. Описание свойств выполняется в координатах безразмерных напряжений $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_l$ и относительных истинных деформаций $\tilde{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}/\bar{\varepsilon}_l$, где σ_l , $\bar{\varepsilon}_l$ — предельные (временные) напряжения и деформации, $\bar{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon)$, ε — компоненты тензора деформаций.

Координаты $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\varepsilon}$ образуют безразмерную плоскость, где описывается процесс пластического растяжения и отражаются принципы подобия. Перевод диаграмм испытаний различных материалов на эту плоскость дает четкое разделение по группам, определяющим свойства близких между собой материалов. Группы отличаются по очертанию кривых и их положению, но внутри групп разброс кривых упрочнения материалов весьма незначителен [4]. Таким образом, построение диаграмм растяжения на плоскости $\tilde{\sigma} - \tilde{\varepsilon}$ выявляет возможность группирования материалов. Материалы, составляющие группы, отличаются степенью пластичности. Первой группе соответствует весьма малоупругие стали типа пружинных. Ко второй группе относятся малоупругие титановые сплавы невысокой прочности. В третью группу входят материалы средней пластичности типа алюминиевых сплавов и жаропрочных легированной сталей средней прочности. Четвертую группу образуют пластичные литейные бронзы (рисунок). Пятой группе соответствуют высокопластичные нержавеющие аустенитные стали.



Соотношения для интенсивности напряжений, деформаций и приведенных компонент в проекциях на единичной плоскости запишутся в виде:

$$\tilde{\sigma}_{int} = f(\tilde{\varepsilon}_{int}), \tilde{\sigma}_{int} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3\tilde{\sigma}_{kj}\tilde{\sigma}_{jk} - (\tilde{\sigma}_{kk})^2}, \tilde{\varepsilon}_{int} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3\tilde{\varepsilon}_{kj}\tilde{\varepsilon}_{jk} - (\tilde{\varepsilon}_{kk})^2}. \quad (1)$$

При установлении вида аппроксимирующей функции для F (или f в (1)) она полагается линейной в упругой области и любой в пластической при сохранении закона равенства направляющих тензоров. На практике для аналитической записи опытных диаграмм на размерных плоскостях наибольшее применение находят билинейная, степенная и линейно-степенная функции:

$$\sigma_{int} = E\bar{\varepsilon}_{int}, \bar{\varepsilon}_{int} \leq \bar{\varepsilon}_p, \sigma = \sigma_p + \Pi(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p), \bar{\varepsilon} \geq \bar{\varepsilon}_p, \quad (2)$$

$$\sigma_{int} = E\bar{\varepsilon}_{int}, \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}_p, \quad \sigma_{int} = K(\bar{\varepsilon}_{int})^2, \bar{\varepsilon} \geq \bar{\varepsilon}_p, \quad (3)$$

где Π , K , n — постоянные для данного материала; σ_p , $\bar{\varepsilon}_p$ — напряжение и деформация условного предела пропорциональности.

Известно, что аппроксимация (2) при $\Pi = const$ дает значительные погрешности. Степенная функция параболического типа (3) с учетом (4) достаточно точно отображает экспериментальные кривые ряда материалов. В [5] предложено определять постоянные K , n в (6) из условия прохождения аппроксимирующей кривой через начало координат и точками условного предела текучести $(\sigma_{0,2}, \varepsilon_{0,2})$ и предела прочности $(\sigma_l, \varepsilon_l)$:

$$K = \sigma_l / (\bar{\varepsilon}_l)^n, \quad n = \lg \sigma_B - \lg \sigma_{0,2} / (\lg \bar{\varepsilon}_B - \lg \bar{\varepsilon}_{0,2}), \quad \bar{\varepsilon}_l = (K/E)^{1/(1-n)}. \quad (4)$$

Расчет констант по формулам (4) позволяет решать конкретные задачи без трудоемких опытов на построение полных диаграмм растяжения. Данные по условным пределам текучести и прочности для конкретных материалов накоплены в справочниках. В [4] предложены и обсуждаются также и другие аппроксимации, использующие наряду с упомянутыми характерными точками еще одну дополнительную точку диаграммы нагружения.

Для задания технологических параметров и прогнозирования результатов формовки в классе осесимметричных оболочек предложено множество инженерных подходов, дающих приближенные оценки. Часто эти подходы основаны на предположениях о конечной форме оболочки. В силу развитости пластических деформаций широкое применение нашли методы безмоментной теории оболочек. Такие подходы неприемлемы, когда требуется изготовление оболочек, точно настроенных на заданную (критическую) нагрузку потери устойчивости при сжимающих нагрузках. Это связано с известной высокой чувствительностью критических нагрузок оболочек к технологическим несовершенствам. В частности, это относится к малым отклонениям от предполагаемой формы, которые не учитываются упрощенными подходами. Для этих целей необходимо построение и использование уточненных моделей моментной физически нелинейной теории оболочек для больших деформаций. Возможно, потребуется привлечение методов нелинейной пространственной теории упругости и пластичности для описания зон сильного изгиба.

Кинематические и статические компоненты уравнений модели в классе оболочек вращения развиты в [6-8] на базе уравнений типа Э.Рейсснера. Уравнения учитывают поперечный сдвиг и обжатие нормали (изменение толщины при вытяжке). Обжатие определяется на основе гипотезы о несжимаемости материала. Обобщение базовых уравнений в намечаемой к реализации модели состоят в следующем: а) переходе к модели слоистой оболочки на основе гипотезы ломаной для отслеживания развития и разделения упругих и пластических зон по толщине оболочки; б) использование определяющих уравнений в нормировке плоскости $\tilde{\sigma} - \tilde{\varepsilon}$; в) учет этой нормировки при переходе к безразмерным величинам в разрешающей системе уравнений.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428) и РФФИ (грант №04-01-

96806p 2004юг).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сю (Hsu T.C.), Шан (Shang H.M.), Ли (Lee T.C.), Ли (Lee S.Y.) Напряжения пластического течения в листовом материале при формовке из него изделий почти сферической формы // Теор. основы инж. расчетов. Тр. амер. общ-ва инж.-механиков. Пер. с англ. 1975. Т. 97. № 1. С. 66–75.
- [2] Куркин С.А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением. М: Машиностроение, 1976. 184 с.
- [3] Дружинский И.А. Сложные поверхности: Математическое описание и технологическое обеспечение: Справочник. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1985. 263 с., ил.
- [4] Азмеров А.Ф. О кривых упрочнения материалов и их аппроксимации // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. 1972. № 3. С. 79–86.
- [5] Лысов М. И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки. М.: Машиностроение, 1966.
- [6] Юдин А.С. О некоторых нелинейных уравнениях осесимметричной деформации оболочек вращения // Изв. СКНЦ ВШ. Естественные науки. 1973. № 4. С. 93–98.
- [7] Юдин А.С. Большие осесимметричные деформации физически-нелинейных оболочек вращения (полулинейный материал) // Изв. Сев.- Кав. науч. центра высшей школы. Естеств. науки. 1977. № 1. С. 18–22.
- [8] Юдин А.С. Большие осесимметричные деформации упруго-пластических оболочек вращения // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк.. Естеств. науки. 1978. № 3. С. 34–37.

Yudin S.A. *Forming model of shell of revolution under finite deformations.* Aspects of a choice of model of plastic forming of shells adjusted on given buckling load are discussed. The problem concerns to a class essentially geometrically and physically nonlinear. The variant of the task of the determining equations is considered on the basis of special normalization, allowing to transfer results to groups of materials.

СОВМЕСТНАЯ ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ

Юдович В. И.^{*}, Гуда С. А.^{*}

^{*} Ростовский госуниверситет

Аннотация. В настоящей работе исследуется задача о крутильных колебаниях твердого тела вращения с закрепленной осью внутри сосуда произвольной формы, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. При таком движении область течения жидкости не меняется со временем. Упругий момент силы, действующий на тело, заставляет его совершать колебания около положения равновесия — состояния покоя. Физически очевидно, что, вследствие диссипации энергии, амплитуда колебаний данного крутильного маятника затухает со временем, а жидкость приходит в состояние покоя. Здесь эти утверждения точно сформулированы и строго доказаны. Исследованы малые колебания системы жидкость-тело.

Применяются два подхода к исследованию устойчивости решения: прямой метод Ляпунова и метод линеаризации. По образцу задачи о маятнике с трением [2] построен функционал Ляпунова второго рода (для доказательства асимптотической устойчивости). Он зависит от некоторого параметра α . Хотя при фиксированном значении α он удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова лишь в некоторой окрестности положения равновесия, надлежащее значение параметра α можно подобрать для любой окрестности. Таким образом, глобальная устойчивость — затухание всех возмущений — устанавливается при помощи однопараметрического семейства функционалов.

Во второй части работы система жидкость-тело исследуется в малой окрестности состояния покоя при помощи метода линеаризации. Используя подходящее разложение фазового пространства, линеаризованный оператор A_0 задачи о вращении тела в жидкости можно реализовать как операторную матрицу, получаемую добавлением двух скалярных строк и двух столбцов к оператору Стокса \mathcal{S} . Это позволяет в задаче на собственные значения исключить скорость жидкости и перейти к отысканию корней дисперсионного уравнения. Его исследование показывает, что все собственные значения оператора A_0 расположены внутри правой (устойчивой) полуплоскости. На основе этого затем проводится обоснование линеаризации. Используя абстрактную теорему из книги [1] (гл.2 §2), доказывается асимптотическая устойчивость в шкале фазовых пространств, бесконечная дифференцируемость решений и затухание всех их производных.

Постановка задачи. Рассмотрим совместную задачу о движении твердого тела D_r ($S_r = \partial D_r$) в ограниченном контейнере D_c ($S_c = \partial D_c$), заполненном вязкой несжимаемой жидкостью (занимающей область $D_f = D_c \setminus D_r$). Тело подчинено связи — закреплено на своей оси симметрии OO' таким образом, что может лишь вращаться вокруг нее. Предположим также, что, помимо силы вязкого трения, на тело действует упругий вращательный момент по закону Гука. Данная

система описывается безразмерными уравнениями

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$\vec{u}|_{S_r} = r\dot{\varphi} \vec{e}_\phi, \quad \vec{u}|_{S_c} = 0, \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi} - \eta\nu M(\vec{u}) + \gamma^2 \varphi = 0. \quad (3)$$

Здесь \vec{u} – скорость жидкости, ν – безразмерная вязкость жидкости, $\eta = \frac{\rho_f}{\rho_r}$ – отношение плотностей жидкости и тела, \vec{e}_ϕ – один из трех координатных ортов $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) , γ – циклическая частота колебаний тела в отсутствие жидкости. Безразмерный момент $M(\vec{u})$ силы вязкого трения вычисляется по формуле

$$M(\vec{u}) = - \int_{S_r} r \Sigma_{ij}(\vec{u}) n_j e_{\phi j} dS, \quad \Sigma_{ij}(\vec{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (4)$$

Прямой метод Ляпунова. Выберем в качестве фазового пространства задачи (1)-(3) прямую сумму $\mathbb{H} = \mathbb{S}_2(D_f) + \mathbb{R}^2$. Гильбертово пространство $\mathbb{S}_2(D_f)$ есть замыкание в \mathbb{L}_2 множества финитных гладких соленоидальных полей в D_f .

Как известно, полная механическая энергия является подходящей функцией Ляпунова для доказательства устойчивости равновесия, но не позволяет установить *асимптотическую* устойчивость. Чтобы доказать затухание решений системы (1)-(3), мы воспользуемся приемом построения надлежащей функции Ляпунова, примененным в [2] в задаче о маятнике с трением.

Полная механическая энергия системы жидкость-тело имеет вид

$$E = \frac{1}{2} \int_{D_f} \vec{u}^2 dx + \frac{\gamma^2}{2\eta} \varphi^2 + \frac{1}{2\eta} \dot{\varphi}^2.$$

Функционал Ляпунова U возьмем зависящим от некоторого положительного параметра α :

$$U = \alpha E + V. \quad (5)$$

Вспомогательный функционал V определяется равенством

$$V = \frac{\eta}{2} \left(\int_{D_f} \vec{u} \cdot \vec{\chi} dx + \frac{1}{\eta} \dot{\varphi} + m\nu\varphi \right)^2 + \frac{\gamma^2}{2\eta} \varphi^2, \quad (6)$$

вектор-функция $\vec{\chi}$ есть решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\chi} &= \nabla q, \quad \operatorname{div} \vec{\chi} = 0, \\ \vec{\chi}|_{S_r} &= r\vec{e}_\phi, \quad \vec{\chi}|_{S_c} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть $\gamma > 0$. Для любого $R > 0$ найдутся такие значения параметров α и δ , что всякое достаточно гладкое решение $w = (\vec{u}, \varphi, \dot{\varphi})$ задачи (1)–(3) с начальным условием $\|w(0)\|_{\mathbb{H}} \leq R$ затухает в том смысле, что выполняется неравенство

$$\|w(t)\|_{\mathbb{H}} \leq C \|w(0)\|_{\mathbb{H}} e^{-\delta t}, \quad (8)$$

и сходится интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \int_{D_f} e^{\delta_1 t} (\nabla \vec{u})^2 dx dt < \infty \quad (9)$$

с произвольной константой $\delta_1 < 2\delta$.

Метод линеаризации. Введем пространство \mathbb{S}_p , $1 < p < \infty$, как замыкание по норме \mathbb{L}_p множества финитных гладких соленоидальных полей в D_f .

Фазовым пространством системы является прямая сумма $\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2$, состоящая из элементов $w = (\vec{u}, \varphi, \beta)$, где $\vec{u} \in \mathbb{S}_p$, $(\varphi, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Введем операторы A_0 и K , действующие на вектор $w = (\vec{u}, \varphi, \beta)$ по правилам

$$A_0 w = \begin{pmatrix} -\nu \Pi \Delta \vec{u} \\ -\beta \\ -\nu \eta M(\vec{u}) + \gamma^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad K_0(w, w) = \begin{pmatrix} -\Pi(\vec{u}, \nabla) \vec{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где Π – проектор Стокса. Область определения оператора A_0 есть

$$\mathcal{D}_p(A_0) = \{(\vec{u}, \varphi, \beta) \in \mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2 \mid \vec{u} \in \mathbb{W}_p^2(D_f), \vec{u}|_{S_c} = 0, \vec{u}|_{S_r} = r\beta \vec{e}_\phi\}.$$

Теперь задачу (1)-(3) можно трактовать как дифференциальное уравнение в банаховом пространстве $\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2$

$$\dot{w} + A_0 w = K_0(w, w). \quad (11)$$

Линеаризованный оператор. Представим значение оператора A_0 в некоторой точке $w \in \mathcal{D}(A_0)$ в виде

$$A_0 w = \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\vec{u} - \beta \vec{\chi}) \\ 0 \\ -\nu \eta M(\vec{u} - \beta \vec{\chi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma^2 \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \\ \nu \eta m \beta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где вектор-функция $\vec{\chi}$ определена в (7), $m = -M(\vec{\chi}) > 0$, \mathcal{S} – оператор Стокса. Таким образом, используя два разбиения пространства $\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{C}^2$:

$\mathbb{S}_p \dot{+} \text{Lin}((0, 1, 0)^T, (\vec{\chi}, 0, 1)^T)$ для области определения и $\mathbb{S}_p \dot{+} \text{Lin}((0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T)$ для области значений, – можно отождествить оператор A_0 с его матрицей

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\nu \eta M & \gamma^2 & \nu \eta m \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что оператор A_0 есть двумерное окаймление оператора Стокса, получаемое добавлением двух строк и двух столбцов.

Как двумерное окаймление оператора Стокса оператор A_0 наследует многие его свойства, в частности оператор A_0 замкнут в пространстве $\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2$ и имеет чисто точечный спектр, представляющий собой счетное множество конечнократных собственных значений $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$, при этом $\text{Re } \sigma_k \rightarrow +\infty$.

Устойчивость спектра линеаризованного оператора. Перейдем от задачи на собственные значения для оператора A_0 к исследованию нулей соответствующей ему дисперсионной функции f_0 .

Пусть σ – собственное значение оператора A_0 , $w = (\vec{u}, \varphi, \beta)$ – отвечающий ему собственный вектор (см. (13)):

$$\sigma(\vec{u}_0 + \beta\vec{\chi}) - \mathcal{S}\vec{u}_0 = 0, \tag{14}$$

$$\sigma\varphi + \beta = 0, \tag{15}$$

$$\sigma\beta + \nu\eta M(\vec{u}_0) - \gamma^2\varphi - \nu\eta m\beta = 0. \tag{16}$$

Исключая компоненты \vec{u}_0 и β , приходим к равенству

$$f(\sigma) = 0, \quad f(\sigma) = -\sigma^2 + \nu\eta\sigma^2 M(R_\sigma\vec{\chi}) - \gamma^2 + \nu\eta m\sigma. \tag{17}$$

Функция f не имеет нулей внутри левой полуплоскости. Таким образом, спектр оператора A_0 устойчив.

Теоремы об устойчивости и затухании старших производных возмущений. Докажем, что нулевое решение нелинейной системы (1)-(3) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем возмущения экспоненциально затухают со временем.

Теорема 2. Пусть $\gamma > 0$, тогда нулевое решение задачи (1)-(3) асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространствах $\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2$ при $p > 3$. Более того, существует число $R > 0$ такое, что для всех решений $w(t) = (\vec{u}(t), \varphi(t), \beta(t))$ уравнения (11), начинающихся в шаре B_R фазового пространства $\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2$ ($\|w(0)\|_{\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2} \leq R$), выполняется оценка

$$e^{t\sigma^{(0)}} \|w(t)\|_{\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2} + \left\{ \int_0^t \left[e^{\tau\sigma^{(0)}} \|w(\tau)\|_{\mathbb{S}_{q_1} \dot{+} \mathbb{R}^2} \right]^{r_1} d\tau \right\}^{\frac{1}{r_1}} + \left\{ \int_0^t \left[e^{\tau\sigma^{(0)}} \|\partial_x \vec{u}(\tau)\|_{\mathbb{L}_{q_2}(D_f)} \right]^{r_2} d\tau \right\}^{\frac{1}{r_2}} \leq C \|w(0)\|_{\mathbb{S}_p \dot{+} \mathbb{R}^2}.$$

Здесь постоянная C не зависит от времени, $\sigma^{(0)} > \text{Re } \sigma_{\min}$, где σ_{\min} – собственное значение оператора A_0 с минимальной вещественной частью, а числа p_1, r_1, p_2, r_2 должны удовлетворять условиям¹

$$q_{1,2} \geq p; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} > \frac{1}{p}; \quad \frac{1}{r_1} > \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} \right); \quad \frac{1}{r_2} > \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{3} \right); \quad r_{1,2} > 1.$$

Доказательство состоит в проверке условий теоремы 2.1 гл.2 [1], которая проводится так же, как и в задаче для системы Навье-Стокса (теорема 2.3 гл. 2 [1]) с тем лишь изменением, что в качестве пространств X и Y здесь берутся $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{S}_q \times \mathbb{R}^2$. Ч.т.д.

¹Все эти условия удовлетворяются, например, если $p = 4, q_1 = q_2 = 6, r_1 < 8, r_2 < \frac{8}{5}$.

В условиях теоремы 2 возмущения затухают не только по норме $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$, но и в более сильном смысле. Методами теорем 8.1 и 8.2 гл. 3 [1] доказывается справедливость следующего утверждения:

Теорема 2. Пусть границы S_r и $S_c \in \mathbb{C}^\infty$, тогда в условиях теоремы 2 возмущения $w(t) \in \mathbb{C}^\infty(D_f) \times \mathbb{R}^2$ при $t > 0$, и

$$\|\partial_t^n w(t)\|_{\mathbb{C}^k(D_f) \times \mathbb{R}^2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

для любых натуральных n и k .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В.И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости // Изд. РГУ. 1984.
- [2] Рун Н., Абетс П., Лалма М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости // М.: Мир. 1980.

Yudovich V.I., Guda S.A. *The stability of quiescent state of torsion pendulum swinging in a viscous fluid.* The problem about quiescent state stability of torsion pendulum swinging in a volume filled with viscous incompressible fluid is discussed. For such movement the domain occupied by fluid is permanent. Axisymmetric body is affected by momentum of elastic force. It is obviously that pendulum's amplitude of oscillations gradually fades with time, and fluid quiets down. Here these statements are exactly defined and proved. Small oscillations of system fluid+solid are investigated.

Two approaches are used: direct Lyapunov method and linearization. Ad exemplum of pendulum with friction [2] the second kind Lyapunov functional is constructed. It depends on a parameter α . Although for a fixed value of α it satisfies conditions of Lyapunov theorem only in some neighborhood of zero, for all neighborhood the necessary α can be found. Thus the global asymptotic stability is proved by means of a collection of functionals.

Then dynamical system fluid+solid is investigated in a small neighborhood of quiescent state using linearization method. Using suitable decomposition of phase space linearized operator can be represented as a two dimensional bordering of Stockes operator. It helps to reduce eigenvalue problem to solving of simple dispersion equation. Investigation of the latter yields the spectrum of linearized operator to be stable. On the basis of it linearization method is substantiated, infinite differentiability of solutions and attenuation of all their derivatives are proved. The proof of main theorems is guided by the abstract stability theorems, presented in the book [1].

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕЩИНЫ В ВЯЗКОУПРУГОМ СЛОЕ

Явруян О.В.

Ростовский государственный университет

Рассмотрена обратная задача идентификации трещины в вязкоупругом ортотропном слое. Исследовано поле перемещений на верхней границе слоя. Для решения задачи реконструкции трещины построен функционал невязки.

Приведен пример решения задачи в случае антиплоских колебаний.

Обратные задачи идентификации трещин и расслоений находят свое применение во многих областях науки и техники, например, в сейсморазведке, разведочной геофизике, дефектометрии, наномеханике, чем обусловлен интерес к задачам определения местоположения и конфигурации трещиноподобных дефектов. Стоит также отметить, что реальным современным конструкционным материалам (полимерам, композитам, керамикам) присуще затухание различной физической природы, и особый интерес представляют задачи идентификации трещин, учитывающие эффекты затухания в той или иной форме.

Наиболее просто учет затухания может быть осуществлен в рамках концепции комплексных модулей, в этом случае характеристики материала есть комплексные функции частоты колебаний, а также путем введения сопротивления в среде, пропорционально скоростям, что в случае установившихся колебаний соответствует введению комплексной частоты $\omega^2 + i\epsilon$ (упругому материалу соответствует случай $\epsilon = 0$).

Работа посвящена исследованию влияния внутренней трещины произвольной ориентации в вязкоупругой анизотропной слоистой среде на поле смещений под действием приложенной на части верхней границы слоя S_σ нагрузки и определению конфигурации трещины по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на части верхней границы слоя S_u , $S_u \cap S_\sigma = 0$. Трещина моделируется математическим разрезом – кривой класса C^2 , на которой поля перемещений терпят разрыв. Действие трещины в рамках теории дислокаций заменяется действием фиктивных массовых сил f_i , которые выражаются через компоненты функции раскрытия в соответствии с [1]. Отметим, что подобная задача в рамках упругой модели рассмотрена в [2, 3].

Рассмотрены установившиеся колебания ортотропного вязкоупругого слоя толщины h , ослабленного внутренней трещиной l . Исследуемая задача после отделения временного множителя описывается краевой задачей

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega_*^2 u_i + f_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}(i\omega)u_{k,l} \\ u_i|_{S_1} &= 0, \quad \sigma_{i3}|_{S_\sigma} = p_i, \quad \sigma_{i3} = 0, \quad x \in S_2 \setminus S_\sigma \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}n_j^\pm|_{l_0^\pm} = 0 \quad (3)$$

где ρ – плотность материала, $C_{ijkl}(i\omega)$ – комплексные модули, ω_* – частота колебания, S_1, S_2 – нижняя и верхняя границы слоя соответственно.

Задача построения волнового поля перемещения решена на основе теоремы взаимности и функций Грина для слоя, которые представляются в виде интегралов Фурье.

Для антиплоских колебаний волновое поле перемещений в слое S под действием сосредоточенной нагрузки интенсивности p_0^* , приложенной в точке $-L$, имеет вид (4)

$$u(x) = u^{et}(x) + \int_l k(\xi, x)\chi(\xi)dl_\xi, x \in S \quad (4)$$

$$u^{et}(x) = -\frac{p_0}{4\pi} \int_\sigma \frac{sh(\lambda x_3)}{\lambda ch(\lambda h)} e^{-i\alpha_1(L+x_1)} d\alpha_1, p_0 = \frac{p_0^*}{C_{44}}$$

$$k(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{g_3 sh(\lambda x_3) e^{-\lambda(h-\xi_3)} - g_2 ch(\lambda(h-x_3)) e^{-\lambda\xi_3}}{\lambda ch(\lambda h)} + \frac{g_1}{\lambda} e^{-\lambda|\xi_3-x_3|} \right) e^{i\alpha_1(\xi_1-x_1)} d\alpha_1 \quad (5)$$

$$g_1 = i\nu n_1^\xi \alpha_1 - \text{Sign}(\xi_3 - x_3) \lambda n_3^\xi, \quad g_2 = i\nu n_1^\xi \alpha_1 - \lambda n_3^\xi, \quad g_3 = i\nu n_1^\xi \alpha_1 + \lambda n_3^\xi,$$

$$n_i^\xi = n_i(\xi), i = 1, 3, \quad \xi = (\xi_1, \xi_3), \quad x = (x_1, x_3)$$

В формуле (4) первое слагаемое – эталонное поле, представляющее собой поле смещений в среде без дефекта, второе слагаемое обусловлено наличием трещины в слое. Представление (4) позволяет определить смещение в любой точке слоя при известных значениях функции раскрытия. Подынтегральная функция в представлении (5) имеет особенности, определяемые уравнением $ch(\lambda h) = 0$, откуда следует, что точки дисперсионного множества всегда являются комплексными

$$\alpha_{1n} = \pm\beta_n, \quad \beta_n = \frac{\sqrt{k^2 + ik_\epsilon^2 - \beta_n^{02}}}{\sqrt{\nu}}, \quad k^2 = \frac{\rho\omega^2}{C_{44}}, \quad k_\epsilon^2 = \frac{\epsilon\omega}{C_{44}}, \quad \nu = \frac{C_{66}}{C_{44}}$$

В упругом случае β_n являются либо чисто мнимыми, либо вещественными, последние определяют распространяющиеся волны. Учет затухания приводит к комплексным корням β_{n0}, β_{n1} :

$$\beta_{n0} = \sqrt{r_n} \left(\cos\left(\frac{\phi_{0n}}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\phi_{0n}}{2}\right) \right), \quad \beta_{n1} = -\beta_{n0}, \quad (6)$$

$$r_n = \sqrt{(k^2 - \beta_n^{02})^2 + k_\epsilon^4}, \quad \cos(\phi_{0n}) = \frac{k^2 - \beta_n^{02}}{r_n}, \quad \sin(\phi_{0n}) = \frac{k_\epsilon^2}{r_n}, \quad \phi_{0n} \in [0, 2\pi],$$

$$\beta_n^0 = \frac{\pi}{h}(n - 0.5), \quad n = 1, 2, \dots$$

Комплексное множество β_{n0} разделим на два подмножества: к первому подмножеству отнесем значения β_{n0} , которые при исчезновении затухания становятся вещественными ($n = 1, 2..2M$), а ко второму – те, которые становятся чисто мнимыми.

Контурный интеграл (5) в соответствии с (6) может быть рассчитан по теории вычетов, контур интегрирования в случае наличия затухания совпадает с вещественной осью и замыкается в нижнюю либо верхнюю полуплоскости в зависимости от знака $\xi_1 - x_1$ в соответствии с леммой Жордана. Предположим, что возможно параметрическое представление трещины $\xi_i = q_i(t), t \in [-1, 1]$, где $q_i(t) \in C^1[-1, 1], q_1'^2(t) + q_3'^2(t) \neq 0$, тогда выражение для поля перемещений на верхней границе слоя примет вид

$$u(x_1, h) = u(x_1, h) + \int_{-1}^1 K(t, x_1, h) \chi(t) dt, \tag{7}$$

$$K(t, x_1, h) = \sqrt{q_1'^2 + q_3'^2} k(\xi, x) |_{\xi_j = q_j(t), x_3 = h}.$$

Используя квадратурную формулу прямоугольников для вычисления интеграла в (7), окончательно получим соотношение для расчета поля перемещений в точке верхней границы слоя x_1 : при $q_1(t) - x_1 < 0, t \in [-1, 1]$ оно имеет вид

$$u(x_1, h) = u(x_1, h) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\sqrt{r_n/2}[-\sqrt{1-a_n} + i\sqrt{1+a_n}]x_1}, \tag{8}$$

где

$$A_n = \frac{2}{Nh\nu} \sum_{k=1}^N (-1)^{n+1} [f_{1nk} e^{i\lambda_n q_{3k}} + f_{2nk} e^{-i\lambda_n q_{3k}}] e^{-i\beta_n q_{1k}},$$

$$f_{1nk} = i\nu q_{3k}' - \text{Sign}(q_{1k} - x_1) \frac{\lambda_n}{\beta_n} q_{1k}', f_{2nk} = -i\nu q_{3k}' - \text{Sign}(q_{1k} - x_1) \frac{\lambda_n}{\beta_n} q_{1k}',$$

$$a_n = \frac{k^2 - \beta_n^2}{r_n}, q_{1k} = q_1(t_k), q_{3k} = q_3(t_k), t_k = -1 + (k - 1).$$

Учитывая разделение β_n^0 представим (8) в виде двух сумм – одна из них порождена первым подмножеством и при $\epsilon \rightarrow 0$ характеризует распространяющиеся моды, а вторая является экспоненциально малой при удалении от источника колебаний, что дает следующую расчетную формулу

$$u(x_1, h) = u^{et}(x_1, h) + \sum_{n=1}^M A_n e^{\sqrt{r_n/2}[-\sqrt{1-a_n} + i\sqrt{1+a_n}]x_1} + O(e^{-\sqrt{r_n}x_1})$$

Вещественный аргумент экспоненты определяет присущее материалу с затуханием убывание в дальней от источника зоне. График поля смещений на верхней границе слоя может быть полезен при исследовании благоприятных с точки зрения задачи идентификации областей.

Обратная задача идентификации трещины в ортотропном слое состоит в определении конфигурации трещины по измеренному на части верхней границы слоя S_u полю смещений

$$u|_{S_u} = g(x_1), S_u = \{x_1 \in [a, b], x_3 = h\} \tag{9}$$

В случае трещины, допускающей параметризацию конечным числом параметром $b_k, k = 1, .., m$, задача идентификации трещины сводится к нахождению этих

параметров. Наиболее эффективной схемой их определения является минимизация неквадратичного функционала невязки, в результате которой определяются параметры трещины. Таким образом, обратная задача идентификации сведена к задаче оптимизации (10):

$$\Phi(b_k) = \sum_{i=1}^N |u(x_{1i}, \omega, b_k) - g_m(x_1, \omega)|^2 \longrightarrow \min_{b_k, x_1 \in S_u}. \quad (10)$$

На основе предложенного алгоритма решена обратная задача о восстановлении прямолинейной трещины, проведено сравнение точности восстановления параметров трещины с упругим случаем.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 05-01-00734), Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Госконтракт, шифр работы: РИ-112/001/428) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-2113.2003.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новоуцкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [2] *Ватульян А.О., Явруян О.В.* Реконструкция наклонных трещин в слое // Известия вузов. Северо-Кавказский Регион. Естественные науки. 2005. №2. С. 36-39.
- [3] *Баранов И.В., Булгуриян О.В., Ватульян А.О.* Интегральные уравнения для упругого слоя с трещиной произвольной конфигурации и их исследование. // Вестник ДГТУ. Издательский центр ДГТУ. 2004г. Т.4. №3. С. 257-269.

Yavruyan O.V. *Inverse problem of the crack identification in a visco-elastic orthotropic layer.* The inverse problem of the crack identification in a visco-elastic orthotropic layer is presented. The field of movements on the high bound of a layer is investigated. The functional for the inverse problem solving is constructed.

The example of solution in the case of antiplane oscillations is adduced.

Научное издание
Современные проблемы механики сплошной среды.

**Труды IX Международной конференции,
посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН**

И.И. ВОРОВИЧА

г. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г. Т. 2.

Материалы сборника даны в авторской редакции