

## Содержание

Азаров А. Д., Азаров Д. А. Сопоставление трехмерной механической модели с законом состояния Мурнагана . . . . .	6
Акопян В. А., Захаров Ю. Н., Паринов И. А., Рожков Е. В., Чебаненко В. А. Экспериментальные исследования характеристик пьезоэлектрического генератора . . . . .	11
Алексеев А. А., Моршнева И. В. Взаимодействие спиральных волн с различными волновыми числами в задаче Куэтта–Тейлора . . . . .	16
Баженов Е. Е., Чехонин К. А. Моделирование течения нелинейно-вязкопластической жидкости при больших числах Бингама . . . . .	21
Батищев В. А., Петровская Д. С. Затухание в конце систолы коротких спиральных волн в аорте . . . . .	26
Богачев И. В. Идентификация свойств кожи на основе слоистой модели . . . . .	30
Богачева М. О. Вейвлет-анализ кардиосигнала . . . . .	35
Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Огороков Е. П., Павлова Л. Н. Физико-механические свойства бетонов на материалах из горелых пород . . . . .	40
Ватульян А. О., Богачев И. В., Явруян О. В. Об идентификации неоднородных свойств ортотропной упругой полосы . . . . .	45
Ватульян А. О., Нестеров С. А. Численная реконструкция термомеханических характеристик неоднородного стержня . . . . .	50
Воронкова Е. Б., Игнатьева К. А. Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления . . . . .	55
Георгиевский Д. В. Асимптотическое интегрирование в задаче о динамическом сжатии тонкого пластического слоя . . . . .	60
Говорухин В. Н. О методах расчета динамики жидких частиц . . . . .	65
Голуб М. В. Волновая динамика и резонансные эффекты в повреждённых слоистых фоновых кристаллах . . . . .	70
Дидок Н. К. Вращательные колебания цилиндрического резервуара с упругими основаниями, заполненного идеальной жидкостью . . . . .	75
Дударев В. В. Плоские колебания предварительно напряженного анизотропного слоя . . . . .	80
Еремеев В. А., Наседкин А. В. О колебаниях наноразмерных пьезоэлектрических тел с учетом поверхностных эффектов . . . . .	84
Ержаков Г. В., Шалдырван В. А. Упругое состояние трансформированного слоя, ослабленного цилиндрическими полостями . . . . .	89
Жуков М. Ю., Жукова Н. М. Моделирование эволюции сгустка крови в сосуде . . . . .	94

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Расчет стационарных режимов конвекции Рэлея–Бенара–Кармана . . . . .	99
Звоникова О. Ю., Колесников А. М. Индентирование плоской мембраны . . . . .	104
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Нелинейные эффекты при растяжении-сжатии цилиндрических тел с распределенными винтовыми дислокациями . . . . .	109
Зеньковская С. М., Прозоров О. А. Вторичные режимы термовибрационной конвекции в горизонтальном слое . . . . .	114
Иваночкин П. Г., Блажеев В. В. Расчетно-экспериментальная оценка долговечности двухслойной втулки тормозной рычажной передачи . . . . .	119
Игумнов Л. А., Петров А. Н., Аменицкий А. В. Моделирование волн порупругого полупространства . . . . .	123
Кармазин А. В., Сыромятников П. В., Диденко А. В., Диденко П. А. Определение параметров интерфейсной трещины в пакете упругих слоев . . . . .	128
Карякин М. И., Майорова О. А., Пустовалова О. Г. Эффекты высших порядков в задаче о деформировании цилиндра из несжимаемого микрополярного материала . . . . .	133
Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Ковариантные представления 4-тока в полевых теориях механики континуума . . . . .	138
Колесников А. М., Попов А. В. Раздувание кривой высокоэластичной трубки. Теория и эксперимент . . . . .	143
Лекомцев С. В., Бочкарёв С. А., Матвеев В. П., Мурашкин Е. В. Конечно-элементный анализ пространственных колебаний горизонтальных цилиндрических оболочек с жидкостью . . . . .	148
Литвинчук С. Ю., Белов А. А., Пазин В. П. Моделирование распространения волн для гибридных сред . . . . .	153
Манжиров А. В. Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими Функциями в исходных данных и их приложения . . . . .	158
Моргулис А. Б. Вариационные принципы для открытых течений . . . . .	163
Недин Р. Д. К обратной задаче реконструкции плоских неоднородных предварительных напряжений в пластине . . . . .	168
Норкин М. В. Разгон эллиптического цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью . . . . .	173
Овчинникова С. Н. Устойчивость течения Куэтта между вращающимися цилиндрами с разными зазорами . . . . .	178
Орлова Н. С. Моделирование движения виброоживленного слоя мелкодисперсных частиц между двумя колеблющимися полками . . . . .	183
Осипов А. В. Изгибно-крутильные колебания стержней переменной жесткости . . . . .	188

Поддубный А. А., Устинов Ю. А. Исследование энергетических потерь при распространении гармонических волн в системе вязкая жидкость – деформируемая оболочка переменного диаметра . . . . .	193
Роговой А. А. Теория построения моделей сложных сред с конечными деформациями . . . . .	198
Сазонов Л. И. О существовании глобальных переходов между стационарными режимами задачи обтекания . . . . .	202
Сметанин Б. И., Федяева К. Е. Моделирование удара круглой пластинки, погруженной в несжимаемую жидкость . . . . .	207
Сумбатьян М. А., Боев Н. В. Развитие теории дифракции Кирхгофа для многократных отражений волн . . . . .	212
Трепачев В. В., Трепачева Г. Н. Возбуждение кноидальных волн . . . . .	217
Фоменко С. И., Голуб М. В. Запрещенные зоны в функционально-градиентных фононных кристаллах при возбуждении плоских Р и SV волн . . . . .	222
Чебаков М. И., Абрамович М. В., Колосова Е. М. Плоская контактная задача для трехслойного цилиндрического основания . . . . .	227
Шейдаков Д. Н., Шейдаков Н. Е. Потеря устойчивости круглых плит из функционально-градиентных материалов . . . . .	232
Юдин А. С., Юдин С. А. Колебания оболочек с отрицательным коэффициентом Пуассона . . . . .	237

# СОПОСТАВЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ЗАКОНОМ СОСТОЯНИЯ МУРНАГАНА

Азаров А. Д.\* , Азаров Д. А.\*\*

\*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

\*\*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Рассматривается описание деформаций нелинейно-упругих тел с помощью механической трехмерной модели. Проведено сравнение свойств модели с соответствующими свойствами материала Мурнагана на примере экспериментальных данных для полистирола. Сходство полученных характеристик дает основания предполагать хорошие аппроксимационные возможности трехмерной механической модели для описания деформационных свойств реальных материалов.

Различные определяющие соотношения нелинейно-упругих тел для случая больших деформаций подробно изложены в теории упругости [1, 2]. Закон состояния Мурнагана использует разложение удельной потенциальной энергии деформации по степеням инвариантов тензора деформации. Такие определяющие соотношения обеспечивают описание свойств реальных материалов при небольших конечных деформациях. В [3, 4] была предложена трехмерная математическая модель для описания механических свойств нелинейных материалов, развивающая другой подход к этой проблеме. В некоторый элементарный объем заключена трехмерная механическая конструкция (на рис. 1 представлен трансверсально-изотропный случай). Ее узлы привязаны к центрам граней параллелепипеда. Конструкция представляет собой систему упруго деформируемых стержней (пружин), отражающих свойства взаимодействия между всеми гранями элементарного объема при его деформировании. Важную роль в этой модели играют диагональные связи.

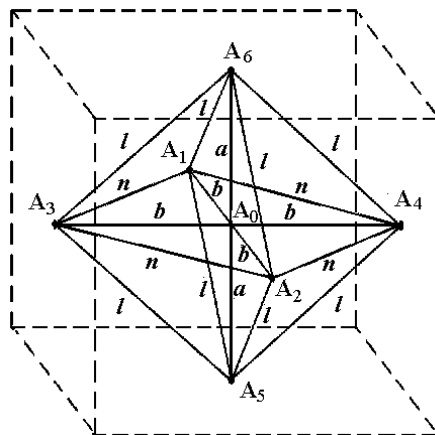


Рис. 1. Геометрия связей модели.



Характеристики упругости связей являются некоторыми интегральными оценками силовых взаимодействий общей структуры сплошной среды без явной связи с отдельными частицами, молекулами или атомами. При этом допускаются положительные и отрицательные значения коэффициентов упругости связей, что является отражением сил отталкивания и притяжения в структуре материала.

Геометрические параметры модели в недеформированном состоянии будем обозначать малыми буквами, а в деформированном — большими. Длины граней элементарного объема (в изотропном случае куба)  $2a = 2b$ , диагональные размеры равны  $l = n$ . Характеристики упругости (жесткости) этих связей будем обозначать  $k_a, k_b, k_l, k_n$ . В общем случае они зависят от соответствующих удлинений связей. Физический закон для реакции каждой связи:  $R_i = k_i \delta_i$ ,  $i = a, b, l, n$ . В изотропном случае  $k_a = k_b$ ,  $k_l = k_n$ .

Рассмотрим одноосное растяжение модели силой  $F_a$ , приложенной в вершинах  $A_5$  и  $A_6$  вдоль связи  $A_5A_6$ . После деформации связи принимают вид:

$$A = a + \delta_a, \quad B = a - \delta_b, \quad L = l + \delta_l, \quad N = l - \delta_n,$$

где  $\delta_a, \delta_b, \delta_l, \delta_n$  — знакоположительные изменения длин соответствующих связей.

Выписывая геометрические соотношения для продольных и диагональных связей, а также, составив уравнения статики для модели в ее узлах (рис. 2), получим систему для определения неизвестных  $F_a, \delta_a, \delta_b, \delta_l, \delta_n$ , аналогично [3]:

$$\begin{cases} C_l(\delta_l) = \frac{2k_l}{\sqrt{2}(2k_n + k_b) + \delta_l(2k_n + k_b + 2k_l)/a}, \\ \delta_l^2(1 - C_l^2)/a + 2\delta_l(\sqrt{2} + C_l) - 2\delta_a - \delta_a^2/a = 0, \\ \delta_b = C_l\delta_l, \\ \delta_n = \delta_b\sqrt{2}, \\ F_a = \left( \delta_a + 4k_l\delta_l \frac{1 + \delta_a/a}{\sqrt{2} + \delta_l/a} \right) k_a. \end{cases}$$

В задаче одноосного растяжения считается заданной величина удлинения  $\delta_a$ . Из системы находим функции  $F_a(\delta_a), \delta_b(\delta_a), \delta_l(\delta_a), \delta_n(\delta_a)$ . По зависимости  $F_a(\delta_a)$  можно определить нелинейную характеристику материала — аналог модуля Юнга линейной теории упругости. Аналогично, из зависимости  $\delta_b(\delta_a)$  получаем нелинейную характеристику связи поперечной и продольной деформаций, являющуюся аналогом коэффициента Пуассона линейной теории упругости.

Для численного решения системы был использован итерационный метод. В данной работе выбрана линейная форма зависимости характеристик упругости связей с деформациями связей:

$$k_i(\delta_i) = k_{0i}(1 - \lambda_i(\delta_i/\delta_{max\ i})),$$

где  $k_{0i}$  — начальный коэффициент упругости  $i$ -ой связи-пружины,  $\lambda_i$  — коэффициент, отвечающий за возрастание ( $\lambda_i < 0$ ) или убывание ( $\lambda_i > 0$ ) жесткости,  $\delta_i$  — удлинение соответствующей связи,  $\delta_{max\ i}$  — наибольшее удлинение соответствующей связи.

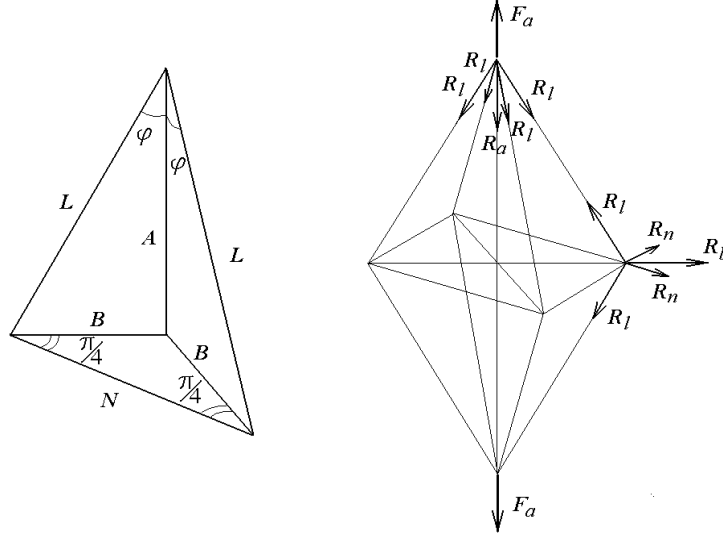


Рис. 2. Углы в актуальной конфигурации (слева), внешняя сила и реакции связей модели (справа).

На первом этапе вычисления осуществляются при постоянных начальных величинах коэффициентов упругости пружин-связей. Полученное таким образом решение является нулевым приближением точного решения. Следующая итерация вычисляется на основе предыдущего приближения. Предлагаемый итерационный процесс позволяет учитывать любые законы переменных характеристик упругости  $k_i(\delta_i^{(j-1)})$ , зависящих от удлинений соответствующих связей, полученных на предыдущей итерации. Закон изменения этих характеристик упругости определяется общими свойствами реальных внутренних связей структуры материалов.

Ниже представлено сравнение одноосного растяжения, рассчитываемого для механической модели и для материала Мурнагана. Рассмотрим нелинейно-упругое тело с определяющими соотношениями [1, 2]:

$$P = \alpha^* j_1 + \frac{1}{2}(\lambda^* + 2\mu^*)j_1^2 - 2\mu^* j_2 + \frac{1}{3}(l^* + 2m^*)j_1^3 - 2m^* j_1 j_2 + n^* j_3 ,$$

где  $P$  — потенциальная энергия деформации,  $j_i$  — инварианты тензора деформации Коши,  $\alpha^*$ ,  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$ ,  $l^*$ ,  $m^*$ ,  $n^*$  — константы материала Мурнагана.

При одноосном растяжении вдоль одной оси тензор конечной деформации Коши имеет вид:

$$\underline{\underline{E}} = \epsilon_1 \underline{i}_1 \underline{i}_1 + \epsilon_3 (\underline{i}_2 \underline{i}_2 + \underline{i}_3 \underline{i}_3) .$$

Согласно [2] по удлинению  $\delta_a$  вычисляются:  
продольная деформация

$$\epsilon_1 = \delta_a/a + 0.5\delta_a^2/a^2 ,$$

поперечная деформация

$$\epsilon_3 = \left( -(M_1 + M_2\epsilon_1) + \sqrt{(M_1 + M_2\epsilon_1)^2 - 4M_3(l^*\epsilon_1^2 + \lambda^*\epsilon_1)} \right) / (2M_3) ,$$

изменение объема

$$\theta = (1 + 2\epsilon_3)\sqrt{1 + 2\epsilon_1},$$

напряжение

$$t_1 = 2(\epsilon_1 - \epsilon_3)\sqrt{1 + 2\epsilon_1} [\mu^* + m^*(2\epsilon_3 + \epsilon_1) - 0.5n^*\epsilon_3],$$

где  $M_1 = 2\lambda^* + \mu^*$ ,  $M_2 = 4l^* - 2m^* + n^*$ ,  $M_3 = 4l^* + 2m^*$ .

Из представления  $\epsilon_3 = \delta_b/a + 0.5\delta_b^2/a^2$  можно вычислить изменение  $\delta_b$  по удлинению  $\delta_a$ .

Для сравнительного анализа выбраны характеристики полистирола (табл. 1).

$\lambda^*$	$\mu^*$	$l^*$	$m^*$	$n^*$
0.138	0.0661	-1.89	-1.33	-1

Таблица 1. Параметры материала Мурнагана,  $10^4$  МПа.

Надо отметить, что  $\nu^* = 0.5\lambda^*/(\lambda^* + \mu^*) = 0.338$  — аналог коэффициента Пуассона для материала Мурнагана.

Ниже представлены графики растягивающей силы, поперечной деформации и изменения объема в зависимости от продольной деформации для материала Мурнагана и трехмерной модели при одноосном растяжении.

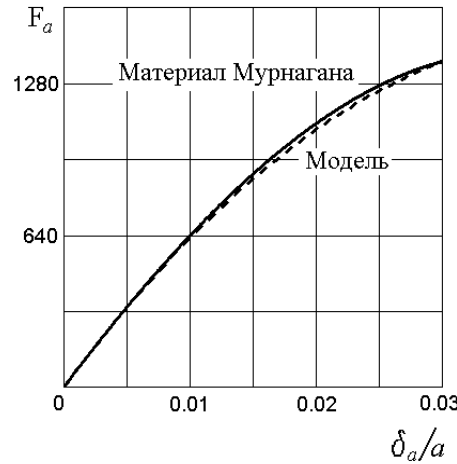


Рис. 3. Зависимость растягивающей силы от удлинения для материала Мурнагана и модели при одноосном растяжении.

Параметры механической модели (табл. 2) выбраны так, чтобы воспроизвести свойства нелинейного материала, наиболее близкого соответствующего закону состояния Мурнагана для экспериментальных данных полистирола.

Сходство представленных графиков для модели и материала Мурнагана говорит о хороших аппроксимационных возможностях модели при описании механических свойств разных реальных материалов. Лучшего согласия механической модели с законом состояния Мурнагана можно достичь с помощью подбора вида функций изменения жесткостей связей  $k_i(\delta_i)$ , подобно тому, как это сделано в [4] для несжимаемых материалов.

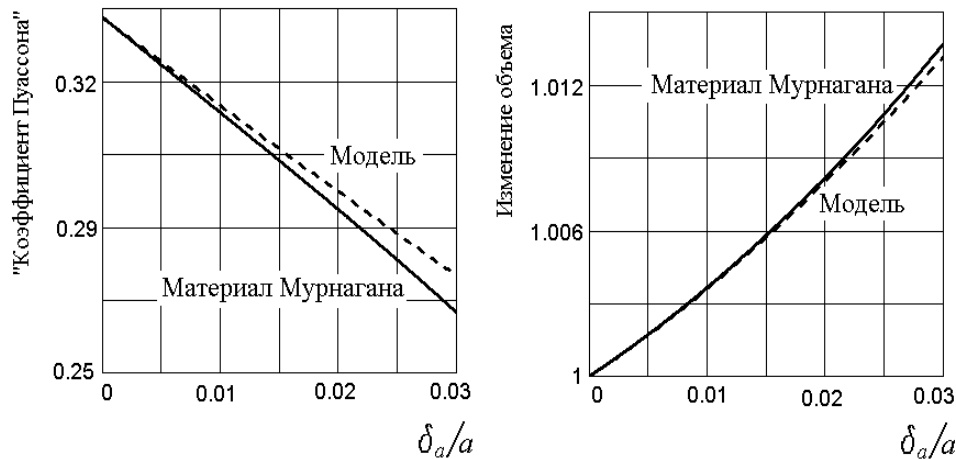


Рис. 4. Зависимости «коэффициент Пуассона» ( $\delta_b/\delta_a$ ) и изменение объема для материала Мурнагана и модели при одноосном растяжении.

$i$	$a$	$b$	$l$	$n$
$k_{0i} \times 10^2$ Н/мм	-2.28	-2.28	55.2	55.2
$\lambda_i$	0.55	-0.55	0.25	-0.25
$\delta_{max i}$	0.05	0.012	0.028	0.017

Таблица 2. Параметры механической трехмерной модели.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [2] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [3] Азаров А. Д., Азаров Д. А. Трехмерная механическая модель для описания больших упругих деформаций при одноосном растяжении // Ростов н/Д. Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11. № 2(53). С. 147–156.
- [4] Азаров Д. А. Нелинейно деформируемая трехмерная механическая модель несжимаемых упругих материалов // Труды XV международной конференции «Современные проблемы механики сплошных сред». 2011. Т. 1. С. 11–15.

**Azarov A. D., Azarov D. A.** Comparison of 3D mechanical model with Murnaghan's constitutive law. Description of deformations of non-linear elastic bodies by mechanical model is considered. The comparison of model's properties with matching properties of Murnaghan's material was carried out. The comparison was made for a case of uniaxial tension for a polystyrole. The similarity of the results being obtained allows to assume a good approximation abilities of the 3d model.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

**Акопьян В. А.\***, **Захаров Ю. Н.\*\***, **Паринов И. А.\***,  
**Рожков Е. В.\***, **Чебаненко В. А.\***

*\*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.*

*Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

*\*\*НИИ физики Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

В работе исследована зависимость выходных характеристик пьезогенераторов (ПГ) кантилеверного типа от величины присоединенной массы на его свободном конце. Обработка экспериментальных данных показала, что выходная мощность ПГ оригинальной конструкции с поляризацией биморфных пьезоэлементов вдоль длины кантилеверной пластины на порядок превышает мощность пьезогенераторов других конфигураций.

Проблема создания пьезоэлектрических генераторов (ПГ) различного назначения пока не решена в полном объеме из-за низкой энергоэффективности и малой выходной мощности уже существующих опытных конструкций. Среди различных проблем, возникающих при создании ПГ можно выделить наиболее существенные, к которым относятся выбор энергоэффективных составов пьезокерамических материалов (ПКМ), разработка электрических схем накопления электрической энергии с минимальной утечкой заряда, поиск геометрических конфигураций и технологий сборки чувствительного элемента ПГ, обеспечивающих максимальную выходную мощность. Ранее проблемы пьезонакопительных систем энергии, включающих в себя ПГ, были освещены в известных обзорах [1, 2].

В этих работах была предложена аналитическая модель кантилеверной балки с присоединенной на конце массой с наклеенными на обеих её поверхностях биморфных пьезоэлементов при кинематическом возбуждении (рис. 1). В них было использовано решение для однородной балки Эйлера–Бернулли, причем в силу малости отношения «длина — толщина балки» сдвиговая деформация не была учтена.

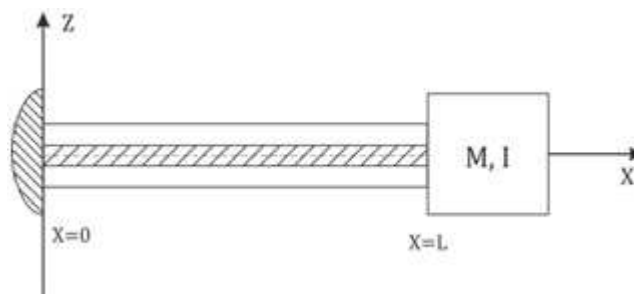


Рис. 1. Кантилеверная неоднородная балка с прикрепленной массой.

В дальнейшем в работе [2] исследована электромеханическая модель пьезоэлектрического накопителя энергии (рис. 2).

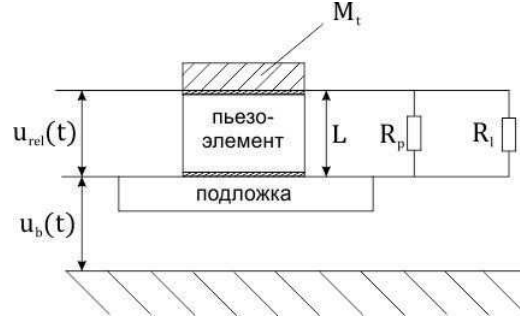


Рис. 2. Схема электромеханической модели пьезонакопителя энергии.

Для этой модели с сосредоточенными параметрами авторы [2] вывели связанные соотношения в виде:

$$\frac{d^2 u_{rel}}{dt^2} + 2\xi_m \omega_n \frac{du_{rel}}{dt} + \omega_n^2 u_{rel} - \omega_n^2 d_{33} v = -k_1 \frac{d^2 u_b}{dt^2}, \quad (1)$$

$$R_{eq} C_p \frac{dv}{dt} + v + m_{eq} R_{eq} d_{33} \omega_n^2 \frac{d^2 u_{rel}}{dt^2} = 0, \quad (2)$$

где  $m_{eq}$  — эквивалентная масса,  $\xi_m$  — коэффициент механических потерь,  $\omega_n$  — собственная частота,  $d_{33}$  — пьезомодуль,  $R_{eq}$  — эквивалентное сопротивление,  $C_p$  — электрическая емкость,  $u_b$  — поперечное смещение заземления (основания),  $u_{rel}$  — относительное смещение присоединенной массы,  $v$  — выходное напряжение,  $M_t$  — присоединенная масса,  $k_1$  — корректирующий фактор, действительный только для первой моды колебаний,  $m$  — погонная масса.

В модели (рис. 2) электроды подключены к эквивалентному нагрузочному сопротивлению  $R_{eq}$  и сопротивлению нагрузки  $R_l < R_{eq}$ . Можно считать, что  $R_l \approx R_{eq}$ .  $R_p$  — сопротивление пьезоэлемента на частоте возбуждения.

Из связанных соотношений (1), (2) в работе [2] были получены формулы для смещения  $u_{rel}$ , выходного напряжения  $v$  и выходной мощности  $p$ , отнесенных к ускорению базы  $\ddot{u}_b$ . В этих формулах в эквивалентную массу входят в целом, как масса подложки с пьезоэлементами, так и присоединенная масса.

Авторы [1] показали, что если принять соотношение масс  $m_{eq}$  равным 1,33, то при значении корректирующего фактора  $k_1 = 1,0968$  ошибка в расчетных значениях выходного напряжения будет меньше 8%, но это верно только для частоты основной наинизшей моды колебаний. Для других частот колебаний в работе [1] данные не приведены. Отмечено, что без включения фактора  $k_1$  в уравнения (1), (2) ошибка в расчете выходной мощности может достигать до 16%. Эти выводы были получены для модели пьезогенератора осевого типа, в которой направление вектора смещений совпадает с направлением вектора поляризации пьезоэлемента (рис. 2). Для схемы ПГ, изображенного на рис. 1, в известных работах приведены в общем виде расчетные соотношения для выходного напряжения и мощности.

**Цель работы.** Исследование зависимости выходных характеристик ПГ кантилеверного типа (оригинальной конструкции) от величины присоединенной массы на его свободном конце в случае ортогональности векторов поляризации пьезоэлементов и поперечных смещений ПГ. В известных математических моделях ПГ

этот случай не рассматривался. Задача была решена с помощью натурального эксперимента.

**Исследуемый объект.** Натурный эксперимент был проведен на образце пьезогенератора с многослойными преобразователями оригинальной конструкции (разработчик — сотрудник ЮФУ Сокало А. И.). Общий вид ПГ приведен на рис. 3.

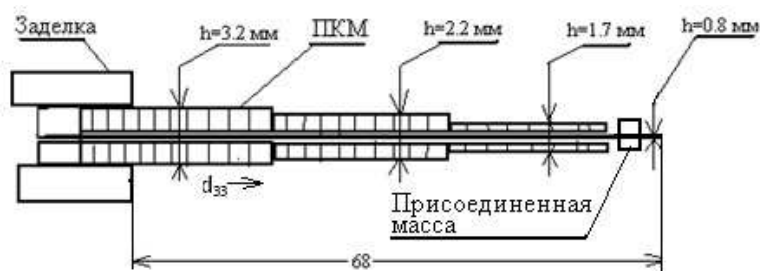


Рис. 3. Общий вид ПГ.

Пьезогенератор представляет собой пластинчатую подложку (основание) из текстолита размером  $80 \times 25 \times 0.8$  мм, на ее обеих поверхностях наклеены 6 пластинчатых многослойных пьезоэлементов. Каждый из них представляет собой набор тонких пластин, поляризованных и склеенных между собой вдоль длины подложки, как показано на рис. 3. Толщина многослойных пьезоэлементов (МПЭ) уменьшается к свободному концу подложки: у заделки она равна 1 мм, в центре — 0,5 мм, к концу основания — 0,3 мм. Пьезомодуль всех МПЭ  $d_{33} = 760$  пК/м. Электрическая емкость верхних соединенных пластин равна 45000 пФ, емкость нижних пластин 45000 пФ. Верхние и нижние пластины соединены между собой в биморф.

**Экспериментальная установка.** Исследования деформационных и электрических характеристик образца ПГ были проведены на измерительно-информационном комплексе ИИК оригинальной конструкции. Описание его конструкции и схемы измерений характеристик ПГ приведены нами ранее в работе [3].

**Методика проведения натурального эксперимента.** В испытуемом образце ПГ, установленном в заделке жесткого основания ИИК, последовательно возбуждались поперечные изгибные колебания в диапазоне частот до 1500 Гц с помощью электромагнита (амплитуда напряжения задающего генератора при этом не изменяется). Переменное напряжение с выхода ПГ и полученное с приемных датчиков, подаются на АЦП модуля, и воспроизводятся на экране монитора компьютера в виде амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) измеряемых характеристик ПГ. В процессе построения АЧХ регистрировались амплитудно-частотные характеристики выходного напряжения ПГ при значении сопротивления электрической нагрузки  $R_H$  от 2,7 кОм до 1,0 МОм и при этом определялись поперечные смещения свободного конца подложки ПГ.

**Результаты измерений и определений характеристик ПГ.** В начале были получены АЧХ испытуемых образцов с различными величинами присоединенной массы. Характерный вид АЧХ исследуемого ПГ приведен на рис. 4. Анализ АЧХ показал, что для ПГ исследуемой конструкции максимальную величину амплитуды выходного напряжения, равного 4,6 В можно получить в случае присо-

единенной массы, равной 14,5 г на резонансной частоте 20 Гц первой моды вынужденных колебаний и поперечных смещений на свободном конце кантилевера, равных 0,4 мм.

Результаты обработки параметров АЧХ приведены в таблице 1. По этим данным был построен график зависимости выходного напряжения ПГ от величины присоединенной массы для резонансных частот 1-й и 2-й мод колебаний, при величине активной нагрузки, равной 180 кОм. (рис. 5).

Анализ графиков этой зависимости показал, что максимальные значения выходного напряжения, а следовательно, и мощности ПГ, можно получить на частоте 1-й моды колебаний генератора с присоединенной массой равной 14,5 г. Используя полученные значения максимального выходного напряжения ПГ кантилеверного типа с присоединенной массой 14,5 г, удалось рассчитать пиковую выходную мощность исследованного типа ПГ, равную 0,05 мВт при сопротивлении нагрузки  $R_H=10$  кОм. Расчет выходной мощности известного ПГ кантилеверного типа (близкого по геометрии и расположению биморфов к исследованному нами типу), оказался равным 0,0015 мВт при  $R_H=70$  кОм (см. ссылку [26] в работе [1]), что на

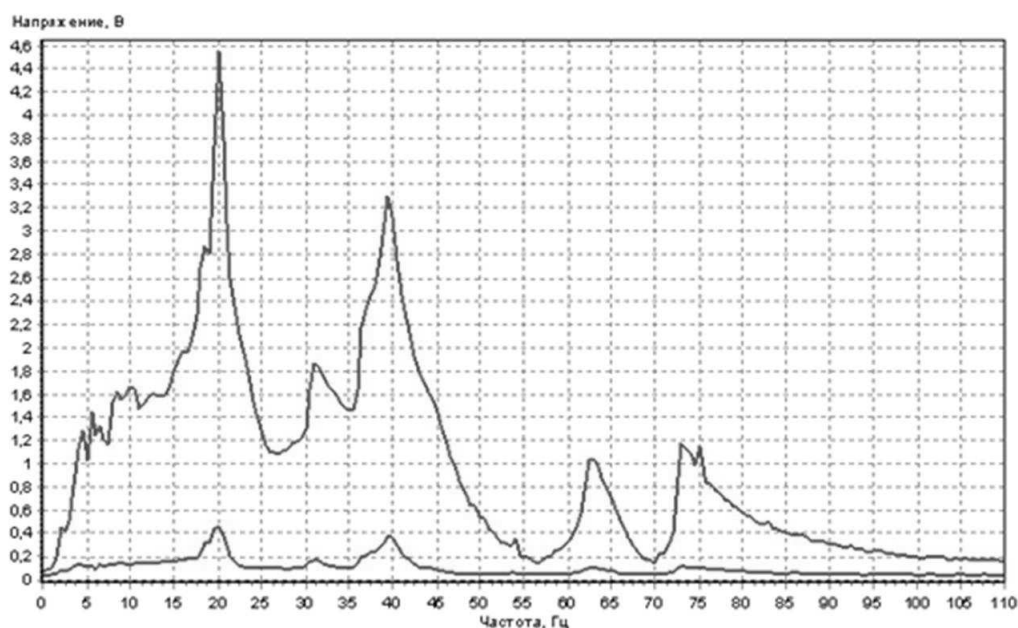


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика выходного напряжения пьезогенератора (вверху) и величины смещения свободного конца кантилевера (внизу) при величине присоединенной массы 14,5 г и величине активной нагрузки 180 кОм.

Присоединенная масса, г	Частота 1-й моды колебаний, Гц	Выходное напряжение, В
2,0	50	2,8
6,5	35	4,2
14,5	20	4,6
21,0	13	4,0

Таблица 1. Зависимость резонансных частот и выходного напряжения от присоединенной массы ПГ.



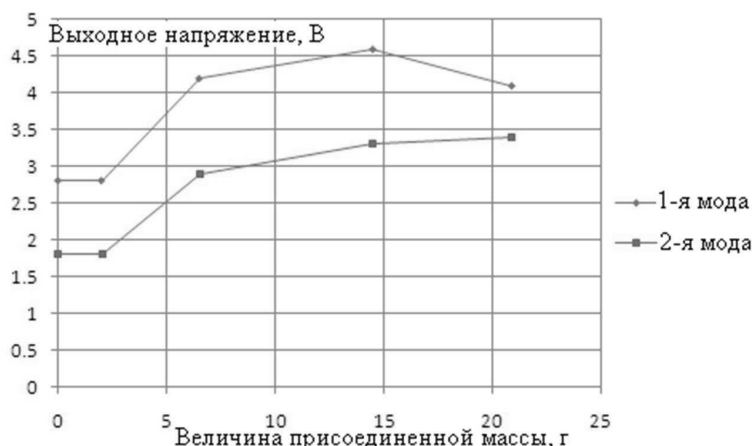


Рис. 5. Зависимость выходного напряжения пьезогенератора на резонансной частоте колебаний кантилевера 1-й моды (вверху) и 2-й моды (внизу) от величины присоединенной массы.

порядок меньше полученного нами из натурального эксперимента. Такое расхождение значений выходных характеристик ПГ обусловлено, возможно, в первую очередь тем, что в известной модели [1] (рис. 2) в частотном уравнении не учтен вклад биморфного преобразователя (БП). Кроме того, геометрия БП в известной [1] и исследованной нами моделях отличаются в достаточно большой степени. Авторы считают, что проблема совершенствования известной математической модели пьезогенераторов кантилеверного типа остается открытой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №: 10-08-00093-а, 10-08-13300 РТ\_оми, 12-08-01137-а, 10-08-00136-а).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Erturk A. Inman J. D.* Piezoelectric energy harvesting. First ed. // J. Willey and Sons, NY, 2011, ISBN: 978-0-470-68254-8
- [2] *Du Toit N. E., Wardle B. L. and Kim S.* Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters // *Journal of Integrated Ferroelectrics*. 2005. № 71. Pp. 121–160.
- [3] *Акопьян В. А., Захаров Ю. Н., Паринов И. А. и др.* Эффективность пьезоэлектрических генераторов кантилеверного типа. Теоретические оценки и экспериментальные результаты // *Нано- и микросистемная техника*. 2012. № 3. С. 42–47.

**Akopyan V. A., Zaharov Y. N., Parinov I. A., Rozkov E. V., Chebanenko V. A.** *Experimental investigation of the piezoelectric generator characteristics.* In work, the dependence of output characteristics of the cantilever type piezogenerators (PG) on an additive mass at free tip of the cantilever is studied. The experiment show that the output power of PG with polarization of bimorph piezoelements along length of the cantilever plate on order of magnitude exceeds PG power of other configurations.

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН С РАЗЛИЧНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ЧИСЛАМИ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА–ТЕЙЛОРА

**Алексеев А. А., Моршнева И. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в пространстве между двумя бесконечными соосными вращающимися цилиндрами в случае, когда спектр устойчивости основного режима содержит две пары чисто мнимых собственных значений. Эта ситуация соответствует пересечению бифуркаций возникновения автоколебаний с различными волновыми числами. Нелинейное взаимодействие спиральных волн в окрестности точки пересечения бифуркаций описывается системой комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд, которая может быть построена с помощью метода осреднения [1] либо теоремы о центральном многообразии [2]. Простейшие решения этой системы были выписаны в [3, 4]. В данной работе изучаются возможные сценарии переходов между режимами течения, когда значения параметров задачи близки к тем, которые соответствуют точке пересечения бифуркаций. Приводятся результаты расчетов точек пересечения бифуркаций, коэффициентов амплитудных уравнений и соответствующих режимов течения.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в пространстве между двумя соосными вращающимися цилиндрами описывается системой уравнений, состоящей из уравнения Навье–Стокса и уравнения неразрывности, которые можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{A}\mathbf{v} &= -\nabla p - \text{Re}_1 \mathbf{L}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\text{Re}_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2 / \nu$  — число Рейнольдса,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $d = \eta - 1$  — безразмерный зазор между цилиндрами,  $\eta = r_2 / r_1$  — отношение радиусов цилиндров,  $\Omega_1, \Omega_2$  — угловые скорости вращения внутреннего и внешнего цилиндра соответственно. Через  $\mathbf{A}$  обозначена линейная,  $\mathbf{L}$  — нелинейная часть уравнения Навье–Стокса в цилиндрических координатах. Соответствующие выражения приведены, например, в [3]. В качестве масштабов измерения длины, времени, скорости и давления выбраны соответственно  $dr_1$ ,  $d^2 r_1^2 / \nu$  (вязкое время),  $\Omega_1 r_1 d$  и  $\rho \Omega_1 \nu$ .

На границах цилиндров поставлены условия прилипания:

$$\begin{aligned}v_r = v_z = 0, v_\theta = 1/(\eta - 1), r = 1/(\eta - 1), \\ v_r = v_z = 0, v_\theta = \Omega\eta/(\eta - 1), r = \eta/(\eta - 1),\end{aligned}$$

где  $\Omega = \Omega_2 / \Omega_1$  — отношение угловых скоростей вращения цилиндров. При этом в качестве осевого краевого условия выбрано условие периодичности по  $z$  полей скорости и давления с заданным периодом  $2\pi/\alpha$ .

Задача обладает цилиндрической симметрией — она инвариантна относительно вращений  $L_\theta^\delta$ , трансляций  $L_z^h$  и инверсии  $J$ , действующих на поле скоростей по правилам:

$$\begin{aligned} (L_\theta^\delta \mathbf{v})(t, r, \theta, z) &= \mathbf{v}(t, r, \theta + \delta, z), \\ (L_z^h \mathbf{v})(t, r, \theta, z) &= \mathbf{v}(t, r, \theta, z + h), \\ (J\mathbf{v})(t, r, \theta, z) &= (v_r(t, r, \theta, -z), v_\theta(t, r, \theta, -z), -v_z(t, r, \theta, -z)). \end{aligned}$$

При всех значениях параметров система имеет точное решение с вектором скорости  $\mathbf{v}_0(r) = (0, v_{0\theta}(r), 0)$  — течение Куэтта. Здесь:

$$v_{0\theta} = ar + b/r, \quad a = \frac{\text{Re}_2 - \text{Re}_1}{\text{Re}_1(\eta^2 - 1)}, \quad b = -\frac{\text{Re}_2 - \text{Re}_1\eta^2}{\text{Re}_1(\eta^2 - 1)d^2},$$

где  $\text{Re}_1 = \Omega_1 r_1^2 d^2 / \nu$ ,  $\text{Re}_2 = \Omega_2 r_2^2 d^2 / \nu$  — числа Рейнольдса, связанные с вращением внутреннего и внешнего цилиндра соответственно.

Нейтральные кривые линейной устойчивости основного режима относительно возмущений вида  $\Phi = e^{\sigma t - i(m\theta + k\alpha z)}\varphi(r)$  и  $\Phi = e^{\sigma t - i(n\theta + l\alpha z)}\varphi(r)$  пересекаются [3]. Следуя теории бифуркаций коразмерности два для задач с цилиндрической симметрией, развитой В. И. Юдовичем [1], Ж. Иоссом и П. Шосса [2], в [3] рассматривается пересечение нейтральных кривых, отвечающих возмущениям с различными азимутальными ( $m$  и  $n$ ) и аксиальными ( $k$  и  $l$ ) квантовыми числами. В рассматриваемом случае линейная задача устойчивости имеет следующие собственные решения («нейтральные моды»):

$$\begin{aligned} \Phi_{mk+} &= e^{i(\omega_m t - (m\theta + k\alpha z))}\varphi_{mk+}(r), \\ \Phi_{mk-} &= e^{i(\omega_m t - (m\theta - k\alpha z))}\varphi_{mk-}(r) = J\Phi_{mk+}, \\ \Phi_{nl+} &= e^{i(\omega_n t - (n\theta + l\alpha z))}\varphi_{nl+}(r), \\ \Phi_{nl-} &= e^{i(\omega_n t - (n\theta - l\alpha z))}\varphi_{nl-}(r) = J\Phi_{nl+}. \end{aligned}$$

Нелинейное взаимодействие нейтральных мод в окрестности точки пересечения нейтральных кривых описывается системой комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд, которая является обобщением известного амплитудного уравнения Ландау:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{mk+} &= \xi_{mk+}(\sigma + A|\xi_{mk+}|^2 + B|\xi_{mk-}|^2 + C|\xi_{nl+}|^2 + D|\xi_{nl-}|^2), \\ \dot{\xi}_{mk-} &= \xi_{mk-}(\sigma + B|\xi_{mk+}|^2 + A|\xi_{mk-}|^2 + D|\xi_{nl+}|^2 + C|\xi_{nl-}|^2), \\ \dot{\xi}_{nl+} &= \xi_{nl+}(\mu + P|\xi_{mk+}|^2 + S|\xi_{mk-}|^2 + U|\xi_{nl+}|^2 + V|\xi_{nl-}|^2), \\ \dot{\xi}_{nl-} &= \xi_{nl-}(\mu + S|\xi_{mk+}|^2 + P|\xi_{mk-}|^2 + V|\xi_{nl+}|^2 + U|\xi_{nl-}|^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее точка означает производную по величине  $\tau = \varepsilon^2 t$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр (корень из надкритичности). Для исследования системы (1) удобно перейти к системе уравнений для модулей комплексных амплитуд («моторной подсистеме»):

$$\dot{\rho}_{mk+} = \rho_{mk+}(\sigma_r + A_r \rho_{mk+}^2 + B_r \rho_{mk-}^2 + C_r \rho_{nl+}^2 + D_r \rho_{nl-}^2), \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{mk-} &= \rho_{mk-}(\sigma_r + B_r \rho_{mk+}^2 + A_r \rho_{mk-}^2 + D_r \rho_{nl+}^2 + C_r \rho_{nl-}^2), \\ \dot{\rho}_{nl+} &= \rho_{nl+}(\mu_r + P_r \rho_{mk+}^2 + S_r \rho_{mk-}^2 + U_r \rho_{nl+}^2 + V_r \rho_{nl-}^2), \\ \dot{\rho}_{nl-} &= \rho_{nl-}(\mu_r + S_r \rho_{mk+}^2 + P_r \rho_{mk-}^2 + V_r \rho_{nl+}^2 + U_r \rho_{nl-}^2).\end{aligned}$$

Равновесиям системы (2) соответствуют стационарные, периодические и квазипериодические решения исходной системы Навье–Стокса. В [3, 4] выписаны эти равновесия вместе с условиями их существования и устойчивости. Перечислим их:

- Инверсионно-связанные пары спиральных волн (SPI<sub>m</sub> и SPI<sub>n</sub>).
- Азимутальные волны (AW<sub>m</sub> = SPI<sub>m</sub> + JSPI<sub>m</sub> и AW<sub>n</sub> = SPI<sub>n</sub> + JSPI<sub>n</sub>).
- Инверсионно-связанные пары двойных спиральных волн (DSPI<sub>++(--)</sub> = SPI<sub>m</sub> + SPI<sub>n</sub> (JSPI<sub>m</sub> + JSPI<sub>n</sub>) и DSPI<sub>+-(-+)</sub>).
- Суперпозиция азимутальных волн (DAW = AW<sub>m</sub> + AW<sub>n</sub>).

В данной работе изучаются возможные переходы между режимами на примере точек пересечения для азимутальных квантовых чисел  $m/n = 2/4$ .

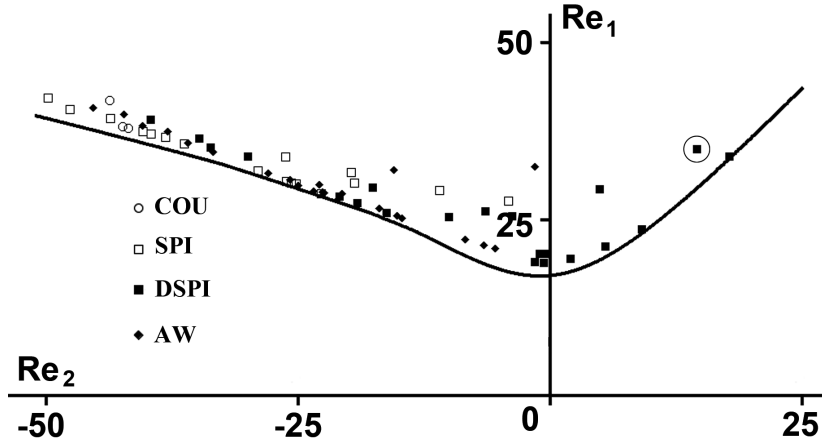


Рис. 1. Результаты расчета точек пересечения бифуркаций для  $m/n = 2/4$  и различных  $k/l$  при  $\alpha = 1.0$ ,  $r_1/r_2 = 0.883$ . Сплошная линия — кривая первой потери устойчивости.

Результаты расчета точек пересечения бифуркаций приведены на рис. 1. Различными символами отмечены точки, в окрестности которых не существует устойчивых вторичных режимов с заданными параметрами (COU); существуют лишь устойчивые спиральные волны (SPI); спиральные и двойные спиральные волны (DSPI); азимутальные волны и, быть может, любая комбинация спиральных волн (AW). Обведенной точке соответствуют значения параметров  $Re_1 \approx 34$ ,  $Re_2 \approx 18$ ,  $m/n = 2/4$ ,  $k/l = 4/3$ ,  $\alpha = 1$ . Режимы движения, существующие в окрестности этой точки, показаны на рис. 2, а соответствующая бифуркационная диаграмма — на рис. 3. На диаграмме сплошными линиями показаны устойчивые режимы, пунктирными — неустойчивые. Параметр  $\beta$  отвечает за обход окрестности точки пересечения нейтральных кривых и определяется из равенств  $\cos \beta = \sigma_r$ ,

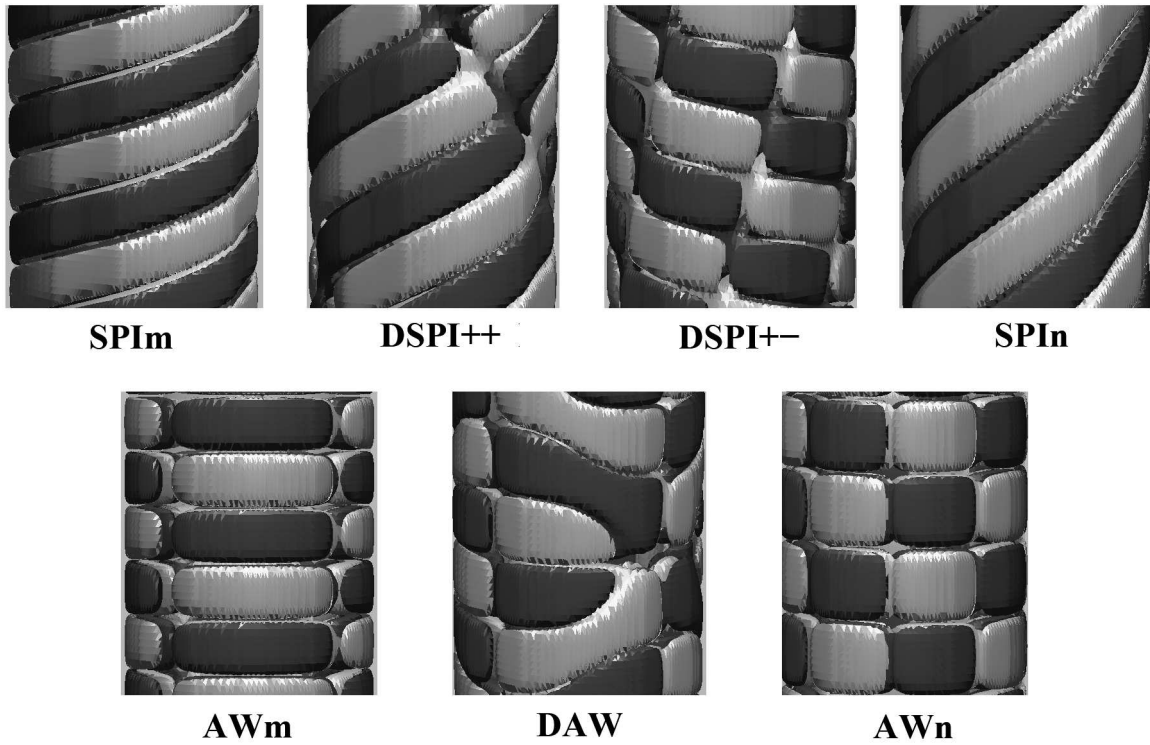


Рис. 2. Режимы движения. Показаны поверхности уровня азимутальной компоненты завихренности  $W_\theta = \partial_z v_r - \partial_r v_z$ .

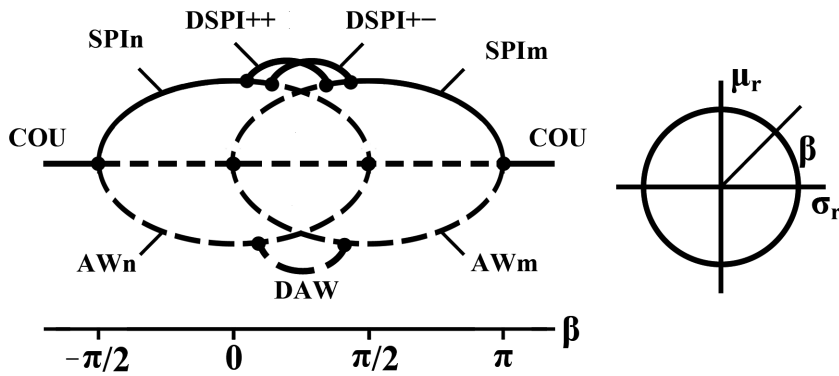


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма, соответствующая обведенной точке на рис. 1.

$\sin \beta = \mu_r$ . Переход через каждую из прямых  $\sigma_r = 0$ ,  $\mu_r = 0$  соответствует переходу через нейтральную кривую.

Из рис. 3 видно, что схема переходов между течениями может иметь достаточно сложную структуру. В частности, имеются области, в которых существует одновременно несколько устойчивых режимов. В экспериментах при соответствующих значениях параметров могут наблюдаться гистерезисные явления.

В случае выполнения дополнительных условий, наложенных на коэффициенты, у моторной подсистемы могут существовать и решения, не лежащие на инвариантных подпространствах, в частности, с тремя ненулевыми амплитудами или

с четырьмя не равными друг другу (и отличными от нуля) амплитудами. От них в результате бифуркации Хопфа могут ответвляться предельные циклы, приводящие, в свою очередь, через серию бифуркаций к более сложным режимам, в частности, к странным аттракторам. Примеры таких режимов приведены в [5]. Этим решениям могут соответствовать более сложные режимы движения жидкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-31262).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннотации докладов 6-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 661.
- [2] Chossat P., Iooss G. The Couette–Taylor problem. New York: Springer-Verlag, 1994. 233 p.
- [3] Юдович В. И., Овчинникова С. Н. Пересечение бифуркаций в проблеме Куэтта–Тейлора. I. Нерезонансный случай. Деп. в ВИНТИ 5.04.05, № 458-B2005, 33 с.
- [4] Моршнева И. В., Овчинникова С. Н. Нерезонансный случай при пересечении бифуркационных кривых в задаче Куэтта–Тейлора // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 6. С. 54–62.
- [5] Алексеев А. А. Странные аттракторы в системах с цилиндрической симметрией // Труды XV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону, 4–6 декабря 2011. Т. 2. С. 16–20.

**Alexeev A. A., Morshneva I. V.** *Interaction of spiral waves with different wave-numbers in the Couette–Taylor problem.* The problem of viscous fluid flow between two infinite concentric rotating cylinders is studied. Nonlinear interaction between spiral waves with different wave-numbers is investigated using codimension-2 bifurcation theory, developed by V. I. Yudovich and independently by G. Iooss and P. Chossat. Results of calculation of codimension-2 bifurcation points and flow regimes for the ratio of azimuthal quantum numbers being  $2/4$  are presented. Possible transitions between flow regimes are discussed.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ БИНГАМА

**Баженов Е. Е.\* , Чехонин К. А.\*\***

*\*Дальневосточный государственный гуманитарный университет, Хабаровск*

*\*\*Дальневосточный государственный университет путей сообщения, Хабаровск*

Рассматривается течение нелинейно-вязкопластической жидкости в области сужения двух цилиндров. Численное решение задачи производится с использованием метода конечных элементов, div-устойчивой аппроксимации искомых функций и обобщенного вариационного принципа. Предложен алгоритм решения задачи, устойчивый в широком диапазоне значений реологических параметров. Показано влияние реологических параметров нелинейности модели и числа Бингама на распад «квазитвердого ядра» и эволюцию области перестройки течения.

**1. Введение.** Основной сложностью численного моделирования движения нелинейно-вязкопластической жидкости является наличие у среды предельного напряжения сдвига (предела текучести). В этом случае, математическая постановка задачи даже для простейших типов течений приводит к краевым задачам с нелинейными дифференциальными уравнениями и «неизвестными границами» (жидкость-квазитвердое тело). Общие математические методы исследования таких задач возникли совсем недавно и в основном основаны на использовании вариационных неравенств. Основной вклад в математическое исследование течений вязкопластических сред внесли Мосолов П. П., Мясников В. П. [1], которыми сформулирован вариационный принцип для движения жестко-вязкопластической среды общего вида и обоснована эквивалентность дифференциальной и вариационной постановок задачи (задача Мосолова–Мясникова).

В работах Дюво и Лионса [2] для математического описания движения среды Бингама применен интенсивно развиваемый авторами аппарат вариационных неравенств.

Сущность подхода, используемого в настоящей работе и получившего название модели жесткого ядра, заключается в замене полных уравнений Генки, описывающих пространственное течение вязкопластических сред, уравнениями течения нелинейно-вязких жидкостей [3]. В этом случае возникает сложная проблема выбора коэффициента вязкости, получившего название эффективной вязкости, в уравнениях Стокса, который характеризует исследуемую вязкопластическую среду.

Для решения этих проблем при численном решении задачи о движении нелинейно-вязкопластической жидкости с использованием модели жесткого ядра применяется регуляризация (усреднение) [3], которая заключается в использовании малого параметра  $0 < \xi = const \ll 1$ , приводящего к модифицированной реологической модели.

Выбор значения малого параметра производится путем численного эксперимента как наименьшего значения, приводящего к устойчивому процессу численного решения с обеспечением заданной точности.

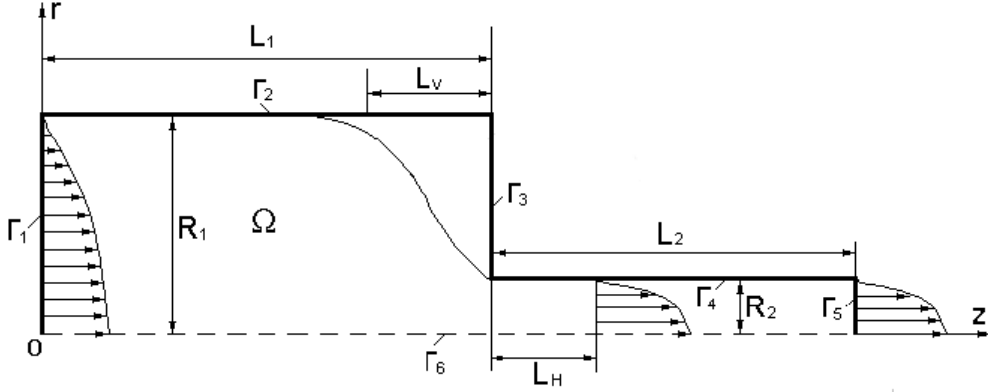


Рис. 1. Расчетная область течения нелинейно-вязкопластичной жидкости в канале с внезапным сужением 4:1.  $L_v$  — характерный размер «квазитвердого ядра»;  $L_H$  — длина участка перестройки течения;  $R_1, R_2$  — радиус,  $L_1, L_2$  — длина участка до сужения и после сужения канала соответственно;  $\Gamma_1$ – $\Gamma_6$  — границы области.

Рассмотрим медленное ( $Re \ll 1$ ) течение нелинейно-вязкопластической среды, описываемой реологической моделью Шульмана [4]. Течение происходит в изотермических условиях при отсутствии массовых сил и постоянным расходом  $Q$ . Область течения с внезапным сужением двух каналов цилиндрической формы с соотношением их диаметров 4:1 приведена на рис. 1.

С учетом принятых допущений в основу математического описания задачи о движении нелинейно-вязкопластической жидкости в области  $\Omega$  (рис. 1) используем обобщенный вариационный принцип [3] для функционала:

$$J_{0\xi}(u_i, p, e_{ij}, \lambda_{ij}) = \int_{\Omega} \left\{ \psi_{\xi}(p, e_{ij}) + 2\eta\lambda_{ij} \left[ e_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{c\eta}{2} \left[ e_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]^2 \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma, \quad (1)$$

где  $\psi_{\xi}(p, e_{ij}) = 2\mu e_{ij} e_{ji} - p e_{ij} \mathfrak{g}_{ij}$ ,  $(\sigma_{ij})_{\xi} = \frac{\partial \psi_{\xi}(p, e_{ij})}{\partial e_{ij}}$ ,  $\mu = \left[ \tau_0^{\frac{1}{n}} + (\mu_p A_{\xi})^{\frac{1}{m}} \right]^n A_{\xi}^{-1}$  — эффективная вязкость,  $e_i$  — тензор скоростей деформаций,  $A_{\xi} = \sqrt{2e_{ij} e_{ji} + \xi^2}$ ,  $\xi$  — параметр регуляризации,  $\tau_0$  — предел текучести среды,  $\mu_p$  — пластическая вязкость,  $m, n$  — параметры нелинейности реологической модели,  $\rho$  — плотность среды,  $u_i$  — компоненты вектора скорости,  $p$  — гидродинамическое давление,  $t_i$  — вектор нагрузки на границе  $\Gamma$ ,  $\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)$ .

Варьируя исходный регуляризованный функционал (1) по независимым переменным  $u_i, p, e_{ij}, \lambda_{ij}$ , получим:

$$\int_{\Omega} [(2c\eta\gamma_{ij} - 2\eta(c e_{ij} + \lambda_{ij})) \delta\gamma_{ij} - p (\nabla_i \delta u_i)] d\Omega = 0, \quad \forall \delta u_i, \quad (2)$$

$$- \int_{\Omega} \delta p \nabla_i u_i d\Omega = 0, \quad \forall \delta p, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} 2\eta [e_{ij} - \gamma_{ij}] \delta\gamma_{ij} d\Omega = 0, \quad \forall \delta\lambda_{ij}, \quad (4)$$



$$\int_{\Omega} [(2\mu + c\eta) e_{ij} + \eta (\lambda_{ij} - c\gamma_{ij})] \delta e_{ij} d\Omega = 0, \quad \forall \delta e_{ij}, \quad (5)$$

где  $i, j = \overline{1 \dots 3}$ ,  $(\delta u_{ij}, \delta p, \delta \lambda_{ij}, \delta e_{ij})$  — тестовые функции,  $\eta$  — параметр устойчивости решения задачи, определяемый выражением:

$$\eta \geq \mu \left[ \frac{n}{m} \left( \frac{\tau_0^{\frac{1}{n}}}{(\mu_p A)^{\frac{1}{m}}} + 1 \right)^{-1} \right], \quad (6)$$

$c > 0$  — константа, характеризующая влияние штрафа. В этом случае исходная задача расщепляется на линейную и нелинейную подзадачи, для решения которых организуется итерационный процесс. Линеаризованная часть (2)–(4) задачи решается методом Удзавы, а нелинейная (5) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение с параметром устойчивости (6).

Уравнения (2)–(5) замыкаем граничными условиями: на входе  $\Gamma_1$  в область  $\Omega$  течения задаем профиль установившегося течения жидкости Шульмана с заданными значениями реологических параметров и известным постоянным расходом ( $Q = const$ ) на твердых стенках  $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  — условия непротекания и прилипания, на выходе  $\Gamma_5$  из расчетной области  $\Omega$  задаем слабые условия установления течения, а на оси симметрии  $\Gamma_6$  — условия симметрии.

Таким образом, задача о медленном течении нелинейно-вязкопластической среды в осесимметричном канале с внезапным сужением сводится к определению компонентов вектора скорости  $(u_i)$ , эффективной вязкости  $\mu$  и давления  $p$ , удовлетворяющих уравнениям (2)–(5).

Численное решение задачи производим методом конечных элементов с использованием div-устойчивого четырехугольного изопараметрического элемента второго порядка [3]. Для анализа результатов численного моделирования используем поправку Куэтта  $\eta_q = \frac{\Delta P - \Delta P_1 - \Delta P_2}{2\tau_w}$ , и число Бингама:  $Bi = \frac{\tau_0}{\mu_p A_{cp}}$ , где  $\Delta P$  — перепад давления во всей области  $\Omega$ ;  $\Delta P_1$  — перепад давления в области с радиусом  $R_1$  и длиной  $L_1$ ;  $\Delta P_2$  — перепад давления в области с радиусом  $R_2$  и длиной  $L_2$  (рис. 1);  $\tau_w$  — значение напряжения трения на стенке трубы меньшего диаметра на выходе из области.

На рис. 2 иллюстрируется зависимость значения поправки Куэтта от степени нелинейности жидкости Шульмана и числа Бингама. Из результатов расчетов следует, что  $\eta_q = 0,589$  при  $\frac{n}{m} = 1$ ,  $Bi = 0$  и значительно увеличивается с ростом псевдопластичности ( $\frac{n}{m} < 1$ ) и пластических свойств ( $Bi > 0$ ) жидкости Шульмана. В то же время рост дилатантных свойств жидкости ( $\frac{n}{m} > 1$ ) при  $Bi = 0$  приводит в начале к уменьшению значения поправки Куэтта с минимумом  $n_q = 0,3$  при  $\frac{n}{m} = 1,4$ , а затем к сильному росту. Сравнение с численными результатами, приведенными в работе [5] в диапазоне изменения степени нелинейности  $0,5 < \frac{n}{m} \leq 1$ , показало хорошее согласование с проведенными расчетами.

На рис. 3 иллюстрируется влияние числа Бингама на распад «квазитвердого ядра» течения. Из результатов исследований следует, рост пластических свойств жидкости приводит к значительному уменьшению области перестройки течения, а при числе Бингама 528 она практически исчезает. Кроме этого предложенный алгоритм оказался устойчивым в широком диапазоне реологических параметров.

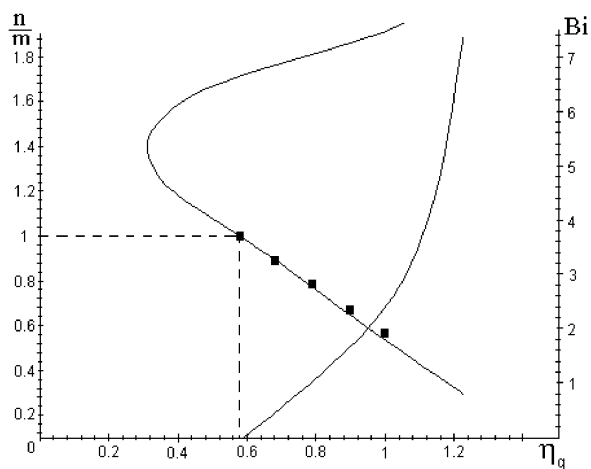


Рис. 2. Зависимость значения величины поправки Куэтта от коэффициентов нелинейности среды  $n$ ,  $m$  и параметра Бингама.

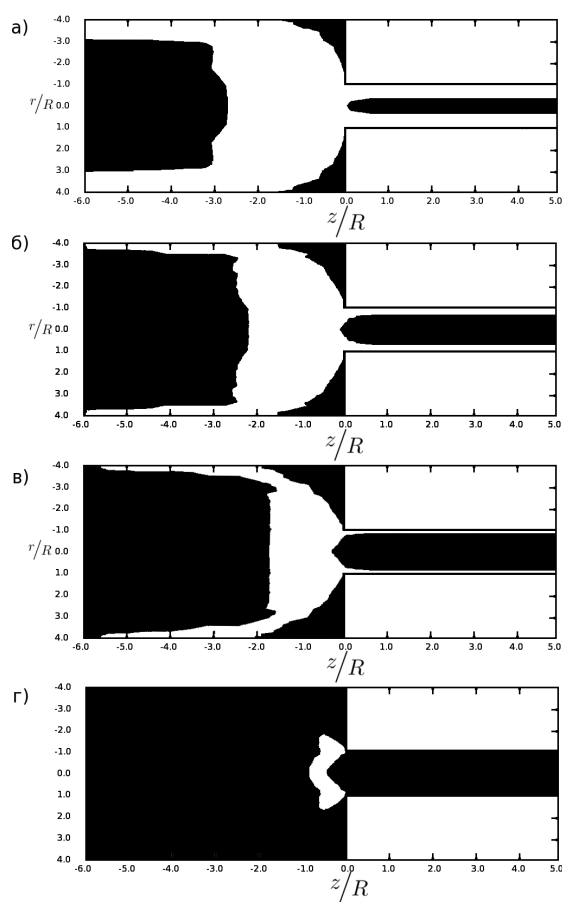


Рис. 3. Влияние числа Бингама на распад «кваситвердого ядра». а)  $Bi = 3,9$ , б)  $Bi = 27$ , в)  $Bi = 127$ , г)  $Bi = 528$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жестко-пластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
- [2] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
- [3] Чехонин К. А. Метод конечных элементов и обобщенный вариационный принцип для решения задач реодинамики нелинейно-вязкопластичных жидкостей // Математическое моделирование. Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 1998. Вып. 4. С. 14–20.
- [4] Шульман З. П. Конвективный перенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975. 344 с.
- [5] Kim-E. V. E., Brown R. A., Armstrong R. The roles of inertia and shearthinning in flow of an inelastic liguid through an axisymmetric sudden contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1983. V.13. Pp.341–363.
- [6] Чехонин К. А., Баженов Е. Е. Устойчивый численный алгоритм решения задачи Мосолова–Мясникова при больших числах Бингама // [Электронный ресурс] Материалы конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления». Владивосток, 2011. 1. CD-ROM. Загл. с этикетки диска.
- [7] Чехонин К. А., Сухинин П. А. Движение нелинейно-вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема // Матем. моделирование. 2001. 13:3. С. 89–102.

**Bazhenov E. E., Chekhonin K. A** *Mathematical modeling of non-linear visco-plastic fluid flow with large Bingham numbers.* In this paper we analyzed non-linear visco-plastic fluid flow through constrictions of two cylinders. Numerical solution is based on the finite elements method, div-stable approximation of unknown functions, and general variational principle. Also for the solving problem the stable algorithm which over a wide range of rheological parameters is proposed. The investigation showed the influence of the rheological parameters of model nonlinearity and Bingham number on the disintegration of «quasi-solid core» and the evolution of the restructuring flow.

# ЗАТУХАНИЕ В КОНЦЕ СИСТОЛЫ КОРОТКИХ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В АОРТЕ

**Батищев В. А., Петровская Д. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Исследованы короткие спиральные волны, бегущие в аорте на фоне длинных продольных пульсовых волн и стационарного потока. Аорта моделируется цилиндром кругового сечения, ограниченным тонкой упругой изотропной оболочкой. Спиральные волны вызваны распределением вихрей на входе в аорту. Показано, что механизмом переноса этих волн является стационарный поток, причем фазовая скорость волн совпадает со скоростью потока на оси цилиндра. Свойства коротких спиральных волн слабо зависят от упругих свойств стенки аорты. Короткие спиральные волны распределены по всему поперечному сечению аорты, в отличие от длинных волн, которые локализованы в пограничном слое вблизи стенки аорты. Показано, что короткие спиральные волны затухают со временем в конце систолы. Часть мод этих волн локализована в критическом слое вблизи оси цилиндра.

Во второй половине прошлого века появились сообщения об обнаружении винтовых течений крови в артериях человека и животных [1, 2]. В этих работах на основе анализа экспериментальных данных показано, что одной из причин возникновения спиральных течений крови может быть закрученная структура стенок левого желудочка сердца, что порождает вихревые течения крови на входе в аорту и перенос вихрей потоком жидкости. Среди причин возникновения спиральных течений крови могут быть и механические свойства стенок сосудов и неустойчивость течения крови в левом желудочке сердца при истечении в аорту с последующей бифуркацией вращения и др. В работе [3] показано, что анизотропия стенок кровеносных сосудов приводит к появлению длинных спиральных волн. Однако, эти волны локализируются в пограничном слое вблизи стенок сосудов. В настоящей работе рассчитаны короткие спиральные волны, которые заполняют все поперечное сечение сосуда и слабо зависят от упругих свойств оболочки. Показано, что механизмом переноса этих волн является стационарный поток, который наблюдается в кровеносном сосуде. Численные расчеты показали, что короткие спиральные волны затухают в зависимости от времени в конце систолы. (Систола — одна из фаз сердечного цикла — сокращение. В результате систолы кровь нагнетается в артериальную систему).

Рассматривается задача о движении спиральных волн малой амплитуды в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей круговой длинный цилиндр, который ограничен тонкой упругой изотропной оболочкой. Спиральные волны распространяются на фоне стационарного потока и длинных продольных пульсовых волн, которые наблюдаются в крупных кровеносных сосудах. Движение жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса совместно с динамическими уравнениями тонкой упругой оболочки в рамках безмоментной теории в цилиндрических координатах. Длинные продольные пульсовые волны изучались во многих работах [1]. В [3] поле скоростей длинных волн представлено в виде ряда Фурье с нулевой гармоникой, которая представляет собой течение Пуазейля. В связи с этим

предполагается, что стационарный поток определяется полем скоростей, у которого осевая компонента скорости изменяется по квадратичному закону от радиальной координаты, а остальные компоненты отсутствуют. Отметим, что в аорте собаки средняя скорость стационарного потока крови изменяется в пределах от 0,1 до 0,4 м/с [1].

Изучается осесимметричная задача в безразмерных переменных, у которой поле скоростей, давление и смещения точек срединной поверхности оболочки не зависят от окружной цилиндрической координаты. Течение жидкости предполагается периодическим по времени, период которого равен периоду сердечного цикла [1]. Приведем уравнение для расчета окружной компоненты скорости

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + R(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}) = \varepsilon_v^2 (\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta^2}{r^2}). \quad (1)$$

Здесь  $v_r, v_\theta, v_z$  компоненты вектора скорости,  $\varepsilon_v = \sqrt{\nu/\omega a^2}$  — малый параметр, пропорциональный толщине пограничного слоя вблизи поверхности цилиндра,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости,  $a$  — радиус срединной поверхности оболочки,  $\omega$  — частота сердечного цикла,  $R = U/a\omega$ , где  $U$  — характерная скорость стационарного потока.

Решение задачи представим в виде суммы двух вектор-функций  $V = V_1 + V_2$ . Вектор  $V_1$  — описывает стационарный поток и короткие волны. Вектор  $V_2$  описывает длинные волны, решение для которых известно [1]. Эти волны движутся с фазовой скоростью, близкой к значению  $c_0 = \sqrt{hE/(2a\rho)}$ , где  $h, \rho, E$  — соответственно толщина оболочки, плотность жидкости и модуль Юнга материала оболочки.

Задача содержит несколько малых параметров, один из которых определяется формулой  $\varepsilon_k = a\omega/c_0$ . Для аорты собаки  $\varepsilon_k \sim 10^{-2}$ . Решение задачи строится асимптотическим методом путем разложения полевых характеристик в ряды по степеням малого параметра  $\varepsilon_k$ . Осевая компонента скорости длинных волн имеет порядок  $O(1)$ . Предполагается, что окружная компонента скорости жидкости мала и имеет порядок  $O(\varepsilon_k)$ .

Приведем асимптотические разложения компонент вектора  $V_1$ , которые следуют из оценок слагаемых в уравнениях Навье–Стокса и динамических уравнений оболочки

$$w_\theta = \varepsilon_k w_{\theta 1} + \dots, w_z = V(r) + \varepsilon_k^2 w_{z 1} + \dots, (\varepsilon_k \rightarrow 0). \quad (2)$$

Здесь  $w_\theta, w_z$  — соответственно окружная и осевая компоненты скорости жидкости,  $V(r)$  — скорость стационарного потока. Аналогичные разложения записываем и для других компонент. Подставляем асимптотические ряды в уравнения движения, краевые условия и приравниваем нулю сумму коэффициентов при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon_k$ . Для окружной компоненты скорости получаем краевую задачу, учитывающую конвективный перенос стационарным течением и продольной длинной волной

$$\frac{\partial w_{\theta 1}}{\partial t} + R(v_{z 0}(r, z_1, t) + V(r)) \frac{\partial w_{\theta 1}}{\partial z} = \varepsilon_v^2 (\nabla^2 w_{\theta 1} - \frac{w_{\theta 1}}{r^2}), \quad (3)$$

$$w_{\theta 1} = 0, (r = 1); \quad w_{\theta 1} = 0, (r = 0); \quad w_{\theta 1} \rightarrow 0, (z \rightarrow 1). \quad (4)$$

Здесь  $v_{z0}$  — осевая компонента скорости длинной пульсовой волны,  $z_1 = \varepsilon_k z$  — медленная осевая координата. Функция  $V(r)$  представляет собой квадратичный профиль скорости стационарного течения  $V(r) = 1 - r^2$ . На стенках цилиндра функция  $w_{\theta 1}$  обращается в ноль (условие прилипания). Показано, что для коротких волн вязкоупругие свойства оболочки учитываются только в высших приближениях.

Короткие спиральные волны находятся путем решения задачи на собственные значения (3), (4) асимптотическим и численным методами. Функция  $v_{z0}$  представлена в виде суммы, описывающей волны в идеальной жидкости и колеблющийся периодический по времени пограничный слой на стенке цилиндра. Главный вклад в выражении для коротких спиральных мод определяется формулой

$$w_{\theta 1} = Q_{nm}(t, z_1)(F_{n,m}(r) \exp(i(k_{n,m} - nt)) + H_{n,m} \exp(ik_{n,m}z)) . \quad (5)$$

Здесь  $n, m = 1, 2, 3, \dots$ . Значению  $n = 0$  соответствуют «квазистационарные» моды. Функция  $Q_{n,m}$  учитывает влияние длинных пульсовых волн вне пограничного слоя. Амплитуды  $F_{n,m}$  найдены численно и асимптотически. Функция  $H_{n,m}$  — невязка, которая мала по сравнению с  $F_{n,m}$  при  $m = 1$ . Показано, что фазовые скорости спиральных волн в главном приближении совпадают с максимальным значением скорости стационарного потока. Декременты затухания этих волн имеют порядок  $O(\varepsilon_v)$ .

На рис. 1 изображена зависимость амплитуды окружной компоненты скорости спиральной волны от радиальной координаты при  $n = m = 1$  (первая мода) для различных значений времени. Кривым 1–4 соответствуют значения безразмерного времени  $0, 0.02\pi, 0.15\pi, 0.4\pi$ . Период сердечного цикла в безразмерных переменных равен  $2\pi$ . В начальный момент времени задано ненулевое значение азимутальной скорости (кривая 1). С ростом времени в течение систолы максимум азимутальной компоненты убывает (кривые 2, 3 и 4). К концу систолы азимутальная компонента затухает и достигает минимального значения (кривая 4).

На рис. 2 изображена зависимость окружной компоненты скорости от времени при  $r = 0.55, z = 1$ . Для кровеносной системы собаки период систолы составляет

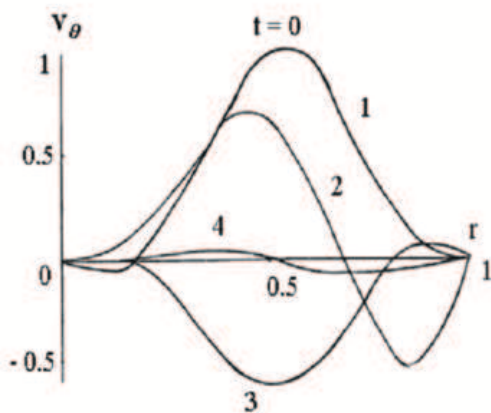


Рис. 1. Зависимость окружной компоненты скорости от радиальной координаты.

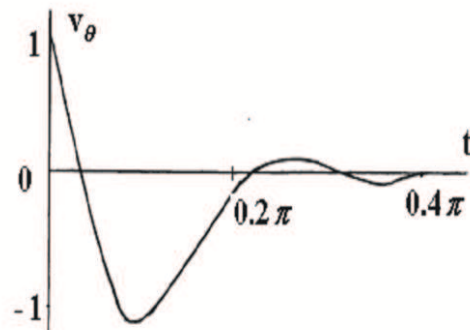


Рис. 2. Зависимость окружной скорости от времени в течении систолы.

приблизительно от одной четверти до одной трети сердечного цикла. Численные расчеты показывают, что наибольшее значение окружной скорости достигается в начале систолы. К концу систолы спиральная волна затухает со временем.

Кроме спиральных волн в аорте распространяются квазистационарные спиральные моды. Главные члены асимптотических разложений этих мод не зависят от времени и не изменяют направления вращения жидкости, в отличие от спиральных волн. Динамика закрученного потока различна в систолу и диастолу. Во время систолы закрученные течения крови определяются длинными и короткими спиральными волнами, а также квазистационарными модами. В диастолу спиральные волны исчезают и закрученное течение определяется только квазистационарными модами.

**Заключение.** В работе построены асимптотические разложения коротких спиральных волн в упругом цилиндре, моделирующем аорту. Показано, что эти спиральные волны затухают со временем к концу систолы. Динамика спиральных волн различна во время систолы и диастолы. Во время систолы спиральные течения жидкости состоят из длинных и коротких спиральных волн и квазистационарных спиральных мод, во время диастолы закрученный поток определяется только квазистационарными модами.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-00582-а.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [2] Кикнадзе Г. И., Олейников В. Г., Геччиладзе И. А., Городков А. Ю., Доброва И. Б., Бакей Ш., Бара Ж. Л. О структуре потока в левом желудочке сердца и аорте с применением точных решений нестационарных уравнений гидродинамики и морфометрических исследований // ДАН. 1996. Т. 351. № 1. С. 119–122.
- [3] Богаченко С. Е., Устинов Ю. А. Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии // Рос. журн. биомеханики. 2009. Т. 13. № 1. С. 29–42.

**Batischev V. A., Petrovskaya D. S.** *Dissipation of short spiral waves in the aorta at the end of systole.* In this paper the short spiral waves are investigated. These waves spread in stationary flow simultaneously with the longest waves. Short waves caused by distribution of vortices at the entrance to the aorta. Mechanism of transport of these waves is the stationary stream. The properties of short spiral waves weakly depend on the elastic properties of aortic wall. We shown that the short spiral waves dissipate at the end of the systole.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВ КОЖИ НА ОСНОВЕ СЛОИСТОЙ МОДЕЛИ

**Богачев И. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Предложен способ идентификации свойств неоднородного кожного покрова на основе модели стандартного вязкоупругого тела с учетом многослойной структуры при анализе сдвиговых колебаний. С использованием осреднения двумерная задача сведена к одномерной коэффициентной обратной задаче, решение которой осуществлено с привлечением итерационного процесса, на каждом этапе которого решаются интегральные уравнения Фредгольма первого и второго родов. Приведены вычислительные эксперименты реконструкции неоднородных по толщине свойств кожного покрова.

**Введение.** В настоящее время анализ состояния кожного покрова пациента является одним из важнейших методов современной диагностики состояния здоровья пациента. Заболевания внутренних органов во многих случаях могут выражаться в изменении свойств кожного покрова, например, отек кожи и его состояние в ряде случаев может указывать на заболевания почек и на степень их тяжести.

Анизотропия и гетерогенность механических свойств кожи определяются многослойной (эпидермис, дерма и подкожный жир) [1] структурой кожи и влекут за собой различное поглощение механической энергии в каждом из слоев, что проявляется в особенностях распространения механических волн на границе раздела этих слоев, обладающих разными вязкоупругими [2] свойствами.

Исследование современных методов анализа характеристик кожного покрова показывает, что для объективной их оценки использование только одного метода малоэффективно и для более полного изучения свойств кожи необходимо применять совокупность различных методов.

В данной работе рассмотрена задача идентификации свойств неоднородного по толщине вязкоупругого слоя, моделирующего кожный покров, на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Предполагается, что слой в свою очередь имеет три составляющих, моделирующих подкожный жир, дерму и эпидермис. С помощью осреднения задача сведена к более простой, для которой построена процедура идентификации на основе итерационного процесса. Приведены результаты численных экспериментов.

## **1. Постановка задачи.**

Рассмотрим установившиеся сдвиговые колебания неоднородного по толщине вязкоупругого слоя, занимающего область  $S = \{x_1, x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h]\}$ . Нижняя грань слоя  $S_1$  жестко закреплена, на части верхней границы  $S_{20}$  приложена касательная нагрузка.

Предполагается, что вязкоупругий слой в свою очередь состоит из трех слоев, толщины которых известны. Данное допущение является естественным, так как в настоящее время существует множество способов определения толщин слоев кожного покрова, таких как оптическая когерентная томография, метод ультразвуковой микроскопии, магнитно-резонансная томография и др.



После отделения временного множителя соответствующие уравнение и граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} (\mu u_{,1})_{,1} + (\mu u_{,3})_{,3} + \rho \omega^2 u &= 0, \\ u|_{S_1} &= 0, \\ \mu u_{,3}|_{S_2} &= \begin{cases} p, & x_1 \in S_{20}, \\ 0, & x_1 \notin S_{20}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

В данной задаче используется модель стандартного вязкоупругого тела, в соответствии с которой  $\mu(x_3, i\omega) = (in\omega\mu_2(x_3) + \mu_1(x_3))/(1 + in\omega)$  и  $\rho(x_3)$  — соответственно неизвестная функция комплексного модуля (аналог модуля сдвига) и плотность неоднородного слоя, которые могут иметь конечное число разрывов первого рода (что моделирует слоистые структуры). Функции  $\mu_1(x_3)$ ,  $\mu_2(x_3)$  — мгновенный и длительный модули соответственно,  $n$  — время релаксации.

Обратная коэффициентная задача заключается в определении неизвестных кусочно-непрерывных функций мгновенного и длительного модулей на основе анализа акустического отклика, измеренного на верхней границе в некотором частотном диапазоне.

**1. Построение итерационного процесса.** Вводя осредненную характеристику  $U(x_3, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_3, \omega) dx_1$  и проводя несложные преобразования, запишем задачу (1) в виде:

$$\begin{aligned} (\mu U_{,3})_{,3} + \rho \omega^2 U &= 0, \\ U|_{x_3=0} &= 0, \quad \mu U_{,3}|_{x_3=h} = \tilde{p}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обратная задача состоит в определении функций  $\mu_1(x_3)$ ,  $\mu_2(x_3)$  и  $U(x_3, \omega)$ , удовлетворяющих (2), по дополнительной информации

$$U(h, i\omega) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (3)$$

Отметим, что подобная задача рассматривалась ранее [3], однако в вычислительных экспериментах предполагалось, что материальные характеристик моделируются непрерывными функциями. В настоящем исследовании эта же задача рассмотрена в предположении, что характеристики имеют разрывы первого рода в известных точках.

Вводя безразмерные переменные  $x = x_3/h$ ,  $u_i = U_i/h$ ,  $\varkappa^2 = \rho_0 \omega^2 h^2 / \mu_0$  и характеристики, получим вспомогательную задачу, для которой и построим операторные соотношения.

$$\begin{aligned} (G(x, i\varkappa)u'(x, \varkappa))' + \varkappa^2 r(x) u(x, \varkappa) &= 0, \\ u(0, \varkappa) &= 0, \quad G(1, i\varkappa)u'(1, \varkappa) = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Дополнительное условие примет вид:

$$u(1, \varkappa) = f(\varkappa), \quad \varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_2], \quad (5)$$

Введены следующие обозначения  $r(x) = \rho_0 \rho(x)$ ,  $G(x, i\alpha) = \frac{i\tau \alpha g(x) + h(x)}{1 + i\tau \alpha}$ , где  $g(x) = \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}$ ,  $h(x) = \frac{\mu_1(x)}{\mu_1(0)}$ ,  $\tau = n \sqrt{\frac{\mu_1(0)}{\rho_0 h^2}}$ .

Обратная задача заключается в определении функций  $h(x)$ ,  $g(x)$ ,  $u(x)$ , ( $r(x)$  полагается известной положительной функцией) из краевой задачи (4) с учетом дополнительного условия (5).

Далее строится итерационный процесс:

1. На первом этапе решается прямая задача, в которой из интегрального уравнения Фредгольма 2-ого рода (6) по известным  $n - 1$  приближениям неизвестных функций  $h_{n-1}(x)$ ,  $g_{n-1}(x)$ ,  $G_{n-1}(x, i\alpha)$  определяется соответствующая функция  $u_{n-1}(x, \alpha)$

$$u_{n-1}(x) = \int_0^1 K_{n-1}(\xi, x) u_{n-1}(\xi) d\xi + \int_0^x \frac{d\eta}{G_{n-1}(\eta, i\alpha)}, \quad (6)$$

$$K_{n-1}(\xi, x) = \alpha^2 \int_0^{\min\{\xi, x\}} r(\eta) \frac{d\eta}{G_{n-1}(\eta, i\alpha)}, \quad \xi \in [0, 1].$$

Интегральное уравнение (6) решается с помощью метода коллокаций с использованием квадратурной формулы Симпсона.

2. На втором этапе строятся следующие приближения неизвестных функций  $h_n(x) = h_{n-1}(x) + \delta h(x)$  и  $g_n(x) = g_{n-1}(x) + \delta g(x)$ , где  $\delta h(x)$  и  $\delta g(x)$  — поправки для длительного и мгновенного модуля, входящие в функцию  $\delta G(x, \alpha)$  поправки комплексного модуля, удовлетворяющие интегральному уравнению Фредгольма 1-ого рода

$$\int_0^1 \delta G(x, i\alpha) ((u_{n-1}(x, \alpha))')^2 dx = u_{n-1}(h, \alpha) - f(\alpha), \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]. \quad (7)$$

Отделим вещественную и мнимую части в выражении для функции первого приближения комплексного модуля

$$\begin{aligned} \delta G(x, i\alpha) &= \operatorname{Re}(\delta G(x, i\alpha)) + i \operatorname{Im}(\delta G(x, i\alpha)) = \\ &= (\delta g(x) z_2(\alpha) + \delta h(x) z_1(\alpha)) + i(\delta g(x) - \delta h(x)) z_3(\alpha), \end{aligned}$$

$$\text{где } z_1(\alpha) = \frac{1}{1 + \tau^2 \alpha^2}, \quad z_2(\alpha) = \frac{\tau^2 \alpha^2}{1 + \tau^2 \alpha^2}, \quad z_3(\alpha) = \frac{\tau \alpha}{1 + \tau^2 \alpha^2}.$$

Тогда, из интегрального уравнения (7) получим систему:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\delta g(x) z_2(\alpha) + \delta h(x) z_1(\alpha)) u'_{n-1}(x, \alpha) \overline{u'_{n-1}(x, \alpha)} dx &= \operatorname{Re}(u_{n-1}(h, \alpha) - f(\alpha)), \\ \int_0^1 (\delta g(x) - \delta h(x)) z_3(\alpha) u'_{n-1}(x, \alpha) \overline{u'_{n-1}(x, \alpha)} dx &= \operatorname{Im}(u_{n-1}(h, \alpha) - f(\alpha)). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (8) является некорректной задачей и требует использования регуляризационных методов, например, метода регуляризации А. Н. Тихонова.

3. В результате получим функции  $h_n(x)$  и  $g_n(x)$ , которые дают приближенное решение обратной коэффициентной задачи. Выход из итерационного процесса производится при выполнении условия

$$\|u_{n-1}(1, \varkappa) - f(\varkappa)\|_{C[\varkappa_1, \varkappa_2]} < \varepsilon . \quad (9)$$

**Вычислительные эксперименты.** Начальное приближение выбиралось из условия минимума функционала невязки на построенном из априорной информации компактном множестве:

$$\Phi = \int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} |u(1, \varkappa) - f(\varkappa)|^2 d\varkappa . \quad (10)$$

Далее приведена таблица использованных в вычислительных экспериментах параметров:

Участок	Толщина, мм	Мгновенный модуль, Н/м <sup>2</sup>	Длительный модуль, Н/м <sup>2</sup>
Эпидермис	~ 0,3	0.9·10 <sup>6</sup>	0.88·10 <sup>6</sup>
Дерма	~ 0,7	0.55·10 <sup>6</sup>	0.5·10 <sup>6</sup>
Подкожный жир	~ 1,2	0.09·10 <sup>6</sup>	0.075·10 <sup>6</sup>

Параметр, соответствующий времени релаксации полагался равным  $\tau = 0.1$ . Данные значения параметров соответствуют участку кожного покрова в районе предплечья. Для моделирования кожи мгновенный и длительный модули представлялись в виде кусочно-непрерывных линейных функций на  $[0, 1]$ :

$$h(x) = \begin{cases} 0.075+0.1x, & x \leq 0.5895, \\ 0.5+0.1x, & x \leq 0.8655, \\ 0.88+0.1x, & x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0.09+0.1x, & x \leq 0.5895, \\ 0.55+0.1x, & x \leq 0.8655, \\ 0.9+0.1x, & x \leq 1. \end{cases}$$

Как уже отмечалось ранее, толщины слоев считались известными. Начальные приближения найдены в виде:

$$h^0(x) = \begin{cases} 0.1, & x \leq 0.5895, \\ 0.55, & x \leq 0.8655, \\ 0.95, & x \leq 1, \end{cases} \quad g^0(x) = \begin{cases} 0.15, & x \leq 0.5895, \\ 0.7, & x \leq 0.8655, \\ 1, & x \leq 1. \end{cases}$$

На рис. 1 приведены результаты восстановления. Пунктирными линиями изображены графики начальных приближений, жирными линиями — исходных функций, точками — восстановленных функций.

Частотный диапазон выбирался в между первым и вторым экстремумами амплитудно-частотной характеристики. Погрешность реконструкции не превосходит 6% в окрестностях точек разрыва и 3% остальных точках.

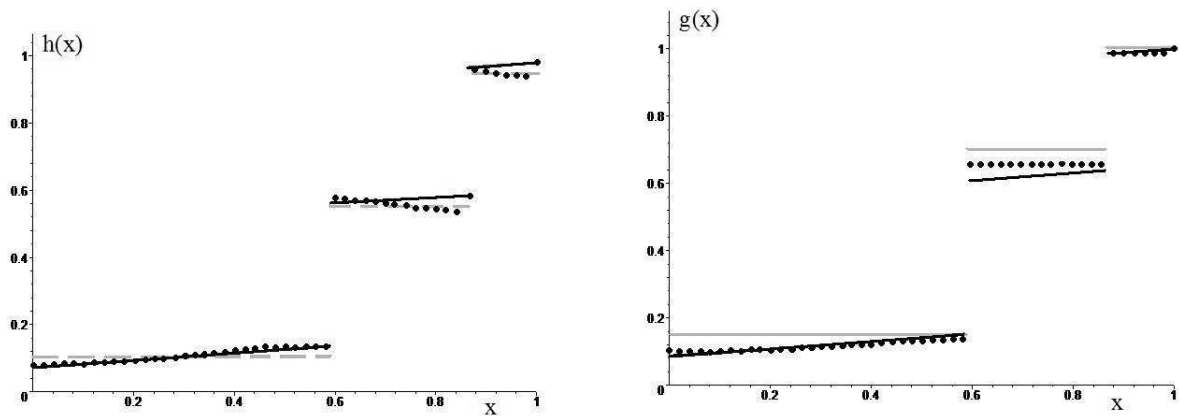


Рис. 1. Восстановление функций  $h(x)$  (слева) и  $g(x)$  (справа).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00194-а, № 12-01-31501), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракты П-596 и 14.132.21.1358).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Балабанов Е. И. Аналитический обзор. Кожа человека, механические свойства, теплопередача. М.: 2001. ([http://osense.narod.ru/library/physics/html/041001\\_b.htm](http://osense.narod.ru/library/physics/html/041001_b.htm)).
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1974. 338 с.
- [3] Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журнал. 2011. Т. 57, № 6. С. 723–730.

**Bogachev I. V.** *Properties identification of the skin based on a multilayer model.*

The method of identifying properties of an inhomogeneous skin based on the standard model of a viscoelastic body with the multi-layer structure in the analysis of shear waves are proposed. With the use of averaging two-dimensional problem is reduced to one-dimensional inverse problem whose solution is implemented with the involvement of the iterative process, every step of which deals with Fredholm integral equations of the first and second kind. Computational experiments are irregular in thickness reconstruction properties of the skin are presented.

# ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ КАРДИОСИГНАЛА

Богачева М. О.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Исследованы кардиограммы здорового человека и больного с аритмией. Анализ кардиосигналов проведен с помощью дискретного и непрерывного вейвлет-преобразования с использованием вейвлетов Добеши четвертого порядка. Приведенные методы позволяют определить различные отклонения от нормы по характеру кардиосигнала.

## Введение.

Вейвлет-преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа, типичный представитель которого — классическое преобразование Фурье. Основной областью применения вейвлет-преобразований является анализ и обработка сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только частотную характеристику сигнала, но и сведения о локальных координатах, на которых проявляют себя те или иные группы частотных составляющих или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала. По сравнению с разложением сигналов на ряды Фурье, вейвлеты способны с гораздо более высокой точностью представлять локальные особенности сигналов, вплоть до разрывов 1-го рода. В данной работе рассматривается применение вейвлет-преобразования к анализу кардиосигналов на примере кардиограмм здорового человека и больного с аритмией (рис. 1). Все программы и расчеты были реализованы в среде **Matlab**.

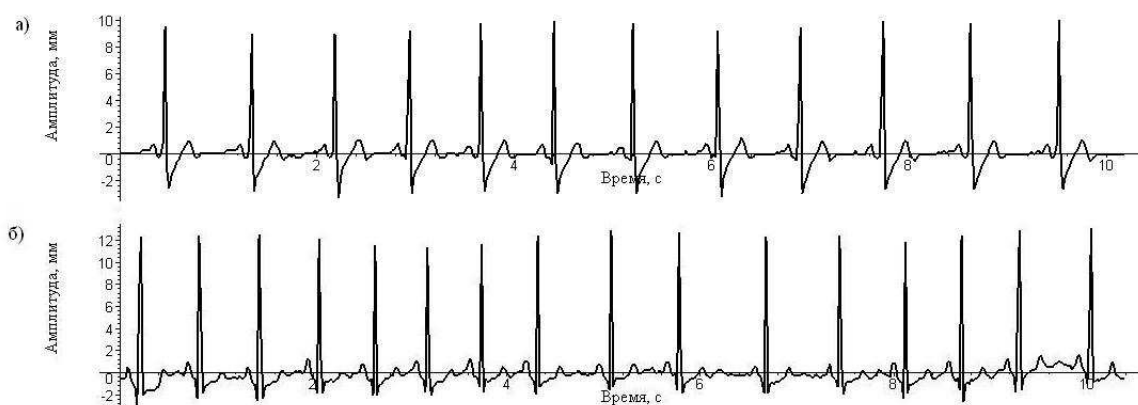


Рис. 1. Фрагменты ЭКГ записей здорового человека (а) и больного с аритмией (б).

## Вейвлеты Добеши.

Вейвлеты Добеши представляют собой семейство ортогональных вейвлетов с компактным носителем, вычисляемым итерационным путем. Для построения вейвлетов Добеши материнская вейвлет-функция задается следующим образом:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k). \quad (1)$$

Масштабирующая функция сигнала имеет вид:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k). \quad (2)$$

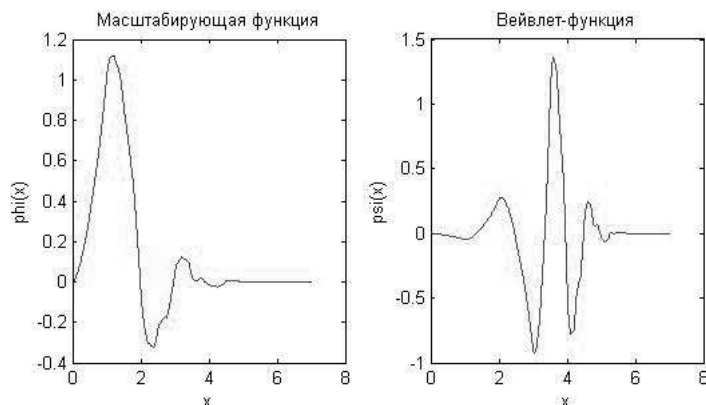


Рис. 2. Вейвлет-функция и масштабирующая функция для преобразования Добеши.

Коэффициенты масштабирующей функции определяются из следующих условий:

- 1) ортонормированность  $\sum_k h_k h_{k-2m} = \delta_{0,m}$  ;
- 2) нормировка  $\sum_k h_k = \sqrt{2}$  ;
- 3) нулевые моменты  $\sum_n (-1)^n n^k h_n = 0, n = 0, 1, \dots$  .

Коэффициенты вейвлет-функции определяются следующим образом:

$$g_k = (-1)^k h_{M-1-k}, \quad (3)$$

где  $M$  — число коэффициентов фильтра.

Входом для алгоритма данных служит сигнал  $S$  длины  $N$ . По исходному сигналу строятся два сигнала длины  $N/2$ . Первый из них, аппроксимирующий, получается обработкой исходного сигнала фильтром коэффициентов масштабирующей функции и прореживанием вдвое. Второй, детализирующий, возникает при наложении вейвлет-фильтра и при прореживании вдвое. Для последующих разложений сигнала по уровням входом является аппроксимирующий сигнал [1].

Продолжительность процесса разложения зависит от длины начальных данных  $N$  и заданного уровня разложения.

#### Дискретное вейвлет-преобразование.

С помощью вейвлетов Добеши четвертого порядка было проведено разложение сигнала до третьего уровня. Графики детализирующих коэффициентов трех уровней разложения для исследуемых кардиограмм представлены на рис. 3.

Вейвлет Добеши четвертого порядка имеет носитель на промежутке  $[0, 7]$  и центральную частоту 0.7143 Гц. Поскольку частота дискретизации сигнала составляет 50 Гц, то центральная частота вейвлета, используемого для первого уровня разложения, равна  $0.7143 \cdot 50 = 35.72$  Гц. Для второго уровня разложения частота вейвлета будет в два раза меньше: 17.86 Гц. Для третьего уровня соответственно

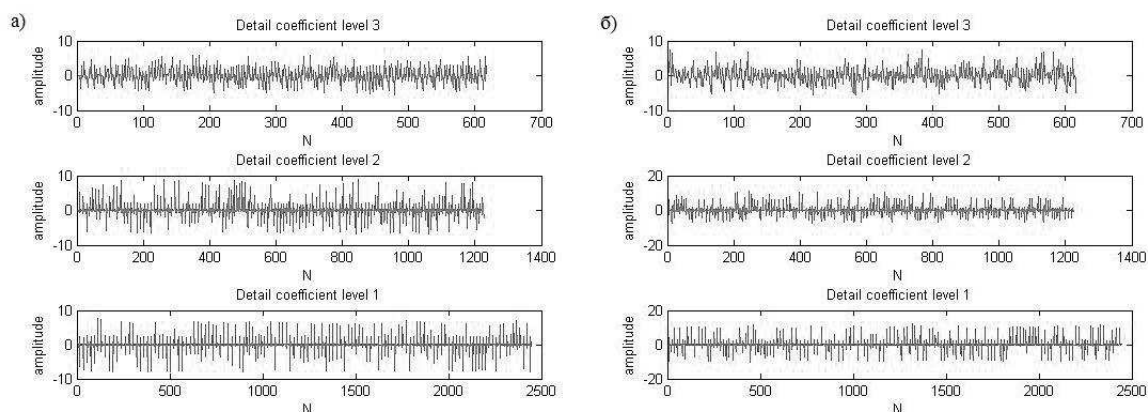


Рис. 3. Графики детализирующих коэффициентов для кардиограмм здорового человека (а) и больного с аритмией (б).

8.92 Гц. Детализирующие коэффициенты отражают характеристики кардосигналов на данных частотах.

Информативными являются компоненты сигнала, которые соответствуют найденным детализирующим коэффициентам. Для их определения проводится прямое восстановление отдельно по каждому набору детализирующих коэффициентов [3].

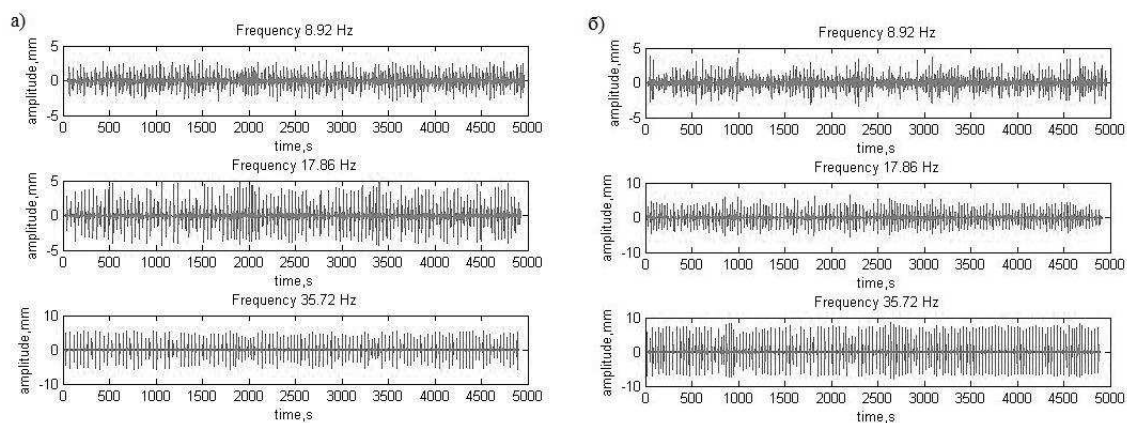


Рис. 4. Восстановленные компоненты кардосигнала здорового человека (а) и больного с аритмией (б).

Сравнение среднеквадратических отклонений вейвлет-коэффициентов и восстановленных компонент исследуемых кардосигналов приведено в таблице 1.

Из таблицы видно, что среднеквадратические отклонения для двух исследуемых кардосигналов отличаются в 1.5 раза, что позволяет сделать предположение о наличии отклонений.

Исследование энергетических спектров данных сигналов дает следующие результаты:

Из графиков видно, что энергетические спектры компонент сигналов на разных частотах хорошо локализованы. Спектры по первому и второму уровню разложе-

Кардиосигнал уровень	Вейвлет-коэффициенты			Компоненты сигнала		
	1	2	3	1	2	3
Норма	1.51	2.07	2.17	1.07	1.03	0.76
Аритмия	2.35	2.49	2.18	1.66	1.24	0.77
аритмия/норма	1.56	1.2	1.0	1.56	1.2	1.0

Таблица 1. Среднеквадратические отклонения вейвлет-коэффициентов.

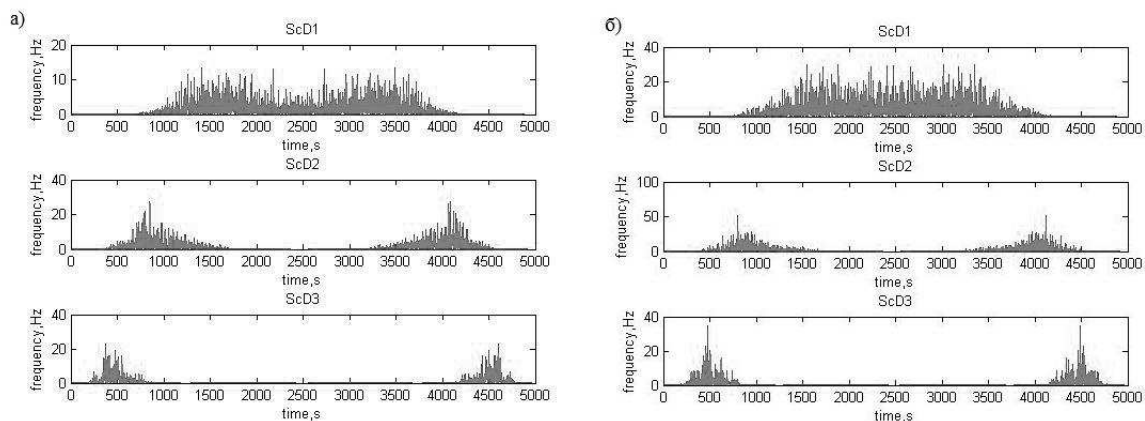


Рис. 5. Энергетический спектр кардиосигнала здорового человека (а) и больного с аритмией (б).

ния различаются в два раза.

#### Непрерывное вейвлет-преобразование.

Непрерывное вейвлет-преобразование кардиосигналов также выполнено с использованием вейвлетов Добеши четвертого порядка при значениях масштабирующего коэффициента от 1 до 40.

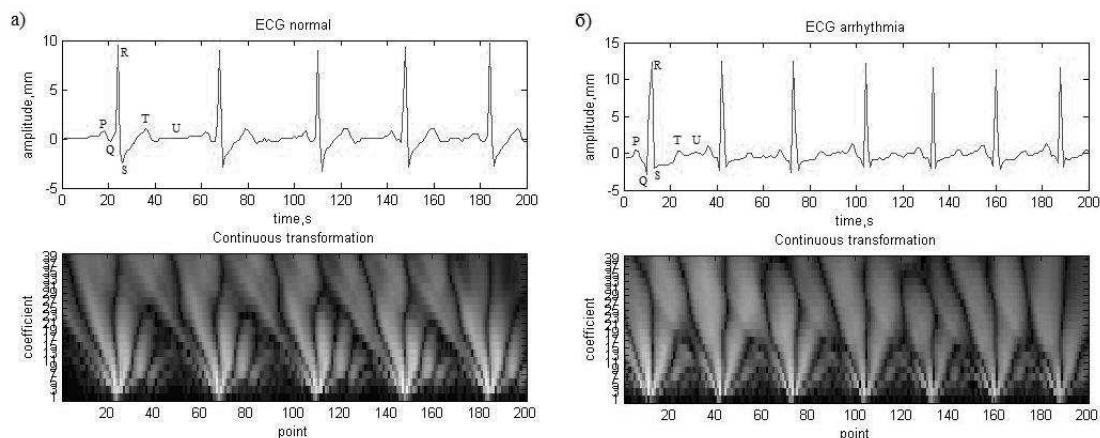


Рис. 6. Фрагмент кардиосигнала и спектрограммы здорового человека (а) и больного с аритмией (б).

На спектрограммах хорошо виден QRS комплекс (пик с максимальной амплитудой), а также пик Т, проявляющийся на более низких частотах. Хорошо отобра-



жен пик R, а также пик U, не всегда различимый на кардиограмме. Таким образом, построенная спектрограмма наиболее наглядно и полно отражает особенности исследуемого сигнала.

### **Заключение**

Приведенные в данной работе алгоритмы вейвлет-анализа позволяют исследовать локальные особенности кардиосигналов. В частности, наиболее эффективными являются построение и анализ энергетического спектра и спектрограммы сигнала. Используемые методы анализа временного ряда позволяют определять различные отклонения от нормы по характеру ЭКГ записи.

Автор выражает благодарность профессору Карпинскому Д. Н. за постановку задачи и внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 464 с.
- [2] Новиков Л. В. Основы вейвлет-анализа сигналов: Учебное пособие. СПб, ИАиП РАН, 1999. 152 с.
- [3] Смоленцев Т. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.

**Bogacheva M. O.** *Wavelet analysis of cardiograms.* The cardiograms of healthy man and patient with arrhythmia are investigated. Analysis of cardio signals was performed using the discrete and the continuous wavelet transform with use Daubechies wavelets of order four. The above methods can identify various deviations in nature cardio.

## ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЕТОНОВ НА МАТЕРИАЛАХ ИЗ ГОРЕЛЫХ ПОРОД

**Буравчук Н. И., Гурьянова О. В.,  
Окороков Е. П., Павлова Л. Н.**

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.  
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Из имеющихся отходов добычи угля для бетонной технологии наибольший интерес представляют горелые породы шахтных отвалов. Многие отвалы по объемам складированных пород, их составу, свойствам и пригодности для получения полезной продукции представляют собой техногенные месторождения полезных ископаемых. Шахтные породы обладают определенной ценностью, в них содержатся многие полезные компоненты, хотя и в небольших количествах; их можно использовать в качестве нерудного строительного и топливосодержащего сырья, активных минеральных добавок. Анализ опыта применения техногенных отходов в технологии бетона [1–3] подтверждает, что перспективным сырьем с точки зрения основных технологических процессов и свойств получаемых бетонов могут стать горелые шахтные породы. Такие породы образуются при окислительном самообжиге шахтных пород, извлеченных при добыче угля на поверхность и складированных в конусообразные отвалы. В породных отвалах по литологическому составу содержатся породы в основном глинистые, песчанисто-глинистые и известково-песчанистые. По имеющимся данным процесс горения в отвалах происходит при температуре от 600 до 1500°С и длится десятки лет. Это создает условия для полного и достаточно равномерного обжига всей отвальной массы. В результате естественного самообжига породные массы отвала претерпевают изменения. Изменения при обжиге происходят, прежде всего, в глинообразующих минералах и в примесях, содержащихся в них. Химический состав горелых пород представлен в основном оксидами кремния, алюминия, железа.

Важным свойством горелых пород является активность по отношению к извести, обуславливающая их использование в вяжущих и бетонах как гидравлическую добавку. В основе возникновения активности горелых пород лежит изменение глинистого вещества при физико-химических процессах, происходящих при высокотемпературном обжиге углесодержащих пород. Активность горелых шахтных пород обусловлена наличием в них нескольких активных компонентов: алюминатного в виде аморфизованного глинистого вещества и некоторого количества активной модификации  $Al_2O_3$ , кремнеземистого в виде растворимой или активной кремнекислоты, железистого в виде растворимых  $Fe_2O_3$  и  $Fe_3O_4$ . Наряду с гидравлической активностью, характеризуемой поглощением извести, горелые породы отличаются адсорбционной активностью, благодаря наличию микропор и микротрещин. Гидравлическая и адсорбционная активность, повышенная механическая прочность, стойкость к истиранию, температурным и атмосферным воздействиям хорошо обожженных пород являются основными предпосылками

эффективного использования их в технологии бетона в качестве тонкомолотой активной добавки к вяжущему и в качестве крупного и мелкого заполнителей.

Неоднородность пород по составу и свойствам предопределяет трудности и особенности разработки, и использования данного техногенного сырья. Для получения заполнителей из шахтных пород их следует подвергать переработке, при этом происходит усреднение пород. Заполнители из горелых шахтных пород по качеству не уступают аналогичной продукции из традиционно используемого сырья, и даже имеют некоторые преимущества: практически не содержат илистых и глинистых частиц и других засоряющих примесей; глины в комках; из-за микропористости частиц легче по насыпному весу; отличаются хорошим сцеплением с растворной частью.

Форма зерен щебня кубовидная, пластинчатая и угловатая. Поверхность частиц неокатанная, рваная, шероховатая, чистая, т. е. на поверхности частиц не содержатся глинистые и другие засоряющие примеси. В результате термического воздействия частицы породы приобрели пористое строение. Однако низкие значения водопоглощения свидетельствуют о том, что большинство пор у частиц щебня имеет закрытый характер. Наличием пористости объясняется пониженная, в сравнении с природным щебнем, насыпная плотность. В щебне не содержатся примеси и компоненты, относимые к вредным примесям, могут присутствовать несгоревшие частицы топлива. Невыгоревшие частицы в породе – устойчивые к атмосферным влияниям ококсированные частицы. По составу они отличны от исходного топлива и состоят из продуктов коксования (полукоксовые и коксовые остатки). Они стойки против окисления и долговечны при воздействии влаги и перепада температуры. Щебень выдерживает испытания на устойчивость структуры против всех видов распада (железистого и силикатного). Марка щебня по прочности при испытании на дробимость 600; 800; 1000; 1200, по морозостойкости от F25 до F100.

Отсевы дробления горелых пород по зерновому составу соответствуют песчано-гравийной смеси. Песчаная фракция отсевов дробления пород по физико-механическим свойствам может соответствовать пескам I или II класса. Отсевы не подвержены морозному пучению, практически не размокают и не набухают в воде. По фильтрационной способности отсевы относятся к водопроницаемым.

В исследованиях по использованию горелых пород в технологии бетона был выполнен большой объем лабораторных работ и испытаний в производственных условиях на действующих заводах железобетонных конструкций и изделий Ростовской области. Испытывались составы бетонов класса от В7,5 до В30 различной подвижности и с различным расходом цемента в зависимости от предъявляемых к бетонам требований по морозостойкости, водонепроницаемости, другим свойствам и условий эксплуатации.

Изготовление опытных образцов-кубов в лабораторных условиях производилось на виброплощадке, хранили образцы в стандартных для твердения бетона условиях. В производственных условиях изготовление контрольных кубов производилось параллельно с изготовлением изделий из тех же бетонных смесей и при тех же условиях формования и термообработки. Контроль прочности и других показателей физико-механических свойств бетона проводился на изделиях методами неразрушающего контроля и на образцах-кубах по методикам, приведенным

в нормативных документах.

В таблицах 1 и 2 приведены свойства бетонов, содержащих заполнители: щебень и отсев (вместо песка) из дробленых горелых пород по двухстадийной схеме дробления.

Изделие, класс бетона	Прочность на сжатие, МПа			Водонепроницаемость, марка	Объемная масса, кг/м <sup>3</sup>	
	пропаривание	естественное твердение в возрасте сут.				
		28	60			180
Затяжка В22,5 ОК 1 см	27,0 (90)	32,0	36,8	37,5	W4	2260
Элементы шахтной крепи В22,5 ОК 1 см	22,5 (75)	31,2	35,5	36,7	W4	2230
Лотки и плиты перекрытий В15 ОК 1 см	16,8 (79)	22,5	25,3	26,9	W4	2210
Бетониты, блоки стен подвалов В10 ОК 1–2 см	12,3 (82)	15,9	16,8	17,3	—	2180

Таблица 1. Физико-механические свойства изделий шахтной крепи из горелопородного бетона.

*Примечание:* Отпускная прочность бетона у всех изделий 70 %. В скобках приведен фактически полученный процент прочности бетона от проектной марки.

Изготовление изделий из горелопородного бетона проводилось на Гуковском заводе железобетонной крепи и Батайском ЖБК. Обобщение и анализ экспериментальных данных показывают, что использование материалов из горелых пород позволяет снизить расход цемента (без ухудшения свойств и качества изделий) в бетонах класса В7,5 и В10 до 30–35%, класса В15; В22,5; В30 до 10–15%. Бетоны на заполнителях из дробленых горелых пород имеют марку по морозостойкости F50; F75; F200; F300, по водонепроницаемости W2; W4; W8, прочность на сжатие от 10 до 40 МПа, при изгибе от 2,2 до 6,8 МПа. Положительный эффект использования материалов из горелых пород в бетонах связан, по-видимому, с наличием гидравлической и адсорбционной активности пород. При наличии таких пород в составе бетонной смеси гидратация вяжущего протекает более интенсивно, образуется дополнительное количество новообразований, участвующих в формировании структуры и свойств бетона. Пористые и шероховатые частицы щебня и отсева формируют адгезионную прочность в цементном камне и соответственно повышают долговечность бетона (морозостойкость, водонепроницаемость и т. д.). Повышенные показатели прочности бетонов на заполнителях из горелых пород на растяжение при изгибе и расколе, по-видимому, можно объяснить упрочнением структурного каркаса бетона за счет присутствия лещадных зерен. По мнению автора [4] лещадные зерна в определенном смысле выполняют роль короткой арматуры, создавая эффект дисперсного армирования. «Армирующий» эффект значителен при взаимной «перевязке» зерен заполнителя, когда они пронизывают в бетоне каждое сечение. Этот эффект максимально проявляется при воздействии растягивающих усилий и минимально – при воздействии сжимающих усилий.

Бетон/изделие	Отпускная прочность, %	Прочность на сжатие, МПа				Морозостойкость, марка	Водонепроницаемость, марка	Объемный вес, кг/м <sup>3</sup>	Экономия цемента на 1 м <sup>3</sup> бетона, % (кг)
		пропаривание	естественное твердение в возрасте, сут.						
			28	60	180				
В7,5/100; ОК 3-4 см блоки стен подвалов	70	8,54	11,90	14,40	16,80	F50	W2	2330	15 (24)
В12,5/150; ОК 3-4 см плиты ленточных фундаментов	70	13,25	20,52	22,24	23,89	F50	W2	2260	10 (34)
В15/200; ОК 4-6 см перемычки	70	19,46	25,40	27,73	29,88	F75	–	2310	–
В15/200; ОК 5-7 см колонны	100	17,65	24,65	25,07	26,49	–	–	2250	15,8 (5)
В20/250; ОК 1 см панели многопустотные	70	24,78	31,20	38,45	41,22	F50	W4	2340	10 (35)
В22,5/300; ОК 4-6 см блоки морских сооружений	100	33,06	34,25	41,42	45,71	F200	W8	2250	15,8 (75)
В22,5/300; ОК 1-4 см плиты откосов и резервуаров	100	34,40	35,20	40,82	43,98	F200	W8	2230	–
В22,5/300; ОК 3-4 см сваи	100	35,40	36,57	41,30	43,82	--	–	2380	–
В30/400; ОК 3-4 см камни бортовые	100	41,80	41,56	49,17	53,05	F300	–	2290	14,2 (66)

Таблица 2. Физико-механические свойства изделий из бетона на заполнителях из горелых пород.

Бетоны на заполнителях из дробленых горелых пород отличаются большей жесткостью и водопотребностью, чем бетоны на традиционных заполнителях. Это связано с некоторой пористостью и шероховатостью поверхности зерен щебня и песка из горелых пород. Лещадные зерна ухудшают удобоукладываемость бетонной смеси. Снизить жесткость бетонной смеси можно введением тонкодисперсных минеральных добавок (например, золы сухого отбора, молотой горелой породы) или эффективных пластифицирующих добавок (ЛСТ, суперпластификатора С-3 и др.).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алимов Л. А., Булыга Л. Л., Сакин К. С. Использование горелых пород Экибастузского бассейна в производстве бетонов // Уголь. 1989. № 1. С. 15–16.
- [2] Буравчук Н. И. Ресурсосбережение в технологии строительных материалов. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. 224 с.
- [3] Коренькова С. Ф., Анпилов С. М., Лукоянчева Т. П., Веревкин О. А. Современные строительные материалы // Из-во секции «Строительство» Российской инженерной академии. Самара. 2001. С. 189.
- [4] Кузнецов В. Д. Бетоны на отходах дробления скальных пород вскрыши Курской магнитной аномалии // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 10. С. 73–75.

**Buravchuk N. I., Guryanova O. V., Okorokov E. P., Pavlova L. N.** *Physical and mechanical properties of concrete on the materials from the burned rocks.* The characteristics of burned rocks mine dumps and the properties of rubble and dropping them. The influence of burned rocks on the physic-mechanical properties of concrete. The results of experimental tests of concrete at release of concrete and concrete products.

# ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Ватульян А. О.<sup>\*,\*\*</sup>, Богачев И. В.<sup>\*</sup>, Явруян О. В.<sup>\*,\*\*</sup>

*\* Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*\*\* Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Предлагается поэтапный алгоритм определения неоднородных характеристик ортотропной упругой полосы, свойства которой меняются по толщине. Реконструкция неоднородных свойств осуществляется по интегральным характеристикам полей смещений, измеренных на верхней границе полосы при возбуждении в ней установившихся колебаний.

В основе предлагаемой схемы лежит сведение исходной двумерной задачи к более простым задачам путем анализа спектрального пучка и составления краевых задач для моментов первого и второго порядков соответствующих полей. Далее исследование полученных обратных коэффициентных задач сведено к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма первого родов с привлечением регуляризующих алгоритмов численного дифференцирования и методов регуляризации А. Н. Тихонова.

Разработана вычислительная схема для решения обратной коэффициентной задачи, представлены численные результаты реконструкции неоднородных свойств полосы.

**Введение.** Задачи определения неоднородных непрерывно распределенных свойств слоистых сред актуальны при изучении свойств новых функционально-градиентных материалов, активно используемых в современной промышленности, важны при моделировании в биомеханике и горной механике.

Схемы эффективного количественного определения параметров слоистых структур позволят моделировать поведение сложных механических и биомеханических систем и относятся к приоритетным направлениям механики и биомеханики [1, 2].

В настоящей работе представлена схема решения обратной коэффициентной задачи для упругой неоднородной по толщине полосы, колебания в которой возбуждаются нагрузкой, действующей на верхней границе.

Схема исследования основана на предварительном сведении к более простым краевым задачам относительно усредненных характеристик полей смещений.

В основе предлагаемого подхода лежит возможность определения от четырех до шести функций- параметров среды, характеризующих ее анизотропные свойства.

**Постановка обратной коэффициентной задачи.** Рассмотрим установившиеся колебания упругой ортотропной неоднородной по толщине полосы с защемленной нижней гранью, занимающей область  $S = \{x_1 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h]\}$ . Колебания возбуждаются нагрузкой, приложенной к части верхней границы. После отделения временного множителя краевая задача имеет вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j = 1, 3, \quad (1)$$

$$\sigma_{kk} = c_{1k}u_{1,1} + c_{k3}u_{3,3}, \quad k = 1, 3, \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = c_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}),$$

$$\begin{aligned} x_3 = 0: \quad u_i &= 0, \\ x_3 = h: \quad \sigma_{i3} &= \begin{cases} p_i, & x_1 \in [a, b], \\ 0, & x_1 \notin [a, b], \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\omega$  — частота колебаний,  $\rho$  — плотность полосы,  $c_{ij}(x_3)$  — произвольные положительные функции, характеризующие упругие свойства неоднородной полосы, удовлетворяющие требованию положительной определенности удельной потенциальной энергии.

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [3].

Обратная задача состоит в восстановлении набора функций  $c_{ij}(x_3)$  по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на верхней границе слоя в режиме частотного зондирования

$$u_l(x_1, \omega) = f_l(\omega), \quad l = 1, 3. \quad (4)$$

**Сведение к одномерным операторным уравнениям.** Применим преобразование Фурье к исходной задаче (1)–(3) по пространственной координате  $x_1$ , получим краевую задачу относительно трансформант компонент поля смещения

$$\tilde{u}_j(x_3, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(x_1, x_3, \alpha) e^{i\alpha x_1} dx_1:$$

$$\begin{aligned} (c_{55}\tilde{u}'_1 - i\alpha c_{55}\tilde{u}_3)' - i\alpha c_{13}\tilde{u}'_3 + (\rho\omega^2 - \alpha^2 c_{11})\tilde{u}_1 &= 0, \\ (c_{33}\tilde{u}'_3 - i\alpha c_{13}\tilde{u}_1)' - i\alpha c_{55}\tilde{u}'_1 + (\rho\omega^2 - \alpha^2 c_{55})\tilde{u}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tilde{u}_i(0) = 0, \quad i = 1, 3,$$

$$c_{55}\tilde{u}'_1 - i\alpha c_{55}\tilde{u}_3|_{x_3=h} = \tilde{p}_1, \quad (6)$$

$$c_{33}\tilde{u}'_3 - i\alpha c_{13}\tilde{u}_1|_{x_3=h} = \tilde{p}_3.$$

Раскладывая трансформанты компонент поля смещений по степеням  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= u_0 + i\alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots, \quad \tilde{u}_3 = v_0 + i\alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \dots, \\ \tilde{p}_1 &= P_1^{(0)} + i\alpha P_1^{(1)} + \alpha^2 P_1^{(2)} + \dots, \quad \tilde{p}_3 = P_3^{(0)} + i\alpha P_3^{(1)} + \alpha^2 P_3^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

построим операторные коэффициенты по степеням  $\alpha$ . С учетом дополнительной информации (4) получим разделенные обратные коэффициентные задачи относительно соответствующих решений и функций, характеризующих упругие свойства полосы.

$$\alpha^0: \quad \begin{cases} (c_{55}u'_0)' + k^2 u_0 = 0, \\ u_0(0) = 0, \\ c_{55}(h)u'_0(h) = P_1^{(0)}, \end{cases} \quad \begin{cases} (c_{33}v'_0)' + k^2 v_0 = 0, \\ v_0(0) = 0, \\ c_{33}(h)v'_0(h) = P_3^{(0)}, \quad k^2 = \rho\omega^2, \end{cases} \quad (8)$$



$$\alpha^1 : \begin{cases} (c_{55}u_1')' + k^2u_1 - c_{13}v_0' - (c_{55}v_0)' = 0 , \\ (c_{33}v_1')' + k^2v_1 - c_{55}u_0' - (c_{13}u_0)' = 0 , \\ u_1(0) = v_1(0) = 0 , \\ c_{55}(h)u_1'(h) - c_{55}(h)v_0(h) = P_1^{(1)} , \quad -c_{13}(h)u_0(h) + c_{33}(h)v_1'(h) = P_3^{(1)} , \end{cases} \quad (9)$$

$$\alpha^2 : \begin{cases} (c_{55}u_2')' + k^2u_2 - c_{11}u_0 + c_{13}v_1' + (c_{55}v_1)' = 0 , \\ (c_{33}v_2')' + k^2v_2 + c_{55}u_1' - c_{55}v_0 + (c_{13}u_1)' = 0 , \\ u_2(0) = v_2(0) = 0 , \\ c_{55}(h)u_2'(h) + c_{55}(h)v_1(h) = P_1^{(2)} , \quad c_{33}(h)v_2'(h) + c_{13}(h)u_1(h) = P_3^{(2)} . \end{cases} \quad (10)$$

Дополнительная информация для решения обратных коэффициентных задач (8)–(10) с учетом разложения (7) примет вид:

$$u_j(h, k) = f_{1j}(k), \quad v_j(h, k) = f_{3j}(k), \quad k \in [k_1, k_2], \quad j = 0, 1, 2 . \quad (11)$$

### Последовательная реконструкция упругих свойств полосы.

*Идентификация функций  $c_{55}(x_3)$ ,  $c_{33}(x_3)$*  возможна из рассмотрения обратной коэффициентной задачи (8) по дополнительной информации (11) при  $j = 0$ . Система (8) представлена двумя однотипными краевыми задачами, разделенными относительно функций  $c_{55}(x_3)$ ,  $u_0(x_3)$ ;  $c_{33}(x_3)$ ,  $v_0(x_3)$ . Соответствующие обратные задачи аналогичны обратной коэффициентной задаче об определении свойств упругого изотропного неоднородного стержня при продольных колебаниях. Схема исследования коэффициентных задач была ранее представлена в работах [4–7].

*Идентификация  $c_{13}(x_3)$  и  $c_{11}(x_3)$* . Рассмотрев первые уравнения систем (8) и (9), (10) с учетом граничных и дополнительных условий, после несложных преобразований получим интегральные уравнения Фредгольма первого рода.

$$\int_0^h c_{1j}(x_3)R_j(x_3, k)dx_3 = F_j(k), \quad j = 1, 3, \quad k \in [k_1, k_2] , \quad (12)$$

$$R_1(x_3, k) = u_0^2(x_3, k), \quad R_3(x_3, k) = v_0'(x_3, k)u_0(x_3, k) ,$$

$$F_1(k) = P_1^{(2)}f_{10}(k) - P_1^{(0)}f_{12}(k) + \int_0^h (c_{13}(x_3)v_1'(x_3)u_0(x_3) - c_{55}(x_3)v_1(x_3)u_0'(x_3))dx_3 ,$$

$$F_3(k) = -P_1^{(0)}f_{11}(k) + P_1^{(1)}f_{10}(k) + \int_0^h c_{55}(x_3)v_0(x_3)u_0'(x_3)dx_3 .$$

Ядра интегральных уравнений представлены произведением гладких на отрезке  $[0, h]$  функций, которые могут быть определены лишь численно из предыдущих этапов. Решение интегральных уравнений вида (12) представляет собой некорректную задачу, требующую применения регуляризующих алгоритмов. После восстановления функции  $c_{13}(x_3)$  из решения интегрального уравнения системы (12) при  $j = 3$ , далее численно определяются значения функций  $u_1(x_3)$ ,  $v_1(x_3)$ ,  $x_3 \in [0, h]$  из решения системы (9), которые требуются для реконструкции  $c_{11}(x_3)$  из решения интегрального уравнения системы (12) при  $j = 1$ .

Таким образом, последовательно можно восстановить четыре функции — упругие характеристики полосы.

Следует заметить, что из аналогичного рассмотрения антиплоских колебаний, следуя указанной схеме, возможно восстановить еще две упругие характеристики полосы  $c_{44}(x_3)$ ,  $c_{66}(x_3)$

#### 4. Численная реализация обратной коэффициентной задачи. Модельные примеры.

Следуя предложенной схеме, был проведен вычислительный эксперимент по последовательному восстановлению неизвестных функций  $c_{55}(x_3)$ ,  $c_{33}(x_3)$ ,  $c_{11}(x_3)$ ,  $c_{13}(x_3)$  для слоя толщины  $h = 1$ .

Рассмотрена реконструкция монотонных функций  $c_{55}(x_3) = 1 + 2x_3^2$ ,  $c_{33}(x_3) = 1 + 4x_3^2$ ,  $c_{11}(x_3) = 4 - 3x_3^2$ ,  $c_{13}(x_3) = 3 - 2x_3^2$ . Начальные приближения для первых двух задач найдены из условия минимума функционала невязки в виде  $c_{55}^{(0)}(x_3) = 1.6x_3 + 0.8$ ,  $c_{33}^{(0)}(x_3) = 3.3 + 0.9x_3$ . По рассчитанным амплитудно-частотным характеристикам частотный диапазон выбирался между первой и вто-

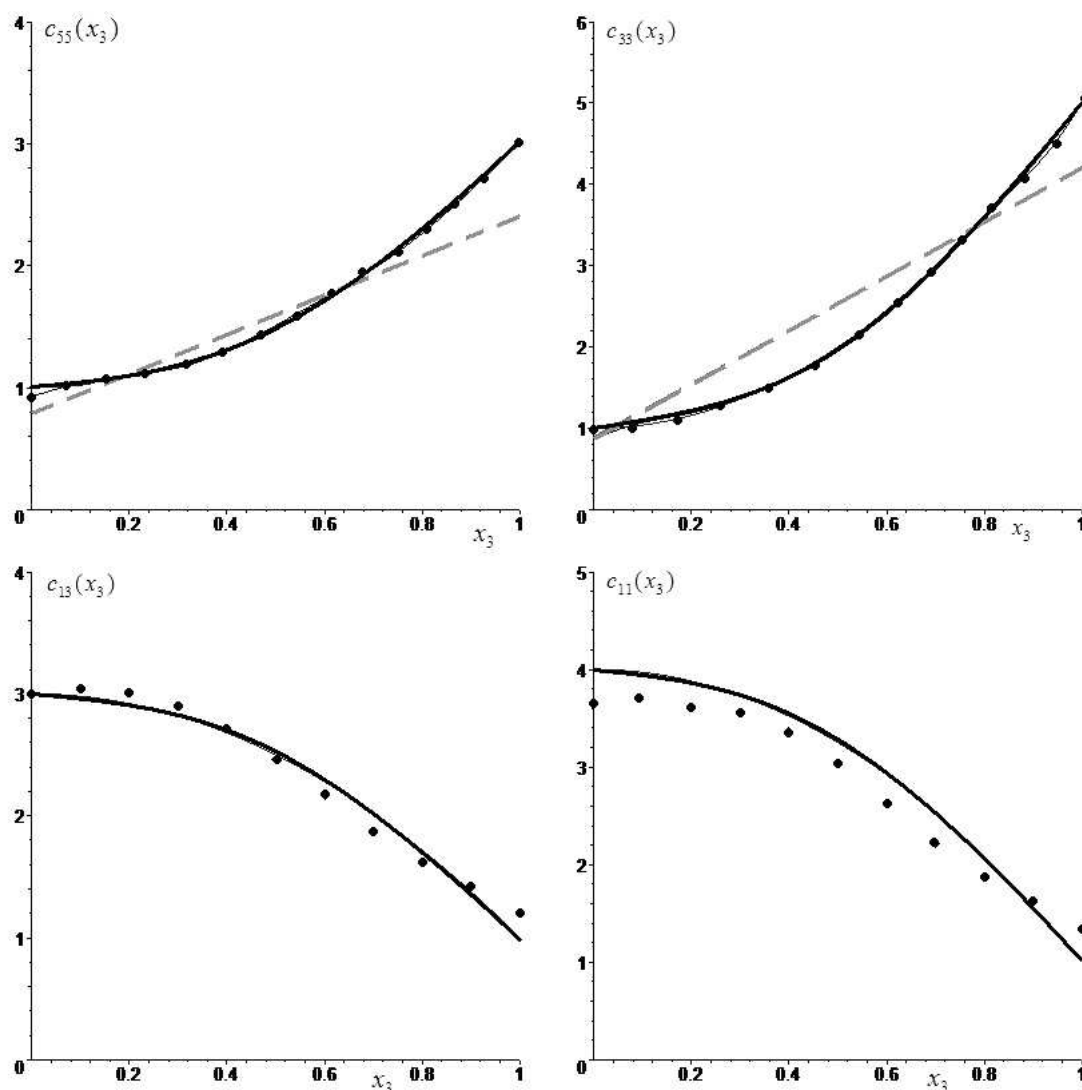


Рис. 1. Результаты восстановления функций, характеризующих неоднородные свойства полосы.

рой частотами толщинных резонансов. Погрешность восстановления для функций  $c_{55}(x_3)$ ,  $c_{33}(x_3)$  не превосходит 2%, для функций  $c_{11}(x_3)$ ,  $c_{13}(x_3)$  – 6-8% и 10-12% соответственно, что связано с негативным влиянием граничных условий на ядра интегральных операторов в обратных задачах, а также с накоплением погрешности на каждом последующем этапе восстановления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00194-а, № 12-01-31501), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П-596).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Jadamba B., Khan A. A., Raciti F.* On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // *J. Computers and Mathematics with Applications*. 2008. V. 56. Pp. 431–443.
- [2] *Zhang H., Lin X., Wang Y., Zhang Q., Kang Y.* Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach // *Acta mechanica solida sinica*. 2010. V. 23 № 1. Pp. 29–35.
- [3] *Ворович И. И., Бабешко В. В.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1989. 320 с.
- [4] *Бочарова О. В., Ватульян А. О.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // *Акустический журнал*. 2009. Т. 55. № 3. С. 281–288.
- [5] *Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В.* Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // *Акустический журнал*. 2011. Т. 57. № 6. С. 723–730.
- [6] *Богачев И. В., Явруян О. В.* Об одном подходе к идентификации свойств неоднородного слоя // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2011. № 4. Ч. 5. С. 2634–2635.
- [7] *Ватульян А. О.* К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // *ПММ*. 2010. № 6. С. 911–918.

**Vatulyan A. O., Bogachev I. V., Yavruyan O. V.** *On the identification of inhomogeneous properties for the orthotropic elastic strip.* The stepwise algorithm of inhomogeneous characteristics definition for orthotropic elastic strip which properties vary on a thickness is offered. Reconstruction of inhomogeneous properties is carried out under integrated characteristics of displacement fields measured on the top border of a strip at excitation it of steady-state oscillations. In the basis of the offered scheme data is a reduction an initial two-dimensional problem to more simple problems by the analysis of a spectral bunch and drawing up of regional problems for the moments of the first and second usages of corresponding fields lay. Further research received the inverse coefficient problems is shown to the consecutive decision of integral Fredholm's equations of the first type with attraction regularization algorithms of numerical differentiation and Tihonov's regularization method. The computing scheme for the inverse coefficient problems decision are developed, numerical results of inhomogeneous properties reconstruction for the strip are presented.

# ЧИСЛЕННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

**Ватульян А. О.<sup>\*,\*\*</sup>, Нестеров С. А.<sup>\*</sup>**

*<sup>\*</sup> Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*<sup>\*\*</sup> Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

В работе предложены две постановки (в пространстве трансформант и оригиналах) коэффициентной обратной задачи для термоупругого неоднородного стержня. На основе соотношения взаимности для неоднородных термоупругих тел обратная задача сведена к поэтапному решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Результаты решения обратной задачи, полученные в двух постановках, сравниваются между собой.

Термомеханические характеристики неоднородного тела являются функциями координат и не могут быть определены из простых макроэкспериментов, поэтому задача их идентификации относится к классу коэффициентных обратных задач (КОЗ). Успешные исследования в этой области стали проводиться только в последние 20 лет, что связано с развитием вычислительной мощности компьютеров и появлением эффективных вычислительных схем решения такого типа задач. При этом идентификация теплофизических характеристик материалов проводилась в рамках КОЗ теплопроводности [1], восстановление механических характеристик в рамках КОЗ теории упругости [2]. Однако для ряда новых материалов необходимо учитывать связанность тепловых и механических полей и решать обратные задачи термоупругости. В последние годы развит альтернативный подход к решению коэффициентных обратных задач механики связанных полей, в которых решение нелинейных обратных задач сводится к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается линейная задача. Этот подход был успешно применен авторами данной статьи для идентификации термомеханических характеристик стержня в случае постановки КОЗ термоупругости в пространстве трансформант по Лапласу [3]. В данной работе приводятся результаты вычислительных экспериментов при решении обратной задачи на конечном временном интервале при точных и возмущенных входных данных. Полученные результаты сравниваются с более ранними результатами, полученными при решении КОЗ термоупругости в пространстве трансформант [3, 4].

Рассмотрим жестко закрепленный на торце  $x = 0$  неоднородный изотропный термоупругий стержень длины  $l$ , в котором колебания возбуждаются при помощи внезапно приложенного к торцу  $x = l$  теплового потока. Считаем, что модуль Юнга, удельная теплоемкость, плотность, коэффициент теплового расширения есть произвольные положительные функции координаты  $x$ . Тогда уравнения связанной термоупругости примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_x = E(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x)\theta \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = c(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \alpha(x) E(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (3)$$

а граничные условия представимы в форме

$$u(0, t) = \theta(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0 H(t), \quad \sigma_x(l, t) = 0. \quad (4)$$

Будем считать, что известна дополнительная информация о торцевой температуре  $\theta(l, t) = f(t)$ . Целью решения обратной задачи является реконструкция одного из коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости при известных остальных. Для этого вначале вводятся безразмерные параметры и функции

$$z = \frac{x}{l}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0}, \quad \tau = \frac{k_0 t}{c_0 l^2},$$

$$W(z, \tau) = \frac{k_0 \theta}{q_0 l}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad \Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}, \quad \phi = \frac{\alpha_0 q_0 l}{k_0}, \quad \delta = \frac{\alpha_0^2 T_0 E_0}{c_0}, \quad \varepsilon = \frac{k_0}{c_0 \sqrt{E_0 \rho_0 l}}.$$

Здесь  $k_0, c_0, \rho_0, E_0$  — некоторые характерные коэффициенты теплопроводности, теплового расширения, удельной теплоемкости, значения плотности и модуля Юнга соответственно,  $W(z, \tau)$  — безразмерная температура,  $U(z, \tau)$  — безразмерное смещение,  $\Omega(z, \tau)$  — безразмерное напряжение. После обезразмеривания к задаче применяется преобразование Лапласа аналогично [3]. Прямая задача в пространстве трансформант по Лапласу исследовалась методом малого параметра [4], в качестве которого был выбран параметр  $\delta$ , характеризующий связанность тепловых и механических полей. Решение прямой задачи в трансформантах сводится в итоге к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно безразмерных трансформант температуры и смещений [4]. Для нахождения температуры и смещений численно решались интегральные уравнения Фредгольма второго рода на основе сведения к линейной алгебраической системе, построенной на базе квадратурной формулы трапеций и метода колокаций. Обратное преобразование Лапласа осуществлялось по формуле Римана–Меллина, причём интеграл вычислялся по теории вычетов.

Решение обратной задачи сначала находилось в пространстве трансформант. Для этого с помощью обобщенной теоремы взаимности для неоднородных термоупругих тел было получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода для нахождения поправок восстанавливаемых функций, которое с сохранением обозначений, введенных в [4] имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \delta \bar{k}_n(z) \left( \frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz + p \int_0^1 \delta \bar{c}_n \left( \tilde{W}_{n-1} \right)^2 dz + p \delta \int_0^1 \delta \bar{E}_n \left( \frac{d\tilde{U}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz + \\ + \varepsilon^2 p^3 \delta \int_0^1 \delta \bar{\rho}_n \left( \tilde{U}_{n-1} \right)^2 dz = \frac{\phi}{p} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1})|_{z=1}. \quad (5) \end{aligned}$$

Натурный эксперимент заменен вычислительным. В уравнении (6)  $\tilde{W}_T$  — вычисленная безразмерная трансформанта температуры на торце при точных значениях

коэффициентов;  $\tilde{W}_{n-1}$  — вычисленная безразмерная трансформанта температуры на  $(n-1)$  итерации при восстанавливаемых коэффициентах. Вычислительные эксперименты в системе Maple были проведены, когда восстанавливалась только одна функция, все остальные считались известными константами. При такой постановке интегральное уравнение (5) распадается на ряд независимых интегральных уравнений. Так, для восстановления модуля Юнга имеем

$$p \int_0^1 \delta \bar{E}_n \left( \frac{d\tilde{U}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz = \frac{\phi}{p} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1})|_{z=1} . \quad (6)$$

Для перехода к оригиналам в интегральных уравнениях (ИУ) используются теоремы о свертке и дифференцировании оригинала операционного исчисления. Относительно поправки  $\delta \bar{c}(z)$  в оригиналах получено интегральное уравнение:

$$\int_0^t d\tau \int_0^1 \delta \bar{c}_n(z) \frac{\partial W_{n-1}(z, \tau)}{\partial \tau} W_{n-1}(z, t - \tau) dz = \phi \int_0^t (W_T(1, \tau) - W_{n-1}(1, \tau)) d\tau . \quad (7)$$

Коэффициенты переноса и модуль Юнга неоднородного стержня находились в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций методом минимизации функционала невязки между точной и вычисленной торцевой температурой на конечном временном интервале  $[a; b]$ :

$$J_{n-1} = \frac{1}{b-a} \int_a^b (W_{n-1}(1, \tau) - W_T(1, \tau))^2 d\tau . \quad (8)$$

На втором этапе определялись поправки к восстанавливаемым функциям. Критерием выхода из итерационного процесса является стабилизация функционала невязки (8).

Были проведены серии вычислительных экспериментов по восстановлению коэффициента теплопроводности, удельной теплоемкости и модуля Юнга в классах степенных, экспоненциальных и тригонометрических функций. При этом каждая из функций восстанавливалась, когда был известен закон изменения остальных. В расчетах приняты следующие параметры:  $\delta = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\phi = 1$ . В первой серии экспериментов реконструкция происходила при решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода в трансформантах. Выяснено, что восстановление удельной теплоемкости происходило лучше, чем коэффициента теплопроводности и модуля Юнга. Во второй серии экспериментов восстановление происходило в оригиналах. В этом случае процедура реконструкции всех коэффициентов оказалась устойчива к 2–4%-му шуму. В пространстве трансформант реконструкция удельной теплоемкости невозможна даже при 2%-м шуме. Если при решении в пространстве трансформант необходимо знать торцевую температуру в любой момент времени, то при решении в оригиналах, как показали вычислительные эксперименты, достаточно знать значения температуры для пяти моментов времени.

Однако реконструкция с использованием ИУ в оригиналах происходит с чуть большей погрешностью, чем в пространстве трансформант. При этом в обоих случаях погрешность реконструкции не превышает 7% для монотонных функций и 17% для немонотонных функций. На рис. 1–3 представлены результаты реконструкции коэффициентов, при этом сплошной линией изображен точный закон изменения коэффициентов, пунктирной линией — восстановленный при решении ИУ в оригиналах, точками — восстановленный при решении ИУ в пространстве трансформант. На рис. 1 изображен результат восстановления удельной теплоемкости как кусочно-непрерывной функции  $\bar{c}(z) = 0,1 + z$  при  $z \in [0; 0,5]$ ,  $\bar{c}(z) = 1,1 - z$  при  $z \in [0,5; 1]$ , параметр регуляризации на пятой итерации —  $6,7 \cdot 10^{-9}$ , начальное приближение  $\bar{c}_0 = 0,2 + 0,1z$ , погрешность реконструкции не превысила 11%. На рис. 2 представлен результат реконструкции коэффициента теплопроводности как убывающей функции  $\bar{k}(z) = \cos(0,7z)$ , параметр регуляризации на шестой итерации —  $3,4 \cdot 10^{-7}$ , начальное приближение  $\bar{k}_0 = 0,9 - 0,2z$ , погрешность реконструкции не превысила 5%. На рис. 3 показан результат восстановления модуля Юнга как возрастающей функции  $\bar{E}(z) = 0,1e^{3z}$ , параметр регуляризации на седьмой итерации —  $6,1 \cdot 10^{-6}$ , начальное приближение  $\bar{E}_0 = 0,8z$ , погрешность реконструкции не превысила 12%.

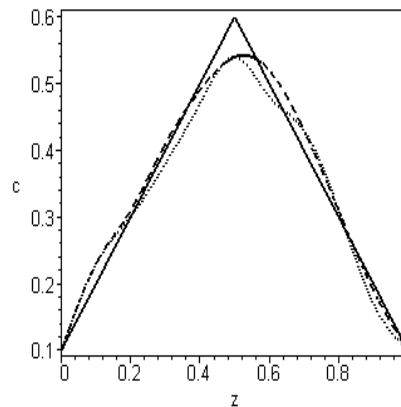


Рис. 1. Реконструкция удельной теплоемкости.

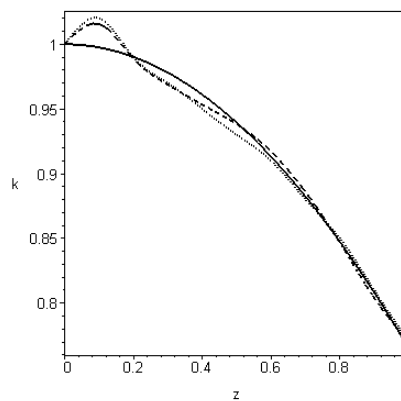


Рис. 2. Реконструкция коэффициента теплопроводности.

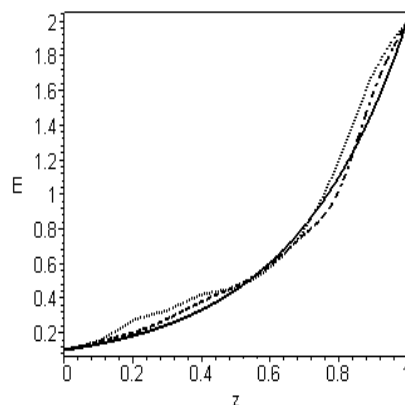


Рис. 3. Реконструкция модуля Юнга.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00194-а) и частичной поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт П596).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1988. 288 с.
- [2] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [3] Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях идентификации неоднородных свойств термоупругих тел // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 1. С. 29–36.
- [4] Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 24–30.

**Vatulyan A. O., Nesterov S. A.** *Numerical reconstruction thermomechanical properties of inhomogeneous rod.* In work two productions (in space of transforms and originals) of coefficient inverse problem for thermoelastic inhomogeneous rod are proposed. On the basis reciprocity relation for thermoelasticity inhomogeneous bodies inverse problem is reduced to step by step solution of Fredholm integral equation of the first kind. Results obtained using two productions are compared between itself.



# ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

**Воронкова Е. Б., Игнатьева К. А.**

*Санкт-Петербургский государственный университет*

В работе рассматривается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных круглых и кольцевых пластин, нагруженных нормальным давлением. Внешний край пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении, а внутренний — свободно смещается в направлении оси пластины, но не поворачивается. Предлагается, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер, и численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой появляются волны в окружном направлении. Исследовано влияние отверстия в центре пластины и степени неоднородности материала на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости.

**1. Введение.** При исследовании больших прогибов пологих оболочек и пластин, нагруженных симметричной нагрузкой, приходится сталкиваться с образованием складок, вызванных потерей устойчивости осесимметричной формы равновесия. Для пластины, нагруженной нормальным давлением решение, соответствующее несимметричным формам равновесия, полученное методом Галеркина, предложено Пановым Д. Ю. и Феодосьевым В. В. в [1]. Строгое доказательство существования несимметричного решения для симметрично нагруженной пластины провел Морозов Н. Ф. в [2], а единственность такого решения доказана Piechocki W. O. в [3]. В работе Cheo L. S., Reiss E. L. [4] для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения численно определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной.

В настоящей работе рассматривается задача о потере устойчивости осесимметричной формы равновесия неоднородной кольцевой пластины, модуль упругости которой изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Такая пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины диска зрительного нерва человека [5]. Исследуется влияние отверстия в центре пластины и неоднородности материала пластины на величину критической нагрузки.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим кольцевую пластину внешним радиусом  $R$ , внутренним радиусом  $R_{in}$  и толщиной  $h$ , лицевая поверхность которой нагружена нормальным давлением. Материал пластины полагается изотропным, модуль упругости меняется при удалении от центра пластины к краю. Выпишем систему уравнений деформаций в безразмерном виде [5]

$$\begin{aligned} g_1(r)\Delta\Delta w + g_1'(r)L_1^+(w) + g_1''(r)L_2^+(w) &= p + L(w, F), \\ g_2(r)\Delta\Delta F + g_2'(r)L_1^-(F) + g_2''(r)L_2^-(F) &= -L(w, w)/2, \\ ( )' &= \partial( )/\partial r, \quad ( \dot{ } ) = \partial( )/\partial \theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $w(r, \theta)$ ,  $F(r, \theta)$  — неизвестные безразмерные нормальный прогиб и функция усилий;  $r, \theta$  — полярные координаты, введенные на срединной поверхности пластины;  $g_1(r)$  — достаточно гладкая функция, определяющая закон изменения модуля упругости в плоскости пластины;  $g_2(r) = 1/g_1(r)$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $L, L_i^\pm$ , ( $i = 1, 2$ ) — дифференциальные операторы

$$L(x, y) = x''(y'/r + \ddot{y}/r^2) + y''(x'/r + \ddot{x}/r^2) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)',$$

$$L_1^\pm(y) = 2y''' + (2 \pm \nu)y''/r + 2(\ddot{y})'/r^2 - y'/r^2 - 3\dot{y}/r^3,$$

$$L_2^\pm(y) = y'' \pm \nu(y'/r + \ddot{y}/r^2),$$

Безразмерные величины связаны с размерными соотношениями

$$r = \frac{r^*}{R}, \quad \delta = \frac{R_{in}}{R}, \quad w = \beta \frac{w^*}{h}, \quad p = \beta^3 \frac{p^* R^4}{E_{av} h^4}, \quad F = \beta^2 \frac{F^*}{E_{av} h^3}, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2);$$

$$E_{av} = \frac{1}{S} \iint_S E(r) r dr d\theta.$$

где  $E, \nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона пластины;  $E_{av}$  — среднее значение модуля упругости.

Положим, что внешний край пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении, а внутренний — свободно смещается в направлении оси симметрии пластины, но не поворачивается. Тогда на внешнем ( $r = 1$ ) и внутреннем ( $r = \delta$ ) краях пластины предполагается равенство нулю растягивающих и сдвигающих усилий, а на внешнем крае также и поперечное реактивное усилие, складывающееся из поперечной силы и производной от крутящего момента.

В терминах нормального перемещения  $w$  и функции усилий  $F$  граничные условия запишутся с следующим виде

$$\begin{aligned} r = 1 : \quad w = w' = F'/r + \ddot{F}/r^2 = -(\dot{F}/r)' &= 0; \\ r = \delta : \quad w' = -(\dot{F}/r)' &= 0, \\ w''' + w''/r - w'/r^2 + (2 - \nu)(\ddot{w})'/r^2 - (3 - \nu)\ddot{w}/r^3 &= 0, \\ \Delta F' + \Delta F - \frac{1 - \nu}{r}(F + \ddot{F})' + g_2'(w'' + \nu(\frac{w'}{r} + \frac{\ddot{w}}{r^2})) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для сплошной пластины, учитывая ограниченность искомых решений, в центре пластины при  $r = 0$  полагаем  $w' = F' = 0$ .

**3. Схема решения.** При малых значениях давления  $p$  система (1)–(2) имеет только симметричное решение. Несимметричное решение этой системы появляется при возрастании нагрузки [4, 5]. Следуя [4], представим решение в виде

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r) \cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r) \cos n\theta, \tag{3}$$

где функции  $w_s, F_s$  описывают докритическое симметричное решение, а функции  $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos n\theta, F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos n\theta$  — закритическое состояние пластины ( $n$  — число волн в окружном направлении, образовавшихся после потери устойчивости).

После разделения переменных (3) исходная система (1)–(2) распадается на две: нелинейную, для нахождения симметричного решения  $w_s(r), F_s(r)$ , и линейную систему уравнений относительно  $w_n(r), F_n(r)$ , т.к. функции  $w_{ns}, F_{ns}$  полагаются малыми сразу после перехода пластины в неосесимметричное состояние. Для каждого числа волн в окружном направлении  $n$  будем искать такие значения нагрузки  $p_n$ , при которых существуют отличные от нуля функции  $w_n(r), F_n(r)$ . Критической нагрузкой выберем  $p_{cr} = \min_n p_n$ .

**4. Результаты.** Проведены серии расчетов для неоднородной сплошной и кольцевой пластин при изменении модуля упругости пластины по линейному  $E = E_0^{(1)}(1 + q_1 r)$  и экспоненциальному  $E = E_0^{(2)} e^{q_2 r}$  законам. Параметры  $E_0^{(i)}$  и  $q_i, (i = 1, 2)$  выбирались так, чтобы среднее значения модуля упругости пластины  $E_{av}$  оставалось постоянным. Для однородной пластины наименьшее значение нагрузки составляет  $p_{cr}^0 = 62598$ , а соответствующее этой нагрузке волновое число  $n = 14$ . Эти данные согласуются с результатами [4]. Для неоднородных сплошных пластин результаты расчетов приведены на рис. 1. Значение параметра  $q = 0$  соответствует пластине с постоянным модулем упругости.

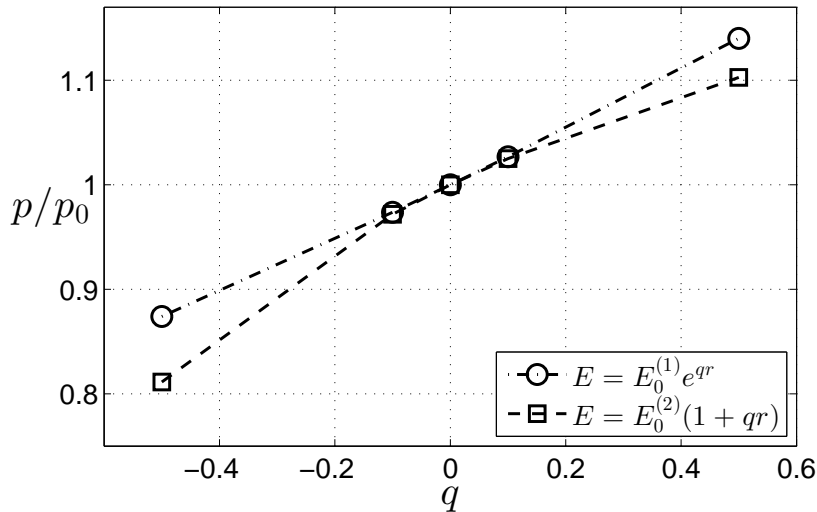


Рис. 1. Изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности пластины  $q, p_0$  — критическая нагрузка для однородной пластины.

Расчеты показывают, что если модуль упругости пластины уменьшается к ее краю, то потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходит при более низкой нагрузке и с образованием большего числа складок в окружном направлении, чем для однородной пластины. При увеличении модуля упругости критическая нагрузка возрастала. Чем быстрее убывает модуль упругости, тем ниже становится величина критической нагрузки.

Безразмерные значения критической нагрузки  $p$  и число волн  $n$ , образующихся

по краю пластины при переходе в неосесимметричное состояние, для однородной кольцевой пластины при различных радиусах центрального отверстия приведены в табл. 1, для неоднородной кольцевой пластины при изменении модуля упругости по закону  $E = E_0 e^{qr}$  — в табл. 2.

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.15$
$p_{cr}$	62598	62863	64385	67707	72048
$n$	14	13	13	12	12

Таблица 1. Критическая нагрузка для однородной кольцевой пластины ( $\delta = 0$  соответствует сплошной пластине).

	$q = -0.5$	$q = -0.1$	$q = 0$	$q = 0.1$	$q = 0.5$	$q = 1$
$p_{cr}$	47060	62696	64385	66111	73413	83600
$n$	13	13	13	13	13	13

Таблица 2. Критическая нагрузка для неоднородной кольцевой пластины ( $\delta = 0.05$ ,  $E = E_0 e^{qr}$ ).

Видно, что потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия при увеличении радиуса центрального отверстия происходит с образованием меньшего числа складок в окружном направлении.

Как и для сплошной пластины, при убывания модуля упругости от центра пластины к ее краю переход ( $q < 0$ ) в неосесимметричное состояние происходит при более низкой нагрузке, чем для однородной пластины, а при увеличении ( $q > 0$ ) — при существенно более высокой.

Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия локализована вблизи внешнего края пластины и связана с появлением в окрестности внешнего края сжимающих окружных усилий [2]. Этим объясняется влияние на критическую нагрузку свойств пластины в окрестности внешнего края.

Подобная пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины (РП) диска зрительного нерва человека. РП является неоднородной, существенно мягче склеры — основной оболочки глаза, в связи с тем, что в несколько раз тоньше, а так же ослаблена множеством отверстий. Учитывая связь размерных и безразмерных, находим, что критическое давление  $p_{cr} = 62598$  пластины радиуса  $R = 1$  мм, толщиной  $h = 0.1$  мм,  $E_{av} = 0.3$  МПа,  $\nu = 0.45$  при котором возможна бифуркация в неосесимметричное состояние соответствует 63,43 КПа или 476 мм рт. ст. В случае кольцевой неоднородной пластины, при убывании модуля упругости к краю пластины это возможно при давлении равном 9,67 КПа или 77 мм рт. ст. Данные значения пластины, для которых производился расчет, являются приближенными параметрами решетчатой пластины глаза.

**5. Заключение.** В работе численным методом исследована потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия неоднородных сплошных/кольцевых пластин. Найдено критическое давление, при котором возможна бифуркация пластины в неосесимметричное состояние. Показано влияние степени неоднородности

и размера центрального отверстия пластины на изменение критической нагрузки. Произведен численный анализ критической нагрузки для различных законов изменения модуля упругости пластины, размеров внутреннего края в случае кольцевой пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. 1948. Т. XII. С. 389–406.
- [2] Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой // Изв. Высш. Уч. Заведений. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
- [3] Piechocki W. J. On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech. 1969. № 21. Pp. 81–101.
- [4] Cheo L. S, Reiss E. L. Unsymmetrical wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. 1971. № 31. Pp. 75–91.
- [5] Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 1. С. 80–85.

**Voronkova E. B., Ignatieva K. A.** *Buckling of axisymmetric equilibrium states of annular plates under normal pressure.* The stability of axisymmetric equilibrium states of an isotropic non-homogeneous plate under uniform pressure is considered. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinates. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. It is shown that if the elasticity modulus decreases away from the center of a plate, the critical pressure for unsymmetric buckling is sufficiently lower than for a plate with constant mechanical properties.

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИЧЕСКОМ СЖАТИИ ТОНКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

**Георгиевский Д. В.**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Исследована краевая задача о динамическом прессовании тонкого идеально жёстко-пластического слоя абсолютно жёсткими шероховатыми плитами. Показано, что переход от квазистатической стадии к динамической определяется соотношением порядков двух малых безразмерных параметров — явно зависящего от времени отношения толщины слоя к его длине и постоянной во времени величины, обратной числу Эйлера. Для данной двухпараметрической системы развита методика асимптотического интегрирования и приведены асимптотические разложения по первому из упомянутых параметров, качественно различающиеся на разных временах.

**1. Описание системы и постановка задачи.** Как известно, замкнутая система плоской динамической теории несжимаемого идеально жёсткопластического течения с критерием Мизеса – Генки состоит из пяти уравнений

$$\begin{aligned} -p_{,1} + s_{11,1} + s_{12,2} &= \rho(v_{1,t} + v_{1,1}v_1 + v_{1,2}v_2) , \\ -p_{,2} - s_{11,2} + s_{12,1} &= \rho(v_{2,t} + v_{2,1}v_1 + v_{2,2}v_2) , \end{aligned} \quad (1)$$

$$s_{11}^2 + s_{12}^2 = \sigma_s^2/2 \equiv \tau_s^2 , \quad s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1} , \quad v_{1,1} + v_{2,2} = 0 ,$$

относительно компонент вектора скорости  $v_1, v_2$ , компонент девиатора тензора напряжений  $s_{11}, s_{12}$  ( $s_{22} = -s_{11}$ ) и давления  $p$ . Запятая в индексе означает частную производную по соответствующей пространственной переменной  $x_1, x_2$  или по времени  $t$ ; через  $\rho$  и  $\sigma_s$  обозначены плотность и предел текучести материала.

Рассмотрим систему (1) на интервале времени  $0 < t < t_* = h_0/V$  в тонком прямоугольном слое

$$\Omega_t = \{-l(t) < x_1 < l(t), -h(t) < x_2 < h(t)\} , \quad h(t) \ll l(t) ,$$

где  $h(t) = h_0 - Vt$ ;  $h(0) = h_0$ ;  $l(0) = l_0$ ;  $V = \text{const}$ . Длинные стороны слоя соприкасаются с движущимися навстречу друг другу абсолютно жёсткими, бесконечными по  $x_1$  плитами с известными коэффициентами шероховатости  $m_0$  ( $0 < m_0 \leq 1$ ). Скорость  $V$  обеих плит и начальная толщина  $2h_0$  слоя заданы, так что требование несжимаемости накладывает очевидную связь  $h(t)l(t) = h_0l_0$  на известные функции  $h(t)$  и  $l(t)$ .

Кинематические граничные условия непротекания и условия того, что модуль касательного напряжения достигает своей верхней грани на поверхности прессующих плит, записываются следующим образом:

$$v_2|_{x_2=-h} = V , \quad v_2|_{x_2=h} = -V , \quad (2)$$

$$|s_{12}|_{x_2=-h} = |s_{12}|_{x_2=h} = m_0 \tau_s, \quad (3)$$

причём равенства (3) можно считать определением коэффициента шероховатости  $m_0$ . Абсолютному сцеплению отвечает  $m_0 = 1$ .

Короткие стороны  $x_1 = \pm l(t)$  слоя свободны от напряжений, однако на них точные граничные условия не задаются, а области вблизи них на расстояниях порядка  $h$  трактуются как зоны краевого эффекта. Систему (1)–(3), по существу составляющую постановку динамической задачи Прандтля, назвать начально-краевой задачей можно весьма условно, поскольку эта система не сопровождается никакими начальными условиями. Ищется же решение, физически соответствующее сжатию по оси  $x_2$  с растеканием материала вдоль оси  $x_1$ .

В теории обработки металлов давлением известна область параметров, в которой достоверно квазистатическое приближение в тонком слое:

$$\frac{\rho V^2}{\tau_s} \ll \frac{h^2}{l^2} \ll 1. \quad (4)$$

Квазистатическая постановка отличается от (1)–(3) тем, что в правых частях первых двух уравнений (1) стоят нули, так что время  $t$  становится параметром, входящим неявно через  $h$  и  $l$  в классическое решение Прандтля [1]:

$$v_1 = \frac{V}{h} \left( x_1 + \frac{2s}{m_0} \sqrt{h^2 - m_0^2 x_2^2} \right), \quad v_2 = -\frac{V x_2}{h}, \quad (5)$$

$$s_{11} = \frac{\tau_s}{h} \sqrt{h^2 - m_0^2 x_2^2}, \quad s_{12} = -s \frac{m_0 \tau_s x_2}{h}, \quad (6)$$

$$p = \frac{\tau_s}{h} \left[ m_0 (l - |x_1|) - \sqrt{h^2 - m_0^2 x_2^2} \right] + p_0, \quad (7)$$

где  $s = \text{sign } x_1$ ;  $p_0$  — гидростатическая постоянная.

При моделировании же высокоскоростных пластических течений [2], особенно в тонких слоях, необходим учёт инерционных сил, так как внешние нагрузки, необходимые для осуществления таких течений, сильно отличаются от тех, что характерны для квазистатики [3–6].

**2. Малые геометрический и физический параметры.** Образует зависящий явно от времени безразмерный малый геометрический параметр  $\alpha(t) = h(t)/l(t) \ll 1$  и другой не зависящий от времени малый физический параметр  $\text{Eu}^{-1} \ll 1$ , где  $\text{Eu} = \tau_s/(\rho V^2)$  — число Эйлера. Как следует из (4), если  $\text{Eu}^{-1} = o(\alpha^2)$ , то задача в квазистатическом приближении адекватно моделирует процесс сжатия и растекания идеально жёсткопластического слоя.

По сравнению с  $\text{Eu}^{-1}$  порядок малости  $\alpha(t)$  с прохождением  $t$  от начала движения до момента схлопывания  $t_*$  растёт до бесконечности. Пользуясь тем, что  $\alpha(t) = V^2(t_* - t)^2/(h_0 l_0)$ , нетрудно получить:

$$\text{Eu}^{-1} = O(\alpha^\beta(t)) \iff t_* - t \sim \frac{1}{\text{Eu}^{1/(2\beta)}} \frac{\sqrt{h_0 l_0}}{V}, \quad \beta > 0. \quad (8)$$

Применительно к динамическому анализу интерес представляет диапазон показателя  $\beta$ :  $0 < \beta \leq 2$ , включающий два целых значения:  $\beta = 2$  и  $\beta = 1$ . Проведём в

данной работе поиск решения для этих двух значений, что позволит представить разложения пяти неизвестных в (1) функций лишь по целым степеням  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 v_1(x_1, x_2, t) &= V \sum_{n=-N}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_1^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \tau), \quad N \geq 1, \\
 v_2(x_1, x_2, t) &= V \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_2^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \tau), \\
 s_{ij}(x_1, x_2, t) &= \tau_s \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m \bar{s}_{ij}^{\{m\}}(\eta_1, \eta_2, \tau), \\
 p(x_1, x_2, t) &= \tau_s \sum_{m=-M}^{\infty} \alpha^m \bar{p}^{\{m\}}(\eta_1, \eta_2, \tau), \quad M \geq 1,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\eta_1 = \frac{x_1}{l} = \frac{\alpha x_1}{h}, \quad \eta_2 = \frac{x_2}{h}, \quad \tau = \frac{Vt}{h}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = -\frac{V\eta_1}{h}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = -\frac{V\eta_2}{h}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{Vh_0}{h^2} = (1 + \tau) \frac{V}{h}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{2V\alpha}{h},$$

где  $M$  и  $N$  — заранее неизвестные натуральные числа, определяющие порядок главных сингулярных асимптотических членов разложений  $p$  и  $v_1$ . Именно эти две функции из пяти неизвестных в (1) неограниченны при  $\alpha \rightarrow 0$ , тогда как девиатор напряжений (в силу критерия пластичности) и поперечная компонента скорости (в силу граничных условий (2)) остаются ограниченными. Если в (9) положить  $M = N = 1$ , то структура разложений будет такой же, как и в классическом решении Прандтля.

Безразмерные коэффициенты рядов (9) — функции новых безразмерных переменных (10), меняющихся в интервалах  $0 < \tau < \infty$ ,  $-1 < \eta_1 < 1$ ,  $-1 < \eta_2 < 1$ . Пределы изменения пространственных координат  $\eta_1, \eta_2$  уже не зависят от  $\tau$ .

**3. Случай  $\beta = 2$ .** Подставим разложения (9) в систему (1)–(3) и путём применения процедуры последовательного асимптотического интегрирования (терминология заимствована из [7]), развиваемой в последние годы в задачах механики деформируемого тонкого тела [8, 9], придём к набору краевых задач для величин с верхней чертой в рядах (9). В работе доказывается, что без ограничения общности можно взять  $M = N = 1$ .

Если  $\beta = \infty$ , то данная процедура приводит к асимптотически точному решению (5)–(7). Термин «асимптотическая точность» применительно к решению по определению означает, что число ненулевых слагаемых во всех рядах (9) конечно. Так, в (5)–(7) функции  $v_1$  и  $p$  содержат по два ненулевых слагаемых со степенями  $\alpha^{-1}$  и  $\alpha^0$ , а  $v_2, s_{11}$  и  $s_{12}$  — по одному с  $\alpha^0$ .

Начиная со значения  $\beta = 2$  и меньше, вклад правых частей уравнений движения имеет, по крайней мере, тот же порядок, что и у других слагаемых квазистатического решения. Положим  $\mathbf{E}u^{-1} = C_2\alpha^2$ , где  $C_2 = O(1)$ . Тогда коэффициенты



при первых членах разложений (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \bar{p}^{\{-1\}} &= (1 - |\eta_1|)m_0, & \bar{p}^{\{0\}} &= -\sqrt{1 - m_0^2\eta_2^2} + C_2(1 - \eta_1^2) + \bar{p}_0^{\{0\}}, \\
 \bar{p}^{\{1\}} &= -\frac{C_2}{m_0^2} \left( \arcsin m_0 + m_0\sqrt{1 - m_0^2} \right) |\eta_1| + \bar{p}_0^{\{1\}}, \\
 \bar{s}_{11}^{\{0\}} &= \sqrt{1 - m_0^2\eta_2^2}, & s_{12}^{\{0\}} &= -sm_0\eta_2, & s_{11}^{\{1\}} &= s_{12}^{\{1\}} \equiv 0, \\
 \bar{v}_1^{\{-1\}} &= \eta_1, & \bar{v}_2^{\{0\}} &= -\eta_2, & \bar{v}_1^{\{0\}} &= \frac{2s}{m_0}\sqrt{1 - m_0^2\eta_2^2}, & v_1^{\{1\}} &= v_2^{\{1\}} \equiv 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\bar{p}_0^{\{0\}}$  и  $\bar{p}_0^{\{1\}}$  — гидростатические постоянные порядков  $O(1)$  и  $O(\alpha)$ .

Подставляя выражения (11) в ряды (9), можно показать, что из пяти размерных функций от соответствующих в решении Прандтля (5)–(7) отличается только давление  $p$ :

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\tau_s}{h} \left[ m_0(l - |x_1|) - \sqrt{h^2 - m_0^2x_2^2} \right] + \frac{\rho V^2}{h^2}(l^2 - x_1^2) - \\
 &\quad - \frac{\rho V^2}{m_0^2 h} \left( \arcsin m_0 + m_0\sqrt{1 - m_0^2} \right) |x_1| + p_0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Разница состоит в наличии в (12) слагаемого, квадратично зависящего от  $x_1$  [3, 6] (при  $\beta = 2$  оно входит в (11) в  $\bar{p}^{\{0\}}$ , т.е. имеет порядок  $O(1)$ ), и динамического слагаемого, линейного по  $x_1$  (оно входит в (11) в  $\bar{p}^{\{1\}}$ , т.е. имеет порядок  $O(\alpha)$ ).

**4. Случай  $\beta = 1$ .** Положим теперь  $\text{Eu}^{-1} = C_1\alpha$ ;  $C_1 = O(1)$ . Точное решение получающейся главной асимптотической системы для величин с верхними индексами  $\{-1\}$  и  $\{0\}$  следующее:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}^{\{-1\}} &= (1 - |\eta_1|)m_0 + C_1(1 - \eta_1^2), & s_{11}^{\{0\}} &= \sqrt{1 - m_0^2\eta_2^2}, & s_{12}^{\{0\}} &= -sm_0\eta_2, \\
 \bar{p}^{\{0\}} &= -\sqrt{1 - m_0^2\eta_2^2} - \frac{C_1}{m_0^2} \left( \arcsin m_0 + m_0\sqrt{1 - m_0^2} \right) |\eta_1| + \bar{p}_0^{\{0\}}, \\
 \bar{v}_1^{\{-1\}} &= \eta_1, & \bar{v}_2^{\{0\}} &= -\eta_2, & \bar{v}_1^{\{0\}} &= \frac{2s}{m_0}\sqrt{1 - m_0^2\eta_2^2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

При сравнении решений (11) и (13), видно, что при  $\beta = 1$  зависящее от  $\eta_1$  слагаемое перешло из  $\bar{p}^{\{0\}}$  в  $\bar{p}^{\{-1\}}$ , т.е. приобрело порядок  $O(\alpha^{-1})$ , а соответствующее линейное по  $x_1$  слагаемое перешло из  $\bar{p}^{\{1\}}$  в  $\bar{p}^{\{0\}}$ , т.е. стало порядка  $O(1)$ . Остальные функции сохраняют прежний вид.

Подставляя коэффициенты (13) в ряды по  $\alpha$  (9), придём опять же к размерным функциям (5), (6), (12), которые будут служить решением исходной задачи в динамической постановке с точностью  $O(\alpha)$ , или, как и ранее,  $O(\alpha^\beta)$ . Тот факт, что размерный вид решения (5), (6) и (12) полностью сохраняется, говорит о плавном сращивании асимптотик на двух временных интервалах  $(t_* - t)$  в (8) — при  $\beta = 2$  и  $\beta = 1$ .

По мере приближения времени к моменту  $t_*$  параметр  $\alpha(t)$  становится настолько малым, что  $\text{Eu}^{-1} = C_\beta\alpha^\beta$ ,  $C_\beta = O(1)$ ,  $0 < \beta < 1$ . Разложения (9) всех неизвестных величин по целым степеням  $\alpha$  уже не будет иметь место.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht // ZAMM. 1923. В. 3. № 6. S. 401–406. = *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: Изд-во Иностр. лит., 1948. С. 102–113.
- [2] *Ильюшин А. А.* Труды. Т. IV. Моделирование динамических процессов в твёрдых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009. 526 с.
- [3] *Быковцев Г. И.* О сжатии пластического слоя жёсткими шероховатыми плитами с учётом сил инерции // Изв. АН СССР. ОТН. Сер. Механика и машиностр. 1960. № 6. С. 140–142.
- [4] *Наяр Е.* Некоторые плоские инерционные течения пластических материалов // Механика сплошных сред. София: Изд-во Болгарской АН, 1968. С. 269–277.
- [5] *Кийко И. А., Кадымов В. А.* Обобщения задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 2003. № 4. С. 50–56.
- [6] *Аннин Б. Д.* Симметричный анализ уравнений пластического течения Мизеса // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 101–105.
- [7] *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. № 4. С. 668–686.
- [8] *Георгиевский Д. В.* Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 83–93.
- [9] *Георгиевский Д. В.* Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 104–115.

**Georgievskii D. V.** *Asymptotic integration in the problem on dynamic compression of a thin plastic layer.* The boundary-value problem on dynamic pressing of a thin perfect rigid plastic layer by two rigid rough slabs is investigated in the present paper. It is shown that a passage from a quasistatic stage to dynamic one is determined by an order relation of two small dimensionless parameters — the depending on time ratio of layer thickness to its length, and the constant in time value which is inverse to the Euler number. For this two-parameter system the asymptotic integration methods are developed as well as the asymptotic expansions by first of mentioned above parameters are given. These expansions differ qualitatively by various time intervals.

# О МЕТОДАХ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ

**Говорухин В. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

С помощью вычислительного эксперимента анализируются методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при расчетах динамики жидких частиц. Рассмотрены многошаговые и одношаговые методы, применявшиеся ранее при решении данного класса задач. В качестве тестовых примеров используются точные решения уравнений Эйлера. Основное внимание уделяется анализу вычислительных затрат методов и поведению решений на больших временах.

**1. Введение.** Исследование динамики жидких частиц является одной из важных задач гидродинамики и массопереноса в жидкости. Для эффективного анализа таких задач необходимы эффективные методы построения траекторий жидких частиц, порождаемых полем скорости в области течения. Скорости жидкости могут быть известны, или вычисляться на каждом временном шаге, но в любом случае, методы численного интегрирования уравнений динамики частиц жидкости должны сохранять фундаментальные свойства задач. Для этого развиты геометрические подходы при построении методов, основанные на сохранении свойств исходной системы (симплектичность, инварианты, симметрия, косимметрия и др., см. [1–3]). Расчет динамики жидких частиц лежит в основе активно развивающихся в последнее время бессеточных методов анализа течений жидкости.

Известно, что уравнения Эйлера динамики идеальной жидкости являются наиболее трудными для численного решения, особенно при расчетах на больших временах. Это во многом обусловлено существованием у данного класса задач бесконечного числа интегралов (энергии, энтропии, значения завихренности в жидких частицах и др.). При численном решении не удается одновременно сохранить все возможные инварианты, что может быть следствием как пространственной дискретизации, так и процедуры интегрирования во времени. Качество численного решения улучшает сохранение фазового объема при численном интегрировании по времени уравнений Эйлера [4]. Для таких расчетов наиболее эффективными являются сохраняющие фазовый объем методы, что было подтверждено экспериментально [5–7].

Для выбора наиболее эффективного метода часто недостаточно теоретических оценок, и требуется экспериментальное их изучение. В этой работе исследуется влияние выбора метода интегрирования по времени на результаты расчета динамики частиц идеальной несжимаемой жидкости. Для избежания влияния ошибок пространственной дискретизации на результаты расчетов в данной работе не решается исходная задача в частных производных, а используются известные точные решения уравнений Эйлера.

**2. Динамика идеальной несжимаемой жидкости.** В терминах завихренности  $\omega$  и функции тока  $\psi$  уравнения Эйлера динамики идеальной несжимаемой жидкости на плоскости имеют вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \omega = 0, \quad -\Delta \psi = \omega. \quad (1)$$

Задача (1) может рассматриваться в замкнутых областях, на всей плоскости, и при различных граничных условиях. Функция тока выражается через завихренность из второго уравнения системы (1) аналитически или численно, по  $\psi$  вычисляется скорость частиц. Для расчета динамики жидких частиц решаются уравнения

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2)$$

В ряде частных случаев удается получить точные решения задачи (1).

*Стационарные течения в прямоугольнике.* Стационарными решениями задачи (1) в прямоугольнике  $D$  длины  $a$  и ширины  $b$  при условиях  $\psi|_{\partial D} = 0$  будут течения со следующими функцией тока и распределением завихренности

$$\psi = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right), \quad \omega = \frac{\sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) (i^2 b^2 + j^2 a^2) \pi^2}{a^2 b^2}. \quad (3)$$

*Вихрь Рэнкина.* Круглое вихревое пятно радиуса  $R$  с постоянной завихренностью  $\omega_0$  внутри круга и нулевой вне его. Функция тока имеет вид

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{4} \omega_0 r^2, & r \leq R, \\ \frac{1}{2} \omega_0 R^2 \ln(r), & r > R, \end{cases} \quad (4)$$

где  $r$  — полярный радиус. Траекториями жидких частиц являются окружности, определяемые начальным положением частицы.

*Диполь Ламба.* Это круглое вихревое пятно радиуса  $R$ . Внутренность круга состоит из двух половин с разнонаправленными вихрями [8]. Эта конфигурация движется вдоль вертикальной оси со скоростью  $U$ .

$$\omega = \begin{cases} \frac{2\lambda U}{J_0(\lambda R)} J_1(\lambda r) \cos(\theta), & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad \psi = \begin{cases} \frac{2U}{\lambda J_0(\lambda R)} J_1(\lambda r) \cos(\theta), & r \leq R, \\ U \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \cos(\theta), & r > R. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $r, \theta$  — полярные координаты на плоскости,  $J_i$  — функции Бесселя  $i$ -го порядка первого типа;  $\lambda R = 3.831 \dots$  для гладкости поля завихренности.

**3. Численные методы решения задачи Коши.** Задача Коши для системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{\phi} = F(\phi), \quad \phi(t_0) = \phi^{(0)}, \quad (6)$$

где  $\phi \in R^n$ . Рассмотрим ряд методов решения (6), которые применялись для расчетов динамики идеальной жидкости. Информация о методах в таблице 1, где в колонках даны название метода, его формула, порядок (P), погрешность вычисления условия симплектичности (S), число вычислений правой части (6) на временном шаге (C). Описание методов см. в [2, 9–11]. В таблице 1  $\phi_n$  — численное решение задачи (6) на временном шаге с номером  $n$ ,  $h$  — шаг метода.

Метод	Формула	P	S	C
RK4	$k_0 = hF(\phi_n), \quad k_1 = hF(\phi_n + \frac{k_0}{2})$ $k_2 = hF(\phi_n + \frac{k_1}{2}), \quad k_3 = hF(\phi_n + k_2)$ $\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$	4	4	4
PS36	$k_0 = hF(\phi_n), \quad k_1 = hF(\phi_n + c_{11}k_0)$ $k_2 = hF(\phi_n + c_{21}k_0 + c_{22}k_1)$ $k_3 = hF(\phi_n + c_{31}k_0 + c_{32}k_1 + c_{33}k_2)$ $k_4 = hF(\phi_n + c_{41}k_0 + c_{42}k_1 + c_{43}k_2 + c_{44}k_3)$ $\phi_{n+1} = \phi_n + b_1k_0 + b_2k_1 + b_3k_2 + b_4k_3 + b_5k_4$	3	6	5
SMR	Предиктор: $\phi_{n+1}^{(0)} = \phi_n + \frac{h}{2}F(\phi_n)$ Корректор: $\phi_{n+1}^{(k)} = \phi_n + \frac{h}{2}F(\phi_{n+1}^{(k-1)})$ , $k = 1..N$ $\phi_{n+1} = 2\phi_{n+1}^{(N)} - \phi_n$	2	T	4
Gau4	Предиктор: $k_0^{(0)} = F(\phi_n), k_1^{(0)} = F(\phi_n)$ Корректор: $k_0^{(i)} = hF(\phi_n + \frac{1}{4}k_0^{(i-1)} + (\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6})k_1^{(i-1)})$ $k_1^{(i)} = hF(\phi_n + (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6})k_0^{(i-1)} + \frac{1}{4}k_1^{(i-1)}), i = 1..N$ $\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{1}{2}(k_0^{(N)} + k_1^{(N)})$	4	T	9
AB3	$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{h}{12}(23F(\phi_n) - 16F(\phi_{n-1}) + 5F(\phi_{n-2}))$	3	3	1
AM4	Предиктор: $\phi'_{n+1} = \phi_n + \frac{h}{24}(55F(\phi_n) - 59F(\phi_{n-1}) + 37F(\phi_{n-2}) - 9F(\phi_{n-3}))$ Корректор: $\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{h}{24}(9F(\phi'_{n+1}) + 19F(\phi_n) - 5F(\phi_{n-1}) + F(\phi_{n-2}))$	4	4	2

Таблица 1. Используемые методы решения задачи Коши. T — точно.

**4. Результаты численных экспериментов.** В качестве критерия эффективности метода выбрано сохранение точных решений при интегрировании на больших временах при одинаковых вычислительных затратах. Рассчитывалась динамика  $M$  равномерно распределенных жидких частиц из областей с ненулевой завихренностью с координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$  на временах  $T \gg 1$ . Количественной мерой качества решения выбрано

$$\varepsilon_\psi = \max_{t \in [0, T], i=1, \dots, M} |\psi(x_i(t), y_i(t)) - \psi(x_i(0), y_i(0))|. \quad (7)$$

Использовались следующие тестовые примеры:

I. Режим (3) при  $a = 4, b = 1, i = 1, j = 1. M = 1000, T = 300.$

II. Режим (3) при  $a = 4, b = 1, i = 4, j = 2. M = 1000, T = 300.$

III. Вихрь (4) при  $\omega_0 = 0.1. M = 1000, T = 100.$

IV. Диполь Ламба (5) при  $R = 1, U = 1. M = 1000, T = 10.$

Вычисления проводились для интервалов  $t \in [0, T]$  и  $t \in [0, 4T]$ , что позволяет оценить поведение методов при росте временного интервала. Результаты представлены графически, где по горизонтальной оси отложен эталонный шаг  $H$ . В качестве  $H$  выбран шаг метода Рунге-Кутты четвертого порядка (т.е. для RK4  $h = H$ ). Для остальных методов  $h = \frac{C}{4}H$ , где  $C$  — количество вычислений правой части системы на шаге (даны в таблице 1). Такой выбор  $h$  определяет одинаковые вычислительные затраты всех методов при фиксированном  $H$ .

На рис. 1 даны результаты расчетов на временном интервале  $t \in [0, T]$ . Видно, что для 1 при меньших значениях  $H$  лучшим является метод  $AM4$ , а с ростом  $H$  наиболее точным оказывается  $PS36$ . Метод  $RK4$  уступает при всех  $H$ . Методы меньших порядков точности  $SMR$  и  $AB3$  дают неудовлетворительные результаты даже при малых  $H$ . Аналогичная ситуация наблюдается и для 2. В случае 3 наилучшие результаты демонстрируют методы близкие к симплектическим ( $PS36$ ,  $Gau4$  и  $SMR$ ). При расчетах динамики диполя 4 большую погрешность дают  $SMR$  и  $AB3$ , а остальные методы демонстрируют практически одинаковые результаты. При увеличении времени расчета  $t \in [0, 4T]$  поведение близких к симплектическим методов ( $PS36$ ,  $Gau4$  и  $SMR$ ) практически не меняется, см. рис. 2, а для

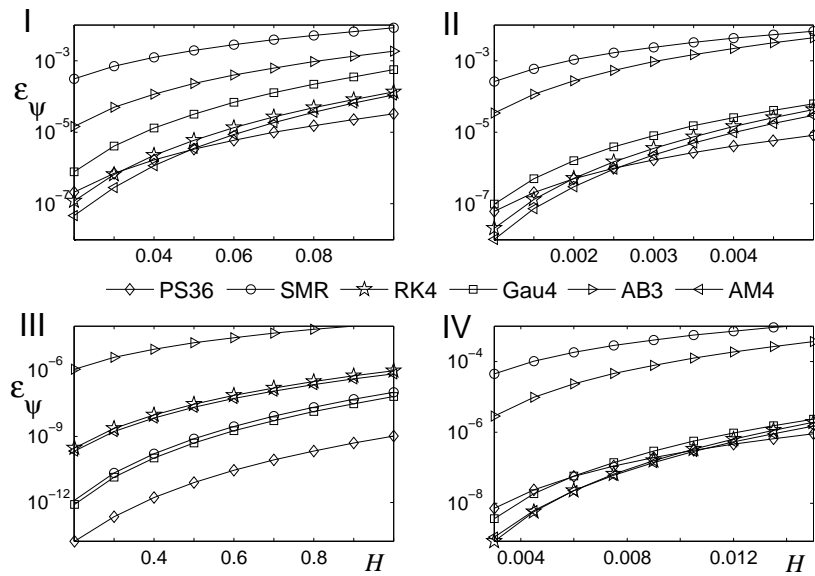


Рис. 1. Зависимость  $\varepsilon_\psi$  от  $H$  для четырех тестовых примеров при  $t \in [0, T]$ .

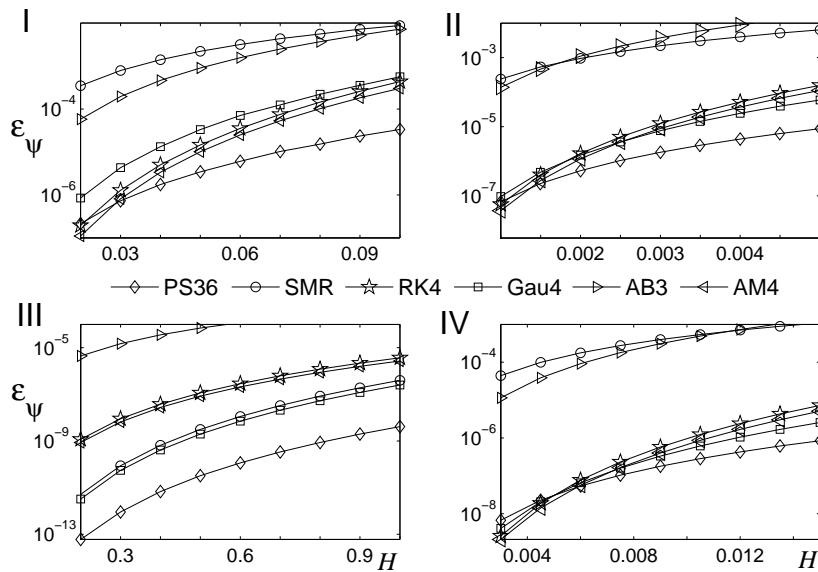


Рис. 2. Зависимость  $\varepsilon_\psi$  от  $H$  для четырех тестовых примеров при  $t \in [0, 4T]$ .

всех остальных погрешность  $\varepsilon_\psi$  увеличивается. Для всех примеров и большинства  $H$  наилучшим оказывается метод *PS36*. Результаты экспериментов позволяют сделать ряд выводов и рекомендаций. При численном решении задач динамики жидких частиц важным оказывается сохранение фазового объема. Использование методов, близких к симплектическим, позволяет проводить достоверные вычисления на больших временах. Для расчетов динамики жидких частиц на больших временах можно рекомендовать псевдосимплектический метод третьего порядка точности решения и шестого порядка точности условия симплектичности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00708).

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Sanz-Serna J., Calvo M.* Numerical Hamiltonian Problems. Chapman and Hall, 1994.
- [2] *Hairer E., Lubich Ch., Wanner G.* Geometric numerical integration. 2nd ed. Springer Series in Computational Mathematics 31. Berlin: Springer, 2006.
- [3] *Govorukhin V. N.; Tsybulin V. G.; Karasozen B.* Dynamics of numerical methods for cosymmetric ordinary differential equations // Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 2001. V. 11, № 9. P.2339–2357.
- [4] *McLachlan R.* Area preservation in computational fluid dynamics // Phys. Lett. A. 1999. V. 264. № 1. P. 36–44.
- [5] *Vosbeek P. W. C., Mattheij R. M. M.* Contour dynamics with symplectic time integration // J. Comput. Phys. 1997. V. 133. № 2. P.222–234.
- [6] *Govorukhin V. N., Ilin K. I.* Numerical study of an inviscid incompressible fluid through a channel of finite length // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2009. V. 60. № 12. P. 1315–1333.
- [7] *Говорухин В. Н.* Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51. № 6. С. 1113–1147.
- [8] *Ламб Г.* Гидродинамика. М., Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1947.
- [9] *Арушанян О. Б., Залёткин С. Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [10] *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990.
- [11] *Aubry A., Chartier P.* Pseudo-symplectic Runge-Kutta methods // BIT. 1998. V. 38. № 3. P. 439–461.

**Govorukhin V. N.** *On methods of calculation of fluids particles dynamics.* By means of computer experiments a set of numerical methods for integration of equations of fluids particles dynamics is investigated. As a test examples known exact solutions of the Euler equations are used. The main attention is given to the analysis of computing expenses of methods and behavior of solutions on long times.

# ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА И РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОВРЕЖДЁННЫХ СЛОИСТЫХ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Голуб М. В.

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

Изучаются особенности распространения упругих волн в периодическом композите с трещиной, отдельно анализируются резонансные явления. Приводятся характерные ситуации, возникающие при колебаниях повреждённых периодических слоистых композитов. Обнаружено два типа резонансов для одиночных трещин с существенно разной степенью локализации волнового процесса. Более «сильный» резонанс сопровождается захватом энергии и может привести к развитию трещины, тогда как второй тип резонансов менее опасен. Наличие распределённых дефектов или повреждённых слоев в идеальную фононную решётку, очевидно, изменяет запрещённые и разрешённые зоны.

**1. Введение.** Материалы с искусственно созданной внутренней квазипериодической или периодической структурой в настоящее время получают все большее распространение в практических приложениях. На настоящий момент композитные структуры нашли широкое применение в аэрокосмической отрасли, в строительстве, реализуются в нанотехнологиях и метаматериалах. Характерным примером такого внедрения в оптике и микроэлектронике служат фотонные кристаллы, в которых проявляется эффект появления зон непропускания электромагнитного сигнала (запрещённых зон). Другим примером материала с периодической структурой являются метаматериалы. Повышенный интерес к ним связан с важными для практических приложений уникальными диэлектрическими, магнитными, акустическими и прочими свойствами таких материалов, обусловленными их уникальной микроструктурой и выражающихся в «аномальных» свойствах.

Для упругих композитных материалов, в которых имеется периодическая структура или система неоднородностей, по аналогии с фотонными кристаллами используется термин «фононные кристаллы». Волновые явления в фононных кристаллах схожи с наблюдаемыми в фотонных кристаллах (здесь также имеются запрещённые и разрешённые зоны), но более сложны для анализа из-за большего количества распространяющихся в упругой среде волн [1, 2]. Тем не менее, последние десятилетия ведутся исследования динамических характеристик различных искусственных композитов, имеющих существенную практическую значимость в задачах виброгашения и виброфокусировки, увеличения прочности конструкций, при создании актуаторов и фильтров, а также и в других приложениях [3]. Кроме того, при производстве и эксплуатации неизбежно возникновение и развитие микро- и макродефектов, таких как трещины, отслоения, пятна неидеального контакта и т. п. Наличие неоднородностей могут менять положение запрещённых зон или приводить к дополнительному затуханию сигнала, тем самым меняя фильтрационные свойства кристалла [4].

## **2. Постановка задачи.**

Рассматривается прохождение плоских гармонических волн с частотой  $\omega$  через периодический набор упругих слоев (угол между направлением распространения



волны и границами слоев равен  $\theta$ ). Пакет состоит из  $N$  повторяющихся ячеек ( $a_{i-1} \leq z \leq a_i$ ) и заключён между двумя упругими полупространствами. Каждая ячейка имеет слоистую структуру и состоит из  $K$  слоев, при этом в ячейке с номером  $M$  содержится повреждённый слой. Рассматривается случай одиночной трещины, а также повреждённые слои, где повреждение моделируется периодическим набором трещин или пружинными граничными условиями (рис. 1).

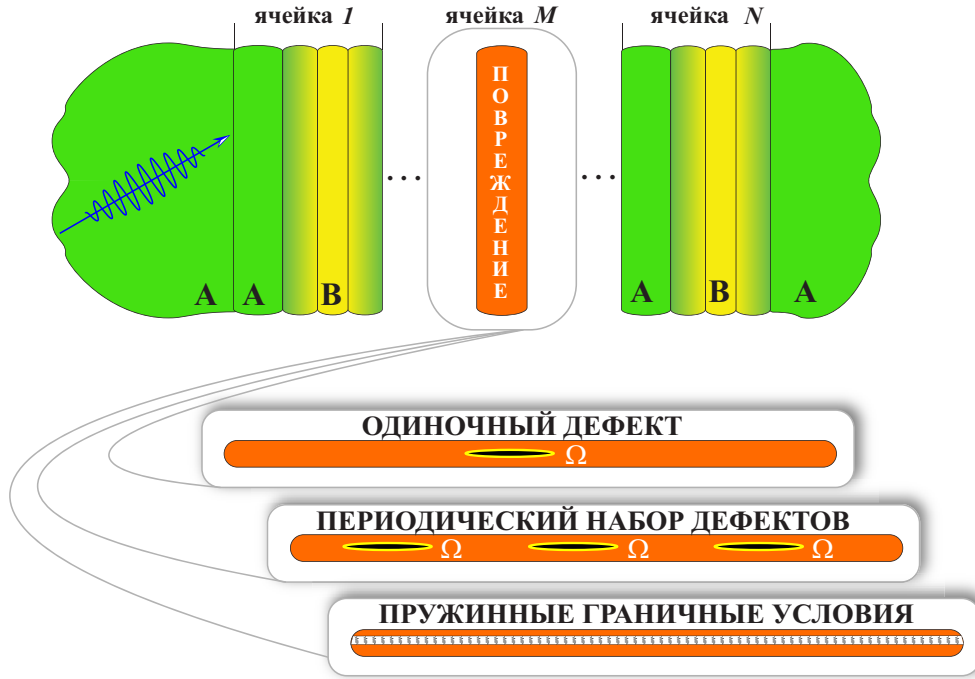


Рис. 1. Постановка задачи.

Вектор перемещений  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\} = \{u_x, u_z\}$  в упругой среде удовлетворяет уравнениям движения Ляме, где тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  выражается через компоненты вектора перемещений  $u_i$  и упругие постоянные. Амплитуды отраженной и прошедшей волн не дают полной информации для анализа, поэтому ниже используются энергетические коэффициенты прохождения  $\alpha^+$  и прохождения  $\alpha^-$  (см. например [4]), для которых выполняется  $\alpha^+ + \alpha^- = 1$ . Коэффициенты  $\alpha^\pm$  позволяют определять разрешённые и запрещённые зоны [5], так как в запрещённых зонах  $\alpha^+ \rightarrow 0$ .

### 3. Численный анализ.

Расстояние от дефекта до границы  $M$ -ой ячейки  $z = a_{M-1}$  равно  $d$ , толщины слоев обозначены соответственно  $h_B$  и  $h_A$ , а ширина одиночных и периодических трещин обозначается  $2l$ . В данной статье рассматривается случай двух слоев ( $K = 2$ ) из материалов А и В соответственно. Предполагается также, что два полупространства, окружающие пакет слоев, также из материала А. В численных расчетах были взяты Алюмина (А) и Алюминий (В), упругие параметры для них приведены в [2].

#### 3.1 Одиночная трещина.

Подробное описание математической модели, используемой при расчетах при-

ведено в [6]. Модель опирается на интегральный подход [7] при описании трещины и метод Т-матриц для падающего волнового поля. Очевидно, что одиночная трещина не может изменять запрещённые зоны, однако меняет волновое поле локально в своей окрестности. В некоторых случаях возможны резонансные колебания, что сопровождается локализацией и ростом коэффициентов интенсивности напряжений, которые при небольшом количестве слоев  $M$  могут привести к разрушению фоновый кристалла.

Пример, иллюстрирующий сильный резонанс и явление локализации приведен на рис. 2. Резонансные параметры были выбраны как максимум функции раскрытия трещины и коэффициента интенсивности напряжений. Зеленым эллипсом на рис. 2 отмечено местоположение трещины. На рис. 2а можно видеть максимальную концентрацию непосредственно в поврежденном слое между трещиной и границами слоев. Локализация также видна на рис. 2б, она видна как пара вихрей энергии в слоях над и под трещиной, то есть трещина «перенаправляет» поток энергии внутрь поврежденной ячейки.

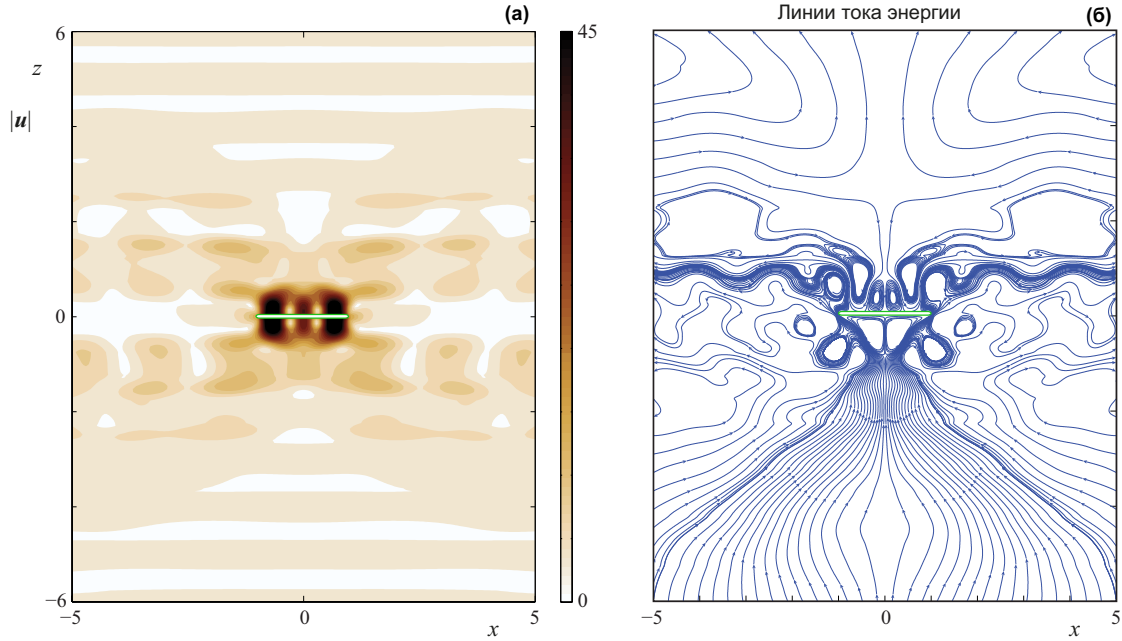


Рис. 2. Амплитуда перемещений  $|\mathbf{u}(x, z)|$  (а) и соответствующие линии тока энергии для Р-волны, падающей под углом  $\theta = 0^\circ$ ;  $h_A/h_B = 1$ ;  $l/H = 1.0$ ;  $d/H = 0.25$ ;  $\omega = 2.713$ .

### 3.2 Повреждённый слой.

Моделирование поврежденного слоя проводится двумя способами: периодический набор трещин длиной  $2l$  с интервалом  $s$  и посредством специальных граничных условий. Первый подход реализуется аналогично случаю одиночной трещины, где интегральные представления для рассеянного поля в силу теоремы Флоке–Блоха могут быть сведены к бесконечной сумме. Для отыскания функции раскрытия трещин применяется метод граничных интегральных уравнений. Второй подход поврежденность описывает пружинными граничными условиями [6]

$$\sigma_{iz}^+ = \sigma_{iz}^- = \left( \frac{\lambda^+ + 2\mu^+}{(\lambda^+ + \mu^+)\mu^+} + \frac{\lambda^- + 2\mu^-}{(\lambda^- + \mu^-)\mu^-} \right)^{-1} \times \frac{4s}{\pi l^2} \times (u_i^+ - u_i^-), \quad (1)$$

связывающими напряжения и перемещения на берегах отслоения. Здесь  $\mu$ ,  $\lambda$  — упругие константы в (1),  $2l$  — характерный размер трещины с плотностью распределения  $2l/s$ , см. подробнее [7].

На рис. 3 изображены поверхности коэффициента прохождения  $\alpha^+(\omega, l/H)$ , вычисленные при одних и тех параметрах фононного кристалла на основе двух указанных подходов при нормальном угле падения Р-волны ( $\theta = 0^\circ$ ). Можно видеть, что обе модели дают сходную общую картину прохождения/непрохождения для низких частот и при малой повреждённости. Пружинная модель не предсказывает резонансных явлений по сравнению с периодическими трещинами. По-видимому, это объясняется тем, что резонанс обусловлен периодичностью дефектов и явлениями локализации, которые аналогичны случаю одиночной трещины.

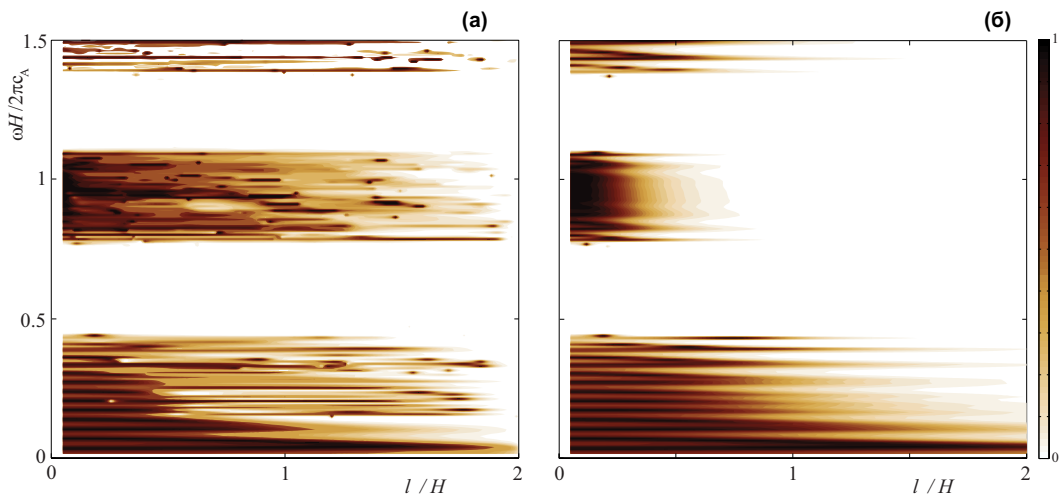


Рис. 3. Коэффициент прохождения  $\alpha^+(\omega, l/H)$  в фононном кристалле с поврежденной ячейкой  $M = 15$  при распространении Р-волны;  $\theta = 0^\circ$ ;  $h_A/h_B = 1$ ;  $d/H = 0.25$ . Периодический набор трещин — (а); пружинные граничные условия (1) — (б).

**Заключение.**

— Размер и положение запрещённых зон не зависят от местоположения одиночной трещины, однако наличие локализованного дефекта может приводить к резонансным колебаниям и захвату энергии в ее окрестности.

— Запрещённые зоны существенно зависят от повреждённости слоев или интерфейсов (повреждённость, положение внутри ячейки, характерный размер дефекта).

— Динамическое нагружение фононного кристалла одиночной трещиной может приводить к резонансу и разрушению, явление более опасно, когда трещина расположена внутри слоя. Дифракция волн на интерфейсных трещинах не приводит к столь сильным резонансам и менее опасны на практике.

— Пружинная модель достаточно хорошо описывает поведение повреждённого фононного кристалла при небольшой повреждённости и на низких частотах.

Работа выполнена в рамках проекта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы № 2012-1.2.2-12-000-1002-039.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Kushwaha M. S.* Band gap engineering in phononic crystals // *Recent Research Developments in Applied Physics*. 1999. Vol. 2. Pp. 743–855.
- [2] *Wu M. L., Wu L. Y., Yang W. P., Chen L. W.* Elastic wave band gaps of one-dimensional phononic crystals with functionally graded materials // *Smart Materials and Structures*. 2009. Vol. 18. Pp. 115013.
- [3] *Gertus T. et. al.* Surface acoustic wave phononic crystal device fabricated by femtosecond laser ablation // *Microwave and Optical Technology Letters Wiley Subscription Services*. 2012. Vol. 54. Pp. 1286–1287.
- [4] *Golub M. V., Zhang Ch., Wang Y.-S.* SH-wave propagation and scattering in periodically layered composites with a damaged layer // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Pp. 1829–1843.
- [5] *Golub M. V., Fomenko S. I., Bui T. Q., Zhang Ch., Wang Y.-S.* Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. Pp. 344–354.
- [6] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [7] *Golub M. V., Boström A.* Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // *Wave Motion*. 2011. Vol. 48(2). Pp. 105–115.

**Golub M. V.** *Wave motion and resonances in layered phononic crystals with delaminations.* Elastic wave propagation in periodically layered composites with damages is investigated. Typical situations for damaged phononic crystals are demonstrated. Two kinds of resonances for single defects has been found. Stronger resonances of greater crack opening lead to energy localization and capture that could cause crack propagation. Another kind of resonance is of less interest due to lower dangerousness. Distributed defects or damaged layers/interfaces in phononic crystal changes band-gaps and pass-bands as well as filter/blocking properties of the whole periodic structure.

# ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ, ЗАПОЛНЕННОГО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Дидок Н. К.

Донецкий национальный университет

На основании модального анализа выведены уравнения вращательных колебаний твердого тела с идеальной жидкостью, содержащейся в цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями. Выведены собственные формы колебаний упругих оснований и жидкости. Получено выражение для присоединенного момента инерции жидкости. Исследовано частотное уравнение и получены условия устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим в рамках линейной теории вращательные колебания цилиндрического резервуара, заполненного тяжелой идеальной несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$  (рис. 1). Будем считать, что боковая поверхность резервуара является твердой, основания представляют собой упругие изотропные пластины с изгибной жёсткостью  $D_i$ , подверженные растягивающим усилиям  $T_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) в срединной поверхности. Резервуар имеет поперечное сечение  $S$  и высоту  $h$ . Движение жидкости предполагается потенциальным, а совместные колебания жидкости и упругих пластин — безотрывными.

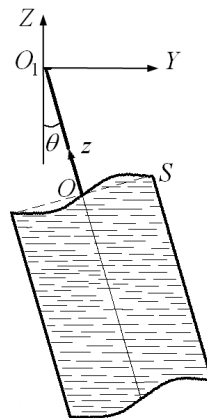


Рис. 1. Физический маятник с идеальной жидкостью.

Введем три системы координат, как показано на рисунке 1. Начало абсолютной системы координат  $OXYZ$  расположим в точке подвеса маятника. Подвижную систему координат  $Oxyz$  свяжем с твердым телом так, чтобы ее начало совпадало с центром масс жидкого объема в положении равновесия, а оси оставались параллельны осям системы  $OXYZ$  в процессе движения. Третью систему координат жестко свяжем с твердым телом, а начало совместим с началом системы  $Oxyz$ .

## 2. Уравнения движения рассматриваемой механической системы.

Представив прогиб пластин в виде суммы статического и динамического прогибов, получим следующую краевую задачу для динамической компоненты прогиба [2, 4, 5]

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = -\rho h F_0 \left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right] + \\ + \sum_n \left( \tilde{b}_n F_n \left[ \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \right] - \tilde{c}_n F_n \left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right] \right) \psi_n + Q^* - \rho \ddot{\theta} \Psi - \rho (l_0 \ddot{\theta} + g \theta) y, \\ k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho h F_0 \left[ \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \right] + \\ + \sum_n \left( \tilde{b}_n F_n \left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right] - \tilde{c}_n F_n \left[ \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \right] \right) \psi_n - Q^* + \rho \ddot{\theta} \Psi - \rho (l_0 \ddot{\theta} + g \theta) y, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$W_i|_\gamma = 0, \quad \frac{\partial W_i}{\partial n} \Big|_\gamma = 0, \quad \int_S W_1 dS = \int_S W_2 dS. \quad (i = \overline{1, 2}) \quad (2)$$

$k_{0i} = \rho_{0i} \delta_{0i}$  — поверхностная плотность пластин,  $\Psi$  — потенциал Стокса–Жуковского,

$$\tilde{b}_n = \frac{\rho}{k_n \sinh \varkappa_n}, \quad \tilde{c}_n = \frac{\rho}{k_n \tanh \varkappa_n}, \quad \varkappa_n = k_n h.$$

$$F_0[W_i] = \frac{1}{S} \int_S W_i dS, \quad F_n[W_i] = \frac{1}{N_n^2} \int_S W_i \psi_n dS, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 dS,$$

$\psi_n$  и  $k_n$  — собственные функции и соответствующие им собственные числа колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде,  $Q^*$  — произвольная функция времени.

Следует отметить, что если одна из пластин становится абсолютно жесткой, то задача (1), (2) существенно упрощается, т. к. отпадает необходимость в решении статической задачи и в определении функций  $Q^*$ .

В рамках линейной теории малых колебаний тяжелой многослойной идеальной жидкости и упругих пластинок запишем уравнение малых колебаний твердого тела вокруг неподвижной оси. Согласно теореме об изменении момента количества движения системы имеем

$$\tilde{J} \ddot{\theta} + \rho \int_V [y \dot{u}_z - (l_0 - z) \dot{u}_y] dV = M. \quad (3)$$

Здесь  $\theta$  — угол отклонения твердого тела от положения равновесия;  $(u_x, u_y, u_z)$  — вектор относительной скорости жидкости;  $\tilde{J}$  — осевой момент инерции твердого тела с многослойной жидкостью и упругими пластинами;  $M$  — момент внешних сил.

Имеют место соотношения

$$\dot{u}_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2y \right) \ddot{\theta}, \quad \dot{u}_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \ddot{\theta},$$

в которых  $\varphi$  — потенциал относительных скоростей жидкости, а функция  $\phi$  вычисляется на основании потенциала Стокса–Жуковского  $\Psi$ , является гармонической и удовлетворяет краевым условиям

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h/2} = 2y, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h/2} = 2y.$$

Полагая, что единственной внешней массовой силой является сила тяжести, получаем из (3) следующее уравнение малых колебаний физического маятника

$$J\ddot{\theta} + k^2\theta = -\rho \sum_n \beta_n (\Omega_{in} \ddot{W}_{in} + gW_{in}), \quad (4)$$

$$k^2 = g \left\{ m_0 \tilde{l}_0 + \sum_{i=1}^2 \left[ m_i \left( l_{0i} + \frac{h}{2} \right) + k_{0i} l_{0i} S \right] \right\}, \quad \Omega_n = \frac{\tanh \varkappa_n}{k_n} + h + l_0.$$

В общем виде краевую задачу (1), (2) можно записать в виде обобщенного волнового уравнения [1]

$$A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + C W = f, \quad (5)$$

где  $W = (W_1, \dots, W_m)$ ,  $A$  и  $C$ , соответственно, инерционный и упругий операторы в пространстве со скалярным произведением  $(W_j, W_k) = \sum_{i=1}^2 \int_S W_{ji} W_{ki} dS$ :

$$A = \begin{pmatrix} k_{01} + \rho h F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n & - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n \\ - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n & k_{02} + \rho h F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n \end{pmatrix},$$

$$C = \text{diag} (D_i \Delta_2^2 - T_i \Delta_2 + (-1)^{i+1} \rho g).$$

Решение  $W$  неоднородного уравнения (5) будем искать в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний  $w_k$

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) w_k \quad \text{или} \quad W_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) w_{ik}, \quad (6)$$

сходящегося, во всяком случае, по энергетической норме или в среднем [1].

Из условия ортогональности собственных форм по кинетической и потенциальной энергиям следует счётная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mu_k (\ddot{p}_k + \sigma_k^2 p_k) = -\rho (\Omega_k \ddot{\theta} + g\theta), \quad J\ddot{\theta} + k^2\theta = -\rho \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\Omega}_k \ddot{p}_k + g\tilde{\beta}_k p_k). \quad (7)$$

Из уравнений (7) следует уравнение движения твердого тела

$$(J_1 + \tilde{J}_2) \ddot{\theta} + \tilde{k}\theta = \rho \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\Omega}_k \sigma_k^2 + g\tilde{\beta}_k) p_k. \quad (8)$$

Здесь  $\tilde{J}_2 = - \sum_k \frac{\tilde{\Omega}_k^2}{\mu_k}$  — присоединенный момент инерции жидкости.

**3. Анализ частотного уравнения.** Подставив функции  $p_k(t)$  и  $\theta(t)$  в виде  $p_k = p_{k0}e^{i\sigma t}$ ,  $\theta = \theta_0e^{i\sigma t}$  в уравнения (7) и (8), получим уравнение частот колебаний физического маятника

$$J\sigma^2 - \tilde{k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Omega_k\sigma^2 - g\alpha_k)^2}{\mu_k(\sigma^2 - \omega_k^2)}. \quad (9)$$

Исследование частотного уравнения (9) удобно проводить графо-аналитическим методом [6]. Для этого представим левую и правую части уравнения (9), соответственно, как функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ , где  $x = \sigma^2$  (рис. 2). Штриховой линией на рисунке обозначены асимптоты кривой  $F = F_i(x)$ . В случае пересечения графиков функций  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  в левой полуплоскости, у системы появляются мнимые частоты  $\sigma_k$ , что свидетельствует о неустойчивости её положения равновесия. Из уравнения (9) следует, что первая частота колебаний системы  $\sigma_1$  окажется мнимой, если имеет место неравенство

$$\tilde{k}^2 > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g\alpha_k)^2}{\mu_k\omega_k^2}.$$

В случае абсолютно жестких оснований ( $\tilde{\alpha}_k^2 = 0$  и  $\Omega_k^2 = 0$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ ) уравнение (9) имеет единственное решение  $\sigma^2 = \omega_0^2 = k^2/J$ .

Интересно отметить, что в задаче Сретенского (поперечные колебания твердого тела под действием упругой силы) упругость оснований не ухудшает устойчивость движения твердого тела [5].

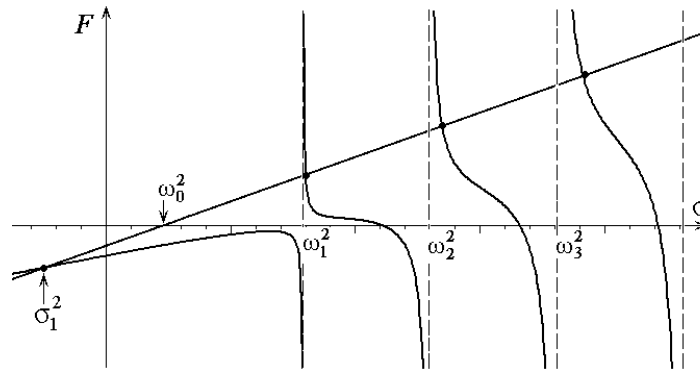


Рис. 2. Поведение левой и правой частей уравнения (9).

#### 4. Выводы.

Получены аналитические выражения для собственных форм совместных колебаний жидкости и упругих пластин, выведено и исследовано уравнение собственных частот. Установлено, что частотный спектр состоит из двух наборов, соответствующих колебаниям верхнего и нижнего оснований: при изменении механических параметров одной из пластин существенно изменяются только частоты соответствующего набора.

Получение аналитических выражений для собственных форм является наибольшей трудностью, возникающей при использовании данного подхода. В частности, для их построения требуется знать фундаментальную систему решений



вспомогательной граничной задачи для бигармонического уравнения. Однако такая система может быть найдена в явном виде только для полостей канонических форм. Численные исследования собственных форм в данной работе проведены для цилиндрической полости с круговым поперечным сечением.

Из проведенных численных исследований следует, что с увеличением жесткости оснований присоединённый момент инерции жидкости увеличивается, а корни частотного уравнения смещаются вправо. На основании анализа частотного уравнения графо-аналитическим методом получено необходимое условие устойчивости положения равновесия данной механической системы.

Разработан комплекс программ для аналитических и численных исследований частотных уравнений, собственных форм, условий устойчивости и стабилизации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 320 с.
- [2] Шевченко В. П., Кононов Ю. Н. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную жидкость. Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. Киев: Наукова думка, 2007. С. 348–361.
- [3] Кононов Ю. Н., Дидок Н. К. Совместные колебания упругого дна цилиндрического сосуда и пластины, расположенной на свободной поверхности жидкости // Труды XIII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-н/Д: Изд.-во ЮФУ, 2009. Т. 2. С. 108–112.
- [4] Кононов Ю. Н., Дидок Н. К. Задача Сретенского для цилиндра с упругими днищами // Труды XIV международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-н/Д: Изд.-во ЮФУ, 2010. Т. 1. С. 191–195.
- [5] Кононов Ю. Н., Дидок Н. К. Задача Сретенского для цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими основаниями // Механика твёрдого тела. 2011. Вып. 40. С. 210–220.
- [6] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.

**Didok N. K.** *Rotational oscillations of cylindrical vessel with elastic bottoms and containing an ideal liquid.* On the base of modal analysis the equations of rotational oscillations of a rigid body with an ideal liquid in cylindrical vessel with elastic bottoms are deduced. Eigenforms of oscillations of a liquid and elastic bottoms are deduced. The frequency equation is explored. The added momentum of inertia of liquid and conditions of stability of equilibrium position are obtained.

# ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

**Дударев В. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону  
Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Представлена общая постановка задачи о колебаниях предварительно напряженного упругого тела. В качестве конкретного примера рассмотрена задача о плоских колебаниях анизотропного слоя при наличии неоднородного предварительного напряженного состояния. Основание слоя считается жестко закрепленным, колебания вызываются нагрузкой, приложенной на верхней границе. Решение прямой задачи об определении поля перемещения с помощью аппарата преобразования Фурье сведено к решению интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, построенных для трансформант компонент перемещений. Сформулирована обратная задача об определении законов изменения компонент тензора предварительных напряжений. Для решения этой задачи использован метод построения итерационного процесса. Этот подход основан на сочетании решения прямой задачи и нахождения на каждой итерации поправок на основе решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Для реализации этого метода сформулировано необходимое уравнение, численное решение которого реализовано с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова.

## **Введение.**

Напряжения, которые существуют в теле при отсутствии внешних нагрузок называются предварительными. В научной литературе эти напряжения также имеют названия остаточные или технологические, поскольку они обычно возникают в ходе различных производственных операций. При этом стоит отметить, что наибольшая концентрация подобных напряжений наблюдается в окрестности различных дефектов типа полостей, трещин, включений и т. п. На сегодняшний день имеется несколько способов диагностики такого предварительного напряженного состояния, которые условно можно разделить на три класса: разрушающие, полуразрушающие и неразрушающие. Наиболее востребованным являются неразрушающие методы диагностики, поскольку подобные методы являются более предпочтительными при анализе и контроле напряженного состояния конструкций ответственного назначения (турбин, оболочек реакторов, лопастей и т. п.). Одним из эффективных и универсальных способов неразрушающей диагностики является метод акустического зондирования [1, 2]. В его основе лежит представление о том, что изменение свойств материала ведет к изменению его амплитудно-частотных характеристик.

## **Общая постановка задачи.**

В качестве объекта исследования рассмотрим некоторое упругое тело объема  $V$ , ограниченное поверхностью  $S = S_u \cup S_\sigma$  с тензором упругих постоянных  $C_{ijkl}$  и плотностью  $\rho$ . Будем считать, что в нем имеется некоторое неоднородное предварительное напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}^0$ . Пусть колебания вызываются нагрузкой  $p_j e^{i\omega t}$ , приложенной

на части  $S_\sigma$ , а часть  $S_u$  закреплена. Линеаризованные уравнения колебаний после отделения временного множителя, граничные условия и определяющие соотношения имеют вид [3]:

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 = 0, \quad T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma_{mj}^0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = u_{i,j}C_{ijkl}, \quad \sigma_{ij,j}^0 + g_i = 0, \quad u_i|_{S_u} = 0, \quad T_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (2)$$

где  $g_i$  — компоненты вектора массовых сил,  $u_i$  — компоненты вектора перемещений.

В основу процедуры идентификации предварительных напряжений  $\sigma_{ij}^0$  может быть положено изменение амплитудно-частотных характеристик точек тела. В качестве дополнительной информации в обратной задаче предлагается воспользоваться данными об измеряемых на границе  $S_\sigma$  компонент поля смещений  $f_i$  в зависимости от частоты колебаний  $\omega \in [\omega^-, \omega^+]$ .

#### Плоские колебания слоя.

В качестве конкретного примера представленной общей постановки задачи рассмотрим плоские колебания анизотропного слоя при наличии неоднородного предварительного напряженного состояния. Будем считать, что колебания вызываются нагрузкой приложенной на верхней границе слоя  $x_3 = h$ , а нижняя часть  $x_3 = 0$  жестко закреплена. Уравнения колебаний и граничные условия примут вид:

$$(\sigma_{i1} + u_{i,m}\sigma_{m1}^0)_{,1} + (\sigma_{i3} + u_{i,m}\sigma_{m3}^0)_{,3} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 3, \quad (3)$$

$$(\sigma_{i3} + u_{i,m}\sigma_{m3}^0)_{,3}|_{x_3=h} = p_i, \quad u_i(x_1, 0), \quad i = 1, 3. \quad (4)$$

Для упрощения представленной задачи применим к (3)–(4) преобразование Фурье по координате  $x_1$  и далее положим параметр преобразования равным нулю. При этом считаем, что компоненты  $\sigma_{ij}^0$ ,  $i, j = 1, 3$  есть функции одной переменной  $x_3$ . Последующие рассуждения будем проводить для трансформант компонент поля перемещения  $v$  и  $u$  вдоль осей  $x_1$  и  $x_3$  соответственно. Полученные уравнения движения и граничные условия соответствуют двум задачам:

$$((C_{44} + \sigma_{33}^0)v')' + \rho\omega^2 v = 0, \quad (C_{44} + \sigma_{33}^0)v'(h) = p_v, \quad v(0) = 0, \quad (5)$$

$$((C_{33} + \sigma_{13}^0)u')' + \rho\omega^2 u = 0, \quad (C_{33} + \sigma_{13}^0)u' = p_u, \quad u(0) = 0, \quad (6)$$

где  $p_v$  и  $p_u$  — соответствующие трансформанты компонент нагрузки  $p_3$  и  $p_1$ ,  $C_{33}$  и  $C_{44}$  — упругие модули, через «'» обозначена производная по переменной  $x = x_3$ . Отметим, что в зависимости от вида нагружения можно рассматривать либо задачу для функции  $v$  ( $p_1 = 0$ ,  $p_3 = p\delta(x_1)$ ), либо для функции  $u$  ( $p_3 = 0$ ,  $p_1 = p\delta(x_1)$ ). Решения прямых задач об определении трансформант  $v$  и  $u$  при заданных функциях распределения  $\sigma_{33}^0$  и  $\sigma_{13}^0$  могут быть сведены к решению соответствующих интегральных уравнений Фредгольма второго рода путем обращения дифференциальных операторов:

$$v(x) = \int_0^h \rho\omega^2 v K_v(x, y) dy + \int_0^x f_v(y) dy, \quad (7)$$

$$u(x) = \int_0^h \rho \omega^2 u K_u(x, y) dy + \int_0^x f_u(y) dy, \quad (8)$$

где  $K_v(x, y) = \int_0^{\min(x, y)} f_v(x) dx$ ,  $f_v(x) = 1/(C_{44} + \sigma_{33}^0)$ ,  $K_u(x, y) = \int_0^{\min(x, y)} f_u(x) dx$ ,  $f_u(x) = 1/(C_{33} + \sigma_{13}^0)$ . Решение представленных уравнений может быть получено с необходимой точностью численно на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы, например трапеций или Симпсона. Анализ влияния уровня предварительных напряжений на амплитудно-частотные характеристики показал, что это влияние наиболее существенно для компонент напряжений, удовлетворяющих неравенствам  $\sigma_{33}^0/C_{44} \geq 10^{-2}$  и  $\sigma_{13}^0/C_{33} \geq 10^{-2}$ . Поскольку представленные задачи идентичны по структуре, то дальнейшие рассуждения приведем для задачи (5).

### Обратная задача.

В рамках рассматриваемой проблемы обратная задача заключается в определении функции закона изменения компоненты  $\sigma_{33}^0$  по заданным значениям амплитудно-частотной характеристики  $w(\omega) = v(h, \omega)$ ,  $\omega \in [\omega^-, \omega^+]$ . Из вида уравнения движения и решения прямой задачи видно, что сформулированная задача является существенно нелинейной и относится к коэффициентным обратным задачам. Одним из наиболее эффективных методов построения подобных задач является итерационный метод, основанный на процедуре линеаризации. Используя обычную технику, можно получить необходимое уравнение для определения значений функции поправки  $\delta_{33}(x)$  к искомой компоненте  $\sigma_{33}^0$  на каждой итерации:

$$\int_0^h \delta_{33}(x) (v_0'(x))^2 dx = p_v (v_0(h, \omega) - w(\omega)), \quad \omega \in [\omega^-, \omega^+], \quad (9)$$

где  $v_0(x)$  — функция значений  $v(x)$  вычисленная на предыдущей итерации. Равенство (9) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода. При его решении следует использовать регуляризующие алгоритмы, например метод регуляризации А. Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации. Начальное приближение можно выбирать в классе линейных функций на некотором компакте из условия минимума функционала невязки:

$$Q = \int_{\omega^-}^{\omega^+} (v(h, \omega) - w(\omega))^2 d\omega. \quad (10)$$

При этом компактное множество можно построить на основе априорной информации, например об ограниченности восстанавливаемой функции.

Следует отметить, что представленная обратная задача об определении неизвестной компоненты тензора предварительных напряжений  $\sigma_{33}^0$  по своей структуре аналогична схожей проблеме определения неизвестного закона изменения упругого модуля при продольных колебаниях консольно закрепленного стержня [4]. При этом представленный метод отыскания неизвестной функции также

сводится к решению аналогичного уравнения Фредгольма первого рода относительно неизвестной функции поправки. Вычислительные эксперименты показали достаточную эффективность представленного метода: для монотонных законов погрешность восстановления в среднем не превосходит 5%, немонотонных — 7%. При этом частотный диапазон  $[\omega^-, \omega^+]$  рекомендуется выбирать между первой и второй резонансными частотами.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. О. Ватульяну за внимание к работе и ценные рекомендации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00194-а, № 12-01-31501) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
- [2] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [3] Гузь А. Н. Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений // Прикладная механика. 1994. Т. 30, № 1. С. 3–17.
- [4] Бочарова О. В., Ватульян А. О. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2008. № 3. С. 33–37.

**Dudarev V. V.** *Plane oscillations of prestressed anisotropic layer.* A general statement of the problem of the vibrations of a prestressed elastic body is presented. As a specific example, the problem of plane vibrations of an anisotropic layer with a non-uniform initial stresses is considered. The base layer is firmly fixed, the vibrations are caused by the load applied to the upper boundary. Solution of the direct problem of determining the displacement field using the apparatus of the Fourier transform is reduced to the Fredholm integral equations of the 2nd kind, built for the transformant of the displacement components. The inverse problem of determining the laws of change tensor components prestress is formulated. The method of constructing the iterative process is used to solve this problem. This approach is based on a combination of direct solution and searching corrections on each iteration as solution of Fredholm integral equation of the 1st kind. To implement this method it is formulated the necessary equations, which numerical solution is implemented using Tikhonov regularization method.

# О КОЛЕБАНИЯХ НАНОРАЗМЕРНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Еремеев В. А.<sup>\*,\*\*</sup>, Наседкин А. В.<sup>\*\*</sup>

*\* Отто фон Герике университет Магдебурга*

*\*\* Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрены задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрических (электроупругих) тел наноразмеров с учетом поверхностных напряжений и электрических зарядов. Спектральные свойства краевых задач для с учетом поверхностных эффектов устанавливаются комбинацией подходов, разработанных ранее для пьезоэлектрических тел и для упругих тел с поверхностными напряжениями. Установлены теоремы об изменении собственных частот при изменениях граничных условий и материальных характеристик.

**1. Введение.** Как известно, ряд наноматериалов имеют аномальные механические свойства, существенно отличающиеся от обычных макроматериалов. Одним из факторов, отвечающих за такое поведение наноматериалов, могут являться поверхностные эффекты. Как показывают исследования последних лет ([1] и др.), для тел субмикроскопических и наноразмеров поверхностные напряжения играют значительную роль и оказывают влияние на деформирование тел в целом. Аналогично упругим телам, при анализе пьезоэлектрических наноразмерных сред в модель можно ввести поверхностные напряжения и распределенные электрические заряды посредством добавления на поверхности соответствующих упругих мембран и диэлектрических пленок. Данный подход применяется ниже для исследования собственных колебаний пьезоэлектрических наноразмерных тел.

**2. Постановка задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрического тела с поверхностными эффектами.** Пусть  $V$  — ограниченная в  $\mathbb{R}^3$  область, занимаемая пьезоэлектрическим телом;  $S = \partial V$  — граница области,  $\mathbf{n}$  — вектор внешней единичной нормали к  $S$ . Предположим, что область  $V$  и ее граница  $S$  удовлетворяют условиям  $(V, S)$ , приведенным в [2].

Ограничиваясь рассмотрением режимов установившихся колебаний с круговой частотой  $\omega$ , будем использовать только амплитудные значения всех физико-механических величин без специальных оговорок. В качестве основных переменных для пьезоэлектрической среды примем вектор механических перемещений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  и электрический потенциал  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ . С использованием этих функций можно определить тензор деформаций второго ранга  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  и вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\varphi)$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (1)$$

где через  $(\dots)^T$  обозначается операция транспонирования.

В линейном приближении примем следующие стандартные определяющие соотношения для пьезоэлектрической среды

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор второго ранга напряжений;  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции;  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^E$  — тензор четвертого ранга упругих модулей, измеренных при постоянном электрическом поле;  $\mathbf{e}$  — тензор третьего ранга пьезомодулей;  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^S$  — тензор второго ранга диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянной деформации. (Здесь общепринятые в теории пьезоэлектричества верхние индексы у  $\mathbf{c}^E$  и  $\boldsymbol{\epsilon}^S$  опущены для компактности дальнейших обозначений.)

Для однородной задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрического тела имеем следующие полевые уравнения в приближениях квазиэлектростатики

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (3)$$

Предполагается, что плотность  $\rho(\mathbf{x})$  кусочно-непрерывна и  $\exists \rho_0 > 0 : \rho(\mathbf{x}) \geq \rho_0$ . Материальные модули среды в (2) кусочно-непрерывны вместе со своими первыми производными по  $\mathbf{x}$  с обычными условиями симметрии ( $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$ ,  $e_{ikl} = e_{ilk}$ ,  $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ ), причем для положительной определенности объемной плотности внутренней энергии  $W(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{E})$  должно выполняться следующее условие:  $\forall \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^T, \mathbf{E}, \exists c_W > 0, 2W(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{E}) = \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \cdot \mathbf{c}^E \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{E}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \geq c_W(\boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E})$ .

Формулы (1)–(3) дают связанную систему уравнений о собственных колебаниях для пьезоэлектрического тела относительно компонент вектора механических перемещений  $\mathbf{u}$  и функции электрического потенциала  $\varphi$ . Полная постановка задач пьезоэлектричества (электроупругости) о собственных колебаниях должна включать также соответствующие граничные условия. Эти граничные условия можно подразделить на два типа: механические и электрические.

Для формулировки механических граничных условий предположим, что существует разбиение границы  $S$  на два подмножества  $S_\sigma$  и  $S_u$  ( $S = S_\sigma \cup S_u$ ).

Будем считать, что на участке границы  $S_\sigma$  действуют только поверхностные напряжения  $\boldsymbol{\tau}_s$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla_s \cdot \boldsymbol{\tau}_s, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad (4)$$

где  $\nabla_s$  — поверхностный оператор градиента, связанный с пространственным набла-оператором формулой  $\nabla_s = \nabla - \mathbf{n}(\partial/\partial r)$ ,  $r$  — координата, отсчитываемая по нормали к  $S$ ,  $\boldsymbol{\tau}_s$  — тензор второго ранга поверхностных напряжений.

Как и для чисто упругого тела, при учете поверхностных напряжений примем, что поверхностные напряжения  $\boldsymbol{\tau}_s$  связаны с поверхностными деформациями  $\boldsymbol{\epsilon}_s$  соотношением  $\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{c}_s \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s$ , где  $\boldsymbol{\epsilon}_s = (\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla_s \mathbf{u})^T)/2$ ,  $\mathbf{c}_s$  — тензор четвертого ранга поверхностных упругих модулей,  $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор в  $\mathbb{R}^3$ . При этом свойства тензора поверхностных упругих модулей  $\mathbf{c}_s$  аналогичны соответствующим свойствам тензора  $\mathbf{c}$ , т. е.  $\mathbf{c}_s$  — полусимметричный положительно определенный тензор.

Оставшуюся часть границы  $S_u$  считаем жестко закрепленной

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad S_u \neq \emptyset. \quad (5)$$

Для задания электрических граничных условий предположим, что поверхность  $S$  разбита также на два подмножества:  $S_D$  и  $S_\varphi$  ( $S = S_D \cup S_\varphi$ ).

Участки  $S_D$  не электродированы, и на них выполняются условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \nabla_s \cdot \mathbf{d}_s, \quad \mathbf{x} \in S_D, \quad (6)$$

где  $\mathbf{d}_s = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{E}_s = -\nabla_s \varphi$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_s$  — симметричный положительно определенный относительно векторов  $\mathbf{E}_s$  тензор второго ранга поверхностных диэлектрических проницаемостей.

Подмножество  $S_\varphi$  есть объединение  $M+1$  не граничащих друг с другом участков  $S_{\varphi j}$  ( $j \in J_Q \cup J_V$ ),  $J_Q = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $J_V = \{0, m, m+1, \dots, M\}$ ), покрытых бесконечно тонкими электродами. На данных участках зададим следующие граничные условия

$$\varphi = \Phi_j, \quad \mathbf{x} \in S_{\varphi j}, \quad j \in J_Q, \quad (7)$$

$$\int_{S_{\varphi j}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dS + \int_{C_{\varphi j}} \mathbf{n}_C \cdot \mathbf{d} dC = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{\varphi j}, \quad C_{\varphi j} = \partial S_{\varphi j}, \quad j \in J_Q, \quad (8)$$

$$\varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{\varphi j}, \quad j \in J_V, \quad S_{j0} \neq \emptyset. \quad (9)$$

где величины  $\Phi_j$  не зависят от  $\mathbf{x}$ , а  $\mathbf{n}_C$  — вектор единичной внешней нормали к контуру  $C_{\varphi j}$ .

По (7)–(9) имеется  $m$  разомкнутых свободных электродов из  $S_{\varphi j}$ ,  $j \in J_Q$ , на которых потенциалы  $\Phi_j$  изначально не известны, но суммарный заряд равен нулю, и  $(M+1-m)$  короткозамкнутых заземленных электродов из  $S_{\varphi j}$ ,  $j \in J_V$ , с нулевыми потенциалами. Пограничные случаи  $m=0$  и  $m=M$  могут рассматриваться в рамках подхода (7)–(9). В случае  $m=0$  все электроды являются короткозамкнутыми. При  $m=M$  потенциал определен с точностью до произвольной постоянной, и без ограничения общности можно принять условие (9) для одного из электродов, например, для  $S_{j0}$ . Подчеркнем, что все электроды являются эквипотенциальными поверхностями, т. е. потенциалы на них постоянны и не зависят от  $\mathbf{x}$ .

Здесь предполагается, что все области  $S_\sigma$ ,  $S_u$ ,  $S_D$  и  $S_{\varphi j}$  имеют липшицевы границы класса  $C^1$ , а электрические поверхностные эффекты учтены введением в (6), (8) членов с вектором поверхностной электрической индукции  $\mathbf{d}_s$ .

Задача (1)–(9) является краевой задачей о собственных колебаниях пьезоэлектрического тела с учетом поверхностных напряжений и состоит в определении собственных частот  $\omega$  и соответствующих им собственных функций  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$ , доставляющих нетривиальное решение однородной задачи. Спектральные свойства данной задачи установим, используя подходы, примененные в [3, 4].

**3. Обобщенные формулировки задачи.** От классических постановок (1)–(9) задач на собственные частоты для пьезоэлектрических сред с поверхностными напряжениями перейдем к их обобщенным или слабым постановкам.

Предварительно введем в рассмотрение необходимые для дальнейшего пространства функций  $\varphi$  и вектор-функций  $\mathbf{u}$ , определенных на  $V$ . Обозначим через  $H_\rho^0$  — пространство вектор-функций  $\mathbf{u} \in L_2$  со скалярным произведением  $(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{H_\rho^0} = \int_V \rho \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u} dV$ .

На множестве функций  $\mathbf{u} \in C^1$ , удовлетворяющих условиям (5) на  $S_u$ , введем скалярное произведение  $(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{H_u^1} = \int_V (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \nabla \mathbf{u} dV + \int_{S_\sigma} (\mathbf{A} \cdot \nabla_s \mathbf{v})^T \cdot \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} dS$ . Замыкание множества вектор-функций  $\mathbf{u}$  в норме, порожденной данным скалярным произведением, обозначим через  $H_u^1$ .

На множестве функций  $\varphi \in C^1$ , удовлетворяющих граничным условиям (7) на  $S_{\varphi j}$ ,  $j \in J_V$ , и (9) для произвольных  $\Phi_j$  на  $S_{\varphi j}$ ,  $j \in J_Q$ , введем скалярное произведение  $(\chi, \varphi)_{H_{\varphi m}^1} = \int_V (\nabla \chi)^T \cdot \nabla \varphi dV + \int_{S_D} (\nabla_s \chi)^T \cdot \nabla_s \varphi dS$ . Замыкание множества функций  $\varphi$  в норме, порожденной данным скалярным произведением, обозначим через  $H_{\varphi m}^1$ , где  $m$  — число граничных условий (8), (9).

Для получения обобщенных постановок умножим первое уравнение (3) скалярно на произвольную вектор-функцию  $\mathbf{v} \in H_u^1$ , а второе уравнение (3) — на



функцию  $\chi \in H_{\varphi m}^1$ . После интегрирования по  $\Omega$ , использования техники интегрирования по частям и учета (1), (2), (6)–(8), получим интегральные соотношения

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + e(\varphi, \mathbf{v}) = \omega^2 \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad -e(\chi, \mathbf{u}) + \epsilon(\chi, \varphi) = 0, \quad (10)$$

где  $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})_{H_\rho^0}$ ,  $c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = c_V(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + c_S(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ,  $\epsilon(\chi, \varphi) = \epsilon_V(\chi, \varphi) + \epsilon_S(\chi, \varphi)$ ,  $c_V(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV$ ,  $c_S(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{S_\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{c}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}) dS$ ,  $e(\varphi, \mathbf{v}) = -\int_V \mathbf{E}(\varphi) \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV$ ,  $\epsilon(\chi, \varphi) = \int_V \mathbf{E}(\chi) \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(\varphi) dV$ ,  $\epsilon_S(\chi, \varphi) = \int_{S_D} \mathbf{E}_s(\chi) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s \cdot \mathbf{E}_s(\varphi) dS$ .

Как легко заметить, учет поверхностных эффектов в (10) сводится только к добавлению форм  $c_S(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  и  $\epsilon_S(\chi, \varphi)$ . Поэтому можно воспользоваться подходами [4] для задач на собственные частоты для пьезоэлектрических тел. Именно, разрешив второе из уравнений (10) в виде  $\varphi = A_m \mathbf{u}$ , где оператор  $A_m$  действует из  $H_u^1$  в  $H_{\varphi m}^1$ , линеен и ограничен, систему (10) можно редуцировать к виду

$$\tilde{c}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \omega^2 \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (11)$$

где  $\tilde{c}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \epsilon(A_m \mathbf{v}, A_m \mathbf{u})$ . Отметим, что форма  $\tilde{c}$  положительно определена в  $H_u^1$ , что обусловлено положительной определенностью объемной и поверхностных энергий.

**Определение.** Слабым или обобщенным решением задачи (1)–(9) о собственных частотах назовем тройку величин  $(\omega^2, \mathbf{u} \in H_u^1, \varphi \in H_{\varphi m}^1)$ , удовлетворяющих (11) для произвольных вектор-функций  $\mathbf{v} \in H_u^1$  или, что эквивалентно, (10) для произвольных  $\mathbf{v} \in H_u^1, \chi \in H_{\varphi m}^1$ .

**4. Спектральные свойства задачи.** Проводя рассуждения, аналогичные [2]–[4], убеждаемся, что пространство  $H_c^1$ , являющееся замыканием множества вектор-функций  $\mathbf{u} \in C^1$ , удовлетворяющих главному граничному условию (5), в норме, порожденной скалярным произведением (11), эквивалентно  $H_u^1$ , а тогда из вполне непрерывности оператора вложения из  $H_u^1$  в  $H_\rho^0$  вытекают следующие теоремы.

**Теорема 4.1.** Операторное уравнение (11) задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрических тел с поверхностными эффектами имеет вещественный дискретный спектр  $0 < \omega_1^2 \leq \dots \leq \omega_k^2 \leq \dots; \omega_k^2 \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , а собственные функции  $\mathbf{u}^{(k)}$  образуют систему, ортогональную и полную в  $H_\rho^0$  и  $H_c^1$ .

**Теорема 4.2.** (Минимаксный принцип Куранта–Фишера).

$$\omega_k^2 = \max_{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k-1} \in H_{ul}^1} \left[ \min_{\substack{\mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \in H_{ul}^1 \\ \rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}_j) = 0; j=1, 2, \dots, k-1}} R(\mathbf{v}) \right], \quad R(\mathbf{v}) = \frac{\tilde{c}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\rho(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

**5. Теоремы об изменениях собственных частот.** Отметим некоторые следствия из вариационных описаний собственных частот пьезоэлектрических тел с поверхностными эффектами. Эти следствия сформулируем в виде теорем об изменениях собственных частот при изменениях граничных условий или материальных параметров среды. Доказательства всех нижеследующих теорем будут опущены, так как могут быть проведены аналогично доказательствам соответствующих теорем для пьезоэлектрических тел, описываемых в рамках классических моделей электроупругости [4] и для упругих тел с поверхностными напряжениями [3].

**Теорема 5.1.** Собственные частоты  $\omega_k$  задачи о колебаниях с учетом поверхностных напряжений не меньше соответствующих собственных частот  $\omega_{fuk}$  задачи без учета поверхностных напряжений, т. е.  $\forall k, \omega_k^2 \geq \omega_{fuk}^2$ .

**Теорема 5.2.** Собственные частоты  $\omega_k$  задачи о колебаниях с учетом поверхностных зарядов не больше соответствующих собственных частот  $\omega_{f\varphi k}$  задачи без учета поверхностных зарядов, т. е.  $\forall k \omega_k^2 \leq \omega_{f\varphi k}^2$ .

**Теорема 5.3.** Замена короткозамкнутых электродов на свободные приводит к увеличению собственных частот, как для задачи с учетом поверхностных эффектов, так и для задачи без учета поверхностных эффектов.

Отметим, что теорема 5.3 утверждает также, что частоты антирезонанса не меньше частот резонанса с одинаковыми порядковыми номерами [4].

Исследуем изменение собственных частот при изменении некоторых параметров задачи. Эти изменения будем указывать явно в формулировках теорем, а все величины, относящиеся к модифицированным задачам будем помечать звездочкой. Как и выше, для исходной и модифицированной задач все не указываемые в формулировках теорем определяющие параметры предполагаются идентичными.

**Теорема 5.4.** Если участки с условиями жесткого закрепления двух задач таковы, что  $\Gamma_u \supset \Gamma_{*u}$ , то  $\forall k \omega_k^2 \geq \omega_{*k}^2$ .

**Теорема 5.5.** Если упругие модули, пьезомодули и плотности для двух задач таковы, что  $\tilde{c}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \tilde{c}_*(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ ,  $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \tilde{\rho}_*(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  для  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_u^1$ , то  $\forall k \omega_k^2 \geq \omega_{*k}^2$ .

**Теорема 5.6.** Если участки с граничными условиями электрического типа для двух задач таковы, что  $\Gamma_\varphi \supset \Gamma_{*\varphi}$ ,  $\Gamma_{\varphi j} \supset \Gamma_{*\varphi j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, M$ , то  $\forall k \omega_k^2 \leq \omega_{*k}^2$ .

**Теорема 5.7.** Если диэлектрические проницаемости двух задач таковы, что  $\epsilon(\chi, \chi) \geq \epsilon_*(\chi, \chi)$  для  $\forall \chi \in \mathbb{H}_{\varphi m}^1$ , то  $\forall k \omega_k^2 \leq \omega_{*k}^2$ .

Заметим, что результаты теорем 5.4–5.7 справедливы как для задач с учетом поверхностных эффектов, так и для задач без учета этих эффектов.

Сравнивая приведенные теоремы, можно заключить, что однотипные изменения механических и электрических граничных условий или жесткостных характеристик и диэлектрических проницаемостей приводят к противоположным изменениям собственных частот пьезоэлектрических тел.

В качестве иллюстрации некоторых из отмеченных тенденций изменения частот были проведены также конечно-элементные расчеты модельных задач, описание которых здесь опущено из-за ограниченности объема статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00829).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Duan H. L., Wang J., Huang Z. P., Karihaloo B. L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress // J. Mech. Phys. Solids. 2005. V. 53. Pp. 1574–1596.
- [2] Белоконь А. В., Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории электроупругих тел / Акт. пробл. мех. деформ. сред. Днепропетровск: ДГУ, 1979. С. 53–67.
- [3] Altenbach H., Eremeyev V. A., Lebedev L. P. On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses // Z. Angew. Math. Mech. 2011. V. 91, № 9. Pp. 699–710.
- [4] Белоконь А. В., Наседкин А. В. О некоторых свойствах собственных частот электроупругих тел ограниченных размеров // ПММ. 1996. Т. 60, № 1. С. 151–158.

**Eremeyev V. A., Nasedkin A. V.** *On the vibration of nanosize piezoelectric bodies with surface effects.* The spectrum problems for piezoelectric bodies with surface stresses and surface electric charges are considered. Some fundamental properties and theorems about eigenfrequencies are established.

# УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСТРОПНОГО СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

Ержаков Г. В., Шалдырван В. А.

*Донецкий национальный университет*

Рассматривается задача теории упругости для многосвязного слоя из низко модульного транстропного (трансверсально изотропного) материала. Деформация осуществляется в результате нагружения поверхностей полостей неравномерной нагрузкой. При построении решения использованы элементарные решения уравнений Ламе для транстропного слоя со свободными от напряжений торцами. Приведены численные исследования напряженного состояния в сформулированных для слоя модельных задачах.

**1. Введение.** Интерес к транстропным материалам резко возрос в середине 80-х годов прошлого столетия. Это связано с разработкой методов и созданием новых материалов с улучшенными прочностными характеристиками. Некоторые из этих материалов (например, однонаправленные композиты) допускают осреднение их свойств в виде так называемых эффективных транстропных материалов. Развитие методов и результаты исследований упругого состояния пластин из таких материалов частично отражены в обзоре [1]. О современном состоянии проблемы можно судить по результатам, представленным в фундаментальной монографии [2], полностью посвященной исследованию НДС транстропных тел. В 80-е годы для решения задач теории тонких транстропных пластин был предложен асимптотический метод [3]. В это же время, для исследования существенно трехмерных задач был применен другой вариант, обобщающий метод Лурье-Воровича [4]. Задачи теории упругости для многосвязных транстропных тел не рассматривались. В этой работе сделана попытка привлечь внимание к этой проблеме.

**2. Постановка задачи и решение.** Рассмотрим равновесие слоя толщины  $2H$  из транстропного материала, плоскость изотропии которого параллельна срединной. Рассмотрим такие, у которых упругие модули удовлетворяют соотношениям

$$b_1 = \frac{G/G_z - \nu_z E/E_z}{1 - \nu} > 0, \quad b_1^2 - b_2 = \left( \frac{G/G_z - \nu_z E/E_z}{1 - \nu} \right)^2 - \frac{E}{E_z} \frac{1 - \nu_z^2 E/E_z}{1 - \nu^2} < 0,$$

так называемые низко модульные материалы. Слой ослаблен цилиндрическими полостями  $\Omega_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ , кругового сечения радиусов  $R_j$ , местоположение центров которых отличаются на вектор  $\vec{l}_{ij}$  друг от друга. Отнесем рассматриваемое тело к декартовой системе координат так, чтобы плоскость  $\tilde{x}O\tilde{y}$  лежала в срединной плоскости, ось  $O\tilde{x}$  совпадала с линией центров каких-либо двух полостей, а начало координат поместим равноудаленно от них. Будем считать, что торцы свободны от напряжений, а загрузка производится на боковых поверхностях. Для удобства, с центром каждой из полостей дополнительно свяжем локальные цилиндрические системы координат  $(r_j, \theta_j, z)$ . Далее будем использовать безразмерные координаты  $x = \tilde{x}/R$ ,  $y = \tilde{y}/R$ ,  $z = \tilde{z}/hR$  и характеристики напряженно деформированного

состояния  $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{\tilde{u}}(\vec{r})/R$ ,  $\sigma_{ij}(\vec{r}) = \tilde{\sigma}_{ij}(\vec{r})/2G$ ,  $i, j = x, y, z$ , где  $h = H/R$  — относительная толщина,  $\vec{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ ,  $\vec{r} = \{x, y, z\}$ .

Данная задача описывается уравнениями равновесия Ламе для трансропных материалов

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2 s_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + D^2 u + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, & u \rightleftharpoons v, \quad x \rightleftharpoons y, \\ \frac{\mu_2}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{s_0^2} D^2 w + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

и граничными условиями

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{yz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{zz}(x, y, \pm 1) = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}|_{\Omega_j} = Pz^{2q_1^{(j)}} \Theta_1^{(j)}(\theta_j), \sigma_{r\theta}|_{\Omega_j} = Pz^{2q_2^{(j)}} \Theta_2^{(j)}(\theta_j), \sigma_{rz}|_{\Omega_j} = Pz^{2q_3^{(j)}-1} \Theta_3^{(j)}(\theta_j), j = \overline{1, s}. \quad (2)$$

Однородные решения уравнений Ламе, удовлетворяющие граничным условиям (1), имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} u(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z) \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(z) \frac{\partial \Psi_p}{\partial x} - \partial_1 [F + h^2 \mu_8 (1/3 - z^2) D^2 F - \Phi_0^*], \\ v(r) &= - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(z) \frac{\partial \Psi_p}{\partial y} - \partial_2 [F + h^2 \mu_8 (\frac{1}{3} - z^2) D^2 F + \Phi_0^*], \\ w(r) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p(z) \Psi_p(x, y) - 2h\mu_8 z D^2 F, \end{aligned}$$

где функции  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяют уравнениям  $D^2 \Phi_k(x, y) = (\delta_k/h)^2 \Phi(x, y)$ ,  $D^2 \Psi_p(x, y) = (\gamma_p/h)^2 \Psi(x, y)$ , а остальные обозначения совпадают с введенными в монографии [5]. Естественные граничные условия (2) сводятся к функциональным системам

$$\phi(t_j) + t_j \overline{\phi'(t_j)} + \overline{\psi(t_j)} + \Lambda_{1\Omega_j}(\Phi_0, \Psi_p) = \frac{f_{1,0}^{(j)}}{2}, -\frac{8h^2 \mu_8}{(\delta_m s_0)^2} \overline{\phi''(t_j)} + \Lambda_{1\Omega_j}(\Phi_m, \Psi_p) = \frac{f_{1,m}^{(j)}}{2},$$

$$\Lambda_{2\Omega_1}(\Phi_m, \Psi_p) = f_{2,m}^{(j)}, \Phi_0 = 0, (m = 1, 2, \dots, j = \overline{1, s}). \quad (3)$$

Здесь введены в рассмотрение операторы вида [5]:

$$\Lambda_{1\Omega_j}(\Phi_m, \Psi_p) = \int_0^{s_j} (\mu h (-1)^m L_{8\Omega_j} \Phi_m + Re \sum_{p=1}^{\infty} [s_{mp} L_{0\Omega_j} + n_{mp} L_{9\Omega_j}] \Psi_p) R_j d\sigma_j,$$

$$\Lambda_{2\Omega_j}(\Phi_m, \Psi_p) = -\mu \delta_m s_0 (-1)^m L_{2\Omega_j} \Phi_m + 2Re \sum_{p=1}^{\infty} r_{mp} L_{1\Omega_j} \Psi_p, \Phi_0 = 0,$$

$f_{1,m}^{(j)} = \int_{s_j} (P_{mr}^{(j)} + iP_{m\theta}^{(j)}) R_j d\sigma_j$ ,  $f_{2,m}^{(j)} = \int_{s_j} P_{mz}^{(j)} R_j d\sigma_j$ , а интеграл берется по дуге контура полости,  $P_{mi}^{(j)} = (-1)^m \int_{-1}^1 P_i^{(j)} \cos(\delta_m s_0 z) dz$ ,  $i = r, \theta, z$ ;  $t_j$  — аффикс точки на контуре.

В частном случае двух одинаково нагруженных полостей радиуса  $R$ , расположенных на расстоянии  $2l$ , и если

$$q_1^{(j)} = 1, \quad q_2^{(j)} = 1, \quad \Theta_1^{(j)}(\theta_j) = -(1 + \cos 2\theta_j), \quad \Theta_2^{(j)}(\theta_j) = \sin 2\theta_j, \quad \Theta_3^{(j)}(\theta_j) = 0,$$

правые части такие:  $f_{1,0}^{(j)} = -\frac{2}{3}$ ,  $f_{1,m}^{(j)} = -\frac{4(-1)^m}{\pi^2 m^2} (\sigma_j - 1/\sigma_j)$ ,  $f_{2,m} = 0 \quad \forall m \neq 0$ ,  $j = \overline{1, s}$ .

Комплексные потенциалы  $\phi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  ( $\zeta = x + iy$ ) являются аналитическими на всей комплексной плоскости, за исключением круговых отверстий, поэтому представимы в виде рядов Лорана. В рассматриваемом частном случае имеют место геометрическая и физическая симметрии задачи относительно плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ , поэтому в точках  $(x, y, z)$  и  $(x, -y, z)$ , а также  $(x, y, z)$  и  $(-x, -y, z)$  напряжения одинаковы. Это позволяет представить комплексные потенциалы и метагармонические функции  $\Phi$ ,  $\Psi$  в виде

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sigma_1^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sigma_1^n, \quad A_n = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma_{nt}^{(1)} a_t, \quad \gamma_{nt}^{(1)} = -(-1/2l)^{t+n} \frac{(n+t-1)!}{n!(t-1)!},$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sigma_1^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sigma_1^n, \quad B_n = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma_{nt}^{(1)} b_t, \quad (4)$$

$$\Psi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta_1 \{c_{np}^* K_n(\gamma_p^* r_1) + I_n(\gamma_p^* r_1) \sum_{t=0}^{\infty} R_{nt}^p c_{tp}^*\},$$

$$\Phi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta_1 \{b_{nk}^* K_n(\delta_k^* r_1) + I_n(\delta_k^* r_1) \sum_{t=1}^{\infty} Q_{nt}^k b_{tk}^*\}, \quad (5)$$

а также удовлетворять граничным условиям (3) только на одной полости, для определенности  $\Omega_1$ . В результате подстановки (4), (5) в граничные условия и приравнивания коэффициентов в левой и правой частях равенств при одинаковых степенях  $\sigma_1$  получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

**3. Результаты численных исследований.** Численные исследования проведены для плит, полости которых удалены друг от друга на достаточно большое расстояние так, что они практически не влияют друг на друга. Технические постоянные материалов, для которых приводятся результаты: бериллий:  $E = 226$  ГПа,  $E_z = 341$  ГПа,  $G_z = 166$  ГПа,  $\nu = 0.12$ ,  $\nu_z = 0.043$ ; InSe:  $E = 47.917$  ГПа,  $E_z = 18$  ГПа,  $G_z = 12$  ГПа,  $\nu = 0.042$ ,  $\nu_z = 0.3$ . На рис. 1 приведены эпюры распределения напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ , отнесенные к нагрузке  $P$ , от  $z$  на поверхности полости при  $\theta = \pi/2$  для слоев из бериллия (а) и InSe (б) при различных значений  $h$ : 1 —  $h = 0.1$ ; 2 —  $h = 0.5$ ; 3 —  $h = 1$ ; 4 —  $h = 2$ ; 5 —  $h = 4$ .

Из приведенных графиков видно, что при увеличении  $h$  напряжения вблизи срединной плоскости убывают, а около торцов увеличиваются. При этом в слое из бериллия максимальные напряжения достигаются на торцах, а в слое из InSe они

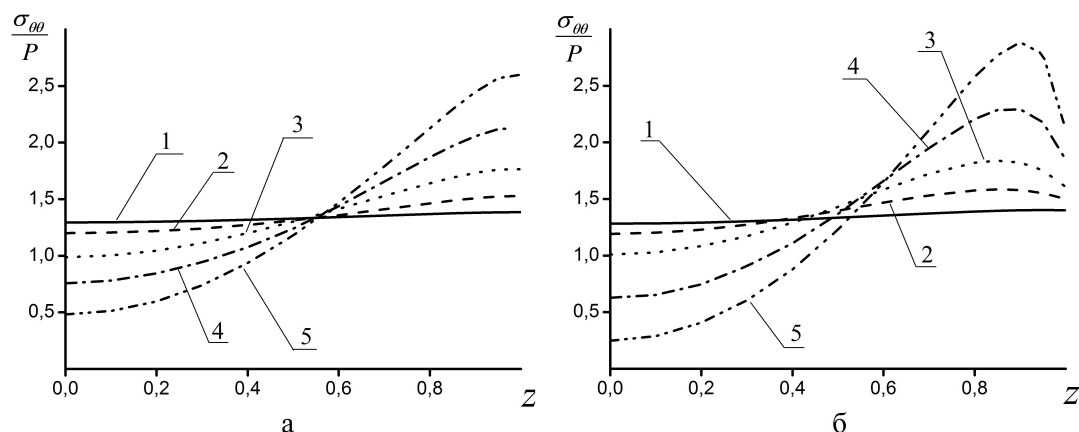


Рис. 1. Зависимости напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  от толщины для слоя из бериллия (а) и InSe (б).

сдвигаются от плоских граней вглубь и располагаются в области, где  $z = 0.9$ . Это различие связано с большой разницей коэффициентов Пуассона  $\nu_z$ , который для бериллия мал:  $\nu_z = 0.043$ .

На рис.2 изображены графики зависимости  $\sigma_{zz}$ , отнесенные к нагрузке  $P$ , от высоты для тех же материалов, номера кривых соответствуют тем же значениям  $h$ . Для тонких слоев напряжения  $\sigma_{zz}$  почти нулевые по всей толщине пластины. При больших относительных толщинах эти напряжения становятся существенными. Как видно, диапазон изменения напряжений  $\sigma_{zz}$  зависит от коэффициента Пуассона  $\nu_z$ . Так, в слое из бериллия максимальные напряжения составляют приблизительно 0.17, а в слое из InSe — 0.55.

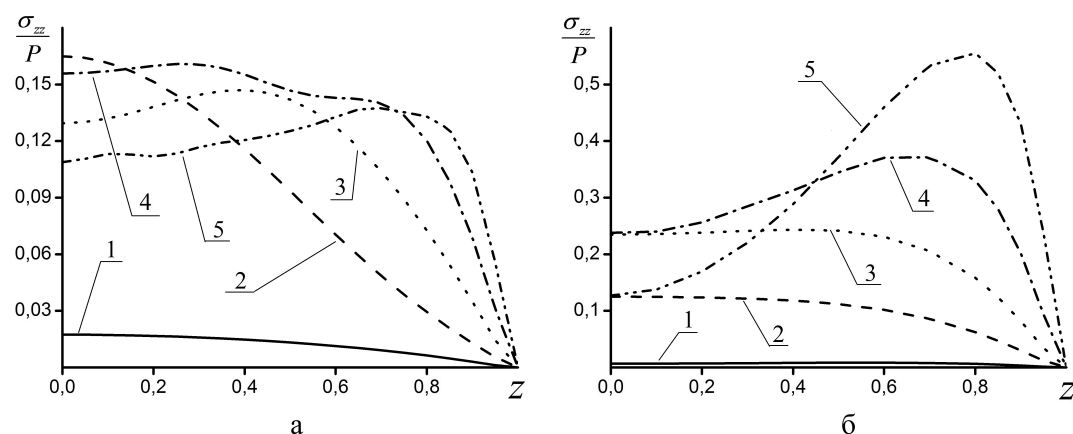


Рис. 2. Зависимости напряжений  $\sigma_{zz}$  от толщины для слоя из бериллия (а) и InSe (б).

В табл. 1 для тех же материалов помещены значения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  на поверхности при  $\theta = \pi/2$  при равномерной по высоте нагрузке с той же угловой зависимостью, что и в предыдущем случае. Приведенные данные, а также данные для ряда других материалов, для которых проводились расчеты, позволяют сделать вывод, что диапазон изменения напряжений становится тем шире, чем больше коэффициент Пуассона  $\nu_z$ .

z/h	Бериллий					InSe				
	0.1	0.5	1	2	4	0.1	0.5	1	2	4
0	4.00	4.01	4.02	4.01	4.01	4.05	4.48	4.66	4.47	4.18
0.2	4.00	4.01	4.02	4.01	4.01	4.04	4.45	4.64	4.47	4.19
0.4	4.00	4.01	4.01	4.01	4.01	4.03	4.36	4.56	4.48	4.24
0.6	4.00	4.00	4.01	4.01	4.01	4.01	4.18	4.38	4.44	4.32
0.8	4.00	3.99	3.99	3.99	4.00	3.98	3.88	3.95	4.15	4.31
1	4.00	3.97	3.94	3.91	3.90	3.95	3.38	2.87	2.54	2.44

Таблица 1. Напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  на поверхности полости при  $\theta = \pi/2$  при равномерной по высоте нагрузке в слоях из бериллия и InSe.

Точность решения контролировалась проверкой граничных условий на поверхности полости и на торцах. При расчетах максимальные отклонения напряжения имели порядок  $10^{-4}$  (для  $\sigma_{rr}$  при  $z = 1$ ), при этом для малых  $h$  в системе сохранялось 50 неизвестных, для больших  $h$  система была больше, например, при  $h = 4$  оставлялось 400 неизвестных.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шалдырван В. А. Некоторые результаты и проблемы теории пластин (обзор) // Прикладная механика. 2007. Т. 43 № 2. С. 45–69.
- [2] Ding H. Chen W. Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials. Dordrecht: Springer, 2006. 454 p.
- [3] Роменская Г. И. Шленев М. А. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой трансверсально-изотропной плите // Пластины и оболочки. Ростов н/Д, 1971. С. 8–19.
- [4] Космодамианский А. С. Шалдырван В. А. Определение напряженного состояния многосвязных транстропных пластин.
- [5] Космодамианский А. С. Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. К.: Наукова думка, 1978. 240 с.

**Erzhakov G. V., Shaldirvan V. A.** *Elastic state of the layer weakened by cylindrical cavities.* The problem of elasticity theory is considering for multiply connected layer of low modulus transtropic (transversely isotropic) material. Deformation is occurring as a result of the loading of the surface cavities by uneven load. For constructing the solution used the elementary solutions of Lamé equations for transtropic layer with stress-free ends. Given the numerical investigations of the stress state for the formulated for layer model problems.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СГУСТКА КРОВИ В СОСУДЕ

**Жуков М. Ю., Жукова Н. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Численно при помощи метода конечных элементов исследована задача о течении в длинном канале несжимаемой жидкости с сильно неоднородным распределением вязкости. Рассматриваемая задача может служить грубой моделью поведения тромбов и сгустков крови в сосудах (венах, артериях). Показано, что локализованный сгусток в процессе переноса течением жидкости существенно изменяет свою первоначальную форму. Результаты расчетов представлены для значений параметров, которые соответствуют увеличению вязкости жидкости внутри сгустка крови в 2–9 раз по сравнению с вязкостью вне сгустка.

**1. Введение.** Основной целью работы является численное решение задачи о течении в длинном канале несжимаемой жидкости с сильно неоднородным распределением вязкости. Рассматриваемая задача может служить грубой моделью поведения тромбов и сгустков крови в сосудах (венах, артериях). Напомним, что тромбообразованием (тромбозом) называется пристеночное образование в сосудах плотного, структурно упорядоченного конгломерата (тромба) из форменных элементов крови и стабилизированного нерастворимого белка фибрина. Процесс тромбообразования весьма сложен и условно может быть разбит на четыре стадии: агглютинацию (склеивание и выпадение в осадок) тромбоцитов, коагуляцию фибриногена и образование фибринового полимерного сгустка, агглютинацию эритроцитов, преципитацию — осаждение на сгусток всех основных белков плазмы. Механизм свертывания крови, если не рассматривать патологии, как правило, запускается при механическом повреждении стенки сосуда, которое приводит к активации тромбоцитов и развивается по указанным стадиям. С гидродинамической точки зрения, наиболее важной является коагуляция фибриногена с последующим образованием фибринового полимерного сгустка (структурной основы тромба), что приводит к существенному увеличению вязкости крови (уменьшению текучести). Течение крови может срывать тромб, образующийся у стенки сосуда, и переносить его вдоль сосуда, что может приводить к закупориванию сосуда.

В данной работе моделируется лишь заключительная часть процесса — «отрыв» сгустка крови от стенки и перенос его течением крови. Следует заметить, что различные стадии процесса свертывания крови существенно различаются по характерным временам протекания. Стадии агглютинации и коагуляции протекают достаточно быстро (доли секунды), а процесс переноса сгустка крови имеет сравнительно большое характерное время (десятки секунд). Вышесказанное частично оправдывает раздельное моделирование процессов и делает возможным в грубом приближении рассматривать процесс переноса сгустка крови как перенос некоторой пассивной примеси потоком жидкости. Наличие сгустка в жидкой крови возможно учитывать влиянием величины концентрации сгустка на вязкость жидкости в целом или просто сильным локальным изменением вязкости.



С математической точки зрения, решение задачи сводится к исследованию уравнений движения несжимаемой жидкости, вязкость которой зависит от концентрации фибрина. Химические реакции, приводящие к свертыванию крови считаются рассмотренными на предыдущих этапах моделирования. Заметим, что именно схемы реакций и константы скорости реакций, в конечном итоге, определяют характер зависимости вязкости от величины концентрации фибрина. В данной работе основное внимание уделяется исследованию динамики процесса эволюции сильной первоначальной локальной неоднородности вязкости жидкости. Эта неоднородность и моделирует сгусток крови.

**2. Постановка задачи.** Предполагаем, что через некоторую область  $D$  протекает несжимаемая жидкость (кровь), вязкость которой зависит от величины концентрации примеси (фибрин). Примесь предполагается «вмороженной» в жидкость. В этом случае движение жидкости и примеси описывается системой уравнений в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla p + \mu(c)\Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ c_t + \mathbf{v} \cdot \nabla c &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = (u, w)$  — скорость жидкости в целом,  $p$  — давление,  $c$  — концентрация примеси,  $\mu(c)$  — коэффициент кинематической вязкости, зависящий от концентрации. Более привычное для гидродинамики число  $\operatorname{Re}$  связано с  $\mu$  известным соотношением:  $\operatorname{Re} = \mu^{-1}$ .

Считаем, что область  $D$  двумерная и представляет собой длинный канал, имеющий входное отверстие  $\Gamma_{\text{in}}$  и выходное отверстие  $\Gamma_{\text{out}}$ , а остальная граница области  $\partial D \setminus (\Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}})$  является твердой стенкой. Под длинным каналом подразумевается область, характерный размер которой в одном из направлений, для определенности  $x$ , значительно превосходит характерный размер в направлении  $y$ . Предполагаем также, что в области  $D$  при некоторой постоянной концентрации примеси ( $c = \text{const}$ ) устанавливается некоторый стационарный режим течения с известным профилем скорости  $\mathbf{v}_0(x, y)$ . Если концентрация примеси в некоторый момент времени сильно изменяется локально в окрестности некоторой точки  $(x_0, y_0)$  (образование тромба) и точка  $(x_0, y_0)$  достаточно далеко удалена от границ  $\Gamma_{\text{in}}$ ,  $\Gamma_{\text{out}}$ , то с хорошей точностью можно считать, что на границах  $\Gamma_{\text{in}}$ ,  $\Gamma_{\text{out}}$  сохраняется профиль скорости  $\mathbf{v}_0(x, y)$ . Это позволяет задать следующие краевые и начальные условия для скорости

$$\mathbf{v}|_{\partial D \setminus (\Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}})} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_{\text{in}}, \Gamma_{\text{out}}} = \mathbf{v}_0|_{\Gamma_{\text{in}}, \Gamma_{\text{out}}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x, y). \quad (3)$$

Для увеличения точности можно корректировать профиль скорости на границе  $\Gamma_{\text{out}}$ , используя условие сохранения расхода жидкости при протекании через канал.

Альтернативные краевые условия могут быть следующими

$$\mathbf{v}|_{\partial D \setminus (\Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}})} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_{\text{in}}} = \mathbf{v}_0|_{\Gamma_{\text{in}}}, \quad \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\Gamma_{\text{out}}} = 0, \quad p|_{\Gamma_{\text{out}}} = p_0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (4)$$

где  $p_0$  — известная константа.

Краевые условия для примеси не требуются, и следует задавать лишь начальное распределение  $c_0(x, y)$

$$c|_{t=0} = c_0(x, y). \quad (5)$$

Очевидно, что уравнения (1) можно заменить уравнениями

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

$$\mu_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mu = 0 \quad (7)$$

и вместо (5) задавать начальное распределение вязкости  $\mu_0(x, y)$

$$\mu|_{t=0} = \mu_0(x, y). \quad (8)$$

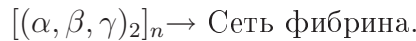
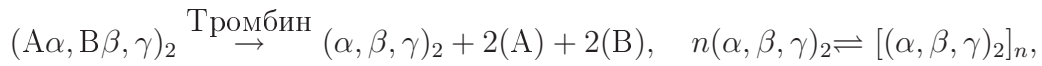
Далее в качестве начального распределения вязкости используем распределение, соответствующее круговому «пятну» радиуса  $r_0$  с центром  $(x_0, y_0)$

$$\mu_0(x, y) = \mu^0 \left\{ 1 + 0,5K \left( 1 + \operatorname{th}(-\beta((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2)) \right) \right\},$$

где  $\mu_0, K, \beta$  — известные параметры.

Это означает, что внутри пятна вязкость жидкости  $\mu \approx \mu_0$ , а вне пятна вязкость —  $\mu \approx \mu_0(1 + K)$ . Параметр  $\beta > 0$  задает сглаживание границ пятна.

Константа  $K$  может быть определена из условия «мгновенности» химических реакций (см., например, [3]) для уравнений химической кинетики. Например, превращение фибриногена в фибрин с образованием полимерного сгустка осуществляется под влиянием высокоспецифичного протеолитического фермента тромбина и переход фибриногена в фибрин происходит по схеме (см., например, [1, 2]):



Здесь  $(A\alpha, B\beta, \gamma)_2$  — концевые полипептидные цепи молекулы фибриногена,  $A$  и  $B$  — молекулы фибринопептидов,  $(\alpha, \beta, \gamma)_2$  — фибрин-мономер,  $[(\alpha, \beta, \gamma)_2]_n$  — фибрин-полимер.

Грубая оценка дает значения параметра  $K$  в интервале от 1 до 10.

**3. Вычислительный эксперимент.** Уравнения (6), (7) с краевыми и начальными условиями (2), (3), (8), либо (4), (3), (8) решались численно методом конечных элементов. Для реализации алгоритма применялся пакет FreeFem++ (см., например, [4]). Для этого система приводилась к вариационной форме и использовалась неявная схема аппроксимации по времени. Для решения гидродинамической части задачи, то есть уравнений (6) применялся метод проекций Чорина, а для решения уравнения (7) использовался метод характеристик и встроенные возможности пакета FreeFem++.

Расчеты проводились в широкой области параметров. В данной работе представлена лишь часть этих расчетов для области  $D$  в виде прямоугольника длиной 10,0 и шириной 1,5, с «уступом» длиной 2,0 и шириной 0,5 (см., например, рис. 1).

Выбор такой области продиктован желанием учесть механическое повреждение стенки кровеносного сосуда. Величина вязкости вне сгустка крови  $\mu_0 = 0,0025$ . Параметр, характеризующий вязкость внутри сгустка  $K = 8$ . Шаг по времени выбирался равным  $\mu_0 = 0,005$ . Профили скорости на входном и выходном участках канала для краевых условий (2) выбирались следующими (течение Пуазейля)

$$\Gamma_{in} : \quad u = 4y(1 - y), \quad w = 0,$$

$$\Gamma_{out} : \quad u = 8/3(y + 0,5)(1 - y), \quad w = 0.$$

Результаты расчетов для сгустка крови, первоначально локализованного в круге с центром  $x_0 = 1,0$ ,  $y_0 = 0,4$  радиуса  $r_0 \approx 0,316$  представлены на рис. 1, на котором продемонстрировано распределение вязкости жидкости  $\mu$  в различные моменты времени.

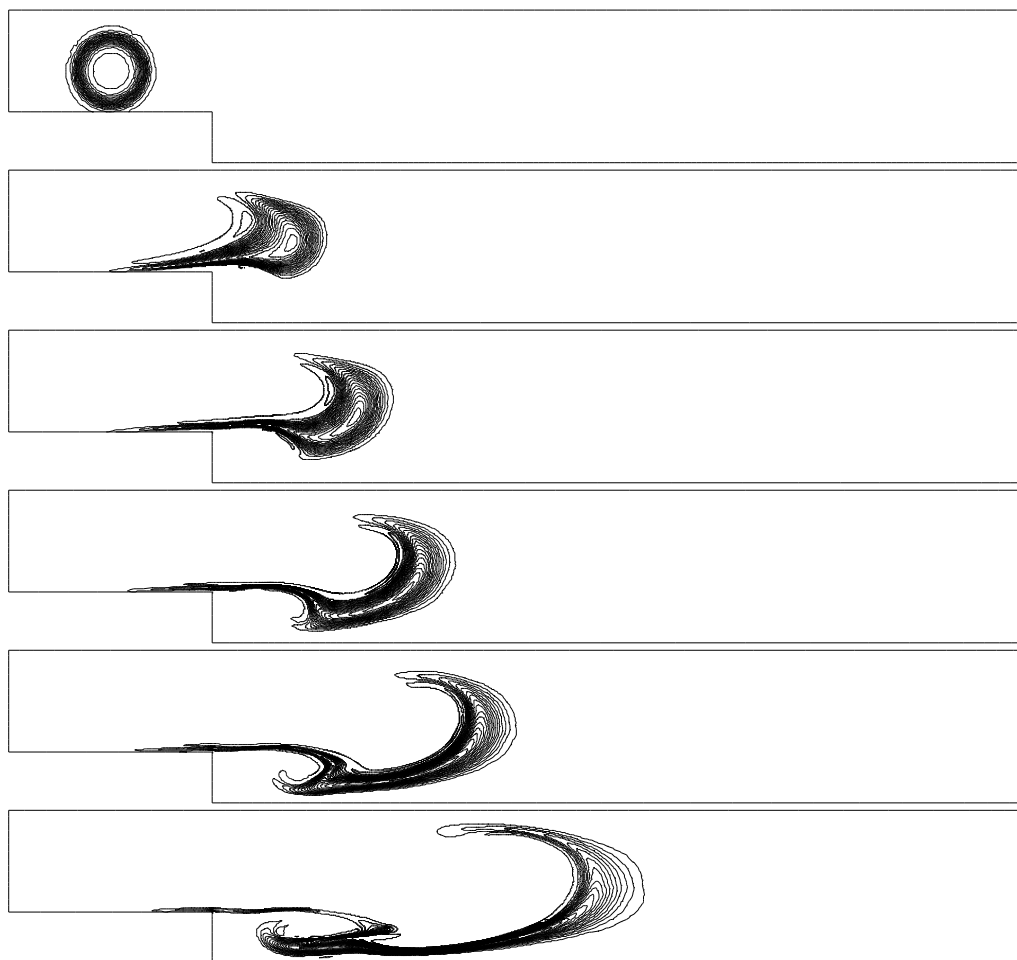


Рис. 1. Эволюция сгустка крови. Изолинии вязкости жидкости  $\mu(x, t)$  в моменты времени  $t = 0; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0; 7,0$ .

Хорошо видно, что течение крови существенно искажает первоначальную форму сгустка крови, перенося его вдоль канала (кровеносного сосуда). Более того,

наличие застойной зоны за уступом (см. рис. 2, на котором представлена функция тока для течения жидкости) приводит к частичному скоплению сгустка в застойной зоне. При  $t > 10$ , происходит «распад» сгустка на отдельные области.

Вычисления для других значений параметров, в частности, при ином начальном расположении сгустка демонстрируют такую же качественную картину эволюции — искажение первоначальной формы и дальнейший распад сгустка крови при изменении параметра  $K$  от 2 до 9.

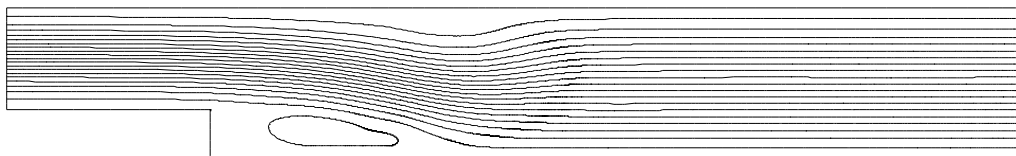


Рис. 2. Изолинии функции тока в момент времени  $t = 7,0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты 14.740.11.0877, 14.А18.21.0873 и грантов РФФИ 10-05-00646, 10-01-00452.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Овчинников Ю. А. Биоорганическая химия. М.: Просвещение, 1987. 816 с.
- [2] Ферит Э. Структура и механизм действия ферментов. М.: Мир, 1980. 432 с.
- [3] Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов н/Д: Изд. РГУ, 2005. 216 с.
- [4] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

**Zhukov M. Yu., Zhukova N. M.** *Modeling of blood clot evolution in a vessel.* To investigate a flow of incompressible fluid in the long channel the method of finite elements is used. We assume that fluid has strongly non-uniform distribution of viscosity. This problem can serve as a rough model of behavior of blood clots in vessels (veins, arteries). It is shown that the localized clot at transfer by flow essentially changes the initial form. Results of calculations for values of parameters which correspond to increase a blood clot viscosity in 2–9 are presented.

# РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА–КАРМАНА

**Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Методом конечных элементов в сочетании с методом Ньютона рассчитаны стационарные режимы течения жидкости для конвекции Рэлея–Бенара–Кармана в цилиндре с непроницаемыми границами и вращающимися в противоположную сторону основаниями, на которых задана разность температур. Построена бифуркационная кривая потери устойчивости зеркально симметричных режимов в зависимости от числа Рэлея. Используемый метод позволил обнаруживать как симметричные, так и несимметричные стационарные режимы.

**Введение.** В работе [1] численно при помощи конечно-разностного метода исследована задача о конвекции Рэлея–Бенара–Кармана в цилиндре с отношением высоты к радиусу, равным единице, для числа Прандтля  $Pr = 1$  и чисел Рэлея и Рейнольдса в интервалах  $0 \leq Ra \leq 30000$ ,  $0 \leq Re \leq 120$ . Для нахождения стационарных (и других) режимов конвекции использовался метод установления по времени, что крайне трудоемко и не позволяет рассчитывать неустойчивые стационарные режимы, которые, например, требуются для исследования спектральных задач теории гидродинамической устойчивости.

Далее предлагается метод непосредственного решения стационарной задачи — метод конечных элементов в сочетании с методом Ньютона, позволяющий эффективно рассчитывать стационарные режимы, как устойчивые, так и неустойчивые. В частности, такой метод позволил существенно увеличить интервал изменения числа Рэлея с 30 до 300 тысяч.

**1. Основные уравнения.** Уравнения, описывающие конвекцию Рэлея–Бенара–Кармана в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндр, вдоль оси которого действует сила тяжести, в предположении стационарности и вращательной симметрии, в безразмерных переменных имеют вид:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{v^2}{r} \mathbf{k}_r + \frac{uv}{r} \mathbf{k}_\varphi = -\nabla p - \frac{1}{Re} \text{rot rot } \mathbf{v} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \mathbf{k}_z, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_z + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Pr Re} \Delta \theta, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \mathbf{k}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{k}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

На верхней и нижней крышках цилиндра, которые вращаются с одинаковой по величине, но противоположной по направлению угловой скоростью  $\Omega$  ( $\Omega = 1$ ), заданы условия прилипания и температура, а на боковых стенках цилиндра — условия прилипания и отсутствия потока тепла

$$u = w = 0, \quad v = \mp \Omega r, \quad \theta = 0, \quad z = \mp h; \quad (2)$$

$$u = w_r = 0, \quad v = 0, \quad \theta_r = 0, \quad r = 0; \quad u = w = 0, \quad v = 0, \quad \theta_r = 0, \quad r = R.$$

Здесь  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  — скорость,  $p$  — давление,  $\theta$  — отклонение от равновесной температуры  $T^{(0)} = T_0(0,5 - z)$ ,  $T_0$  — температура нижней крышки, температура  $T = T^{(0)} + \theta$ ,  $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_\varphi, \mathbf{k}_z$  — орты цилиндрической системы координат,  $R, h$  — радиус и полувысота цилиндра; числа Рейнольдса  $Re$ , Прандтля  $Pr$  и Рэлея  $Ra$  заданы соотношениями

$$Re = \frac{\Omega_* R_*^2}{\mu_*}, \quad Ra = \frac{g_* \beta_* T_* R_*^3}{\delta_* \mu_*}, \quad Pr = \frac{\mu_*}{\delta_*},$$

где звездочкой отмечены размерные величины,  $g_*$  — ускорение силы тяжести,  $\Omega_*$ ,  $R_*$ ,  $T_*$  — величины угловой скорости, радиуса и разности температур.

Связь между размерными и безразмерными переменными имеет вид

$$\{\bar{v}, \bar{p}, \bar{T}, \bar{r}, \bar{z}\} = \{R_* \Omega_* \mathbf{v}, R_*^2 \Omega_*^2 \rho_* p, T_* T, R_* r, R_* z\}, \quad h_* = h R_*,$$

где  $R_*$  — радиус цилиндра,  $h_*$  — полувысота цилиндра,  $\rho_*$  — плотность жидкости.

**2. Метод решения.** Для решения нелинейной стационарной задачи (1), (2) использован метод конечных элементов в форме, которая обычно применяется для решения задачи Стокса. Умножая уравнения (1) соответственно на  $\mathbf{V} = (U, V, W)$ ,  $P$ ,  $\Theta$ , с учетом краевых условий (2) получим вариационную формулировку задачи

$$F(u, v, w, p, \theta) \equiv I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (3)$$

где

$$I_1 = \int_D (-r(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{V} + v^2 U - uvV) dr dz, \quad I_2 = \int_D (-P \operatorname{div} \mathbf{v} - \nabla p \cdot \mathbf{V} + w\Theta) dr dz,$$

$$I_3 = \int_D \left( \frac{1}{Re} \left( -r \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{uU + vV}{r} \right) - \frac{1}{Re} r \nabla \theta \cdot \nabla \Theta + \frac{Ra}{Pr Re^2} r \theta W \right) dr dz.$$

Вычисляя производную Фреше, получим

$$DF(u, v, w, p, \theta)(\delta u, \delta v, \delta w, \delta p, \delta \theta) \equiv DI_1 + DI_2 + DI_3, \quad (4)$$

$$DI_1 = \int_D (-r(\delta \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{V} + 2v\delta V U - (\delta uv + u\delta v)V) dr dz,$$

$$DI_2 = \int_D r(-P \operatorname{div} \delta \mathbf{v} - \nabla \delta p \cdot \mathbf{V} + \delta w \Theta) dr dz,$$

$$DI_3 = \int_D \left( \frac{1}{Re} \left( -r \nabla \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{\delta u U + \delta v V}{r} \right) - \frac{1}{Re} r \nabla \delta \theta \cdot \nabla \Theta + \frac{Ra}{Pr Re^2} r \delta \theta W \right) dr dz.$$

Для нахождения решения применяется метод Ньютона

$$DF(\mathbf{v}^k, p^k, \theta^k)(\delta \mathbf{v}, \delta p, \delta \theta) = F(\mathbf{v}^k, p^k, \theta^k), \quad (\mathbf{v}, p, \theta)^{k+1} = (\mathbf{v}, p, \theta)^k - (\delta \mathbf{v}, \delta p, \delta \theta).$$

Обратим внимание, что при решении задачи (3) не использовался стабилизирующий член вида  $pP$  и не осуществлялось преобразование члена  $P \operatorname{div} \mathbf{v}$  в  $\nabla P \cdot \mathbf{v}$  при помощи интегрирования по частям.

Для визуализации решения использовалась функция тока  $\psi = r\Psi$ , где

$$\Delta\Psi - \frac{1}{r^2}\Psi = u_z - w_r, \quad \Psi|_{\partial D} = 0.$$

**3. Результаты расчетов.** Решение задачи (3) осуществлялось при помощи пакета FreeFem++ [2] для параметров  $Re = 90$ ,  $Pr = 1$  и  $0 < Ra \leq 300000$ ,  $h = 0,5$ ,  $R = 1$ . Известно, что решение задачи (1), (2) обладает зеркальной симметрией  $(u, v, w, p, \theta)(r, z) = (u, v, -w, p, -\theta)(r, -z)$  и возможна бифуркация потери зеркальной симметрии. Для того, чтобы обеспечить при расчетах симметрию относительно  $z = 0$  применялась квадратная сетка  $30 \times 30$ , в которой каждый из квадратов делился на два треугольника (Union Jack сетка, см., например, [2]). Использование менее крупных сеток  $50 \times 50$  и  $100 \times 100$  практически не влияет на результаты расчетов. Функции  $v$ ,  $\theta$  аппроксимировались квадратичными конечными элементами, а функция  $p$  — линейными. Несимметричность решения относительно  $z = 0$  характеризовалась параметром  $S$

$$S = \int_{D_+} \Psi dr dz / \int_{D_-} \Psi dr dz, \quad D_{\pm} = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq \pm h\}.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 1. Симметричным решениям соответствует  $S = -1$ . Функция тока  $\psi(r, z)$  для некоторых значений  $Ra$  приведена на рис. 2.

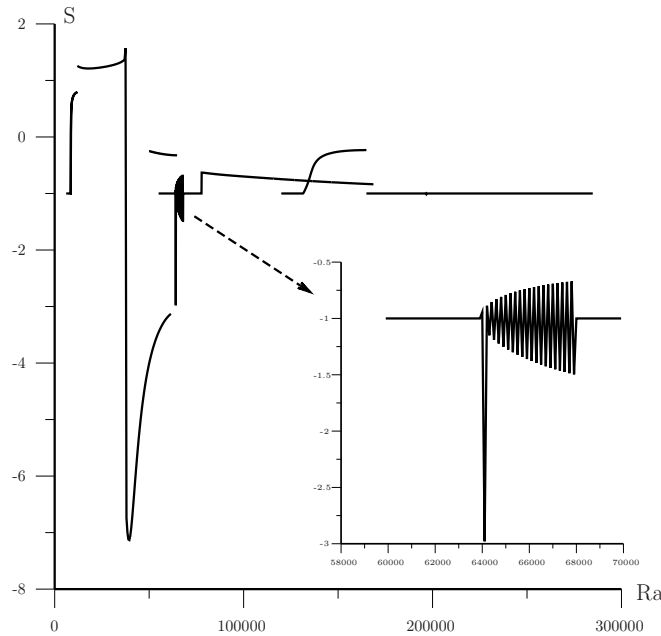


Рис. 1. Коэффициент несимметричности решения  $S = S(Ra)$ .

Точность расчетов контролировалась при помощи нормы

$$\|(\mathbf{v}, p, \theta)\|^2 = \int_D r (\mathbf{v}^2 + \theta^2 + (\nabla p)^2) dr dz.$$

Здесь использован  $\nabla p$ , а не  $p$  ввиду того, что в уравнениях присутствует лишь  $\nabla p$  и давление определяется с точностью до константы. Относительная точность расчетов не превышала  $10^{-9}$ .

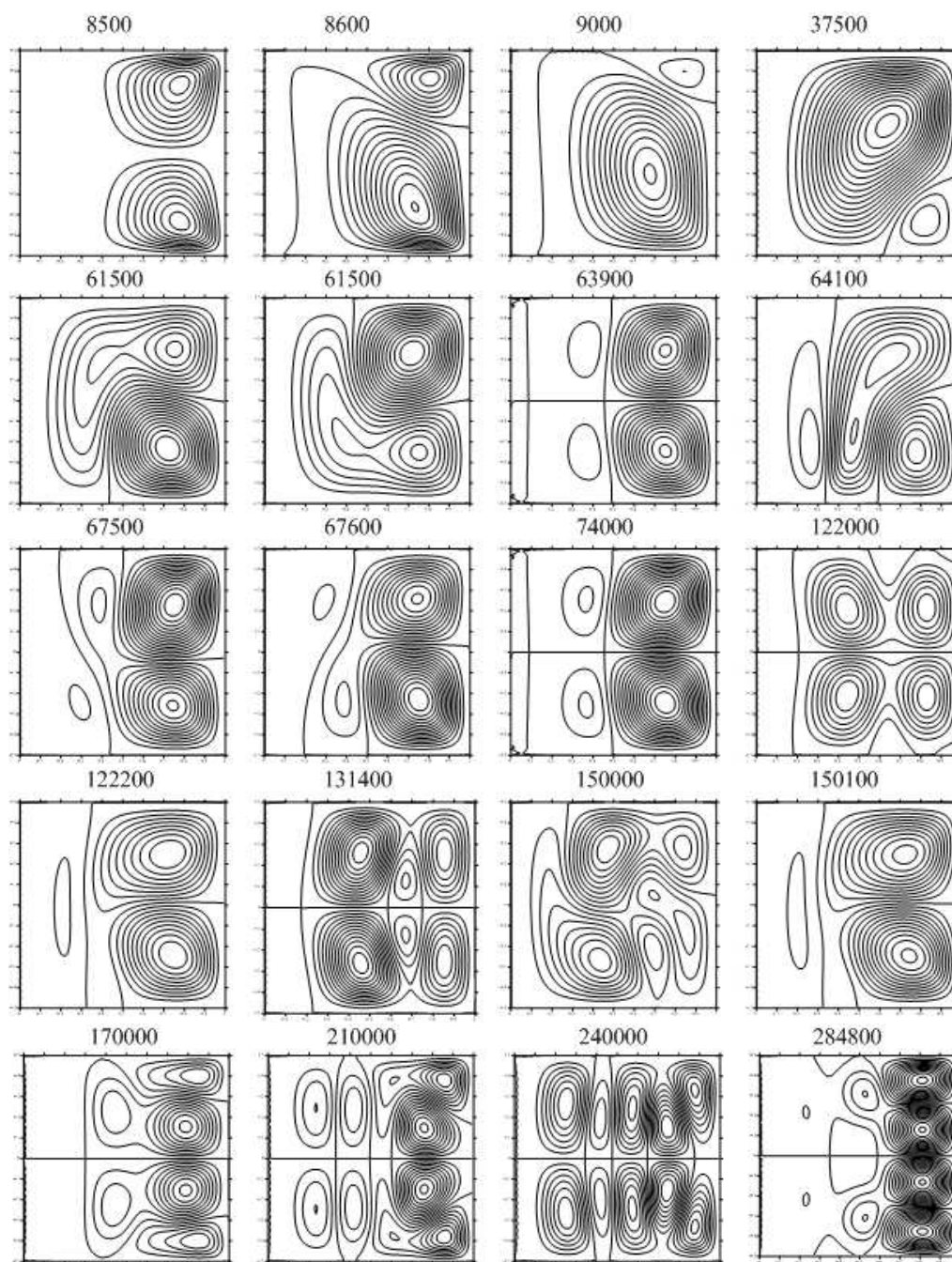


Рис. 2. Изолинии функции тока  $\psi = \psi(r, z)$  для различных значений  $Ra$ .

При проведении расчетов использовался следующий сценарий. Все параметры считались фиксированными за исключением  $Ra$ , который изменялся с шагом 100 от 0 до 300000. В качестве начального приближения в методе Ньютона выбиралось решение линейной задачи, т. е. в (3) полагалось  $I_1 = 0$ . Для поиска зеркально



несимметричных решений начальное приближение искажалось при помощи симметричного достаточно малого возмущения азимутальной скорости  $v$ , локализованного в пятне малого радиуса, расположенного в некоторой произвольной точке области. Это позволило найти как симметричные решения (устойчивые и неустойчивые), так и несимметричные решения (устойчивые). В частности, устойчивые симметричные решения не разрушались даже при несимметричных возмущениях.

На рис. 1 интервалу  $0 < Ra < 8500$  соответствуют устойчивые симметричные решения, подобные приведенному на рис. 2 для  $Ra = 8500$ . При  $Ra = 8600$  симметричное стационарное решение теряет устойчивость и возникают два зеркально несимметричных решения, см. рис. 2 при  $Ra = 8600$  и  $Ra = 9000$ . Число  $Ra \approx 8565$  является критическим числом первой потери устойчивости и хорошо согласуется с результатами работы [1]. При  $Ra = 63900$  существует как неустойчивое симметричное решение, так и пара зеркально несимметричных решений. Особенно интересна область  $64000 < Ra < 68000$ , в которой отчетливо можно проследить колебательную неустойчивость решения (см. рис. 2) при  $Ra = 67500$  и  $Ra = 67600$ .

В интервале с  $Ra \approx 67600$  до  $Ra \approx 165000$  существует как неустойчивые симметричные, так и несимметричные решения. Начиная с  $Ra \approx 165000$  до  $Ra \approx 300000$  несимметричных решений обнаружить не удалось, см. рис. 2. Интересно отметить, что структура симметричных решений на указанном интервале тем не менее претерпевает изменения, что особенно заметно в окрестности  $Ra \approx 284800$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты 14.740.11.0877, 14.A18.21.0873 и грантов РФФИ 10-05-00646, 10-01-00452.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Bordja L. et al.* Influence of counter-rotating von Karman flow on cylindrical Rayleigh-Benard convection // *Phys. Rev. E* 81, 036322-1–16 (2010).
- [2] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

**Zhukov M. Yu., Shiryaeva E. V.** *Calculation of stationary modes for the Rayleigh–Benard–Karman convection.* The method of finite elements and Newton’s method are used for calculation of stationary modes of the Rayleigh–Benard–Karman convection problem in thin cylinder whose upper and lower boundary disks are maintained at different temperature and rotate at equal and opposite angular velocities. The bifurcation curve of reflection-symmetric stability/instability depending on Rayleigh number is presented. The using method allowed to find both symmetric, and asymmetrical stationary modes.

# ИНДЕНТИРОВАНИЕ ПЛОСКОЙ МЕМБРАНЫ

**Звоникова О. Ю., Колесников А. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассматривается задача контактного взаимодействия тонкостенной высокоэластичной мембраны и абсолютно твёрдого тела. В осесимметричной постановке задача сводится к нелинейной краевой задаче, которая численно решается методом пристрелки. Для несжимаемого материала Бартенева–Хазановича построена форма деформированной мембраны, распределение усилий и контактного давления для различных параметров нагружения.

**Введение.** Высокоэластичные тонкие мембраны нашли широкое применение в различных областях техники, строительства, медицины, биологии. Ультратонкую резиновую мембрану, например, используют в микроэлектромеханических системах (МЭМС) для создания различных чувствительных элементов приборов и силовых элементов регуляторов. Это связано со специфическими свойствами мембран — малой жёсткостью, большими обратимыми деформациями и герметичностью. Исследованию равновесия тонкой круглой гиперупругой мембраны под действием жёсткого штампа посвящены работы [1–3].

В данной работе рассматривается задача о равновесии плоской круглой мембраны, закрепленной по краю, под действием сферического абсолютно гладкого твёрдого штампа. Предполагается, что деформация мембраны осесимметричная. Толщина мембраны мала, материал, из которого изготовлена мембрана, считаем изотропным, высокоэластичным, несжимаемым. Изгибной жёсткостью мембраны будем пренебрегать. Уравнения равновесия сформулируем в рамках точной нелинейной теории безмоментных оболочек типа Киргофа-Лява.

С помощью полубратного представления двумерная задача статики оболочки сведена к краевой задаче для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача решается численно методом пристрелки, на каждом шаге которого система интегрируется методом Рунге–Кутты.

При исследовании использована модель материала Бартенева–Хазановича. Построены формы деформируемой оболочки и распределение усилий для различных величин нагрузок. Получены графики зависимости прогиба мембраны от действующей силы. Дано сравнение напряжённо-деформируемого состояния мембраны в зависимости от формы штампа и его радиуса.

**1. Формулировка.** Пусть на круглую плоскую мембрану радиуса  $r_0$  постоянной толщины  $h$  давит шаровой абсолютно твёрдый штамп радиуса  $R_0$ . Постоянная сила  $Q$  приложена в центре к штампу параллельно оси  $Z$  таким образом, чтобы он перемещался поступательно. Будем искать равновесное состояние мембраны в предположении осесимметричности деформации.

Считаем, что штамп абсолютно гладкий, тогда действие штампа на мембрану можно моделировать как неравномерно распределённую нормальную нагрузку

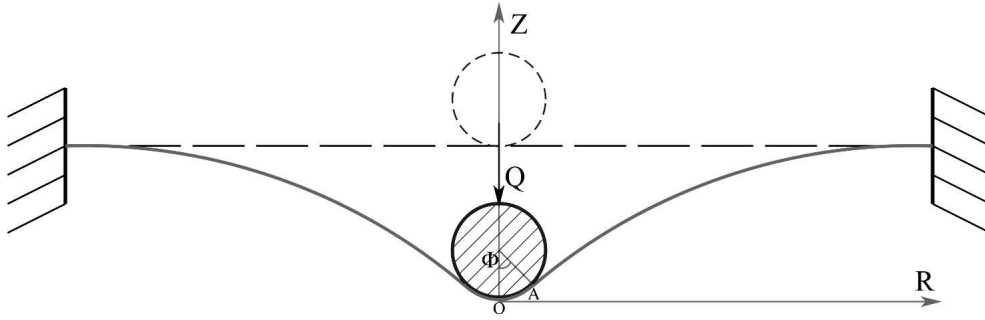


Рис. 1. Сечение мембраны.

$\xi(r)$ . Для безмоментной оболочки можно считать, что в области контакта мембрана прилегает к штампу без отрыва. Тогда в области контакта форма деформированной мембраны совпадает с формой штампа, но интенсивность нормальной нагрузки заранее неизвестна. Во второй области внешние нагрузки отсутствуют.

Учитывая все перечисленное выше, деформированную срединную поверхность мембраны можно задать с помощью соотношений:

$$\mathbf{R} = \begin{cases} R_0 \sin \Phi(r) \mathbf{e}_r + R_0 (1 - \cos \Phi(r)) \mathbf{e}_z - Z_0 \mathbf{e}_z, & r \in [0, r_k]; \\ R(r) \mathbf{e}_r + Z(r) \mathbf{e}_z, & r \in [r_k, r_0]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $Z_0$  — постоянная,  $r_k$  — граница области контакта штампа с поверхностью мембраны, а  $\Phi(r)$  — это угол, опирающийся на дугу  $OA$ , которая соответствует зоне контакта (рис. 1),  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  — базис цилиндрической системы координат.

Полуобратное представление (1) удовлетворяет условиям одномерной деформации [4]. Тогда двумерная задача статики оболочки может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [4]. В дальнейшем будем рассматривать модель несжимаемого высокоэластичного материала Бартенева–Хазановича с постоянной материала  $\mu$ . Уравнения равновесия в зоне контакта  $r \in [0, r_k]$  можно записать следующим образом

$$\Phi'' = \frac{-R_0^3 \Phi'^3 \sin^2 \Phi (1 - \cos \Phi) - 2r(r\Phi'^2 \cos \Phi - \Phi' \sin \Phi)}{2r \sin \Phi},$$

$$\xi = \frac{2\mu h (2r^2 - rR_0^3 \Phi'^2 \sin \Phi - R_0^3 \Phi' \sin^2 \Phi)}{R_0^5 \Phi'^2 \sin^2 \Phi}.$$

Для второй области  $r \in [r_k, r_0]$  уравнения равновесия можно представить в виде системы относительно кратностей удлинения  $\lambda_1, \lambda_2$  и угла наклона касательной  $\psi$  в виде

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{2r\lambda_2} ((\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 2\lambda_1) \cos \psi + \lambda_2 (2 - \lambda_2 \lambda_1^2)),$$

$$\lambda_2' = \frac{\lambda_1 \cos \psi - \lambda_2}{r}, \quad \psi' = -\sin \psi \frac{(\lambda_1 \lambda_2^2 - 1) \lambda_1}{(\lambda_1^2 \lambda_2 - 1) \lambda_2 r}.$$

Для функций  $\Phi(r)$  и её производной начальные условия можно записать в виде

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = \frac{C}{R_0}. \quad (2)$$

Здесь  $C$  — неизвестная постоянная.

Из условий непрерывности и гладкости решений имеем зависимости

$$\psi(r_k) = \Phi(r_k), \quad \lambda_1(r_k) = R_0 \Phi'(r_k), \quad \lambda_2(r_k) = \frac{R_0 \sin \Phi(r_k)}{r_k}.$$

Неизвестная постоянная  $C$  в (2) определяется из условия закрепления края мембраны  $R(r_0) = r_0$ , которое можно записать следующим образом

$$\lambda_2(r_0) = 1.$$

**2. Результаты.** Для численного анализа примем следующие значения параметров в системе СИ

$$\mu = 1, \quad r_0 = 1, \quad h = 0,01, \quad R_0 = 0,4 \text{ и } 0,8.$$

Введём в безразмерные прогиб в центре  $H^*$ , вдавливающую силу  $Q^*$ , усилия в мембране  $T^{11*}$  и  $T^{22*}$ , давление  $p^*$

$$H^* = \frac{H}{r_0}, \quad Q^* = \frac{Q}{\mu h r_0}, \quad T^{11*} = \frac{T^{11}}{\mu h}, \quad T^{22*} = \frac{T^{22}}{\mu h}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{\mu h}.$$

Далее символ  $*$  опущен.

На рис. 2 показана зависимость между прогибом мембраны в центре  $H$  и силой вдавливания для радиусов штампа  $R_0 = 0,4$  и  $0,8$ . Точки на кривых 1 ( $Q = 0,01$ ), 2 ( $Q = 0,23$ ) и 3 ( $Q = 1,44$ ) соответствуют номерам графиков, изображённым на рис. 3, 4, 5.

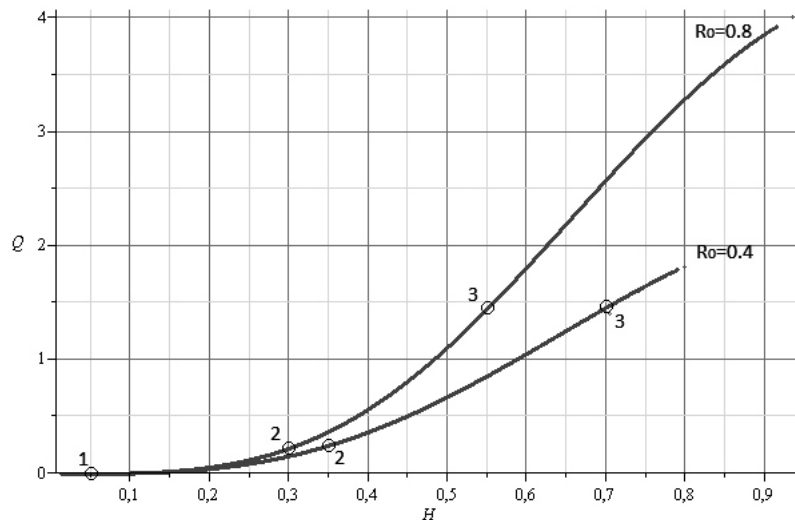


Рис. 2. Зависимость прогиба от силы.

На рис. 3, 4 и 5 представлены результаты расчётов при различных величинах нагрузки и размерах штампа. Линии 1 соответствуют значению  $Q = 0,01$ , 2 —  $Q = 0,23$ , 3 —  $Q = 1,44$ . Области контакта обозначены чёрным. Область вне

контакта — серым. Сплошная линия соответствует задаче с радиусом штампа  $R = 0,4$ , пунктирная  $R_0 = 0,8$ .

Форма сечения деформированной мембраны представлена на рис. 3. Распределение усилий в мембране показано на рис. 4.

На рис. 5 представлено распределение безразмерного давления мембраны на штамп для различных сил вдавливания. По оси абсцисс отложена лагранжева координата  $r$ , по оси ординат давление  $\xi$ . При увеличении силы вдавливания расширяется область контакта и растёт давление.

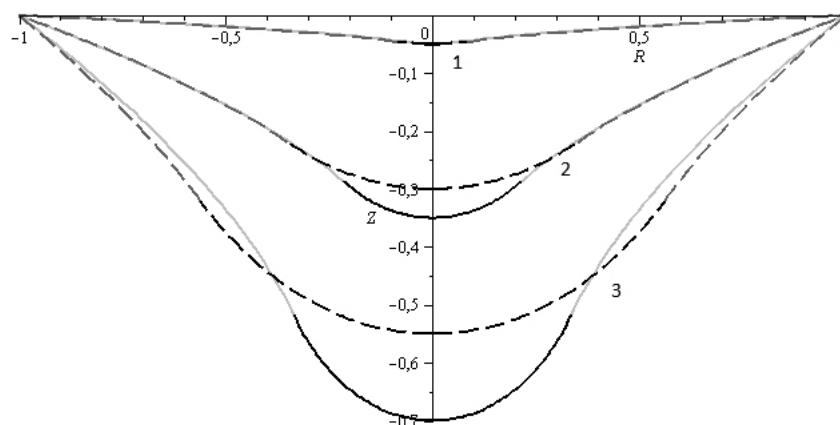


Рис. 3. Форма сечения деформированной мембраны.

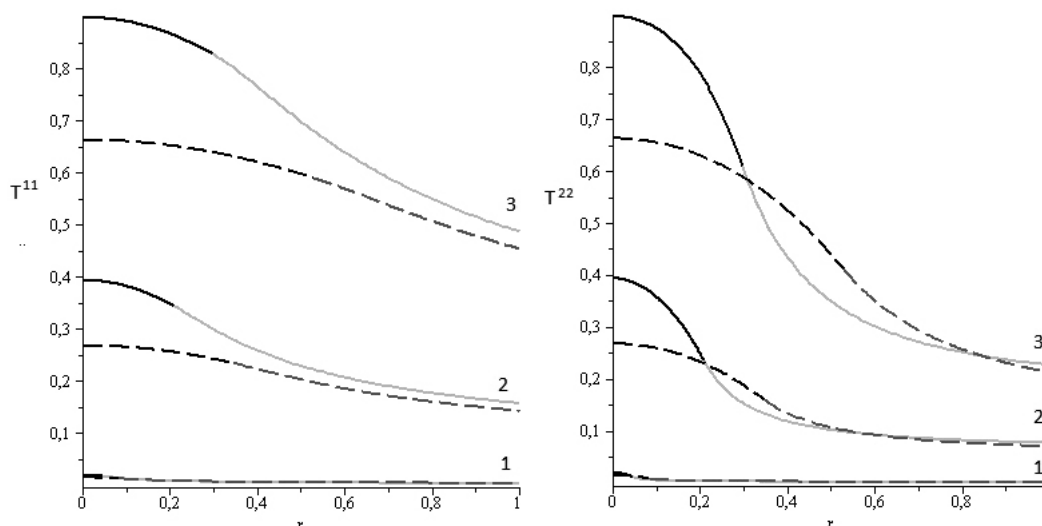


Рис. 4. Распределение усилий в мембране.

**Заключение.** В данной работе была рассмотрена осесимметричная деформация тонкой высокоэластичной мембраны, жёстко закреплённой по краю, под действием абсолютно гладкого твёрдого сферического штампа. Численный анализ проведён для модели материала Бартенева–Хазановича. Дано сравнение напряжённо деформированного состояния мембраны в зависимости от формы штампа

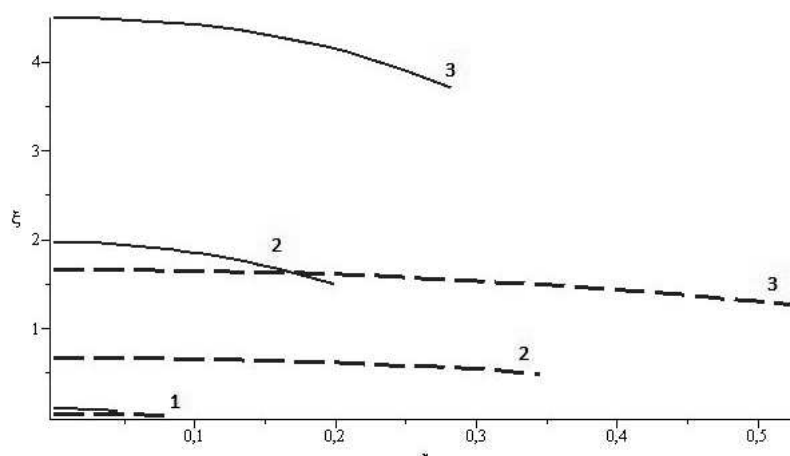


Рис. 5. Зависимость давления от области контакта.

и его геометрических размеров. Показано, что при малых размерах штампа различия в напряжённо-деформированном состоянии локализуются вблизи него. При увеличении размеров штампа различия в напряжениях и деформациях в мембране увеличиваются.

Исследование поддержано Президентом РФ (грант МК-439.2011.1), министерством образования и науки РФ (госконтракт П596) и РФФИ (гранты 11-08-01152-а, 12-01-31431-мол-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Selvadurai A. P. S.* Deflections of a rubber membrane // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. Pp. 1093–1119.
- [2] *Pearce S. P., King J. R., Holdsworth M. J.* Axisymmetric indentation of curved elastic membranes by a convex rigid indenter // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011. Vol. 46. Pp. 1128–1138.
- [3] *Ju B. F., Liu K.-K., Ling Sh.-F., Ng W. H.* A novel technique for characterizing elastic properties of thin biological membrane // *Mechanics of Materials*. 2002. Vol. 34. Pp. 749–754.
- [4] *Kolesnikov A. M., Zubov L. M.* Large bending deformations of a cylindrical membrane with internal pressure // *ZAMM*. 2009. Vol. 89. Pp. 288–305.

**Zvonikova O. Yu., Kolesnikov A. M.** *Indentation of flat membrane.* In paper the problem of contact interaction of a thin-walled hyperelastic membrane and a rigid body is considered. In the axisymmetric formulation the static problem reduces to the nonlinear boundary-value problem which is solved numerically by a shooting method. For incompressible Bartenev–Khazanovich material the deformed shape, the stresses and contact pressure are obtained for different load parameter.

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ВИНТОВЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Зеленина А. А., Зубов Л. М.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследовано влияние непрерывно распределенных прямолинейных винтовых дислокаций на напряженно-деформированное состояние нелинейно упругих цилиндрических стержней, испытывающих большие деформации. В случае кругового сечения получена явная формула, описывающая диаграмму растяжения стержня из любого изотропного несжимаемого материала при произвольном осесимметричном распределении винтовых дислокаций. Установлено, что в рамках модели неогуковского материала нелинейная задача о растяжении-сжатии стержня с дислокациями имеет простое решение не только для кругового, но и произвольного сечения при любом двумерном распределении винтовых дислокаций.

**1. Винтовые дислокации в круговом цилиндре.** Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругого тела с непрерывно распределенными дислокациями, состоит [1–4] из уравнений равновесия для тензора напряжений Пиолы  $\mathbf{D}$  при отсутствии массовых сил

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = dW(\mathbf{C})/d\mathbf{C} \quad (1)$$

и уравнений несовместности для тензора дисторсии (градиента деформации)  $\mathbf{C}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{C} = \alpha. \quad (2)$$

Здесь  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$  — операторы дивергенции и ротора в координатах отсчетной конфигурации упругого тела,  $\alpha$  — тензорное поле плотности дислокаций, которое считается заданным и удовлетворяет условию соленоидальности  $\operatorname{div}\alpha = 0$ ,  $W(\mathbf{C})$  — функция удельной энергии деформации, задающая свойства упругого материала.

Предположим, что в круговом цилиндре  $r_1 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq l$  тензор плотности дислокаций  $\alpha = \alpha_{sk} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_k$  в базисе  $\mathbf{i}_k$  декартовых координат  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $x_3 = z$  имеет только одну ненулевую компоненту  $\alpha_{33}(r)$ . Это соответствует радиально симметричному распределению прямолинейных винтовых дислокаций, оси которых параллельны оси цилиндра  $\mathbf{i}_3$ . Такое распределение дислокаций, очевидно, удовлетворяет требованию соленоидальности. Решение системы уравнений (1),(2) будем искать в следующем виде

$$\mathbf{C} = \frac{dR(r)}{dr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + h(r) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{i}_3 + \lambda \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (3)$$

$$\lambda = \text{const}, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi,$$

где  $R(r)$  — радиальная координата точек деформированного цилиндра,  $(\lambda - 1)$  — осевое удлинение цилиндра. В силу (3) тензорное уравнение несовместности сводится к одному скалярному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rh(r)) = \alpha_{33}(r) . \quad (4)$$

Мера деформации Коши  $\mathbf{G}$ , отвечающая дисторсии (3), записывается так

$$\mathbf{G} = \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \left( \frac{R^2}{r^2} + h^2 \right) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda h (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_\varphi) + \lambda^2 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 . \quad (5)$$

Из (3),(5) вытекает, что для изотропного упругого материала тензор напряжений Пиолы имеет представление

$$\mathbf{D} = D_{rr}(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + D_{\varphi\varphi}(r) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + D_{\varphi z}(r) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{i}_3 + D_{z\varphi}(r) \mathbf{i}_3 \mathbf{e}_\varphi + D_{zz}(r) \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 , \quad (6)$$

а уравнения равновесия (1) сводятся к одному скалярному уравнению

$$\frac{dD_{rr}}{dr} + \frac{D_{rr} - D_{\varphi\varphi}}{r} = 0 . \quad (7)$$

Таким образом, предположение (3) о характере деформации цилиндра сводит задачу о винтовых дислокациях к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (7) с неизвестными функциями  $R(r)$ ,  $h(r)$ . Уравнение (4) имеет следующее решение

$$h(r) = \frac{1}{r} \left( \int_{r_1}^r \alpha_{33}(\rho) \rho d\rho + \frac{b}{2\pi} \right) , \quad (8)$$

где  $b$  — длина вектора Бюргерса изолированной винтовой дислокации в полном цилиндре. В случае сплошного цилиндра в его центре должно выполняться условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} rh(r) = 0 ,$$

если отсутствует центральная сосредоточенная дислокация. В этом случае решение уравнения (4) имеет вид

$$h(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \alpha_{33}(\rho) \rho d\rho . \quad (9)$$

Граничные условия для уравнения равновесия (7) выражают отсутствие нагрузки на боковых поверхностях цилиндра

$$D_{rr}(r_1) = 0 , \quad D_{rr}(r_0) = 0 . \quad (10)$$

**2. Несжимаемый материал.** Если материал изотропен и несжимаем, то задача о растяжении-сжатии кругового цилиндра с распределенными винтовыми



дислокациями решается в квадратурах. В самом деле, теперь функция  $R(r)$  находится не из нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, а из условия несжимаемости

$$R \frac{dR}{dr} = \lambda^{-1} r$$

и выражается в виде  $R = \sqrt{R_1^2 + \lambda^{-1}(r^2 - r_1^2)}$ , где  $R_1$  — неизвестный внутренний радиус деформированного цилиндра.

Воспользуемся определяющим соотношением несжимаемого изотропного тела [5]

$$\mathbf{D} = (\varkappa_1 + I_1 \varkappa_2) \mathbf{C} - \varkappa_2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} - p \mathbf{C}^{-T}, \quad (11)$$

$$\varkappa_\alpha (I_1, I_2) = 2 \frac{\partial W (I_1, I_2)}{\partial I_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{G}; \quad I_2 = \text{tr} \mathbf{G}^{-1},$$

здесь  $p$  — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию,  $I_1, I_2$  — инварианты деформации. В силу (11) функция  $p(r)$ , а значит и все компоненты тензора  $\mathbf{D}$  определяются в квадратурах из уравнения (7). Постоянная интегрирования, а также постоянная  $R_1$  находятся из граничных условий (10).

Обратимся к случаю сплошного цилиндра, когда  $r_1 = R_1 = 0$ . Имеем

$$R(r) = \lambda^{-1/2} r, \quad I_1 = 2\lambda^{-1} + \lambda^2 + h^2(r), \quad I_2 = 2\lambda + \lambda^{-2} + \lambda^{-1} h^2(r). \quad (12)$$

На основании (6), (12) находим решение уравнения равновесия (7)

$$D_{rr}(r) = \lambda^{-1/2} \int_r^{r_0} \frac{h^2(\rho) \varkappa_2(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (13)$$

Остальные напряжения определяются из уравнения состояния (6). Представляет интерес исследовать влияние дислокаций на диаграмму растяжения цилиндрического стержня, т.е. зависимость  $P(\lambda)$  продольной силы от осевого удлинения. Методом работы [6] доказывается следующее энергетическое соотношение

$$P(\lambda) = \frac{d\Pi(\lambda)}{d\lambda}, \quad P(\lambda) = 2\pi \int_0^{r_0} D_{zz} r dr, \quad (14)$$

$$\Pi(\lambda) = 2\pi \int_0^{r_0} W [I_1(\lambda, h(r)), I_2(\lambda, h(r))] r dr.$$

На основании (11), (12), (14) получим явное выражение продольной силы для цилиндра из любого изотропного несжимаемого материала при произвольном осесимметричном распределении винтовых дислокаций

$$P(\lambda) = 2\pi \int_0^{r_0} [(\lambda - \lambda^{-1}) \varkappa_1(\lambda, h(r)) + (1 - \lambda^{-3}) \varkappa_2(\lambda, h(r))] r dr - \pi \lambda^{-1} \int_0^{r_0} \varkappa_2(\lambda, h(r)) h^2(r) r dr. \quad (15)$$

Из формулы (15), в частности вытекает, что в случае материала Муни [5], когда  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$  — положительные постоянные, наличие винтовых дислокаций уменьшает сопротивление стержня растяжению, но увеличивает сопротивление сжатию. Из соотношения (15) также видно, что продольная сила, необходимая для сохранения длины стержня из материала Муни ( $\lambda = 1$ ), является сжимающей. Последнее означает, что при отсутствии продольной силы дислокации обуславливают увеличение длины стержня. В случае неогуковского материала ( $\varkappa_1 = \mu = const$ ,  $\varkappa_2 = 0$ ) распределенные дислокации не влияют на диаграмму растяжения  $P(\lambda)$ .

**3. Растяжение стержня произвольного сечения с распределенными винтовыми дислокациями.** Ниже показано, что в рамках модели неогуковского материала нелинейная задача о растяжении-сжатии стержня с дислокациями имеет простое решение не только для круглого, но и произвольного сечения при любом двумерном распределении винтовых дислокаций. Тензорное поле дисторсии в данном случае ищется в виде

$$\mathbf{C}(x_1, x_2) = \lambda^{-1/2} (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) + \mathbf{f}(x_1, x_2) \mathbf{i}_3 + \lambda \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (16)$$

где  $\mathbf{f} = f_1 \mathbf{i}_1 + f_2 \mathbf{i}_2$  — двумерное векторное поле. Уравнение несовместности (2) приводится к виду

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = \alpha_{33}(x_1, x_2), \quad \mathbf{e} = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}. \quad (17)$$

Здесь  $\nabla$  — двумерный набла-оператор,  $\mathbf{E}$  — трехмерный единичный тензор,  $\mathbf{e}$  — дискриминантный тензор. Исходим из уравнения состояния неогуковского материала [5]

$$\mathbf{D} = \mu \mathbf{C} - p \mathbf{C}^{-T},$$

где  $\mu$  — модуль сдвига. С учетом уравнений равновесия (1) и граничных условий на боковой поверхности стержня  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к границе  $\partial\sigma$  поперечного сечения  $\sigma$ , получим, что  $p = const = \lambda^{-1} \mu$ , вектор  $\mathbf{f}$  подчиняется уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0,$$

и условию

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = 0,$$

на  $\partial\sigma$ , а тензор напряжений Пиолы имеет вид

$$\mathbf{D} = \mu (\mathbf{f} \mathbf{i}_3 + \lambda^{-3/2} \mathbf{i}_3 \mathbf{f}) + \mu (\lambda - \lambda^{-2}) \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \quad (18)$$

Требование соленоидальности вектора  $\mathbf{f}$  будет выполнено, если положить

$$\mathbf{f} = \mathbf{e} \cdot \nabla \gamma.$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (17), приходим к уравнению Пуассона для функции  $\gamma(x_1, x_2)$

$$\nabla^2 \gamma = -\alpha_{33}(x_1, x_2), \quad (19)$$

с граничным условием  $\partial\gamma/\partial s = 0$  на  $\partial\sigma$ . В случае односвязной области  $\sigma$  последнее условие можно заменить без ограничения общности на следующее:  $\gamma = 0$  на  $\partial\sigma$ . Таким образом, задача о растяжении стержня с дислокациями при больших деформациях сведена к плоской задаче Дирихле для уравнения Пуассона.

В заключение заметим, что задача об осесимметричном распределении винтовых дислокаций в круговом цилиндре из неогуковского материала без учета осевого растяжения-сжатия решена другим методом в [7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00038) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965.
- [2] Zubov L. M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin: Springer, 1997. 205 p.
- [3] Вакуленко А. А. Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. Сер. «Механика деформируемого твердого тела». М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 3–54.
- [4] Зеленина А. А., Zubov Л. М. Изгиб и кручение нелинейно-упругих тел с непрерывно распределенными дислокациями // Вестник Южного научного центра РАН. 2009. Т. 5. № 4. С. 15–22.
- [5] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
- [6] Zubov Л. М., Губа А. В. Нелинейная теория кручения призматических упругих тел, содержащих винтовые дислокации // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. С. 212–222.
- [7] Yavari A., Goriely A. Riemann-Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // Arch. Rational Mech. Anal. 2012. V 205. Pp. 59–118.

**Zelenina A. A., Zubov L. M.** *Nonlinear effects at tension-compression of cylindrical bodies with distributed screw dislocations.* Influence of continuously distributed linear screw dislocations on nonlinear elastic cylindrical bar under large deformations stress-deformed state is investigated. In the case of circular bar cross-section the explicit formula described diagram of any isotropic incompressible material tension by arbitrary axially symmetric distributed screw dislocations is obtained.

# ВТОРИЧНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕРМОВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

**Зеньковская С. М., Прозоров О. А.**  
*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается нелинейная задача о возникновении конвекции в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, ограниченном твердыми стенками, при действии высокочастотной вибрации малой амплитуды и произвольного направления.

Анализируются осредненные уравнения, их равновесный режим, его устойчивость. Критические значения числа Рэлея находятся из решения спектральной задачи, решение которой находится аналитически и с помощью метода стрельбы. Построены зависимости критических чисел от волнового числа при различных значениях углов и амплитуд вибрации.

К нелинейной осредненной задаче применяется метод Ляпунова–Шмидта. Численно изучены вторичные течения, возникающие в малой окрестности критического значения числа Рэлея. Произведен расчет амплитуд вторичных режимов, функций тока и температуры при различных направлениях и скорости вибрации.

**Постановка задачи.** Слой вязкой несжимаемой жидкости совершает колебания вдоль вектора  $\bar{s} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$  по закону  $\frac{a}{\omega} f(\omega t)$ , где  $f(\tau)$  —  $2\pi$ -периодическая функция быстрого времени  $\tau = \omega t$ , имеющая нулевое среднее. В системе координат, жестко связанной со слоем, уравнения конвекции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{v}', \nabla) \bar{v}' &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \bar{v}' - (\bar{g} - \bar{w}_e) \beta T', \\ \operatorname{div} \bar{v}' &= 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial t} + (\bar{v}', \nabla T') = \chi \Delta T', \\ \bar{w}_e &= a \omega f''(\tau) \cdot \bar{s}, \quad \bar{g} = -g \cdot \bar{k}, \quad \bar{k} = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (1)$$

На твердой границе  $z = \pm h/2$  краевые условия возьмем в виде  $v' = 0$ ,  $T' = -Az$ .

Рассмотрим случай больших частот  $\omega \gg 1$  и малых амплитуд  $a/\omega$  вибрации, при этом амплитуда скорости  $a = O(1)$  — конечна. Применяя метод осреднения [1], и переходя к безразмерным переменным, вводя масштабы длины, времени, скорости, температуры, давления:  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $\nu/h$ ,  $Ah$ ,  $\rho_0 \nu^2/h^2$ , соответственно, запишем задачу в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla) \bar{v} &= -\nabla q + \Delta \bar{v} + G_r T \bar{k} + G_v^2 T(\bar{s}, \nabla) \nabla F, \\ \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla T) = \frac{1}{P_r} \Delta T, \quad \bar{w} + \nabla F = T \cdot \bar{s}, \quad \operatorname{div} \bar{w} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$z = \pm 1/2: \quad \bar{v} = 0, \quad T = -z, \quad w_n = 0. \quad (3)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры  $G_r = \frac{\beta g A h^4}{\nu^2}$ ,  $G_v = \frac{\beta^2 a^2 A^2 h^4}{\nu^2}$ ,  $P_r = \frac{\nu}{\chi}$  — числа Грасхофа  $G_r$  и Прандтля  $P_r$ , а также вибрационный параметр  $G_v$ .

Если  $A > 0$ , то это соответствует подогреву слоя снизу, а при  $A < 0$  — нагреву сверху. Заметим, что число  $G_v$  не зависит от знака градиента температуры, а также не зависит от силы тяжести и тем самым характеризует конвекцию в невесомости.

В работе [2] методом Ляпунова-Шмидта строится решение нелинейной задачи о возникновении вибрационной конвекции в условиях невесомости. В данном докладе рассматривается более общий случай: невесомость не предполагается.

Равновесное решение задачи (2), (3) имеет вид

$$\bar{v}_0 = 0, \quad T_0 = -z, \quad \bar{w}_0 = (-z \cos \varphi, 0, 0), \quad F_0 = -\frac{z^2}{2} \sin \varphi + \text{const}. \quad (4)$$

**Вторичные режимы.** Вторичное решение будем искать в виде  $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{u}$ ,  $T = T_0 + \theta$ ,  $\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1$ . Далее будем рассматривать двумерные возмущения, переходя к функциям тока  $\bar{u} = (\frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial \psi}{\partial x})$ ,  $\bar{w}_1 = (\frac{\partial F}{\partial z}, -\frac{\partial F}{\partial x})$ , получим систему

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \Delta^2 \psi + R \frac{\partial T}{\partial x} + \mu \left( \cos^2 \varphi \frac{\partial T}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \cos \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{P_r} K(\psi, \Delta \psi) + \mu \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} K(F, T) - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} K(F, T) + K(F, \Delta F) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$P_r \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \frac{\partial \psi}{\partial x} + K(\psi, T) = 0, \quad \Delta F + \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial x} - \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$z = \pm 1/2 : \psi = T = \frac{\partial \psi}{\partial z} = F = 0. \quad (6)$$

Здесь  $R = G_r \cdot P_r$ ,  $\mu = G_v \cdot P_r$  — числа Рэлея, оператор  $K(u, v) = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$ . Задача (5), (6) характеризуется четырьмя параметрами  $R$ ,  $P_r$ ,  $\mu$ , угол  $\varphi$ . Нас интересует поведение решения этой задачи в зависимости от этих параметров. В случае  $\mu = 0$  эта задача изучалась в ряде работ [3]. Нас будет интересовать влияние параметров вибрации  $\mu$  и  $\varphi$  на вторичные режимы. Запишем систему (5) в операторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} C \bar{u} = A \bar{u} + B(\bar{u}, \bar{u}), \quad \bar{u} = (\psi, T, F). \quad (7)$$

Линейные операторы  $C$  и  $A$  и нелинейный оператор  $B$  задаются формулами

$$\begin{aligned} C \bar{u} &= \begin{pmatrix} \Delta \psi \\ P_r T \\ 0 \end{pmatrix}, \\ A \bar{u} &= \begin{pmatrix} -\Delta^2 \psi + R \frac{\partial T}{\partial x} + \mu \left( \cos^2 \varphi \frac{\partial T}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \cos \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right) \\ -\Delta T + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \Delta F + \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial x} - \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$B(\bar{u}_m, \bar{u}_j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_r} K(\psi_m, \Delta \psi_j) \\ \mu \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} K(F_m, T_j) - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} K(F_m, T_j) + K(F_m, \Delta F_j) \right) \\ K(\psi_m, T_j) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

**Линейная задача.** Соответствующая линейная задача имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} C\bar{u} = A\bar{u}. \quad (10)$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$(\psi, T, F) = \exp(\lambda t + i\alpha x) (\psi(z), T(z), F(z)).$$

Для амплитуд нормальных возмущений имеем задачу

$$\begin{aligned} \lambda L\psi - L^3\psi + i\alpha R\psi + \mu(i\alpha \cos^2 \varphi T - \alpha^2 \sin \varphi F - i\alpha \cos \varphi DF) &= 0, \\ \lambda P_r T - LT + i\alpha\psi &= 0, \quad LF + i\alpha \sin \varphi T - \cos \varphi DT = 0, \\ \psi = T = F = D\psi = 0, \quad z = \pm 1/2, \quad D \equiv d/dz, L \equiv D^2 - \alpha^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Для амплитуд нормальных возмущений сопряженной системы  $\psi^c(z)$ ,  $T^c(z)$ ,  $F^c(z)$  получим задачу

$$\begin{aligned} \lambda^c L\psi^c - L^2\psi^c - i\alpha T^c &= 0, \quad LF^c - \mu\alpha^2 \sin \varphi \psi^c - i\mu\alpha \cos \varphi D\psi^c = 0, \\ \lambda^c P_r T^c - LT^c - i\alpha(R + \mu \cos^2 \varphi)\psi^c - i\alpha \sin \varphi F^c + \cos \varphi DF^c &= 0, \\ z = \pm 1/2 : \psi^c = T^c = F^c = D\psi^c &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

**Нелинейная задача.** Пусть линейная задача (11) имеет стационарное решение  $(\psi_0, T_0, F_0)$  при значениях параметров  $R_*$ ,  $\mu_*$ ,  $P_{n*}$ ,  $\alpha_*$ ,  $\varphi_*$ . Будем искать стационарное  $2\pi/\alpha$ -периодическое по  $x$  решение нелинейной задачи в малой окрестности параметра  $R_*$ , так что  $R = R_* + \delta\varepsilon^2$ , при этом  $\mu = R^2 r^2 = \mu_* + 2\varepsilon^2 \frac{\mu_*}{R_*} + O(\varepsilon^4)$ .

Подставляя эти разложения в нелинейную систему (5), выпишем главные члены. В операторной форме эта нелинейная система имеет вид

$$A_* \bar{v} = -\varepsilon^2 B \bar{v} - \bar{L}(\bar{v}, \bar{v}) - \varepsilon^2 L_1(\bar{v}, \bar{v}), \quad (13)$$

где  $\bar{v} = (\psi, T, F)$  и оператор  $A_*$  задается формулой (14) при  $R = R_*$ ,  $\mu = \mu_*$ , операторы  $B$ ,  $L$  и  $L_1$  действуют по правилу

$$B\bar{v} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} + 2R_* r^2 \left( \cos^2 \varphi \frac{\partial T}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \cos \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right), \quad 0, \quad 0 \right)^T, \quad (14)$$

$$L(\bar{v}, \bar{v}) = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{P_r} K(\psi, \Delta\psi) + \mu_* \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} K(F, T) - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} K(F, T) + K(F, \Delta F) \right) \\ K(\psi, T) \\ 0 \end{array} \right), \quad (15)$$

$$L_1(\bar{v}, \bar{v}) = \left( 2R_* r^2 \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} K(F, T) - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} K(F, T) + K(F, \Delta F) \right) \quad 0, \quad 0 \right)^T. \quad (16)$$

Будем считать, что  $R_*$  — простое собственное значение линейной задачи. Решение  $\bar{v} = (\psi, T, F)$  нелинейной задачи будем искать в виде рядов Ляпунова-Шмидта

$\bar{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \varepsilon^n$ . После подстановки этих рядов в уравнение (13), получим

$$\frac{\partial C\bar{v}_n}{\partial t} = A_* \bar{v}_n + B\bar{v}_{n-2} + \sum_{m+s=n} L(\bar{v}_m, \bar{v}_s) + \sum_{m+s=n-2} L_1(\bar{v}_m, \bar{v}_s). \quad (17)$$

Вещественный вектор  $\bar{v}_n$  представим в виде  $\bar{v}_n = \bar{u}_n + \bar{u}_n^*$ , тогда для стационарного решения получается задача

$$A_* \bar{u}_n = -B \bar{u}_{n-2} - \sum_{m+s=n} (L(\bar{u}_m, \bar{u}_s) + L(\bar{u}_m, \bar{u}_s^*)) - \sum_{m+s=n-2} (L_1(\bar{u}_m, \bar{u}_s) + L_1(\bar{u}_m, \bar{u}_s^*)). \quad (18)$$

Выпишем первые четыре уравнения, соответствующие  $n = 1, 2, 3, 4$ :

$$A_* \bar{u}_1 = 0, \quad (19)$$

$$A_* \bar{u}_2 = -L(\bar{u}_1, \bar{u}_1) - L(\bar{u}_1, \bar{u}_1^*) \equiv F_2, \quad (20)$$

$$A_* \bar{u}_3 = -B \bar{u}_1 - (L^0(\bar{u}_1, \bar{u}_2) + L(\bar{u}_1, \bar{u}_2^*) + L(\bar{u}_2, \bar{u}_1^*)) \equiv F_3, \quad (21)$$

$$A_* \bar{u}_4 = -B \bar{u}_2 - (L^0(\bar{u}_1, \bar{u}_3) + L(\bar{u}_1, \bar{u}_3^*) + L(\bar{u}_3, \bar{u}_1^*) + L(\bar{u}_2, \bar{u}_2) + L(\bar{u}_2, \bar{u}_2^*) + L_1(\bar{u}_1, \bar{u}_1) + L_1(\bar{u}_1, \bar{u}_1^*)) \equiv F_4. \quad (22)$$

Задача (19) имеет ненулевое решение  $\bar{u}_1 = \beta_1 \bar{u}_0$ , где  $\bar{u}_0 = (\psi_0(z), T_0(z), F_0(z)) e^{i\alpha x}$  — решение линейной задачи (11), а  $\beta_1$  — пока неизвестная амплитуда. Задачу (20) запишем в виде

$$A_* \bar{u}_2 = -\beta_1^2 (L(\bar{u}_0, \bar{u}_0) + L(\bar{u}_0, \bar{u}_0^*)) \equiv \bar{F}_2. \quad (23)$$

Вектор  $\bar{F}_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= -\beta_1^2 (e^{2i\alpha x} \bar{F}_2^1 + \bar{F}_2^0), \quad \bar{F}_2^1 = [\bar{F}_{21}^1 i\alpha, \bar{F}_{22}^1 i\alpha, 0], \\ F_{21}^1 &= P_r^{-1} (D\psi_0 \cdot D^2\psi_0 - D^3\psi_0 \cdot \psi_0) + \mu_* [2i\alpha \sin \varphi (DF_0 \cdot T_0 - DT_0 \cdot F_0) - \\ &\quad - \cos \varphi (D^2F_0 \cdot T_0 - D^2T_0 \cdot F_0) + (DF_0 \cdot D^2F_0 - D^3F_0 \cdot F_0)], \\ F_{22}^1 &= D\psi_0 \cdot T_0 - \psi_0 \cdot DT_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Второй вектор  $\bar{F}_2^0 = L(u_0, u_0^*) = [i\alpha F_{21}^0, i\alpha F_{22}^0, 0]$  имеет две компоненты:

$$F_{21}^0 = -P_r^{-1} D(\psi_0 (D^2\psi_0^* - \alpha^2\psi_0^*) + \mu_* [-D(F_0 (D^2F_0^* - \alpha^2F_0^*)) + \cos \varphi (D^2F_0 \cdot T_0^* + 2DF_0 \cdot DT_0^* + F_0 \cdot D^2F_0^*)]), \quad F_{22}^0 = -D(\psi_0 \cdot T_0^*). \quad (25)$$

Учитывая, что решение сопряженной задачи (12) имеет вид  $\bar{u}_0^c(x, z) = e^{i\alpha x} \bar{u}_0^c(z)$ , заключаем что задача для  $\bar{u}_2(x, z)$  всегда разрешима, и ее решение будем искать в виде  $\bar{u}_2(x, z) = \beta_2 \bar{u}_0(x, z) + \beta_1^2 (e^{2i\alpha x} \bar{w}_{21}(z) + \bar{w}_{20}(z))$ , где  $\beta_2$  — также неизвестная константа. Для векторов  $\bar{w}_{21}(z)$  и  $\bar{w}_{20}(z)$  получим линейные неоднородные задачи

$$A_* (\bar{w}_{21}(z) e^{2i\alpha x}) = e^{2i\alpha x} \bar{F}_2^1(z), \quad A_* (\bar{w}_{20}(z)) = \bar{F}_2^0(z). \quad (26)$$

Где  $w_{21} = (\psi_{21}(z), T_{21}(z), F_{21}(z))$ , то для неизвестных функций получаем систему

$$\begin{aligned} -(D^2 - 4\alpha^2)\psi_{21} + 2i\alpha R_* T_{21} + \mu(-2i\alpha \cos^2 \varphi T_{21} - 4\alpha^2 \sin \varphi F_{21} - 2i\alpha \cos \varphi DF_{21}) &= F_{21}^1, \\ -(D^2 - 4\alpha^2)T_{21} + 2i\alpha\psi_{21} &= F_{21}^2, \quad (D^2 - 4\alpha^2)F_{21} + 2i\alpha \sin \varphi T_{21} - \cos \varphi DF_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

с краевыми условиями  $z = \pm 1/2$ :  $\psi_{21} = T_{21} = F_{21} = D\psi_{21} = 0$ .

Для вектора  $\bar{w}_{20}(z) = (\psi_{20}(z), T_{20}(z), F_{20}(z))$  имеем задачу

$$\begin{aligned} -D^4\psi_{20} &= F_{21}^0, \quad D^2T_{20} = F_{22}^0, \quad D^2F_{20} - \cos \varphi DT_{20} = 0, \\ z = \pm 1/2 : \quad \psi_{20} &= T_{20} = F_{20} = D\psi_{20} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Правые части в (27), (28) даются формулами (25) и (26). Теперь обратимся к уравнению

$$A_* \bar{u}_3 = -Bu_1 - L(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - L(\bar{u}_1, \bar{u}_2^*) - L(\bar{u}_2, \bar{u}_1) - L(\bar{u}_2, \bar{u}_1^*) \equiv \bar{F}_3. \quad (29)$$

Вернемся к вещественной форме решений, для векторов  $\bar{v}_n = \bar{u}_n + \bar{u}_n^*$ , получим уравнения

$$A_* \bar{v}_1 = 0, \quad (30)$$

$$A_* \bar{v}_2 = \bar{F}_2 + \bar{F}_2^*, \quad (31)$$

$$A_* \bar{v}_3 = \bar{F}_3 + \bar{F}_3^*, \quad (32)$$

с соответствующими краевыми условиями. Известно, что условием разрешимости уравнений (31) и (32) является ортогональность правой части вектору  $\bar{v}_0^c$ . Из (24) следует, что задача (31) всегда разрешима, а задача (32) разрешима при выполнении равенства

$$(\bar{F}_3 + \bar{F}_3^*, \bar{u}_0^c + \bar{u}_0^{c*}) = 0. \quad (33)$$

После подстановки найденных решений, получим формулу для  $\beta_1$

$$\beta_1^2 = - \frac{(\bar{B}_0(z), \bar{u}_0^{c*}) + (\bar{B}_0^*(z), \bar{u}_0^c)}{(\bar{R}_3 + \bar{R}_5 + \bar{R}_7 + \bar{R}_8, \bar{u}_0^{c*}) + (\bar{R}_3^* + \bar{R}_5^* + \bar{R}_7^* + \bar{R}_8^*, \bar{u}_0^c)}. \quad (34)$$

Для вычислений по этой формуле нужно знать решения  $\bar{u}_0(z)$ ,  $\bar{u}_0^c$ , а также векторы  $\bar{w}_{21}(z)$  и  $\bar{w}_{20}(z)$ , которые являются решениями задач (27) и (28). Предполагается провести дальнейшие вычисления и анализ влияния параметров задачи на возникающие вторичные режимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00582-а).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновении конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
- [2] Зеньковская С. М., Овчинникова С. Н. Термовибрационная конвекция в слое жидкости при невесомости или пониженной гравитации // ПМТФ. 1991. № 2. С. 84–90.
- [3] Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости // ПММ. 1963. Т. 27. № 5. С. 779–783.

**Zenkovskaya S. M., Prozorov O. A.** *Secondary flows in vibrational convection problem in a layer.* Onset of vibrational convection in a layer of fluid with rigid boundaries is studied. Neutral stability curves of vibration amplitude versus wave number are calculated. Rayleigh number or vibration parameter is fixed. Nonlinear amplitude equations are derived with the use of Lyapunov–Schmidt method.



# РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ВТУЛКИ ТОРМОЗНОЙ РЫЧАЖНОЙ ПЕРЕДАЧИ

**Иваночкин П. Г.\* , Блажеев В. В.\*\***

*\* Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

*\*\* Ростовский государственный университет путей сообщения*

Предложен расчетно-экспериментальный метод расчета долговечности втулки тормозной рычажной передачи локомотива, основанный на решении износоконтактной задачи о взаимодействии вала и втулки с покрытием. На внутреннюю поверхность стальной втулки нанесено металлополимерное покрытие. Покрытие имеет двухслойную структуру - металлический силовой каркас (подложка) и антифрикционный слой. При расчете используется уравнение изнашивания, полученное в результате лабораторных трибологических исследований, а также экспериментально определенное распределение температуры на поверхности втулки. Расчет основывается на задании предельно допустимого радиального износа втулки или допустимого смещения центра вала в направлении действия нагрузки, при этом средняя интенсивность изнашивания определяется из полученного уравнения изнашивания. Распределение контактного давления и величина зоны контакта определяются из полученного ранее решения термоупругой износоконтактной задачи для двухслойной втулки.

Для равномерного распределения усилий между тормозными колодками и передачи усилий от поршня тормозного цилиндра к колесу локомотива предназначена тормозная рычажная передача (ТРП). Обследование технического состояния тормозного оборудования [1] выявило ряд существенных недостатков, в том числе превышение величины зазоров в шарнирных соединениях ТРП, обусловленное чрезмерным износом втулок.

С целью повышения надежности и долговечности рассматриваемого узла трения было предложено использование втулок многослойной конструкции — на внутреннюю поверхность втулки из стали 45 наносится металлополимерное наномодифицированное антифрикционное покрытие. Покрытие имеет двухслойную структуру — силовой каркас (подложка) и антифрикционный слой и наносится методом электроискрового легирования. Для нанесения в качестве упрочняющей подложки (каркаса) использовались электроды из материала Сталь 65Г, а в качестве антифрикционного материала — графитофторопласты.

Многочисленные исследования процессов в узлах трения, показывают, что параметры их эксплуатации во время работы изменяются взаимообусловлено. Это приводит к необходимости, при определении долговечности узлов трения, учитывать целый комплекс различных факторов и явлений, происходящих при их работе [2].

Для оценки ресурса двухслойной втулки тормозной рычажной передачи была использована следующая расчетно-экспериментальная модель, основанная на решении износоконтактной задачи. В результате проведенных лабораторных трибологических испытаний было получено уравнение, определяющее зависимость

интенсивности изнашивания от давления и скорости скольжения. Для этого использовался статистический метод планирования многофакторного эксперимента. В качестве функции отклика выбрана интенсивность изнашивания, а в качестве варьируемых параметров — контактное давление  $q$  и скорость относительного скольжения  $V$ . На основании проведенных исследований для моделирования интенсивности изнашивания было использовано линейное уравнение регрессии вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad y = \ln J; \quad x_1 = \ln \frac{q}{G_1}, \quad x_2 = \ln \frac{V}{V_0}, \quad x_3 = \ln \frac{T}{T_0},$$

где  $G_1 = 0.54$  ГПа — модуль сдвига покрытия;  $V_0 = 0,1$  м/с — характерное значение скорости скольжения,  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  — начальная температура. Проведенное моделирование после вычислений позволило представить интенсивность изнашивания исследуемого двухслойного подшипника в виде формулы:

$$J = 0,17 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1,23} \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1,63} \left(\frac{q}{G_1}\right)^{1,44}. \quad (1)$$

Используя коэффициенты полученного уравнения, по методике [3,4] был проведен расчет долговечности втулки подшипника, включающей в себя исследованные материалы.

Ресурс работы подшипника определялся по формуле

$$t = \frac{[h]}{\bar{I}_h s_1 n}, \quad (2)$$

где  $t$  — ресурс работы подшипника (долговечность);  $[h]$  — предельно допустимый радиальный износ втулки или допустимое смещение центра вала в направлении действия нагрузки;  $\bar{I}_h$  — среднее значение интенсивности изнашивания материала втулки в условиях работы подшипника;  $s_1$  — путь трения скольжения втулки за один оборот подвижного элемента;  $n$  — частота вращения.

Для определения  $\bar{I}_h$  использовалось выражение (1), полученное в результате эксперимента.

Среднее максимальное контактное давление за период эксплуатации подшипника можно представить в виде:

$$\bar{q} = \frac{1}{2} [q(0,0) + q(0,t)].$$

Представим давление в зоне контакта в форме [4]:

$$q(\theta, 0) = M_0 + M_1 \cos \theta, \quad (3)$$

$$M_0 = (D_0 - \Delta) D^{-1}, \quad M_1 = (D_1 + \Delta + \delta) D^{-1},$$

$$D = (s_1 + s_2)(s_1 s_2)^{-1} - \lambda_2(\alpha_2)^{-1}(\gamma_1 + \gamma_2)\mu_1, \quad s_i = 2G_i(1 - \nu_i)(1 - 2\nu_i)^{-1}(h_i)^{-1}.$$

Для определения значения максимального давления в начальный момент может быть использовано соотношение, связывающее действующую на вал силу и контактное давление, имеющее вид

$$P = R_1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} q(\theta, 0) \cos \theta d\theta = R_1 \left[ 2M_0 \sin \theta_0 + M_1 \left( \theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right) \right],$$

из которого вытекает, что

$$q(0, 0) = \frac{2P(\cos \theta_0 - 1)}{r_1(\sin 2\theta_0 - 2\theta_0)}. \quad (4)$$

Для определения значения максимального давления в момент исчерпания ресурса поступим следующим образом.

Связь между перемещением точек внутренней поверхности антифрикционного слоя втулки и контактным давлением выражается формулой [4]:

$$u_r^{(1)}(\varphi) = -\Psi q(\varphi) - \Phi(\varphi)(\gamma_1 + \gamma_2), \quad |\varphi| \leq \theta_0, \quad (5)$$

$$\Psi = \left[ \frac{\lambda_2 \mu_1 (1 + \nu_1) \alpha_{T1}}{\alpha_2 (1 - \nu_1)} - \frac{(1 - 2\nu_1)}{2(1 - \nu_1)G_1} \right] h_1 + \left[ \frac{\lambda_2 \mu_1 (1 + \nu_2) \alpha_{T2}}{\alpha_2 (1 - \nu_2)} - \frac{(1 - 2\nu_2)}{2(1 - \nu_2)G_2} \right] h_2,$$

$$\gamma_i = \frac{(1 + \nu_i) \alpha_{Ti} h_i}{1 - \nu_i}.$$

Таким образом, в случае малой толщины втулки, она работает по типу основания Фусса–Винклера.

Примем для функции  $\Phi(\varphi)$ , определяющей температуру на внешней поверхности вкладыша (на внутренней поверхности обоймы) выражение

$$\Phi(\varphi) = (D_0 + D_1 \cos \varphi)(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1},$$

где  $D_0$  и  $D_1$  — постоянные, аппроксимирующие экспериментальные данные.

Из (5) следует, что если предельный износ  $[h]$  задан, то при  $\theta = 0$  оно примет вид

$$A_1(h_1 - [h])q(0, \alpha(t)) + A_2 h_2 q(0, \alpha(t)) - B_1(h_1 - [h])\Phi(0) - B_2 h_2 \Phi(0) + [h] = \delta(\alpha(t)),$$

где

$$\delta(\alpha(t)) = \frac{\Delta(1 - \cos(\alpha(t))) - (D_0 + D_1 \cos(\alpha(t)))}{\cos(\alpha(t))};$$

$$A_i = \left[ \frac{\lambda_2 \mu (1 + \nu_i) \alpha_{Ti}}{\alpha_2 (1 - \nu_i)} - \frac{(1 - 2\nu_i)}{2(1 - \nu_i)G_i} \right]; \quad B_i = \frac{(1 + \nu_i) \alpha_{Ti}}{(1 - \nu_i)}.$$

Следовательно, выражение для  $q(0, \alpha(t))$  примет вид

$$q(0, \alpha(t)) = \frac{\delta(\alpha(t)) - [h] + (B_1(h_1 - [h]) + B_2 h_2) \Phi(0)}{(A_1(h_1 - [h]) + A_2 h_2)}. \quad (6)$$

Значение начального угла контакта  $\theta_0$  может быть определено из решения термоупругой задачи [3]:

$$\frac{P}{R_1} = \frac{D_0 - \Delta}{D} \cdot \frac{0,5 \sin 2\theta_0 - \theta_0}{\cos \theta_0}, \quad (7)$$

В результате расчета по предлагаемой методике было получено, что долговечность опытной двухслойной втулки по сравнению с типовой увеличивается в

1,7 раза. Результаты расчетов подтверждают, что использование разработанных втулок тормозной рычажной передачи с металлополимерным антифрикционным покрытием позволяет повысить долговечность их работы. Проведенные ресурсные испытания втулок показали хорошее совпадение расчетной долговечности с их результатами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-08-12087-офи-м, 12-08-00972-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шпади, Д. В. Новым грузовым вагонам — инновационные узлы и детали // Вестник Института проблем естественных монополий: Техника железных дорог. 2012. № 1. С. 45–48.
- [2] Иваночкин П. Г., Колесников И. В., Чебаков М. И. Комплексный метод расчета эксплуатационных характеристик двухслойной втулки подшипника скольжения // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2011. № 11. С. 39–46.
- [3] Иваночкин П. Г. Исследование кинетики изнашивания подшипника скольжения сухого трения с двухслойной втулкой // Изв. вузов Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. 2008. № 3. С. 37–40.
- [4] Колесников В. И. Иваночкин П. Г. Двухслойные композиции триботехнического назначения для тяжело нагруженных узлов трения. Ростов-н/Д: РГУПС, 2009. 123 с.

**Ivanochkin P. G., Blazeev V. V.** *Settlement-Experimental Evaluation of a two-layer durability Sleeve brake Rigging.* We propose a calculation-experimental method of calculating longevity hub brake linkage locomotive based on solving the problem of the interaction wearkontakt shaft and bushing coated. The inner surface of metal-coated steel bush cover. The coating has a two-layer structure — a metal frame power (substrate) and the antifriction layer. Equation is used when calculating the wear that results from laboratory tribological studies, and the experimentally determined temperature distribution on the surface of the sleeve. The calculation is based on the task of maximum permissible radial wear sleeves or allowable displacement of the center of the shaft in the direction of the load, and the average wear rate is determined from the equation obtained wear. The distribution of the contact pressure and the magnitude of the contact zone are determined by the solutions of the previous wearkontakt thermoelastic problem for a two-layer sleeve.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН ПОРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

**Игумнов Л. А., Петров А. Н., Амещицкий А. В.**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

На основе гранично-элементного подхода в сочетании с интегральным преобразованием численно анализируются поверхностные волны пороупругого полупространства.

Уравнения движения пороупругой деформируемой среды в области  $\Omega$  имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i^s + \rho_f \ddot{w}_i, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Эти уравнения дополняются физическим соотношением, геометрическими соотношениями и динамическим законом Дарси:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^s + (K - 2G/3)\varepsilon_{kk}^s\delta_{ij} - \alpha\delta_{ij}p = \sigma_{ij}^{effective} - \alpha\delta_{ij}p,$$

$$\varepsilon_{ij}^s = (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s)/2, \quad \varepsilon_{kk}^f = u_{k,k}^f,$$

$$\dot{w}_i = q_i = -\varkappa \left( p_{,i} + \rho_f \ddot{u}_i^s + (\rho_a/\phi + \rho_f) \ddot{w}_i/\phi - f_i^f \right),$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжения,  $F_i$  — компоненты плотностей объемной силы,  $u_i^s$  — вектор перемещения скелета,  $w_i$  — вектор перемещения фильтрации (просачивания),  $\rho_s, \rho_f, \rho_a$  — плотности упругого скелета, наполнителя и присоединенной массы,  $\varepsilon_{kk}^s, \varepsilon_{kl}^f$  — компоненты тензора деформации упругого скелета и наполнителя,  $K, G$  — объемный модуль и модуль сдвига скелета,  $k$  — проницаемость. Здесь и далее применяется соглашение Эйнштейна для суммирования, запятая обозначает частное дифференцирование по пространственным координатам, точка над функцией обозначает дифференцирование по времени.

Формальное применение преобразования Лапласа к уравнениям позволяет свести систему уравнений к дифференциальной форме записи в виде уравнений в частных производных в изображениях по Лапласу:

$$Bv = F, \quad v = (u, p), \tag{1}$$

$$B = \begin{bmatrix} G\nabla^2 + (K + \frac{1}{3}G)\partial_i\partial_j - s^2(\rho - \beta\rho_f) - (\alpha - \beta)\partial_i & \\ -s(\alpha - \beta)\partial_j & \frac{\beta}{s\rho_f}\nabla^2 - \frac{\phi^2 s}{R} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Добавим граничные условия:

$$v(x, s) = \tilde{v}, \quad x \in S^u, \quad t_i(x, s) = t_{ni}(x, s) = \tilde{t}_{ni}, \quad t_4(x, s) = \tilde{q}, \quad x \in S^\sigma, \tag{3}$$

где  $S^u$  — граница Дирихле и  $S^\sigma$  — граница Неймана.

Уравнения (1)–(3) полностью описывают краевую задачу в изображениях трехмерной изотропной динамической теории пороупругости.

Рассмотрим кусочно-однородное тело  $\Omega$  в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  с декартовой системой координат  $Ox_1x_2x_3$ . Границу тела обозначим через  $S$ , границы однородных частей  $\Omega_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) — через  $S_k$ . Предполагается, что  $\Omega_k$  являются изотропными телами. Параметры материала каждой однородной части  $\Omega_k$  маркируем верхним индексом « $k$ ». Граничные условия выбираются соответственно.

Граничные интегральные уравнения (ГИУ) для динамической пороупругости в области Лапласа можно получить на основе традиционных формулировок [1]: теоремы взаимности или метода взвешенных невязок. Пороупругий оператор является несамосопряженным, а значит для этих методов требуются разные фундаментальные решения, но в конечном счете оба метода дают одно и то же интегральное уравнение.

Применим методiku построения дискретных аналогов ГИУ, основанную на гранично-элементном подходе к аппроксимации границы области, а также обобщенных граничных перемещениях и обобщенных поверхностных силах и использовании методов численного обращения преобразования Лапласа [2–6]. В качестве проекционного метода применим метод коллокации.

Принципиальной особенностью волнового процесса в двухкомпонентной среде является появление новой волны — медленной продольной волны. На примере задачи о консоли численно продемонстрируем волновой процесс с ярко выраженной новой волной (медленная волна растяжения–сжатия). Рассмотрим составную консоль длиной 9 м (рис. 1). Будем исследовать давление и поток в точке удаленной на 1,5 м от нагруженного торца. Вместе с тем будем анализировать давление на закрепленном торце для анализа времени прихода волн. На рис. 2 представлены ГЭ-решения. Давления и поток в точке  $A$ . На рис. 3 представлено ГЭ решение — изменения давления на закрепленном торце. Построение решения на большем числе частот позволят устранить малоамплитудные колебания на рис. 2–3. Увеличение числа частот позволяет на рис. 2 построить пунктирную кривую, подтверждающую смену знака порового потока.

По анализу давлений видно, что с ростом значения параметра проницаемости можно продемонстрировать эффект возбуждения в пороупругом теле медленной продольной волны: происходит падение амплитуды отклика давлений (не до нуля) с параллельным нарастанием амплитуды порового потока. В работах [7, 8] на

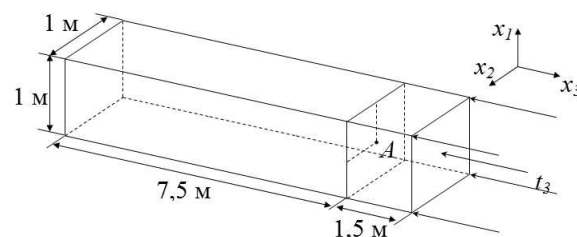


Рис. 1. На нагруженном торце известны  $t_{1,2} = 0$ ,  $t_3 = -f(t)$ ,  $p = 0$ , неизвестны  $u_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $q$ . На остальных гранях  $S_j$  ( $j = \overline{1,5}$ ), где  $S_j \perp x_k$  известны  $u_k = 0$ ,  $t_i = 0$  ( $i = \overline{1,3}, i \neq k$ ),  $q = 0$ , неизвестны  $u_i$  ( $i = \overline{1,3}, i \neq k$ ),  $t_k, p$ . На ребрах  $d_{js} = S_j \cap S_s$  известны  $u_j = 0$ ,  $u_s = 0$ ,  $t_i = 0$  ( $i = \overline{1,3}, i \neq j, i \neq s$ ),  $q = 0$ , неизвестны  $u_i$  ( $i = \overline{1,3}, i \neq j, i \neq s$ ),  $t_j, t_s, q$ .

примере аналитического решения для пороупругого одномерного стержня подобный эффект проявления третьей волны в отклике давления продемонстрирован. График поведения отклика порового потока в [7, 8] не был построен.

Рассмотрим следующие группы параметров пороупругого материала однородного полупространства: параметры соответствующие водонасыщенному песку —  $K = 2.1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $G = 9.8 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$ ,  $\phi = 0.48$ ,  $K_s = 1.1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 3.3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $k = 3.55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$ ; параметры соответствующие скальной породе —  $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$ ,  $\phi = 0.19$ ,  $K_s = 3.6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 3.3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $k = 3.6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$ . Графики перемещений по оси  $x_1$  и  $x_3$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  для песка представлены соответственно на рис. 4.

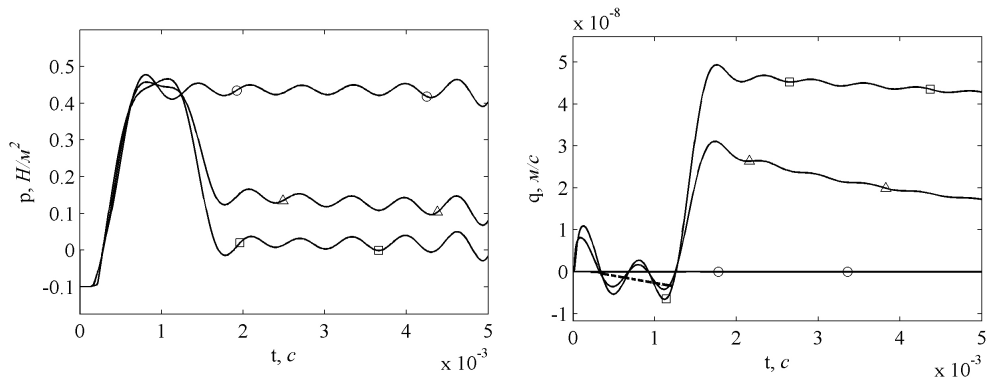


Рис. 2.  $\circ$  —  $k = 1.9 \cdot 10^{-10}$ ,  $\Delta$  —  $k = 1.9 \cdot 10^{-7}$ ,  $\square$  —  $k = 1.9 \cdot 10^{-6}$ .

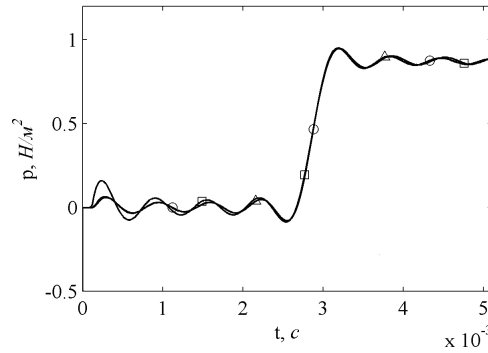


Рис. 3.  $\circ$  —  $k = 1.9 \cdot 10^{-10}$ ,  $\Delta$  —  $k = 1.9 \cdot 10^{-7}$ ,  $\square$  —  $k = 1.9 \cdot 10^{-6}$ .

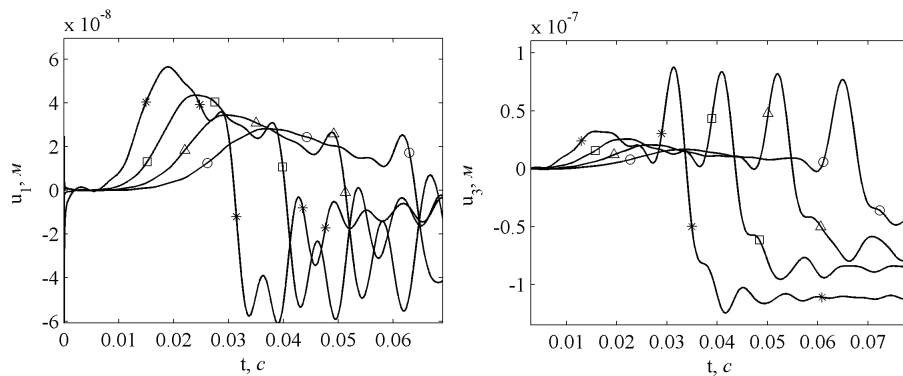


Рис. 4.  $\circ$  — перемещения в точке  $A$ ,  $\Delta$  — перемещения в точке  $B$ ,  $\square$  — перемещения в точке  $C$ ,  $*$  — перемещения в точке  $D$ .

На рис. 5 представлено сравнение ГЭ-решения с решением из [8]. Графики перемещений по оси  $x_1$  и  $x_3$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  для скальной породы представлены соответственно на рис. 6, на рис. 7 представлен график потока в точке  $A$ .

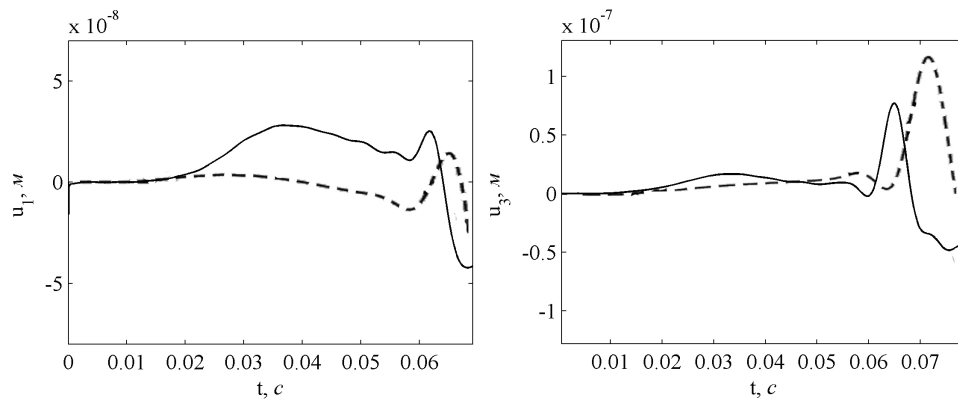


Рис. 5. — ГЭ решение, - - - - ГЭ решение из [8].

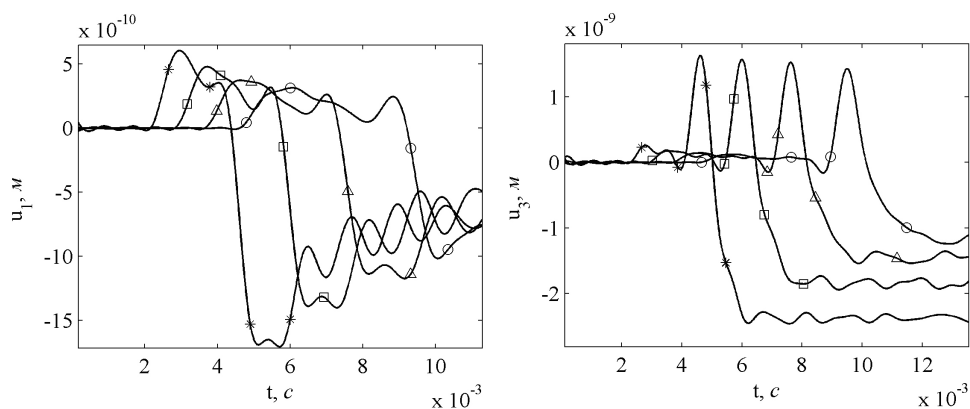


Рис. 6.  $\circ$  — перемещения в точке  $A$ ,  $\Delta$  — перемещения в точке  $B$ ,  $\square$  — перемещения в точке  $C$ ,  $*$  — перемещения в точке  $D$ .

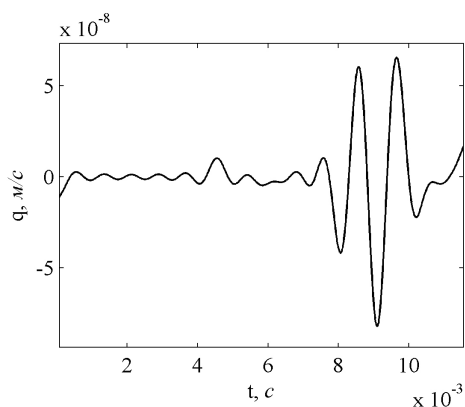


Рис. 7. Перемещения в точке  $A$ .



Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы ГК №14.740.11.0872, ГК №14.В37.21.1137, при поддержке РФФИ (№ 12-08-00984-а, 12-01-00698-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8., 2843.2012.8.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Schanz M.* Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
- [2] *Аменицкий А. В., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2008. Вып. 70. С. 71–78.
- [3] *Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Гранично-элементный анализ динамики трехмерных пористо-упругих тел // 15 Нижегородская сессия молодых ученых - Технические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В. 2010. С. 29.
- [4] *Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С., Литвинчук С. Ю.* Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. Выпуск №40 С. 1–20.
- [5] *Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Решение трехмерных задач динамической теории пороупругости методом граничных элементов с применением параллельных вычислений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Механика. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2011. С. 153–157.
- [6] *Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Численное решение краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости методом ГИУ // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Труды XXIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2009. СПб: 28 сентября – 01 октября 2009 г. Изд-во ООО «НИЦ МОРИНТЕХ». С. 182–185.
- [7] *Schanz M.* Poroelastodynamics: linear models, analytical solution, and numerical methods. Applied mechanics reviews. 2008. 3. 43 p.
- [8] *Schanz M., Antes H.* Waves in poroelastic half space: Boundary element analyses — Porous media: theory, experiments, and numerical applications // Berlin. Springer. 2002. Pp. 383–412.

**Igumnov L. A., Petrov A. N., Amenickiy A. V.** *Wave propagation modeling in poroelastic half-space.* Based on the boundary-element approach in combination with integral transformation, surface waves of a poroelastic half-space are numerically analyzed.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕРФЕЙСНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПАКЕТЕ УПРУГИХ СЛОЕВ

Кармазин А. В.\*, Сыромятников П. В.\*\*, Диденко А. В.\*\*,  
Диденко П. А.\*\*\*

\*Технический университет, Висбаден

\*\*Южный научный центр РАН, Краснодар

\*\*\*Кубанский государственный университет, Краснодар

В плоской постановке рассматривается задача идентификации прямолинейных трещин в пакетах, выполненных из слоистых упругих материалов. Для решения прямой задачи моделирования распространения волн в слоистой среде с трещинами используется метод граничных интегральных уравнений, метод блочного элемента и метод конечных элементов. Для решения обратных задач используются генетические алгоритмы. Информацией для решения обратной задачи определения параметров трещин служат смещения, измеренные на поверхности тела.

Рассматривается плоская задача о колебаниях многослойной среды из  $N$  слоев со свободным нижним основанием. Среда занимает область  $-H \leq z \leq 0$ ,  $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $H$  — толщина слоя. На поверхности слоя в области  $\Omega_1: x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]$  действует двухкомпонентная нагрузка  $\mathbf{q}^{(1)} = \{q_1^{(1)}, q_2^{(1)}\} \exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время. На линии раздела слоев, на глубине  $z_0 = -h$  имеется трещина в области  $\Omega_2: x \in [-a, a]$ . Трещина моделируется как бесконечно тонкий разрез, берега которого свободны от напряжений и не взаимодействуют. Перемещения точек среды описываются уравнениями Ляме, общий множитель  $\exp(-i\omega t)$  в дальнейшем везде опущен. В общем случае необходимо рассматривать смешанную краевую задачу следующего вида:

$$\begin{cases} z = 0, & \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)}(x, z), & x \in \Omega_1; & \mathbf{q}^{(1)}(x, z) = 0, & x \notin \Omega_1, \\ z = -h, & \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(2)}(x, z), & x \in \Omega_2; & \mathbf{v}^{(2)}(x, z) = 0, & x \notin \Omega_2, \\ z = -H, & \mathbf{q}(x, z) = 0, & -\infty \leq x \leq \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{u}^{(1)}$  — вектор перемещений в области  $x \in \Omega_1$ ,  $z = 0$ ,  $\mathbf{q}^{(j)}$  — вектор напряжений,  $\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{u}^{(2)+} - \mathbf{u}^{(2)-}$  — вектор скачка перемещений на берегах трещины в области  $x \in \Omega_2$ ,  $z = -h$ . Обозначим прямое и обратное преобразование Фурье символами  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}$  и введем величины:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha, z) &= \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x, z) \exp(i\alpha x) dx, \\ \mathbf{u}(x, z) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{U}(\alpha, z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\alpha, z) \exp(-i\alpha x) d\alpha, \\ \mathbf{Q} &= \mathcal{F}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{v} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{V}), \quad \mathbf{V} = \mathcal{F}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2)$$

Используя представление символа матрицы Грина  $\mathbf{K} = \mathcal{F}(\mathbf{k})$ , соответствующей поверхностной нагрузке для многослойной полосы без трещин [1], можно получить расширенную блочную матрицу  $\mathbf{K} = \{\mathbf{K}^{(ij)}\}$  с числом блоков  $N^2$ , каждый блок которой  $\mathbf{K}^{(ij)}$  имеет размерность  $2 \times 2$ . Первый индекс  $i$  в  $\mathbf{K}^{(ij)}$  соответствует номеру слоя. Блоки  $\mathbf{K}^{(i1)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  описывают воздействие поверхностной нагрузки  $\mathbf{q}^{(1)}$  в различных слоях, блоки  $\mathbf{K}^{(ij)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 2, \dots, N$  описывают воздействие векторов скачков перемещений на берегах трещин  $\mathbf{v}^{(j)}$  (если их несколько), расположенных на границах слоев. Для блоков расширенной матрицы Грина имеем соотношение:

$$\mathbf{k}^{(ij)} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{K}^{(ij)}), \quad \mathbf{K}^{(ij)} = \mathcal{F}(\mathbf{k}^{(ij)}). \quad (3)$$

Для матриц  $\mathbf{k}^{(ij)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 2, \dots, N$  запись в виде обратного преобразования Фурье (3) является формальной, т.к. соответствующие ядра являются гиперсингулярными, не имеют аналитического представления и понимаются только как обобщенные функции. В случае изотропных сред и небольшого числа слоев символ расширенной матрицы  $\mathbf{K}$  можно получить в явном виде [2], в случае анизотропных сред — численно [3]. В случае двухслойной полосы формализм расширенной матрицы Грина позволяет легко сформулировать соответствующую систему интегральных уравнений (СИУ) относительно вектора поверхностных нагрузок  $\mathbf{q}^{(1)}$ , вектора скачка перемещений в области трещины  $\mathbf{v}^{(2)}$ , перемещений на поверхности полосы  $\mathbf{u}^{(1)}$  и напряжений на берегах трещины  $\mathbf{q}^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mathbf{k}^{(11)}(x - \xi, z) \mathbf{q}^{(1)}(\xi) d\xi + \int_{\Omega_2} \mathbf{k}^{(12)}(x - \xi, z) \mathbf{v}^{(2)}(\xi) d\xi &= \mathbf{u}^{(1)}, \quad x \in \Omega_1, \quad z = 0, \\ \int_{\Omega_1} \mathbf{k}^{(21)}(x - \xi, z) \mathbf{q}^{(1)}(\xi) d\xi + \int_{\Omega_2} \mathbf{k}^{(22)}(x - \xi, z) \mathbf{v}^{(2)}(\xi) d\xi &= \mathbf{q}^{(2)}, \quad x \in \Omega_2, \quad z = -h. \end{aligned} \quad (4)$$

СИУ (4) имеет весьма общий вид и соответствует случаю, когда взаимодействие поверхностного источника и трещины учитывается, а сам источник задается физически адекватным способом. Система уравнений (4) существенно упрощается в случае, если распределение напряжений  $\mathbf{q}^{(1)}$  считается заданным, а напряжения на берегах трещины  $\mathbf{q}^{(2)}$  отсутствуют. Тогда система уравнений сводится к одному матричному уравнению:

$$\int_{\Omega_2} \mathbf{k}^{(22)}(x - \xi, z) \mathbf{v}^{(2)}(\xi) d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}^{(21)}(\alpha, z) \mathbf{Q}^{(1)}(\alpha) \exp(-i\alpha x) d\alpha = -\tau_0(x, z), \quad (5)$$

$$x \in \Omega_2, \quad z = -h.$$

Правая часть этого уравнения известна, решением данного уравнения является вектор скачка перемещений на трещине  $\mathbf{v}^{(2)}$ ,  $x \in \Omega_2$ . Контур  $\Gamma$  в (5) выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [1]. Перемещения на поверхности полосы после решения уравнения (5) могут быть представлены следующим

образом:

$$\mathbf{u}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}^{(11)}(\alpha, z) \mathbf{Q}^{(1)}(\alpha) \exp(-i\alpha x) d\alpha + \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}^{(12)}(\alpha, z) \mathbf{V}^{(2)}(\alpha) \exp(-i\alpha x) d\alpha, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad z = 0.$$

Задача (4)–(5) значительно упрощается в случае точечного источника. В дальнейшем считаем, что в некоторых точках  $x_j$  на поверхности структуры известны из физического эксперимента или численного моделирования значения перемещений  $\mathbf{u}(x_j, \omega) = \mathbf{g}_j(\omega)$  для частот  $\omega$  из диапазона  $[\omega_1, \omega_2]$ . В этом случае задача идентификации неизвестных параметров трещины может быть сведена к решению уравнения (5), вычислению (6) и минимизации функционала невязки, использующего значения смещений в точках замеров  $x_j$  на поверхности полосы:

$$\min \Phi(a, x_0, h) = \sum_j \|\mathbf{g}_j(\omega) - \mathbf{u}(x_j, \omega, a, x_0, h)\|, \quad z = 0. \quad (7)$$

Функционал (7) может быть переписан в виде суммы квадратов разностей перемещений, где вычисляется отклонение значений перемещений, рассчитанных для некоторых «пробных» параметров трещин и известных из замеров перемещений. Решение задачи оптимизации (7) требует многократного решения системы интегральных уравнений (5), что в действительности означает необходимость вычислять поверхностные перемещения для трещин с заданными параметрами (прямая задача), а затем сравнивать их с измеренными данными. В работе рассматривались три метода решения прямой задачи. Первый из методов рассмотрен в [4] и основан на применении схемы Галеркина к решению системы интегральных уравнений (5). В качестве базисных функций выбираются полиномы Якоби с весовыми функциями, учитывающими известные свойства решения. Число базисных функций должно соответствовать предполагаемой длине трещины и частоте распространения волн. Для решения задачи (4)–(5) использовался метод дифференциальной факторизации [5] и блочного элемента [6]. Данные методы являются гораздо более универсальными, но и существенно более сложными и позволяют без дополнительных модификаций рассматривать трещины более сложной конфигурации (произвольная ориентация трещины, непрямолинейные берега, анизотропные материалы). В данном случае более простым и удобным оказался метод Галеркина. При сопоставимой точности решения задачи (4)–(5), метод Галеркина потребовал несколько меньше вычислений, чем метод блочного элемента. Однако, универсальность и дальнейшая оптимизация алгоритмов метода блочного элемента могут сделать его более предпочтительным для подобного рода задач. Для решения задачи распространения волн в среде с трещиной известной конфигурации, реализован алгоритм расчета поверхностных перемещений на основе метода конечных элементов, предложенный в [7]. Поскольку в данном случае рассматривается задача распространения волн в бесконечной по горизонтальной координате среде, требуется выбрать условия на удаленных границах специальным образом,

чтобы не допустить отражения волн. Исходный бесконечный слой моделируется областью с возрастающим по мере удаления от источника внутренним трением. Обратная задача рассматривается как задача оптимизации для функционала невязки (7) от функций, зависящих от параметров трещины. В качестве алгоритма решения задачи оптимизации использовались как методы случайного глобального поиска — генетические алгоритмы [8], так и методы глобального или локального поиска [9]. Исследовалось влияние расположения и количества замеров  $g_j(\omega)$ , частоты колебаний на сходимость решения обратной задачи, влияние уровня вносимых или измеренных погрешностей данных — перемещений, собственных частот и параметров материалов - на точность решения обратной задачи. Погрешность в симулированные измерения вносилась при помощи генерирования случайных отклонений.

В численных экспериментах рассматривались изотропные и анизотропные материалы с числом различных материалов слоев до шести. Идентификация трещин осуществлялась по изменению поверхностных перемещений - отклика материала на действие статической или гармонической нагрузки [8, 10]. На рис 1. приведены примеры расчета вертикальных поверхностных перемещений  $|u_z(x, 0)|$  (6), соответствующие решению СИУ (5), для слоя стали ( $\nu = 1/3$ ) при различных параметрах интерфейсной трещины: глубины залегания  $z_0$  и полуширины трещины  $a$ . Точечный гармонический вертикальный источник возмущений  $q_3^{(1)}$  действует в точке  $x_0$  с нормированной частотой  $\omega$ . В расчетах была достигнута относительная погрешность определения параметров трещины  $z_0, a$  примерно в два раза меньше вносимых погрешностей измерений поверхностных смещений  $u_z(x, 0)$ .

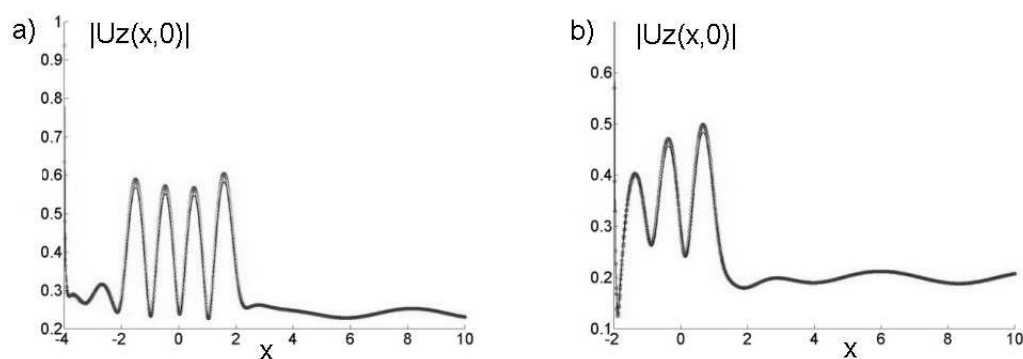


Рис. 1. Вертикальные смещения  $|u_z(x, 0)|$  на поверхности слоя стали с трещиной: а)  $z_0 = -0.4, x_0 = -4, a = 1.49, \omega = 0.97$  б)  $z_0 = -0.4, x_0 = -2, a = 1, \omega = 1.57$ . Решение методом Галеркина (красный), методом конечных элементов в пакете ABAQUS (синий).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-08-00880-а, 12-01-00330-а, 11-08-00381-а, 11-08-96506-р-юг-ц, программ Президиума Южного научного центра РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
- [2] *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. № 3. С. 500–507.
- [3] *Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В.* О смешанных задачах для термоэлектроупругих сред с разрывными граничными условиями // ДАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 1–6.
- [4] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В.* Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое // ПММ. 2007. № 71. С. 643–654.
- [5] *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424. № 1. С. 36–39.
- [6] *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О методе блочного элемента // МТТ. 2010. № 3. С. 155–163.
- [7] *Liu G. R., Quek Jerry S. S.* A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method // Finite Elements in Analysis and Design. 2003. № 39. pp. 403–417.
- [8] *Liu G. R., Han X.* Computational Inverse Techniques in Nondestructive Evaluation. CRC Press, 2003.
- [9] *Gablonsky J. M.* DIRECT Version 2.0 User Guide. Technical Report CRSC-TR01-08, Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University, April 2001.
- [10] *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.

**Karmazin A.V., Syromyatnikov P.V., Didenko A.V., Didenko P.A.** *Defining the parameters of interface cracks in package of elastic layers.* The problem of identification of rectilinear cracks in packages that are made of layered elastic materials. The problem is considered as two-dimensional. For forward modeling simulation of wave propagation in a layered medium with cracks using the method of boundary integral equations, the block element method, finite element method. Genetic algorithms using to solve the identification problem. To solve the inverse problem of determining the crack parameters used displacements measured on the body surface.

# ЭФФЕКТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЗАДАЧЕ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ЦИЛИНДРА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МИКРОПОЛЯРНОГО МАТЕРИАЛА

**Карякин М. И., Майорова О. А., Пустовалова О. Г.**  
*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Основной задачей данного исследования было нахождение способов воздействия на упругое тело, которые приводят к напряженно-деформированным состояниям, существенно различным в классической теории упругости и в теории сред Коссера. В настоящей работе рассмотрена задача об учете моментных напряжений на эффект Пойнтинга. Цель исследования в данном случае состояла в нахождении таких моделей и диапазонов изменения их материальных параметров, когда величина удлинения цилиндра, вычисляемая на основе двух подходов, отличается более, чем на 20%. С использованием асимптотических разложений в работе определен класс моделей материалов, у которых знак эффекта Пойнтинга в случае больших углов поворотов существенно зависит от параметров среды Коссера.

**1. Введение.** Новая волна интереса к моделям механики сплошных сред, основанных на гипотезе о кинематической независимости полей перемещений и поворотов, введенным в употребление братьями Коссера более ста лет назад, связана, прежде всего, с потребностями наномеханики в моделях упругого поведения объектов, учитывающих структуру материала; востребованы они и во многих разделах биомеханики.

Основной задачей данного исследования было нахождение способов воздействия на упругое тело, которые приводят к напряженно-деформированным состояниям, существенно различным в классической теории упругости и в теории сред Коссера. Такие ситуации могут служить, в частности, основой для создания экспериментальных методик идентификации параметров определяющих соотношений сред с микроструктурой и верификации используемых моделей.

В работе представлено несколько постановок задач о больших деформациях упругого цилиндра в рамках нелинейной микрополярной теории упругости. Задачи различаются вариантами полуобратного представления перемещений и функций удельной потенциальной энергии среды Коссера. Причины напряженно-деформированного состояния цилиндра могут быть обусловлены как внешними факторами (напряжение, кручение), так и внутренними дефектами — дислокации и дисклинации на оси цилиндра. Во всех случаях, полуобратное представление содержит две функции, подлежащие определению (радиальное перемещение и угол микроповорота частицы тела) и зависящие только от одного скалярного параметра — радиуса точки в недеформированном состоянии. В ряде случаев решения, полученные на основе полуобратного метода, сравнивались с результатами вычислений, полученных с помощью конечно-элементного анализа.

В классической нелинейной теории упругости известен ряд примеров, демонстрирующих не только количественное, но и качественное влияние учета нелинейности на поведение материала или конструкции. К их числу относится эффект

Пойнтинга — эффект второго порядка, состоящий в изменении длины кругового цилиндра при кручении. В настоящей работе рассмотрена задача об учете моментных напряжений на эффект Пойнтинга. Установлено, что учет микроструктуры в рамках теории Коссера может приводить не только к существенным количественным, но и к качественным изменениям в поведении скручиваемого цилиндра.

**2. Задачи о кручении цилиндра из несжимаемого микрополярного материала в случае псевдоконтинуума Коссера.** В качестве примера приведем результаты решения задачи о кручении цилиндра из несжимаемого микрополярного материала в случае псевдоконтинуума Коссера.

Будем использовать следующие полубратные представления.

1) для деформации:

$$\begin{cases} R = R(r) , \\ \Phi = \varphi + \psi z , \\ Z = \lambda z . \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $R(r)$  — функция изменения радиуса цилиндра,  $\psi$  — угол закручивания,  $\lambda$  — параметр удлинения.

2) для тензора микроповорота:

$$\mathbf{H}_I = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \cos \chi(r) (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z) + \sin \chi(r) (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_Z - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi) , \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_{II} = \cos \chi(r) (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi) + \sin \chi(r) (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_R) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z . \quad (3)$$

Функция  $\chi(r)$  задает собственный поворот частицы среды, не связанный с деформацией.

Характеристики деформации, соответствующие представлениям (1) и (2) имеют вид:

- градиент деформации:

$$\mathbf{C} = R'(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{R(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \lambda \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z + \psi R(r) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi ,$$

- тензор искажений:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = R'(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{R(r)}{r} \cos \chi(r) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + (\lambda \cos \chi(r) - \psi R(r) \sin \chi(r)) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z - \\ - \frac{R(r)}{r} \sin \chi(r) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + (\psi R(r) \cos \chi(r) + \lambda \sin \chi(r)) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi , \end{aligned}$$

- тензор изгибной деформации:

$$\mathbf{L} = \chi'(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \sin \chi(r) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \psi \cos \chi(r) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z - \frac{1 - \cos \chi(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z + \psi \sin \chi(r) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi .$$

Функция изменения радиуса цилиндра находится из условия несжимаемости

$$\det \mathbf{Y} = 1$$

и имеет следующий вид:

$$R(r) = \sqrt{\frac{r^2 + A}{\lambda}} .$$



Функция, описывающая собственный поворот частицы среды, не связанный с деформацией, находится из условия симметричности меры деформации  $\mathbf{Y}$  [1], и в случае тензора микроповорота  $\mathbf{H}_I$  (2) записывается в виде

$$\chi(r) = -\arctan\left(\frac{\psi R(r)r}{R(r) + \lambda r}\right).$$

В случае  $\mathbf{H}_{II}$ , заданного формулой (3), система уравнений для определения  $\chi(r)$  несовместна, таким образом данное представление тензора микроповорота непригодно для задачи о кручении цилиндра.

Для описания свойств материала используется функция удельной потенциальной энергии

$$W = 2\mu tr(\mathbf{Y} - \mathbf{I}) + \eta |tr\mathbf{L}|.$$

Определяющее соотношение для тензора напряжений Пиолы с учетом связей имеет вид

$$\mathbf{D} = \frac{dW_1}{\mathbf{Y}},$$

где  $W_1 = W + p(r)(\det \mathbf{Y} - 1) + \mathbf{q}(r) \cdot \mathbf{Y}_\times$ ,  $\mathbf{q}(r)$  — вектор-функция собственного поворота частицы,  $p(r)$  — функция давления.

Уравнения равновесия для несжимаемого псевдоконтинуума Коссера решались численно. Одним из результатов этого решения является приведенная на рис. 1 зависимость удлинения от угла закручивания.

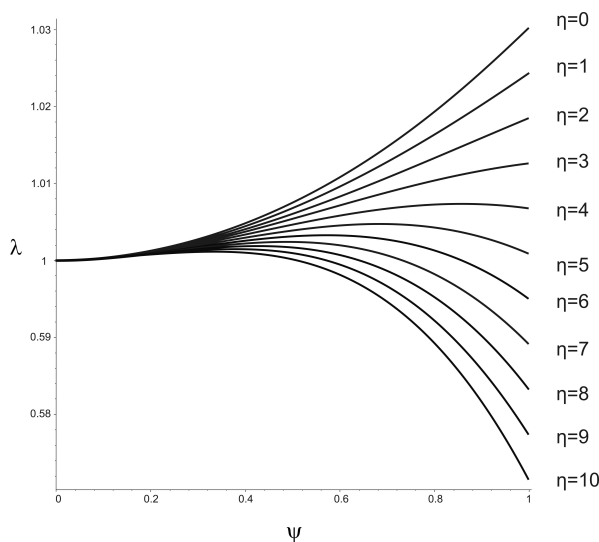


Рис. 1. Зависимость удлинения от угла закручивания.

Видно, что при  $\eta > 3$  при кручении цилиндр сначала удлиняется, затем начинает укорачиваться. Заметим, что в классической нелинейной теории упругости для несжимаемых сред при кручении цилиндр всегда удлиняется (эффект Пойнтинга при кручении [2]).

Для детального изучения влияния материального параметра  $\eta$  на эффект Пойнтинга, было построено асимптотическое разложение функций по  $\psi$ :

- функция изменения радиуса цилиндра:

$$R(r) = r + f_1(r)\psi + f_2(r)\psi^2 + f_3(r)\psi^3 ,$$

- функция, описывающая собственный поворот частицы среды, не связанный с деформацией:

$$\chi(r) = \chi_1(r)\psi + \chi_2(r)\psi^2 + \chi_3(r)\psi^3 ,$$

- вектор-функция собственного поворота частицы:

$$\mathbf{q}(r) = q_0(r) + q_1(r)\psi + q_2(r)\psi^2 + q_3(r)\psi^3 ,$$

- функция давления:

$$p(r) = p_0(r) + p_1(r)\psi + p_2(r)\psi^2 + p_3(r)\psi^3 .$$

Оказалось, в частности, что в квадратичном приближении цилиндр только удлиняется, а кубическое слагаемое асимптотики зависит от  $\eta$  и определяет возможность укорочения цилиндра при очень больших углах закручивания:

$$\lambda = 1 + \left( \frac{1}{9}r_1^2 - \frac{1}{72}r_0r_1 + \frac{1}{9}r_0^2 \right) \psi^2 - \frac{(4r_1^2 + r_0r + r_0^2) \eta}{192\mu} \psi^3 .$$

На рис. 2 приведены графики сравнения решений, полученных численным и аналитическим способом.

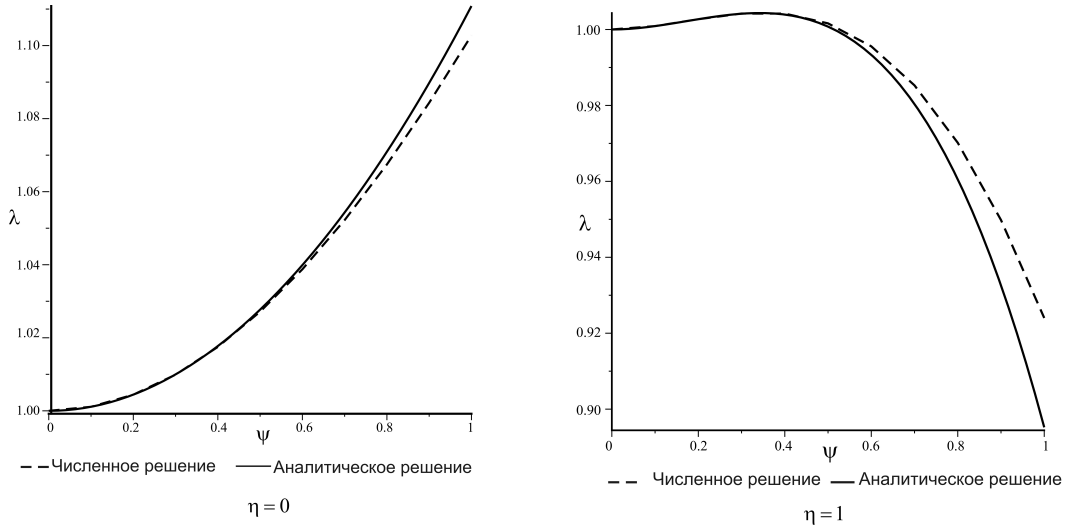


Рис. 2. Сравнение численного и аналитического решения.

Рассмотрим функцию удельной потенциальной энергии следующего вида

$$W = 2\mu tr(\mathbf{Y} - \mathbf{I}) + \frac{\delta}{2} tr^2 \mathbf{L} + \frac{\gamma + \eta}{2} tr(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{\gamma - \eta}{2} tr \mathbf{L}^2 . \quad (4)$$

Аналогичным образом можем построить асимптотическое разложение функций в ряд по  $\psi$ . Тогда выражение зависимости удлинения от угла закручивания выражается следующим образом

$$\lambda = 1 + \left( \frac{1}{9}r_1^2 - \frac{1}{72}r_0r_1 + \frac{1}{9}r_0^2 \right) \psi^2 .$$

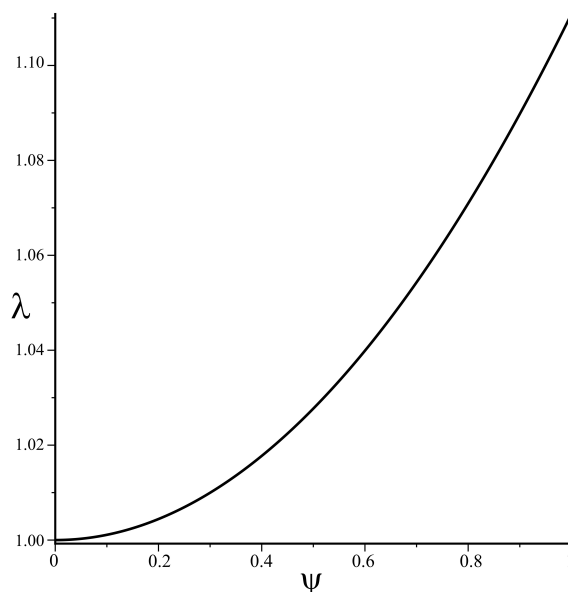


Рис. 3. Зависимость удлинения от угла закручивания.

Таким образом, для функции удельной потенциальной энергии (4) при кубическом приближении цилиндр только удлинится.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Зубов Л. М., Карякин М. И.* Дислокации и дисклинации в нелинейно-упругих телах с моментными напряжениями // ПМТФ. 1990. № 3. С. 160–167.
- [2] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

**Karyakin M. I., Mayorova O. A., Pustovalova O. G.** *Higher-order effects in the problem of deforming a cylinder made of incompressible micropolar material.* The purpose of this study was to identify such impacts on the cylinder which lead to the stress-strain state significantly different in the classical theory of elasticity and in the theory that takes into account the couple stresses. The influence of couple stresses on the Poynting effect at torsion and on the amount of strain at which the process of stretching of a nonlinear elastic cylinder ceases to be stable was studied. In this case the purpose of investigation was to find models and the range of variation of their material parameters when the value of stretch of the cylinder, which calculation is based on two approaches differs by more than 20%. In this work the class of models of the materials, in which the sign of the Poynting effect for large rotation angle significantly depends on the parameters of the Cosserat theory, is defined with the use of asymptotic expansions.

# КОВАРИАНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ 4-ТОКА В ПОЛЕВЫХ ТЕОРИЯХ МЕХАНИКИ КОНТИНУУМА

Ковалев В. А.<sup>\*</sup>, Радаев Ю. Н.<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Московский городской университет управления Правительства Москвы

<sup>\*\*</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Настоящая работа посвящена применению понятий, методов и алгоритмов группового анализа систем дифференциальных уравнений в частных производных к проблеме регулярного построения ковариантных 4-токов в теориях механики сплошных сред, допускающих ковариантную теоретико-полевую формулировку. Предполагается, что плотность действия, вообще говоря, зависит от градиентов полевых переменных порядка выше первого. Токи необходимы для формулировки основных физических законов сохранения (в том числе в виде интегралов по контуру или поверхности, не зависящих от пути интегрирования). Токи позволяют также указать точно сохраняющиеся инварианты поля. Вывод явных формул для 4-токов основывается на одном дифференциальном тождестве, включающем инфинитезимальные генераторы однопараметрической группы симметрий вариационного функционала действия. Это ковариантное тождество играет центральную роль в теории вариационных симметрий интегральных функционалов. В терминах ковариантного формализма приводятся формулы для компонент тензора энергии–импульса поля, который составляется из токов, соответствующих группам трансляций вдоль «прямолинейных» образующих плоского пространства-времени.

**1. Вводные замечания.** Полевая теория считается вполне определенной, если задан лагранжиан  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta)$ , где  $\varphi^k$  — физические полевые переменные;  $X^\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3, 4$ ) — пространственно-временные координаты («ковариантные» координаты);  $\partial_\beta$  — оператор полного дифференцирования по пространственно-временной координате  $X^\beta$ :

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s \geq 0} (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \quad (1)$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование,  $\partial_\beta^{\text{expl}}$  — оператор частного дифференцирования по явному вхождению переменной  $X^\beta$ .

Дифференциальные уравнения поля имеют каноническую ковариантную форму Эйлера–Лагранжа ( $\mathcal{E}_k(\mathcal{L})$  — оператор Эйлера)

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0. \quad (2)$$

Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального соотношения

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \quad (3)$$

где  $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$  — 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений

поля (2). Вектор  $J^\beta$  — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньше порядка уравнений поля. В теориях поля вектор  $J^\beta$  обычно называется вектором тока. Теория Нетер [1] позволяет эффективно вычислять вектор тока  $J^\beta$ , если известна группа преобразований, относительно которой функционал действия инвариантен.

**2. Алгоритмическое построение ковариантного тока.** Рассмотрим применение разработанного в рамках группового анализа дифференциальных уравнений формализма [2] к теории геометрических вариационных симметрий интегрального функционала действия. При этом мы будем опираться на их изложение, данное в монографиях [3, 4]. Мы ставим своей целью, в том числе, и вывод ряда новых представлений для тех ковариантных формул теории Нетер [1], которые изначально были получены в терминах классического исчисления вариаций.

Рассмотрим группу Ли геометрических преобразований пространственно-временных («ковариантных») координат  $X^\beta$  и физических полевых переменных  $\varphi^k$

$$\begin{aligned}\tilde{X}^\beta &= \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \xi^\beta(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \\ \tilde{\varphi}^k &= \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = \varphi^k + \varepsilon h^k(\varphi^s, X^\gamma) + \dots,\end{aligned}\quad (4)$$

при условиях  $\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta$ ,  $\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k$ , и ее инфинитезимальный генератор

$$\zeta \cdot \partial = \xi^\alpha \partial_\alpha^{\text{expl}} + h^j \partial_j. \quad (5)$$

Критерий инфинитезимальной инвариантности интегрального функционала действия с лагранжианом, зависящим от градиентов полевых переменных порядка, не превышающего  $m$ , относительно однопараметрической группы преобразований (4) имеет следующий вид:

$$(\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\gamma \xi^\gamma = 0. \quad (6)$$

Действие оператора  $\zeta \cdot \partial$  определяется формулами продолжения:

$$\zeta \cdot \partial_m = \zeta \cdot \partial + \sum_{s=1}^m h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}, \quad (7)$$

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} (h^l - (\partial_\sigma \varphi^l) \xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\sigma \varphi^l) \xi^\sigma. \quad (8)$$

Оператор Эйлера в символике теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных есть:

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}. \quad (9)$$

Выражение  $(\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\alpha \xi^\alpha$  допускает преобразование, которое позволяет быстро найти ток и дивергентный закон сохранения в случае лагранжианов, которые зависят от градиентов полевых переменных выше первого порядка.

Прежде всего, нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} (\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} &= \xi^\sigma \partial_\sigma^{\text{expl}} \mathcal{L} + h^l \partial_l \mathcal{L} + \xi^\sigma \partial_\sigma \mathcal{L} - (\xi^\sigma \partial_\sigma^{\text{expl}} \mathcal{L} + \xi^\sigma (\partial_\sigma \varphi^l)_0 \partial_l \mathcal{L}) + \\ &+ \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства находим

$$(\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} = \partial_\sigma (\xi^\sigma \mathcal{L}) - \mathcal{L} (\partial_\sigma \xi^\sigma) + \mathcal{Q}^l \partial_l \mathcal{L} + \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}. \quad (10)$$

Рассмотрим далее сумму

$$\sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}$$

и наряду с ней суммы ( $i = 1, 2, \dots, m$ )

$$S_i = \sum_{s=i}^m (\partial_{\alpha_i} \partial_{\alpha_{i+1}} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}.$$

Принимая обозначения ( $i = 2, 3, \dots, m-1$ )

$$\mathcal{J}_i^{\alpha_i} = \sum_{s=i+1}^m (\partial_{\alpha_{i+1}} \partial_{\alpha_{i+2}} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} \mathcal{L}, \quad (11)$$

$$\mathcal{J}_1^{\alpha_1} = \sum_{s=2}^m (\partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_l^{\alpha_1} \mathcal{L}, \quad \mathcal{J}_m^{\alpha_m} = \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{m-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \mathcal{L},$$

а также

$$\Gamma_i = \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_i} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} \mathcal{L} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (12)$$

для сумм  $S_i$  получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \partial_{\alpha_1} \mathcal{J}_1^{\alpha_1} - S_2 - \Gamma_1 \quad (i = 1), \\ &\vdots \\ S_i &= \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} - S_{i+1} - \Gamma_i \quad (i), \\ &\vdots \\ S_m &= \partial_{\alpha_m} \mathcal{J}_m^{\alpha_m} - \Gamma_m \quad (i = m). \end{aligned} \quad (13)$$

Заменим затем в (13) последовательно, начиная с первой строки, в строке с номером  $j$  сумму  $S_{j+1}$  ее значением, указываемым строкой с номером  $j+1$ . В результате получим

$$\sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \Gamma_i.$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^m (-1)^i \Gamma_i = \mathcal{D}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{D}_0^l \mathcal{L},$$

находим фундаментальную для теории вариационных симметрий формулу

$$\sum_{s=0}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{D}^l) \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{D}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}). \quad (14)$$

На основании (10) и (14) имеем

$$(\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\sigma \xi^\sigma = \partial_\sigma (\xi^\sigma \mathcal{L}) + \mathcal{D}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i}. \quad (15)$$

Таким образом, критерий инфинитезимальной инвариантности действия (6) окончательно представляется в виде

$$-\partial_\sigma (\xi^\sigma \mathcal{L}) + \sum_{i=1}^m (-1)^i \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} = \mathcal{D}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}), \quad (16)$$

который позволяет быстро определить вектор тока  $J^\sigma$  в каноническом ковариантном представлении  $\partial_\sigma (-J^\sigma) = \mathcal{D}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L})$ .

Справедлива следующая формула:

$$-J^\sigma = -\xi^\sigma \mathcal{L} - \mathcal{J}_1^\sigma + \mathcal{J}_2^\sigma + \dots + (-1)^m \mathcal{J}_m^\sigma. \quad (17)$$

**3. Вектор тока и тензор энергии–импульса для полей с различными порядками определяющих градиентов поля.** Проведем необходимые вычисления для трех случаев определяющих градиентов поля порядков  $m = 1, 2, 3$  (т.е. когда лагранжиан зависит от градиентов поля порядка, не превосходящего 1, 2, 3) и получим явные ковариантные выражения для вектора тока  $J^\sigma$ , с помощью которых затем выписываются компоненты тензора энергии–импульса  $T_{\cdot\lambda}^\mu$ .

**Теория поля первого порядка:**  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, X^\beta)$

$$J^\sigma = \xi^\sigma \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \varphi^l)} (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma), \quad T_{\cdot\lambda}^\mu = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu - (\partial_\lambda \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^l)}.$$

**Теория поля второго порядка:**  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, X^\beta)$

$$J^\sigma = \xi^\sigma \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \varphi^l)} (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^l)} \partial_\beta (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) - (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^l)},$$

$$T_{\cdot\lambda}^\mu = \mathcal{L} \delta_\lambda^\mu - (\partial_\lambda \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^l)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \varphi^l)} (\partial_\nu \partial_\lambda \varphi^l) + (\partial_\lambda \varphi^l) \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \partial_\mu \varphi^l)}.$$

**Теория поля третьего порядка:**  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\nu \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, X^\beta)$

$$J^\sigma = \xi^\sigma \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \varphi^l)} (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^l)} \partial_\beta (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) - \\ - (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^l)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\beta \varphi^l)} \partial_\alpha \partial_\beta (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) - \\ - (\partial_\beta (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma)) \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\beta \varphi^l)} + (h^l - (\partial_\gamma \varphi^l) \xi^\gamma) \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\beta \varphi^l)},$$

$$T_{\lambda}^{\mu} = \mathcal{L} \delta_{\lambda}^{\mu} - (\partial_{\lambda} \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \varphi^l)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu} \partial_{\mu} \varphi^l)} (\partial_{\nu} \partial_{\lambda} \varphi^l) + \\ + (\partial_{\lambda} \varphi^l) \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu} \partial_{\mu} \varphi^l)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} \varphi^l)} \partial_{\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\lambda} \varphi^l + \\ + (\partial_{\alpha} \partial_{\lambda} \varphi^l) \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} \varphi^l)} - (\partial_{\lambda} \varphi^l) \partial_{\nu} \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} \varphi^l)}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1918. Н. 2. S. 235–257.
- [2] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [3] *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 156 с.
- [4] *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

**Kovalev V. A., Radayev Y. N.** *Covariant representations of the 4-current in field theories of continuum mechanics.* The present study is devoted to application of methods and algorithms of the partial differential equations symmetry analysis to a regular derivation of the covariant currents in continuum theory formulated as a physical field theory in 4-dimensional space–time based on the action integral and the principle of the least action. The action density in general is assumed depend on gradients of the physical fields of higher orders. The currents are required in order to formulate conservation laws. The latter may be represented as path- or surface-independent integrals known from the continuum mechanics and often used in applied problems. Regular explicit covariant formulae for the field current are obtained provided the symmetry group of the variational action functional is given. This is attained by a previous consideration of some differential equivalence which can be verified for any action symmetry group. Explicit covariant formulae for the canonical energy-momentum tensors are also given.



# РАЗДУВАНИЕ КРИВОЙ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНОЙ ТРУБКИ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

**Колесников А. М., Попов А. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В данной работе рассматривается тонкостенная кривая трубка из нелинейно упругого материала, нагруженная только внутренним давлением. Решение задачи разыскивается в рамках нелинейной теории безмоментных оболочек. С помощью полуобратного представления задача статики оболочки сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численным методом. В работе исследуется влияние формы поперечного сечения на деформацию кривой трубки. Представлены результаты численного моделирования и экспериментальные данные.

**Введение.** Рассмотрим оболочку, которая является сектором тора с замкнутым поперечным сечением. Мы будем называть эту оболочку кривой трубкой. В линейной теории [1] известно, что кривая трубка с круглым поперечным сечением под действием внутреннего давления не изменяет своей кривизны при малых деформациях. Это подтверждено экспериментально для изотропных материалов. Трубки с эллиптическим сечением меняет свою кривизну под действием внутреннего давления. Если  $r_1 > r_2$  (рис. 1а), то под давлением кривизна трубки уменьшается. Если  $r_1 < r_2$ , то кривизна увеличивается. Это явление широко используется в манометрических трубках.

Поведение кривой трубки под действием внутреннего давления является более сложным для больших деформаций. Как показано в [2], кривизна тонкостенной нелинейно упругой изогнутой трубки с круглым поперечным сечением при раздувании изменяется. Под действием внутреннего давления кривая трубка из неогукковского материала распрямляется, т. е. её кривизна уменьшается.

В этой работе рассматривается тонкостенная нелинейно упругая кривая трубка с эллиптическим сечением и исследуется влияние эллиптичности сечения на кривизну деформированной трубки. Теоретические расчёты подтверждены экспериментальными данными, полученными при раздувании кривой трубки из резиноподобного материала.

**1. Формулировка.** Задача о раздувании кривой трубки является частным случаем чистого изгиба кривой трубки внешними изгибающими моментами по концам и подверженной равномерному давлению изнутри [2]. Общий подход к решению задачи чистого изгиба дан в книге Либаи А. и Симмондса Дж. Г. [3] и работе Зубова Л. М. [4]. Подход основан на разложении деформации на две части: плоскую деформацию поперечного сечения и поворот каждого сечения на постоянный относительный угол. Предлагаемый метод позволяет свести двумерную задачу статики оболочки к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При таком подходе кривизна деформированной трубки входит параметром, а внешний изгибающий момент определяется уже после решения задачи.

Задачу будем рассматривать в рамках нелинейной теории безмоментных оболочек [5]. Рассмотрим тонкостенную оболочку постоянной толщины  $h$ , сделанную

из высокоэластичного материала. Пусть в недеформированной конфигурации срединная поверхность трубки задаётся уравнениями

$$\mathbf{r} = x_1(s)\mathbf{i}_1 + x_2(s)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 \sin \beta t + \mathbf{i}_3 \cos \beta t, \quad s \in [0; 2\pi], \quad t \in [-l; l],$$

$$x_1(s) = r_1 \sin s, \quad x_2(s) = \beta^{-1} - r_2 \cos s.$$

Здесь  $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$  — стандартный ортонормированный базис декартовой прямоугольной системы координат,  $s$  и  $t$  — гауссовы координаты срединной поверхности.

Пусть внешней нагрузкой является равномерно распределённое внутреннее давление интенсивности  $p$ . Будем искать решение задачи, полагая, что деформированная срединная поверхность задаётся следующими уравнениями [4]

$$\mathbf{R} = X_1(s)\mathbf{i}_1 + X_2(s)\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{i}_2 \sin Bt + \mathbf{i}_3 \cos Bt.$$

Здесь функции  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$  и параметр  $B$  являются неизвестными.

Введём в рассмотрение главные кратности удлинений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и функцию угла наклона касательной к деформированному поперечному сечению  $\psi$ :

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2}}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{BX_2(s)}{\beta x_2(s)}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{X_2'(s)}{X_1'(s)}.$$

Материал оболочки будем считать нелинейно упругим, изотропным и несжимаемым. Тогда его механические свойства зададим с помощью функции удельной потенциальной энергии  $W = W(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Тогда уравнения равновесия можно свести к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} \lambda_1' - \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \lambda_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right) \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} B \sin \psi + \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right) \frac{g_{22}'}{2g_{22}} = 0,$$

$$\lambda_2' - B \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \lambda_1 \sin \psi + \frac{g_{22}'}{2g_{22}} \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \psi' - B \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \lambda_1 \cos \psi - \frac{p}{h} \sqrt{g_{22}} \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

$$X_1' = \sqrt{g_{11}} \lambda_1 \cos \psi, \quad X_2' = \sqrt{g_{11}} \lambda_1 \sin \psi.$$

Граничными условиями для неизвестных функций являются условия их периодичности.

Условием для нахождения параметра кривизны  $B$  является отсутствие изгибающего момента [2], которое можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} h \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} (Y_{2C} - X_2) \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} ds = 0.$$

Здесь  $Y_{2C}$  — координата центра масс поперечного сечения.

Полученная краевая задача решается численно методом пристрелки. На каждом шаге пристрелки интегрирование задачи Коши осуществляется оригинальным методом, основанном на конечно-разностном представлении и методе Рунге–Кутты с контролем погрешности на шаге. Кривизна деформированной трубки

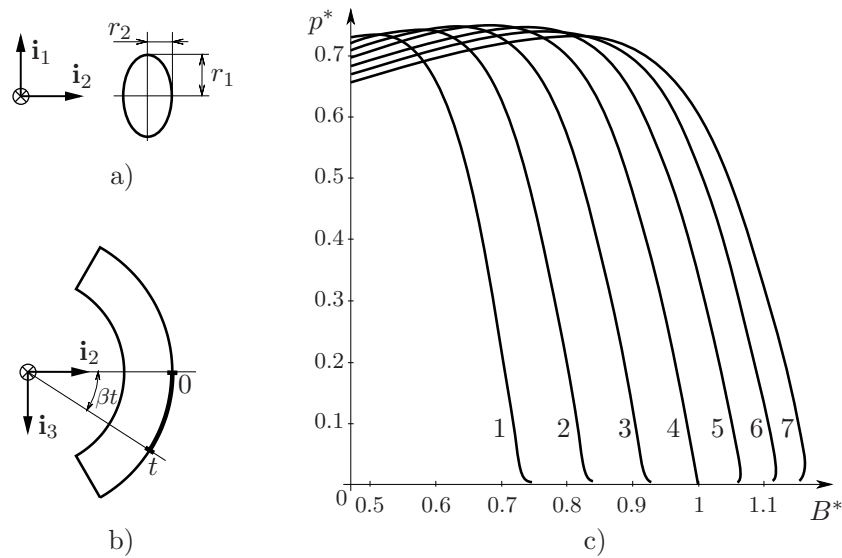


Рис. 1. а) Поперечное сечение кривой трубки, б) продольное сечение, в) зависимость между параметром кривизны  $B^*$  и давлением  $p^*$ .

определяется методом линеаризации на основе решений краевых задач из условия равенства нулю изгибающего момента в поперечном сечении.

**2. Результаты расчётов.** Введём безразмерное давление  $p^*$  и безразмерный параметр кривизны  $B^*$  следующим образом:

$$p^* = \frac{p}{k_p}, \quad k_p = \frac{2\mu h}{r_1 + r_2}, \quad B^* = \frac{B}{\beta}.$$

Параметры поперечного сечения оболочки зададим по табл. 1, другие начальные параметры примем равными

$$\mu = 1, \quad h = 0.001, \quad \beta = 0.1.$$

На рис. 1с показана зависимость между безразмерными величинами давления и параметром кривизны для различных поперечных сечений, геометрические размеры которых даны в табл. 1. При малых деформациях решение нелинейной задачи согласуется с линейной теорией. Если  $r_1 > r_2$ , то под давлением кривизна

№	$r_1$	$r_2$
1	$r_1 = 1,3$	$r_2 = 0,7$
2	$r_1 = 1,2$	$r_2 = 0,8$
3	$r_1 = 1,1$	$r_2 = 0,9$
4	$r_1 = 1$	$r_2 = 1$
5	$r_1 = 0,9$	$r_2 = 1,1$
6	$r_1 = 0,8$	$r_2 = 1,2$
7	$r_1 = 0,7$	$r_2 = 1,3$

Таблица 1. Геометрические размеры поперечного сечения (к рис. 1с).

деформированной трубки уменьшается (рис. 1с, графики 1, 2, 3). Разгибание трубки тем больше, чем полуось  $r_1$  больше  $r_2$ . Если эллиптическое сечение вытянуто в другом направлении, то есть  $r_1 < r_2$ , то под давлением кривизна деформированной трубки увеличивается (рис. 1с, графики 5, 6, 7). Сгибание трубки тем больше, чем полуось  $r_1$  меньше  $r_2$ . Изменение кривизны трубки кругового сечения (рис. 1с, график 4) оказывается пренебрежимо мало по сравнению с изменением кривизны трубки эллиптического сечения даже при малой разнице полуосей.

Начиная с некоторого давления поведение трубок меняется и уменьшение кривизны происходит примерно с одинаковой интенсивностью независимо от начальной формы поперечного сечения. Кроме того, для неогукковского материала существует предел давления, после которого разгибание трубки происходит с падением давления. Данный эффект связан с неустойчивостью неогукковского материала при больших деформациях. Величина максимума давления близка к максимальному давлению при раздувании прямой трубки и мало изменяется от формы сечения.

**3. Результаты эксперимента.** В эксперименте использовалась велосипедная камера KENDA 12.1x1.75–1.95 47/57-559 A/V. На подготовленную к эксперименту камеру были нанесены метки вдоль центральной образующей с гауссовой координатой  $s_0 = \pi/2$ . Камера размещалась на водной поверхности, один край камеры был закреплён, другой оставался свободным. Давление в камере сначала постепенно увеличивалось, затем уменьшалось, а процесс фотографировался. По фотографиям измерялись перемещения меток и рассчитывалась относительная кривизна деформированной образующей, отнесённая к начальной кривизне

$$\Theta^* = \frac{x_2(s_0)}{X_2(s_0)}.$$

Для численного моделирования были использована модель существенно нелинейного материала (при  $\alpha = 1$  модель сводится к неогукковскому материалу)

$$W = \frac{\mu}{2\alpha} \left( \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - 3 \right)^\alpha.$$

Геометрические параметры недеформированной оболочки, отнесённые к среднему радиусу поперечного сечения, принимались в следующем виде

$$r_1 = 1,035, \quad r_2 = 0,965, \quad \beta = 0,06.$$

При моделировании эксперимента были рассмотрены два материала с постоянной  $\alpha$  равной 1 (рис. 2а) и 0,9 (рис. 2б). При  $\alpha = 1$  безразмерный коэффициент при давлении  $k_p = 430$  кПа, при  $\alpha = 0,9$  —  $k_p = 370$  кПа.

На рис. 2 дано сравнение численных расчётов (сплошная линия) и экспериментальных данных (кружки соответствуют процессу нагружения, квадратики — разгрузению). Для материала с постоянной  $\alpha = 0,9$  теоретические предсказания хорошо согласуются с результатами эксперимента.

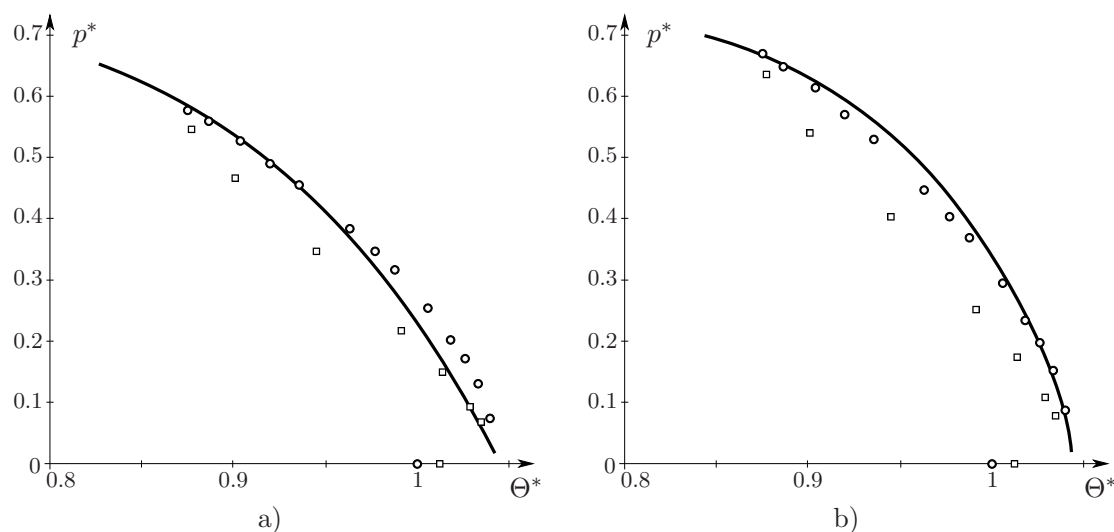


Рис. 2. Сравнение экспериментальных данных и численного расчёта для неогукковского (а) и существенно нелинейного материала (б).

Данное исследование частично поддержано Президентом Российской Федерации (грант МК-439.2011.1), министерством образования и науки Российской Федерации (госконтракт № П-596 и соглашение 14.А18.21.0389) и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 12-01-00038-а, 12-01-31431-мол-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Феодосьев В. И.* Упругие элементы точного приборостроения. М.: Оборонгиз, 1949. 344 с.
- [2] *Kolesnikov A. M.* Large bending deformations of pressurized curved tubes // Arch. Mech. 2011. Vol. 63 (5-6). Pp. 507–516.
- [3] *Libai A., Simmonds J. S.* The Nonlinear Theory of Elastic and Shells. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1998. 542 p.
- [4] *Zubov L. M.* Semi-inverse solution in non-linear theory of elastic shells Large bending deformations of a cylindrical membrane with internal pressure // Arch. Mech. 2001. Vol. 53 (4-5). Pp. 599–610.
- [5] *Kolesnikov A. M., Zubov L. M.* Large bending deformations of a cylindrical membrane with internal pressure // ZAMM. 2009. Vol. 89. Pp. 288–305.

**Kolesnikov A. M., Popov A. V.** *Inflation of curved hyperelastic tube. Theory and experiment.* The problem of equilibrium of a thin-walled tube made of nonlinear elastic material under inner pressure is considered. Within framework of nonlinear theory of membranes the solution is sought. Using semi-inverse method the static problem reduces to system of ordinary differential equations which is solved numerically. The influence of cross-section shape on deformation of the tube is studied. Numerical results and experimental data are presented.

# КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ

Лекомцев С. В. \*, Бочкарёв С. А. \*, Матвеев В. П. \*,  
Мурашкин Е. В. \*\*

*\*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

*\*\*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток*

Работа посвящена численному анализу собственных колебаний цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных неподвижной жидкостью. Решение задачи осуществляется в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов. Сжимаемая невязкая жидкость рассматривается в рамках потенциальной теории. Для описания движения упругого тела используется вариационный принцип возможных перемещений. Представлен анализ собственных колебаний горизонтально ориентированных цилиндрических оболочек при разном уровне заполнения жидкостью и различных вариантах граничных условий.

**1. Введение.** В известных работах [1–5], посвящённых исследованию горизонтально расположенных цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных жидкостью, основное внимание уделено вычислению и анализу собственных частот колебаний. В меньшей степени изучены собственные формы колебаний, несмотря на то, что частичное заполнение жидкостью приводит к нарушению симметрии конструкции и определяет своеобразный характер их динамического поведения, отличный от аналогичных вертикально ориентированных оболочек. Некоторые из особенностей такого поведения экспериментально установлены в [5]. С целью детального изучения в настоящей работе представлен вариант трёхмерной математической постановки и алгоритм численной реализации, предназначенные для определения динамических характеристик оболочек произвольной геометрии, содержащих неподвижную невязкую жидкость.

**2. Разрешающие соотношения.** Рассматриваются горизонтально ориентированные цилиндрические оболочки длиной  $L$ , средним радиусом  $R = d_s/2$ , толщиной  $h$ , полностью или частично заполненные жидкостью. Потенциальное движение сжимаемой невязкой жидкой среды, занимающей объём  $V_f$ , описывается волновым уравнением, которое вместе с граничными условиями и условием непроницаемости с помощью метода Бубнова–Галёркина сводится к системе уравнений. Оболочка произвольной геометрии рассматривается согласно подходу, в котором предполагается, что её криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских четырёхугольных элементов, находящихся одновременно под действием мембранных и изгибающих сил. В качестве математической постановки задачи используется вариационный принцип возможных перемещений, в который включается линеаризованное уравнение Бернулли для вычисления гидродинамического давления, действующего со стороны жидкости на упругую конструкцию.

Выполняя стандартные процедуры метода конечных элементов, получим связанную систему двух уравнений, которую в матричном виде можно представить следующим образом

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{d}} \quad \ddot{\boldsymbol{\varphi}}\}^T + \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{d}} \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}\}^T + \mathbf{K}\{\mathbf{d} \quad \boldsymbol{\varphi}\}^T = 0,$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{K}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & -\rho_f \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \rho_f \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{C}_f & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) dV, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV,$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV,$$

$$\mathbf{C}_s = \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w dS, \quad \mathbf{C}_f = \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w dS.$$

Здесь:  $\mathbf{d}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$  - вектора обобщенных перемещений оболочки и потенциала возмущения скорости;  $(x, y, z)$  - декартова система координат;  $S_f$ ,  $S_s$  - поверхности, ограничивающие объемы жидкости и оболочки;  $m_f$ ,  $m_s$ ,  $m_\sigma$  - число конечных элементов, на которые разбиваются область жидкости  $V_f$ , боковая поверхность оболочки и поверхность  $S_\sigma = S_f \cap S_s$ , соответственно;  $\rho_f$ ,  $c$  - плотность и скорость звука жидкости;  $\rho_s$  - плотность материала оболочки;  $\mathbf{B}$  - матрица связи вектора деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента;  $\mathbf{D}$  - матрица жесткостей;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}_w$  - функции формы для потенциала возмущения скорости, оболочечного элемента и нормальной составляющей вектора перемещений оболочки.

Представляя возмущенное движение упругой конструкции и жидкости в виде  $\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i\omega t)$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \exp(i\omega t)$ , разрешающую систему уравнений можно преобразовать следующим образом

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \omega \mathbf{x},$$

где  $\mathbf{I}$  - единичная матрица,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{f}$  - некоторые функции координат,  $\mathbf{x} = \{\mathbf{q}, \mathbf{f}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{f}}\}^T$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\omega = \lambda_1 + i\lambda_2$  - характеристический показатель.

Решение стандартной проблемы на собственные значения осуществляется методом Ланцоша. Дискретизация области жидкости проводится с учётом совместности конечно-элементных сеток на границе двух сред и зависит от уровня заполнения. В численных расчетах для полностью заполненных конфигураций размерность связанной системы превышала 6500 степеней свободы, включая 3500-4000 оболочечных.

**3. Численные примеры.** На рис. 1 для свободно опёртой на обоих торцах горизонтальной цилиндрической оболочки приведены собственные частоты колебаний (и их сравнение с [2]), полученные при различном уровне заполнения  $a = d_s/d_f$ , где  $d_f$  - высота уровня жидкости. Через  $(m, j)$  обозначено количество

полуволн в продольном и окружном направлении, соответственно. Необходимо отметить, что для пустой и полностью заполненной оболочки одной частоте соответствует две формы колебаний. При частичном заполнении горизонтальных оболочек задача не распадается на симметричную и антисимметричную, поэтому качественно одинаковым формам, отличающимся лишь поворотом в окружном направлении (рис. 3 а, б), соответствуют разные частоты в спектре. В зависимости от уровня заполнения различие может быть существенным. Например, на рис. 3 показано, что при  $a \geq 0.7$  разница между частотами, которым сопоставимы формы с одним количеством полуволн (1, 5) (обозначены светлыми и темными маркерами), достаточно велика. Имеющиеся расхождения с [2] могут быть объяснены тем, что в [2] не указано, какой форме соответствует приведенное значение частоты.

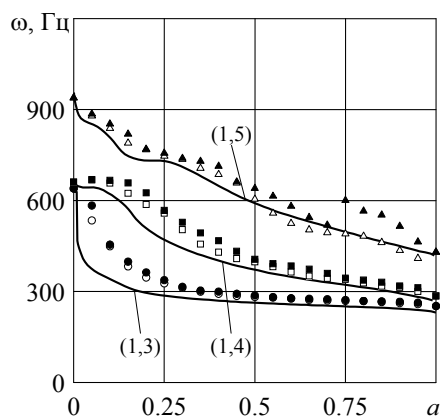


Рис. 1. Частоты колебаний горизонтальной цилиндрической оболочки: линии — [2], маркеры — данная работа.

Формы колебаний горизонтальных цилиндрических оболочек существенно изменяются в зависимости от положения свободной поверхности. Как правило, определить чёткую границу жидкости по перемещениям конструкции в большинстве случаев не представляется возможным. Это связано с тем, что максимальная высота полуволн в окружном направлении не всегда наблюдается на той части боковой поверхности, которая взаимодействует с жидкой средой (рис. 2, 3). С целью определения особенностей, характерных для горизонтальных цилиндрических оболочек, содержащих жидкость, было проанализировано 25 первых форм колебаний. Уровень заполнения  $a$  варьировался в пределах от 0 до 1. Некоторые результаты приведены в на рис. 2 и 3. Отслеживая определённую частоту в спектре, можно заметить, что соответствующая ей форма колебаний изменяется. Подробно этот процесс представлен на рис. 2. Здесь показано, что форма (1, 2) при  $a = 0.9$  переходит в (1, 4) и (1, 5), но среди остальных рассмотренных режимов колебаний не реализуется. В дальнейшем она появляется вновь при  $a \leq 0.5$  за счёт аналогичной трансформации другой формы. Такого рода изменения сопровождаются смещением спектра частот. По этой причине при уменьшении уровня жидкости частота, соответствующая первой форме (1, 5) не растёт, а наоборот, незначительно снижается (рис. 1). Вторым существенным перепадом наблюдается для другой комбинации мод (1, 5) при  $a = 0.75$  (обозначена темными маркерами). Он обусловлен сменой



режима колебаний частоты 5. Таким образом, возможно существование нескольких форм с одинаковыми параметрами  $m$  и  $j$ , которые отличаются величиной и расположением полуволн в окружном направлении. Например, при  $a = 0.7$  реализуется четыре формы (1, 5).

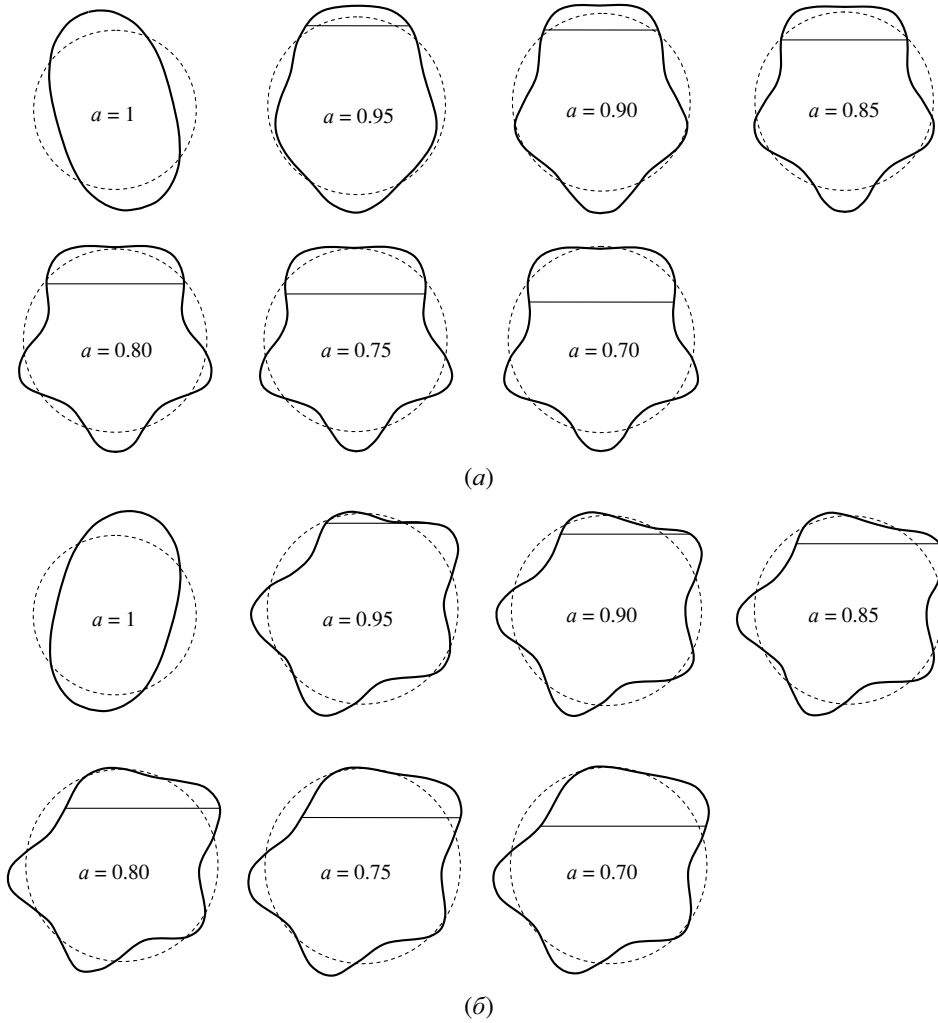


Рис. 2. Схематичное изображение пятой (а) и шестой (б) собственных форм колебаний.

Интересной особенностью обладают первые две формы колебаний, для которых при любых величинах параметра  $a$ , перемещения всегда достигают максимальных значений в области контакта оболочки с жидкостью (рис. 3 а–г). Подобная особенность была отмечена в [5] для системы с другими геометрическими и физическими параметрами.

Существенное влияние на динамические характеристики системы оказывает не только эквивалентная присоединенная масса жидкой среды, но и гидроупругое взаимодействие на смоченной поверхности  $S_\sigma$ . Из рис. 1 видно, что даже незначительное количество жидкости приводит к заметному снижению минимальных собственных частот. Установлено, что наиболее существенно это сказывается для конструкций, закрепленных на обоих торцах.

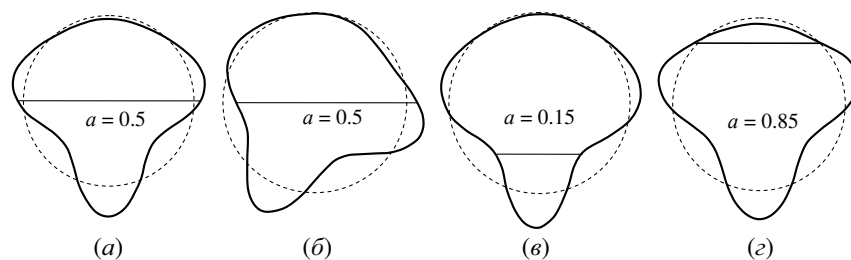


Рис. 3. Схематичное изображение собственных форм колебаний: (а) —  $\omega_1 = 282$  Гц; (б) —  $\omega_2 = 287$  Гц; (е) —  $\omega_2 = 399$  Гц; (з) —  $\omega_1 = 265$  Гц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00323-а) и УрО РАН (проект № 12-С-1-1015).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Lakis A. A., Bursuc G., Toorani M. H.* Sloshing effect on the dynamic behavior of horizontal cylindrical shells // *Nuclear Engineering and Design*. 2009. V. 239. Pp. 1193–1206.
- [2] *Selmane A., Lakis A. A.* Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid // *Journal of Fluids and Structures*. 1997. V. 11. Pp. 111–134.
- [3] *Постнов В. А.* Новая вариационная формулировка проблемы взаимодействия упругих конструкций с жидкостью // *Проблемы прочности и пластичности*. 2000. № 61. С. 5–12.
- [4] *Ergin A., Temarel P.* Free vibration of a partially liquid-filled and submerged, horizontal cylindrical shell // *Journal of Sound and Vibration*. 2002. V. 254. Pp. 951–965.
- [5] *Amabili M.* Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // *Journal of Sound and Vibration*. 1996. V. 191. Pp. 757–780.

**Lekomtsev S. V, Bochkarev S. A., Matveenko V. P., Murashkin E. V.** *Finite-element analysis of spatial vibration of horizontal cylindrical shells with liquid.* The work deals with the numerical analysis of natural vibrations of cylindrical shells fully or partially filled with quiescent fluid. The problem is solved in a three-dimensional formulation using the finite element method. Compressible inviscid liquid is considered in the framework of potential theory. The motion of an elastic body is described using the variational principle of virtual displacements. The analysis of the natural oscillations of a horizontal cylindrical shells with different water levels and various boundary conditions is presented.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДЛЯ ГИБРИДНЫХ СРЕД

**Литвинчук С. Ю., Белов А. А., Пазин В. П.**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

В рамках многомасштабного моделирования для учета дискретной структуры материала некоторой области применяется сшивание дискретной и непрерывной областей. При этом вводится граница между областями, которая должна пропускать волны, падающие из дискретной области, не вызывая отражений, не существующих в реальности. Для изучения возможности увеличения диапазона частот колебаний, доходящих до границы и не вызывающих ложных отражений, применяется модель сплошной среды с помощью уравнений движения градиентного континуума.

Исследование касается изучения отражения волн на границе дискретных систем, а также развития подходов для решения задач на разных масштабных уровнях. В дискретно-непрерывных моделях вводится непрерывная область для того, чтобы уменьшить размер дискретной области, насколько это возможно, значительно экономя при этом время на вычисления.

Работа посвящена разработке неклассических непрерывных моделей, обеспечивающих безотражательное прохождение волн деформаций через границу между дискретной решеткой и континуумом.

Рассмотрена одномерная модель: регулярная цепочка из  $N$  масс и  $N - 1$  пружин, соединенной с одномерным континуумом. Для учета краевых эффектов массы на концах цепочки отличаются от массы внутри цепочки. На свободный конец цепочки действует сила  $F(t)$ . На границе контакта цепочки и континуума предполагается непрерывность смещений и сил. Берутся классическая и градиентная модели континуума [1–4].

Математическая модель движения цепочки, соответствующих континуумов и условий непрерывности имеет вид:

$$M_{-N}\ddot{x}_{-N} + \alpha(x_{-N} - x_{-N+1}) = F(t), \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_n + \alpha(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) = 0, \quad -N < n < 0, \quad (2)$$

$$M_0\ddot{x}_0 + \alpha(x_0 - x_{-1}) = F_{cont}(t), \quad (3)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - l^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (5)$$

$$x_0(t) = u(0, t) \quad (6)$$

$$F_{cont}(t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (7)$$

$$F_{cont}(t) = \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} - l^2 \beta \left( \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - EA \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (8)$$

если  $\gamma \neq 0$ , то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0. \quad (9)$$

В уравнениях (1)–(8) использованы обозначения:  $M_{-N}$ ,  $m$  и  $M_0$  массы конечной частицы в цепочке, внутренней и граничной, соответственно,  $\varkappa$  - жесткость пружин в цепочке,  $x_n(t)$  — смещение массы с номером  $n$  в цепочке относительно ее положения равновесия,  $u(x, t)$  - осевое смещение сечения одномерного континуума,  $E, A$  и  $\rho$  - модуль Юнга, площадь поперечного сечения и массовая плотность континуума,  $l$  — равновесное расстояние между соседними массами в цепочке, а также параметр длины в уравнениях градиентного континуума,  $F_{cont}(t)$  — внутренняя сила, с которой континуум действует на граничную массу,  $\beta$  и  $\gamma$  — безразмерные параметры, характеризующие дисперсионные свойства высокоградиентного континуума.

На основе такой однородной модели построены неклассическая континуальная одномерная модель.

Для выбранной одномерной модели построим дискретно-континуальное соответствие в длинноволновом приближении. Дискретная цепочка и континуум описывают один и тот же материал, но на разных масштабных уровнях. В длинноволновом приближении эти описания совпадают, что достигается через соответствие параметров цепочки и континуума. Для этого континуализируются уравнения (2). Сопоставим смещению частицы с номером  $n$  в решетке  $x_n(t)$  смещение среды  $u(x, t)$  в точке  $x = nl$ . Смещения соседних частиц  $x_{n\pm 1}(t)$  представим в виде разложения в ряд Тейлора относительно положения частицы  $n$ :

$$x_n(t) = u(x, t)|_{x=nl}, x_{n\pm 1}(t) = \left\{ u(x, t) \pm l \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right\} \Big|_{x=nl}. \quad (10)$$

С точностью до  $l^2$  подстановка (10) в (2) дает следующий классический результат

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varkappa l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

Из (11) следует

$$\rho A = \frac{m}{l}, \quad \varkappa l = EA, \quad (12)$$

$$c = \omega_0 l, \quad c = \sqrt{E/\rho}, \quad \omega_0 = \sqrt{\varkappa/m}, \quad (13)$$

где  $\omega_0$  — собственная частота цепочки,  $c$  - скорость продольной волны. Для дальнейшего изучения отражения волн на границе дискретной области рассмотрим полупространство, заполненное квадратной решеткой.

Частица с безразмерными координатами  $(j, n)$  соединена с четырьмя соседними частицами, находящимися на расстоянии  $d$ , линейными пружинами с жесткостью  $\varkappa_{axi}$ , а с остальными четырьмя соседями, находящимися на расстоянии  $\sqrt{2}d$ , — пружинами с жесткостью  $\varkappa_{dia}$ . Каждая частица в решетке имеет две степени свободы: смещения в направлении оси  $x$  и оси  $y$   $u_x^{(j,n)}$ ,  $u_y^{(j,n)}$ . Для частицы  $(j, n)$  записываются уравнения Лагранжа второго рода.

Уравнения движения для внутреннего элемента решетки имеют вид:

$$\begin{aligned}
 Md_{tt}u_x^{(j,n)} = & \frac{\varkappa_{axi}}{2} (-4u_x^{(j,n)} + 2u_x^{(j+1,n)} + 2u_x^{(j-1,n)}) + \frac{\varkappa_{dia}}{2} (-4u_x^{(j,n)} + \\
 & + u_x^{(j+1,n+1)} + u_x^{(j+1,n-1)} + u_x^{(j-1,n+1)} + u_x^{(j-1,n-1)} + u_y^{(j+1,n+1)} + u_y^{(j-1,n-1)} - \\
 & - u_y^{(j+1,n-1)} - u_y^{(j-1,n+1)}), \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Md_{tt}u_y^{(j,n)} = & \frac{\varkappa_{axi}}{2} (-4u_y^{(j,n)} + 2u_y^{(j,n+1)} + 2u_y^{(j,n-1)}) + \frac{\varkappa_{dia}}{2} (-4u_y^{(j,n)} + \\
 & + u_y^{(j+1,n+1)} + u_y^{(j+1,n-1)} + u_y^{(j-1,n+1)} + u_y^{(j-1,n-1)} - u_x^{(j+1,n-1)} - u_x^{(j-1,n+1)} + \\
 & + u_x^{(j+1,n+1)} + u_x^{(j-1,n-1)}).
 \end{aligned}$$

Здесь  $d_{tt}$  обозначает полную производную по времени второго порядка.

На основе такой двумерной модели построена неклассическая двумерная континуальная модель.

Как и в случае одномерной цепочки, подбираются параметры континуума так, чтобы обеспечить соответствие между континуумом и решеткой в длинноволновом приближении. Для этого проводятся те же преобразования, что и для одномерной цепочки.

В результате проведено исследование. Показано, что классический изотропный континуум с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,25$  описывает данную решетку в длинноволновом приближении. При этом налагается ограничение на параметры решетки: связь между жесткостью пружин, соединяющих частицу решетки с ближайшими соседями, и жесткостью пружин, соединяющих соседей из второй координационной сферы. Получены дисперсионные характеристики решетки, определен поток энергии через элементарную ячейку плоской границы решетки, а также определены групповые скорости распространяющихся волн.

Изучено отражение гармоничных волн на границе между дискретной решеткой и континуумом для различных типов континуумов и различных формулировок граничных условий: отражение волн на границе раздела одномерной цепочки с классическим континуумом.

Отражение волн от границы решетки: полупространство, заполнено дискретной решеткой, плоские гармонические волны переносят энергию в положительном направлении как по оси  $x$ , так и по оси  $y$ .

Рассмотрены задачи об отражении плоских гармонических волн от границы квадратной решетки. Получены зависимости коэффициентов отражения по энергии от частоты и угла распространения падающей на границу волны. Отражение

волн от свободной или закрепленной границы решетки на низких частотах полностью соответствует отражению от свободной или закрепленной границы классического континуума, что и должно выполняться, так как учитывается соответствие параметров решетки и континуума на низких частотах (в длинноволновом приближении). Рассмотрено отражение от линейно-вязкой границы и от границы с другим дискретным полупространством при различных параметрах.

Отражение от границы раздела решетки и классического континуума: верхняя часть полупространства заполнена квадратной решеткой, а нижняя часть моделируется с помощью уравнений для классического континуума.

Рассмотрено отражение плоских гармонических волн от плоской бесконечной границы квадратной решетки и классического континуума. Предложены граничные условия, устраняющие сингулярности, возникающие при точечном воздействии решетки на континуум. Найден отклик континуума на воздействия падающей волны со стороны решетки в виде бесконечных сумм интегралов. Интегралы на границе вычисляются методом контурного интегрирования, а суммы берутся аналитически, благодаря введению малой вязкости в континуум.

Энергетические коэффициенты отражения волн, падающих на границу со стороны решетки, найдены в зависимости от частоты падающей волны и угла ее распространения. Из полученных результатов видно, что классический континуум может обеспечить безотражательное прохождение низкочастотных волн.

Рассмотрим случай отражения от границы раздела решетки и градиентного континуума.

В случае падения квазипоперечной волны градиентный континуум дает большее отражение, чем классический.

Можно сделать вывод, что классический континуум не является самой привлекательной моделью для обеспечения условия отсутствия отражения в широкой полосе частот. Одной из привлекательных альтернатив может быть градиентный континуум, который, в отличие от классического, обладает дисперсионными свойствами. Исследование в одномерном случае показало, что градиентный континуум может обеспечить безотражательную границу для дискретной области на всем диапазоне частот.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы ГК №14.740.11.1427, при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00698-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8., 2843.2012.8.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam-London: North-Holland Publishing Company, 1973. 425 p.
- [2] *Metrikine A. V., Askes H.* On the uniqueness of the Lagrangian of gradient elastic continua // *Mechanics of Generalized Continua: One Hundred Years after the Cosserat*. Springer. 2010. Pp. 149–160.
- [3] *Metrikine A. V., Prokhorova J. M.* One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure Part 1: Generic formulation // *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2002. № 21(4). Pp. 589–596.
- [4] *Герасимов С. И., Ерофеев В. И., Солдатов И. Н.* Волновые процессы в сплошных средах. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. 260 с.

**Litvinchuk S. Yu., Belov A. A., Pazin V. P.** *Modelling wave propagation for hybride media*. In the frame of multi-scale modeling, 'stitching' of a discrete and a continual area is used to account for the discrete structure of the material of a certain area. A boundary is introduced between these areas, which is supposed to be permeable for incident waves from the discrete area without causing reflections that do not exist in reality. To study the possibility of widening the range of the vibration frequencies reaching the boundary without causing spurious reflections, a continuum model is applied, using the equations of motion of gradient continua.

The study considers the reflection of waves along the border of discrete systems, as well as the development of approaches for analyzing the problems on various scale levels. In discrete-continual models, a continual area is introduced to minimize the discrete area size, thus saving considerably the calculation time.

# СИСТЕМЫ СМЕШАННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Манжиров А. В.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

В работе описывается метод решения систем смешанных интегральных уравнений с дополнительными условиями при наличии быстро осциллирующих функций в исходных данных. Решения систем строятся в форме с выделенными в явном виде заданными быстро осциллирующими функциями, что позволяет эффективно учитывать их сложную структуру. Рассматриваются различные варианты математической постановки задачи. В качестве примера решается задача о взаимодействии произвольной системы жестких гладких штампов с вязкоупругим слоистым основанием, поверхность которого неоднородна. Формулируются выводы качественного характера.

## 1. Постановка задачи.

Представим метод на примере конкретной задачи механики контактных взаимодействий. Пусть на жестком основании лежит вязкоупругий слой толщины  $H$  с тонким упругим поверхностно неоднородным покрытием, толщина которого  $h$ . Жесткость покрытия не превышает жесткости нижнего слоя, причем между слоями осуществляется идеальный или гладкий контакт. В слоистое основание вдавливаются  $n$  штампов, на которые действуют силы  $P_i(t)$  и моменты  $M_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Систему интегральных уравнений и дополнительные условия поставленной контактной задачи можно записать в следующем в безразмерном виде [1]:

$$c(t)m_i(x)q_i(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 K_{ij}(x, \xi)q_j(\xi, t) d\xi = \delta_i(t) + \alpha_i(t)x - g_i(x), \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 q_i(\xi, t) d\xi = P_i(t), \quad \int_{-1}^1 q_i(\xi, t)\xi d\xi = M_i(t), \quad x \in [-1, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где  $q_i(x, t)$  — контактные давления,  $P_i(t)$ ,  $M_i(t)$  — силы и моменты,  $\delta_i(t)$ ,  $\alpha_i(t)$  — осадки и углы поворота штампов,  $K_{ij}(x, \xi)$  — функции двух переменных, порожденные ядром контактной задачи,  $g_i(x)$  — заданные достаточно гладкие функции, описывающие форму оснований штампов,  $m_i(x)$  — заданные быстро осциллирующие функции, описывающие неоднородность покрытия,  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор;  $\mathbf{V}$  — оператор Вольтерра по времени с известным ядром.

## 2. Операторное уравнение и дополнительные условия задачи.

Принимая, что  $\mathbf{q}(x, t) = [q_i(x, t)]_{n \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\delta}(t) = [\delta_i(t)]_{n \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(t) = [\alpha_i(t)]_{n \times 1}$ ,  $\mathbf{g}(x) = [g_i(x)]_{n \times 1}$ ,  $\mathbf{P}(t) = [P_i(t)]_{n \times 1}$ ,  $\mathbf{M}(t) = [M_i(t)]_{n \times 1}$  — вектор-функции контактных давлений, сил, моментов, осадок и углов поворотов штампов;  $\mathbf{D}(x) = \text{diag}_{n \times n}(m_i(x))$  —



диагональная матрица;  $\mathbf{k}(x, \xi) = [K_{ij}(x, \xi)]_{n \times n}$  — матричное ядро контактной задачи, получим операторное интегральное уравнение и пару дополнительных условий

$$c(t)\mathbf{D}(x)\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \int_{-1}^1 \mathbf{k}(x, \xi)\mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \mathbf{q}(\xi, t)\xi d\xi = \mathbf{M}(t). \quad (4)$$

Матрица  $\mathbf{D}(x)$  — диагональная, причем элементы  $m_i(x) > 0$ , тогда ее можно представить в виде  $\mathbf{D}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{N}(x)$ , где в качестве  $\mathbf{N}(x)$  можно взять матрицу  $\mathbf{N}(x) = \text{diag}_{n \times n}(\sqrt{m_i(x)})$ . В дальнейшем будем обозначать эту матрицу, как  $\mathbf{D}^{1/2}(x)$ . Домножим слева уравнение (3) на  $\mathbf{D}^{-1/2}(x) = (\mathbf{D}^{1/2}(x))^{-1}$  и введем обозначения

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{D}^{1/2}(x)\mathbf{q}(x, t), \quad \mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{D}^{-1/2}(x)\mathbf{k}(x, \xi)\mathbf{D}^{-1/2}(\xi). \quad (5)$$

На основании (5) можем записать

$$c(t)\mathbf{Q}(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathcal{F}\mathbf{Q}(x, t) = \boldsymbol{\Delta}(x, t), \quad \mathcal{F}\mathbf{Q}(x, t) = \int_{-1}^1 \mathbf{K}(x, \xi)\mathbf{Q}(\xi, t) d\xi, \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{D}^{-1/2}(\xi)\mathbf{Q}(\xi, t) d\xi = \mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1 \mathbf{D}^{-1/2}(\xi)\mathbf{Q}(\xi, t)\xi d\xi = \mathbf{M}(t), \quad x \in [-1, 1], \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\Delta}(x, t) = \mathbf{D}^{-1/2}(x)[\boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x)]$ .

Таким образом, будем исследовать операторное уравнение (6) с дополнительным условием (7),  $\mathbf{Q}(x, t)$ ,  $\boldsymbol{\Delta}(x, t)$  — вектор-функции, непрерывные по  $t$  в гильбертовом пространстве  $L_2([-1, 1], V)$ ,  $\mathbf{P}(t)$ ,  $\mathbf{M}(t)$  — непрерывные по  $t$  вектор-функции. Можно показать, что  $\mathcal{F}$  — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный оператор из  $L_2([-1, 1], V)$  в  $L_2([-1, 1], V)$ .

### 3. Варианты математической постановки.

Пусть количество штампов, вдавливаемых в основание, равно  $N$ . Имеем соотношения (6)–(7). Необходимо определить контактные давления  $\mathbf{Q}(x, t)$  и кинематические, квазистатические или смешанные характеристики на каждом штампе в зависимости от того, какие условия на этом штампе заданы. Действительно, на одном штампе можно задавать четыре типа условий: силу и момент, силу и угол поворота, осадку и момент, осадку и угол поворота. При этом необходимо отыскивать соответственно осадку и угол поворота, осадку и момент, силу и угол поворота, силу и момент. Можно показать, что существуют пятнадцать возможных вариантов постановки плоской контактной задачи для системы штампов.

Анализ всех вариантов показывает, что они обладают одной закономерностью. Так всегда можно выделить два ортогональных подпространства  $L_2^1([-1, 1], V)$  и  $L_2^2([-1, 1], V)$  пространства  $L_2([-1, 1], V) = L_2^1([-1, 1], V) \oplus L_2^2([-1, 1], V)$  и представить вектор-функции  $\mathbf{Q}(x, t)$  и  $\boldsymbol{\Delta}(x, t)$  в виде  $\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_1(x, t) + \mathbf{Q}_2(x, t)$ ,  $\boldsymbol{\Delta}(x, t) = \boldsymbol{\Delta}_1(x, t) + \boldsymbol{\Delta}_2(x, t)$ , где  $\mathbf{Q}_i(x, t)$  и  $\boldsymbol{\Delta}_i(x, t)$  непрерывны по  $t$  в  $L_2^i([-1, 1], V)$  ( $i = 1, 2$ ), что  $\mathbf{Q}_1(x, t)$  и  $\boldsymbol{\Delta}_2(x, t)$  окажутся известными, а  $\mathbf{Q}_2(x, t)$  и  $\boldsymbol{\Delta}_1(x, t)$  будут представлять искомое решение задачи.

Поэтому в следующем разделе остановимся лишь на одном варианте постановки задачи. Решения для других вариантов будут получаться аналогично.

#### 4. Решение задачи.

Для решения задачи необходимо [1–3], в первую очередь, построить функциональный базис гильбертова пространства  $L_2([-1, 1], V)$ , для чего требуется рассмотреть последовательность вектор-функций  $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$  ( $i = 1, \dots, n, k = 0, 1, \dots$ ), составляющую базис пространства  $L_2([-1, 1], V)$ . При этом необходимо, чтобы в структуру всех базисных функций входили функции из матрицы  $\mathbf{D}^{-1/2}(x)$ , или в структуру каждой  $i$ -й группы функций  $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) входила функция  $\sqrt{m_i(x)}$ . Это позволит учесть ее особенности (осцилляции, разрывность и пр.) уже на этапе формирования базиса, что даст возможность учитывать при расчетах сложные формы как подошв штампов, так и покрытий оснований. В этом случае система базисных функций сможет быть построена по следующему правилу:

$$\mathbf{p}_m^{(i)}(x) = \mathbf{D}^{-1/2}(x)\mathbf{p}_m^{*(i)}(x), \quad \mathbf{p}_m^{*(i)}(x) = p_m^{*(i)}(x)\mathbf{i}^i, \quad J_{k,i} = \int_{-1}^1 m_i^{-1}(\xi)\xi^k d\xi, \quad \Delta_{-1,i} = 1,$$

$$p_m^{*(i)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{m-1,i}\Delta_{m,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & \cdots & J_{m,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{m-1,i} & \cdots & J_{2m-1,i} \\ 1 & \cdots & x^m \end{vmatrix}, \quad \Delta_{m,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & \cdots & J_{m,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{m,i} & \cdots & J_{2m,i} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

Таким образом  $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$  ( $i = 1, \dots, n, k = 0, 1, \dots$ ) составляет базис  $L_2([-1, 1], V)$ .

Рассмотрим случай, когда на всех штампах заданы вдавливающие силы  $\mathbf{P}(t)$ . Тогда требуется контактные давления  $\mathbf{q}(x, t)$  под каждым из штампов и осадки штампов  $\delta(t)$ .

В этом случае пространство  $L_2([-1, 1], V)$  необходимо представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств  $L_2([-1, 1], V) = L_2^{(1)}([-1, 1], V) \oplus L_2^{(2)}([-1, 1], V)$ , где  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$  — евклидово пространство с базисными функциями  $\{\mathbf{p}_0^{(i)}(x), \mathbf{p}_1^{(i)}(x)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а  $L_2^{(2)}([-1, 1], V)$  — гильбертово пространство с базисом  $\{\mathbf{p}_k^{(i)}(x)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, k = 2, 3, \dots$ ). Подынтегральная функция и правая часть уравнения (6) представимы в виде алгебраической суммы вектор-функций, непрерывных по времени  $t$  в  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$  и  $L_2^{(2)}([-1, 1], V)$ , соответственно, то есть

$$\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_1(x, t) + \mathbf{Q}_2(x, t), \quad \Delta(x, t) = \Delta_1(x, t) + \Delta_2(x, t), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{Q}_1(x, t) = \sum_{i=1}^n [z_i^{(0)}(t)\mathbf{p}_0^{(i)}(x) + z_i^{(1)}(t)\mathbf{p}_1^{(i)}(x)],$$

$$\Delta_1(x, t) = \sum_{i=1}^n \{[k_{0\delta i}\delta_i(t) + k_{0\alpha i}\alpha_i(t) + g_{0i}]\mathbf{p}_0^{(i)}(x) + [k_{1\alpha i}\alpha_i(t) + g_{1i}]\mathbf{p}_1^{(i)}(x)\}.$$
(10)

Заметим, что в представлении для  $\mathbf{Q}(r, t)$  нам известно слагаемое  $\mathbf{Q}_1(r, t)$ , функции разложения  $z_i^{(0)}(t)$ ,  $z_i^{(1)}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) которого определяется допол-

нительными условиями (7), а слагаемое  $\mathbf{Q}_2(r, t)$  требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить  $\mathbf{\Delta}_1(r, t)$ , а функция  $\mathbf{\Delta}_2(r, t)$  известна.

Введем оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство  $L_2([-1, 1], V)$  в  $L_2^{(1)}([-1, 1], V)$ :

$$\mathbf{P}_1\phi(x, t) = \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \phi(\xi, t) [\mathbf{p}_0^{(i)}(\xi)\mathbf{p}_0^{(i)}(x) + \mathbf{p}_1^{(i)}(\xi)\mathbf{p}_1^{(i)}(x)] d\xi. \quad (11)$$

Очевидно, что ортопроектор  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$  переводит пространство  $L_2([-1, 1], V)$  в  $L_2^{(2)}([-1, 1], V)$ . Кроме того, имеют место соотношения  $\mathbf{P}_i\mathbf{Q}(x, t) = \mathbf{Q}_i(x, t)$ ,  $\mathbf{P}_i\mathbf{\Delta}(x, t) = \mathbf{\Delta}_i(x, t)$  ( $i = 1, 2$ ).

Подействуем на уравнение (6) оператором ортогонального проектирования  $\mathbf{P}_2$ . В результате получим уравнение для определения  $\mathbf{Q}_2(x, t)$  с известной правой частью

$$c(t)\mathbf{Q}_2(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_2\mathcal{F}\mathbf{Q}_2(x, t) = -(\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{P}_2\mathcal{F}\mathbf{Q}_1(x, t) + \mathbf{\Delta}_2(x, t) = \tilde{\mathbf{\Delta}}_2(x, t). \quad (12)$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора  $\mathbf{P}_2\mathcal{F}$ , который, как можно показать, является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из  $L_2^{(2)}([-1, 1], V)$  в  $L_2^{(2)}([-1, 1], V)$ . Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства  $L_2^{(2)}([-1, 1], V)$ . Спектральная задача для оператора  $\mathbf{P}_2\mathcal{F}$  может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2\mathcal{F}\varphi_\ell(x) &= \gamma_\ell\varphi_\ell(x), \quad \varphi_\ell(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{\infty} \psi_\ell^{(ik)} \mathbf{p}_k^{(i)}(x), \quad \ell = 2, 3, 4, \dots, \\ \mathbf{K}(r, \rho) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_{ij}^{km} \mathbf{p}_k^{(i)}(r) [\mathbf{p}_m^{(j)}(\rho)]^T, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{m=2}^{\infty} K_{ij}^{km} \psi_\ell^{(jm)} = \gamma_\ell \psi_\ell^{(ik)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Представив искомую функцию  $\mathbf{Q}_2(x, t)$  в виде разложения по новым базисным функциям  $\varphi_k(r)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) в  $L_2^{(1)}(\Omega, V)$ , то есть

$$\mathbf{Q}_2(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z^{(k)}(t)\varphi_k(x), \quad (14)$$

и подставив это представление в (12), получим уравнение для определения неизвестных функций разложения  $z^{(k)}(t)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ):

$$z^{(\ell)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_\ell) \frac{\Delta^{(\ell)}(t)}{c(t) + \gamma_\ell}, \quad \mathbf{W}_\ell f(t) = \int_1^t R_\ell(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \ell = 2, 3, \dots, \quad (15)$$

где  $R_\ell(t, \tau)$  — резольвента ядра  $K_\ell(t, \tau) = \gamma_\ell / [c(t) + \gamma_\ell] K_2(t, \tau)$  ( $\ell = 2, 3, \dots$ ), а  $\Delta^{(k)}(t) = \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{\Delta}}_1(\xi, t)\varphi_k(\xi) d\xi$ .

Таким образом, чтобы найти контактные давления  $\mathbf{q}(r, t)$  под штампами необходимо воспользоваться формулами (5), (9), (10), (13)–(15). При этом исходные базисные функции необходимо строить по формулам (8).

Полностью определив контактные давления под штампами можно найти и неизвестные осадки, подействовав оператором  $\mathbf{P}_1$  на уравнение (6), подставив представление для  $\mathbf{Q}(x, t)$  и получив тем самым непосредственное уравнение для определения  $\delta_i(t)$  и  $\alpha_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Следует отметить, что в решении в явном виде выделены функции  $m_i(x)$ :

$$q_i(x, t) = \frac{1}{m_i(x)} [z_i^{(0)}(t)p_0^{*(i)}(x) + z_i^{(1)}(t)p_1^{*(i)}(x) + \dots].$$

Это позволяет эффективно производить расчеты для случаев, когда функции  $m_i(x)$  являются быстро осциллирующими, чего другими известными на сегодняшний день методами достичь не удается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00991), Программы №12 ОЭММПУ РАН и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-3288.2010.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Манжиров А. В. Контактные задачи для неоднородных стареющих тел // Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. М.: Наука, 2001. С. 549–565.
- [2] Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1144 p.
- [3] Манжиров А. В., Казаков К. Е. Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с неоднородными покрытиями // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: сб. трудов / Под ред. Р. В. Гольдштейна. Ин-т проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука, 2009. С. 238–263.

**Manzhirov A. V.** *Systems of mixed integral equations with fast oscillating functions in the input data and their applications.* A method for solving of systems of mixed integral equations with complimentary conditions and fast oscillating functions in the input data is described. The solutions of such systems are obtained in the form which contains fast oscillating functions explicitly. This allows one to take effectively into account the thin structure of the solutions. Various versions of the mathematical formulation of the problem are under consideration. Contact problem of the interaction between arbitrary system of rigid smooth punches and viscoelastic layered foundation with nonhomogeneous surface is solved as an example. Qualitative mechanical effects are discussed.

# ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ТЕЧЕНИЙ

Моргулис А. Б.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Рассматриваются плоские вихревые течения идеальной однородной и несжимаемой жидкости, открытые в том смысле, что граница области течения не обязательно непроницаема, но, возможно, включает вход и выход потока, сквозь которые жидкость втекает в область и, соответственно, вытекает из неё. Устанавливаются экстремальные свойства открытых течений по отношению к функционалам В. И. Арнольда [1], рассмотренных им лишь для течений с полностью непроницаемыми границами или с пространственной периодичностью.

**1. Предварительные замечания.** Речь пойдёт о плоских вихревых течениях идеальной однородной и несжимаемой жидкости в ограниченных кусочно-гладких областях, в частности, в конечных каналах.

Хорошо известно, что уравнение плоского стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости сводится к функциональной зависимости функции тока и вихря. Форма этой зависимости, вообще говоря, заранее неизвестна.

Обозначим через  $\mathbf{V}$ ,  $\Omega$  и  $\Psi$  поля скорости, вихря и функции тока стационарного течения.

Стационарное течение назовём *A-течением*, если во всей его области имеет место равенство  $\Psi = F(\Omega)$ , причём функция  $F$  однозначна и монотонна на множестве значений  $\Omega$ .

Класс *A*-течений выделил В. И. Арнольд [1]. Он рассмотрел течения с непроницаемыми границами или обладающие пространственной периодичностью, и установил экстремальные свойства *A*-течений по отношению к вариационным принципам двух типов. В первом из них рассматривается полная кинетической энергии жидкости на листе равнозавихренных полей, а во втором — некоторая «связка» интегралов энергии и вихря, но без ограничения равнозавихренности. Такие связки широко известны как функционалы Арнольда. В настоящем сообщении вариационные принципы для функционалов Арнольда распространяются на открытые течения.

**2. Вариационные принципы.** Рассмотрим *A*-течение  $(\mathbf{V}, \Omega, \Psi)$  в области  $D$ , и его возмущения. Поля скорости, вихря и функции тока возмущённого течения обозначим через  $\mathbf{v}$ ,  $\omega$ ,  $\psi$ . Пусть  $\Omega^* = \min_D \Omega$ ,  $\Omega_* = \max_D \Omega$ , так что зависимость  $\Psi = F(\Omega)$  определяет функцию  $F$  на отрезке  $[\Omega^*, \Omega_*]$ . Пусть  $F \in C^1[\Omega^*, \Omega_*]$ . Для любой такой функции найдётся  $C^1$ -продолжение  $\tilde{F}$  с отрезка  $[\Omega^*, \Omega_*]$  на всю вещественную ось. Зафиксируем какое-нибудь из таких продолжений, и будем использовать его в дальнейших построениях вместо  $F$ , опуская знак тильды. Пусть  $F_0 = \int F(r)dr$  — первообразная  $F$ . Определим функционал  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{v})$ , полагая

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}) = \int_D (\mathbf{v}^2/2 - F_0(\omega)) dz + \oint_S \Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{dz}; \quad S = \partial D. \quad (1)$$

**Предложение 1.** *A-течения — критические точки функционалов (1).*

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ ,  $\xi = \omega - \Omega$ . Выполняются равенства

$$\oint_S \Psi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{z} = \int_D (\nabla \Psi \times \mathbf{u} + \Psi \xi) dz = \int_D (F(\Omega)\xi - \mathbf{V}\mathbf{u}) dz, \quad (2)$$

где  $\Psi = F(\Omega) = F'_0(\Omega)$ . Отсюда  $\delta \mathcal{W}|_{\mathbf{v}=\mathbf{V}} = \int_D (\mathbf{V}\mathbf{u} - F'_0(\Omega)\xi) dz + \oint_S \Psi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{z} = 0$ .

Вариационный принцип, установленный в предложении 1, выполняется как для открытых, так и для непроницаемых границ, причём — без дополнительных ограничений на поведение векторного поля  $\mathbf{v}$  на границе и на число Бетти области течения. Если считать границу непроницаемой и  $N + 1$ -связной, и потребовать равенства циркуляций полей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}$  вокруг всех граничных контуров, то контурный интеграл в правой части (1) исчезнет, и мы придём к известным вариационным принципам [1]. Все сказанное останется в силе и в том случае, если мы предположим совпадения циркуляций полей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}$  вокруг лишь  $N$  из  $N + 1$  имеющихся граничных контуров, но калибруем функцию тока стационарного течения так, чтобы она равнялась нулю на том граничном контуре, вокруг которого допускаются различные циркуляции полей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}$ .

Положим  $C^\pm = \sup_{[\Omega_*, \Omega^*]} (\pm F')$ ,  $c^\pm = \inf_{[\Omega_*, \Omega^*]} (\pm F') \geq 0$ , где выбирается «−», если A-течение определяет убывающую функцию  $\Psi = F(\Omega)$ , и «+» в — противном случае. Не теряя общности, считаем, что  $F$  продолжена на вещественную ось с сохранением верхней и нижней граней своей производной, и  $F_0$ , как и прежде, первообразная этого продолжения.

**Предложение 2.** *A-течение  $\mathbf{V}$  с убывающей функцией  $\Psi = F(\Omega)$  — глобальный минимум функционала (1), причём*

$$\int_D (\mathbf{u}^2/2 + c^- \xi^2/2) dz \leq \mathcal{W}(\mathbf{v}) - \mathcal{W}(\mathbf{V}) \leq \int_D (\mathbf{u}^2/2 + C^- \xi^2/2) dz. \quad (3)$$

**Доказательство.** Положим  $\Phi(R, r) = F_0(R + r) - F'_0(R)r - F_0(R)$ .

В силу (1) и (2),

$$\mathcal{W}(\mathbf{V} + \mathbf{u}) - \mathcal{W}(\mathbf{V}) = \int_D (\mathbf{u}^2/2 - \Phi(\Omega, \xi)) dz.$$

Отсюда, с учётом оценок  $c^- r^2/2 \leq -\Phi(R, r) \leq C^- r^2/2$ , следует (3).

Пусть область  $D$   $N + 1$ -связна; положим

$$\Lambda_* = \sup \left\{ \int_D \mathbf{u}^2 dz \left( \int_D \xi^2 dz \right)^{-1} \right\},$$

где верхняя грань берётся по всем полям  $\mathbf{u}$  с нулевой нормальной компонентой на  $S$ , и с нулевыми циркуляциями вокруг  $N$  граничных контуров. Если  $N = 0$ , то  $\Lambda_* = \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  — минимальное собственное значение задачи  $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$  в  $D$  при  $\varphi = 0$  на  $S$  (в силу вариационного принципа для собственных значений симметричных операторов), иначе  $\Lambda_* > \lambda_1^{-1}$ .

**Предложение 3.** Для любого А-течения  $\mathbf{V}$  с возрастающей функцией  $\Psi = F(\Omega)$  имеют место оценки

$$\int_D (c^+ \xi^2 / 2 - \mathbf{u}^2 / 2) dz \leq \mathcal{W}(\mathbf{V}) - \mathcal{W}(\mathbf{v}) \leq \int_D (C^+ \xi^2 / 2 - \mathbf{u}^2 / 2) dz; \quad (4)$$

если при этом область течения  $N + 1$ -связна, и  $c^+ > \Lambda_*$ , то  $\mathbf{V}$  — глобальный максимум функционала (1) в классе полей, имеющих общую нормальную компоненту на  $S$  и равные циркуляции вокруг  $N$  граничных контуров.

**Доказательство** аналогично предл. 2.

**Роль граничных условий.** В случае непроницаемой границы функционал  $\mathcal{W}$  — константа движения жидкости. Отсюда и из экстремальных свойств А-течений вытекают известные теоремы Арнольда об устойчивости [1]. В случае возмущения открытого А-течения,

$$\dot{\mathcal{W}} = \int_S \Phi(\Omega, \xi) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (5)$$

что проверяется непосредственно. В таком случае изменение  $\mathcal{W}$  существенно зависит от граничных условий, которые можно ставить различными способами, например, так

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = \gamma; \quad \omega|_{S^+} = \omega^+, \quad (6)$$

где  $S^+ = \{z \in S : \gamma(z) < 0\}$  — вход потока (нормаль внешняя),  $\gamma, \omega^+$  — заданы. Такую постановку плоской задачи протекания ввёл В.И. Юдович [2], и установил теорему о её глобальной разрешимости.

**Лемма 1 ([4–7]).** Пусть граничные условия (6) допускают А-течение  $\mathbf{V}$  с гладкой зависимостью  $\Psi = \Psi(\Omega)$ . При развитии возмущений такого течения (с сохранением граничных условий) функционал  $\mathcal{W}$  изменяется монотонно, причём  $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$  ( $\leq 0$ ), если  $\Psi = F(\Omega)$  — возрастает (убывает), и равенство достигается лишь когда возмущение вихря исчезает на выходе потока из области.

Из леммы 1 стандартным образом выводится устойчивость максимальных и минимальных А-течений по Ляпунову относительно метрики энтропии, а при дополнительных условиях — асимптотическая устойчивость (что менее тривиально); подробности см. в [3–7].

**Примеры.** Г.В. Алексеев и Ю.А. Мокин [8] указали любопытные примеры А-течений в конечных криволинейных каналах. Пусть канал — криволинейная трапеция  $D = \{0 < y < h(x), x \in (0, l)\}$ ,  $h(x) > 0, x \in [0, l]$ , где  $h$  — решение уравнения  $h''/h = \beta, \beta \equiv \text{const}$ . Для всех таких  $h, \mathfrak{D} = hh'' - (h')^2 \equiv \text{const}$ . Мы нормируем  $h$ , полагая  $h(0) = 1$ . Течение определяется так: вихрь и функция тока выражаются через общую автомодельную переменную  $\eta = \sigma y/h(x) \in (0, \sigma)$ , так что  $\Psi = \Psi(\eta), \Omega = \Omega(\eta)$ , где  $\sigma = \sqrt{|\mathfrak{D}|}$ . Подробности см. в таблице 1.

Два качественно различных выражения  $\Psi(\eta)$  и  $\Omega(\eta)$ , приводят к следующей классификации: течение относится к эллиптическому типу, если  $\mathfrak{D} < 0$  и к гиперболическому типу, если  $\mathfrak{D} > 0$ .

Величина	Значения							
$\eta$	$\eta = \sigma y/h(x), \sigma = \sqrt{ \mathfrak{D} }$							
Поток	гиперболический				эллиптический			
$\mathfrak{D}$	$0 < \mathfrak{D} < 1$				$\mathfrak{D} < 0$			
$\Psi(\eta)$	$Q^{-1}\text{arth } \eta$				$Q^{-1}\text{arctg } \eta$			
$\Omega(\eta)$	$-\beta\eta Q^{-1}(1+\eta^2)(1-\eta^2)^{-2}$				$-\beta\eta Q^{-1}(1-\eta^2)(1+\eta^2)^{-2}$			
$Q$	$\text{arth } \sigma, \sigma = \sqrt{ \mathfrak{D} }$				$\text{arctg } \sigma, \sigma = \sqrt{ \mathfrak{D} }$			
$\Omega(\Psi)$	$-\beta\text{sh } (4Q\Psi)/(4Q), \beta > 0$				$-\beta\text{sin } (4Q\Psi)/(4Q), \beta \neq 0$			
$h(x)$	$\text{ch } \alpha x + \mu\text{sh } \alpha x$				$\cos \alpha x + \mu \sin \alpha x$		$\text{ch } \alpha x + \mu\text{sh } \alpha x$	
$\beta(\alpha)$	$\beta = \alpha^2 > 0$				$\beta = -\alpha^2 < 0$		$\beta = \alpha^2 > 0$	
Канал	chdf	chcf	hlms	edf	ecf	elms	shdf	shcf
$\mu \in$	$[0, 1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0]$	$(0, \infty)$	$(1, \infty)$	$(-\infty, -1)$
$\alpha l \in$	$(0, L_0)$	$(0, L_*)$	$(L_*, L_0)$	$(0, L_*)$	$(0, L_0)$	$(L_*, L_0)$	$(0, L_0)$	$(0, L_0)$
$\alpha L_*(\mu)$	—	$-\text{arth } \mu$	$-\text{arth } \mu$	$\text{arctg } \mu$	—	$\text{arctg } \mu$	—	—
$\alpha L_0(\mu)$	$+\infty$	—	$+\infty$	—	$-\text{arctg } \mu^{-1}$	$\pi - \text{arctg } \mu^{-1}$	$+\infty$	$-\text{arth } \mu^{-1}$

Таблица 1. Нормировочная константа  $Q$  в подобрана так, что  $\Psi(\bar{D}) = [0, 1]$ . Функция  $h$  зависит от параметра  $\mu = \alpha^{-1}h'(0)$ . Конфигурации каналов обозначаются следующим образом: chdf — вогнутый диффузор, ограниченный цепной линией; chcf — вогнутый конфузор, ограниченный цепной линией; hlms — вогнутая линза, ограниченная цепной линией; edf — выпуклый диффузор, ограниченный синусоидой; ecf — выпуклый конфузор, ограниченный синусоидой; elms — выпуклая линза, ограниченная синусоидой; shdf — вогнутый диффузор, ограниченный гиперболической синусоидой; shcf — вогнутый конфузор, ограниченный гиперболической синусоидой.  $L_0$  и  $L_*$  — наименьшие положительные нуль и критическая точка функции  $h$ .

Гиперболические течения определены лишь при  $\mathfrak{D} < 1$  и  $\beta > 0$ . Криволинейная граница гиперболического течения — цепная линия.

Течения эллиптического типа определены для всех  $\mathfrak{D} \neq 0$  и  $\beta$ , включая  $\beta = 0$ . При  $\beta = 0$  течение Алексева–Мокина потенциально, а канал — трапеция. Граница эллиптического течения — синусоида (тригонометрическая или гиперболическая).

В случае  $\mathfrak{D} = 0$  (что подразумевает  $\beta > 0$ ),  $h(x) = e^{\pm\alpha x}$ ,  $\alpha = \sqrt{\beta}$ ,  $\eta = y/h(x)$ ,  $\Psi = \eta$ ,  $\Omega = -\beta\eta$ , что немедленно даёт пример минимального А-течения.

Рассмотрев выражения  $\Omega(\Psi)$ , указанные в табл. 1, найдём, что все гиперболические течения минимальны. Эллиптические течения не минимальны ни при каких условиях, и максимальны при выполнении неравенств  $-\mathfrak{D} < 3 - 2\sqrt{2}$ ;  $-\beta < \lambda_1$ , причём второе из них тождественно истинно. В самом деле, пусть  $\beta = -\alpha^2 < 0$ . В этом случае возможны каналы трёх типов: elms, или edf, или ecf (см. табл. 1). Во всяком случае, длина канала не превосходит  $\pi/\alpha$ , а потому  $-\beta = \alpha^2 < (\pi/l)^2 < \lambda_1$  (канал покрывается вертикальной полосой ширины  $l$ ).

Течения Алексева–Мокина и их возмущения можно рассматривать при граничных условиях Юдовича. В таком случае все гиперболические течения устойчивы. Эллиптическое течение устойчиво, когда его параметры в области  $-\mathfrak{D} < 3 - 2\sqrt{2}$ . Вне этой области эллиптический поток — не А-течение. Вопрос о динамических явлениях, сопровождающих переход в область  $-\mathfrak{D} > 3 - 2\sqrt{2}$ , неясен. Не исключено, что он приводит к возбуждению колебательных течений.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В. И. Об одной априорной оценке гидродинамической теории устойчивости // Известия ВУЗов. Математика. 1966. Т. 5. С. 3–5.
- [2] Юдович В. И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область // Матем. сб. 1964. Т. 64(106). № 4. С. 562–588.
- [3] Моргулис А. Б., Юдович В. И. Асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания идеальной несжимаемой жидкости // СМЖ. 2002. Т. 43. № 4. С. 840–857.
- [4] Morgulis A. and Yudovich V. Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary // Chaos. 2002. Vol. 12. № 2. Pp. 356–371.
- [5] Govorukhin V. N., Morgulis A. B., Vladimirov V. A. Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 659. Pp. 420–472.
- [6] Моргулис А. Б., Говорухин В. Н., Владимиров В. А. Динамика течений идеальной несжимаемой жидкости с граничными условиями Юдовича // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск «Актуальные проблемы математической гидродинамики». С. 51–72.
- [7] Morgulis A. B. Non-linear Asymptotic Stability for the Through-Passing Flows of Inviscid Incompressible Fluid // Asymptotic Analysis. 2010. Vol. 66. Pp. 229–247.
- [8] Алексеев Г. В., Мокин Ю. А. Класс точных решений уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. 1972. Вып. 12. С. 5–13.

**Morgulis A. B.** *Variational principles for the open flows.* We consider 2D vortical fluid flows through a finite channel. The fluid is supposed to be inviscid incompressible and homogeneous. Such flows are naturally referred to as open ones since there are an inlet and an outlet through which the fluid is coming in and out of the channel. We discuss the variational properties of the open flows with the use of the Arnold functionals (1966). In the prior works such the functionals were applied for the flows with totally impermeable boundaries or possessing the spatial periodicity.

# К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ПЛОСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНЕ

Недин Р. Д.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Поставлена обратная задача идентификации трех компонент неоднородных предварительных напряжений в прямоугольной пластине при установившихся колебаниях. Сформулировано уравнение для построения итерационного процесса решения обратной задачи. Описан конечномерный подход к восстановлению предварительных напряжений на основе введения функции напряжений Эри и метод сведения уравнения обратной задачи к системе линейных алгебраических уравнений на каждой итерации. Приведены и обсуждены результаты проведения вычислительного эксперимента реконструкции.

**1. Введение.** Задачи механики деформируемого твердого тела при наличии предварительного напряженного состояния (ПНС) давно изучаются учеными-исследователями разных стран. Предварительные напряжения могут возникнуть в твердых телах вследствие неоднородной пластической деформации или жесткого соединения разных материалов в контактной зоне; такие поля напряжений очень часто появляются в процессах литья, прокатки, сварки, закалки, термообработки и других технологических операциях.

Все известные методы определения ПНС условно делят на три группы: разрушающие, полуразрушающие и неразрушающие методы. Несмотря на многочисленность методик определения ПНС, на сегодняшний день не существует универсальной техники. В то время как одни методы — разрушающие, другие могут измерять лишь однородное ПНС и близкое к нему, либо могут быть применимы только к определенным классам материала, или работать с отдельными областями предварительно напряженного тела. Много работ посвящено описанию недостатков и достоинств методик определения ПНС и их сравнению [4].

Тем не менее, отдельного внимания заслуживает метод акустического зондирования, обладающий рядом существенных преимуществ над другими методами: возможность идентификации неоднородного ПНС во всей области тела; применимость к любым типам материалов; применимость к толстым образцам; портативность, экономичность и быстрота использования [4].

В настоящей работе предложен подход к идентификации плоского поля неоднородных предварительных напряжений в тонкой упругой изотропной пластине на основе метода акустического зондирования.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим установившиеся планарные колебания предварительно напряженной тонкой изотропной прямоугольной пластины в рамках линеаризованной постановки, описанной в работе [2]. Пластина, занимающая область  $\Omega$ , жестко закреплена на части границы  $l_u$ , а на части  $l_\sigma$  действует осциллирующая нагрузка  $\underline{P}$  в плоскости пластины (см. рис. 1). Параметры материала (коэффициенты Ламе и плотность), размеры пластины и нагрузка  $\underline{P}|_{l_\sigma}$  заданы.

Также будем считать, что известна дополнительная информация о поле смещений  $\underline{u}|_{l_\sigma}$  под нагрузкой в конечном наборе частот  $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$ . Поставим задачу о

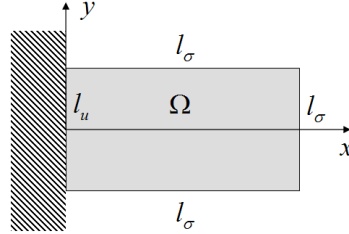


Рис. 1.

восстановлении неоднородного плоского поля предварительных напряжений, характеризующегося тремя компонентами симметричного тензора предварительных напряжений  $\sigma_{xx}^0(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}^0(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}^0(x, y)$ , удовлетворяющих уравнениям равновесия.

**3. Итерационный процесс.** Воспользуемся уравнением итерационного процесса для описанной выше обратной задачи, выведенным в работе [2] (о технике построения итерационных процессов в обратных задачах см. [1]):

$$\int_{\Omega} (\delta\sigma_{xx}^{0(n)} K_{xx}^{(n-1)} + \delta\sigma_{yy}^{0(n)} K_{yy}^{(n-1)} + \delta\tau_{xy}^{0(n)} K_{xy}^{(n-1)}) d\Omega = F^{(n-1)}, \quad (1)$$

где  $K_{xx}^{(n-1)} = u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2$ ,  $K_{yy}^{(n-1)} = u_{x,y}^2 + u_{y,y}^2$ ,  $K_{xy}^{(n-1)} = 2(u_{x,x}u_{x,y} + u_{y,x}u_{y,y})$ ,  
 $F^{(n-1)} = \int_{l_\sigma} (P_x(u_x - f_x) + P_y(u_y - f_y)) dl_\sigma$ .

Верхние индексы  $(n)$  и  $(n - 1)$  означают номера итерации (далее в записи будем их опускать);  $\delta\sigma_{xx}^0$ ,  $\delta\sigma_{yy}^0$ ,  $\delta\tau_{xy}^0$  — поправки к соответствующим компонентам предварительных напряжений;  $P_x$ ,  $P_y$  — компоненты вектора нагрузки;  $f_x$ ,  $f_y$  — компоненты заданного поля смещений под нагрузкой.

Выразим поправки  $\delta\sigma_{xx}^0$ ,  $\delta\sigma_{yy}^0$ ,  $\delta\tau_{xy}^0$  через одну функцию напряжений Эри  $\Phi(x, y)$ :

$$\delta\sigma_{xx}^0 = \Phi_{,yy}; \quad \delta\sigma_{yy}^0 = \Phi_{,xx}; \quad \delta\tau_{xy}^0 = -\Phi_{,xy}. \quad (2)$$

Таким образом, поставленную обратную задачу можно рассматривать как задачу идентификации одной функции предварительных напряжений Эри.

**4. Конечномерный подход к идентификации предварительных напряжений.** Представим функцию предварительных напряжений Эри  $\Phi(x, y)$  в виде конечной суммы

$$\Phi = \sum_{k=1}^N a_k \psi_k,$$

где  $a_k$  — неизвестные коэффициенты разложения,  $\psi_k$  — базисные функции.

В качестве базисных функций рассмотрим степени бигармонических полиномов второго, третьего и более высоких порядков.

Покажем для частного случая способ сведения уравнения (1) к системе линейных алгебраических уравнений на каждой итерации. Будем искать функцию Эри

в виде суммы бигармонических полиномов 2-ой, 3-ей и 4-ой степеней:

$$\Phi = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2, \\ \varphi_3 &= \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{6}y^3, \\ \varphi_4 &= \frac{a_4}{12}x^4 + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{c_4}{2}x^2y^2 + \frac{d_4}{6}xy^3 - \frac{(2c_4 + a_4)}{6}y^4. \end{aligned}$$

Тогда выражения для поправок к предварительным напряжениям с учетом (2) примут вид:

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{xx}^0 &= c_2 + c_3x + d_3y + c_4x^2 + d_4xy - (2c_4 + a_4)y^2, \\ \delta\sigma_{yy}^0 &= a_2 + a_3x + b_3y + a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2, \\ \delta\tau_{xy}^0 &= -b_2 - b_3x - c_3y - \frac{1}{2}b_4x^2 - 2c_4xy - \frac{1}{2}d_4y^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим:

$$a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 + a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 + d_3D_3 + a_4A_4 + b_4B_4 + c_4C_4 + d_4D_4 = F,$$

$$\text{где } A_2 = \int_{\Omega} K_{yy}d\Omega, \quad B_2 = -\int_{\Omega} K_{xy}d\Omega, \quad C_2 = \int_{\Omega} K_{xx}d\Omega,$$

$$A_3 = \int_{\Omega} xK_{yy}d\Omega, \quad B_3 = \int_{\Omega} (yK_{yy} - xK_{xy})d\Omega,$$

$$C_3 = \int_{\Omega} (xK_{xx} - yK_{xy})d\Omega, \quad D_3 = \int_{\Omega} yK_{xx}d\Omega,$$

$$A_4 = \int_{\Omega} (x^2K_{yy} - y^2K_{xx})d\Omega, \quad B_4 = \int_{\Omega} (xyK_{yy} - \frac{1}{2}x^2K_{xy})d\Omega,$$

$$C_4 = \int_{\Omega} ((x^2 - 2y^2)K_{xx} + y^2K_{yy} - 2xyK_{xy})d\Omega, \quad D_4 = \int_{\Omega} (xyK_{xx} - \frac{1}{2}y^2K_{xy})d\Omega.$$

Если зафиксировать несколько частот  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), то соотношение (6) можно рассматривать как СЛАУ

$$\begin{cases} a_2A_2(\omega_1) + b_2B_2(\omega_1) + c_2C_2(\omega_1) + \dots + d_4D_4(\omega_1) = F(\omega_1), \\ a_2A_2(\omega_2) + b_2B_2(\omega_2) + c_2C_2(\omega_2) + \dots + d_4D_4(\omega_2) = F(\omega_2), \\ \dots \\ a_2A_2(\omega_m) + b_2B_2(\omega_m) + c_2C_2(\omega_m) + \dots + d_4D_4(\omega_m) = F(\omega_m) \end{cases} \quad (4)$$

относительно неизвестных коэффициентов  $a_2, b_2, \dots, d_4$ , формирующих разложение функции предварительных напряжений Эри по степеням бигармонических полиномов. Решение этой системы означает нахождение поправки к функции Эри на текущей итерации.

Аналогичным образом можно рассмотреть более полные разложения функции Эри по степеням бигармонических полиномов и свести каждую итерацию решения обратной задачи к СЛАУ большего порядка.

**5. Вычислительные эксперименты.** Подробное описание структуры итерационного процесса подобной обратной задачи в случае восстановления одноосного предварительного напряженного состояния приводится в работе [2]. Отметим лишь, что на каждой итерации решается прямая задача с помощью метода конечных элементов, в результате чего вычисляется поле смещений (подробное исследование прямых задач для тонких пластин в случае планарных и изгибных колебаний приведено в работах [2, 3]), а также система линейных уравнений, описанная в предыдущем пункте. Система является плохообусловленной, поэтому для ее решения использован метод регуляризации А. Н. Тихонова.

Ниже следует один численный эксперимент идентификации плоского предварительного напряженного состояния описанным выше методом. Пластина нагружалась на верхней грани  $l_\sigma$  (см. рис. 1) равномерно-распределенной касательной зондирующей нагрузкой; функция Эри искалась в виде (3). Процесс завершился на четырех итерациях. В таблице 1 приведены значения коэффициентов точного распределения ПНС и реконструкции. На рис. 2 приведены графические результаты реконструкции.

Коэффициент	Точное значение	Реконструкция
$a_2$	15	16.281270
$b_2$	-20	-18.359302
$c_2$	11	12.003034
$a_3$	0.1	0.129832
$b_3$	0.09	0.109210
$c_3$	0.07	0.088171
$d_3$	0.01	0.009713
$a_4$	0.001	0.001347
$b_4$	0.002	0.002463
$c_4$	0.003	0.003217
$d_4$	0.001	0.000951

Таблица 1.

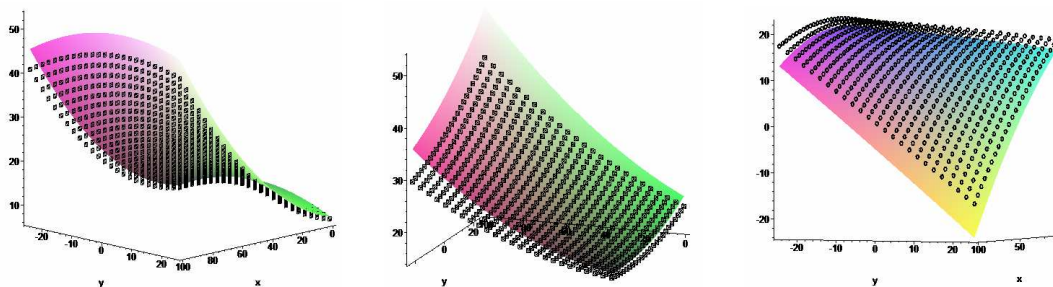


Рис. 2. Результат идентификации компонент предварительных напряжений. Слева направо:  $\delta\sigma_{xx}^0$ ,  $\delta\sigma_{yy}^0$ ,  $\delta\sigma_{xy}^0$ . Сплошная поверхность — точный закон распределения ПНС; точки — восстановленный закон ПНС.

**6. Заключение.** Выявлено, что предложенный метод дает довольно качественную реконструкцию плоского неоднородного ПНС (погрешность менее 8–10%), если порядок бигармонических полиномов в представлении компонент предварительных напряжений меньше или равен двум, т. е. в виде квадратичных функций, что соответствует функции Эри четвертого порядка. Однако, при рассмотрении степеней более высокого порядка в представлении функции Эри, точность реконструкции значительно ухудшается. Тем не менее, в рамках рассмотренного в вычислительном эксперименте представления функции Эри, предложенный метод представляет интерес за счет достаточно высокой точности реконструкции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватульян А. О. Итерационные процессы в обратных коэффициентных задачах // Труды XIV международной конференции «Современные проблемы МСС». Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2010. Т. 1. С. 81–85.
- [2] Ватульян А. О., Недин Р. Д. К идентификации неоднородных предварительных напряжений // Вестник Санкт-Петербургского Государственного университета. Сер.1. Математика, механика, астрономия. Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2011. С. 38–44.
- [3] Nedin R. D., Vatulyan A. O. On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates. *Advanced Structured Materials*. Vol. 15. Shell-like Structures — Nonclassical Theories and Applications. Springer. 2011. Pp. 165–182.
- [4] Withers P. J., Bhadeshia H. K. D. H. Residual stress. Part 1 — Measurement techniques. *Materials Science and Technology*. 2001. Vol. 17. Pp. 355–365.

**Nedin R. D.** *On the Inverse Problem of the Plane Inhomogeneous Prestress Reconstruction in Plate.* The inverse problem on the identification of three inhomogeneous prestress components in the rectangular plate in steady-state vibration mode is set. The iterative process equation of the inverse problem is formulated. The finite-dimensional approach to the prestress reconstruction is described on the basis of introduction of Airy stress function; the technique of leading the inverse problem to the system of linear algebraic equations at each iteration is given. The results of the reconstruction experiment are shown and discussed.

# РАЗГОН ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

**Норкин М. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Исследуется совместное движение эллиптического цилиндра и вязкой несжимаемой жидкости на малых временах. Рассматриваются случаи поступательно-вращательного разгона эллиптического цилиндра, полностью погруженного в жидкость и поступательного движения цилиндра, плавающего на ее поверхности. Особенностью этих задач является то, что в большинстве случаев начальный этап движения тела в жидкости сопровождается образованием волн, каверн и брызговых струй.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается эллиптический цилиндр, полностью погруженный в вязкую несжимаемую жидкость, занимающую ограниченную область прямоугольной формы. Предполагается, что цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным поступательным ускорением  $w_0$ , совершая при этом вращательные движения вокруг своей оси с постоянным угловым ускорением  $w_r$ . Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, центр которой совпадает с геометрическим центром эллипса, а оси параллельны соответствующим осям неподвижной системы координат, имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \dot{h}(t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (\bar{v}, \nabla) \bar{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \bar{v} - \frac{1}{Fr^2} \bar{k}, \quad \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1)$$

$$\left(-p + 2Re^{-1} \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) n_x + Re^{-1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) n_y = -\gamma \chi n_x, \quad R \in S_2(t), \quad (2)$$

$$Re^{-1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) n_x + \left(-p + 2Re^{-1} \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) n_y = -\gamma \chi n_y, \quad R \in S_2(t), \quad (3)$$

$$v_y = \frac{\partial \xi}{\partial x} (v_x - \dot{h}(t)) + \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t), \quad (4)$$

$$\bar{v} = \dot{h}(t) \bar{i} + \dot{\alpha}(t) (y \bar{i} - x \bar{k}), \quad R \in S_1, \quad (5)$$

$$\bar{v} = \bar{0}, \quad y = -H_b; \quad \bar{v} = \bar{0}, \quad x = H_R - 0.5t^2, -H_L - 0.5t^2, \quad (6)$$

$$\bar{v}(x, y, 0) = \bar{0}, \quad \xi(x, 0) = 0, \quad (7)$$

$$h(t) = 0.5t^2, \quad \alpha(t) = 0.5\omega_r t^2. \quad (8)$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам:

$$t' = \sqrt{\frac{a}{w_0}} t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad p' - p_a = \rho w_0 a p, \quad \bar{v}' = \sqrt{w_0 a} \bar{v}, \quad a\chi' = \chi. \quad (9)$$

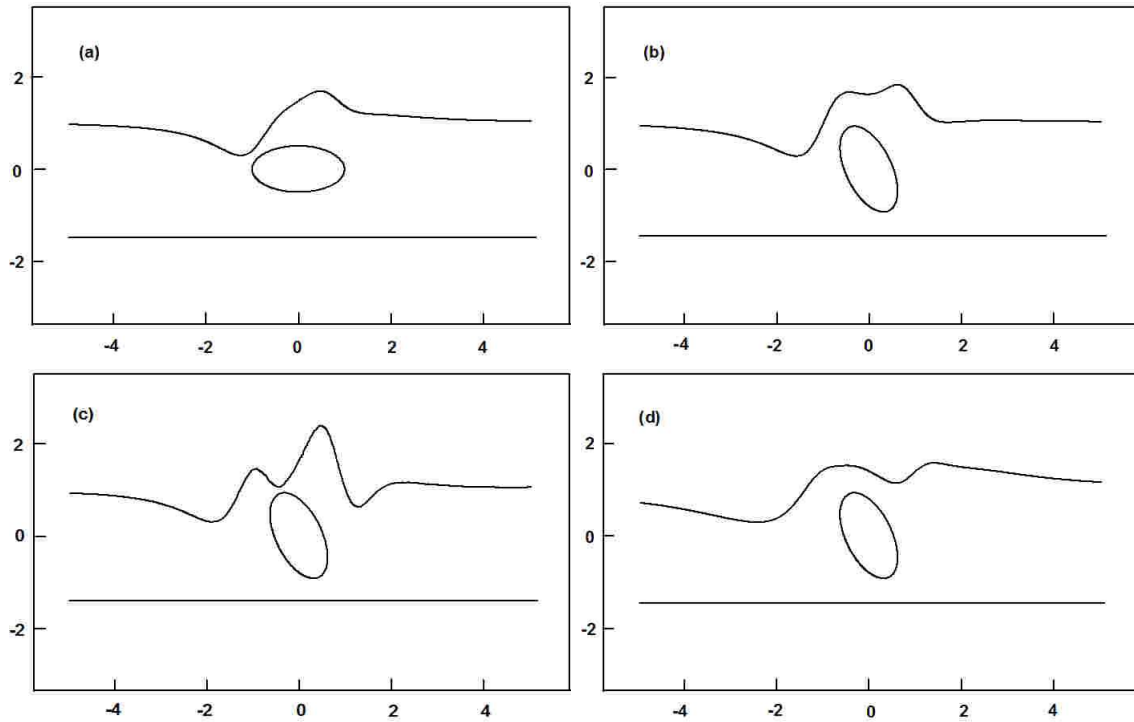


Рис. 1. Форма свободной границы жидкости при разгоне эллиптического цилиндра, полностью погруженного в вязкую жидкость. Влияние вращения цилиндра (b), поверхностного натяжения (c) и вязкости (d).

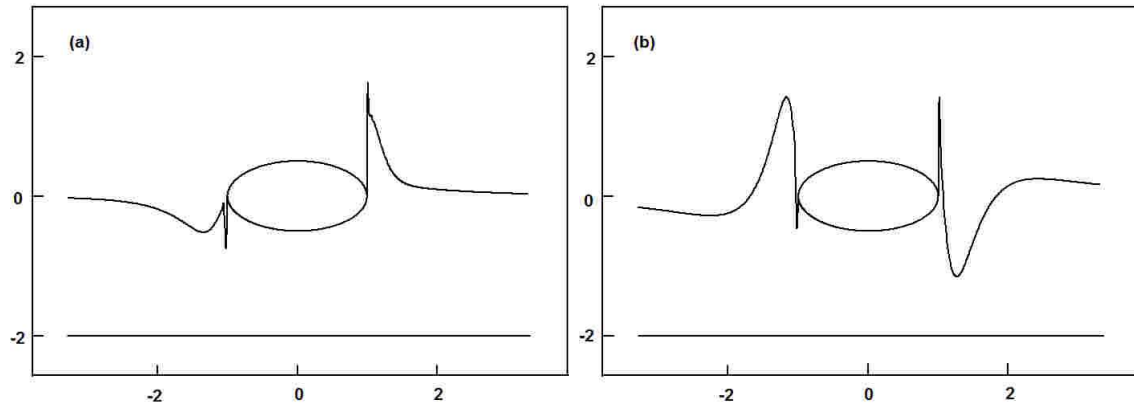


Рис. 2. Образование брызговых струй на начальном этапе движения эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности вязкой жидкости: (a)  $Fr = 0.5$ ; (b)  $Fr = 0.05$ .

где штрихами помечаются размерные величины.

Подвижные координаты  $x, y$  связаны с неподвижными  $x_1, y_1$  соотношениями:  $x = x_1 - h(t)$ ,  $y = y_1$ .

Здесь  $\bar{v} = \bar{v}(x, y, t)$ ,  $p = p(x, y, t)$  — скорость движения жидкости и давление, записанные относительно подвижной системы координат;  $p_a$  — атмосферное давление;  $\Omega(t)$  — область, занятая жидкостью;  $S_1$  — поверхность цилиндра;  $S_2(t)$  —



свободная граница жидкости;  $h(t)$  и  $\alpha(t)$  — перемещение и угол поворота цилиндра;  $a$  и  $b$  — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса;  $R$  — радиус-вектор с координатами  $(x, y)$ .

Функция  $\xi = \xi(x, t)$  определяет возмущение внешней свободной границы жидкости, уравнение которой относительно подвижной системы координат имеет вид:

$$y = H + \xi(x, t),$$

где  $H$  — глубина погружения цилиндра. На свободной границе задаются динамические условия (2), (3) и кинематическое условие (4). Кривизна свободной границы определяется по формуле:

$$\chi = -\frac{\xi_{xx}}{(1 + \xi_x^2)^{3/2}}.$$

Задача (1)–(8) содержит безразмерные параметры:

$$Re = \frac{a\sqrt{w_0 a}}{\nu}, \quad Fr = \sqrt{\frac{w_0}{g}}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho w_0 a^2}, \quad \omega_r = \frac{w_r a}{w_0}, \quad \alpha = \frac{b}{a},$$

где  $Re$  — число Рейнольдса;  $Fr$  — число Фруда;  $\gamma$  — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения;  $w_r$  — безразмерное угловое ускорение вращения цилиндра;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости;  $g$  — ускорение свободного падения.

Математическая модель (1)–(8) также описывает начальный этап движения эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности вязкой жидкости. Предполагается, что цилиндр начинает свое движение из состояния покоя и движется в горизонтальном направлении (без вращения,  $\omega_r = 0$ ) с постоянным ускорением. В работе рассматривается случай полупогруженного в жидкость эллиптического цилиндра.

**2. Асимптотическое решение задачи на малых временах.** Решение начально-краевой задачи (1)–(8) будем строить при помощи прямого асимптотического метода, основанного на предположении о том, что число Рейнольдса имеет одинаковый порядок с параметром, характеризующим малое время. В начале рассмотрим задачу о поступательно-вращательном разгоне эллиптического цилиндра, полностью погруженного в жидкость. Введем в рассмотрение быстрое время  $\tau$ , полагая

$$t = \varepsilon\tau,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Поле скоростей, давлений и возмущение внешней свободной границы жидкости будем искать в виде разложений [1]:

$$\bar{v}(x, y, \varepsilon\tau) = \varepsilon\bar{v}_0(x, y, \tau) + \varepsilon^3\bar{v}_1(x, y, \tau) + o(\varepsilon^3), \tag{10}$$

$$p(x, y, \varepsilon\tau) = p_0(x, y, \tau) + \varepsilon^2 p_1(x, y, \tau) + o(\varepsilon^2), \tag{11}$$

$$\xi(x, \varepsilon\tau) = \varepsilon^2 \xi_0(x, \tau) + \varepsilon^4 \xi_1(x, \tau) + o(\varepsilon^4), \tag{12}$$

$$Re = \delta^{-1}\varepsilon, \quad \delta = \text{const}. \tag{13}$$

Подставляя разложения (10)–(12) в уравнения, начальное и граничные условия задачи (1)–(8), перенося граничные условия с возмущенных участков границы

области  $\Omega(t)$  на первоначально невозмущенные уровни с помощью соответствующих разложений в ряды на малых временах, получим для определения первых двух приближений следующие начально-краевые задачи для линейных уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \tau} = -\nabla p_0 + \delta \Delta \bar{v}_0 - \frac{1}{Fr^2} \bar{k}, \quad \operatorname{div} \bar{v}_0 = 0, \quad \bar{v}_0(x, y, 0) = \bar{0}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} = 0, \quad -p_0 + 2\delta \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} = 0, \quad y = H, \quad (15)$$

$$\bar{v}_0 = \tau \bar{i} + \omega_r \tau (y \bar{i} - x \bar{k}), \quad R \in S_1, \quad (16)$$

$$\bar{v}_0 = \bar{0}, \quad y = -H_b; \quad \bar{v}_0 = \bar{0}, \quad x = H_R, -H_L, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \tau} = -\nabla p_1 + \delta \Delta \bar{v}_1 + \tau \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} - (\bar{v}_0, \nabla) \bar{v}_0, \quad \operatorname{div} \bar{v}_1 = 0, \quad \bar{v}_1(x, y, 0) = \bar{0}, \quad (18)$$

$$\delta \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right) = \left( -p_0 + 2\delta \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \right) \xi_{0x} - \delta \left( \frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{0y}}{\partial x \partial y} \right) \xi_0, \quad y = H, \quad (19)$$

$$-p_1 + 2\delta \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = \gamma \xi_{0xx} + \left( \frac{\partial p_0}{\partial y} - 2\delta \frac{\partial^2 v_{0y}}{\partial y^2} \right) \xi_0, \quad y = H, \quad (20)$$

$$\bar{v}_1 = -0.5 \omega_r^2 \tau^3 (x \bar{i} + y \bar{k}) - 0.5 \omega_r \tau^2 \left( \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} y - \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y} x \right), \quad R \in S_1, \quad (21)$$

$$\bar{v}_1 = \bar{0}, \quad y = -H_b; \quad \bar{v}_1 = 0.5 \tau^2 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x}, \quad x = H_R, -H_L. \quad (22)$$

Функции  $\xi_0(x, \tau)$  и  $\xi_1(x, \tau)$  определяются на основании равенств:

$$v_{0y} = \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \xi_0 + v_{1y} = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} (v_{0x} - \tau) + \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau}. \quad (23)$$

После решения начально-краевых задач (14)–(17), (18)–(22) и определения функций  $\xi_0(x, \tau)$  и  $\xi_1(x, \tau)$  возмущение внешней свободной границы жидкости находится по формуле (12).

Отметим, что члены порядка  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon$  соответственно в разложениях (10) и (11) равны нулю, так как они определяются решением задачи для линейного уравнения Навье–Стокса с нулевыми граничными и нулевым начальным условиями. Вследствие этого член порядка  $\varepsilon^3$  в разложении (12) также обращается в ноль.

Также обратим внимание на то, что свободный член в уравнении (14) может быть включен в давление  $p_0$  с помощью замены:  $p_0 + Fr^{-2}(y - H) = q$ . На основании этого возмущение свободной границы жидкости в главном приближении не будет зависеть от числа Фруда.

По аналогии строится решение задачи о начальном этапе движения эллиптического цилиндра, полупогруженного в вязкую жидкость. В этом случае коэффициенты асимптотических разложений (10)–(12) определяются по формулам (14)–(23), где  $\omega_r = 0$  и  $H = 0$ .

**3. Численная реализация и анализ результатов.** Для решения смешанных начально-краевых задач (14)–(17), (18)–(22) для линейных уравнений Навье–Стокса применяется метод шагов по времени. Производные по времени аппроксимируются обычными конечными разностями первого порядка, а остальные члены уравнений берутся в момент времени  $\tau_{m+1}$  (неявная схема). На каждом шаге по времени записываются слабые вариационные постановки задач, которые решаются численно с помощью пакета конечных элементов FreeFem++ [2].

Задача о начальном этапе движения эллиптического цилиндра, полностью погруженного в жидкость, исследовалась при следующих фиксированных значениях параметров задачи:  $Fr = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $t = 1.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $H = 1$ ,  $H_b = 1.5$ ,  $H_R = 6$ ,  $H_L = 6$ . При этом параметры, характеризующие влияние вязкости и поверхностного натяжения выбирались различными. На рис. 1 фигуры (a) и (b) соответствуют случаям  $\omega_r = 0; 1$  ( $\delta = 1, \gamma = 1$ ). Влияние коэффициента поверхностного натяжения на форму свободной границы жидкости показана на фигуре (c), которая отвечает случаю  $\gamma = 50, \omega_r = 1, \delta = 1$ . Роль вязкости показана на фигуре (d) ( $\omega_r = 1, \delta = 40, \gamma = 1$ ). Отметим, что вращение цилиндра, а также вязкость и поверхностное натяжение оказывают существенное влияние на конфигурацию внешней свободной границы жидкости.

Теперь рассмотрим задачу о разгоне эллиптического цилиндра, полупогруженного в жидкость. На фигуре (a) (рис. 2) показана форма свободной границы жидкости при  $Fr = 0.5$ ,  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $t = 1.5$ ,  $H_b = 2$ ,  $H_R = 6.5$ ,  $H_L = 6.5$ . На фигуре (b) изображена конфигурация свободной границы жидкости при  $Fr = 0.05$  (остальные параметры задачи не меняются). Отметим, что при малых числах Фруда перед цилиндром образуется впадина, аналогично случаю полностью погруженного цилиндра. Заметим также, что увеличение параметра  $\delta$  приводит к уменьшению интенсивности брызговых струй.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Норкин М. В. Начальный этап движения эллиптического цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52, № 2. С. 319–329.
- [2] Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

**Norkin M. V.** *Dispersal of the elliptic cylinder in a viscous incompressible liquid with a free surface.* Joint movement of the elliptic cylinder and viscous incompressible liquid on small times is considered. Progressive and rotational motion elliptic cylinder with constant accelerations fully immersed in the fluid and motion of the cylinder floating on its surface are considered. Feature of these tasks is that the initial phase of the motion of a body in a fluid is accompanied by the formation of waves, cavity and jets.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ С РАЗНЫМИ ЗАЗОРАМИ

**Овчинникова С. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе изучается влияние величины зазора между вращающимися концентрическими цилиндрами на устойчивость течения Куэтта. Оказалось, что при увеличении зазора между цилиндрами нейтральные кривые, соответствующие невращательно симметричным возмущениям с большим числом волн в азимутальном направлении, сначала перестают быть выпуклыми, затем становятся замкнутыми и, постепенно сжимаясь, исчезают. В случае больших зазоров уменьшается и число точек пересечения таких нейтральных кривых (точек бифуркации коразмерности 2).

Задаче об устойчивости течения жидкости между вращающимися цилиндрами посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ. Система концентрических цилиндров до сих пор остается эталоном для экспериментальных и теоретических исследований гидродинамической устойчивости и возможных переходов в течении жидкости, вплоть до развития турбулентности. Геометрия задачи особенно привлекательна для экспериментаторов, поскольку опыты могут проводиться в небольших замкнутых системах, и скорости вращения цилиндров, можно контролировать с высокой точностью.

Движение жидкости между бесконечными соосными цилиндрами радиусов  $r_1$ ,  $r_2$ , вращающимися с угловыми скоростями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно, описывается уравнениями Навье–Стокса, зависящими от безразмерных параметров:  $\eta = r_2/r_1$  — отношение радиусов и  $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$  — отношение угловых скоростей цилиндров,  $R = \Omega_1(r_2 - r_1)^2/\nu$  — безразмерное число Рейнольдса,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Скорость и давление предполагаются  $2\pi/\alpha$  периодичными вдоль оси цилиндров ( $\alpha$  — заданное осевое волновое число). При любых значениях параметров существует точное стационарное вращательно симметричное решение уравнений движения — течение Куэтта.

Система Навье–Стокса инвариантна относительно сдвигов вдоль, вращений вокруг общей оси цилиндров (оси  $z$ ) и преобразования инверсии. Поэтому в задаче устойчивости имеет место разделение переменных: переменные осевая  $z$ , азимутальная  $\theta$  и время  $t$  отделяются посредством множителя  $e^{\sigma t - i(\alpha z + m\theta)}$ . Здесь в силу очевидной периодичности по  $\theta$  азимутальное квантовое число  $m$  — целое. Множество чисел  $\sigma$  на мнимой оси, для которых линеаризованная на течении Куэтта система Навье–Стокса имеет ненулевые решения (нейтральные моды) при заданных  $(R, \Omega, \eta, \alpha)$ , образует нейтральный спектр устойчивости течения Куэтта. Критическими параметрами задачи называются такие значения, при которых в нейтральном спектре имеется хотя бы одно значение  $\sigma$ . Если в нейтральном спектре находится единственное значение  $\sigma = 0$ , то происходит монотонная потеря устойчивости, а если пара чисто мнимых значений  $\sigma = \pm i\omega_m$ , то — колебательная потеря устойчивости.

В [1] строго доказано, что в случае  $\Omega \geq 0$  существует строго упорядоченная по возрастанию последовательность критических чисел Рейнольдса  $R_*^{(p)}(\Omega, \eta, \alpha)$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , соответствующих стационарным вращательно симметричным течениям ( $\sigma = 0, m = 0$ ). Из результатов расчета следует, что такая последовательность существует и для невращательно симметричных возмущений ( $m \neq 0$ ), но она перестает быть монотонной.

Для различных квантовых чисел  $m$  в четырехмерном пространстве  $\Pi$  параметров задачи  $(R, \Omega, \eta, \alpha)$  имеются трехмерные семейства критических чисел Рейнольдса  $R_*^{(p)}(\Omega, \eta, \alpha)$ . Если в  $\Pi$  зафиксировать параметры  $\eta$  и  $\Omega$ , то  $R = R_*^{(p)}(\alpha, m)$  образуют на плоскости  $(R, \alpha)$  нейтральные кривые.

С экспериментальной точки зрения наибольший интерес представляют собой критические значения  $R_*$  и соответствующие им волновые числа  $\alpha_*$ , при которых происходит первая потеря устойчивости течения Куэтта  $R_*^*(m, \alpha_*, \Omega, \eta) = \min R_*^{(1)}(m, \alpha, \Omega, \eta)$ . При сонаправленном вращении ( $\Omega \geq 0$ ) цилиндров числам  $R_*^*(\alpha_*, \Omega, \eta)$  отвечают вращательно симметричные возмущения ( $m = 0$ ) [1]. Если в эксперименте медленно изменяется число Рейнольдса (угловая скорость внутреннего цилиндра), то на смену потерявшему устойчивость течению Куэтта появляется стационарное вращательно симметричное течение (вихри Тейлора) с осевым волновым числом  $\alpha \approx \alpha_*$  [2–4]. При значениях чисел  $R > R_*^*$  также наблюдается колебательная потеря устойчивости, причем появление каждого невращательно симметричного режима зависит от пути движения в пространстве параметров  $\Pi$  к заданному числу Рейнольдса  $R$ .

В этой работе рассматриваются цилиндры с узким зазором ( $1 < \eta \leq 2$ ) в случае, когда внешний цилиндр радиуса  $r_2$  находится в состоянии покоя, а внутренний вращается ( $\Omega = 0$ ). На рис. 1. изображены нейтральные кривые при  $\eta = 1.132577$  и  $\eta = 2$  в диапазоне изменения чисел Рейнольдса до 15-кратного значения  $R_*^*(\eta)$ .

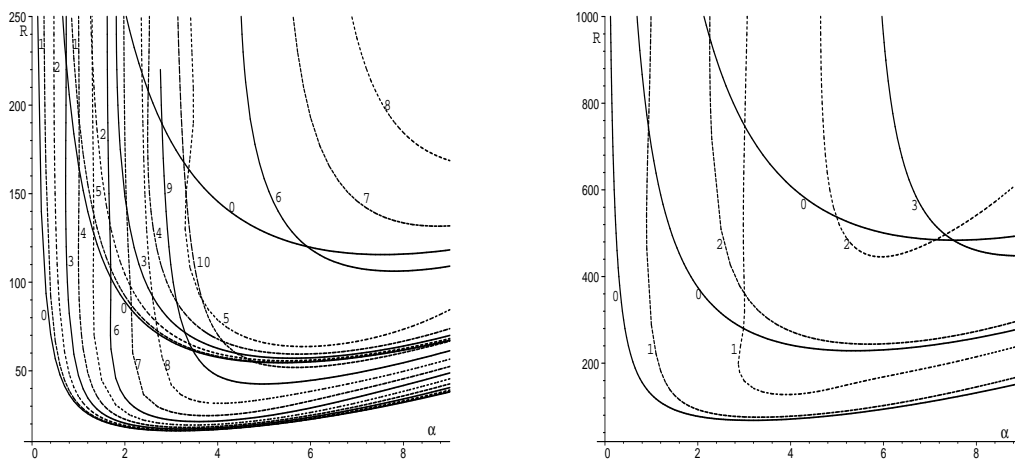


Рис. 1. Нейтральные кривые  $R = R_*^{(p)}(\alpha)$  при  $\Omega = 0$  и различных значениях азимутального квантового числа  $m$ . Слева  $\eta = 1.132577$ , справа  $\eta = 2$ . Рядом с каждой кривой написано соответствующее ей азимутальное число.

Три нейтральные кривые  $R = R_*^{(p)}(\alpha, \eta)$  ( $p = 1, 2, 3$ ), соответствующие вращательно симметричным возмущениям, качественно не изменяются для различных значений  $\eta$ . Совсем иначе ведут себя две нейтральные кривые ( $p = 1, 2$ ), построенные для невращательно симметричных возмущений ( $m \neq 0$ ). При возрастании  $\eta$  увеличивается расстояние между ними и при  $R \leq 15 R_*^*(\eta)$  для меньшего зазора  $\eta - 1 = 0.132577$  существуют больше нейтральных кривых с различными азимутальными числами ( $m = 1, 2, \dots, 11$ ), чем для  $\eta - 1 = 1$  ( $m = 1, 2, 3$ ).

Объяснить это можно тем, что при увеличении значения  $\eta$  нейтральные кривые, отвечающие большим азимутальным числам  $m$  и старшим числам Рейнольдса, сначала перестают быть выпуклыми, затем становятся замкнутыми, сжимаются и исчезают. На рис.2. изображено как это происходит с кривой  $R = R_*^{(2)}(\alpha, \eta)$ , соответствующей  $m = 4$ , для значений отношения радиусов цилиндров  $\eta = 1.2$ ,  $\eta = 1.25$ ,  $\eta = 1.275$ . При  $\eta = 1.325$  такая нейтральная кривая уже не существует.

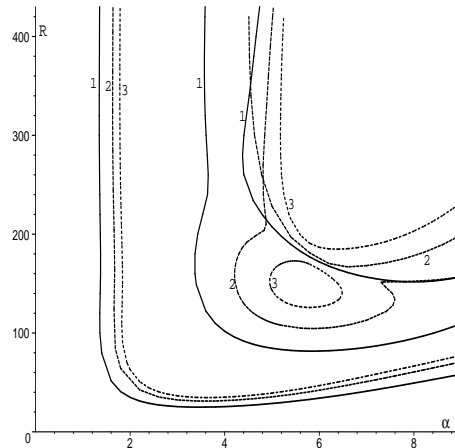


Рис. 2. Нейтральные кривые  $R = R_*^{(1)}(\alpha)$  и  $R = R_*^{(2)}(\alpha)$  при  $\Omega = 0$  и  $m = 4$ . Линии с номером 1 соответствуют  $\eta = 1.2$ , с номером 2 —  $\eta = 1.25$  и 3 —  $\eta = 1.275$ .

При любых значениях  $\eta$  нейтральные кривые, соответствующие различным азимутальным числам  $m$  и  $n$ , пересекаются. Пересекаются также кривые  $R = R_*^{(p_1)}$  и  $R = R_*^{(p_2)}$  с  $m = n$  и  $p_1 \neq p_2$ , лишь кривую  $R = R_*^{(1)}$  с  $m = 0$  не пересекает ни одна нейтральная кривая (рис. 1).

В точке пересечения (точке бифуркации коразмерности 2) у линеаризованной на течении Куэтта системы Навье–Стокса существует несколько независимых ненулевых решений (нейтральных мод). После появления работ В.И. Юдовича, Chossat P. и G. Iooss, нелинейное взаимодействие этих мод (точнее, слегка измененных) в малой окрестности точек бифуркации коразмерности 2 стало возможным описывать с помощью нелинейных амплитудных уравнений на центральном многообразии [5–7]. Исследование таких амплитудных систем открывает уникальные возможности для изучения вторичных, третичных и следующих за ними режимов, вплоть до развития хаоса в системе.

Точки пересечения нейтральных кривых образуют двупараметрическое семейство в пространстве параметров  $\Pi$ . Символом  $m/n$  ( $n \geq m$ ) обозначаются точки

пересечения  $(R_*, \alpha^*)$  нейтральных кривых  $R = R_*^{(p_1)}$  и  $R = R_*^{(p_2)}$  с квантовыми числами  $m$  и  $n$  соответственно.

На рис. 3 изображена зависимость критического числа Рейнольдса от параметра  $\eta$  в точках  $(R_*, \alpha^*)$ , отвечающих пересечения типа  $0/n$  и  $1/n$  для  $p_1 = 2$  и  $p_2 = 1$ ,  $\Omega = 0$  и значений чисел Рейнольдса  $60 < R < 220$ . На этом рисунке видно,

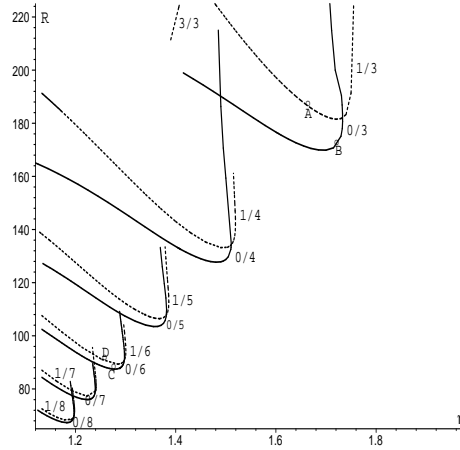


Рис. 3. Кривые зависимости  $R = R_*(\eta)$  в точках пересечения кривых  $(R_*, \alpha_*)$ . Рядом с каждой кривой написан тип соответствующих точек пересечения.

что при увеличении  $\eta$  исчезают пересечения с большими  $n$ .

Как исчезают такие пересечения при возрастании значения  $\eta$  показано на рис. 4. Сначала две нейтральные кривые пересекаются между собой в двух точках, затем при увеличении  $\eta$  эти точки сближаются, пока не исчезнут вовсе.

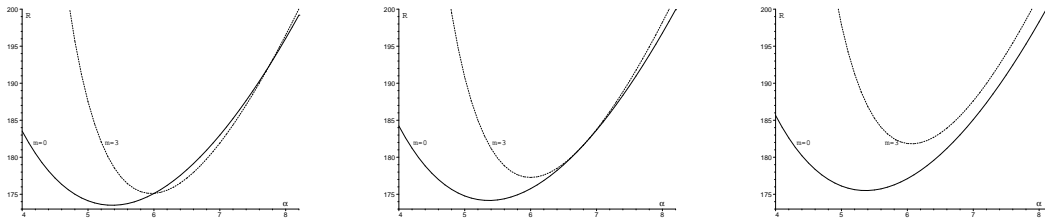


Рис. 4. Кривые зависимости  $R = R_*(\alpha)$  для  $\eta = 1.73$ ,  $\eta = 1.73326$ ,  $\eta = 1.74$ . Рядом с каждой кривой написано соответствующее ей квантовое число  $m$ .

Нейтральные кривые с одинаковыми азимутальными числами  $m = n$  пересекаются при больших числах Рейнольдса. Так, точки типа  $m/n = 3/3$  существуют при  $\eta > 1.39$  и  $R_* > 211.5$ , а точки  $m/n = 4/4$  — при  $\eta > 1.24$  и  $R_* > 233.5$ .

Анализ амплитудных систем, соответствующих вычисленным точкам бифуркации коразметности 2 типа  $m/n$ , показал, что в малой окрестности таких точек существуют устойчивые резонансные невращательно симметричные режимы с азимутальными числами  $m$  и (или)  $n$ . В случае узкого зазора ( $\eta = 1.144$ ) и

в экспериментах [2] при больших числах Рейнольдса наблюдались колебательные вихри с азимутальными числами, начиная с  $m = 4$  до  $m = 8$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-05-01138, № 12-01-00582-а).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами // ПММ. 1966. Т. 30, вып. 4. С. 688–698.
- [2] Coles D. Transition in circular Couette flow // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 21, part 3. P. 385–425.
- [3] Andereck C. D., Liu S. S., Swinney H. L. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 164. P. 155–183.
- [4] Dutcher Cari S., Muller Susan J. Spacio-temporal mode dynamics and higher order transitions in high aspect ratio Newtonian Taylor-Couette flows // J. Fluid Mech. 2009. Vol. 641. P. 85–113.
- [5] Юдович В. И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент, 1986. С. 661.
- [6] Chossat P., Demay Y., Iooss G. Interaction de modes azimutaux dans le problème de Couette–Taylor // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. № 3. 99. P. 213–248.
- [7] Chossat P., Iooss G. The Couette–Taylor Problem. N. Y.: Springer, 1991. 233 p.

**Ovchinnikova S. N.** *The stability of Couette flow between rotating cylinders with various gaps.* The work is devoted to the investigation of dependence of Couette flow instability on the width of gap between concentric rotating cylinders. As the gap widens, neutral curves corresponding to nonrotationally-symmetric disturbances with high azimuthal wave-numbers at first cease to be convex, then become closed and gradually narrowing, disappear completely. In the case of wide gap the number of points of intersection of such neutral curves (codimension-2 bifurcation points) also decreases.



# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРООЖИЖЕННОГО СЛОЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПОЛКАМИ

Орлова Н. С.

*Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Была исследована двухжидкостная модель с использованием закона Дарси для описания движения виброожиженного слоя мелкодисперсных частиц между двумя колеблющимися полками. Получены расчеты по распределению объемной доли частиц при различных значениях толщины засыпки слоя и расстояния между двумя полками.

**1. Двухжидкостная модель.** Ранее было исследовано ожигение частиц стекла, диаметром 0,13 мм, которое создавалось под воздействием вертикальных колебаний полки. Использовалась двухжидкостная модель, которая содержит уравнение неразрывности и уравнение количества движения для твердой фазы (1)–(2) и уравнения для газовой фазы, полученные с учетом закона Дарси (3)–(4), в одномерном приближении [1, 2]:

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s V_s)}{\partial z} = -\alpha_s \frac{\partial P}{\partial z} + \beta(V_g - V_s) - G(\alpha_g) \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \rho_s \alpha_s g; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_g \mu_g} \frac{\partial(\rho_g \alpha_g k \frac{\partial P}{\partial z})}{\partial z} - \frac{\rho_g}{\alpha_g} \frac{\partial V_s}{\partial z} - V_s \frac{\partial \rho_g}{\partial z}; \quad (3)$$

$$V_g = V_s - \frac{k}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z}; \quad (4)$$

где  $\rho_g, V_g, \alpha_g$  — плотность, скорость, объемная доля газа; а  $\rho_s, V_s, \alpha_s$  — плотность, скорость, объемная доля твердых частиц, соответственно;  $P$  — давление газовой фазы;  $\beta$  — коэффициент обмена импульсами на поверхности раздела двух фаз;  $G(\alpha_g)$  — коэффициент межчастичного взаимодействия;  $\sigma$  — напряжения, возникающие в слое частиц;  $k$  — проницаемость слоя частиц;  $g$  — ускорение свободного падения в проекции на ось  $z$ ;  $\mu_g$  — динамическая вязкость газа. Давление газа  $P$  рассчитывалось с помощью уравнения состояния для идеального газа при условии, что температура газа постоянна и равна 20°C. Более подробное описание двухжидкостной модели виброожижения с использованием закона Дарси представлено в работах [1, 2].

В данной работе исследовалось движение виброожиженного слоя частиц стекла между двумя колеблющимися полками (верхней и нижней) с использованием двухжидкостной модели.

**2. Метод решения.** Уравнения (1)–(4) записывались в конечно-разностном виде. На каждом временном слое применялся метод итераций. Параметры  $P, \rho_g,$

$\alpha_g$  ( $\alpha_g = 1 - \alpha_s$ ) и  $\alpha_s$  рассчитывались в центре вычислительной ячейки, а скорости обеих фаз — на границах ячейки, т.е. использовалась сетка со смещенными узлами [3].

Нижняя полка колеблется по закону  $z_{1w} = A \sin \varphi$ , а верхняя полка — по закону  $z_{2w} = L + A \sin \varphi$ , где  $L$  — расстояние между двумя полками в начальный момент времени,  $\varphi = \omega t$ . Амплитуда колебаний  $A$  меньше, чем половина шага сетки. Циклическая частота колебаний полки  $\omega = 2\pi f$ . Положения центров всех вычислительных ячеек, кроме ближайших к нижней и верхней полкам, и их размеры при колебаниях полок не меняются, а ближайшие к полкам ячейки уменьшались или увеличивались в зависимости от положения полок [4].

До момента отрыва частиц от нижней полки скорость частиц в вычислительной ячейке, ближайшей к нижней полке, определялась как полусумма скорости полки и скорости частиц на верхней границе вычислительной ячейки. Предполагалось, что слой отрывается от полки когда значение объемной доли частиц в этой ячейке становилось меньше значения 0,05. После отрыва скорость частиц в центре вычислительной ячейки, ближайшей к полке, принималась равной их скорости на верхней границе этой ячейки.

Такие же условия принимались для значения скорости частиц в центре вычислительной ячейки, ближайшей к верхней полке. В случае, если значение объемной доли частиц в этой ячейке было равно нулю, то значение скорости частиц принималось равным нулю. Для остальных параметров условия на верхней границе, соответствующей верхней полке, предполагались такими же, как на нижней границе, соответствующей нижней полке. Подробно эти условия, а также начальные условия описаны в работах [1, 2].

В расчетах использовались следующие значения шагов по координате и времени:  $\delta z = 2A$ ,  $\delta t = 1 \cdot 10^{-7}$  сек.

**3. Результаты.** На рис. 1, 2 представлены расчеты по распределению объемной доли частиц в виброоживленном слое, который движется между двумя полками. Амплитуда и частота колебаний полок  $A = 1,42$  мм и  $f = 50$  Гц, соответственно. На рис. 1 представлены расчеты для слоя с толщиной засыпки  $H = 28$  мм, расстояние между полками принималось равным  $L = 51$  мм. На рис. 2 представлены расчеты для слоя с толщиной засыпки  $H = 51$  мм, расстояние между полками принималось равным  $L = 85$  мм.

Результаты расчетов получены после нескольких периодов колебаний полки, когда изменение со временем давления газа в нижней и верхней частях слоя частиц устанавливается. Получено, что в случае больших значений частот колебаний полок давление газа в этих частях слоя практически не меняется со временем. На рис. 3 представлено изменение разности давления газа в нижней части слоя и атмосферного давления в миллиметрах водяного столба для слоя с толщиной засыпки  $H = 28$  мм и расстоянием между полками  $L = 51$  мм ( $f = 100$  Гц). По оси абсцисс отложены значения фазы колебаний полок в градусах.

Для слоя с толщиной засыпки  $H = 28$  мм были проведены расчеты при разных значениях расстояния между двумя полками  $L$  (от 40 мм до 74 мм). Для слоя с толщиной засыпки  $H = 51$  мм также были проведены расчеты при разных значениях  $L$  (от 62 мм до 97 мм).

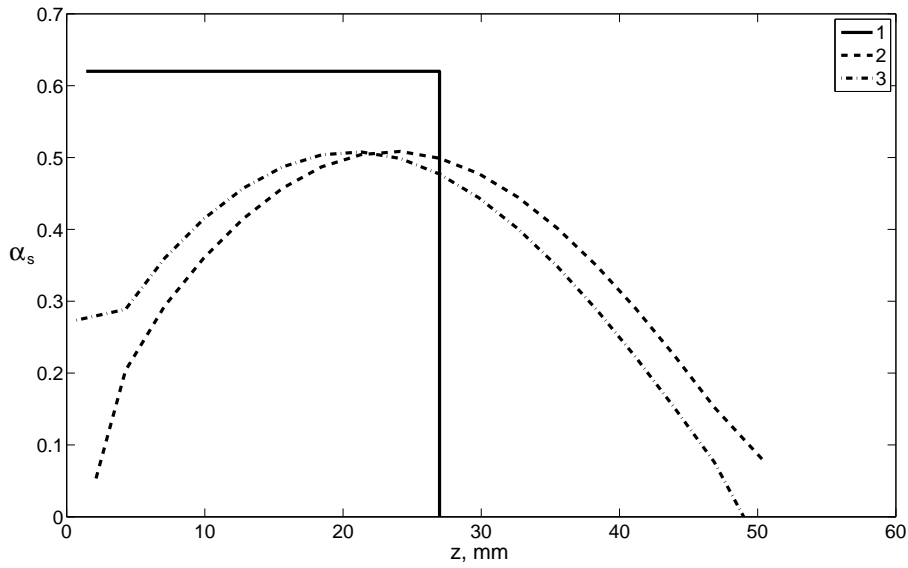


Рис. 1. Распределение объемной доли частиц ( $H = 28$  мм,  $L = 51$  мм).

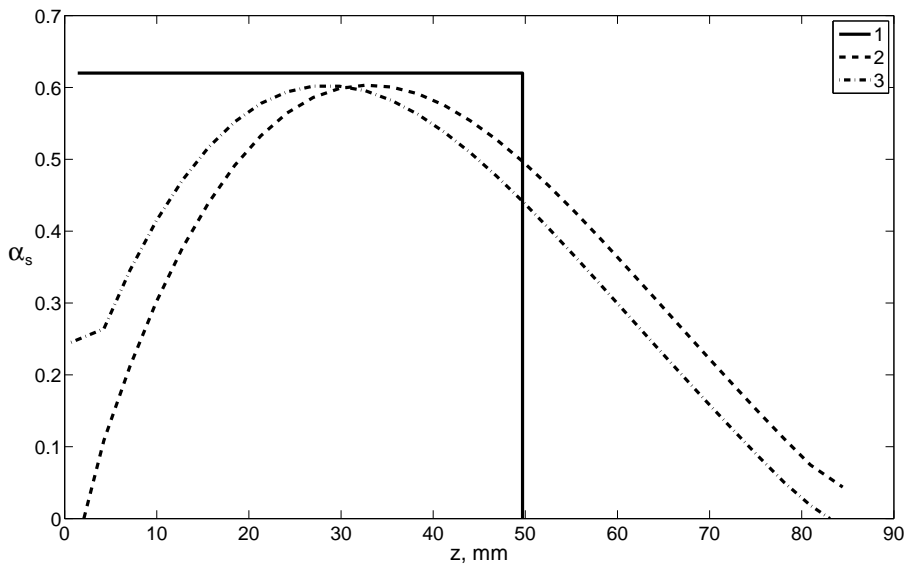


Рис. 2. Распределение объемной доли частиц ( $H = 51$  мм,  $L = 85$  мм).

Из рисунков видно, что максимальное значение объемной доли частиц  $\alpha_{s\max}$  в виброожуженном слое с толщиной засыпки 28 мм (рис. 1) равно 0,51 и меньше значения 0,6, которое получается в случае для более толстого слоя толщиной засыпки 51 мм (рис. 2). То есть более тонкий слой в процессе виброожужения находится в более разрыхленном состоянии, чем более толстый слой. При этом расстояние между двумя полками в обоих случаях равно примерно двум толщинам засыпки слоя. При разных значениях расстояния между двумя полками  $L$  кри-

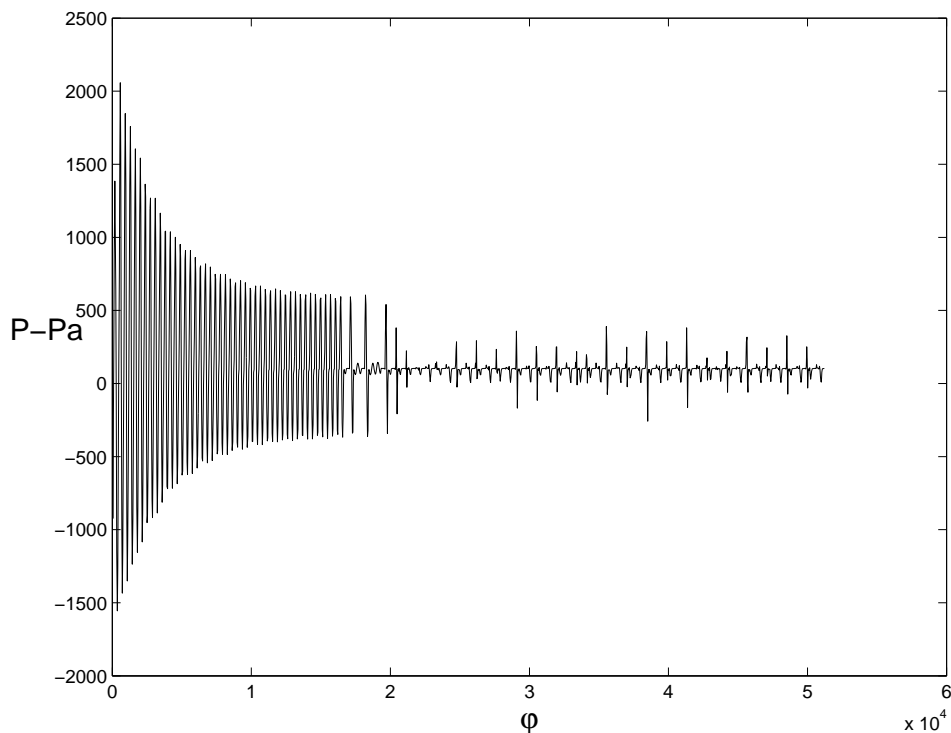


Рис. 3. Изменение разности давления газа и атмосферного давления.

$L$ мм	40	51	62	74
$\alpha_{s \max}$	0,62	0,51	0,43	0,39

Таблица 1. Максимальное значение  $\alpha_s$  ( $H = 28$  мм,  $f = 50$  Гц).

вые распределения объемной доли частиц качественно похожи на изображенные на рис. 1, 2. Следует отметить, что при уменьшении значения  $L$  слой находится в более плотном состоянии, а при увеличении этого значения — в более разрыхленном. Но, если значение  $L$  больше, чем значение двух толщин засыпки слоя, то слой практически не сталкивается с верхней полкой, так как значение объемной доли частиц в вычислительной ячейке, ближайшей к верхней полке, не бывает больше 0,03.

Также были проведены расчеты по распределению объемной доли частиц между двумя колеблющимися полками при более высоком значении частоты колебаний полки 100 Гц. Расчеты показали, что распределения частиц по высоте не отличаются от кривых для случая, когда частота равна 50 Гц. Незначительно отличаются максимальное значение объемной доли частиц  $\alpha_{s \max}$  в слое и значения  $\alpha_s$  вблизи верхней и нижней полок.

В таблице 1 приведены максимальные значения объемной доли частиц в виброожиженном слое с толщиной засыпки 28 мм при частоте колебаний полок  $f = 50$  Гц. Из таблицы видно, что значения  $\alpha_{s \max}$  уменьшаются с увеличением расстояния между полками  $L$ . Это свидетельствует о том, что слой переходит в более разрыхленное состояние.

В таблице 2 приведены максимальные значения объемной доли частиц  $\alpha_{s \max}$

$L$ мм	62	74	85	97
$\alpha_{s \max}$	0,62	0,62	0,6	0,57

Таблица 2. Максимальное значение  $\alpha_s$  ( $H = 51$  мм,  $f = 50$  Гц).

в виброоживленном слое с толщиной засыпки 51 мм при значениях частоты колебаний полок  $f = 50$  Гц.

Видно, что при больших значениях расстояния между полками  $L = 85$  мм и  $L = 97$  мм значения  $\alpha_{s \max}$  меньше. По-видимому, в этих случаях при высоких частотах колебаний полок слой частиц не успевает перейти в более разрыхленное состояние.

**4. Выводы.** Таким образом, исследование двухжидкостной модели с использованием закона Дарси для описания движения виброоживленного слоя частиц стекла, диаметром 0,13 мм, между двумя колеблющимися полками при разных значениях частоты колебаний, толщины засыпки слоя и расстояния между полками показало, что в случае относительно невысоких значений частоты колебаний полок (50 Гц) и толщины засыпки слоя (28 мм) и больших значениях расстояния между полками, не превышающих двух толщин засыпки, слой в процессе виброоживления переходит в более разрыхленное состояние.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлова Н. С. Тестирование двух моделей виброоживленного слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2012. № 2. С. 42–45.
- [2] Орлова Н. С. Двухжидкостная модель виброоживления на основе подхода Эйлера с использованием закона Дарси // Материалы Второго Международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. С. 213–215.
- [3] Harlow F.H. Amsden A.A. Numerical calculation of multiphase flow // J. of Computational physics. 1975. № 17. Pp. 19–52.
- [4] Tatemoto Y., Mawatari Y., Yasukawa T., Noda K./ Numerical simulation of particle motion in vibrated fluidized bed // Chem. Eng. Science. 2004. № 59. Pp. 437–447.

**Orlova N. S.** *Simulation of vibrofluidized bed motion between two vibrated walls.* The two-fluid model using Darcy law for description of vibrofluidized bed motion between two vibrated walls was investigated. Numerical calculations of solids volumetric fraction distribution for different values of filling thickness bed and the distance between the two walls were obtained.

# ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

**Осипов А. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрены изгибно-крутильные колебания стержней переменной жесткости. Для решения построенной краевой задачи реализован метод пристрелки. Определены функции смещения и угла поворота в наборе точек. В рамках изучаемой модели рассмотрена обратная задача по восстановлению переменных модуля Юнга и модуля сдвига по информации о смещениях и углах поворота, заданных в наборе точек.

**1. Постановка прямой задачи.** В настоящее время все больше внимания уделяется исследованиям колебаний неоднородных стержней, являющихся элементами многих конструкций. Элементы стержневых конструкций имеют важное значение в авиастроении, автомобилестроении, машиностроении. В данной работе рассмотрены изгибно-крутильные колебания стержней переменной жесткости. Из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получены корректные уравнения и граничные условия для изгибно-крутильных колебаний консольно закрепленной балки с неоднородными физическими и геометрическими характеристиками. На свободном конце действует нагружение моментом. Задача описывается системой двух дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами [1]:

$$\begin{cases} I_y(E(x_1)u''(x_1))'' - \rho\omega^2 Fu''(x_1) - \rho\omega^2 S_x \theta(x_1) = 0, \\ I_\varphi(E(x_1)\theta''(x_1))'' - I_d(G(x_1)\theta'(x_1))' - \rho\omega^2 I_p \theta(x_1) - \rho\omega^2 S_x u(x_1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad I_y E(l)u''(l) = M, \quad (I_y E(x_1)u''(x_1))'(l) = 0, \\ \theta(0) = 0, \quad \theta'(0) = 0, \\ I_\phi E(l)\theta''(l) = 0, \quad ((I_\phi E(x_1)\theta''(x_1))' - I_d G(x_1)\theta'(x_1))(l) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве модельного примера рассмотрим изгибно-крутильные колебания консольно закрепленной балки с постоянным по всей длине поперечным сечением. Осуществлено обезразмеривание задачи, введена безразмерная координата  $x = \frac{x_1}{l}$ , а также следующие параметры и переменные:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{E(x)}{E_0}, \quad C(x) = \frac{G(x)}{G_0}, \\ k^4 &= \frac{\rho\omega^2 Fl^4}{I_y E_0}, \quad \alpha^2 = \frac{\rho\omega^2 I_p l^2}{I_d G_0}, \\ b_1 &= \frac{S_x}{F}, \quad b_2 = \frac{E_0}{G_0} \frac{I_\phi}{I_d l^4}, \quad b_3 = \frac{1}{l^2}, \quad b_4 = \frac{F}{I_p}. \end{aligned}$$

Таким образом, краевая задача (1)–(2) в безразмерных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} (B(x)u''(x))'' - k^4u(x) - b_1k^4\theta(x) = 0, \\ b_2(B(x)\theta''(x))'' - b_3(C(x)\theta'(x))' - \alpha^2\theta(x) - b_1b_2\alpha^2u(x) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad I_y B(1)u''(1) = 1, \quad (B(x)u''(x))'(1) = 0, \\ \theta(0) = 0, \quad \theta'(0) = 0, \\ b_2 B(1)\theta''(1) = 0, \quad ((b_2 B(x)\theta''(x))' - b_3 C(x)\theta'(x))(1) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Построенная краевая задача (3)–(4) решена методом пристрелки, который заключается в сведении задачи к канонической системе восьми дифференциальных уравнений первого порядка и решении четырех независимых задач Коши с различными граничными условиями. В результате сведения введены следующие функции:

$$\begin{aligned} u_1(x) = u'(x), \quad u_2(x) = B(x)u''(x), \quad u_3(x) = u'_2(x), \\ \theta_1(x) = \theta'(x), \quad \theta_2(x) = B(x)\theta''(x), \quad \theta_3(x) = b_2\theta'_2(x) - b_3C(x)\theta_1(x). \end{aligned}$$

Таким образом, задача принимает следующий вид:

$$\begin{cases} u'(x) = u_1(x), & u(0) = 0, \\ u'_1(x) = \frac{u_2(x)}{B(x)}, & u_1(x) = 0, \\ u'_2(x) = u_3(x), & u_2(1) = 1, \\ u'_3(x) = k^4u(x) + b_1\theta(x), & u_3(1) = 0, \\ \theta'(x) = \theta_1(x), & \theta(0) = 0, \\ \theta'_1(x) = \frac{\theta_2(x)}{B(x)}, & \theta_1(0) = 0, \\ \theta'_2(x) = \frac{1}{b_2}(\theta_3(x) + b_3C(x)\theta_1(x)), & \theta_2(1) = 0, \\ \theta'_3(x) = \alpha^2\theta(x) + b_1b_4\alpha^2u(x), & \theta_3(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Для нахождения функции смещения  $u(x)$  и функции изгиба  $\theta(x)$  будем решать четыре независимые задачи Коши, каждая из которых представляет собой систему восьми дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями, заданными в точке  $x = 0$ , то есть в дополнение к уже заданным на левом конце граничным условиям для функций  $u(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $\theta(x)$ ,  $\theta_1(x)$  будут заданы граничные условия для функций  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$ ,  $\theta_2(x)$ ,  $\theta_3(x)$  различные для каждой из задач:

$$\begin{aligned} \text{Задача 1: } u_2^{(1)}(0) = 1, \quad u_3^{(1)}(0) = 0, \quad \theta_2^{(1)}(0) = 0, \quad \theta_3^{(1)}(0) = 0 \\ \text{Задача 2: } u_2^{(2)}(0) = 0, \quad u_3^{(2)}(0) = 1, \quad \theta_2^{(2)}(0) = 0, \quad \theta_3^{(2)}(0) = 0 \\ \text{Задача 3: } u_2^{(3)}(0) = 0, \quad u_3^{(3)}(0) = 0, \quad \theta_2^{(3)}(0) = 1, \quad \theta_3^{(3)}(0) = 0 \\ \text{Задача 4: } u_2^{(4)}(0) = 0, \quad u_3^{(4)}(0) = 0, \quad \theta_2^{(4)}(0) = 0, \quad \theta_3^{(4)}(0) = 1 \end{aligned}$$

Далее необходимо удовлетворить граничным условиям на правом конце, то есть решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 u_2^{(1)}(1) + \alpha_2 u_2^{(2)}(1) + \alpha_3 u_2^{(3)}(1) + \alpha_4 u_2^{(4)}(1) = 1, \\ \alpha_1 u_3^{(1)}(1) + \alpha_2 u_3^{(2)}(1) + \alpha_3 u_3^{(3)}(1) + \alpha_4 u_3^{(4)}(1) = 0, \\ \alpha_1 \theta_2^{(1)}(1) + \alpha_2 \theta_2^{(2)}(1) + \alpha_3 \theta_2^{(3)}(1) + \alpha_4 \theta_2^{(4)}(1) = 0, \\ \alpha_1 \theta_3^{(1)}(1) + \alpha_2 \theta_3^{(2)}(1) + \alpha_3 \theta_3^{(3)}(1) + \alpha_4 \theta_3^{(4)}(1) = 0. \end{cases}$$

Таким образом можно получить значения функции изгиба и угла поворота:

$$u(x) = \alpha_1 u^{(1)}(x) + \alpha_2 u^{(2)}(x) + \alpha_3 u^{(3)}(x) + \alpha_4 u^{(4)}(x),$$

$$\theta(x) = \alpha_1 \theta^{(1)}(x) + \alpha_2 \theta^{(2)}(x) + \alpha_3 \theta^{(3)}(x) + \alpha_4 \theta^{(4)}(x).$$

Для оценки точности вычислений сравним численное решение, полученное в наборе точек в результате реализации программы в пакете Maple, и точное решение, полученное при аналитическом решении задачи (3)–(4) при  $B(x) = B - const$ ,  $C(x) = C - const$ ,  $b_1 = 0$ . На рисунке 1 представлены графики точного и приближенного решений для функции смещения  $u(x)$ .

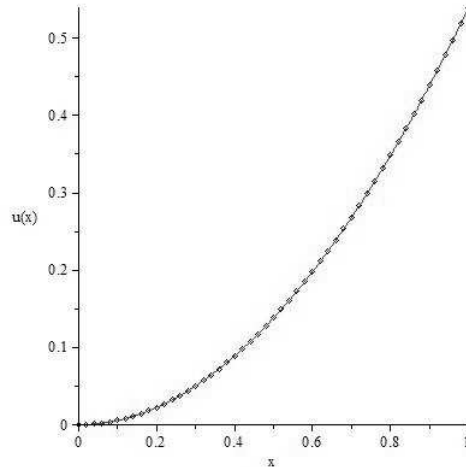


Рис. 1. Сравнительное представление приближенного и точного решения при  $k = 1$ .

Как видно из рисунка 1, погрешность предложенного метода не превышает 1–2%, что говорит о работоспособности предложенного метода. Проведена серия вычислительных экспериментов по решению задачи для различных законов изменения жесткости и модуля сдвига: монотонно возрастающие функции, монотонно убывающие функции, немонотонные функции, кусочно-разрывные функции. На рисунке 2 представлен результат решения прямой задачи при  $B(x) = 1 + x^2$  (монотонно возрастающая функция),  $C(x) = 1 + e^{-x}$  (монотонно убывающая функция),  $k = 1$ .

**2. Постановка обратной задачи.** Требуется восстановить функции  $B(x)$  и  $C(x)$  по значениям функций  $u(x)$  и  $\theta(x)$  (которые в рамках проведенного в работе вычислительного эксперимента взяты из решения прямой задачи и заданы в наборе точек) [2]. Функция  $B(x)$  восстанавливается из первого уравнения системы (3).



Отметим, что данное дифференциальное уравнение относительно функции  $B(x)$  имеет второй порядок, и для ее определения необходимо решать задачу Коши. Некорректность обратной задачи проявляется в том, что необходимо находить первые и вторые производные от функций, заданных в наборе точек. Поэтому, на первом этапе аппроксимируем функции  $u(x)$  и  $\theta(x)$  сплайнами пятой степени [3], что позволяет находить первую и вторую производные с достаточной степенью точности. На втором этапе построим операторное выражение, связывающее функцию  $B(x)$  с функциями  $u(x)$  и  $\theta(x)$ . Дважды интегрируя первое уравнение системы (3) от 1 до  $x$ , получим:

$$B(x) = \frac{1 - \int_x^1 (k^4 u(\xi) + b_1 k^4 \theta(\xi)) d\xi}{u''(x)}. \quad (6)$$

Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению функции  $B(x)$  для различных видов неоднородностей: монотонно возрастающие функции, монотонно убывающие функции, немонотонные функции, кусочно-разрывные функции. На рисунке 3 приведен результат восстановления монотонно возрастающей функции, как видно из рисунка, погрешность восстановления не превышает 4-5%.

Функцию  $C(x)$  будем восстанавливать из второго уравнения системы (3) по заданной информации о функциях  $u(x)$  и  $\theta(x)$  и найденной функции  $B(x)$ . Методом, описанным выше, получим операторное уравнение для функции  $C(x)$ :

$$C(x) = \frac{b_2 (B(x) u''(x))' + \int_x^1 (\alpha^2 \theta(\xi) + b_1 b_4 \alpha^2 u(\xi)) d(\xi)}{b_3 \theta'(x)}. \quad (7)$$

Из полученного операторного уравнения заметно, что предложенный способ не может быть применен для восстановления функции  $C(x)$ , так как в уравнении (7)

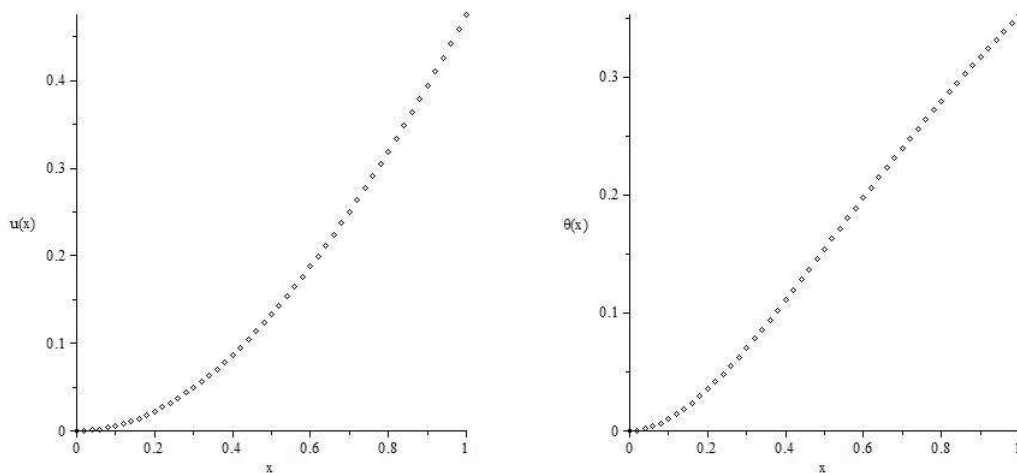


Рис. 2. Функция смещения  $u(x)$  и функция изгиба  $\theta(x)$ .

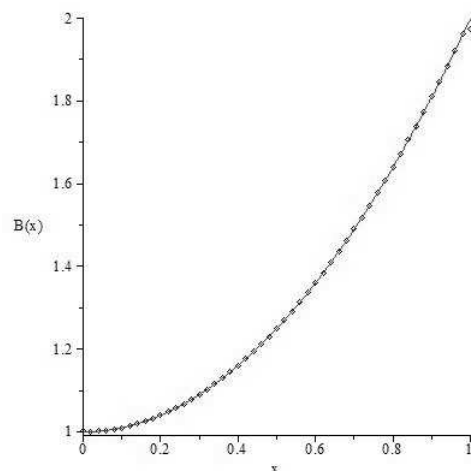


Рис. 3. Решение обратной задачи для функции  $B(x) = 1 + x^2$ .

в знаменателе стоит первая производная функции изгиба  $\theta(x)$ , которая, согласно граничным условиям (4) в точке  $x = 0$  равна нулю. Следовательно, предложенный способ может быть применен только для восстановления безразмерной жесткости  $B(x)$ .

Автор выражает благодарность профессору Ватульяну А. О. за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
- [2] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
- [3] Березин И. С. Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 620 с.

**Osipov A. V.** *Flexural-torsional vibrations of rods of variable stiffness.* This article describes the flexural-torsional vibrations of rods of variable stiffness. To solve the boundary value problem constructed realized the shooting method. The functions of the displacement and the rotation angle in a set of points. As part of the study model, the inverse problem is to restore the variable Young's modulus and shear modulus for the offset and rotation angles defined in a set of points.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ – ДЕФОРМИРУЕМАЯ ОБОЛОЧКА ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

**Поддубный А. А.\* , Устинов Ю. А.\*\***

*\*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.*

*Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

*\*\*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Исследовано распространение пульсовой волны в артериальном сосуде переменного диаметра. Численный эксперимент строится на основе двух видов сужения: скачкообразном и параболической формы. Исследование проводилось с использованием методов гармонического анализа. Для этого систола пульсовой волны на временном отрезке, равном  $1/3$  сердечного цикла, аппроксимировалась отрезком ряда Фурье. Для участков со скачкообразным изменением диаметра артериального сосуда решение представлялось в виде суперпозиции гармонических волн с положительными и отрицательными волновыми числами, а амплитуды гармонических волн определялись из условий непрерывности давления и расхода на сечения сопряжения участков. На участках с параболическими сужениями сечения использовался численный метод построения фундаментальных решений с положительным и отрицательным значениями отвечающего им вектора Пойтинга–Умова (ВПУ). Общее решение представлялось в виде линейной комбинации этих решений, коэффициенты которых определялись также из условий непрерывности давления и расхода. В качестве характеристики сопротивления сужений распространению пульсовой волны был выбран энергетический коэффициент прохождения (ЭКП). Была проведена серия расчетов для анализа изменения величины ЭКП в зависимости от параметров сужения (радиуса, длины, формы).

Сужение сосудов препятствует течению крови, а следовательно, некоторые части организма испытывают нехватку кислорода и питательных веществ. Слово «стеноз» происходит от греческого «stenosis» и обозначает сужение. Применительно к сердечно-сосудистой системе, стеноз — это сужение кровеносных сосудов вследствие отложений на стенках сосудов. По сути, стеноз артерий является локальным проявлением атеросклероза. Стенозирование также связано с нарушением эндотелиальной функции — то есть, с невозможностью сосудорасширения и ухудшением синтеза различных химических веществ. Сильный стеноз артерий сопровождается формированием атеросклеротических бляшек, которые могут со временем полностью перекрыть поток крови в сосуде. Стеноз артерий бывает различной формы и степени. В значительной степени эти характеристики влияют на кровоток и полноту возложенных на него функций.

В [1] на основе анализа изменения величины вектора Пойтинга–Умова, отвечающего пучку гармонических волн, формирующих систолу, исследованы энергетические потери в зависимости от формы сужения и его геометрических параметров. В текущей работе аналогичный анализ проводится для двух сужений,

расположенных последовательно. Как и в [1] рассмотрены два типа сужений — скачкообразное и параболическое.

Сердечный цикл — последовательность событий, происходящих между каждым двумя ударами сердца. Кровь проникает в сердце, когда оно расслаблено, заполняя предсердия и желудочки. Сжатие желудочков выталкивает кровь из сердца, после чего желудочки снова расслабляются, и сердце начинает заполняться, после чего цикл повторяется.

Обозначим через  $T$  — период сердечного цикла,  $T_c$  — временной отрезок систолы,  $T_d = T - T_c$  — временной отрезок диастолы. Давление на выходе из левого желудочка (на входе в аорту) представим следующим выражением

$$\begin{aligned} p &= p_{tm} + (\eta^2 - \varepsilon^2)^2, & -\varepsilon \leq \eta \leq \varepsilon, \\ p &= p_{tm}, & -1 + \varepsilon \leq \eta \leq 1 - \varepsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\eta = t/T$ ,  $2\varepsilon = T_c/T$ ,  $t$  — время,  $p_{tm}$  — трансмуральное давление [2].

**Модель I.** Рассмотрим распространение волны давления в полом упругом цилиндре, у которого диаметр изменяется скачкообразно (рис. 1) на основе модели И. С. Громеко. Согласно этой модели динамические процессы описываются следующей системой дифференциальных уравнений движения

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 p_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} = 0, \quad c_i = \sqrt{G_i/\rho_c}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (2)$$

при выполнении условий непрерывности давления  $p$  и скорости  $v$  на стыке участков 1–2, 2–3, 3–4 и 4–5. В формуле (2)  $\rho$  — плотность крови,  $G_i = h_i E/d_i$  — жесткости участков сосуда при воздействии на них внутреннего давления,  $h_i$  — толщины стенки соответствующих участков сосуда,  $d_i$  — диаметры их срединных поверхностей. Формула для жесткости вытекает из безмоментной теории тонкостенной цилиндрической оболочки. Для толстостенных участков при проведении расчетов жесткости определялись на основе решения задачи Ляме [3], так как в области стеноза толщина стенки сосуда может быть соизмерима с ее внутренним радиусом. При этом скорость волны давления на каждом участке рассчитывалась по формуле

$$c_i = \sqrt{\frac{E(1 - x_i^2)}{2\rho(1 + x_i^2 + \nu(1 - x_i^2))}}. \quad (3)$$

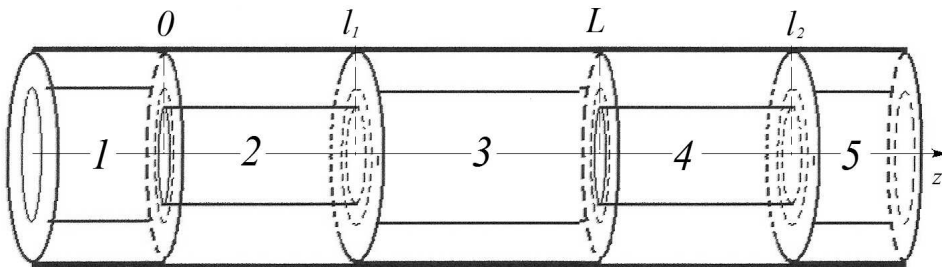


Рис. 1.

Здесь  $x_i = a_{i1}/a$ ,  $a_{i1}$  — внутренний радиус соответствующего участка,  $a$  — наружный радиус, который принимался одинаковым для всех участков.

Построение решения проводилось методами гармонического анализа. Для этого выражение (1) представлялось в виде ряда Фурье

$$p_N = p_{st} + P \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N f_n e^{-in(\eta-\varepsilon)} \right], \quad p_{st} = p_{tm} + P f_0, \quad (4)$$

где

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 d\eta', \quad f_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 \cos n\eta' d\eta'.$$

Затем на участках 1,2,3,4 решение представлялось в виде суперпозиции гармонических волн «набегающей волны» с положительными волновыми числами и амплитудами  $A_n = P f_n$  и суперпозиции гармонических волн «отраженной волны» с отрицательными волновыми числами и неизвестными амплитудами  $A_{1n} = P f_{1n}$ . На пятом участке решение отыскивалось в виде суперпозиции гармонических волн с положительными волновыми числами и неизвестными амплитудами  $A_{5n} = P f_{5n}$ . Амплитуды этих волн определялись на основе условий сопряжения.

Для оценки энергетических потерь на участке 1 вычислялись векторы потоков энергии

$$V = P^2 \sum_{n=1}^N n f_n^2, \quad V_1 = -P^2 \sum_{n=1}^N n f_{1n}^2 \quad (5)$$

«набегающей волны» и «отраженной волны» соответственно, и поток энергии «прошедшей волны» на участке 5

$$V_5 = P^2 \sum_{n=1}^N n f_{5n}^2. \quad (6)$$

Неизвестные коэффициенты  $f_{1n}, f_{5n}$  определялись из алгебраических систем, вытекающих из условий сопряжения на разрезах 1–2, 2–3, 3–4 и 4–5.

Оценка энергетических потерь на «отраженную волну» проводилась путем расчета энергетических коэффициентов отражения и прохождения по формулам

$$K_1 = V_1/V, \quad K_5 = |V_5|/V. \quad (7)$$

**Модель II.** В этой модели сужения моделировались отрезками оболочки, средний радиус которой изменялся по следующему закону.

$$\begin{aligned} 0,00038z^2 + 0,00076z + 0,007, & \quad 0 < z < l_1; \\ 0,00038z^2 - 0,00456z + 0,0203, & \quad L < z < l_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим модернизированное уравнение И. С. Громеко:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( c^2(z) \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \omega_i^2 p = 0, \quad i = 1..8, \quad (9)$$

где  $\rho$  — плотность крови,  $c(z)$  — фазовая скорость,  $\omega_i$  — несущая частота

На рис. 2 изображена оболочка с двумя последовательными параболическими сужениями. В данной модели жесткость определялась в соответствии с теорией тонкостенных оболочек по формуле (10)

$$c(z) = \sqrt{\frac{Eh(z)}{2\rho c a(z)}}, \quad (10)$$

где  $h(z)$  — толщина стенки оболочки,  $a(z)$  — радиус срединной поверхности оболочки,  $\rho_c$  — плотность материала оболочки.

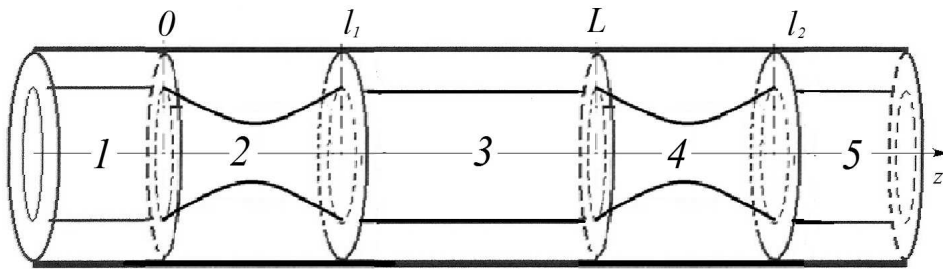


Рис. 2.

Аналогично первой модели построение решения проводилось методами гармонического анализа. На участке 2 и 4 численно решалась система обыкновенных дифференциальных уравнений (11), полученная с помощью замены из уравнения (9):

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial z} = \frac{y_2}{c^2(z)}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial z} = -\omega_i^2 y_1. \end{cases} \quad (11)$$

Для участка 2 брались начальные условия:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, & y_1(l_1) = e^{ik_2 l_1}, \\ y_2(0) = ik_2, & y_2(l_1) = -ik_2 e^{ik_2 l_1}. \end{cases} \quad (12)$$

А для участка 4 соответственно:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, & y_1(l_2) = e^{ik_2 l_2}, \\ y_2(0) = ik_2, & y_2(l_2) = -ik_2 e^{ik_2 l_2}. \end{cases} \quad (13)$$

На основе полученного решения были найдены значения неизвестных амплитуд давления. Проведен сравнительный анализ энергетических коэффициентов прохождения, полученных на основе двух моделей (5)–(7). Ниже приводится таблица результатов для различных параметров задачи: радиуса сужения и длины сужения. Первое число в каждой ячейке отвечает модели, где сужения моделируются скачкообразно, второе — модели с параболическими сужениями. Длины последовательных сужений совпадают.

	$l_1 = l_2 - L = 0,5$	$l_1 = l_2 - L = 2$	$l_1 = l_2 - L = 4$
$a_2 = 0.0060$	0.799; 0.759	0.765; 0.719	0.690; 0.653
$a_2 = 0.0062$	0.842; 0.793	0.787; 0.739	0.739; 0.689
$a_2 = 0.0064$	0.902; 0.828	0.836; 0.785	0.768; 0.713

Таблица 1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Поддубный А. А., Устинов Ю. А. Анализ энергетических потерь при распространении гармонических волн в сосуде с переменным диаметром // Труды XV международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» Том 1. С. 194–196.
- [2] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, Физматлит, 1970. 940 с.
- [3] Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [4] Регирер С. А. Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. 270 с.
- [5] Парашин П. И., Иткин Г. П. Биомеханика кровообращения. М.: МГТУ имени Баумана, 2005. 244 с.
- [6] Бегун П. И., Шукейло Ю. А. Биомеханика: Учебник для вузов. СПб: Политехника, 2000. 463 с.
- [7] Пуриня Б. А., Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов. Рига: Знание. 1980. 260 с.

**Poddubny A. A., Ustinov Y. A.** *Investigation of energy losses during propagation of harmonic waves in the system of viscous liquid – deformable shell with variable diameter.* The propagation of the pulse wave in blood vessels of variable diameter was studied. The numerical experiment is based on two kinds of restrictions: sudden and parabolic shape. The study was conducted using the methods of harmonic analysis. Systolic pulse wave in the time interval equaling to one third of the cardiac cycle, is approximated by a segment of the Fourier series. For areas with an abrupt change in diameter of blood vessel solution is represented as a superposition of harmonic waves with positive and negative wave numbers, and the amplitudes of harmonic waves were determined from the conditions of continuity of pressure and flow at the interface section of land. In areas with a parabolic cross-section contractions numerical method was used for constructing the fundamental solutions with positive and negative values of the corresponding vectors Pointing–Umov (VPU). The general solution is represented as a linear combination of these solutions, the coefficients were also determined from the conditions of continuity of the pressure and flow rate. As an indication of the resistance of the restrictions of pulse wave was selected energy transmission coefficient (ETC). A series of calculations, based on the mathematical model, were made, depending on the parameters of the restriction (radius, length, shape).

# ТЕОРИЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СРЕД С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

**Роговой А. А.**

*Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь*

Все кинематические и силовые величины в сложных средах определяются историей термо-упруго-неупругого процесса, происходящего в них. Для описания истории процесса наиболее удобна процедура, основанная на кинематике наложения малых деформаций на конечные. Обычно эта процедура используется при решении нелинейных краевых задач методом последовательного нагружения (силового и/или кинематического). Однако, эта процедура эффективна и для построения кинематических соотношений термо-упруго-неупругого процесса и определяющих уравнений, которые удовлетворяют принципам термодинамики и объективности. Совокупность положений, основанных на этой процедуре, и составляет теорию построения моделей сложных сред с конечными деформациями и структурными изменениями в материале.

Определяющие соотношения для сложных сред при малых деформациях могут быть построены, используя простой, но эффективный подход, основанный на возможности представить полную деформацию суммой упругих, неупругих и температурных деформаций. Аналогичный подход может быть положен в основу построения определяющих соотношений термо-упруго-неупругих процессов при конечных деформациях. Но для того, чтобы иметь возможность суммировать деформации, необходимо ввести, помимо начальной и текущей конфигураций, еще и промежуточную конфигурацию, близкую к текущей, и использовать деформации, возникающие при переходе из промежуточной конфигурации в эту близкую текущую.

В работах [1-6] разработана теория построения моделей, описывающих поведение сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях в материалах и удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности. Теория основана на кинематике наложения малых деформаций на конечные. Для учета изменения в процессе деформирования структуры материала введены скалярные структурные параметры, зависящие от неупругой и температурной кинематики и влияющие на параметры определяющих уравнений, описывающих упругие и неупругие процессы в среде. Предложен функционал, основанный на упругом потенциале и совпадающий с ним в случае чисто упругого процесса. Функционал является одним из слагаемых в свободной энергии. Используя первый закон термодинамики, построено уравнение теплопроводности. Выделены источники тепла, производимого упругими деформациями, неупругими деформациями и структурными изменениями, происходящими в материале.

Основываясь на соотношениях разработанной теории, построены эволюционные модели термоупругого процесса при конечных деформациях, изотермического вязкоупругого процесса без структурных изменений в материале, термоупруго-пластического процесса со структурными изменениями в материале (адиабатиче-



ское сжатие образца), построена модель сплава с памятью формы (аустенитно-мартенситный переход) при конечных деформациях (помимо указанных ниже работ, полученные по этим задачам результаты приведены в обзорной статье [6]) и модель поведения мягкого магнитного материала в постоянном в начальной конфигурации внешнем магнитном поле.

В работе [7] рассмотренная выше теория использована для решения связанной термоупругой задачи о больших деформациях в стежке при его изотермическом и адиабатическом растяжении. Осуществлена вариационная постановка задачи. Показано, что соотношения теории адекватно описывают такие экспериментальные факты поведения эластомеров, как энтропийная упругость, температурная инверсия и снижение температуры на начальном участке адиабатического растяжения с последующим ее возрастанием.

В работе [2] в рамках изложенной выше теории построена модель вязкоупругого изотермического процесса с большими деформациями и конечным спектром времен релаксации. Параметры модели идентифицированы, используя экспериментальные данные для реального материала. Идентифицированная модель с приемлемой точностью описала как другие независимые эксперименты, так и эффекты, присущие вязкоупругому материалу такие, как зависимость от скорости нагружения, гистерезисные явления и эффект учета слабой упругой сжимаемости материала при действии гидростатического давления в вязкоупругом материале.

Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и т. п. и энергий их взаимодействия. На макроуровне это новое состояние структуры материала проявляется в изменении его упругих и пластических характеристик. В последние годы появились систематические экспериментальные исследования, позволяющие разделить затраченную пластическую работу на запасенную и тепловую части энергии. Для правильной интерпретации полученных в этих работах результатов необходим подход, приводящий в рамках конечных деформаций к уравнению теплопроводности, а именно к той его части, которая связана с производством тепла неупругими деформациями и структурными изменениями, происходящими в материале. Опираясь на полученные в работах [1–6] результаты и используя экспериментальные данные, установлена связь структурного параметра с мерой неупругих деформаций [8, 9]. Вычисленное в рамках разрабатываемой теории температурное поле [6] находится в хорошем согласии с данными эксперимента по адиабатическому сжатию образца.

Развиваемый подход и полученные теоретические результаты использованы при построении корректных определяющих уравнений для конечных упруго-неупругих деформаций материалов, испытывающих аустенитно-мартенситный фазовый переход (материалов с памятью формы) [10]. Аустенитная фаза переходит при охлаждении в мартенситную (прямой переход), а мартенситная при нагревании в аустенитную (обратный переход). При этом представительный объем материала могут составлять доли обеих фаз, имеющих разные физико-механические свойства. Фазовые деформации, возникающие при этом, зависят не только от температуры, но и от напряжений, которые, в свою очередь, определяются фазовыми же деформациями. Для описания фазовых деформаций используется теория,

развиваемая в работах А.А. Мовчана. Для решения связанной краевой задачи выполнена вариационная постановка. Вариационное уравнение Лагранжа записано относительно начальной конфигурации. Для его численной реализации использован метод конечных элементов и процедура линеаризации. В рамках последней кинематические и силовые величины представлены через их значения в промежуточной конфигурации и приращения, сопровождающие переход в близкую текущую. Полученные соотношения аттестованы на задаче о деформировании стержня с одним жестко закрепленным концом. Стержень состоит из двух слоев, один из которых - материал с памятью формы, а другой - полимер. Рассмотрены прямой и обратный мартенситные переходы.

Рассмотрена задача о поведении мягкого магнитного материала в постоянном в начальной конфигурации внешнем магнитном поле [11]. Под мягким магнитным материалом здесь понимается полимер, наполненный частичками железа. Такой материал мягкий как по механическим свойствам, так и по магнитным. Внешнее магнитное поле возбуждает в образце из такого материала поверхностные и массовые (пондеромоторные) силы. Деформируясь, образец изменяет внешнее поле, что, в свою очередь, приводит к изменению поверхностных и массовых сил. Вариационная постановка связанной краевой задачи представлена в виде двух уравнений - вариационного уравнения Лагранжа и вариационного уравнения для магнитного поля. Уравнения записаны относительно начальной конфигурации. Для их численной реализации использован метод конечных элементов и процедура линеаризации. В рамках последней магнитные, кинематические и силовые величины представлены через их значения в промежуточной конфигурации и приращения, сопровождающие переход в близкую текущую. Рассмотрена задача о больших деформациях стержня из мягкого магнитного материала во внешнем магнитном поле. Один из концов стержня жестко закреплен. Начальное внешнее магнитное поле постоянное, но по-разному направлено к оси стержня.

Работа выполнена в ведущей научной школе (гранты Президента РФ НШ-8055.2006.1, НШ-3717.2008.1, НШ-7529.2010.1 и НШ-5389.2012.1) в рамках программ фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (09-Т-1-1006, 12-Т-1-1004), программ совместных фундаментальных исследований, выполняемых УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (09-С-1-1008, 12-С-1-1015), Государственных контрактов с Федеральным агентством по науке и инновациям (№ 02.740.11.0442, № 12.740.11.0689) и при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 10-01-00055, № 10-01-96008).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новокшанов Р. С., Роговой А. А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика Твёрдого Тела. 2002. № 4. С. 77–95.
- [2] Новокшанов Р. С., Роговой А. А. Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. Механика Твёрдого Тела. 2005. № 4. С. 122–144.
- [3] Роговой А. А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 5. С. 138–149.
- [4] Роговой А. А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48. № 4. С. 144–153.
- [5] Роговой А. А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 165–172.
- [6] Rogovoy A. A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2012. V. 24. Pp. 81–114 (DOI 10.1007/s00161-011-0220-y).
- [7] Роговой А. А., Столбова О. С. Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
- [8] Роговой А. А. Конечные деформации в материалах со структурными изменениями // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2010. Т. 152. Кн. 4. С. 210–224.
- [9] Роговой А. А. Конечные деформации в материалах со структурными изменениями // Физико-химическая кинетика в газовой динамике (электр. журнал). 2011. Т. 11. (<http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-021.pdf>)
- [10] Роговой А. А., Столбова О. С. Построение определяющих соотношений упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в материалах с памятью формы // Труды XVII Зимней школы по механике сплошных сред (электронный ресурс). Пермь–Екатеринбург. 2011. Электрон. оптич. диск. (CD). 10 с.
- [11] Путин Н. А., Роговой А. А. Деформирование пластины в магнитном поле // Труды XVII Зимней школы по механике сплошных сред (электронный ресурс). Пермь–Екатеринбург. 2011. Электрон. оптич. диск. (CD). 7 с.

**Rogovoy A. A.** *The theory of model construction for complex media with finite deformations.* All kinematic and force quantities in a complex medium are defined by the history of thermo-elastic-inelastic processes occurring in it. For description of the process history the procedure, based on kinematics of the superposition of small deformations on the finite ones, has proved to be more suitable. Usually this procedure is applied to solve the nonlinear boundary value problems by a stepwise method. However, such a procedure is effective for constructing both the kinematic relations of thermo-elastic-inelastic processes and the constitutive equations, which satisfy thermodynamic principles and objectivity law. A set of statements, based on this procedure, constitutes the model construction theory for complex media with the finite deformations and structural changes in materials.

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ СТАЦИОНАРНЫМИ РЕЖИМАМИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ

**Сазонов Л. И.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону  
Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Установлено существование нестационарного решения системы Навье–Стокса во внешней области, связывающего два устойчивых стационарных режима, входящих в устойчивое семейство.

Пусть ограниченное тело  $B \subset \mathbb{R}^3$  движется в жидкости, занимающей все пространство вне тела, со скоростью  $-\alpha(t)e_1$ , где  $e_1$  — единичный орт оси  $Ox_1$ . Тогда поле скорости жидкости  $u = u(x, t)$  удовлетворяет следующей начально-краевой задаче для системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u = \Delta u - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, u|_{\partial B(t)} = -\alpha(t)e_1, u|_{\infty} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $B(t)$  — область, занимаемая телом в момент времени  $t$ . Здесь, не нарушая общности, считаем, что плотность жидкости и коэффициент вязкости равны единице. Полагая

$$u(x, t) = v(x + \int_0^t \alpha(s)e_1 ds, t) - \alpha(t)e_1, \quad p(x, t) = r(x + \int_0^t \alpha(s)e_1 ds, t),$$

получаем, что  $v(x, t), r(x, t)$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v - \alpha'(t)e_1 = \Delta v - \nabla r, \\ \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial \Omega} = 0, v|_{\infty} = \alpha(t)e_1, \end{cases} \quad (2)$$

в области  $\Omega \times (0, \infty)$ , где  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B(0)$ .

Пусть  $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}$  — стационарные режимы задачи обтекания, т. е. решения стационарной системы Навье–Стокса в области  $\Omega$

$$\begin{cases} \Delta v - \nabla p = (v, \nabla)v, \\ \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

удовлетворяющие соответственно условиям

$$v|_{\infty} = \alpha_1 e_1, v|_{\infty} = \alpha_2 e_1.$$

*Задачей о переходе между стационарными режимами  $v_{\alpha_1}$  и  $v_{\alpha_2}$  будем называть задачу об определении решения нестационарной системы Навье–Стокса (2), удовлетворяющего начальному условию  $v|_{t=0} = v_{\alpha_1}$  и предельному соотношению*

$\lim_{t \rightarrow \infty} v = v_{\alpha_2}$ . В случае  $\alpha_1 = 0$  получается задача, впервые рассмотренная Р. Финном [1] и названная им «стартовой проблемой». О работах, посвященных этой задаче и имеющихся здесь трудностях смотрите в [2]. В частности, в [2] при  $\alpha_1 = 0$  и достаточно малом  $\alpha_2$  установлено существование в подходящем банаховом пространстве решения стартовой проблемы  $v(t)$ , удовлетворяющего оценкам

$$\|\nabla(v(t) - v_{\alpha_2})\|_{L_3} \leq ct^{-1/2},$$

$$\|v(t) - v_{\alpha_2}\|_{L_q} \leq c_q t^{-(1-3/q)/2}, \quad q > 3.$$

Будем предполагать, что стационарная система (3) имеет семейство стационарных решений  $v_\alpha = \tilde{v}_\alpha + \alpha e_1$  ( $v_\alpha|_\infty = \alpha e_1$ ), гладко зависящих от параметра  $\alpha$  при  $\alpha \in [a_1, a_2] \subset (0, \infty)$ . (В дальнейшем это условие будет уточнено). При этом предположении решение задачи (2) будем разыскивать в виде

$$v(t, x) = \tilde{v}_{\alpha(t)}(x) + \alpha(t)e_1 + w(t, x), \quad r(t, x) = p_{\alpha(t)}(x) + q(t, x), \quad (4)$$

где  $\alpha(t)$  — гладкая функция со значениями на отрезке  $[a_1, a_2]$ , такая, что  $\alpha(0) = a_1$ ,  $\alpha(t) \rightarrow a_2$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда для определения  $w$  имеем следующую начально-краевую задачу в области  $\Omega$  при  $t > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + (\tilde{v}_{\alpha(t)}, \nabla)w + (w, \nabla)\tilde{v}_{\alpha(t)} + (w, \nabla)w = \\ = \Delta w - \alpha(t)\partial_1 w - \nabla q - \alpha'(t)\frac{\partial}{\partial \alpha}\tilde{v}_{\alpha(t)}, \\ \operatorname{div} w = 0, w|_{\partial\Omega} = 0, w|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

причем будем требовать выполнения условия  $w(t)|_\infty = 0$  при всех  $t \geq 0$ .

Для дальнейшего исследования удобно свести систему (5) к задаче Коши для ОДУ в подходящем банаховом пространстве. Обозначим через  $S_p = S_p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) подпространство в пространстве векторных полей  $L_p(\Omega)$ , являющееся замыканием множества всех гладких соленоидальных полей с компактным в  $\Omega$  носителем. (Заметим, что здесь и далее мы не различаем обозначения для пространств векторных полей и функций.) Известно, что для областей класса  $C^2$  (в дальнейшем это условие предполагается всегда выполненным) существует ограниченный проектор  $\Pi : L_p(\Omega) \rightarrow S_p(\Omega)$  ( $1 < p < \infty$ ), ядро которого состоит из всех полей вида  $\nabla q \in L_p(\Omega)$ . Применяя его к системе (5), сведем ее к следующей задаче Коши для ОДУ в пространстве  $S_p(\Omega)$

$$\frac{dw}{dt} = A(t)w + Kw + F(t), \quad w|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

где операторы  $A(t)$ ,  $K$  и векторное поле  $F(t)$  имеют вид

$$A(t)w = \Pi(\Delta w - \alpha(t)\partial_1 w - (\tilde{v}_{\alpha(t)}, \nabla)w - (w, \nabla)\tilde{v}_{\alpha(t)}), \quad (7)$$

$$Kw = -\Pi(w, \nabla)w, \quad F(t) = -\Pi\left(\alpha'(t)\frac{\partial}{\partial \alpha}\tilde{v}_{\alpha(t)}\right). \quad (8)$$

Рассмотрим действующий в пространстве  $S_p(\Omega)$  возмущенный оператор Озеена

$$A_\alpha w = \Pi(\Delta w - \alpha \partial_1 w - (\tilde{v}_\alpha, \nabla)w - (w, \nabla)\tilde{v}_\alpha)$$

с областью определения  $D(A_\alpha) = S_p(\Omega) \cap W_p^2(\Omega) \cap \dot{W}_p^1(\Omega)$ . Здесь  $W_p^2(\Omega)$ ,  $\dot{W}_p^1(\Omega)$  — соболевские пространства векторных полей, причем элементы из  $\dot{W}_p^1(\Omega)$  имеют нулевой след на границе  $\partial\Omega$ .

Развитие методов работ [3],[4] позволяет установить следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $v_\alpha = \tilde{v}_\alpha + \alpha e_1$ ,  $\alpha \in [a_1, a_2]$  — семейство стационарных решений, для которого  $\tilde{v}_\alpha$  является элементом пространства  $L_{\rho_1}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ ,  $\rho_1 < 3$ , гладко зависящим от  $\alpha$ , и  $\partial_j \tilde{v}_\alpha \in L_\infty(\Omega)$ . Предположим также, что выполнено следующее спектральное условие устойчивости: для любого  $\alpha$  возмущенный оператор Озеена  $A_\alpha$  не имеет собственных векторов в одном из пространств  $S_q(\Omega)$ ,  $q > 2$ , отвечающих собственным числам в полуплоскости  $\{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ . Тогда оператор  $A_\alpha$  порождает аналитическую полугруппу (возмущенную полугруппу Озеена)  $T_\alpha(t)$ , для которой справедливы равномерные по  $\alpha \in [a_1, a_2]$  оценки

$$\|T_\alpha(t)\Pi\partial^\theta\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q}^\theta t^{-|\theta|/2 - 3/2(1/p - 1/q)}, \quad (9)$$

где  $1 < p \leq q < \infty$  при  $|\theta| = 0$ ,  $3/2 < p \leq q < \infty$  при  $|\theta| = 1$ , причем  $c_{p,q}^\theta$  — абсолютные константы, равномерно ограниченные на любом множестве  $1 < p_0 \leq p \leq q \leq q_0 < \infty$  при  $|\theta| = 0$  и множестве  $3/2 < p_0 \leq p \leq q \leq q_0 < \infty$  при  $|\theta| = 1$ .

Заметим, что из результатов [5] (смотрите также [6]) следует, что обобщенное решение  $v_\alpha$  стационарной задачи обтекания (3) удовлетворяет условиям:  $\tilde{v}_\alpha \in W_p^2(\Omega)$  для всех  $p \in (2, \infty]$ ,  $\nabla \tilde{v}_\alpha \in L_p(\Omega)$  для всех  $p \in (3/2, \infty]$ . Далее, как уже отмечалось, мы предполагаем гладкую зависимость решения  $\tilde{v}_\alpha$  при  $\alpha \in [a_1, a_2]$  ( $a_1, a_2 > 0$ ) в норме любого пространства  $L_p(\Omega)$  при  $p \in (2, \infty]$ . Заметим, что локально, т.е. в окрестности фиксированного  $\alpha$  данное предположение может быть обосновано методами теории неявных отображений, если для  $v_\alpha$  выполнены предположения теоремы 1. При малых числах Рейнольдса (в данном случае при малых  $\alpha$ ) указанное утверждение можно извлечь из результатов [7]. Сошлемся также на работу [8], где исследован вопрос об гладкой зависимости стационарного решения задачи обтекания от числа Рейнольдса в норме некоторого банахова пространства.

Предварительно исследуем случай близких стационарных режимов  $v_{\alpha_1}$  и  $v_{\alpha_2}$ . Рассмотрим для системы (6) задачу Коши с ненулевым начальным условием  $w|_{t=0} = w_0$ . Выделяя в ОДУ (6) главную стационарную часть  $A_{\alpha_2}$  и применяя метод вариации, приходим к интегральному уравнению

$$w(t) = T_{\alpha_2}(t)w_0 + \int_0^t T_{\alpha_2}(t-s)[(A(s) - A_{\alpha_2})w(s) + Kw(s)] ds + \mathcal{F}(t), \quad (10)$$

где  $\mathcal{F}(t) = \int_0^t T_{\alpha_2}(t-s)F(s)ds$ .

В дальнейшем решение рассматриваемой задачи Коши будем понимать в обобщенном смысле как решение интегрального уравнения (10). Введем банахово пространство  $X_{\delta,q}$  векторных полей из  $C([0, \infty), S_q(\Omega))$  с конечной нормой

$$\|u\|_{\delta,q} = \sup_t (1+t)^\delta \|u(t)\|_q.$$

Обобщая результаты из [9], приходим к следующим утверждениям.

**Теорема 2.** Пусть  $v_\alpha, \alpha \in [a_1, a_2]$  гладкое семейство стационарных решений задачи обтекания, для которого выполнено спектральное условие устойчивости из теоремы 1,  $\alpha(t)$  — кусочно линейная непрерывная функция на  $[0, \infty)$ , причем  $\alpha(0) = \alpha_1, \alpha(t) = \alpha_2$  при  $t \in [1, \infty)$ , и начальное условие  $w_0 \in S_p(\Omega)$  для всех  $p > 2$ . Тогда для любых фиксированных чисел  $q, p, \delta$ , удовлетворяющих условиям  $q > 3, p > 2, 1/2 - (3/2q) < \delta < \min(1/2, (3/2)(1/p - 1/q))$ , существует такие  $\eta = \eta(q, p, \delta)$  и  $\xi = \xi(q, p, \delta)$ , что при любых  $\alpha_1, \alpha_2$  из  $[a_1, a_2]$  и  $w_0$ , удовлетворяющих условиям

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq \eta, \quad \sup_{p < r < q} \|w_0\|_r \leq \xi,$$

уравнение (10) имеет единственное решение  $w \in X_{\delta,q}$ .

Это решение  $w(t)$  принадлежит всем пространствам  $X_{\mu,r}$  для всех  $r > 2, \mu < (3/2)(1/2 - 1/r)$  и, следовательно,

$$\|w(t)\|_r \leq c_{r,\mu}(1+t)^{-\mu}.$$

Перейдем к рассмотрению общего случая, предполагая существование гладкого семейства стационарных режимов  $v_\alpha, \alpha \in [a_1, a_2]$ , для которого выполняются условия теоремы 1.

Выберем числа  $q, p, \delta$  так, чтобы выполнялись условия теоремы 2, и найдем соответствующие им числа  $\eta$  и  $\xi$ . Отрезок  $[a_1, a_2]$  разобьем на части, меньшие  $\eta$ :  $[a_1, b_1], [b_1, b_2], \dots, [b_N, a_2]$ . На  $[0, \infty)$  построим непрерывную кусочно-линейную функцию  $a(t)$ , задавая узлы  $0 < 1 < T_1 < T_1 + 1 < T_2 < T_2 + 1 < T_3 < \dots$  и ее значения в узлах  $a(0) = a_1, a(1) = b_1, a(T_1) = b_1, a(T_1 + 1) = b_2, a(T_2) = b_2 \dots$ . Узлы  $T_j$  определяются в процессе доказательства.

Доказательство существования глобального перехода осуществляется путем последовательных переходов

$$v_{a_1} \mapsto v_{b_1}, v_{b_1} \mapsto v_{b_2}, \dots$$

На начальном отрезке  $[0, T_1]$  задачу Коши (6) представляем в виде

$$\frac{dw}{dt} = A_{b_1} w + (A(t) - A_{b_1})w + Kw + F(t), \quad w|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

Согласно теореме 2 задача (11) имеет решение  $w(t) \in C([0, T_1], S_r(\Omega))$  для всех  $r > 2$ , причем  $\|w(T_1)\|_r \rightarrow 0$  при  $T_1 \rightarrow \infty$ . Выбираем  $T_1$  так, чтобы

$$\sup_{p < r < q} \|w(T_1)\|_r \leq \xi.$$

На следующем отрезке  $[T_1, T_2]$  рассматриваем задачу Коши

$$\frac{dw}{dt} = A_{b_2}w + (A(t) - A_{b_2})w + Kw + F(t), w|_{t=T_1} = w(T_1 - 0). \quad (12)$$

Согласно выбору  $T_1$  к задаче Коши (12) применима теорема 2, устанавливающая существование решения с нужными свойствами. Осуществляя дальнейшее продолжение, приходим к окончательному выводу.

**Теорема 3.** Пусть для семейства стационарных решений  $v_\alpha$ ,  $\alpha \in [a_1, a_2]$ , выполнены условия теоремы 1. Тогда существует решение задачи о переходе  $v(t)$ , для которого

$$\|v(t) - v_{a_2}\|_q \leq c_{\mu,q}(1+t)^{-\mu}$$

для всех  $q > 2$ ,  $\mu < (3/2)(1/2 - 1/q)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Finn R. Stationary solutions of the Navier–Stokes equations // Proc. Symp. Appl. Math., Amer. Math. Soc., Providence. 1965. № 17. Pp. 121–153.
- [2] Galdi G. P., Heywood J. G., Shibata Y. On the global existence and convergence to steady state of Navier–Stokes flow past an obstacle that is started from rest // Arch. Rational Mech. Anal. 1997. № 138. Pp. 307–318.
- [3] Сазонов Л. И. Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 5. С. 85–109.
- [4] Сазонов Л. И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11. № 3. С. 51–61.
- [5] Бабенко К. И. О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // Матем. сб. 1973. Т. 91, № 1. С. 3–26.
- [6] Сазонов Л. И. Об асимптотике решения задачи трехмерного обтекания вдали от обтекаемых тел // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. № 5. С. 173–196.
- [7] Сазонов Л. И. Трехмерная стационарная задача обтекания при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75. № 6. С. 99–128.
- [8] Gald G. P. Further properties of steady-state solutions to the Navier–Stokes problem past a three-dimensional obstacle // J. of Math. Phys. 2007. V. 48. Pp. 1–43.
- [9] Сазонов Л. И. О существовании переходов между стационарными режимами задачи обтекания // Владикавк. мат. журн. 2011. Т. 13. № 4. С. 60–69.

**Sazonov L. I.** *The existence of transitions between stationary regimes of the flow problem.* We consider the Navier–Stokes equations in exterior domain. We prove the existence of the unsteady solutions that links two steady flows. The steady flows are assumed to be stable.



# МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОГРУЖЕННОЙ В НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

**Сметанин Б. И., Федяева К. Е.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Представлены результаты исследования удара круглой пластинки, погруженной в несжимаемую жидкость. Для решения задачи использован метод интегральных преобразований. Приведены графики скоростей точек свободной поверхности и точек каверны.

Рассмотрена задача моделирования удара круглой горизонтальной пластинки радиуса  $a$ , погруженной в несжимаемую жидкость. Расстояние от пластинки до свободной поверхности равно  $h$ . Жидкость занимает полупространство. Удар произведен центральный, внедрение пластинки происходит без перекоса.

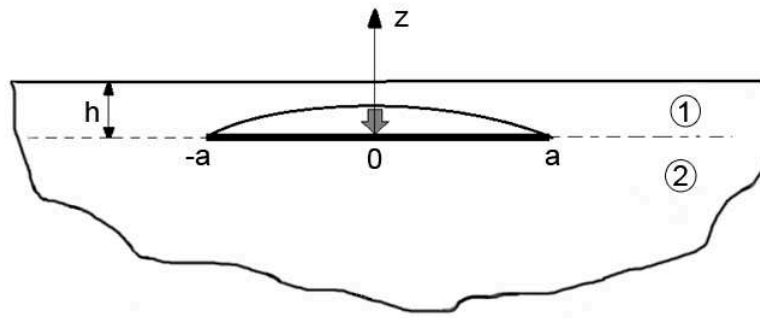


Рис. 1. Положение пластинки в жидкости.

Сверху пластинки область пониженного давления, в момент удара жидкость отрывается от задней поверхности пластинки (образуется каверна). Вместо гидродинамического давления будем рассматривать импульсивное давление:

$$p_* = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} p dt. \quad (1)$$

В момент удара движение жидкости потенциальное. В области контакта пластинки с жидкостью вертикальная составляющая скорости жидких частиц по величине равна скорости пластинки, давление внутри каверны и на свободной поверхности ограниченное. Так как жидкость несжимаемая, то потенциал скоростей  $\phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \phi = 0. \quad (2)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -U \quad (0 \leq r \leq a, z = -0), \quad (3)$$

$$\phi = 0 \quad (0 \leq r \leq a, z = +0), \quad (4)$$

$$\phi = 0 \quad (0 \leq r < \infty, z = h), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial \phi}{\partial r} \rightarrow 0 \quad (\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Использованы вспомогательные функции:

$$\tau(r) = \begin{cases} \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial r} (\phi_2 - \phi_1) & (0 \leq r \leq a), \\ 0 & (a \leq r < \infty), \end{cases} \quad (7)$$

$$s(r) = \begin{cases} \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial z} (\phi_2 - \phi_1) & (0 \leq r \leq a), \\ 0 & (a \leq r < \infty). \end{cases} \quad (8)$$

При построении решения уравнения Лапласа будем отдельно строить решение в области, лежащей выше пластинки ( $0 \leq z \leq h$ ) и ниже пластинки ( $-\infty < z \leq 0$ ):

$$\phi_1(r, z) = \int_0^{\infty} \xi [A(\xi) \operatorname{sh}(\xi z) + B(\xi) \operatorname{ch}(\xi z)] J_0(\xi r) d\xi \quad (0 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq a),$$

$$\phi_2(r, z) = \int_0^{\infty} \xi C(\xi) e^{\xi z} J_0(\xi r) d\xi \quad (-\infty < z \leq h, 0 \leq r \leq a),$$

$A(\xi)$ ,  $B(\xi)$ ,  $C(\xi)$  подлежат определению. Использование (5), (7), (8) позволяет получить следующее значение функций:

$$A(\xi) = -\frac{1}{\xi(1 + \operatorname{th}(\xi h))} (S(\xi) + T(\xi)),$$

$$B(\xi) = \frac{\operatorname{th}(\xi h)}{\xi(1 + \operatorname{th}(\xi h))} S(\xi) + \frac{\operatorname{th}(\xi h)}{\xi(1 + \operatorname{th}(\xi h))} T(\xi),$$

$$C(\xi) = -\frac{\operatorname{th}(\xi h)}{\xi(1 + \operatorname{th}(\xi h))} S(\xi) + \frac{1}{\xi(1 + \operatorname{th}(\xi h))} T(\xi),$$

где  $S(\xi)$ ,  $T(\xi)$  преобразования Ханкеля функций  $s$ ,  $\tau$  соответственно.

Граничные условия (3), (4) приводят задачу к системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^1 \eta s(\eta) k_1(\eta, r) d\eta - \int_0^1 \eta \tau(\eta) k_2(\eta, r) d\eta = -\lambda r & (0 \leq r \leq a), \\ \int_0^1 \eta \tau(\eta) k_1(\eta, r) d\eta - \int_0^1 \eta s(\eta) k_3(\eta, r) d\eta = 0 & (0 \leq r \leq a), \end{cases}$$

где ядро  $k_1$  дается несобственным интегралом

$$k_1(\eta, r) = \int_0^\infty (1 - e^{-2u}) J_1\left(\frac{ur}{\lambda}\right) J_0\left(\frac{u\eta}{\lambda}\right) d\eta,$$

$k_2, k_3$  имеют схожий вид.

Функции  $s$  и  $\tau$  представимы в виде следующих интегралов [1]:

$$s(\eta) = -\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \int_\eta^1 \frac{xp(x)dx}{\sqrt{x^2 - \eta^2}},$$

$$\tau(\eta) = -\frac{d}{d\eta} \int_\eta^1 \frac{q(x)dx}{\sqrt{x^2 - \eta^2}}.$$

При этом  $p(x)$  будем считать четной функцией, а  $q(x)$  нечетной.

Внося эти представления в систему, а также преобразуя ее и учитывая, что  $\psi(x) = p(x) + q(x)$  получим интегральное уравнение:

$$\int_{-1}^1 \psi(\eta)k_0(\eta - x)d\eta + \int_{-1}^1 \psi(\eta)k(\eta, x)d\eta = 4x \quad (|x| \leq 1),$$

$k_0$  — главная часть ядра,  $k$  — регулярная часть ядра,  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака

$$k_0(t) = \pi\delta(t) + \frac{1}{t}.$$

Также для получения решения была использована формула Попова Г. Я. [3]:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \eta)^{-0.25}(1 + \eta)^{0.25}} P_n^{(-0.25, 0.25)}(\eta) [k_0(\eta - x)] d\eta =$$

$$= \pi\sqrt{2} P_n^{(-0.25, 0.25)}(x), \quad n = 0, 1 \dots$$

Решение ищется в виде разложения по многочленам Якоби с выделением установленной особенности. Структура решения интегрального уравнения имеет вид [2]:

$$\psi(\xi) = (1 - \xi)^{-0.25}(1 + \xi)^{0.25} \sum_{n=1}^N Y_n P_{n-1}^{(-0.25, 0.25)}(\xi).$$

Для определения коэффициентов  $Y_n$  разложения применен метод коллокации. Метод позволяет свести решение интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений. Метод коллокации наиболее эффективен, если в качестве точек коллокации взять нули многочлена Чебышева первого рода

$$x_j = 0.5 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi(2j - 1)}{2m}\right) \right] \quad (j = 1..m).$$

$N$	Скорость точек свободной поверхности при $r = 1.35$ и $\lambda = 2$	Суммарный ударный импульс для $\lambda = 2$
2	0.02073	2.7757
3	0.02066	2.7545
4	0.02065	2.7539
5	0.02065	2.7540
6	0.02065	2.7540
7	0.02065	2.7540
8	0.02065	2.7540
9	0.02065	2.7540

Таблица 1. Сходимость метода коллокации.

Для построения приближенного решения интегрального уравнения с достаточной для практического применения точностью в рассмотренном диапазоне изменения характерного параметра задачи можно ограничиться использованием 8–10 узлов коллокации.

На рис. 2 приведены графики нормальных скоростей точек свободной поверхности для различных  $\lambda = h/a$  — относительных расстояний от пластинки до свободной поверхности.

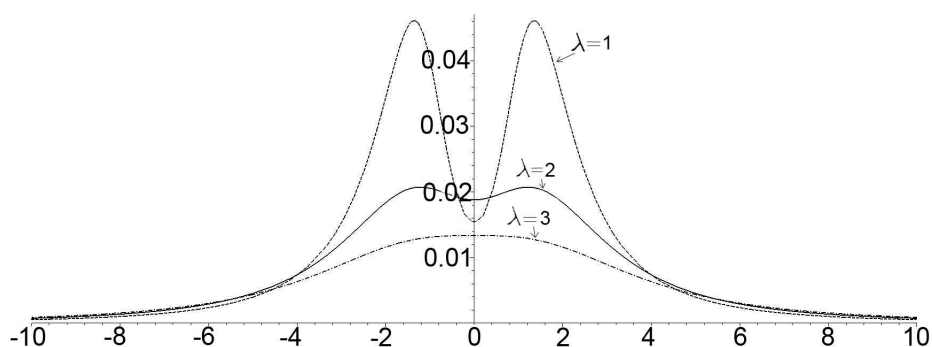


Рис. 2. График нормальных скоростей точек свободной поверхности.

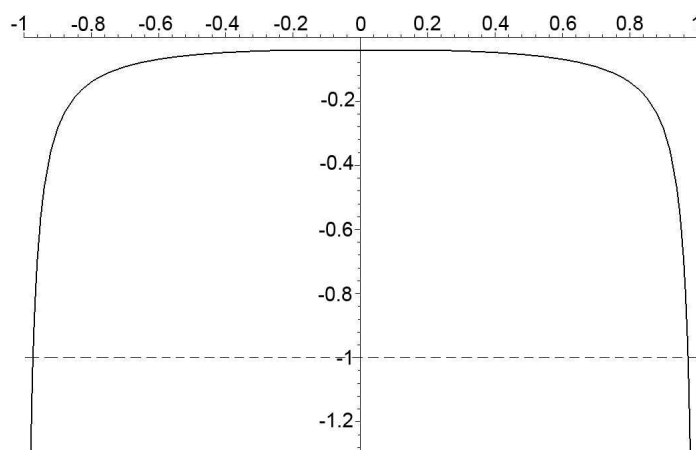


Рис. 3. График нормальных скоростей точек каверны.

Условие отрыва  $\nu_z|_{z=+0} > -1$  нарушается при  $0.97 < r \leq 1$ . Полученные результаты можно рассматривать как нулевое приближение при исследовании этой задачи с учетом области контакта на задней поверхности пластинки.

Авторы благодарны Сумбатьяну М. А. за ценные советы и постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Физ.-матем. н. 1963. Т. 16. № 2. С. 15–32.
- [2] Сметанин Б. И. Об интегральном уравнении осесимметричных задач для упругого тела, содержащего включения // ПММ. 1991. В. 3. С. 456–460.
- [3] Седов В. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

**Smetanin B. I., Fedyayeva K. E.** *Modeling the impact of circular plate immersed in an incompressible liquid.* The results of the investigation of an impact of a circular plate immersed in an incompressible fluid are presented. Problem is solved by the method of integral transforms. The plots of the free surface velocities of the points and velocities of the points of the cavity are shown.

# РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ КИРХГОФА ДЛЯ МНОГОКРАТНЫХ ОТРАЖЕНИЙ ВОЛН

**Сумбатян М.А., Боев Н.В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Работа посвящена развитию классической теории дифракции Кирхгофа применительно к многократному отражению волн от произвольной системы поверхностей (трехмерная теория). Показано, что при асимптотической оценке кратных дифракционных интегралов главный член асимптотики определяет звуковой луч, который отразился «зеркально» от всех отражателей по законам лучевой теории. Второй член асимптотики определяется вкладом от границ отражающих поверхностей.

В коротковолновой теории дифракции существует ряд классических теорий, позволяющих эффективно строить явные аналитические решения [1–3]. В частности, в рамках физической теории дифракции Кирхгофа [2], для случая однократного отражения от гладкой поверхности, решение выписывается в виде некоторого дифракционного интеграла по этой поверхности. В [4] авторами было предложено обобщение теории Кирхгофа на случай нескольких последовательных отражений для двумерной задачи. В [5, 6] дано обобщение на трехмерный случай. Переход от скалярной задачи к упругой осуществлен в [7]. Оказалось, что в случае одного отражения главный член асимптотики совпадает с лучевым зеркальным отражением по другим теориям. Для случая многократного отражения предложенный в [5, 6] подход позволил впервые получить в явном аналитическом виде решение многих новых задач. В [6] приведены примеры сравнения таких решений с результатами прямого численного расчета многомерного дифракционного интеграла.

Результаты сравнения показывают, что главный лучевой член асимптотики дает очень грубое приближение к точному решению. В связи с этим становится актуальным построение следующего члена асимптотического разложения, чему и посвящена данная работа. Показано, что второй член асимптотики определяется вкладом граничных контуров отражающих поверхностей, при этом он имеет более высокий асимптотический вклад, чем следующий (второй) член полного разложения в точках «зеркального» отражения.

Рассмотрим последовательность отражений акустической волны, исходящей из точечного источника  $x_0$  от системы абсолютно твердых поверхностей  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , как показано на рис. 1. Обобщение классической теории дифракции Кирхгофа со случая однократного на случай многократного отражения [5–7] сводит задачу вычисления амплитуды переотраженной волны в приемнике  $x$  к вычислению повторного интеграла по всем поверхностям  $S_1, S_2, \dots, S_N$ :

$$p^{sc}(x) \sim \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^N \int_{S_1} \dots \int_{S_N} \frac{e^{ikg}}{r_{01}} \prod_{n=1}^N \frac{\cos(\bar{r}_{n,n+1} \hat{n}_n)}{r_{n,n+1}} dS_1 \dots dS_N \quad (k \rightarrow \infty). \quad (1)$$

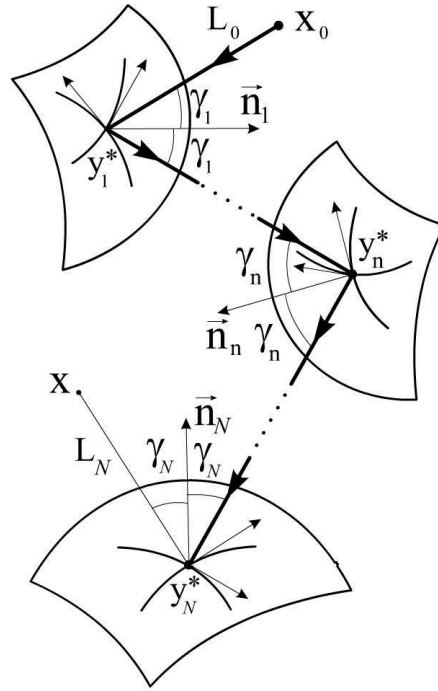


Рис. 1. Многократное отражение от гладких отражающих поверхностей.

Здесь  $k$  — волновое число;  $\bar{r}_{n,n+1} = y^n - y^{n+1}$ , ( $y^n \in S_n$ );  $r_{n,n+1} = |\bar{r}_{n,n+1}|$ , ( $n = 1, \dots, N$ );  $y^{N+1} \equiv x$ ;  $\bar{r}_{N,N+1} \equiv \bar{r}_{Nx}$ ;  $\bar{r}_{01} = y^1 - x_0$ . Фазовая функция в (1) имеет следующий вид

$$g = g(y^1, \dots, y^N) = \sum_{n=0}^N r_{n,n+1} = |y^1 - x_0| + \dots + |y^N - x|; \quad \bar{r}_{01} = y^1 - x_0. \quad (2)$$

Интеграл в (1) может быть оценен при  $k \rightarrow \infty$  методом многомерной стационарной фазы. С этой целью выпишем главный член асимптотики для интеграла по области  $\Omega \subset E^M$  общего вида [8]:

$$\int_{\Omega} f(y) e^{ikg(y)} dy \sim \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{M/2} \exp\left[ikg(y^*) + \frac{\pi i}{4} \text{sign}(g_*'')\right] \frac{f(y^*)}{|\det g_*''|^{1/2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] + F_{\partial\Omega}(k) \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right], \quad F_{\partial\Omega}(k) = \frac{1}{ik} \int_{\partial\Omega} \frac{f(y)}{|\nabla g(y)|^2} \frac{\partial g}{\partial n_y} e^{ikg(y)} d\sigma_y, \quad (3)$$

где  $y^*$  обозначает  $M$ -мерную стационарную точку с нулевым градиентом:

$$\frac{\partial g(y^*)}{\partial y_1} = \dots = \frac{\partial g(y^*)}{\partial y_M} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $g_*'' = \{\partial^2 g / \partial y_m \partial y_\mu\}$ , ( $m, \mu = 1, \dots, M$ ) обозначает матрицу Гессе функции  $g$ , вычисленную в стационарной точке. При этом  $\text{sign}(g_*'')$  — знак симметричной матрицы Гессе, т.е. разность между числом положительных и отрицательных ее собственных значений. Вклад  $F_{\partial\Omega}(k)$  от границы области  $\Omega$  в (3) выражается интегралом по граничной гиперповерхности  $\partial\Omega$  размерности  $M - 1$ .

Формула (3), примененная к вычислению интеграла (1), имеет глубокий физический смысл. Главный член асимптотики в (3) соответствует амплитуде многократного «зеркального» отражения. При этом отбрасываемый последующий член разложения в точке зеркального отражения имеет порядок  $O(1/k^{M/2+1})$ .

Для оценки вклада краевого эффекта, величины  $F_{\partial\Omega}(k)$ , которая сама выражается в (3) в виде некоторого интеграла дифракционного типа, можно оценить в главном, взяв основной член разложения первой строки (3) для подобного интеграла по гиперповерхности размерности  $M - 1$ . Предположим, что  $(M - 1)$ -мерная фазовая функция в интеграле (3) для  $F_{\partial\Omega}(k)$  сама имеет стационарную точку. Очевидно, что в этом случае асимптотическое поведение такого интеграла будет определяться множителем  $(2\pi/k)^{(M-1)/2}$ . В нашем случае интеграла (1) имеем  $M = 2N$ , поэтому вклад зеркального отражения в интеграл (3) имеет порядок  $O(1/k^N)$ , а вклад от границы определяется множителями  $(1/ik) \cdot (2\pi/k)^{(M-1)/2}$ , т. е. имеет порядок  $O(1/k^{N+1/2})$ . Таким образом, вклад от дифракции на границе в случае существования граничных стационарных точек является асимптотически более значимым, чем все отброшенные члены разложения в точке зеркального отражения. В работе одного из авторов [9] приведены многочисленные примеры приложений данной теории для случая однократного отражения.

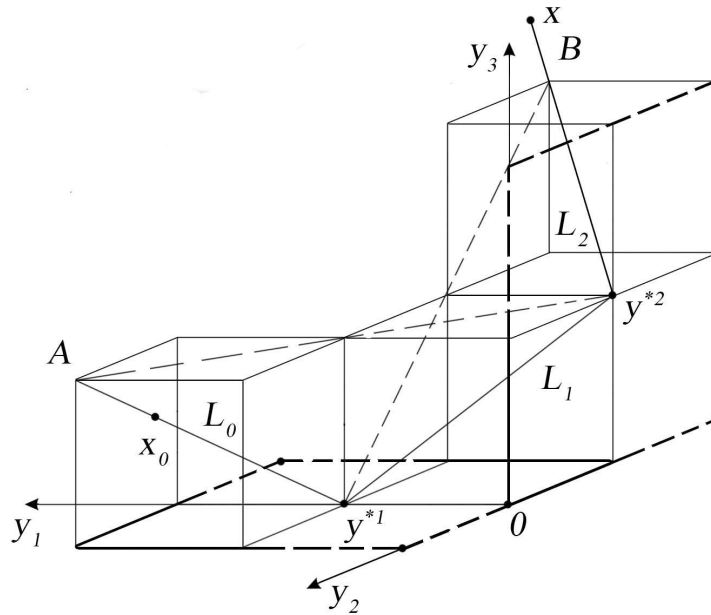


Рис. 2. Двукратное отражение от плоских отражателей.

Здесь в качестве примера исследуем двукратное отражение от пары квадратных отражателей, расположенных под прямым углом друг к другу, рис. 2 [10]. Здесь  $S_1$  — горизонтальный квадрат, а  $S_2$  — вертикальный. При этом траектория луча зеркального переотражения после второго отражения меняет плоскость, в которой она расположена изначально. В [10] было показано, что главный лучевой член разложения обладает большой погрешностью, если его сравнить с результатами прямого численного расчета четырехмерного дифракционного интеграла. Точность аналитического решения может быть улучшена путем учета второго чле-



на асимптотики при  $k \rightarrow \infty$ , который определяется вкладом от граничных контуров. Предполагаем, что источник и приемник  $x_0, x$  расположены на диагоналях

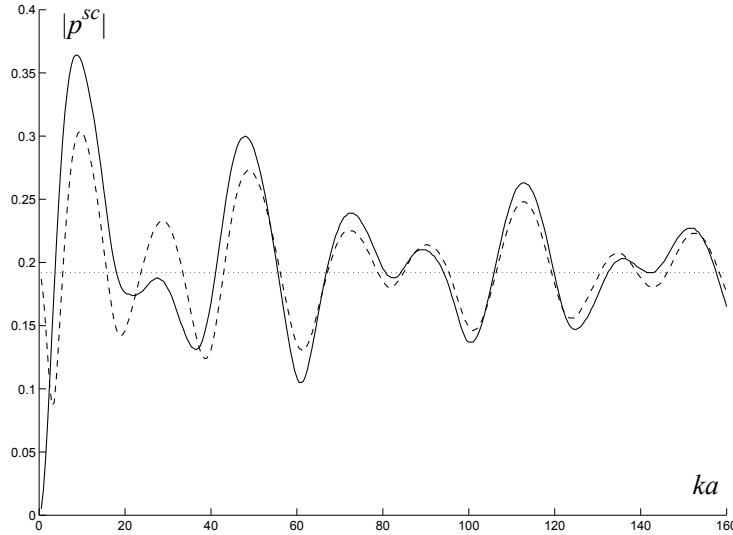


Рис. 3. Сравнение теорий:  $\cdots$  лучевая теория;  $—$  численное значение интеграла Кирхгофа (6);  $- - -$  явное аналитическое решение (7) с учетом краевого эффекта.

соответствующих кубов, так что точки зеркального отражения попадают в центры квадратов  $S_1$  и  $S_2$ :

$$x_0 = (a + \eta_0, \eta_0, \eta_0), \quad x = (\xi, -a - \xi, a + \xi) \quad \Rightarrow \quad y^{*1} = (a, 0, 0), \quad y^{*2} = (0, -a, a). \quad (5)$$

Легко показать, что в рассматриваемой задаче основное представление (1) принимает вид

$$p^{sc}(x) \sim -\frac{k^2 \xi}{4\pi^2} \int \int_{S_1 S_2} \frac{\zeta_2 e^{ikg}}{\varphi \mu^2 \psi^2} d\xi_1 d\eta_1 d\eta_2 d\zeta_2, \quad \xi_1, \zeta_2 \in [0, 2a], \quad \eta_1 \in [-a, a], \quad \eta_2 \in [-2a, 0],$$

$$\varphi = \sqrt{(\xi_1 - a - \eta_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 + \eta_0^2}, \quad \mu = \sqrt{\xi_1^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + \zeta_2^2},$$

$$\psi = \sqrt{\xi^2 + (\eta_2 + a + \xi)^2 + (\zeta_2 - a - \xi)^2}, \quad g(\xi_1, \eta_1, \eta_2, \zeta_2) = \varphi + \mu + \psi. \quad (6)$$

Интеграл (6) оценивается асимптотически по формуле (3). При этом доказывается, что стационарная точка для первого (главного) асимптотического члена в (3):  $\xi_1^* = a, \eta_1^* = 0, \eta_2^* = -a, \zeta_2^* = a$ , определяет главный член «зеркального» отражения. Для второго (граничного) интеграла имеется 6 стационарных точек, сумма которых дает вклад от граничных контуров. В итоге первые 2 члена асимптотического представления двукратно отраженной волны имеют следующий вид:

$$p^{sc}(x) \sim \frac{e^{ik(L_0 + L_1 + L_2)}}{L_0 + L_1 + L_2} + \sum_{h=1}^6 I_h(k) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (k \rightarrow \infty), \quad I_h(k) = O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right), \quad (7)$$

причем все шесть величин  $I_h$  выписываются в явном виде. На рис.3 показаны результаты сравнения различных приближений для случая  $x_0 = A, x = B$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
- [2] *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теории дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
- [3] *McNamara D. A. M., Pistorius C. W. I., Malherbe J. A. G.* Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction. Artech House: Norwood, 1990. 372 p.
- [4] *Sumbatyan M. A., Boev N. V.* High-frequency diffraction by non-convex obstacles // J. Acoust. Soc. America. 1995. V. 95. Pp. 2347–2353.
- [5] *Боев Н. В., Сумбатян М. А.* Кортковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // Доклады РАН. 2003. Т. 392. № 5. Pp. 614–617.
- [6] *Scarpetta E., Sumbatyan M. A.* Explicit analytical representations in the multiple high-frequency reflection of acoustic waves from curved surfaces: the leading asymptotic term // Acta Acustica. 2011. V. 97. Pp. 115–127.
- [7] *Боев Н. В.* Рассеяние высокочастотных волн на произвольной невыпуклой граничной поверхности упругого тела с учетом переотражений // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 65–80.
- [8] *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
- [9] *Scarpetta E., Sumbatyan M. A.* An asymptotic estimate of the edge effects in the high frequency Kirchhoff diffraction theory for 3d problems // Wave Motion. 2011. V. 48. Pp. 408–422.
- [10] *Боев Н. В., Сумбатян М. А.* Оценка точности физической теории дифракции Кирхгофа в случае переотражения волн // Труды XII Межд. конф. «Совр. проблемы МСС», Т. 1. Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2008. С. 27–31.

**Боев Н. В., Сумбатян М. А.** *Development of Kirchhoff's diffraction theory for multiple wave reflections.* The work is devoted to development of the classical Kirchhoff diffraction theory to the case of multiple reflection from an arbitrary system of surfaces (3d problem). It is shown that in the asymptotic estimate of multiple diffraction integrals the leading asymptotic term defines the ray of mirror reflection. The second asymptotic term is defined by a contribution of boundaries of the reflecting surfaces. An example for a pair of flat quadratic reflectors is considered, with a change of the ray's plane of propagation.

# ВОЗБУЖДЕНИЕ КНОИДАЛЬНЫХ ВОЛН

Трепачев В. В.\* , Трепачева Г. Н.\*\*

\*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону

\*\*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Построены новые более полные условия возбуждения волн для распространяющихся в одном направлении, плоских, длинных, периодических, обладающих малой дисперсией и одновременно нелинейных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, которая находится в безвихревом движении над ровным твердым дном. Анализ для волнового движения проводится с помощью уравнения Кортевега-де Вриза для возвышения поверхности в приближении Буссинеска. Вводится дополнительное условие, отражающее тот факт, что движение жидкости несжимаемо. Из полученных результатов вытекают известные в виде частных случаев, в частности, теория бегущих симметричных кноидальных волн, предложенная Дж. Уиземом.

Уравнение теории длинных бегущих волн, учитывающее, одновременно, как нелинейные малые эффекты относительного порядка  $\alpha = a/h_0$ , (где  $a$  — амплитуда волны,  $h_0$  — глубина слоя в невозмущенном состоянии), так и малые дисперсионные эффекты относительного порядка  $\beta = h_0^2/\lambda^2$ , (где  $\lambda$  — длина волны), называется уравнением Кортевега – де Вриза [1–7]. Вывод уравнения Кортевега – де Вриза и асимптотическая оценка его погрешности приводится в монографии [1]. Некоторые достаточные условия возникновения кноидальных волн и уединенной волны найдены автором книги [2]. В [3] указывается, что теория Кортевега – де Вриза ограничивается слабой нелинейностью, приводится пример, когда превышение критической амплитуды вызывает нарушение эффекта стационарности распространения волны. Эффекты амплитудной и частотной дисперсии анализируются для случая уединенной волны в [4]. В статье [5] предложено для описания кноидальных волн использовать три параметра: средний уровень колебаний, амплитуду колебаний и величину модуля эллиптической функции. В книге [6] вводится понятие постоянной полной энергии. В [7] отмечено, что даже слабая дисперсия волн на мелкой воде в рамках теории Кортевега – де Вриза препятствует образованию фронта ударной волны. Вопрос о том, каким образом проявляется эффект несжимаемости среды для дисперсии кноидальных волн на поверхности жидкости в литературе не рассматривался.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоские длинные волны, бегущие над ровным жестким дном. Волновое движение жидкости считается периодическим, потенциальным и обладающим свойством дисперсии. Начало декартовой системы координат выбрано на дне, ось  $x$  направлена вправо, ось  $y$  направлена вверх. Свободная поверхность в случае невозмущенного движения горизонтальна  $y = h_0$ ,  $h_0 = \text{const}$ . Свободная поверхность для волнового возмущенного движения жидкости описывается соотношением  $y = h_0 + \eta$ , где  $\eta = \eta(x, t)$  — возвышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем поверхности или форма поверхности

жидкости,  $t$  — время. Волновая форма поверхности несжимаемой жидкости удовлетворяет [1–7] хорошо известному уравнению Кортевега – де Вриза

$$\partial\eta/\partial t + c_0(\partial\eta/\partial x) + c_0((3\eta)/(2h_0)(\partial\eta/\partial x)) + ((h_0^2 c_0)/6)(\partial^3\eta/\partial x^3) = 0, \quad (1)$$

где  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  — величина скорости распространения длинных волн в линейном приближении,  $g$  — ускорение свободного падения. Дифференциальное уравнение в частных производных (1) представлено в размерном виде и описывает поверхностные волны, которые распространяются в положительном направлении оси  $x$ . Если в уравнении (1) отбросить третье и четвертое слагаемое, то можно получить линейное уравнение переноса длинных волн в отсутствии дисперсии с постоянной фазовой скоростью движения  $c_0$ . Нелинейные волны на поверхности жидкости обладают свойством стационарности [1, 3, 7]. Значение неизвестной скорости распространения такой волны  $u$  представляет собой функцию параметров задачи, но она не зависит от горизонтальной координаты и времени. Введем соотношения, содержащие неизвестную скорость распространения стационарной волны в виде

$$\eta = h_0\zeta(X), \quad X = x - ut, \quad (2)$$

где  $\zeta$  — относительная или безразмерная величина возвышения поверхности жидкости, которая измеряется в долях от глубины жидкости в невозмущенном состоянии. Движение жидкости периодически, поэтому справедливо условие

$$\zeta(X + \lambda) = \zeta(X), \quad (3)$$

где  $\lambda$  — длина поверхностной, нелинейной волны. Величина длины волны неизвестна и также представляет собой функцию параметров задачи. Но она не зависит от горизонтальной координаты и времени, в чем проявляется свойство стационарности волны. Жидкость несжимаема, поэтому форма поверхности не может быть произвольной. Потребуем дополнительно выполнения следующего интегрального условия для стационарной волновой формы поверхности несжимаемой жидкости

$$\int_{X_0}^{X_0+\lambda} \zeta(X)dX = 0, \quad (4)$$

где  $X_0$  произвольное значение переменной  $X$  в силу периодичности стационарной волны. Одновременно интегральное условие несжимаемого и неразрывного волнового движения жидкости означает, что внутри и на поверхности слоя жидкости отсутствуют источники массы. Формулы (1)–(4) составляют постановку рассматриваемой задачи о потенциальном нелинейном движении слоя жидкости. В монографии [8] рассмотрен пример периодической нелинейные волны на поверхности вихревой жидкости бесконечной глубины.

**2. Преобразование уравнения КДВ.** Проведем преобразование Галилея для уравнения КДВ (1), которое представлено в размерном виде. В литературе такое преобразование обычно проводится в случае безразмерной формы уравнения КДВ [3, 5, 7]. Пусть это преобразование удовлетворяет соотношениям

$$\eta = \eta' + \eta_0, \quad \eta_0 = \text{const}; \quad x' = x - vt, \quad v = (3c_0\eta_0)/(2h_0); \quad t' = t, \quad (5)$$

где знаком штриха отмечены новые значения возвышения поверхности и переменных. Для преобразования Галилея (5) справедливы дифференциальные соотношения

$$\partial\eta/\partial t = \partial\eta'/\partial t' - v\partial\eta'/\partial x'; \quad \partial\eta/\partial x = \partial\eta'/\partial x'. \quad (6)$$

Воспользовавшись (5) и (6) преобразуем уравнение КДВ (1) к виду

$$\partial\eta'/\partial t' + c_0(\partial\eta'/\partial x') + c_0((3\eta')/(2h_0)(\partial\eta'/\partial x')) + ((h_0^2 c_0)/6)(\partial^3\eta'/\partial x'^3) = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что уравнение КДВ в размерном виде инвариантно относительно преобразования (5). Действительно проведение преобразования (5) не меняет вида и коэффициентов уравнения КДВ. Однако такое преобразование несколько меняет смысл уравнения КДВ. Применение преобразования (5) с одной стороны означает переход в подвижную систему координат, движущуюся с постоянной скоростью  $v$ , а с другой стороны означает изменение всего уровня жидкости на постоянную величину  $\eta_0$ . Скорость движения инвариантной подвижной системы координат пропорциональна изменению всего уровня жидкости. При этом возникает эффект линейной амплитудной дисперсии для скорости.

**3. Построение решения.** При построении решения ограничимся случаем периодических волн, имеющих конечное значение периода. Подставим соотношения (2) в дифференциальное уравнение КДВ в частных производных, и получим тогда обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка по переменной  $X$ , допускающее понижение порядка [1], в следующем виде

$$(h_0^2/6)(d^3\zeta/dX^3) + (3/4)(d(\zeta^2)/dX) + (1 - u/c_0)(d\zeta/dX) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя (7) по переменной  $X$ , имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$(h_0^2/6)(d^2\zeta/dX^2) + (3/4)(\zeta^2) + (1 - u/c_0)\zeta + G = 0, \quad (8)$$

где  $G$  — некоторая постоянная, произвольная по величине, возникшая при первом интегрировании (7). Умножим предварительно уравнение (8) на первую производную  $d\zeta/dX$ , имеем также обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(h_0^2/3)d(d\zeta/dX)^2/dX + d(\zeta^3)/dX + 2(1 - u/c_0)d(\zeta^2)/dX + 4Gd\zeta/dX = 0. \quad (9)$$

Проведем однократное интегрирование дифференциального уравнения (9), имеем

$$(h_0^2/3)(d\zeta/dX)^2 + \zeta^3 + 2(1 - u/c_0)\zeta^2 + 4G\zeta + H = 0, \quad (10)$$

где  $H$  — некоторая постоянная, произвольная по величине, возникшая при повторном интегрировании уравнения (7). Представим дифференциальное уравнение (10) в виде равенства

$$(h_0^2/3)(d\zeta/dX)^2 = -(\zeta^3 + 2(1 - u/c_0)\zeta^2 + 4G\zeta + H) \equiv (\zeta - \varsigma_1)(\zeta - \varsigma_2)(\varsigma_3 - \zeta) = f(\zeta). \quad (11)$$

При исследовании уравнения (11) ограничимся всего одним случаем, считая, что многочлен третьей степени  $f(\zeta)$  имеет три различных действительных корня

$$\varsigma_1 < \varsigma_2 < \varsigma_3. \quad (12)$$

Подстановка каждого корня в правую часть (11) приводит к необходимому условию экстремума  $d\zeta/dX = 0$ . Пусть  $\zeta_3$  соответствует положению максимума вершины волны, а  $\zeta_2$  определяет положение минимума впадины волны. Тогда следует наложить дополнительные ограничения на последние два корня из неравенств (12)

$$\zeta_2 < 0, \quad \zeta_3 > 0. \quad (13)$$

Из (12), (13) следует, что первый корень отрицателен, т. е.  $\zeta_1 < 0$ . Функция  $f(\zeta) + H$  имеет смысл потенциала силового поля, постоянную величину  $(-H)$  можно интерпретировать как начальное значение полной механической энергии, а уравнению (11) придать смысл интеграла энергии для частицы, находящейся в потенциальном силовом поле. Неизвестные постоянные, входящие в правую часть уравнения (11), выражаются через корни функции  $f(\zeta)$  следующим образом

$$2(u/c_0 - 1) = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3; \quad 4G = \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3; \quad H = -\zeta_1\zeta_2\zeta_3. \quad (14)$$

Согласно (13), (14) начальное значение полной механической энергии  $(-H) > 0$  положительно, что соответствует предположению о применимости теоремы Лагранжа с конечной энергией для одной волны, имеющую конечную длину  $\lambda$ . В [1] автор полагает величину  $\zeta_2$  равной нулю. Такое предположение приводит к тому, что постоянная полной энергии ноль. В других источниках проводятся другие частные предположения, которые сказываются согласно анализу преобразования (5) на величине фазовой скорости нелинейной волны. Мы подобных упрощений вводить не будем. Периодическое решение уравнения КДВ (1), т. е. решение, удовлетворяющее условию (3), должно удовлетворять поставленным общим условиям (12), (13), и имеет вид

$$\eta(x, t) = h_0\zeta(X), \quad X = x - ut, \quad u = \sqrt{gh_0}[1 + \zeta_1/2 + (\zeta_2 + \zeta_3)/2],$$

$$\zeta(X) = \zeta_2 + (\zeta_3 - \zeta_2)cn^2\left[\sqrt{3(\zeta_3 - \zeta_1)/(4h_0^2)}X\right], \quad 3(\zeta_3 - \zeta_1)/h_0^2 = \chi^2, \quad (15)$$

где  $cn(z)$  — эллиптическая функция Якоби [9],  $\chi$  имеет размерность и смысл волнового числа в рамках линейной постановки для исходной задачи. Доказательство того, что (15) является точным решением дифференциального уравнения (11) проводится непосредственной подстановкой (15) в (11) и применением дифференциального соотношения для эллиптической функции Якоби из [9]. Воспользовавшись определением периода эллиптической функции Якоби [9], учитывая, что для её квадрата период точно вдвое меньше, имеем формулу расчета длины периодической волны (15) с помощью соотношения

$$\lambda = (4/\chi)K(k), \quad 0 < k = \sqrt{(\zeta_3 - \zeta_2)/(\zeta_3 - \zeta_1)} < 1, \quad (16)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода из [9],  $k$  — модуль этого интеграла. Полагая  $\zeta_2 = 0$  в (15), (16) формально получаем формулы расчета профиля волны и модуля эллиптической функции, использованные в [1]. Потребуем, чтобы построенное решение (15) для уравнения КДВ удовлетворяло дополнительному условию для несжимаемой жидкости (4). Подставим (15) в (4), проведем

интегрирование, выводим уравнение для определения положения подошвы волны в её впадине (значение минимума для возвышения поверхности)

$$\varsigma_2 = (\varsigma_3 - \varsigma_2)[(1 - k^2) - E(k)/K(k)]/k^2, \quad (17)$$

где  $E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода согласно [9],  $\varsigma_3 - \varsigma_2 = h'$  — высота волны. Из уравнения (17) следует, что, задавшись величиной высоты волны  $h'$  и значением модуля  $k$ , можно вначале найти два параметра волны  $\varsigma_2, \varsigma_3$ , а затем с помощью определения модуля (16) найти третий параметр волны  $\varsigma_1$ . Из (17) при  $k \rightarrow 0$ , вытекает соотношение линейной теории  $\varsigma_3 = -\varsigma_2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [2] Бхатнагар Н. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
- [3] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
- [4] Мурти Т. С. Сейсмические морские волны цунами. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 448 с.
- [5] Лейбович С., Сибасс А. Нелинейные волны: Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргерса и Кортевега–де Вриза. М.: Мир, 1977. С. 113–150.
- [6] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоручков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
- [7] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335 с.
- [8] Сретенский Л. Н. Волновые движения жидкости. М.: Наука, 1977. 814 с.
- [9] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

**Trepachev V. V., Trepacheva G. N.** *Perturbation of cnoidal waves.* Wave problem for nonlinear equation of the theory Korteweg-de Vries for the long waves on surface in heavy incompressible fluid which have free surface is investigated. We obtained the solution which contains the well-known Whitham's solution as a particular case prepared theory (for the case if the one integral constant have zero value). There is good qualitative agreement with this theory and observational data on shallow water since real water have incompressible property. We obtained new condition for level of free surface for incompressible liquid and new equation with two independent variables in this wave theory for cnoidal waves.

# ЗАПРЕЩЕННЫЕ ЗОНЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ПЛОСКИХ Р И SV ВОЛН

**Фоменко С. И., Голуб М. В.**

*Кубанский государственный университет, Краснодар*

Исследуется влияние непрерывной неоднородности (функционально-градиентные слои) на распространение и фильтрацию упругих волн в фоновых кристаллах. Колебания в слоистом фоновом кристалле генерируются падающей Р- или S-волной. Волновое поле строится с использованием метода Т-матриц, в том числе с помощью явного выделения сингулярных составляющих Т-матрицы, что становится актуальным при увеличении числа ячеек в кристалле. Установлено, что наличие функционально-градиентной прослойки между упругими слоями в ячейке фоновом кристалле существенно влияет на запрещенные зоны в частотной области: они могут сдвигаться, расширяться или сужаться при увеличении относительной толщины градиентной составляющей. Приводятся диаграммы запрещенных зон в зависимости от толщин слоев, типа падающей волны и угла падения.

## **1. Введение.**

Композитные материалы с полупериодической или периодической внутренней структурой в последние годы получают все более широкое применение в самых разных отраслях. Они уже давно нашли применение в авиа- и машиностроении, космической отрасли, как компоненты нано- и метаматериалов. Так в оптике и микроэлектронике используются фотонные кристаллы, состоящие из системы периодических неоднородностей, где зачастую наблюдается эффект появления зон полного пропуска нестационарного сигнала — запрещенные зоны. Волновые явления в фоновых кристаллах схожи с наблюдаемыми в фотонных кристаллах [1]. Здесь также на определенных частотных диапазонах имеют место области полного отражения волновой энергии от периодической структуры (запрещенные зоны) [2].

При изготовлении слоистых фоновых кристаллов методом напыления, пресованием или с использованием других технологических процессов изменение физико-механических свойств при переходе от одного слоя к другому может происходить не скачкообразно, а непрерывно по некоторому закону [3]. Упругие периодические структуры уже нашли приложения в фокусировке и направленном излучении упругих волн, они служат фильтрующими элементами поверхностных актуаторов, входят в системы виброгашения и т. д. Например, для гашения шума от автомобилей вдоль трасс устанавливаются ограждения с периодически расположенными отверстиями, размер и расстояние между которыми подбирается путем минимизации уровня шума, а при возбуждении волн актуаторами фоновые кристаллы выполняют роль фильтров, позволяющие гасить сигнал на нежелательных частотах [4]. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [5], где рассматривались антиплоские колебания.



## 2. Постановка и решение задачи.

Рассматриваются гармонические колебания на частоте  $\omega$  фонового кристалла, представляющего из себя пакет из  $N$  периодически повторяющихся ячеек ( $a_{i-1} \leq z \leq a_i$ ) между двумя упругими полупространствами (рис. 1).

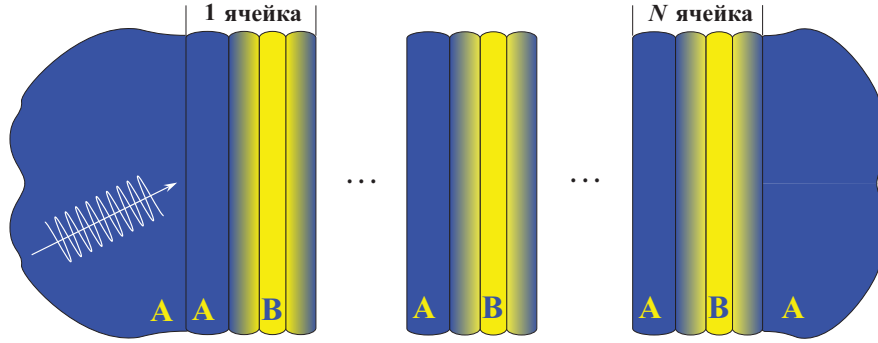


Рис. 1. Постановка задачи.

Вектор перемещений  $\mathbf{u} = \{u_x, u_z\} = \{u_1, u_2\}$  в упругой среде с плотностью  $\rho$  удовлетворяет уравнениям движения:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j = 1, 2$$

где тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  выражается через компоненты вектора перемещений  $u_i$  и упругие постоянные. Волновые колебания в среде возбуждаются  $P$  или  $SV$  плоской волной с волновым числом  $\varkappa$ , падающей из области  $z < 0$  под углом  $\theta$ :

$$u_{inc} = e^{i\varkappa \cos \theta z - i\omega t}.$$

На границах слоев  $z = z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) заданы условия непрерывности перемещений и напряжений.

Для рассматриваемого случая плоских волн, может быть установлена связь между значениями обобщенного вектора  $\mathbf{v} = \{u_i, \sigma_{ij}\}$  на границе слоя и значениями внутри, выражающаяся в линейной зависимости между ними:

$$\mathbf{v}(z) = T(z, z_{k-1})\mathbf{v}(z_{k-1}), \quad z \in [z_{k-1}, z_k].$$

Здесь  $T(z, z_{k-1})$  — матрица переноса (transfer matrix, T-матрица), имеющая явное представление, зависящее от упругих параметров слоя, частоты колебаний и текущей координаты  $z$ .

Таким образом, матрица переноса  $T_c$  ячейки кристалла толщины  $H = 1$ , состоящей из слоев  $A$  и  $B$  толщины  $h_A$  и  $h_B$  соответственно, а также из функционально-градиентных прослоек  $FGM_{AB}$  и  $FGM_{BA}$  с толщиной  $h_F$ , имеет вид:

$$T_c = T(z_{BA}, z_B) T(z_B, z_{AB}) T(z_{AB}, z_A) T(z_A, z_0),$$

где  $z_0 = a_{i-1}$ ,  $z_A = z_0 + h_A$ ,  $z_{AB} = z_A + h_F$ ,  $z_B = z_{AB} + h_B$  и  $z_{BA} = z_B + h_F = a_i$  — координаты слоев кристалла. При этом матрицы функционально-градиентных прослоек аппроксимируется набором из  $M$  однородных слоев. Справедливость такой

аппроксимации показана в [5]. Тогда Т-матрица всего кристалла, состоящего из  $N$  ячеек, выражается следующим образом:

$$T = T_c^N = P^{-1} \Lambda^N P,$$

где  $\Lambda^N = \text{diag}\{\lambda_1^N, \lambda_2^N, 1/\lambda_1^N, 1/\lambda_2^N\}$  — диагональная жорданова матрица,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — собственные числа, а  $P$  — матрица перехода к жордановому базису матрицы  $T_c$ .

Амплитуды  $R_L, R_T, T_L, T_T$  отраженной и прошедшей волн:

$$u^- = u_{inc} + R_L u_L^- + R_T u_T^-, \quad u^+ = T_L u_L^+ + T_T u_T^+,$$

где  $u_L^\pm$  и  $u_T^\pm$  — формы прошедших и отраженных  $P$  и  $SV$  волн, находятся из условий непрерывности на внешних границах кристалла. Для них получено полуаналитическое представление, в котором выделены сингулярные составляющие, вносимые матрицей  $\Lambda^N$ , что обеспечивает численную устойчивость решения.

### 3. Влияние параметров фононного кристалла на фильтрационные свойства.

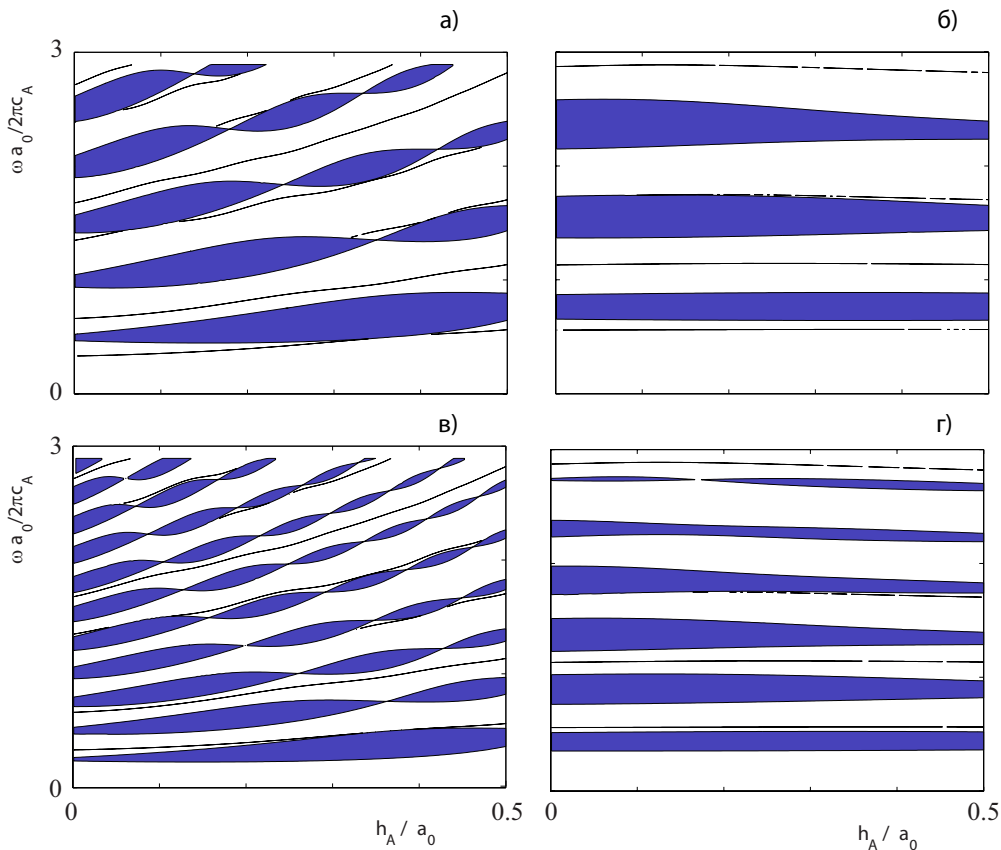


Рис. 2. Запрещённые зоны в зависимости от толщины градиентного слоя.

В приведенных ниже расчетах в качестве материалов использовались оксид алюминия (А) и алюминий (В), значения упругих параметров, а также зависимость функционально-градиентных параметров от  $z$  (закон II) даны в [5].

Для анализа используются энергетические коэффициенты прохождения  $\alpha^+$  и отражения  $\alpha^-$  (см. например [4]), для которых выполняется  $\alpha^+ + \alpha^- = 1$ . Коэффициенты  $\alpha^\pm$  позволяют определять разрешенные и запрещенные зоны, так как в запрещенных зонах  $\alpha^+ \rightarrow 0$ .

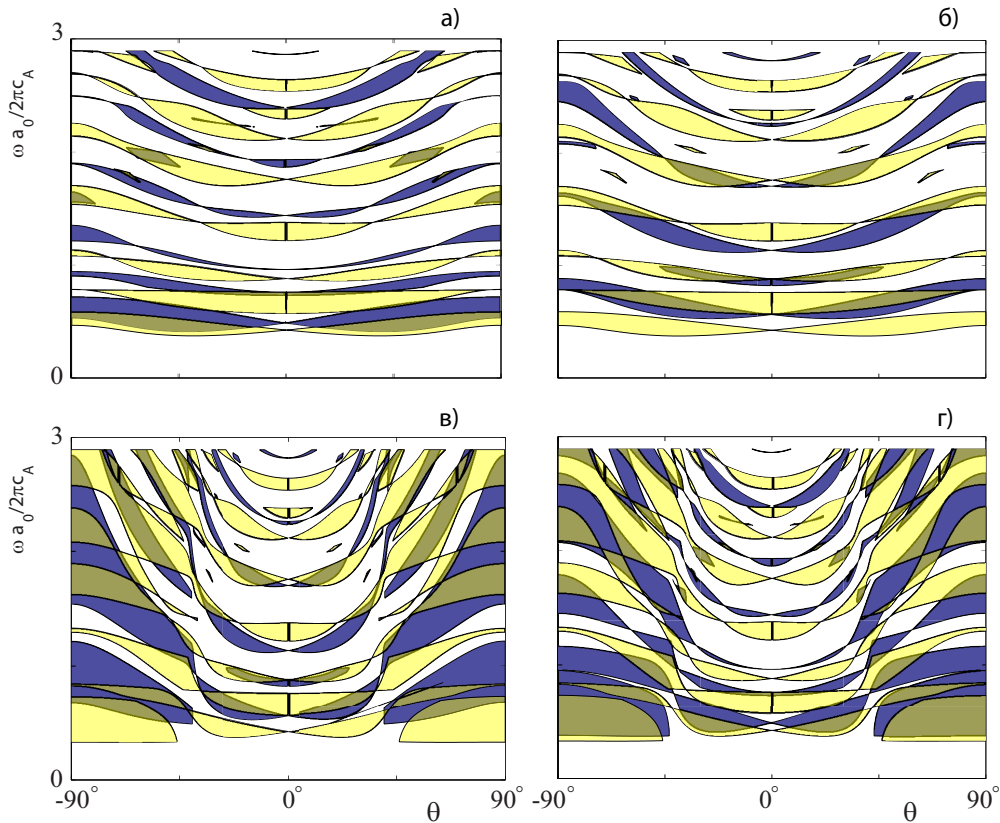


Рис. 3. Запрещенные зоны в зависимости от угла падения плоской волны. Светлые зоны соответствуют отсутствию функционально-градиентной прослойки  $h_F = 0$ .

Наличие функционально-градиентной составляющей может сильно влиять на волновые процессы в фоновых кристаллах. Так на рис. 2 показано изменение запрещенных зон при варьировании толщины градиентных слоев для вертикально ( $\theta = 0$ ) падающих на границу фоновых кристалла Р- и S-волн (рисунки а,б и в,г). Рассматривались различные соотношения между толщинами материалов  $K = h_A/h_B$ , а именно:  $K = 0.1$  (левый столбец) и  $K = 10$  (правый столбец рисунка). Для малых значений  $K$  величина функционально-градиентной прослойки оказывает значительное влияние на расположение и форму запрещенных зон, приводя их к сдвигу, расширению или сужению в частотном диапазоне. На графиках значения по оси частот отложены в нормированном виде  $\omega a_0/2\pi c_A$   $a_0 = H$ ,  $c_A$  — скорость S-волны в полупространстве.

Тонкие линии на рис. 2 являются точками зарождения запрещенных зон, которые развиваются с увеличением угла. В частности это видно из рис. 3, где для Р- и S-волн (верхние и нижние рисунки соответственно), приходящих из бесконечности и вызывающих колебания в среде, показано влияние угла падения на

волновые процессы в фоновых кристаллах. Рис. 3(а,в) соответствует толщине градиентных слоев  $h_f = 0.25$ , второй  $h_f = 0.5$ , в обоих случаях  $K = 1$ . Светлыми областями показаны запрещенные зоны в фоновом кристалле в отсутствие градиентных прослоек ( $h_f = 0$ ), демонстрирующие разницу между волновыми процессами в слоистом и функционально-градиентном кристалле. С увеличением  $\theta$  до горизонтального угла падения ( $\theta = 90^\circ$ ) запрещенные зоны деформируются и расширяются.

**Заключение.** В работе проведено параметрическое исследование фильтрационных свойств волновых процессов в функционально-градиентных фоновых кристаллах. Исследовано влияние функциональной градиентности на волновое поле в рассматриваемых периодических структурах.

Работа выполнена в рамках проекта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы № 2012-1.2.2-12-000-1002-039, гранта Минобрнауки и Германской службы академических обменов DAAD (проект № 10.60.2011) и Российского фонда фундаментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Figotin A., Godin Yu. A., Vitebsky I.* Two-dimensional tunable photonic crystals // *Physical Review B*. 1998. Vol. 57(5). Pp. 2841–2848.
- [2] *Kushwaha M. S.* Band gap engineering in phononic crystals // *Recent Research Developments in Applied Physics*. 1999. Vol. 2. Pp. 743–855.
- [3] *Wu M. L., Wu L. Y., Yang W. P., Chen L. W.* Elastic wave band gaps of one-dimensional phononic crystals with functionally graded materials // *Smart Materials and Structures*. 2009. Vol. 18. Pp. 115013.
- [4] *Gertus T. et. al.* Surface acoustic wave phononic crystal device fabricated by femtosecond laser ablation // *Microwave and Optical Technology Letters Wiley Subscription Services*. 2012. Vol. 54. Pp. 1286–1287.
- [5] *Golub M. V., Fomenko S. I., Bui T. Q., Zhang Ch., Wang Y.-S.* Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. Pp. 344–354.

**Fomenko S. I., Golub M. V.** *Band-gaps and wave propagation in functionally graded phononic crystals.* Elastic wave propagation and filtering in periodically layered functionally graded layered composites is under investigation. Wave motion is excited by an incident plane P- or SV-wave. Wavefield is constructed via T-matrix method including explicit singular values of T-matrix that is important for large number of unit-cells. It has been shown that functionally graded layer in the unit-cell of phononic crystal influences sufficiently band-gaps. The dependencies of band-gap on layer's thicknesses, type of incident wave and angle of incidence are shown.

# ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОСНОВАНИЯ

Чебаков М. И., Абрамович М. В., Колосова Е. М.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И.*

*Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости о взаимодействии абсолютно жесткого цилиндра с внутренней поверхностью цилиндрического основания, состоящего из двух круговых цилиндрических слоев жестко соединенных между собой и с упругим пространством, при этом слои и пространство имеют различные упругие постоянные. Для поставленной задачи с помощью программ аналитических вычислений впервые получены точное интегральное уравнение (ИУ) первого рода с ядром, представленным рядом в явном аналитическом виде. Изучены основные свойства ядра ИУ, в том числе показано, что числитель и знаменатель символов ядер могут быть представлены в виде разложения по произведениям степеней модулей сдвига слоев и полупространства. Изложена схема решения ИУ прямым методом коллокаций, которая позволяет получать решение задачи практически при любых значениях исходных параметров. Рассчитаны распределения контактных напряжений, размеры области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующих на него силы в зависимости от геометрических и механических параметров слоев и пространства. Проведено сравнение результатов расчетов в частных случаях с ранее известными. Контактные задачи для однослойных и двухслойных цилиндрических оснований рассматривались ранее ([1–5] и др.).

**1. Постановка задачи.** В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  рассмотрим два цилиндрических слоя  $R_1 \leq r \leq R_2$  и  $R_2 \leq r \leq R_3$ , которые жестко соединены между собой по границе  $r = R_2$ , а поверхность  $r = R_3$  жестко соединена с упругим пространством  $r \leq R_3$ . Пусть в поверхность  $r = R_1$  силой  $P$  вдавливается штамп в форме цилиндра радиуса  $R_0 = R_1 - \Delta$  с точкой первоначального касания  $\varphi = 0, r = R_1$ . Сила  $P$  направлена вдоль луча  $\varphi = 0$ , величина  $\Delta$  мала. В результате приходим к решению краевой задачи для уравнений Ламе (плоская деформация).

Для нахождения неизвестных контактных напряжений  $\sigma_r^{(1)}(R_1, \varphi) = -q(\varphi)$  получим следующее интегральное уравнение

$$\int_{-\theta}^{\theta} q(t)k(t - \varphi)dt = \pi f(\varphi)(-\theta \leq \varphi \leq \theta), \quad (1)$$

$$k(y) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L(n) \cos ny, \quad (2)$$

$$L(u) = \frac{L_1(u)}{L_2(u)}, \quad A = L(0), \quad f(\varphi) = \frac{G_1}{R_1(1 - \nu_1)}[\delta \cos \varphi - \Delta(1 - \cos \varphi)], \quad (3)$$

$G_i$  — модуль сдвига,  $\nu_i$  — коэффициент Пуассона для слоев и пространства ( $i = 1, 2, 3$ ).

В интегральном уравнении (1)–(2) трансформанта ядра  $L(u)$  получена с использованием программы аналитических вычислений Maple, она довольно громоздка и поэтому не представляется возможным полностью привести ее здесь, но основные ее свойства изучены, например, функции  $L(u)$  представимы при  $u \geq 2$  в виде

$$L_i(u) = G_{31}^2 \eta_{02}^i(u) + G_{21} G_{31} \eta_{11}^i(u) + G_{21} G_{31}^2 \eta_{12}^i(u) + G_{21}^2 \eta_{20}^i(u) + G_{21}^2 G_{31} \eta_{21}^i(u) + \\ + G_{21}^2 G_{31}^2 \eta_{22}^i(u) + G_{21}^3 \eta_{30}^i(u) + G_{21}^3 G_{31} \eta_{31}^i(u) + G_{21}^4 \eta_{40}^i(u), \quad (4)$$

а при  $u = 1$  и  $u = 0$  имеем

$$L_i(1) = G_{31}^2 \beta_{02}^i + G_{21} G_{31} \beta_{11}^i + G_{21} G_{31}^2 \beta_{12}^i + G_{21}^2 \beta_{20}^i + G_{21}^2 G_{31} \beta_{21}^i + G_{21}^2 G_{31}^2 \beta_{22}^i + \\ + G_{21}^3 \beta_{30}^i + G_{21}^3 G_{31} \beta_{31}^i, \quad (5)$$

$$L_i(0) = G_{31} \alpha_{01}^i + G_{21} \alpha_{10}^i + G_{21} G_{31} \alpha_{11}^i + G_{21}^2 \alpha_{20}^i, \quad (6)$$

где  $G_{j1} = G_j/G_1$ , а найденные функции  $\eta_{nm}^i(u)$  и постоянные  $\beta_{nm}^i$ ,  $\alpha_{nm}^i$  содержат степенные, показательные и логарифмические функции постоянных, зависят только от коэффициентов Пуассона материала слоев и относительных радиусов  $r_2 = R_2/R_1$ ,  $r_3 = R_3/R_1$ .

Отметим, что здесь для  $L_i(u)$  при  $G_{31} \neq \infty$  не выполняются предельные переходы при  $u \rightarrow 0$  и  $u \rightarrow 1$  соответственно к значениям  $L_i(0)$  и  $L_i(1)$ , но при  $G_{31} = \infty$  этот предельный переход выполняется.

В виду сильной громоздкости функций  $\eta_{nm}^i(u)$  и постоянных  $\beta_{nm}^i$  здесь они не приводятся, но  $\alpha_{nm}^i$  имеют более простой вид

$$\alpha_{01}^1 = (r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - 2\nu_1 + 1)(2\nu_2 - 1), \quad \alpha_{10}^1 = (r_2^2 - 2\nu_1 + 1)(2r_2^2\nu_2 - r_2^2 - r_3^2), \\ \alpha_{11}^1 = (r_2^2 - 1)(-2r_3^2\nu_2 + r_2^2 + r_3^2)(2\nu_1 - 1), \quad \alpha_{20}^1 = (r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - 1)(2\nu_1 - 1), \\ \alpha_{01}^2 = 2(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - 1)(2\nu_2 - 1)(\nu_1 - 1), \quad \alpha_{10}^2 = 2(r_2^2 - 1)(2r_2^2\nu_2 - r_2^2 - r_3^2)(\nu_1 - 1), \\ \alpha_{11}^2 = 2(2r_2^2\nu_1 - r_2^2 - 1)(-2r_3^2\nu_2 + r_2^2 + r_3^2)(\nu_1 - 1), \quad \alpha_{20}^2 = 2(r_3^2 - r_2^2)(2r_2^2\nu_1 - r_2^2 - 1)(\nu_1 - 1).$$

Полученные соотношения (4)–(6) позволяют исследовать поведение функции  $L(u)$  в том числе и на бесконечности

$$L(u) = 1/u + O(1/u^2), \quad (u \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Учитывая соотношение (7), представим  $L(u)$  в виде

$$L(u) = 1/u + K(u), \quad (8)$$

и, воспользовавшись значением ряда [6]

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos kt}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|,$$

ядро интегрального уравнения (7) представим в виде

$$k(t) = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} K(n) \cos nt . \quad (9)$$

Решение интегрального уравнения (1) с ядром (9) получим прямым методом коллокации, воспользовавшись результатами работы [7], где предложен его алгоритм и приведено соответствующее обоснование. Проведем дискретизацию интегрального уравнения (7), (9) по следующей схеме, предложенной в [7], для нахождения значений контактных напряжений  $q(\psi)$  в узлах коллокации  $\psi = \psi_j = -\theta + \varepsilon/2 + \varepsilon(j - 1)$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon \sum_{i=1}^N a_{ij} q_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) , \quad (10)$$

$$a_{ij} = \frac{A}{2} - \ln \left| 2 \sin \frac{\varepsilon(i-j)}{2} \right| + \sum_{n=1}^N \cos n\varepsilon(i-j) \quad (i \neq j) ,$$

$$a_{ii} = -\left( \ln \frac{\varepsilon}{2} - 1 \right) , \quad b_i = \pi f(\varphi_i) . \quad (11)$$

Отличительной особенностью системы (10)–(11) является то, что она имеет диагональную структуру. Между коэффициентами системы существует следующая связь

$$a_{i+1,j+1} = a_{i,j} \quad (i \geq j) , \quad a_{ij} = a_{ji} , \quad (12)$$

следовательно достаточно вычислить только коэффициенты первой строки, а именно  $a_{1j}$ , все остальные элементы системы будут выражать через них, что значительно сокращает время вычисления всех коэффициентов матрицы  $a_{ij}$  системы (10)–(11).

Для вычисления силы  $P$ , действующей на штамп, получим

$$P = \varepsilon R_1 \sum_{i=1}^N q_i \cos \psi_i . \quad (13)$$

На основе полученных соотношений были проведены расчеты контактных напряжений, величины области контакта  $-\theta \leq \varphi \leq \theta$ , величины приложенной к штампу приведенной силы  $P/G_1$  при заданном вертикальном перемещении штампа  $\delta$  при некоторых значениях геометрических ( $R_1, r_2 = R_2/R_1, r_3 = R_3/R_1, \Delta$ ) и механических ( $G_{i1}, \nu_i$ ) параметров задачи.

Предварительно было проведено тестирование алгоритма расчетов путем сравнения числовых результатов в случае  $G_{31} = \infty, G_{21} = 1, \nu_1 = \nu_2$  с результатами, полученными при решении аналогичной задачи для однородного цилиндрического слоя другим аналитическим (асимптотическим) методом в [1]. Вычисления проводились при различных значениях  $N$  с целью контроля сходимости расчетной схемы. Расчеты показали, что наблюдается уточнение результатов с увеличением числа уравнений  $N$  системы (10) и при  $N \geq 2001$  они практически не изменялись

и совпадали с большой точностью при соответствующих геометрических параметрах с результатами, приведенными в работе [1].

В таблицах 1, 2 приведены результаты расчетов приведенных контактных напряжений  $q_n = q(\varphi_n)/G_1 \cdot 10^3$ ,  $\varphi_n = \theta n/5$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ), действующей на штамп приведенной силы  $P^* = P/G_1 \cdot 10^3$  и области контакта  $\theta$  в градусах при  $G_{31} = 1$ ,  $\delta = 0.00005$ ,  $\Delta = 0.00001$ ,  $R_1 = 0.1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$  и некоторых значениях  $R_{21}$ ,  $R_{31}$  и  $G_{21}$ . В таблице 1  $R_{21} = 1.2$ ,  $R_{31} = 1.4$ , а в таблице 2  $R_{21} = 1.01$ ,  $R_{31} = 1.05$ .

На рисунках 1 а, б приведены графики приведенных контактных напряжений  $q^* = q(\varphi)/G_1$  при  $\delta = 0.00005$ ,  $\Delta = 0.00001$ ,  $R_1 = 0.1$ ,  $G_{31} = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$  при некоторых значениях  $G_{21}$  и  $R_{21} = 1.2$ ,  $R_{31} = 1.4$  (рис. 1 а) и  $R_{21} = 1.01$ ,  $R_{31} = 1.05$  (рис. 1 б). На рисунках по горизонтали отложен угол  $\varphi$  в градусах.

№	$P^*$	$\theta$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$G_{21}$
2	0.228	74.6	1.44	1.40	1.27	1.07	0.770	0.5
5	0.311	75.5	1.92	1.87	1.72	1.47	1.08	1.5
7	0.340	76.3	2.09	2.03	1.88	1.61	1.17	2
11	0.395	77.8	2.40	2.34	2.16	1.85	1.35	3
12	0.448	79.5	2.69	2.62	2.42	2.08	1.51	4
13	0.502	80.7	3.00	2.92	2.69	2.31	1.68	5

Таблица 1.

№	$P^*$	$\theta$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$G_{21}$
2	0.260	74.8	1.73	1.56	1.34	1.29	0.966	0.5
5	0.288	74.9	1.79	1.75	1.61	1.37	0.993	1.5
7	0.297	75.1	1.84	1.80	1.65	1.41	1.02	2
11	0.314	75.9	1.94	1.89	1.74	1.48	1.08	3
12	0.330	76.5	2.02	1.97	1.81	1.55	1.13	4
13	0.346	77.2	2.11	2.06	1.90	1.61	1.18	5

Таблица 2.

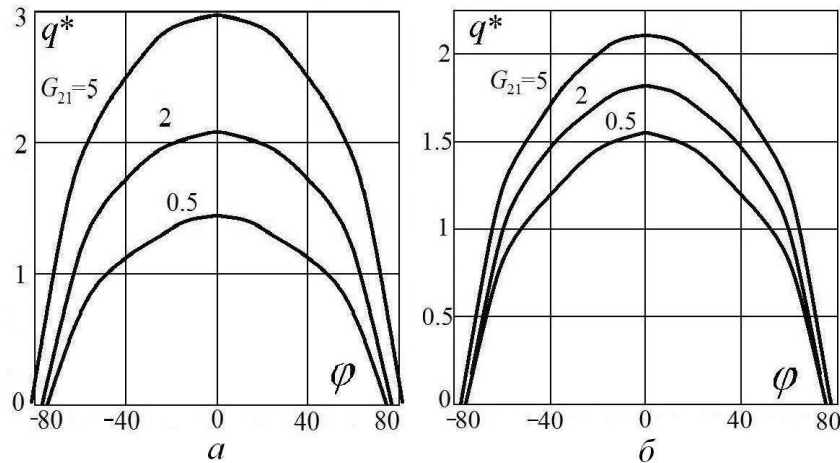


Рис. 1. Контактные напряжения.



Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-08-00909, 11-08-12087-офи-м-2011).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров В. М. Чебаков М. И. К теории расчета цилиндрического подшипника // МТТ. 2004. № 1. С. 22–30.
- [2] Александров В. М. Чебаков М. И. К теории расчета цилиндрического подшипника // Изв. РАН. 2009. № 3. С. 163–170.
- [3] Чебаков М. И. Иваночкин П. Г. Контактная задача для двухслойного цилиндрического основания с учетом сил трения // Трение и износ. 2008. № 6. С. 647–653.
- [4] Александров В. М. Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
- [5] Александров В. М. Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 304 с.
- [6] Прудников А. П. Брычков Ю. А. Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Главная редакция физ.-мат. литературы, 1981. 800 с.
- [7] Воронин В. В. Цецецо В. А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 40–53.

**Chebakov M. I., Abramovich M. V., Kolosova E. M.** *Plane contact problem for a three-layer cylindrical base.* It was considered the plane contact problem of the theory elasticity of the interaction a rigid cylinder of the cylindrical base, which consists of two circular cylindrical layers tightly connected with each other and with the elastic space. Layers and space have different elastic constants. For this problem with a program of analytical calculations were first obtained by the exact integral equation (IE) of the first kind with the kernel, represented by an explicit analytic form. Studied the basic properties of the core IE, including shows that the numerator and denominator of the core characters can be represented as an expansion in powers of the works of the shear moduli of layers and half-space. The methods of solving IE direct collocation method, which allows to obtain the solution in almost all values of initial parameters. It was calculated the distribution of contact stresses, the size of the contact area, the relationship moving stamp and forces acting on it, depending on the geometrical and mechanical properties of the layers and space. A comparison of the calculation results has been made cases to previously known.

# ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГЛЫХ ПЛИТ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Шейдаков Д. Н.\* , Шейдаков Н. Е.\*\***

*\*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

*\*\*Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)*

В рамках общей теории устойчивости трехмерных тел проведен анализ выпучивания круглой плиты при радиальном сжатии-растяжении. Для описания поведения плиты использовалась модель микрополярной сплошной среды. При этом предполагалось, что упругие свойства материала изменяются по толщине. Для определения докритического напряженно-деформированного состояния плиты в условиях больших деформаций применялся полуобратный метод нелинейной теории упругости. Используя метод линеаризации в малой окрестности основного состояния построены уравнения нейтрального равновесия, которые решены численно для ряда конкретных материалов. Найденны спектры критических значений коэффициента радиального сжатия и соответствующие им моды выпучивания. Используя полученные результаты, проанализирован размерный эффект и изучено влияние упругих свойств материала на бифуркацию равновесия.

**1. Начальное напряженное состояние неоднородной плиты.** Рассмотрим круглую плиту радиуса  $r_1$  и толщины  $H$ , выполненную из функционально-градиентного материала. Будем считать, что поведение плиты описывается моделью микрополярного упругого тела. При радиальном сжатии (растяжении) плиты положение частицы в деформированном состоянии задается радиус вектором  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} R &= \alpha r , & 0 \leq r \leq r_1 , & & Z = f(z) , & & |z| \leq H/2 , \\ \Phi &= \varphi , & 0 \leq \varphi \leq 2\pi , & & & & \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{R} = \alpha r \mathbf{e}_R + f(z) \mathbf{e}_Z . \quad (2)$$

Здесь  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты),  $R, \Phi, Z$  — эйлеровы цилиндрические координаты,  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$  и  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$  — ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат, соответственно,  $\alpha$  — коэффициент радиального сжатия,  $f(z)$  — некоторая неизвестная функция, характеризующая толщинную деформацию неоднородной плиты.

Кроме того, задан собственно ортогональный тензор микроповорота  $\mathbf{H}$ , который характеризует поворот частицы микрополярной среды и при рассматриваемой деформации равен:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z . \quad (3)$$

Согласно выражениям (1), (2), градиент деформации  $\mathbf{C}$  равен (здесь и далее  $'$  обозначает производную по  $z$ ):

$$\mathbf{C} = \text{grad } \mathbf{R} = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + f' \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z . \quad (4)$$

где  $\text{grad}$  — градиент в лагранжевых координатах.

Из соотношений (3), (4) следует, что тензор изгибной деформации  $\mathbf{L}$  равен нулю

$$\mathbf{L} \times \mathbf{E} = -(\text{grad} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T = 0 ,$$

а мера деформации типа Коши  $\mathbf{Y}$  выражается следующим образом

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T = \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \alpha \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + f' \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z . \quad (5)$$

Будем считать, что упругие свойства плиты изменяются по толщине и описываются моделью физически линейного микрополярного материала, удельная потенциальная энергия деформации которого является квадратичной формой тензоров  $\mathbf{Y} - \mathbf{E}$  и  $\mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) = & \frac{1}{2} \lambda(z) \text{tr}^2(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) + \frac{1}{2} (\mu(z) + \varkappa(z)) \text{tr} \left( (\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{E})^T \right) + \\ & + \frac{1}{2} \mu(z) \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E})^2 + \frac{1}{2} \gamma_1(z) \text{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{1}{2} \gamma_2(z) \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} \gamma_3(z) \text{tr} \mathbf{L}^2 . \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\lambda(z), \mu(z)$  — функции, описывающие изменение классических параметров Ляме,  $\varkappa(z), \gamma_1(z), \gamma_2(z), \gamma_3(z)$  — функции, описывающие изменение микрополярных параметров,  $\mathbf{E}$  — единичный тензор.

Из выражений (3), (6) следует, что для неоднородной плиты тензор моментных напряжений типа Пиолы  $\mathbf{G}$  при деформации радиального сжатия (1)–(3) равен нулю

$$\mathbf{G} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{H} = (\gamma_1(z) (\text{tr} \mathbf{L}) \mathbf{E} + \gamma_2(z) \mathbf{L} + \gamma_3(z) \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{H} = 0 ,$$

а тензор напряжений типа Пиолы  $\mathbf{D}$  равен

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H} = (\lambda(z) \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + \mu(z) (\mathbf{Y}^T - \mathbf{E}) + (\mu(z) + \varkappa(z)) (\mathbf{Y} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{H} = \\ = & (\lambda(z)s + \chi(z)(\alpha - 1)) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\Phi) + (\lambda(z)s + \chi(z)(f' - 1)) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z , \\ s = & 2\alpha + f' - 3 , \quad \chi(z) = 2\mu(z) + \varkappa(z) . \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения равновесия нелинейной моментной теории упругости при отсутствии массовых сил и моментов записываются следующим образом

$$\text{div} \mathbf{D} = 0 , \quad \text{div} \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_\times = 0 , \quad (8)$$

где  $\text{div}$  — дивергенция в лагранжевых координатах. Символ  $\times$  означает векторный инвариант тензора второго ранга.

Будем полагать, что на лицевых поверхностях плиты ( $z = \pm H/2$ ) отсутствуют внешние нагрузки, а на плоскости  $z = 0$  нет вертикального смещения:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}|_{z=\pm H/2} = 0 , \quad f(0) = 0 . \quad (9)$$

Решая краевую задачу (8), (9) с учетом соотношений (7), находим неизвестную функцию  $f$ :

$$f(z) = \int \frac{2(1-\alpha)\lambda(z)}{\lambda(z) + 2\mu(z) + \varkappa(z)} dz + z + C ,$$

где постоянная интегрирования  $C$  определяется из условия  $f(0) = 0$ . В частном случае, когда характер изменения упругих параметров  $\lambda, \mu, \varkappa$  по толщине одинаков

$$\lambda(z) = \lambda_0 \xi(z), \quad \mu(z) = \mu_0 \xi(z), \quad \varkappa(z) = \varkappa_0 \xi(z),$$

выражение для функции  $f$  имеет достаточно простой вид:

$$f(z) = \alpha_3 z, \quad \alpha_3 = 1 + \frac{2\lambda_0(1 - \alpha)}{\lambda_0 + 2\mu_0 + \varkappa_0}.$$

**2. Бифуркация равновесия неоднородной плиты.** Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия неоднородной плиты при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое радиус-вектором  $\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}$  и тензором микроповорота  $\mathbf{H} - \eta \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$ . Здесь  $\eta$  — малый параметр,  $\mathbf{v}$  — вектор добавочных перемещений,  $\boldsymbol{\omega}$  — линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот частиц микрополярной среды, отсчитываемый от начального деформированного состояния.

Возмущенное состояние равновесия микрополярной среды описывается уравнениями:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^\bullet = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G}^\bullet + [\operatorname{grad} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}^\bullet]_{\times} = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}, \mathbf{H} - \eta \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}) \right|_{\eta=0}, \quad \mathbf{G}^\bullet = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{G}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}, \mathbf{H} - \eta \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}) \right|_{\eta=0},$$

где  $\mathbf{D}^\bullet$  и  $\mathbf{G}^\bullet$  — линейризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы. В случае неоднородного физически линейного микрополярного материала (6) для этих тензоров справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\bullet &= (\lambda (\operatorname{tr} \mathbf{Y}^\bullet) \mathbf{E} + (\mu + \varkappa) \mathbf{Y}^\bullet + \mu \mathbf{Y}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H} - \\ &- (\lambda \operatorname{tr} (\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + \mu (\mathbf{Y}^T - \mathbf{E}) + (\mu + \varkappa) (\mathbf{Y} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{G}^\bullet = (\gamma_1 (\operatorname{tr} \mathbf{L}^\bullet) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L}^\bullet + \gamma_3 \mathbf{L}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H} - (\gamma_1 (\operatorname{tr} \mathbf{L}) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L} + \gamma_3 \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}^\bullet = (\operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L}^\bullet = \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}^T.$$

Здесь  $\mathbf{Y}^\bullet$  — линейризованная мера деформации типа Коши,  $\mathbf{L}^\bullet$  — линейризованный тензор изгибных деформаций.

Линейризованные краевые условия на лицевых поверхностях плиты ( $z = \pm H/2$ ) записываются следующим образом:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet|_{z=\pm H/2} = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{G}^\bullet|_{z=\pm H/2} = 0. \quad (13)$$

Будем полагать, что на краю плиты ( $r = r_1$ ) отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линейризованным граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_\Phi|_{r=r_1} &= \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_Z|_{r=r_1} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}|_{r=r_1} = 0, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{e}_R|_{r=r_1} &= \mathbf{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{\omega}|_{r=r_1} = \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\omega}|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Запишем представление вектора добавочных перемещений  $\mathbf{v}$  и вектора добавочного поворота  $\boldsymbol{\omega}$  в базисе эйлеровых координат:

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\Phi \mathbf{e}_\Phi + v_Z \mathbf{e}_Z, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_R \mathbf{e}_R + \omega_\Phi \mathbf{e}_\Phi + \omega_Z \mathbf{e}_Z. \quad (15)$$

Выражения (10) описывающие возмущенное состояние равновесия неоднородной плиты, представляют собой систему 6 уравнений в частных производных относительно неизвестных функций  $v_R, v_\Phi, v_Z, \omega_R, \omega_\Phi, \omega_Z$  трех переменных  $r, \varphi, z$ . Подстановка

$$\begin{aligned} v_R &= V_R(r, z) \cos n\varphi, & \omega_R &= \Omega_R(r, z) \sin n\varphi, \\ v_\Phi &= V_\Phi(r, z) \sin n\varphi, & \omega_\Phi &= \Omega_\Phi(r, z) \cos n\varphi, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ v_Z &= V_Z(r, z) \cos n\varphi, & \omega_Z &= \Omega_Z(r, z) \sin n\varphi, \end{aligned}$$

приводит к отделению переменной  $\varphi$  в этих уравнениях, сводя исследование устойчивости к решению однородной краевой задачи (10), (13), (14) для системы 6 уравнений в частных производных относительно функций двух переменных  $r, z$ .

**3. Осесимметричные формы возмущенного равновесия.** В частном случае осесимметричных возмущений ( $n = 0$ ) использование подстановки

$$\begin{aligned} v_R &= V_R(z) J_1(\beta r), & v_\Phi &= 0, & v_Z &= V_Z(z) J_0(\beta r), \\ \omega_R &= 0, & \omega_\Phi &= \Omega_\Phi(z) J_1(\beta r), & \omega_Z &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\beta = \zeta_m / r_1, \quad J_1(\zeta_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

приводит к отделению переменной  $r$  в уравнениях нейтрального равновесия и позволяет удовлетворить линеаризованным граничным условиям (14) на краю плиты.

С учетом соотношений (3)–(5), (7), (11), (12), (15), (16), уравнения нейтрального равновесия (10) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mu + \varkappa) V''_R + (\mu' + \varkappa') V'_R - (\lambda + \chi) \beta^2 V_R - (\lambda + \mu) \beta V'_Z - \\ - \beta \mu' V_Z + \theta \Omega'_\Phi + \theta' \Omega_\Phi = 0, \\ (\lambda + \chi) V''_Z + (\lambda' + \chi') V'_Z - (\mu + \varkappa) \beta^2 V_Z + (\lambda + \mu) \beta V'_R + \\ + \beta \lambda' V_R - \theta \beta \Omega_\Phi = 0, \\ \gamma_2 \Omega''_\Phi + \gamma'_2 \Omega'_\Phi + [(\alpha + f') \theta - \gamma_2 \beta^2] \Omega_\Phi - \theta V'_R - \beta \theta V_Z = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для сокращения записи здесь использовано следующее обозначение:

$$\theta = \lambda s + \mu(\alpha + f') - \chi.$$

Линеаризованные граничные условия (13) на лицевых поверхностях плиты примут вид:

$$(\mu + \varkappa) V'_R - \mu \beta V_Z + \theta \Omega_\Phi = 0, \quad \beta \lambda V_R + (\lambda + \chi) V'_Z = 0, \quad \Omega'_\Phi = 0. \quad (18)$$

Таким образом, исследование устойчивости неоднородной круглой плиты в случае осесимметричных возмущений сводится к решению линейной однородной краевой задачи (17), (18) для системы 3 обыкновенных дифференциальных уравнений.

**4. Симметричная плита.** Легко показать, что если функции, описывающие изменение упругих параметров плиты по толщине, являются четными, т. е.  $\lambda(z) = \lambda(-z)$ ,  $\mu(z) = \mu(-z)$ ,  $\varkappa(z) = \varkappa(-z)$ ,  $\gamma_1(z) = \gamma_1(-z)$ ,  $\gamma_2(z) = \gamma_2(-z)$ ,  $\gamma_3(z) = \gamma_3(-z)$ , то краевая задача (17), (18) имеет два независимых класса решений. **Первый класс** образован решениями, для которых прогиб плиты является нечетной функцией толщиной координаты  $z$  (симметричные формы потери устойчивости):

$$V_R(z) = V_R(-z), \quad V_Z(z) = -V_Z(-z), \quad \Omega_\Phi(z) = -\Omega_\Phi(-z).$$

Для решений **второго класса**, наоборот, прогиб — четная функция  $z$  (изгибные формы потери устойчивости):

$$V_R(z) = -V_R(-z), \quad V_Z(z) = V_Z(-z), \quad \Omega_\Phi(z) = \Omega_\Phi(-z).$$

Благодаря этому свойству краевой задачи (17), (18), при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть лишь верхнюю половину неоднородной плиты ( $0 \leq z \leq H/2$ ). Граничные условия при  $z = 0$  следуют из четности и нечетности функций  $V_R, V_Z, \Omega_\Phi$ :

а) для **первого класса** решений:

$$V'_R(0) = V_Z(0) = \Omega_\Phi(0) = 0, \quad (19)$$

б) для **второго класса** решений:

$$V_R(0) = V'_Z(0) = \Omega'_\Phi(0) = 0. \quad (20)$$

Таким образом, в случае симметричной неоднородной плиты, исследование устойчивости сводится к решению двух линейных однородных краевых задач — (17), (18), (19) и (17), (18), (20) — для системы 3 обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 11-08-01152-а и 12-01-00038-а).

**Sheydakov D. N., Sheydakov N. E.** *Buckling of circular plates made of functionally graded materials.* In the framework of a general stability theory for three-dimensional bodies the buckling analysis has been carried out for a circular plate subject to radial compression. To describe the behavior of a plate, the Cosserat continuum model has been used. Also, it was assumed that the elastic properties of the plate vary through thickness. The linearized equilibrium equations have been derived for an inhomogeneous circular plate. By solving these equations numerically, for some specific materials the critical spectra of relative radial compression have been found. The size effect and influence of elastic properties on the buckling has been analyzed for circular plates made of functionally graded materials.

# КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

Юдин А. С., Юдин С. А.

*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И.  
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Анализируется влияние изменений коэффициента Пуассона от положительных значений к отрицательным на амплитудно-частотные характеристики уровней вибрации конструктивно-анизотропной цилиндрической оболочки.

Существует направление создания новых материалов композиционного типа, обладающих отрицательным коэффициентом Пуассона (ОКП), [1, 2]. Так, в [1] указывается на необычное конструкционное поведение таких материалов. Обсуждаются некоторые концепции получения композитов сложной структуры, которые при макродеформации проявляют себя как материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. В частности, подобным образом деформируются композиты, армированные жесткими волокнами овального сечения в одном направлении и криволинейными нитевидными волокнами в ортогональном направлении.

Актуален анализ прикладных областей, в которых использование материалов с ОКП может иметь преимущество по сравнению с традиционными материалами. В данной работе рассматриваются вынужденные гармонические колебания диссипативных оболочек с точки зрения виброгашения. На примере конструктивно-анизотропной цилиндрической оболочки анализируется влияние изменений коэффициента Пуассона от положительных значений к отрицательным на амплитудно-частотные характеристики уровней вибрации.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную ребрами продольного и окружного направлений с основной поверхностью радиуса  $R$ . Примем:  $\alpha_1 = x$  — продольная координата,  $\alpha_2 = \varphi$  — окружная координата,  $A_1 = A_2 = R$  — коэффициенты Лямэ. Снимем окружную координату  $\varphi$  с помощью рядов Фурье. Разложение в ряды выполним следующим образом: компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС)  $u, v, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}$  представим по  $\cos(n\varphi)$ , а компоненты  $v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}$  по  $\sin(n\varphi)$ . Это соответствует нагрузке, симметрично расположенной относительно начала отсчета окружной координаты.

По методу комплексных амплитуд соответствующие  $n$ -й окружной гармонике уравнения колебаний оболочки на частоте  $\Omega$  приводятся к виду:

$$T'_{11n} + nS_n + \rho_1\Omega^2 u_n + q_{1n} = 0, \quad S'_n + Q_{22n} - nT_{22n} + \rho_1\Omega^2 v_n + q_{2n} = 0, \quad (1)$$

$$Q'_{11n} + nQ_{22n} - T_{22n} + \rho_1\Omega^2 w_n + q_{3n} = 0,$$

$$M'_{11n} + nH_n - Q_{11n}/\varepsilon_1 = 0, \quad H'_n - nM_{22n} - Q_{22n}/\varepsilon_1 = 0. \quad (2)$$

Эти уравнения дополняются кинематическими и физическими соотношениями с переходом к безразмерной форме [3].

Наиболее просто аналитическое решение строится для свободного опирания торцов (условий Навье):  $v = 0, M_{11} = 0, T_{11} = 0, w = 0$ . Этим условиям и однородным ( $q_{in} = 0$ ) уравнениям (1), (2) удовлетворяют следующие формы собственных колебаний:

$$u_n(x) = u_{nk} \cos(mx), \quad v_n(x) = v_{nk} \sin(mx), \quad w_n(x) = w_{nk} \sin(mx), \quad (3)$$

где  $m = k\pi/L$ ,  $k$  — число продольных полуволн.

Задачи на вынужденные колебания можно решать разложением амплитуд перемещений по собственным формам колебаний (4), т.е. в рядах Фурье и по продольной координате. При этом обеспечивается разделение уравнений для определения коэффициентов по номерам гармоник.

По окружной координате выполняются косинусные и синусные разложение в ряды на интервале  $(0, 2\pi)$  ввиду симметрии нагрузки в диаметральной плоскости (ДП). В продольном направлении решения на интервале  $(0, L)$  также представляются рядами по синусам и косинусам. Однако здесь не накладываются ограничения на координаты нагрузки по длине оболочки. Здесь выполняется разложение четных и нечетных функций на интервале  $(-L, L)$ , которые формально рассматривается как продолжение решения на интервал  $(-L, 0)$  четным или нечетным образом. Нас интересует только часть на интервале  $(0, L)$  оболочки. Поэтому число  $n$  — это число волн в окружном направлении, а  $k$  — число полуволн на образующей оболочки.

Рассмотрим нагрузку, действующую по нормали к оболочке, и эквивалентную сосредоточенной силе  $Q_3$ . Пусть  $l$  — длина площадки по продольной координате,  $\delta_1$  — длина отрезка ее средней линии (как у трапеции);  $\delta_2$  — угол охвата по окружной координате;  $x_1, \varphi_1$  — продольная и угловая координаты центра площадки,  $S = l\delta_1$  — площадь зоны приложения нагрузки.

Перейдем к безразмерным величинам по формулам:

$$\begin{aligned} \{l, \delta_1\}_G &= \{l, \delta_1\}_p / R_x, \quad \{Q_3\}_G = \{Q_3\}_p (1 - \nu_x^2) / (E_x h_x^2), \\ \{q_i\}_G &= \{q_i\}_p (1 - \nu_x^2) R_x^2 / (E_x h_x^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда (далее в безразмерной форме) сосредоточенная сила «размазывается» по площадке в распределенную по поверхности нормальную нагрузку интенсивности  $q_{3П} = Q_3 / (l\delta_1)$  в пределах площадки. В области определения криволинейных координат  $\{x \in (0, L); \varphi \in (0, 2\pi)\}$ , соответствующей рассматриваемой оболочке, распределенную нагрузку можно задать с помощью ступенчатой функции Хевисайда  $H(z)$ , которая равна 0 при  $z < 0$  и 1 при  $z \geq 0$ . Тогда в области определения  $q_{3П}(x, \varphi) = q_{3П} \Phi_1(x) \Phi_2(\varphi)$ , где:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= [H(x - (x_1 - l/2)) - H(x - (x_1 + l/2))], \\ \Phi_2(\varphi) &= [H(\varphi - (\varphi_1 - \delta)) - H(\varphi - (\varphi_1 + \delta))]. \end{aligned} \quad (5)$$

Разложение четной функции  $\Phi_2(\varphi)$  имеет вид:

$$\Phi_2(\varphi) = \delta/\pi + \sum_{k=1}^N [2/(k\pi)] \cos(k\varphi) \sin(k\delta) \cos(k\varphi_1) \cos(k\varphi). \quad (6)$$



Продолжим  $\Phi_1(x)$  на интервал  $(-L, 0)$  нечетным образом. Соответствующее разложения в интервале  $(-L, L)$  имеет вид:

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^N [4/(k\pi)] \sin(ml/2) \sin(mx_1) \sin(mx). \quad (7)$$

Таким образом, нормальная нагрузка  $q_3(x, \varphi)$  аппроксимируется двойным рядом по  $\sin(mx) \cos(k\varphi)$  с коэффициентами  $q_{3nk}$ , вид которых ясен из (7), (8). Решение для перемещений как функций координат и частоты имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, \Omega) &= \sum_{k=1}^N u_{01}(\Omega) \cos(mx) + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N u_{nk}(\Omega) \cos(mx) \cos(n\varphi), \\ v(x, \varphi, \Omega) &= \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N v_{nk}(\Omega) \sin(mx) \sin(n\varphi), \\ w(x, \varphi, \Omega) &= \sum_{k=1}^M w_{01}(\Omega) \sin(mx) + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N w_{nk}(\Omega) \sin(mx) \cos(n\varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты в (9) являются решениями линейной алгебраической системы третьего порядка

$$B(\Omega) \cdot u(\Omega) = q, \quad (9)$$

где:

$$u(\Omega) = \begin{bmatrix} u_{nk}(\Omega) \\ v_{nk}(\Omega) \\ w_{nk}(\Omega) \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{3nk} \end{bmatrix}, \quad B(\Omega) = A + \rho_1 \Omega^2 E. \quad (10)$$

$E$  — единичная матрица,  $A$  — квадратная матрица, элементы которой вычисляются через коэффициенты жесткостей оболочки и волновые параметры [3]. Решение системы (10) легко записывается в аналитической форме. Представление (9) функциями координат и параметра частоты вынуждающей нагрузки позволяет эффективно строить АЧХ динамических податливостей в заданных точках, фиксируя их координаты. В качестве исходной рассматривалась оболочка, жёсткости конструктивной анизотропии которой аналогичны рассмотренной в [3]. Коэффициент потерь  $\eta = 0.03$ , безразмерная длина  $L = \pi$ . Вынуждающая гармоническая сила приложена посередине длины. Коэффициент Пуассона варьировался от 0.3 для исходной оболочки до 0.3. При  $\nu = 0.2$  снижение модуля амплитуды входной податливости (перемещение под силой) составляет 8%. Для  $\nu = 0.1$  снижение составляет 16%, для  $\nu = 0$  — 19%. Т. е. для материалов с положительным коэффициентом  $\nu$  уровни вибрации ниже для меньших его значений. В зоне  $\nu < 0$  эффект выше и составляет 23–24%, что свидетельствует о достаточно заметном преимуществе материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона для целей виброзащиты. На рисунке 1 показаны АЧХ амплитуд входной податливости для исходной оболочки ( $\nu = 0.3$ ) и оболочки с  $\nu = -0.3$ . Здесь с увеличением частоты формы колебаний на резонансных пиках имеют значения окружных гармоник в последовательности 3, 4, 2, 5 при одной продольной полуволне. Таким образом, наблюдается существенное влияние коэффициента Пуассона, как на сдвиг резонансных частот, так и на амплитуды колебаний.

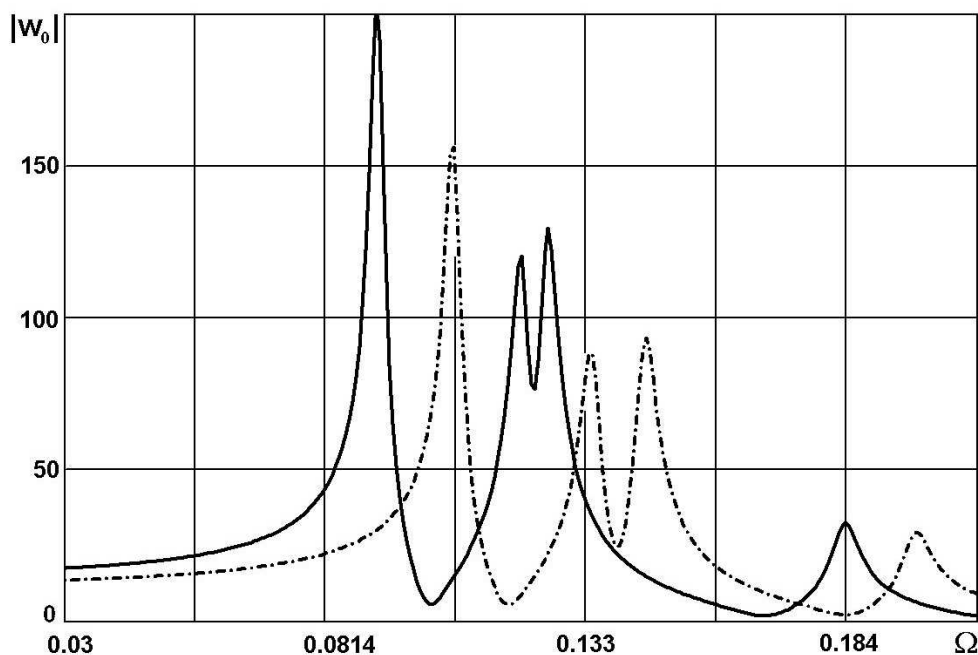


Рис. 1.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ken Evans.* Tailoring the negative Poisson ratio // *Chem. and Ind. (London)*. 1990. № 20. Pp. 654–657.
- [2] *Phan-Thien N., Karihaloo B. L.* Materials with negative Poisson's ratio. A qualitative microstructural model // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1994. V. 61, № 4. Pp. 1001–1004.
- [3] *Юдин А. С.* Устойчивость и колебания конструктивно-анизотропных и артифицированных оболочек вращения: монография. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011. 362 с.

**Yudin A. S., Yudin S. A.** *Vibrations of the shells with a negative Poisson ratio.* Influence of Poisson ratio changes from positive values to negative on amplitude-frequency characteristics of vibration levels of an constructive-anisotropic cylindrical shells analyzed.