СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ XVI МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

16 – 19 октября 2012 года

Ростов-на-Дону
2012

ББК В2.Я 431

Редакторы: Ватульян А. О., Дударев В. В., Сухов Д. Ю.

Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XVI международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 16 – 19 октября 2012 г., Ростов-на-Дону, Издательство Южного федерального университета, 2012 г., 112 с.

Сборник содержит тезисы докладов XVI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 16 – 19 октября 2012 г.).

Представлены основные результаты исследований по моделированию деформирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, по устойчивости движений вязкой жидкости, аэрогидродинамике, описаны новые вычислительные технологии применительно к различным задачам механики, в частности, в механике контактных взаимодействий, теории оболочек,в гидромеханике, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами и их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

XVI международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 16 – 19 октября 2012 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 12-01-06096-г

Организаторы:

Южный федеральный университет

НИИ МиПМ ЮФУ им. И. И. Воровича

Руководство конференции:

Белоконь А. В., президент Южного федерального университета — председатель Программного комитета

Бабешко В. А., академик РАН, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском госуниверситете

Морозов Н. Ф., академик РАН, зав. кафедрой теории упругости СПбГУ

Программный комитет конференции:

Александров В. М., профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Аннин Б. Д., академик РАН, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Баженов В. Г., профессор, Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского

Ватульян А. О., зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета — зам. председателя Программного комитета

Гольдштейн Р. В., чл.-корр. РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Горячева И. Г., академик РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Губайдуллин Д. А., чл.-корр. РАН, директор Института механики и машиностроения КазНЦ РАН

Зубов Л. М., профессор, Южный федеральный университет

Ивлев Д. Д., профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Ильгамов М. А., чл.-корр. РАН, Уфимский научный центр РАН

Индейцев Д. А., чл.-корр. РАН, директор Института проблем машиноведения РАН

Колесников В. И., академик РАН, ректор Ростовского государственного университета путей сообщения

Коссович Л. Ю., профессор, ректор Саратовского госуниверситета им. Н. Г. Чернышевского

Кукуджанов В. Н., профессор, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Куликовский А. Г., академик РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Организационный комитет конференции:

Обратные коэффициентные задачи для поперечно-неоднородного упругого слоя

Абрамович М. В.*, Углич П. С.**

**Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

***Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А*

puglich@inbox.ru

Рассмотрены прямая и обратная задачи о вынужденных антиплоских колебаниях поперечно-неоднородного упругого слоя. Модуль сдвига слоя и его плотность считаются функцией поперечной координаты. Колебания слоя вызываются касательной нагрузкой, приложенной к верхней поверхности слоя, нижняя поверхность слоя жёстко защемлена.

Решение задачи в общем случае неоднородных параметров не может быть построено в аналитическом виде. Для упрощения задачи используется интегральное преобразование Фурье. Задача отыскания трансформант неизвестных функций перемещения и напряжений в слое сводится к решению краевой задачи для канонической системы дифференциальных уравнений. Краевая задача в случае неоднородного слоя может быть решена лишь численно. В настоящей работе использован метод пристрелки.

Для обращения преобразования Фурье использованы два способа. Первый основан на численном отыскании интегралов Фурье при учёте условий излучения. Второй использует теорию вычетов и включает в себя приближенное отыскание полюсов подынтегральной функции и вычетов в них. Приведён ряд численных расчётов для различных частот и законов изменения механических параметров. Полученные результаты сравниваются с известными аналитическими результатами для однородного слоя. Удалось показать хорошую эффективность предложенных методов решения прямой задачи для любой (не обязательно непрерывной) зависимости механических параметров от поперечной координаты. Приведены дисперсионные кривые для различных законов распределения механических параметров.

Рассмотрена обратная коэффициентная задача об отыскании неизвестных законов изменения плотности и модуля сдвига. С помощью метода возмущений построены итерационные процессы, основанные на последовательном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладким ядром, для отыскания одного из неизвестных механических параметров (плотности либо модуля сдвига). Для решения интегральных уравнений Фредгольма с гладким ядром использован метод регуляризации Тихонова. Приведены численные результаты решения обратных задач при различных частотах колебаний для разных законов распределения плотности и модуля сдвига. Удалось показать, что наиболее успешное восстановление механических характеристик происходит на тех частотах, при которых в слое возникает одна бегущая волна.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Сопоставление трехмерной механической модели с законом состояния Мурнагана

Азаров А. Д.[*]**, Азаров Д. А.**[**]
[*]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*
[**]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
polyani49@mail.ru

Рассматривается описание деформаций нелинейно-упругих тел с помощью механической модели. Проведено сравнение свойств модели с соответствующими свойствами материала Мурнагана на примере полистирола. Развивается подход, основанный на описании зависимостей «напряжения-деформации» с помощью пространственной механической модели. При этом элементарный объем — прямоугольный куб упругой сплошной среды, заменяется трехмерной механической конструкцией. Ее узлы привязаны к центрам граней куба. Конструкция представляет собой систему упруго деформируемых пружин (стержней), отражающих свойства взаимодействий между всеми гранями элементарного объема при деформировании. Свойства связей (их жесткости) являются переменными и функционально зависят от удлинений связей.

Сравнение трехмерной механической модели с определяющими соотношениями Мурнагана проводится для случая одноосного растяжения. При заданном удлинении вдоль оси растяжения для материала Мурнагана вычисляются компоненты тензора конечной деформации Коши–Грина, изменение объема, поперечная деформация и продольная растягивающая сила в соответствии с законом состояния.

Для сравнительного анализа выбраны параметры материала Мурнагана для полистирола в области относительных деформаций порядка четырех процентов. Материал Мурнагана имеет шесть констант, две из которых имеют аналоги в линейной теории упругости. Жесткости пружин трехмерной механической модели представлены линейными функциями удлинений соответствующих связей. При этом модель описывается уравнениями с пятью параметрами.

Параметры трехмерной модели выбирались так, чтобы воспроизвести свойства нелинейного материала, наиболее близко соответствующего материалу Мурнагана, представляющему свойства полистирола. Как для материала Мурнагана, так и для трехмерной модели при одноосном растяжении построены графики растягивающей силы, поперечной деформации («коэффициента Пуассона») и изменения объема в зависимости от продольной деформации.

Из результатов видно, что трехмерная модель достаточно адекватно отражает механические свойства материалов аналогично закону состояния Мурнагана. При этом параметры трехмерной модели имеют понятную физическую интерпретацию. Сходство представленных графиков для модели и материала Мурнагана дает основание предполагать хорошие аппроксимационные возможности трехмерной механической модели для описания деформационных свойств реальных материалов.

Анализ равновесия и устойчивости упругих тел

Айрапетян Г. С., Саркисян С. О.
Армения, Гюмри, Гюмрийский государственный педагогический институт
gayane_hayrapetyan@mail.ru

Одна из важных проблем в теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной. Для достижения этой цели уместно использование качественных результатов асимптотического метода интегрирования трехмерной граничной задачи микрополярной теории упругости.

Используя эти результаты, можно сформулировать достаточно общие гипотезы. Принимаемые гипотезы по содержанию можно рассматривать как кинематические и статические. Кинематическая гипотеза характеризует изменение компонент вектора перемещения и вектора независимого поворота по толщине пластинки. В соответствии с кинематической формулировкой вводятся предположения о линейном распределении касательных компонент вектора перемещения и нормального к срединной плоскости компоненты вектора свободного поворота, а нормальная компонента вектора перемещения (прогиб) и касательные компоненты вектора независимого поворота считаются постоянными по толщине пластинки. Кинематическая гипотеза, сформулированная только для перемещений, представляет собой известную гипотезу Тимошенко. С этой точки зрения принимаемые гипотезы будем называть обобщенными на микрополярный случай гипотезами Тимошенко.

К статическим относятся гипотезы, определяющие изменение по толщине пластинки касательных и нормальных компонент силовых и моментных напряжений, действующих в плоскостях параллельных к срединной плоскости. На основе представленных гипотез из трехмерной теории определяются компоненты тензоров деформаций и изгиба-кручения, компоненты тензоров силовых и моментных напряжений. Все указанные величины явным образом зависят от нормальной к срединной плоскости координаты.

Далее вводятся усредненные по толщине пластинки силовые и моментные характеристики (усилия, моменты от силовых и моментных напряжений, гипермоменты).

На основе всех перечисленных данных построена основная система уравнений общей теории статической деформации (изгибной и обобщенного плоского напряженного состояния) микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. К основной системе уравнений микрополярных ортотропных пластин присоединяются соответствующие граничные условия.

Экспериментальные исследования характеристик пьезоэлектрических генераторов

Акопьян В. А.[*], Захаров Ю. Н.[**], Паринов И. А.[*], Рожков Е. В.[*], Чебаненко В. А.[*]

[*]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*

[**]*Ростов-на-Дону, НИИ физики ЮФУ*

akop@math.rsu.ru

Работа посвящена исследованию зависимостей выходных характеристик (выходного потенциала и мощности) пьезоэлектрического генератора (ПГ) кантилеверного типа, в результате которого получены оптимальные значения величины присоединенной массы на свободном конце кантилеверной тонкой балочки, обеспечивающие максимальную выходную мощность ПГ при различных значениях нагрузочного сопротивления. В известных работах Sadano H., Inman D. J., Ertruk A. et all. была описана аналитическая модель кантилеверной балки с наклеенными на обеих её поверхностях биморфных пьезоэлементов и присоединенной на её свободном конце массы при кинематическом (базовом) возбуждении вынужденных колебаний, в которой использовано модифицированное решение однородной балки Эйлера-Бернулли, в силу малости отношения «длина – толщина балки» влияние сдвиговой деформации не учитывалось. Кроме того, для учета неоднородности пьезокантилеверной балки в модели было использовано представление поперечных смещений, предложенное Тимошенко. Расчет выходных характеристик ПГ с помощью этой модели был проведен с учетом присоединенной массы. Однако, аналитическая зависимость её влияния на выходные характеристики ПГ в явном виде не была получена. Ранее была разработана конечно-элементная модель кантилеверной балки и проведен модальный анализ электрофизических характеристик пьезокантилеверной балки без присоединенной массы. Для решения задачи влияния присоединенной массы на характеристики ПГ были созданы экспериментальные образцы моделей ПГ кантилеверного и осевого типов. Исследования их выходных характеристик позволили получить опытные зависимости выходного напряжения и мощности ПГ от электрического сопротивления нагрузки и присоединенной массы. Установлено, что наибольшая энергетическая эффективность ПГ достигается на резонансной частоте первой моды собственных колебаний одного типа кантилеверной балочки исследуемой геометрии. Экспериментальные результаты сопоставлены с известными расчетными данными, полученными ранее при исследовании упомянутой выше аналитической модели кантилеверной балки с сосредоточенными параметрами. Показано, что расхождение расчетных и экспериментальных данных составило не более 5% амплитуды выходного напряжения при значениях отношения «присоединенная масса / масса кантилеверной балки», равном 1.5.

Взаимодействие спиральных волн с различными волновыми числами в задаче Куэтта-Тейлора

Алексеев А. А., Моршнева И. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
alxv@bk.ru

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в пространстве между двумя бесконечными соосными вращающимися цилиндрами в случае, когда спектр устойчивости основного режима содержит две пары чисто мнимых собственных значений. Эта ситуация соответствует пересечению бифуркаций возникновения автоколебаний с различными волновыми числами. Нелинейное взаимодействие спиральных волн в окрестности точки пересечения бифуркаций описывается системой комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд, которая может быть построена с помощью метода осреднения либо теоремы о центральном многообразии и в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{mk+} &= \xi_{mk+}(\sigma + A|\xi_{mk+}|^2 + B|\xi_{mk-}|^2 + C|\xi_{nl+}|^2 + D|\xi_{nl-}|^2),\\
\dot{\xi}_{mk-} &= \xi_{mk-}(\sigma + B|\xi_{mk+}|^2 + A|\xi_{mk-}|^2 + D|\xi_{nl+}|^2 + C|\xi_{nl-}|^2),\\
\dot{\xi}_{nl+} &= \xi_{nl+}(\mu + P|\xi_{mk+}|^2 + S|\xi_{mk-}|^2 + U|\xi_{nl+}|^2 + V|\xi_{nl-}|^2),\\
\dot{\xi}_{nl-} &= \xi_{nl-}(\mu + S|\xi_{mk+}|^2 + P|\xi_{mk-}|^2 + V|\xi_{nl+}|^2 + U|\xi_{nl-}|^2).
\end{aligned}$$

Простейшие решения этой системы были выписаны в работах В. И. Юдовича и С. Н. Овчинниковой, И. В. Моршневой и С. Н. Овчинниковой. Им соответствуют стационарные, периодические и квазипериодические решения исходной системы Навье-Стокса:

- Инверсионно-связанные пары спиральных волн (SPIm и SPIn).
- Азимутальные волны (AWm = SPIm + JSPIm и AWn = SPIn + JSPIn).
- Инверсионно-связанные пары двойных спиральных волн
  ($\mathrm{DSPI}_{++(--)}$ = SPIm + SPIn (JSPIm + JSPIn) и $\mathrm{DSPI}_{+-(-+)}$).
- Суперпозиция азимутальных волн (DAW = AWm + AWn).

В работе изучаются возможные сценарии переходов между режимами течения, когда значения параметров задачи близки к тем, которые соответствуют точке пересечения бифуркаций. Приводятся результаты расчетов точек пересечения бифуркаций для азимутальных квантовых чисел $m/n = 2/4$, коэффициентов амплитудных уравнений и соответствующих режимов течения. Показано, что схема переходов между течениями может иметь достаточно сложную структуру. В частности, имеются области, в которых существует одновременно несколько устойчивых режимов. В экспериментах при соответствующих значениях параметров могут наблюдаться гистерезисные явления. Следует отметить, что у амплитудной системы при определенных значениях коэффициентов могут существовать и более сложные решения, в том числе хаотические. Примеры таких решений приведены в работах авторов настоящей работы. Этим решениям могут соответствовать более сложные режимы движения жидкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-31262).

Конечно-элементное моделирование и расчет преварительно напряженных железобетонных шпал

Бабадеев И. С.[*], Колесников И. В.[*], Ляпин А. А.[**], Чебаков М. И.[**]
[*]*Ростов-на-Дону, Ростовский гос. университет путей сообщения*
[**]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*
chebakov@math.sfedu.ru

Дальнейшее совершенствование конструкции верхнего строения железнодорожного пути — самой капиталоемкой его части — является одной из актуальных задач, существенно влияющих на общие экономические показатели работы железнодорожного транспорта. Шпалы являются одним из важнейших компонентов в системе передачи нагрузки от рельсов на балласт. В общих расходах на элементы верхнего строения пути доля шпал достаточно весома, она по разным оценкам составляет от 30 до 50%. Поэтому актуальной остается задача снижения стоимости производства железобетонных шпал. Стандартные железнодорожные бетонные шпалы имеют большой запас прочности, который является невостребованным. Поэтому решить задачу снижения стоимости железобетонных шпал можно в том числе и за счет уменьшения их массы. Одним из вариантов уменьшения массы шпалы, а соответственно и ее стоимости, является уменьшение толщины стандартной шпалы в ее подрельсовой области и удаление нижнего ряда предварительно напряженной арматуры.

Изложены результаты математического моделирования и сравнительного анализа напряженно-деформированного состояния стандартной железобетонной шпалы (ГОСТ 10629-88) и модернизированной шпалы с учетом их взаимодействия с балластом и нагруженными рельсами, также учитывается наличие предварительно напряженной арматуры. Рассматривается процесс статического нагружения шпал посредством приложения усилий к расположенным на них рельсам и анализируются поля напряжений и смещений в обоих конструкциях, в том числе и максимальные напряжения под шпалой в балласте, которые в последствии сравниваются.

Для решения поставленной задачи использован метод конечных элементов (МКЭ). Геометрия моделей была создана в инженерном пакете Solid Works на основании проектных документов стандартной и модернизированной шпал, далее полученная геометрическая модель была импортирована в пакет Ansys. Для моделирования трехмерных тел был выбран 8-ми узловой объемный элемент Solid185. Наличие предварительно напряженной арматуры внутри бетона шпалы было реализовано с использованием элемента Link8, который позволяет задавать площадь сечения арматуры и предварительную относительную деформацию.

Проведенный анализ показал, что напряженно-деформированные состояния рассмотренных шпал имеют допустимые отличия как в части максимальных напряжений, так и максимальных перемещений. Показано также, что в рассмотренных сечениях шпал различными являются области концентрации напряжений.

Исследование коэффициента отражения поверхностных акустических волн в зависимости от типа жидкостей и их смесей

Багдасарян А. С.[*], Багдасарян С. А.[**], Богдангов М. И.[*], Днепровский В. Г.[***], Карапетьян Г. Я.[***], Петин Г. П.[****]

[*]*Москва, Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН*

[**]*Москва, ООО «НПП Технологии радиочастотной идентификации и связи»*

[***]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*

[****]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

jorichkaka@rambler.ru

Исследована зависимость коэффициента отражения поверхностных акустических волн от встречно-штыревого преобразователя, нагруженного на импеданс, в зависимости от типа жидкостей и их смесей (вода, спирт, вода-спирт, вода-бензин). Импеданс выполнен в виде плоского конденсатора с зазором, в который помещается исследуемая жидкость. Для измерения коэффициента отражения в зависимости от типа жидкостей и их смесей был изготовлен измерительный стенд на основе датчика для поверхностных акустических волн. Для получения максимальной чувствительности последовательно с измерительным конденсатором подсоединяется дополнительно подстроечный конденсатор и подстроечная индуктивность. Для измерения глубины погружения на одной из внешних сторон конденсатора нанесены измерительные риски. Подбирая параметры подстроечной емкости и подстроечной индуктивности, можно получить резонанс, что и приводит к увеличению чувствительности.

При погружении измерительного конденсатора в воду сначала коэффициент отражения начинает убывать. При некоторой глубине погружения емкость измерительного конденсатора становится много больше емкости подстроечного конденсатора, и нагрузка носит индуктивный характер. При погружении измерительного конденсатора в другие жидкости коэффициент отражения изменялся иначе в зависимости от состава жидкости.

Показано, что коэффициент отражения ПАВ от отражательного ВШП сильно зависит как от глубины погружения измерительного конденсатора в жидкость, так и от состава жидкости. Зная характер зависимостей коэффициента отражения от состава жидкостей, можно создать пассивные беспроводные датчики состава жидкости. Особенно это хорошо применять для обнаружения полярных примесей (с большой диэлектрической проницаемостью) в неполярных жидкостях (с диэлектрической проницаемостью, близкой к единице). Для создания таких датчиков будут сняты калибровочные кривые, в которых приведена зависимость коэффициента отражения от состава жидкости при полном погружении измерительного конденсатора. По этим зависимостям можно будет легко определять состав жидкости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-08-00700-а.

Моделирование течения нелинейно-вязкопластической жидкости при больших числах Бингама

Баженов Е. Е.*, Чехонин К. А.**
**Хабаровск, Дальневосточный государственный гуманитарный университет*
***Хабаровск, Дальневосточный государственный университет путей сообщения*
bg88@mail.ru

Рассматривается медленное ($Re << 1$) течение нелинейно-вязкопластической среды, описываемой реологической моделью Шульмана в области сужения двух цилиндров 4 : 1. Течение происходит в изотермических условиях, при отсутствии массовых сил, с постоянным расходом Q.

В основу математической модели положен обобщенный вариационный принцип:

$$J_{0\xi}(u_i, p, e_{ij}, \lambda_{ij}) = \int\limits_{\Omega} \left\{ \psi_\xi(p, e_{ij}) + 2\eta\lambda_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{c\eta}{2} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right]^2 \right\} d\Omega - \int\limits_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma,$$

где

$\psi_\xi(p, e_{ij}) = 2\mu e_{ij} e_{ji} - p e_{ij} g_{ij}$, $(\sigma_{ij})_\xi = \frac{\partial \psi_\xi(p, e_{ij})}{\partial e_{ij}}$,

$\mu = \left[\tau_0^{\frac{1}{n}} + (\mu_p A_\xi)^{\frac{1}{m}} \right]^n A_\xi^{-1}$ — эффективная вязкость,

e_{ij} — тензор скоростей деформаций,

$A_\xi = \sqrt{2 e_{ij} e_{ji} + \xi^2}$,

ξ — параметр регуляризации, τ_0 — предел текучести среды,

μ_p — пластическая вязкость,

m, n — параметры нелинейности реологической модели,

ρ — плотность среды, u_i — компоненты вектора скорости,

p — гидродинамическое давление, t_i — вектор нагрузки на границе,

$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_i + \nabla_i u_j)$.

Модель замыкается с помощью следующих граничных условий: на входе в область Ω течения задан профиль установившегося течения жидкости Шульмана с известными значениями реологических параметров и постоянным расходом, на твердых стенках — условия непротекания и прилипания, на выходе из расчетной области Ω заданы слабые условия установления течения, а на оси симметрии — условия симметрии.

Численное решение задачи произведено методом конечных элементов с использованием div-устойчивого четырехугольного изопараметрического элемента второго порядка. Проведены численные исследования распада квазитвердого ядра течения. Установлено, что рост пластических свойств жидкости приводит к значительному уменьшению области перестройки течения, а при числе Бингама 528 она практически исчезает. Кроме этого, предложенный алгоритм оказался устойчивым в широком диапазоне реологических параметров.

Затухание в конце систолы коротких спиральных волн в аорте

Батищев В. А., Петровская Д. С.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
batish@math.rsu.ru

Интерес к закрученным потоком крови появился в конце прошлого века в связи с появлением сообщений об обнаружении таких течений в артериальной системе. На основе анализа экспериментальных данных показано, что одной из причин возникновения спиральных течений крови может быть закрученная структура стенок левого желудочка сердца, что порождает вихревые течения крови на входе в аорту и перенос вихрей потоком жидкости. В последнее время опубликован ряд работ по аналитическому и численному исследованию закрученных потоков крови. Следует отметить работы профессора Устинова Ю. А., который показал, что анизотропия упругих стенок кровеносных сосудов приводит к возникновению длинных спиральных волн. Спиральные течения крови изучались сотрудниками Научного центра сердечно-сосудистой хирургии им. А. Н. Бакулева РАМН.

В настоящее время проводятся работы по накоплению данных относительно закрученных потоков крови. В ряде публикаций приведены результаты анализа экспериментов, из которых следует, что закрученный поток крови возникает в аорте сразу за сердечными клапанами. Однако, интерпретация некоторых результатов экспериментов остается достаточно противоречивой. Возникающие противоречия можно разрешить путем построения математической модели распространения закрученных потоков крови в сосудах.

Работа посвящена исследованию коротких спиральных волн, распространяющихся в аорте на фоне стационарного потока и длинных продольных пульсовых волн. Аорта моделируется цилиндром кругового сечения, который ограничен тонкой упругой оболочкой. Построена математическая модель распространения коротких спиральных волн. За основу расчетов приняты уравнения Навье-Стокса и динамические уравнения тонкой упругой изотропной оболочки в безмоментном приближении. Задача решается численными и асимптотическими методами, среди которых используются метод многих масштабов, методы пограничного и критического слоев.

Показано, что механизмом переноса коротких спиральных волн является стационарный поток, причем фазовая скорость волн совпадает с максимальным значением скорости потока. Короткие спиральные волны заполняют все поперечное сечение аорты, в отличие от длинных спиральных волн, которые локализованы в пограничном слое вблизи стенки аорты. Упругие свойства стенок аорты слабо влияют на динамику коротких волн и учитываются только в высших членах асимптотики. Часть мод коротких спиральных волн локализована в критическом слое вблизи оси цилиндра, моделирующего аорту. Показано, что короткие спиральные волны затухают в конце систолы. Динамика закрученных течений крови в аорте различна в систолу и в диастолу. Во время систолы спиральные течения жидкости состоят из длинных и коротких спиральных волн и квазистационарных мод. В диастолу закрученный поток определяется только квазистационарными модами.

Модели измерения внутриглазного давления после операций по коррекции зрения

Бауэр С. М.[*], Карамшина Л. А.[*], Качанов А. Б.[**], Корников В. В.[*]
[*] *Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет*
[**] *Санкт-Петербург, МНТК «Микрохирургия глаза»*
s_bauer@mail.ru

В работах офтальмологов часто отмечается, что развитие рефракционной хирургии неизбежно приводит к необходимости создания новых физико-математических моделей роговицы.

В данной работе в программном пакете ANSYS моделируется измерение внутриглазного давления (ВГД) аппланационными тонометрами Гольдмана и Маклакова после операций по коррекции зрения. Роговица и склера представляются сопряженными трансверсально-изотропными оболочками с различными механическими свойствами. При этом роговица разбивается на несколько слоев, различных по толщине и упругим свойствам. Проводится сравнение показателей ВГД, получаемых после операций ЛАЗИК (LASIK) и ФРК (PRK). В обоих случаях используется один и тот же эксимерный лазер, но техники ФРК и ЛАЗИК существенно различаются. При фоторефракционной кератэктомии (ФРК) воздействию лазерного луча подвергается наружная поверхность роговицы. При операции ЛАЗИК передние слои роговицы после специального разреза приподнимаются, при этом обнажаются более глубокие слои, которые и моделируются эксимерным лазерным лучом. Таким образом, в результате операции ЛАЗИК образуется еще один дополнительный слой.

Расчеты показали, что после операций LASIK наблюдаются более низкие показатели ВГД, чем показатели ВГД, получаемые после операции ФРК, что можно объяснить возникновением дополнительного слоя при операциях ЛАЗИК. Увеличение числа слоев в роговице снижает изгибную жесткость роговицы, и как следствие, снижает показатели ВГД, получаемые тонометрами Гольдмана и Маклакова.

Проведен также статистический анализа показателей ВГД, полученных для пациентов, которым были выполнены рефракционные операции ФРК и ЛАЗИК по коррекции миопии. Операция ФРК была выполнена на 50 глазах (I-я группа). ВГД измеряли до и через 3 месяца после ФРК. Данные ВГД для II-й группы выбирались из пациентов, перенесших операцию ЛАЗИК, таким образом, чтобы центральные толщины роговицы глаза и показатели ВГД до операции пациентов I-ой и II-ой групп были близки друг к другу. Статистический анализ показывает, что после рефракционных операций происходит снижение показателей ВГД, получаемых тонометрами Гольдмана и Маклакова. При этом после операций LASIK происходит большее снижение показателей ВГД, чем после операции ФРК.

Отметим, что при моделировании роговицы одним эквивалентным слоем, разницы в показателях ВГД после операций ФРК и ЛАЗИК не наблюдается.

О режимах конвективных течений вязкой жидкости в вертикальном цилиндре и их устойчивости

Бекежанова В. Б.
Красноярск, Институт вычислительного моделирования СО РАН
bekezhanova@mail.ru

Изучена задача о конвективном течении вязкой теплопроводной жидкости при наличии объемных источников тепла в рамках модели Обербека-Буссинеска с нелинейной силой плавучести. Построено точное решение, описывающее стационарное течение в вертикальном цилиндре большого радиуса:

$$\mathbf{u} = (u, v, w), \quad u = u(z)r, \quad v = 0, \quad w = w(z),$$

$$\theta = \theta(z), \quad p = p(z) + \frac{a_1}{2} r^2,$$

где u — радиальная компонента скорости, v — азимутальная, w — осевая, p — давление, параметр a_1 подлежит определению.

Исходная задача разделяется на последовательно решаемые задачи для u, w, p, θ. Основной из них является краевая задача для функции $u(z)$, которая в безразмерных переменных имеет вид:

$$u_{zz} + 2u_z \int\limits_0^z u(z)dz - u^2 + a = 0, \quad 0 < z < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 u(z)dz = 0,$$

и может быть сведена к операторному уравнению вида $u = Au$ с сильно нелинейным оператором A, удовлетворяющим теореме Шаудера в пространстве $C[0, 1]$. Предложена итерационная процедура для определения параметра a и радиальной компоненты скорости, с помощью которой получены три различных класса решений в области физических параметров задачи.

В рамках линейной теории исследована устойчивость построенных решений и показано, что наиболее опасной является плоская волновая мода, и присутствуют два механизма неустойчивости. При положительных значениях независимого параметра меняется структура основного течения, происходит перестройка нейтральных кривых и различным механизмам соответствуют разные ветви одной нейтральной кривой.

Работа поддержана РФФИ, грант 11-01-00283 и СО РАН, интеграционный проект 38.

Использование ориентационной модели и модели запертой стенки для формулировки определяющих соотношений поликристаллических сегнетоэлектриков

Белоконь А. В., Радченко М. Ю., Скалиух А. С.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
skaliukh@math.rsu.ru

Являясь наиболее перспективными в настоящее время активными материалами, поликристаллические сегнетоэлектрики привлекают к себе внимание конструкторов и технологов с целью создания микроминиатюрных сенсоров и актуаторов для генерации и обнаружения широкого спектра сигналов. Многие из таких датчиков используют нелинейные свойства сегнетоэлектрических элементов, а их численный расчет связан с конечно-элементным моделированием. Одним из основных пунктов конечно-элементного исследования является формулировка определяющих соотношений, позволяющих учитывать все тонкости нелинейного поведения. К слову сказать, нелинейный отклик в таких материалах связан с необратимостью процессов деформирования и поляризации. Именно вопросам построения нелинейных определяющих соотношений поликристаллических сегнетоэлектриков посвящена данная работа.

В качестве основной модели была выбрана модель запертой стенки. В этой модели соотношение Ланжевена, полученное в пренебрежении влиянием соседних доменов друг на друга, дополняется энергетическими соотношениями. В результате получается дифференциальное уравнение (в трехмерном случае система уравнений), которое можно рассматривать как определяющее соотношение в приращениях. Однако эта модель имеет существенный недостаток. В ней не удается совместить одновременное воздействие электрических полей и механических напряжений. С этой целью нами была предложена вспомогательная модель ориентационных переключений, в которой в качестве критерия переключения доменов использован энергетический критерий. Остальные энергетические соотношения остаются неизменными. Все это позволило получить систему девяти скалярных уравнений в приращениях, которую и использовали в качестве определяющих соотношений в конечных разностях. Численное исследование системы в конечных разностях основано на методе последовательных приближений. В случае монотонно возрастающих полей получаются хорошие приближения после десяти итераций.

Проведена серия численных расчетов по определению электрического и механического отклика материала на внешние нагрузки. Результаты представлены в виде больших и малых петель диэлектрического и деформационного гистерезиса. Эти расчеты показали, что основная цель: построение комбинированной модели в трехмерном случае достигнута. Однако имеются существенные недостатки. Так, получающиеся гистерезисные петли не совпадают с экспериментальными данными. Особенно это касается малых петель гистерезиса. Тем не менее, полученные уравнения и проведенные вычисления показали применимость данного подхода при формулировке трехмерных определяющих соотношений для поликристаллических сегнетоэлектрических сред. Они также указали пути дальнейшей модернизации построенной модели.

Расчет поля напряжений в приконтурной зоне выработки, закрепленной анкерами

Бобылев Д. Е., Масько Л. В.
Кривой Рог, Криворожский национальный университет
bob_d@i.ua

Анкерная крепь в настоящее время является одним из наиболее эффективных способов поддержания горных выработок. Особенность анкерной крепи состоит в том, что она позволяет максимально эффективно использовать несущую способность вмещающих пород, что значительно снижает материалоемкость и стоимость крепи. Основные методики определения параметров крепи являются результатами экспериментальных исследований и аналитических расчетов с помощью плоских геомеханических моделей. Эти модели не совсем адекватны реальным физическим процессам в массиве.

Для преодоления этих недостатков необходимо разработать методику расчета параметров анкерной крепи на основе пространственной геомеханической модели. Имеющиеся исследования пространственного взаимодействия анкера и породного массива носят частный характер и не позволяют определить рациональные параметры крепи.

Для оценки влияния системы анкеров на начальное напряженное состояние, обусловленное проведением выработки, необходимо исследовать изменение поля напряжений в приконтурной области массива пород после установки анкерной крепи. Значения напряжений в точках породного массива вокруг штанги находятся посредством статического расчета системы крепь — порода, при помощи решений пространственных задач теории упругости. Воздействие замкового анкера на породный массив моделируется как действие двух сил, равных половине несущей способности анкера – на контуре выработки и в глубине породного массиве, в точке закрепления анкерного замка. Значения сил в первом приближении принимаются равными половине несущей способности анкера. Точки приложения сил соответствуют концам активной длины анкеров. Чтобы определить количество взаимовлияющих анкеров, первоначально необходимо оценить область влияния одного анкера на напряженное состояние в массиве пород. Найденные значения поля напряжений по всей глубине анкерования позволяют оценить степень изменения напряжений в зависимости от расстояния до анкера. Компоненты тензора напряжения, обусловленные силами, приложенными к контуру выработки, определяются при помощи решения задачи Буссинеска для упругого полупространства. Напряжения, вызываемые силами, приложенными в глубине массива, рассчитываются при помощи решения Миндлина для упругого полупространства.

Расчеты показали, что область влияния анкера на напряженное состояние, даже с учетом его максимального натяжения, не превышает 1 м. За пределами этой области напряжения, вызываемые анкером, пренебрежительно малы.

Идентификация свойств кожи на основе слоистой модели

Богачев И. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
bogachev89@yandex.ru

В настоящее время анализ состояния кожного покрова пациента является одним из важнейших методов современной диагностики состояния здоровья пациента. Заболевания внутренних органов во многих случаях могут выражаться в изменении свойств кожного покрова, например, отек кожи и его состояние в ряде случаев может указывать на заболевания почек и на степень их тяжести. Измеренные вязкоупругие характеристики кожи в таких случаях могут дать объективную оценку состояния здоровья пациента, которая часто вызывает затруднения у врачей при осмотре.

Анизотропия и гетерогенность механических свойств кожи определяются многослойной (эпидермис, дерма и подкожный жир) структурой кожи и влекут за собой различное поглощение механической энергии в каждом из слоев, что проявляется в особенностях распространения механических волн на границе раздела этих слоев, обладающих разными вязкоупругими свойствами. В связи с этим общепринятые теоретические модели механики деформируемого твердого тела не могут адекватно описать экспериментальные исследования кожного покрова. Сегодня используется несколько методов изучения кожного покрова: исследование деформаций кожи при одноосном и двухосном растяжении, кручении, такие методы требуют жесткого крепления растягивающих или вращающих элементов приборов к коже человека, что может вызвать неудобства у пациентов, методы вдавливания и всасывания, для которых изготовлены приборы, широко использующиеся на практике, однако, работающие в определенных диапазонах характеристик, не всегда подходящих для кожи, различные акустические методы, основанные на использовании сдвиговых поверхностных волн, которые вследствие сложной структуры кожи позволяют получить лишь сравнительные результаты. Исследование современных методов анализа характеристик кожного покрова показывает, что для объективной их оценки использование только одного метода малоэффективно и для более полного изучения свойств кожи необходимо применять совокупность различных методов.

В работе рассмотрена задача идентификации свойств неоднородного по толщине вязкоупругого слоя, моделирующего кожный покров, на основе модели стандартного вязкоупругого тела. Предполагается, что слой, в свою очередь, имеет три различных по механическим свойствам составляющих, моделирующих подкожный жир, дерму и эпидермис. Задача сведена к более простой, для которой построена процедура идентификации на основе итерационного процесса. Приведены результаты численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00194-а, № 12-01-31501) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Вейвлет-анализ кардиосигнала

Богачева М. О.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
akimenko-85@mail.ru

Технологии цифровой обработки сигналов и их изображений находят все более широкое применений в различных областях, в частности в медицине при анализе электрокардиограмм, электроэнцефалограмм и других биологических сигналов. Однако выбор алгоритма для анализа биологического сигнала является непростой задачей. Это обусловлено разнообразием признаков и характеристик биологических сигналов по сравнению с физическими сигналами. В последние десятилетия для решения подобного рода задач активно применяется вейвлет-преобразование.

Вейвлеты — это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, локальных во времени и по частоте, в которых все функции получаются из одной базовой посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени. Теория вейвлетов является мощной альтернативой анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов. Одно из основных преимуществ вейвлет-анализа заключается в том, что он позволяет идентифицировать хорошо локализованные изменения сигнала, тогда как анализ Фурье отражает поведение сигнала за все время его существования.

В настоящее время вейвлет-преобразования активно используются во многих областях, включая молекулярную динамику, квантовую механику, астрофизику, геофизику, оптику, компьютерную графику и обработку изображений, анализ ДНК, исследования белков, исследования климата, общую обработку сигналов и распознавание речи.

В работе вейвлет-анализ применялся к исследованию кардиосигналов здорового человека и больного с аритмией. Для исследования использовались вейвлеты Добеши четвертого порядка. С помощью дискретного вейвлет-преобразования получены детализирующие коэффициенты сигналов до третьего уровня разложения. На основе детализирующих коэффициентов восстановлены соответствующие компоненты сигналов по различным частотам. Проведен статистический анализ детализирующих коэффициентов и соответствующих им компонент сигналов, показавший различие в 1.5 раза между кардиосигналом здорового человека и больного с аритмией. Так же построены и проанализированы энергетические спектры исследуемых кардиосигналов. Для первого и второго уровней разложения сигналов энергетические спектры различаются в 2 раза. Непрерывное вейвлет-преобразование позволило идентифицировать основные кардиографические комплексы: зубцы и интервалы ЭКГ записи. Построен и проанализирован трехмерный график матрицы коэффициентов вейвлет-преобразования.

Таким образом, проведенные в работе расчеты показали эффективность использования вейвлет-анализа для исследования кардиосигнала.

Применение генетического алгоритма к задаче оптимизации геометрии лопасти турбины ВЭУ

Бондарчук А. А., Мещеряков К. И.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
m.keyran@gmail.com

В работе дан метод нахождения оптимальной геометрии лопасти турбины ветроэнергетической установки. Каждое нормальное сечение лопасти по размаху является плоским аэродинамическим профилем одного и того же типа. Сечения могут отличаться между собой углом установки и длиной хорды. Угол атаки каждого нормального сечения определяется углом установки и углом, зависящим от скорости ветра. Задача решается с учетом следующих гипотез: 1) жидкость идеальная; 2) в каждом сечении задача плоская. Рассмотрены два различных способа задания генов и целевой функции генетического алгоритма, разработан генетический алгоритм, способный решить представленную задачу в рамках принятых физических гипотез и геометрических ограничений.

Генетические алгоритмы относятся к стохастическим методам оптимизации, и, по сравнению с регулярными методами, обладают высокой вероятностью нахождения глобального экстремума. Классический генетический алгоритм состоит в следующем: создается начальная популяция, из этой популяции отбирается некоторое количество лучших особей, которые дают потомство путем скрещивания. Далее некоторое количество полученных потомков мутирует. Если алгоритм не сошелся и количество поколений не превышает заданное, отбор и последующие шаги повторяется для новой популяции. Отобранные лучшие особи из последнего поколения и будут являться решением задачи.

В работе в качестве критерия отбора используется следующая стратегия: на этапе задания алгоритма выбирается значение p_b, которое задает долю допущенных к скрещиванию лучших особей на каждом шаге. Каждая из отобранных особей имеет одинаковый шанс участвовать в скрещивании.

Отметим, что в используемом алгоритме реализована стратегия элитизма. Согласно ей, некоторый процент лучших особей p_e переходит в следующее поколение без изменений. Остальная популяция набирается по алгоритму, который заключается в сочетании дискретной рекомбинации и расширенной промежуточной рекомбинации. При использовании этого алгоритма, количество поколений, необходимых для схождения рассматриваемой задачи, уменьшается в среднем на 28% по сравнению с простой промежуточной рекомбинацией.

В качестве особенности мутации следует отметить, что на этапе задания алгоритма выбирается два значения: вероятность, с которой потомок подвергнется мутации p_m и вероятность мутации отдельного гена p_g. Каждый ген мутирующей особи изменяется с вероятностью p_g в пределах допуска.

В качестве критерия сходимости сформулировано следующее правило: в случае, если за 10% от максимального числа поколений значение целевой функции для лучшей особи изменилось не более, чем на 1%, алгоритм считается сошедшимся.

Экспериментальное моделирование поверхностных волновых полей в средах с неоднородностями

Бочарова О. В.[*], Анджикович И. Е.[**]
[*]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
[**]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики ЮФУ*
olga_rostov1983@mail.ru

Проблема разработки методов неразрушающего контроля состояния и прочностного ресурса узлов и деталей инженерных конструкций является ключевой для повышения надежности их эксплуатации и предотвращения аварийных ситуаций. На стадии производства для контроля качества изготовления деталей широко используются методы акустического контроля. Однако использование этих методов накладывает определенные ограничения на структуру материалов (исключаются, например, сотовые материалы, волокнистые, зернистые), а также на форму изделий. В работе предложен метод оценки напряженного состояния и прочности структурно-неоднородных тел, основанный на контроле изменения их динамических спектральных и резонансных свойств. Важную роль в интегральной оценке динамических свойств системы играет система «датчик – контролируемый объект», за счет создания режима колебаний, обеспечивающего четкий контроль за изменением динамических свойств среды. Преимуществом такого подхода является его интегральный характер, что позволяет в значительной мере увеличить контролируемую одним датчиком площадь.

Проведено исследование по определению размера и расположения дефекта по поверхностному волновому полю. Это исследование проведено двумя способами: первый — экспериментальный, второй – вычислительный эксперимент, основанный на использовании метода конечного элемента.

В качестве образца выбран параллелепипед из экструдированного пенополистирола, в котором были сделаны сквозные поперечные цилиндрические полости различных размеров. В образце, расположенном на твердой поверхности возбуждались поверхностные колебания через легкий алюминиевый штамп, посредством генератора специальных сигналов. В частности, выбран одиночный период колебаний для нескольких длин волн. На поверхности образца колебания регистрировались миниатюрными акселерометрами PCB, расположенными над, перед и после неоднородности. Сигналы с акселерометров поступали на многоканальный АЦП Scadas фирмы LMS, программно обрабатывались и представлялись в виде спектров.

Проведен вычислительный эксперимент. Волновое поле на поверхности параллелепипеда ослабленного полостью рассчитывалось в конечноэлементном пакете Ansys 11 с использованием командного языка APDL. Далее с помощью пакета Origin 7 на основе полученных данных вычислялся спектральный отклик системы.

Приведены результаты натурного и вычислительного экспериментов, показывающие влияние размера и расположения дефекта на спектр отклика.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента Российской Федерации (грант МК-6213.2012.1).

Физико-механические свойства бетонов на материалах из горелых пород

Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Окороков Е. П., Павлова Л. Н.
Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.
burav@math.rsu.ru

Анализ опыта применения техногенных отходов в технологии бетона свидетельствует о том, что перспективным сырьем с точки зрения основных технологических процессов и свойств получаемых бетонов могут стать горелые шахтные породы. Такие породы образуются при окислительном самообжиге в отвалах пустых шахтных пород.

В исследованиях по использованию горелых пород в технологии бетона был выполнен большой объем лабораторных работ и испытаний в производственных условиях на действующих заводах железобетонных конструкций и изделий Ростовской области. Испытывались составы бетонов класса от B7,5 до B30 различной подвижности и с различным расходом цемента в зависимости от предъявляемых к бетонам требований по морозостойкости, водонепроницаемости, другим свойствам и условий эксплуатации. Неоднородность пород по составу и свойствам предопределяет трудности и особенности разработки, и использования данного техногенного сырья. Для получения заполнителей из шахтных пород их следует подвергать переработке, при этом происходит усреднение пород. В технологии бетона из горелых пород использовался фракционированный щебень и тонкодисперсная (молотая) горелая порода, как активная минеральная добавка. Заполнители из горелых пород имеют марку по прочности от 600 до 1200, по морозостойкости от F25 до F100.

Обобщение и анализ экспериментальных данных показывают, что использование материалов из горелых пород позволяет снизить расход цемента (без ухудшения свойств и качества изделий) в бетонах класса B7,5 и B10 до 30-35%, класса B15; B22,5; B30 до 10-15%. Бетоны на заполнителях из дробленых горелых пород имеют марку по морозостойкости F50; F75; F200; F300, по водонепроницаемости W2; W4; W8, прочность на сжатие от 10 до 40 МПа, при изгибе от 2,2 до 6,8 МПа. Положительный эффект использования материалов из горелых пород в бетонах связан, по-видимому, с наличием гидравлической и адсорбционной активности пород. При наличии таких пород в составе бетонной смеси гидратация вяжущего протекает более интенсивно, образуется дополнительное количества новообразований, участвующих в формировании структуры и свойств бетона. Пористые и шероховатые частицы щебня и отсева формируют адгезионную прочность в цементном камне и соответственно повышают долговечность бетона (морозостойкость, водонепроницаемость и т. д.). Повышенные показатели прочности бетонов на заполнителях из горелых пород на растяжение при изгибе и расколе, по-видимому, можно объяснить упрочнением структурного каркаса бетона за счет присутствия лещадных зерен, которые создают эффект дисперсного армирования. Этот эффект максимально проявляется при воздействии растягивающих усилий и минимально — при сжимающих.

Равновесие двухкомпонентного упругого слоя, содержащего дислокацию несоответствия

Бычков А. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
az710@yandex.ru

Известно, что на границе раздела напыленной полупроводниковой SiGe пленки на Si подложке возникает деформация несовместности за счет различия постоянных решетки и подложки. Релаксация напряжения в пленке при малой деформации несовместности происходит с помощью образования волнистой поверхности на первоначально плоской пленке в процессе ее отжига (неустойчивость Азаро-Тиллера-Гринфельда), а также путем зарождения дислокаций несоответствия (ДН) на границе раздела пленки и подложки. В первом случае неустойчивость первоначально плоской пленки связана с тем, что волнистая поверхность напряженной пленки имеет меньшую суммарную энергию вследствие упругой релаксации напряжений в вершинах выступов. С увеличением толщины пленки последовательно возникают первый, а затем второй механизмы релаксации. Механизмом образования плоской или волнистой поверхности пленки является поверхностная диффузия, которая обеспечивает перенос материала вдоль возмущенной поверхности, которая постепенно переходит в состояние равновесия. Причем установление плоской или волнистой равновесной поверхности зависит от типа возмущения, величины деформации несоответствия, толщины пленки и свойств ее материала. Третьим механизмом релаксации упругой энергии за счет уменьшения упругой энергии SiGe полупроводниковой пленки является неоднородное перераспределение атомов Ge и Si внутри пленки. Неоднородность связанна как со сложной формой свободной поверхности пленки, так и с дефектами структуры, в частности дислокациями несоответствия.

В работе исследованы условия равновесия двухкомпонентного упругого слоя содержащего дислокацию несоответствия. Рассматривается плоская пленка SiGe нанометровой толщины на Si подложке. Учитывается неравномерное распределение Ge в объеме пленки. Построена трехмерная модель плоской пленки с дислокацией. Расчет упругих деформаций выполнен с использованием метода конечных элементов. Для расчета распределения Ge в пленке использованы аппроксимирующие формулы и итерационный алгоритм. Полученные результаты сравниваются с известными аналитическими оценками.

Результаты выполненных расчетов показали:

1) равновесное положение дислокации несоответствия в двухкомпонентном упругом слое SiGe находится не на границе раздела пленка-подложка, а в глубине слоя;

2) из-за различия упругих модулей Ge и Si происходит дополнительная релаксация упругой энергии в пленке;

3) учет влияния перераспределения компонент пленки не приводит к существенному изменению упругой энергии образца и критического значения высоты дислокации.

Об идентификации неоднородных свойств ортотропной упругой полосы

Ватульян А. О.[*,**]**, Богачев И. В.**[*]**, Явруян О. В.**[*,**]

[*]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

[**]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А*

yavruyan@mail.ru

Математические модели слоистых сред с неоднородными свойствами используются в различных областях науки и техники, в биомеханике, горной механике, сейсморазведке, строительстве, наномеханике, в механике функционально-градиентных и новых композиционных материалов. При этом эффективные схемы реконструкции неоднородных свойств возможны лишь при использовании косвенной информации, например, по данным акустического зондирования. Это требует решения некоторых обратных задач и создания соответствующих вычислительных алгоритмов. В работе представлена схема решения обратной коэффициентной задачи для упругой ортотропной неоднородной по толщине полосы. Нижняя грань полосы жестко защемлена. Установившиеся колебания возбуждаются нагрузкой, действующей на верхней границе. Реконструкция функций, характеризующих неоднородные свойства полосы, осуществлена по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на верхней границе при частотном зондировании. Предлагаемая схема реконструкции позволяет с точностью порядка 3–10% восстановить до шести функций, характеризующих неоднородные упругие свойства полосы. Задача идентификации сведена к следующим ключевым этапам.

1. Сведение исходной двумерной задачи к более простым операторным уравнениям с помощью интегрального преобразования Фурье по продольной координате.

2. Разделение задач относительно восстанавливаемых функций путем анализа построенного спектрального пучка и составления краевых задач для моментов соответствующих полей.

3. Поэтапное решение полученных одномерных задач для обыкновенных дифференциальных операторов на основе итерационных схем с последующим сведением к интегральным уравнениям Фредгольма первого и второго родов относительно восстанавливаемых функций.

При численном решении интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода использован метод коллокаций основанный на применении квадратурных формул Симпсона, для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода — регуляризующие алгоритмы численного дифференцирования и метод регуляризации Тихонова А. Н. Разработана вычислительная схема для решения обратной коэффициентной задачи, проведена серия вычислительных экспериментов для различных законов неоднородности, представлены численные результаты реконструкции неоднородных свойств полосы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00194-а, № 12-01-31501), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Численная реконструкция термомеханических свойств неоднородного стержня

Ватульян А. О.[*,], Нестеров С. А.[**]**
[*]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А*
[**]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
1079@list.ru

Проблема идентификации термомеханических характеристик неоднородных тел является актуальной в связи с широким внедрением в технику неоднородных материалов, эффективность использования которых зависит от точного знания их свойств после изготовления. Термомеханические характеристики неоднородного тела являются функциями координат и не могут быть определены из простых макроэкспериментов, поэтому задача их определения относится к классу коэффициентных обратных задач.

Требуется восстановить модуль Юнга, плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности неоднородного стержня, которые являются функциями координаты. В работе рассмотрены две постановки обратной задачи для стержня. В первой постановке задача формулируется в пространстве трансформант по Лапласу и необходимо знать торцевую температуру в любой момент времени. Во второй постановке задача рассматривается в оригиналах и в качестве дополнительной информации выступает значение торцевой температуре на конечном временном интервале.

На основе обобщенного соотношения взаимности для неоднородных термоупругих тел получено интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Каждая из функций восстанавливалась, когда был известен закон изменения других функций. При этом полученное с помощью соотношения взаимности интегральное уравнение распадалось на ряд независимых уравнений по восстановлению только одного коэффициента.

Прямая задача исследуется методом возмущения путем разложения температуры и смещений по малому параметру связанности и сведение задачи к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве трансформант. Оригиналы температуры и смещений определяются путем численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода и обратного преобразования Лапласа на основе теории вычетов.

Реконструкция коэффициентов в обеих постановках проходит в два этапа. На первом этапе определяется нулевое приближение в классе линейных функций. На втором этапе определяются поправки. Задача нахождения поправок сводится к итерационной процедуре, на каждом этапе которой решается интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

Проведена оценка точности восстановления в зависимости от выбора временного интервала, а также степени зашумления.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 10-01-00194-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на торце

Вильде М. В.
Саратов, Саратовский государственный университет
mv_wilde@mail.ru

Поверхностными называют волны, распространяющиеся вдоль границы упругого тела либо вдоль границы раздела упругих сред и экспоненциально затухающие в направлении, перпендикулярном границе. Энергия этих волн локализована у поверхности распространения. В 1885 г. Дж. Рэлей доказал, что вдоль свободной границы упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации, может распространяться поверхностная волна. Особый интерес к изучению поверхностный волн стал проявляться четверть века назад, когда стало ясно, что поверхностные акустические волны могут стать физической основой для создания большого класса устройств аналоговой обработки информации. В частности, были обнаружены волны, распространяющиеся вдоль края тонкой пластины и затухающие при удалении от него (такие волны иногда называют кромочными).

Как правило, при изучении поверхностных и кромочных волн рассматриваются условия свободного края на поверхности распространения. Целью работы является изучение возможности существования кромочных волн в пластинах в случае смешанных граничных условий на торце. Рассматриваются колебания пластины, симметричные относительно срединной поверхности. На первом этапе решена задача о нахождении трехмерной поверхностной волны в полупространстве, на поверхности которого ставятся смешанные граничные условия, а именно — считается, что перемещение частиц в одном из касательных направлений запрещено. Получено дисперсионное уравнение, показывающее, что при данных условиях закрепления трехмерная поверхностная волна существует. Скорость этой волны зависит от угла между направлением её распространения и направлением запрещенного перемещения. Далее это решение использовано для построения формы кромочной волны в пластине в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях и на торце. В заключительной части работы рассмотрена фундаментальная кромочная волна в пластине со свободными лицевыми поверхностями и смешанными граничными условиями на торце. В этом случае задача не допускает построения аналитического решения в замкнутой форме. Для получения численного решения используется метод разложения по модам. Приведены графики зависимости скорости изучаемой волны от волнового числа. Показано, что они качественно отличаются от аналогичных графиков для случая свободного торца. В частности, с увеличением волнового числа скорость фундаментальной кромочной волны стремится не к скорости угловой волны в клине, а к некоторой другой предельной скорости, которая отличается также от скорости волны Рэлея. Приведен график зависимости предельной скорости от коэффициента Пуассона.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-01-00545а).

Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления

Воронкова Е. Б., Игнатьева К. А.
Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет
voronkova.eva@math.spbu.ru

При исследовании больших прогибов пологих оболочек и пластин, загруженных симметричной нагрузкой, приходится сталкиваться с образованием складок, вызванных потерей устойчивости осесимметричной формы равновесия. Методом Галеркина для больших прогибов пластины, загруженной постоянным давлением, Панов Д. Ю. и Феодосьев В. И. получили некоторое решение, соответствующее несимметричным формам равновесия.

Позже Морозов Н. Ф. опубликовал цикл работ, в которых доказывалось существование решений в задачах о больших прогибах пологих оболочек и пластин. Для круглой пластины, загруженной поперечной нагрузкой, он доказал существование и единственность симметричного решения, а также показал появление несимметричного решения при возрастании поперечной нагрузки. Строгое доказательство единственности несимметричного решения проведено Piechocki W. O.

Численно значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной, для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения были найдены Cheo L. S., Reiss E. L.

В настоящей работе рассматривается задача о потере устойчивости осесимметричной формы равновесия неоднородной кольцевой пластины, модуль упругости которой изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Внешний край пластины предполагается закрепленным от поворотов, при этом точки края могут свободно смещаться в радиальном и окружном направлении, а внутренний край свободно смещается в направлении оси симметрии пластины, но не поворачивается.

Проведены серии расчетов для неоднородной сплошной и кольцевой пластин при изменения модуля упругости пластины по линейному $E = E_0^{(1)}(1 + q_1 r)$ и экспоненциальному $E = E_0^{(2)} e^{q_2 r}$ законам. Параметры $E_0^{(i)}$ и q_i, $(i = 1, 2)$ выбирались так, чтобы среднее значения модуля упругости пластины E_{av} оставалось постоянным. Показано, что если модуль упругости пластины уменьшается к ее краю $(q < 0)$, то потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходит при более низкой нагрузке и с образованием большего числа складок в окружном направлении, чем для однородной пластины. При увеличении модуля упругости критическая нагрузка возрастала $(q > 0)$. Потеря устойчивости осемимметричных форм равновесия локализована вблизи внешнего края пластины и связана с появлением в окрестности внешнего края сжимающих окружных усилий. Этим объясняется влияние на критическую нагрузку свойств пластины в окрестности внешнего края. Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия при увеличении радиуса центрального отверстия происходит с образованием меньшего числа складок в окружном направлении.

Моделирование движения крови в сосудах со стенозом

Галингер Н. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
devitor@mail.ru

Изучено течение вязкой жидкости в аксиально-симметричной эластичной трубке при наличии сужения, моделирующего движение крови в сосуде при наличии стеноза. Сделаны следующие допущения:

- предполагается, что жидкость однородная, вязкая, несжимаемая;
- плотность стенки трубки постоянна, деформация трубки характеризуется изменением её радиуса, радиус трубки зависит от координаты и времени;
- деформации стенки трубки и её толщина малы по сравнению с радиусом, а характерные длины волновых процессов много больше равновесного радиуса;
- давление жидкости в потоке одинаково по всему сечению трубки и зависит от координаты и времени.

На начальном этапе предполагалось ограничиться анализом нелинейных волн в длинноволновом приближении и при больших числах Рейнольдса. Такое приближение является справедливым для средних и крупных артерий.

На основе одномерной теории движение вязкой жидкости в трубке с переменным радиусом (со стенозом) было смоделировано системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Задача была решена в линеаризованной постановке. В рамках такого допущения предполагалось, что давление жидкости в трубке прямо пропорционально возмущениям радиуса стенки трубки. Линеаризованная задача была сведена к канонической системе двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Найдено решение данной системы, полученное с помощью идей проекционного метода Галеркина. При таком подходе решение ищется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты, а вторая- только от времени. Путем осреднения по длине трубки была построена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Проанализировано изменение скорости распространения волн в сосудах и возмущения радиуса стенки сосуда при различных формах стеноза, приведены соответствующие графические зависимости. Отдельно рассмотрен случай, когда стеноз сосуда отсутствует. Установлено, что профиль скорости в рамках рассмотренной одномерной модели остается практически неизменным по всей длине сосуда, за исключением окрестности точки, в которой достигается пик стеноза, на пике стеноза наблюдается резкое увеличение амплитуды колебаний графика скорости. Выявлена связь: чем сильнее выражен стеноз кровеносного сосуда, тем больше период колебаний и меньше амплитуда колебаний возмущения радиуса стенки.

Асимптотическое интегрирование в задаче о динамическом сжатии тонкого пластического слоя

Георгиевский Д. В.
Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова
georgiev@mech.math.msu.su

При осуществлении технологических процессов обработки тонких слоёв давлением, в частности, при прессовании слоёв сближающимися поверхностями необходимо различать стадии процесса, когда достаточно ограничиться квазистатическим расчётом, а когда необходим учёт инерционных эффектов. Эти стадии на разных временны́х интервалах могут протекать при одной и той же скорости сближения прессующих поверхностей.

Динамическая постановка задачи о сжатии тонкого идеальножёсткопластического слоя абсолютно жёсткими плитами, движущимися с постоянными скоростями навстречу друг другу, включает два характерных безразмерных параметра. Один из них — малый геометрический параметр α, равный отношению толщины слоя $2h(t)$ к его длине $2l(t)$ — явно зависит от времени, причём со временем растёт порядок его малости по отношению к другому безразмерному параметру — не зависящей от времени величине, равной обратному числу Эйлера ($\mathsf{Eu} = \tau_s/(\rho V^2)$ — число Эйлера — один из ключевых безразмерных критериев в динамических задачах МСС; τ_s и ρ — предел текучести и плотность среды; $2V$ — характерная скорость сближения). Эта величина принимается также много меньшей единицы: $\mathsf{Eu}^{-1} \ll 1$.

В зависимости от соотношения указанных параметров, т. е. на различных временны́х интервалах, определяемых показателем β:

$$\mathsf{Eu}^{-1} = O(\alpha^\beta(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad t_* - t \sim \frac{1}{\mathsf{Eu}^{\,1/(2\beta)}} \frac{\sqrt{h(0)l(0)}}{V}, \quad \beta > 0,$$

где $t_* = h(0)/V$ — момент схлопывания плит, с помощью процедуры асимптотического интегрирования строятся решения в виде разложений по целым степеням α. Подробно исследуются случаи $\beta = 2$ и $\beta = 1$. Обосновывается правомерность поиска решения в данной форме. Показывается возможность гладкой сшивки по времени асимптотических разложений.

Определяется отношение указанных параметров, при которых поправка в выражении для давления, вызванная инерционными слагаемыми, становится того же порядка, что и слагаемых, участвующих в классическом решении Прандтля квазистатической задачи. Подтверждается известный факт, утверждающий, что на динамической стадии давление зависит от координаты вдоль длины слоя не линейно, как в задаче Прандтля, а квадратично. Наличие главного квадратичного слагаемого увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на сближающиеся жёсткие плиты.

Работа поддержана РФФИ (12-01-00020a, 11-01-00181a, 12-01-00789a).

О методах расчета динамики жидких частиц

Говорухин В. Н.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
vgov@math.rsu.ru

Исследование динамики жидких частиц является одной из важных задач гидродинамики и массопереноса в жидкости. Для эффективного анализа таких задач необходимы эффективные и корректные методы построения траекторий жидких частиц, порождаемых полем скорости в области течения. Скорости жидкости могут быть известны, или вычисляться на каждом временном шаге, но в любом случае, методы численного интегрирования уравнений динамики частиц жидкости должны сохранять фундаментальные свойства задач. Кроме того, подобные процедуры лежат в основе активно развивающихся в последнее время бессеточных методов анализа течений жидкости.

Для выбора наиболее эффективного метода часто не достаточно теоретических оценок, и требуется экспериментальное их изучение. В работе исследуется влияние выбора метода интегрирования по времени на результаты расчета динамики частиц идеальной несжимаемой жидкости. Известно, что это одна из наиболее сложных задач для численного анализа. Чтобы избегнуть влияния ошибок пространственной дискретизации на результаты расчетов решается не исходная задачв в частных производных одним из численных методов, а используются известные точные решения уравнений Эйлера: стационарные течения в прямоугольнике, вихрь Рэнкина и диполь Ламба. Рассмотрены многошаговые и одношаговые методы, которые применялись ранее при решении такого класса задач. Это явные, явно-неявные одношаговые и многошаговые методы, часть из которых близки к симплектическим. В качестве критерия эффективности методов принимается сохранение известного точного решения при решении на достаточно больших временах при одинаковых вычислительных затратах.

Результаты экспериментов позволяют сделать ряд выводов и рекомендаций.

- При численном решении задач динамики жидких частиц важным оказывается сохранение фазового объема. Использование методов близких к симплектическим, точнее методов, сохраняющих этот инвариант, позволяет проводить достоверные вычисления на больших временах.
- Использование методов более высокого порядка точности позволяет сократить вычислительные затраты для получения решения с высокой точностью и для достаточно больших временных промежутков.
- Для расчетов динамики жидких частиц на больших временах можно рекомендовать псевдосимплектический метод третьего порядка точности решения и шестого порядка точности условия симплектичности, который показал наилучшие результаты практически во всех тестовых расчетах.

В работе рассмотрены течения идеальной жидкости, но полученные выводы могут быть справедливы и для других задач динамики жидкости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00708).

Волновая динамика и резонансные эффекты в поврежденных слоистых фононных кристаллах

Голуб М. В.
Краснодар, Кубанский государственный университет
m_golub@inbox.ru

Материалы с искусственно созданной внутренней квазипериодической или периодической структурой в настоящее время получают все большее практическое применение. Последние десятилетия ведутся исследования динамических характеристик различных искусственных композитов, имеющих существенную значимость в задачах виброгашения и виброфокусировки, увеличения прочности конструкций, при создании актуаторов, фильтров и в других приложениях. Например, для гашения шума от автомобилей вдоль трасс устанавливаются ограждения с периодически расположенными отверстиями, размер и расстояние между которыми подбирается путем минимизации уровня шума. Для упругих композитных материалов с периодической структурой или системой неоднородностей, по аналогии с названием «фотонные кристаллы» используется термин «фононные кристаллы». Волновые явления в фононных кристаллах схожи с наблюдаемыми в фотонных кристаллах (здесь также имеются запрещенные и разрешенные зоны), но зачастую более сложны для анализа из-за большего количества распространяющихся в упругой среде волн.

Наличие неоднородностей в фононных кристаллах могут менять положение запрещенных зон или приводить к дополнительному затуханию сигнала, тем самым меняя фильтрационные свойства кристалла. В работе рассматривается распространение плоских волн в периодическом многослойном упругом композите с одиночными отслоениями или поврежденными слоями. Полное волновое поле в поврежденной структуре представляется в виде суммы рассеянного дефектом поля и поля в композите без дефекта. Для описания одиночного дефекта используется интегральный подход, при этом интегральное представление для рассеянного поля выражается через символ матрицы Грина структуры и скачок смещений на берегах трещины. Для моделирования поврежденного интерфейса используются и сравниваются два подхода: периодический набор трещин и пружинные граничные условия.

Изучаются особенности распространения упругих волн в периодическом композите с трещиной, отдельно анализируются резонансные явления. Обнаружено два типа резонансов для одиночных трещин с существенно разной степенью локализации волнового процесса. Более «сильный» резонанс сопровождается захватом энергии и может привести к развитию трещины, тогда как второй тип резонансов менее опасен. Наличие распределенных дефектов или поврежденных слоев в идеальной фононной решётке, очевидно, изменяет запрещенные и разрешенные зоны. Приводятся характерные ситуации, возникающие при колебаниях поврежденных периодических слоистых композитов.

Работа выполнена в рамках проекта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы № 2012-1.2.2-12-000-1002-039.

Возникновение вторичных режимов в задаче вибрационной конвекции Марангони

Гончаренко А. А., Прозоров О. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
oaprozorov@gmail.com

Рассматривается задача о возникновении конвекции в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, ограниченном твердой стенкой и свободной поверхностью, на которой действует поверхностное натяжение с коэффициентом $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$. Слой совершает поступательные высокочастотные колебания.

В работе [*Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л.* Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. — 2002. — Т. 6. — Вып. 4. — С. 573–583] проведена процедура осреднения для слоя со свободной поверхностью. В настоящей работе исследуется полученная ранее модель недеформируемой в среднем свободной границы: влияние вибрации в осредненной системе учитывается только в массовой силе и не учитывается в краевых условиях.

Изучается поведение вибрационного параметра $r^2 = Ma^2/\mu$, где Ma — число Марангони (градиент температуры), μ — вибрационный параметр. В расчетах число Марангони считается фиксированным, изменяется лишь вибрационный параметр — амплитуда вибраций.

Расчет критических значений осуществлен путем решения линейной задачи, которая при фиксированном μ была исследована ранее с помощью численных и асимптотических методов. Полученные результаты согласуются с данными, представленными в предыдущих работах. Решена линейная задача, построена зависимость критического параметра амплитуды вибрации от волнового числа при фиксированном градиенте температуры. Нейтральные кривые этой задачи имеют некоторые особенности, например, возможно появление нескольких точек минимума.

В работе так же исследована точка глобального минимума нейтральной кривой. Средствами слабо-нелинейного анализа построены амплитудные уравнения, которые по форме совпадают с уравнениями Гинзбурга–Ландау. Для различных значений числа Марангони найдены соответствующие амплитуды вторичного режима. Построены нейтральные кривые и собственные функции при различных значениях вибрационной скорости. Проведено сравнение численных и асимптотических результатов.

Методом многомасштабных разложений в окрестности точки минимума нейтральной кривой построено амплитудное уравнение. Получено, что в широком диапазоне параметров нелинейное поведение описывается уравнением Гинзбурга–Ландау.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (12-01-00582-а).

Задача Коши в теории обратных задач

Гукасян Л. С.
Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет
luska-90@list.ru

Коэффициентные обратные задачи в механике и моделировании — интенсивно развивающийся раздел вычислительной и экспериментальной механики, который составляет один из важнейших классов обратных задач. Особенностью коэффициентных обратных задач является их нелинейность и некорректность, что требует разработки новых вычислительных схем при их численном решении.

Наибольшую популярность для операторов эллиптического типа в последнее время приобрели две постановки. В первой из них задается дополнительная информация о решении на границе, что приводит к сложным нелинейным проблемам, которые исследуются лишь с помощью некоторых итерационных вычислительных схем. Вторая постановка более проста и требует знания характеристик полей внутри области в некотором наборе точек. Обратная задача в этом случае линейна и приводит к исследованию задачи Коши для линейных операторов в частных производных первого порядка. В то же время разработка вычислительных схем для такой постановки является весьма актуальной и может быть использована для более сложных ситуаций.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов вычислительной математики, получивших в настоящее время широкое распространение для приближенного решения краевых задач, является метод конечных разностей, который используется в работе для решения обратной задачи для уравнения второго порядка.

В односвязной области S с кусочно-гладкой границей $l = l_1 \bigcup l_2$ рассмотрена краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$(\mu u_{,k})_{,k} + \rho\omega^2 u = 0,$$

где μ — переменный модуль сдвига, ρ — плотность. Часть границы l_1 защемлена, на l_2 действует нагрузка. Краевые условия имеют вид:

$$u\big|_{l_1} = 0, \quad \mu \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{l_2} = p.$$

Обратная задача состоит в определении функции μ по известной (измеренной) информации о функции u, возможно заданной на некоторой сетке. С формальной точки зрения такая задача приводит к задаче Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

Предложен метод решения обратной задачи на основе решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами на основе разностных аппроксимаций. Проведена серия вычислительных экспериментов для области в виде прямоугольника по восстановлению различных видов неоднородностей.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

Линейная параболическая задача с вырождением. Высокочастотная асимптотика

Гусаченко В. В.[*], Ильичева Е. А.[*], Левенштам В. Б.[*,]**
[*]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[**]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А*
vleven@math.rsu.ru

Математическими моделями многих процессов в механике сплошных сред служат параболические задачи. Доклад посвящен асимптотическому анализу одного класса таких задач.

В цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу с большим параметром ω о классических $2\pi/\omega$-периодических по времени t решениях системы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Big(L_0 + \frac{1}{\omega}L_1\Big)u(x,t) + \sum_{1\le|k|\le m}\Big(M_k u(x,t) + d_k(x)\Big)e^{ik\omega t} + d_0(x), \qquad (1)$$

$$u(x,t)|_\Gamma = 0. \qquad (2)$$

Здесь Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^n$, $n \in N$, с границей $\partial\Omega$; $\Gamma = \partial\Omega \times R$; L_0 и L_1 — дифференциальные выражения второго порядка, причем L_0 — эллиптическое, а M_k — первого порядка. С дифференциальным выражением L_0 и граничным условием (2) свяжем обычным образом действующий в $L_2(\Omega)$ эллиптический оператор A . Пусть $\lambda = 0$ — простое собственное значение A, которому отвечает собственная функция $a_0(x)$. Пусть

$$Mu(x) \equiv L_1 u(x) + \sum_{1\le|k|\le m}\frac{M_{-k}M_k u(x)}{ik},$$

$$Nu \equiv -\sum_{1\le|k|\le m}\frac{M_k L_0}{k^2}\Big(M_{-k}u\Big) - \sum_{\substack{1\le|k|,|l|,|s|\le m,\\ k+l+s=0}}\frac{M_k M_l M_s u}{s(s+l)},$$

и операторы B и C действуют в $L_2(\Omega)$ по правилам $Bv = Mv$, $Cv = Nv$, $v \in D(B) = D(C) = D(A)$. Рассмотрим случаи: 1) уравнение $Av = -Ba_0$ не разрешимо; 2) уравнение $Av = -Ba_0$ разрешимо, но $Av = -Ba_1 - Ca_0$ не разрешимо.

В каждом из этих двух случаев при некоторых естественных дополнительных предположениях построены полные асимптотики $2\pi/\omega$-периодического по времени t решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 12-01-00402-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (№ 14.A18.21.0356 и № 2012-1.2.1-12-000-1001-035 в ИКС).

Вращательные колебания цилиндрического резервуара с упругими основаниями, заполненного идеальной жидкостью

Дидок Н. К.
Донецк, Донецкий национальный университет
nick_di@rambler.ru

Рассмотрена механическая система, состоящая из твёрдого тела с резервуаром, содержащим тяжелую идеальную несжимаемую жидкость. Резервуар является цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения с абсолютно жесткой боковой поверхностью и основаниями в виде упругих изотропных пластин, жёстко защемленных по контуру и подверженных растягивающим усилиям в срединной поверхности.

В рамках линейной теории рассмотрена задача о малых вращательных колебаниях описанной механической системы. На основании модального анализа выведена счётная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой системы. Получены аналитические выражения для собственных форм совместных колебаний жидкости и упругих пластин, выведено и исследовано уравнение собственных частот.

Установлено, что частотный спектр состоит из двух наборов, соответствующих колебаниям верхнего и нижнего оснований: при изменении механических параметров одной из пластин существенно изменяются только частоты соответствующего набора.

Получение аналитических выражений для собственных форм является наибольшей трудностью, возникающей при использовании такого подхода. В частности, для их построения требуется знать фундаментальную систему решений вспомогательной граничной задачи для бигармонического уравнения. Однако такая система может быть найдена в явном виде только для полостей канонических форм. Численные исследования собственных форм в работе проведено для цилиндрической полости с круговым поперечным сечением.

Получено дифференциальное уравнение движения твердого тела, выражение для присоединенного момента инерции жидкости и уравнение частот вращательных колебаний.

На основании анализа частотного уравнения графо-аналитическим методом получено необходимое условие устойчивости положения равновесия данной механической системы.

Исследованы структура спектра, присоединённый момент инерции жидкости и условия устойчивости положения равновесия твёрдого тела. Проведены подробные численные исследования для одного отсека в виде прямого кругового цилиндра с упругими основаниями.

Разработан комплекс программ для аналитических и численных исследований частотных уравнений, собственных форм, условий устойчивости и стабилизации.

Плоские колебания предварительно напряженного анизотропного слоя

Дударев В. В.
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
dudarev_vv@mail.ru

Напряжения, которые существуют в теле при отсутствии внешних нагрузок называются предварительными. В научной литературе эти напряжения так же имеют названия остаточные или технологические, поскольку они обычно возникают в ходе различных производственных операций. При этом стоит отметить, что наибольшая концентрация подобных напряжений наблюдается в окрестности различных дефектов типа полостей, трещин, включений и т. п. На сегодняшний день имеется несколько способов диагностики такого предварительного напряженного состояния, которые условно можно разделить на три класса: разрушающие, полуразрушающие и неразрушающие. Одним из наиболее эффективных и универсальных способов неразрушающей диагностики является метод акустического зондирования. В его основе лежит представление о том, что изменение свойств материала ведет к изменению его амплитудно-частотных характеристик.

Представлена общая постановка задачи о колебаниях предварительно напряженного упругого тела. В качестве конкретного примера рассмотрена задача о плоских колебаниях анизотропного слоя при наличии неоднородного предварительного напряженного состояния. Основание слоя считается жестко закрепленным, колебания вызываются нагрузкой, приложенной на верхней границе. Решение прямой задачи об определении поля перемещения с помощью аппарата преобразования Фурье сведено к решению интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, построенных для трансформант компонент перемещений. Решение полученных уравнений может быть получено с помощью метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций или Симпсона. Исследовано влияние уровня предварительных напряжений на амплитудно-частотные характеристики слоя. Сформулирована обратная задача об определении законов изменения компонент тензора предварительных напряжений. Для решения этой задачи использован метод построения итерационного процесса. Этот подход основан на сочетании решения прямой задачи и нахождении на каждой итерации поправок на основе решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Для реализации этого метода сформулировано необходимое уравнение, численное решение которого реализовано с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. О. Ватульяну за внимание к работе и ценные рекомендации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (10-01-00194, 12-01-31501) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

О колебаниях наноразмерных пьезоэлектрических тел с учетом поверхностных эффектов

Еремеев В. А.[*,**], **Наседкин А. В.**[**]
[*]*Германия, Магдебург, Отто фон Герике университет Магдебурга*
[**]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
nasedkin@math.sfedu.ru

В работе рассмотрены задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрических (электроупругих) тел ограниченных размеров с учетом поверхностных напряжений и электрических зарядов. Как показывают исследования последних лет, учет поверхностных напряжений позволяет описать наблюдаемые для наноматериалов эффекты увеличения жесткости при уменьшении размеров. Аналогично упругим телам здесь при анализе пьезоэлектрических наноразмерных сред в модель вводятся поверхностные напряжения и распределенные электрические заряды посредством добавления на поверхности соответствующих упругих мембран и диэлектрических пленок.

Спектральные свойства краевой задачи для пьезоэлектрического тела ограниченных размеров с учетом поверхностных эффектов устанавливаются комбинацией подходов, разработанных ранее для пьезоэлектрических тел и для упругих тел с поверхностными напряжениями.

Доказано, что операторное уравнение слабой постановки задачи о собственных колебаниях ограниченных пьезоэлектрических тел с поверхностными эффектами имеет дискретный вещественный спектр, а соответствующие собственные функции образуют систему, ортогональную и полную в L_2 и в энергетическом пространстве. С использованием минимаксного принципа Куранта–Фишера установлены теоремы об изменениях собственных значений при учете поверхностных эффектов и при изменениях граничных условий и материальных констант пьезоэлектрического материала с поверхностными эффектами. Показано, что учет поверхностных напряжений приводит к возрастанию собственных значений, а учет поверхностных зарядов — к их уменьшению. Также установлено, что однотипные изменения механических и электрических граничных условий или материальных характеристик приводят к противоположным изменениям собственных значений.

Обсуждаются конечно-элементные подходы для определения собственных частот, частот электрических резонансов и антирезонансов наноразмерных пьезоэлектрических тел с учетом поверхностных эффектов. Даны разрешающие конечно-элементные системы для спектральных задач для наноразмерных пьезоэлектрических тел с учетом поверхностных напряжений и электрических зарядов. Приведены результаты конечно-элементных расчетов модельных задач, иллюстрирующие некоторые из отмеченных тенденций изменения частот.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00829).

Упругое состояние транстропного слоя, ослабленного цилиндрическими полостями

Ержаков Г. В., Шалдырван В. А.
Украина, Донецк, Донецкий национальный университет
v.shaldirvan@donnu.edu.ua

Излагается методика построения решений трехмерных задач теории упругости. Рассматривается пространственный многосвязный упругий слой при симметричной относительно срединной плоскости деформации. Слой представляет собой материал класса транстропных (трансверсально изотропных), у которого упругие модули удовлетворяют соотношениям

$$b_1 = \frac{G/G_z - \nu_z E/E_z}{1-\nu} > 0, b_1^2 - b_2 = \left(\frac{G/G_z - \nu_z E/E_z}{1-\nu}\right)^2 - \frac{E}{E_z}\frac{1-\nu_z^2 E/E_z}{1-\nu^2} < 0.$$

Его грани предполагаются свободными от механических напряжений, а поверхности полости Ω_j, $j = 1..s$, нагружены неравномерными нагрузками. Задачи для многосвязных транстропных тел не рассматривались. Более того, в монографии H. Ding, W. Chen, L. Zhang, полностью посвященной рассмотрению трансверсально изотропных тел, приводится решение одной осесимметричной задачи при «смягченных» граничных условиях на границе. Общее решение с использованием плоского варианта теоремы Гельмгольца ищется в виде

$$u\left(r\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(z)\frac{\partial \Psi_p}{\partial x} - \partial_1\left[F + \lambda^2\mu_8\left(\frac{1}{3} - z^2\right)D^2F - \Phi_0^*\right],$$

$$v\left(r\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(z)\frac{\partial \Psi_p}{\partial y} - \partial_2\left[F + \lambda^2\mu_8\left(\frac{1}{3} - z^2\right)D^2F + \Phi_0^*\right],$$

$$w\left(r\right) = \sum_{p=1}^{\infty} q_p(z)\Psi_p\left(x,y\right) - 2\lambda\mu_8 z\, D^2F.$$

Удовлетворение естественных граничных условий приводит к функциональной системе граничных условий на боковых поверхностях полостей:

$$\phi(t_j) + t_j\overline{\phi'(t_j)} + \overline{\psi(t_j)} + \Lambda_{1\Omega_j}\left(\Phi_0, \Psi_p\right) = \frac{f_{1,0}^{(j)}}{2}, -\frac{8\lambda^2\mu_8}{\left(\delta_m s_0\right)^2}\overline{\phi''(t_j)} + \Lambda_{1\Omega_j}\left(\Phi_m, \Psi_p\right) = \frac{f_{1,m}^{(j)}}{2},$$

$$\Lambda_{2\Omega_j}\left(\Phi_m, \Psi_p\right) = f_{2,m}^{(j)}, \Phi_0 = 0, (m = 1, 2, ..., \ j = 1..s)$$

Представление комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили и метагармонических функций берутся в виде

$$\begin{matrix}\phi(\zeta) \\ \psi(\zeta)\end{matrix} = \sum_{q=1}^{s}\sum_{n=0}^{\infty} \begin{matrix} a_{qn} \\ b_{qn}\end{matrix} \left(\frac{R_q}{\zeta - \zeta_q}\right)^n, \Psi_p = \sum_{q=1}^{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{qn}^p K_n(\gamma_p^* r_q) e^{in\theta_q},$$

$$\Phi_p = \sum_{q=1}^{s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{qn}^p K_n(\delta_p^* r_q) e^{in\theta_q}$$

В качестве иллюстрации исследуется концентрация напряжений в слое с двумя одинаковыми одинаково нагруженными полостями.

Автоматизированный анализ двумерных задач нелинейной теории упругости

Жеребко А. И.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
emporioarmani.89@mail.ru

Современный уровень развития биомедицинской инженерии выдвигает достаточно жесткие требования к математическим моделям в этой области. Одним из таких требований к моделям, изучаемых методами механики сплошной среды, все чаще становится учет нелинейности. В особенности это актуально для моделей, применяемых для изучения поведения мягких биологических тканей, которые и в условиях своего естественного функционирования, и в процессе некоторых оперативных вмешательств подвергаются большим деформациям. В этой связи на передний план выходит проблема выбора самой модели, которая позволила бы корректно описывать поведение исследуемой ткани в условиях решаемых задач. Для осуществления такого выбора чисто эмпирических соображений часто оказывается недостаточно, и требуется хорошо отлаженный математический алгоритм. Другой, не менее значительной проблемой в механике сплошной среды, является вопрос идентификации параметров модели материала. Одним из наиболее простых и доступных методов решения этой проблемы является анализ, основанный на исследовании классических диаграмм растяжения. При этом стоит отметить, что реальные материалы, как правило, являются не идеальными и содержат дефекты в виде различных неоднородностей. В этой связи возникает вопрос о степени влияния наличия и размеров дефекта, а также его местоположения на поведение диаграммы растяжения. Для многих постановок задач ответ на этот вопрос не может быть получен аналитически - его решение требует организации и проведения цикла вычислительных экспериментов.

Для решения обозначенных выше проблем, с помощью системы компьютерной алгебры Maple разработана программная оболочка, позволяющая пользователю интерактивно решать и анализировать некоторые типы задач нелинейной теории упругости. Возможности использования разработанной системы, в том числе для решения некоторых типов обратных задач, продемонстрированы на примере задачи о растяжении прямоугольника с отверстием из гиперупругого материала Блейтца и Ко. Проанализировано влияние размеров и положения неоднородности (круглого отверстия) на диаграмму растяжения. Исследовано влияние положения отверстия на диаграмму растяжения и на параметр «утоньшения» образца для случая сдвига отверстия вдоль замкнутого контура (в форме квадрата и окружности). Представлены полученные результаты: графики зависимости относительного удлинения и «утоньшения» образца от величины прикладываемой нагрузки для различных случаев расположения и размеров отверстия. Приведены обобщенные диаграмма растяжения и график зависимости «утоньшения» образца от прикладываемой нагрузки в случае сдвига отверстия вдоль замкнутого контура. Поставленные задачи решены для случаев линейной и нелинейной теории упругости, проведено сравнение результатов.

Моделирование эволюции сгустка крови в сосуде

Жуков М. Ю., Жукова Н. М.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
myuzhukov@mail.ru

Численно при помощи метода конечных элементов исследована задача о течении в длинном канале несжимаемой жидкости с сильно неоднородным распределением вязкости. Рассматриваемая задача может служить грубой моделью поведения тромбов и сгустков крови в сосудах (венах, артериях). Показано, что локализованный сгусток в процессе переноса течением жидкости существенно изменяет свою первоначальную форму. Результаты расчетов представлены для значений параметров, которые соответствуют увеличению вязкости жидкости внутри сгустка крови в 2–9 раз по сравнению с вязкостью вне сгустка.

Процесс тромбообразования весьма сложен и условно может быть разбит на четыре стадии: агглютинацию (склеивание и выпадение в осадок) тромбоцитов, коагуляция фибриногена и образование фибринового полимерного сгустка, агглютинация эритроцитов, преципитация — осаждение на сгусток всех основных белков плазмы. Механизм свертывания крови, если не рассматривать паталогии, как правило, запускается при механическом повреждении стенки сосуда, которое приводит к активации тромбоцитов и развивается по указанным стадиям. С гидродинамической точки зрения, наиболее важной является коагуляции фибриногена с последующим образованием фибринового полимерного сгустка (структурной основы тромба), что приводит к существенному увеличению вязкости крови (уменьшению текучести). Течение крови может срывать тромб, образующийся у стенки сосуда, и переносить его вдоль сосуда, что может приводить к закупориванию сосуда.

В работе моделируется лишь заключительная часть процесса — «отрыв» сгустка крови от стенки и перенос его течением крови. Следует заметить, что различные стадии процесса свертывания крови существенно различаются по характерным временам протекания. Стадии агглютинации и коагуляции протекают достаточно быстро (доли секунды), а процесс переноса сгустка крови имеет сравнительно большое характерное время (десятки секунд). Вышесказанное частично оправдывает раздельное моделирование процессов и делает возможным в грубом приближении рассматривать процесс переноса сгустка крови как перенос некоторой пассивной примеси потоком жидкости. Наличие сгустка крови в жидкой крови возможно учитывать влиянием величины коцентрации сгустка крови на вязкость жидкости в целом или просто сильным локальным изменением вязкости.

С математической точки зрения, решение задачи сводится к исследованию уравнений движения несжимаемой жидкости, вязкость которой зависит от концентрации фибрина. В работе основное внимание уделяется исследованию динамики процесса эволюции сильной первоначальной локальной неоднородности вязкости жидкости. Эта неоднородность и моделирует сгусток крови.

Расчет стационарных режимов конвекции Рэлея-Бенара-Кармана

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
shir@math.sfedu.ru

С помощью метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона рассчитаны стационарные режимы течения жидкости для конвекции Рэлея–Бенара–Кармана в цилиндре с непроницаемыми границами и вращающимися в противоположную сторону основаниями, на которых задана разность температур.

Для определения критических чисел возникновения конвекции (числа Рэлея), как правило, решаются спектральные задачи теории гидродинамической устойчивости — задачи, линеаризованные в окрестности некоторого стационарного решения (зависящего от параметра) исходной нелинейной задачи. В случае, когда стационарное решение можно получить лишь численно определение спектра крайне трудоемко. Альтернативный способ — решение нестационарной нелинейной задачи и обнаружение качественного изменения вида решения — также малоэффективен. В представленной работе предлагается алгоритм непосредственного решения стационарной задачи при помощи метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона, позволяющий рассчитывать как устойчивые, так и неустойчивые стационарные режимы, по крайней мере, для задачи о конвекции Рэлея–Бенара–Кармана в цилиндре с отношением высоты к радиусу, равным единице, для чисел Прандтля, Рэлея и Рейнольдса в интервалах $0.5 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 7$, $100 \leqslant \mathrm{Ra} \leqslant 300000$, $10 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 95$, соответственно.

Основные результаты представлены для параметров $100 \leqslant \mathrm{Ra} \leqslant 300000$, $\mathrm{Pr} = 1$, $\mathrm{Re} = 90$ и отношения высоты цилиндра к радиуса, равного единице. Решение задачи осуществлялось при помощи пакета FreeFem++ на квадратной сетке 30×30. Относительная точность расчетов не превышала 10^{-9}. Исходная задача приводилась к вариационной форме и для аппроксимации скорости и температуры использовались квадратичные конечные элементы, а для апрроксимации давления — линейные. При этом в вариационной форме для членов, связанных с давлением, не использовались стабилизационные добавки и интегрирование по частям.

Предложенный сценарий проведения расчетов, когда исходное начальное приближение метода Ньютона искажалось достаточно малым возмущением, позволил определить как устойчивые и неустойчивые симметричные решения, так и устойчивые несимметричные. Речь идет о бифуркации потери устойчивости зеркальной симметрии относительно $z = 0$, которой обладает исходная задача, где z — вертикальная координата. Построена бифуркационная кривая потери устойчивости зеркально симметричных режимов в зависимости от числа Рэлея. Несимметричность решения характеризовалась отношением интегралов от функции тока, вычисленных по областям $z > 0$, $z < 0$. Кроме этого, приведены графики изолиний функции тока для значений числа Рэлея, при которых происходит качественное изменение режимов течения жидкости при конвекции Рэлея–Бенара–Кармана.

О влиянии кривизны контактирующих цилиндров на напряженное состояние в глубине их контакта

Журавлев Г. А., Бабенко И. С.
Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.
zhuravl@ms.math.rsu.ru

Дано уточненное решение задачи определения октаэдрических напряжений для нагруженных контактным давлением упругих цилиндров. В основу достижения поставленной цели положено использование решения задачи Н. И. Мусхелишвили о сжатии отдельно взятого цилиндра противоположно направленными сосредоточенными силами.

Рассмотрение в работе октаэдрических напряжений обусловлено тем, что эти напряжения позволяют лучше (нежели нормальные или касательные напряжения) учесть изменение объемного напряженного состояния материала, определяемого, например, параметрами эллиптической площадки контакта упругих цилиндров. Благодаря этому октаэдрические напряжения все чаще используются в теории и практике контактных расчетов как эффективные напряжения, характеризующие прочностные свойства контактирующих тел.

По этой же причине анализ октаэдрических напряжений приводит к более ориентированной на прочностные свойства (то есть — на конечный практический результат) оценке влияния кривизны контактирующих цилиндров на напряженное состояние в глубине их контакта.

Анализ изменения глубинных октаэдрических напряжений в условиях плоской задачи показал существенное отличие от традиционно используемых результатов Беляева-Ковальского, полученных моделированием цилиндра полупространством.

Несмотря на то обстоятельство, что в настоящей работе рассмотрена плоская задача, есть все основания для обобщения качественной стороны изложенных результатов на условия начально-точечного касания контактирующих цилиндров. В частности, характер влияния уменьшения радиуса цилиндра на рост относительной величины максимальных октаэдрических напряжений и глубины их залегания имеет вполне определенное физическое объяснение. Это влияние заключается в монотонно возрастающем (по мере уменьшения радиуса цилиндра) искажении граничных условий поставленной задачи в случае использования приема моделирования контактирующих тел полупространством. А это искажение, в свою очередь, качественно одинаково влияет на изменение величины и места расположения максимальных октаэдрических напряжений при любом соотношении размеров полуосей эллиптической площадки контакта упругих цилиндров.

Показано, что универсальное использование (в теории и практике расчетов глубинных напряжений) решений Буссинеска-Черутти (с моделированием цилиндра полупространством) приводит к существенному занижению роли кривизны контактирующих тел и, как результат, к значительным погрешностям при расчетах октаэдрических напряжений в глубине контакта. Изложенный метод определения октаэдрических глубинных напряжений ограниченных тел может стать основой прочностных расчетов контактных узлов машин и механизмов.

Индентирование плоской мембраны

Звоникова О. Ю., Колесников А. М.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
zvonikova.olga@mail.ru

Высокоэластичные тонкие мембраны нашли применение в различных областях техники, строительства, медицины, биологии. Ультратонкую резиновую мембрану, например, используют в микроэлектромеханических системах (МЭМС) для создания различных чувствительных элементов приборов и силовых элементов регуляторов. Это связано со специфическими свойствами мембран — малой жесткостью, большими и обратимыми деформациями и герметичностью.

В работе рассматривается задача о деформации круглой тонкой оболочки, изготовленной из высокоэластичного материала, закрепленной по краю под действием сферического абсолютно твёрдого индентора. В силу малой толщины и преобладающими растягивающими усилиями в оболочке, задача рассматривается в рамках нелинейной теории безмоментных оболочек типа Кирхгофа-Лява. Трением между индентором и оболочкой пренебрегаем и полагаем, что деформация оболочки осесимметричная. Осесимметричность задачи позволяет свести двумерную задачу о равновесии оболочки к двум системам обыкновенных дифференциальных уравнений, которые формулируются для области контакта и оставшейся части оболочки. Краевыми условиями для неизвестных функций являются защемление внешнего края оболочки, условия гладкости и непрерывности решения в центре мембраны, а также условия непрерывности и гладкости решения на границе областей. Неизвестная заранее граница входит в задачу параметром, для которого после решения задачи рассчитывается сила вдавливания индентора. Численное интегрирование краевой задачи осуществляется методом пристрелки с использованием метода Рунге-Кутты для решения задач Коши на каждом шаге пристрелки. В качестве модели материала используется несжимаемая модель Бартенева-Хазановича. Исследовано напряжённо-деформированное состояние мембраны при различных условиях нагружения. Восстановлена форма мембраны, для различных размеров индентора, различных величин вдавливающего усилия. Рассчитано контактное давление мембраны на сферический индентор. Построены зависимости прогиба центра мембраны от вдавливающего усилия. Получено, что для одного и того же прогиба центра мембраны при большем радиусе индентора требуется большая сила. При увеличении радиуса индентора разница между максимальным и минимальным усилием в оболочке уменьшается. Для радиального усилия это явление проявляется сильно, для окружного усилия это явление незначительно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских учёных и ведущих научных школ (грант МК-439.2011.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (госконтракт № П596) и РФФИ (гранты № 11-08-01152-а, № 12-01-31431-мол-а).

Нелинейные эффекты при растяжении-сжатии цилиндрических тел с распределенными винтовыми дислокациями

Зеленина А. А., Зубов Л. М.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
a.zelenina@gmail.com

Исследовано влияние непрерывно распределенных прямолинейных винтовых дислокаций на напряженно-деформированное состояние нелинейно упругих цилиндрических стержней, испытывающих большие деформации. В случае кругового сечения получена явная формула, описывающая диаграмму растяжения стержня из любого изотропного несжимаемого материала при произвольном осесимметричном распределении винтовых дислокаций. Установлено, что в рамках модели неогуковского материала нелинейная задача о растяжении-сжатии стержня с дислокациями имеет простое решение не только для кругового, но и произвольного сечения при любом двумерном распределении винтовых дислокаций.

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругого тела с непрерывно распределенными дислокациями, состоит из уравнений равновесия для тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ при отсутствии массовых сил и уравнений несовместности для тензора дисторсии (градиента деформации) $\mathbf{C}$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = dW(\mathbf{C})/d\mathbf{C}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{C} = \alpha \tag{1}$$

где div и rot — операторы дивергенции и ротора в координатах отсчетной конфигурации упругого тела, α — заданное тензорное поле плотности дислокаций, удовлетворяющее условию соленоидальности $\mathrm{div}\alpha = 0$, $W(\mathbf{C})$ — функция удельной энергии деформации, задающая свойства упругого материала.

Предположим, что в круговом цилиндре $r_1 \le r \le r_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$ тензор плотности дислокаций $\alpha = \alpha_{sk}\mathbf{i}_s\mathbf{i}_k$ в базисе $\mathbf{i}_k$ декартовых координат $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$ имеет только одну ненулевую компоненту $\alpha_{33}(r)$. Это соответствует радиально симметричному распределению прямолинейных винтовых дислокаций, оси которых параллельны оси цилиндра $\mathbf{i}_3$. Решение системы уравнений (1) ищем в следующем виде ($\lambda = const$):

$$\mathbf{C} = \frac{dR(r)}{dr}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + h(r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{i}_3 + \lambda\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \tag{2}$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi$, $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi$, $R(r)$ — радиальная координата точек деформированного цилиндра, $(\lambda - 1)$ — осевое удлинение цилиндра. Предположение (2) о характере деформации цилиндра сводит задачу о винтовых дислокациях к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $R(r)$, $h(r)$, решение которой приводится в работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00038) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Вторичные режимы термовибрационной конвекции в горизонтальном слое

Зеньковская С. М., Прозоров О. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
zenkov@math.sfedu.ru

Рассматривается нелинейная задача о возникновении конвекции в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, ограниченном твердыми стенками, при действии высокочастотной вибрации малой амплитуды и произвольного направления.

В статье [*Зеньковская С. М., Овчинникова С. Н.* Термовибрационная конвекция в слое жидкости при невесомости или пониженной гравитации // ПМТФ — 1991. — № 2. — С. 84–90] с помощью метода Ляпунова-Шмидта строится решение нелинейной задачи о возникновении вибрационной конвекции в условиях невесомости. В настоящей работе рассматривается более общий случай, когда условие невесомости отсутствует.

Анализируются осредненные уравнения и устойчивость равновесного режима. Критические значения числа Рэлея находятся из решения спектральной задачи, решение которой находится аналитически и численно с помощью метода стрельбы. Построены зависимости критических чисел от волнового числа при различных значениях углов и амплитуд вибрации. Особое внимание уделено случаю нагрева сверху, для которого последние эксперименты [*V. Shevtsova et al.* Experimental and theoretical study of vibration-induced thermal convection in low gravity // JFM — 2010. — № 648. — pp. 53–82] показывают вибрационную неустойчивость.

К нелинейной осредненной задаче применяется метод Ляпунова-Шмидта. Численно изучены вторичные течения, возникающие в малой окрестности критического значения числа Рэлея. Произведен расчет амплитуд вторичных режимов, функций тока и температуры при различных направлениях и скорости вибрации. При фиксированных значениях параметров произведен расчет функций тока, динамики жидких частиц, поля температуры. Сравниваются результаты, полученные применением метода Ляпунова-Шмидта и численного эксперимента на основе полной неосредненной задачи по методу конечных элементов. Также проведены вычисления с использованием размерных физических параметров для конкретных жидкостей, которые используются в экспериментах по вибрационной конвекции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (12-01-00582-а).

Задача о двойном цилиндрическом изгибе в нелинейной теории упругости.

Зубов Л. М., Иванова А. С.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
ivaas@list.ru

Внутренними напряжениями называют такие напряжения, которые существуют в теле при отсутствии внешних нагрузок. Причинами их возникновения может быть несовместность деформации, обусловленная дислокациями, дисклинации и другими дефектами микроструктуры твердых тел. Другим источником внутренних напряжений являются необратимые пластические деформации. Такие внутренние напряжения обычно называют остаточными.

В упругих телах, способных испытывать большие деформации, возможны источники внутренних напряжений, которые не относятся ни к одному из перечисленных выше типов. Примером может служить вывернутый наизнанку полый цилиндр или вывернутый замкнутый полый шар. В работе рассмотрена новая задача о больших деформациях трехмерного упругого тела, приводимая к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Задача описывает деформацию, при которой разрезанная цилиндрическая труба выпрямляется в прямоугольный блок, который затем изгибается в другой плоскости, превращаясь в полый цилиндр с осью, ортогональной оси первоначального цилиндра. Особенность задачи состоит в том, что в деформированном состоянии тела напряжения существуют даже при отсутствии внешних нагрузок. Для решения задачи применяется полуобратный метод. Возникающая при этом краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения решается численно.

Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты точек тела до деформации, а R, Φ, Z — цилиндрические координаты точек тела после деформации. Внешний и внутренний радиусы трубы r_0 и r_1 соответственно, l — длина цилиндра, причем $r_0 \le r \le r_1$, $0 \le z \le l$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Деформация твердого тела задается соотношениями: $R = R(r)$, $\Phi = sz$, $Z = t\varphi$, где $s, t = const$. Здесь t — характеризует осевое удлинение трубы, а параметр s — определяется длиной трубы в отсчетной конфигурации. В самом деле, так как $0 \le \Phi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$, то имеем $s = 2\pi/l$. Параметр t находится из условия равенства нулю продольной осевой силы, действующей на торцах трубы в текущей конфигурации. Это приближенно соответствует требованию отсутствия внешних нагрузок, приложенных к телу.

Учитывая, что определитель градиента деформации C положителен по определению, а $r > 0$, $R > 0$ исходя из их физического смысла, имеем четыре случая: 1) $s > 0,\ t < 0,\ R' > 0$; 2) $s < 0,\ t > 0,\ R' > 0$; 3) $s > 0,\ t > 0,\ R' < 0$; 4) $s < 0,\ t < 0,\ R' < 0$. Случаи 3 и 4, в которых $R' < 0$, описывают деформацию двойного цилиндрического изгиба в сочетании с выворачиванием трубы наизнанку, когда внутренняя поверхность полого цилиндра после деформации превращается во внешнюю цилиндрическую поверхность, и наоборот. Для несжимаемого неогуковского и сжимаемого полулинейного материалов найдено точное решение задачи о двойном цилиндрическом изгибе.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (госконтракт № П596).

Расчетно-экспериментальная оценка долговечности двухслойной втулки тормозной рычажной передачи

Иваночкин П. Г.[*], **Блажеев В. В.**[**]
[*]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
[**]*Ростов-на-Дону, Ростовский гос. университет путей сообщения*
Ivanochkin_p_g@mail.ru

Наибольшая тормозная эффективность при эксплуатации подвижного железнодорожного состава — важнейшая задача безаварийного движения. Она обеспечивается, если тормозная сила колесных пар не превышает максимально возможную силу сцепления колес с рельсами. Для равномерного распределения усилий между тормозными колодками и передачи усилий от поршня тормозного цилиндра к колесу локомотива предназначена тормозная рычажная передача (ТРП).

Обследование технического состояния тормозного оборудования выявило ряд существенных недостатков, в том числе превышение величины зазоров в шарнирных соединениях ТРП, обусловленное чрезмерным износом втулок.

С целью повышения надежности и долговечности рассматриваемого узла трения было предложено использование втулок многослойной конструкции — на внутреннюю поверхность втулки из стали 45, наносится металлополимерное наномодифицированное антифрикционное покрытие. Покрытие имеет двухслойную структуру — силовой каркас (подложка) и антифрикционный слой и наносится методом электроискрового легирования.

Для нанесения в качестве упрочняющей подложки (каркаса) использовались электроды из материала Сталь 65Г, а в качестве антифрикционного материала — графитофторопласты.

Предложен расчетно-экспериментальный метод расчета долговечности втулки тормозной рычажной передачи локомотива, основанный на решении износоконтактной задачи о взаимодействии вала и втулки с покрытием.

При расчете используется уравнение изнашивания, полученное в результате лабораторных трибологических исследований, а также экспериментально определенное распределение температуры на поверхности втулки. Расчет основывается на задании предельно допустимого радиального износа втулки или допустимого смещения центра вала в направлении действия нагрузки, при этом средняя интенсивность изнашивания определяется из полученного уравнения изнашивания. Распределение контактного давления и величина зоны контакта определяются из полученного ранее решения термоупругой износоконтактной задачи для двухслойной втулки.

В результате расчета по предлагаемой методике было получено, что долговечность опытной двухслойной втулки по сравнению с типовой увеличивается в 1,7 раза. Результаты расчетов подтверждают, что использование разработанных втулок тормозной рычажной передачи с металлополимерным антифрикционным покрытием позволяет повысить долговечность их работы. Проведенные ресурсные испытания втулок показали хорошее совпадение расчетной долговечности с их результатами.

Моделирование волн пороупругого полупространства

Игумнов Л. А., Петров А. Н., Аменицкий А. В.
Нижний Новгород, НИИ механики Нижегородского гос. университета им. Н. И. Лобачевского
Igumnov@mech.unn.ru

Распространение поверхностных и объемных волн рассматривается в рамках линейной трехмерной теории пороупругости. В качестве базовых функций выбраны вектор перемещений упругого скелета и поровое давление.

В работе представлены постановки краевых задач, система уравнений теории Био, матрицы фундаментальных и сингулярных решений для полной модели Био, описана схема прямого подхода метода ГИУ и гранично-элементная (ГЭ) методика решения ГИУ на основе использования интегрального преобразования Лапласа и метода Дурбина для численного обращения. В качестве модельного примера решена задача о действии силы на торец однородного пороупругого тела. Произведено сравнение ГЭ-решения с аналитическим решением для выбора рабочей ГЭ-сетки для решения задачи о составном теле. Рассмотрено гранично-элементное моделирование эффекта появления третьей волны на примере откликов поровых давления и потока. Решена задача о действии силы на торец составного пороупругого тела: представлены отклики перемещений и давлений при разных значениях модуля Юнга. Также найдено ГЭ-решение задачи о действии вертикальной силы на поверхность однородного пороупругого полупространства. Решение этой задачи использовано для подбора рабочей гранично-элементной сетки: приведены решения на разных сетках и дано сравнение с известным решением. Аналогичная задача решена с введением фиктивной контактной границы параллельной дневной поверхности: продемонстрирована независимость ГЭ-результатов от наличия фиктивной поверхности. Описаны результаты исследования влияния второй компоненты (наполнителя) пороупругого материала на поверхностные волны: сравниваются упругие и пороупругие отклики. Показано влияние коэффициента проницаемости на скорость волны Рэлея. На примере отклика давлений на фиктивной границе продемонстрирован эффект появления третьей волны. Решена задача о действии вертикальной силы на поверхность двухслойного пороупругого полупространства: случаи с более жесткой и более мягкой подложками. Представлено сравнение полученных ГЭ-результатов с известными результатами.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы ГК № 14.740.11.0872, ГК № 14.B37.21.1137, при поддержке РФФИ (проект № 12-08-00984-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8., 2843.2012.8.

Определение параметров интерфейсной трещины в пакете упругих слоев

Кармазин А. В.*, Сыромятников П. В., Диденко А. В.**, Диденко П. А.*****

***Германия, Висбаден, Технический университет*

*****Краснодар, Южный научный центр РАН*

*******Краснодар, Кубанский госуниверситет*

syromyatnikov_pv@mail.ru

В двумерной постановке рассматривается модель многослойного пакета упругих слоев с прямолинейной интерфейсной трещиной, залегающей между слоями. Слои могут быть как изотропными, так и анизотропными. В качестве алгоритмов решения задачи моделирования распространения волн в слое с трещиной (прямая задача) используется моделирование колебаний многослойных упругих сред в конечноэлементном пакете ABAQUS; численное решение необходимых граничных интегральных уравнений осуществляется методом Галеркина, а также методом дифференциальной факторизации и блочного элемента.

Решение граничных интегральных уравнений методом Галеркина основано на формализме расширенной блочной матрицы Грина для упругих сред с плоскими неоднородностями.

Для исследования гармонических колебаний неограниченных по горизонтальной координате структур в пакете ABAQUS реализован специальный алгоритм введения поглощающей неотражающей границы, необходимость разработки которого была связана с некорректностью «бесконечных» конечных элементов программы ABAQUS.

Поскольку рассматривается задача распространения волн в бесконечной по горизонтальной координате среде, необходимо выбрать условия на удаленных границах специальным образом, чтобы не допустить отражения волн. Исходный бесконечный слой моделируется областью с возрастающим по мере удаления от источника внутренним трением. Точность решения прямой задачи таким алгоритмом сравнивается с результатами, рассчитанными с помощью метода Галеркина, метода блочного элемента и метода дифференциальной факторизации. Идентификация параметров трещин осуществляется по отклику материала на действие гармонической нагрузки — изменению поверхностных перемещений. Обратная задача определения параметров трещины формулируется как задача оптимизации для функционала невязки от функций, зависящих от параметров трещины. В качестве алгоритмов решения оптимизационной задачи использованы методы локального или глобального поиска, генетические алгоритмы случайного глобального поиска. Для наилучшей сходимости решения обратной задачи исследовался выбор расположения и количества замеров, частоты колебаний, влияние уровня вносимых погрешностей измеренных данных — перемещений, собственных частот и параметров материалов на точность решения обратной задачи. В расчетах была достигнута относительная точность определения параметров трещины примерно в два раза меньше вносимых погрешностей измерений поверхностных смещений.

Расчет эволюции пластической деформации у вершины затупленной трещины

Карпинский Д. Н., Санников С. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
karp@math.rsu.ru

Оценка влияния формы вершины трещины на характеристики разрушения является актуальной задачей физики прочности и механики разрушения. Экспериментальные исследования показали, что чем острее трещина, тем ниже вязкость разрушения квазихрупких материалов. Важно отметить, что распределение упругих деформаций и напряжений у затупленной вершины квазихрупкой трещины отличается от распределения этих же величин у вершины острой трещины (формулы Вестергарда–Вильямса) только в области размером радиуса кривизны ρ вершины. Это положение соответствует принципу Сен-Венана для задач теории упругости. Пластическая деформация у вершины трещины вносит существенные изменения в форму вершины и распределение напряжений в ее окрестности по сравнению с хрупкой трещиной. В работе представлены результаты расчетов, которые дополняют предыдущие расчеты с учетом взаимного влияния пластической деформации и формы вершины трещины. Эти расчеты могут помочь прояснить условия протекания вязко – хрупкого перехода в нагруженном твердом теле.

В работе представлены расчеты только для эволюции распределений пластической деформации и коэффициентов интенсивности напряжения (КИН) $K_{I,II}$ у вершины трещины в кристалле. Результаты получены для плоской деформации и смешанного типа нагружения (моды I и II) при различных формах трещины. Пластическая деформация обусловлена движением дислокаций по плоскостям легкого скольжения при совместном действии тепловых флуктуаций и сдвигового напряжения. Расчет выполнен для различных плоскостей скола, систем легкого скольжения и соотношений внешних нагрузок растяжения и сдвига, а для оценки затупленности вершины использовалось соотношение $\rho \sim K_I^2$, где K_I содержит поправку, учитывающую влияние пластической деформации на КИН.

В результате расчета получены временные распределения пластической деформации, эффективного сдвигового напряжения и КИН при монотонном нагружении кристалла до заданного предела и дальнейшего процесса релаксации до установления равновесия распределений при постоянной величине внешней нагрузки. Обнаружены явления экранирования и антиэкранирования вершины трещины дислокациями в зависимости от системы скольжения кристалла. Отметим также, что T-напряжения вносят заметный вклад в процессы развития пластической деформации и КИН трещины. Численные расчеты выполнены для кристалла α-Fe.

Эффекты высших порядков в задаче о деформировании цилиндра из несжимаемого микрополярного материала

Карякин М. И., Майорова О. А., Пустовалова О. Г.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
o.a.mayorova@gmail.com

Новая волна интереса к моделям механики сплошных сред, основанных на гипотезе о кинематической независимости полей перемещений и поворотов, введенным в употребление братьями Коссера более ста лет назад, связана, прежде всего, с потребностями наномеханики в моделях упругого поведения объектов, учитывающих структуру материала.

Основной задачей исследования является нахождение способов воздействия на упругое тело, которые приводят к напряженно-деформированным состояниям, существенно различным в классической теории упругости и в теории сред Коссера. Такие ситуации могут служить, в частности, основой для создания экспериментальных методик идентификации параметров определяющих соотношений сред с микроструктурой и верификации используемых моделей.

В работе представлено несколько постановок задач о больших деформациях упругого цилиндра в рамках нелинейной микрополярной теории упругости. Задачи различаются вариантами полуобратного представления перемещений и функций удельной потенциальной энергии среды Коссера. Причины напряженно-деформированного состояния цилиндра могут быть обусловлены как внешними факторами (напряжение, кручение), так и внутренними дефектами — дислокациями и дисклинациями на оси цилиндра. Во всех случаях, полуобратное представление содержит две функции, подлежащие определению (радиальное перемещение и угол микроповорота частицы тела) и зависящие только от одного скалярного параметра — радиуса точки в недеформированном состоянии.

Для задачи о равновесии цилиндра с клиновой дисклинацией удалось построить модель несжимаемого нелинейно-упругого псевдоконтинуума Коссера, для которого образование дисклинации сопровождается макрозакручиванием цилиндра — эффектом, отсутствующим в классической нелинейной теории упругости. Важной особенностью предложенной модели является наличие кубических по компонентам меры изгибной деформации слагаемых в выражении удельной потенциальной энергии деформации.

В классической нелинейной теории упругости известен ряд примеров, демонстрирующих не только количественное, но и качественное влияние учета нелинейности на поведение материала или конструкции. К их числу относится эффект Пойнтинга — эффект второго порядка, состоящий в изменении длины кругового цилиндра при кручении. В работе рассмотрена задача об учете моментных напряжений на эффект Пойнтинга. Установлено, что учет микроструктуры в рамках теории Коссера может приводить не только к существенным количественным, но и к качественным изменениям в поведении скручиваемого цилиндра. С использованием асимптотических разложений определен класс моделей материалов, у которых знак эффекта Пойнтинга в случае больших углов поворотов существенно зависит от параметров среды Коссера.

Ковариантные представления 4-тока в полевых теориях механики континуума

Ковалев В. А.[*], **Радаев Ю. Н.**[**]
[*]*Москва, Московский городской университет управления Правительства Москвы*
[**]*Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*
vlad_koval@mail.ru

Работа посвящена применению понятий, методов и алгоритмов группового анализа систем дифференциальных уравнений в частных производных к проблеме регулярного построения ковариантных 4-токов в теориях механики сплошных сред, допускающих ковариантную теоретико-полевую формулировку. Предполагается, что плотность действия, вообще говоря, зависит от градиентов полевых переменных порядка выше первого. Отметим, что токи необходимы для формулировки основных физических законов сохранения (в том числе в виде интегралов по контуру или поверхности, не зависящих от пути интегрирования). Последние выступают как достаточно удобное аналитическое средство для решения большого количества прикладных задач механики континуума, но только тогда, когда их постановка возможна в рамках теорий, допускающих физическое полевое представление, исходя из интегрального функционала действия и принципа наименьшего действия.

В том случае, когда функционал действия инвариантен относительно группы преобразований пространственно-временных («ковариантных») координат X^β и физических полевых переменных φ^k, имеет место соотношение

$$\partial_\beta(-J^\beta) = \mathcal{Q}^j\mathcal{E}_j(\mathcal{L}),$$

где $\mathcal{L}$ — «естественная» плотность Лагранжиана, $\mathcal{E}_j$ — дифференциальный оператор Эйлера–Лагранжа (соответствующий полевой компоненте с индексом j), J^β — ток Нетер, $\mathcal{Q}^j$ — характеристика закона сохранения (в случае трансляционных симметрий речь идет о сохранении энергии–импульса поля). При выполнении уравнений поля

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = 0$$

будет справедлив дивергентный закон сохранения

$$\partial_\beta J^\beta = 0.$$

Токи позволяют также указать точно сохраняющиеся инварианты поля. Вывод явных формул для 4-токов основывается на одном дифференциальном тождестве, включающем инфинитезимальные генераторы однопараметрической группы симметрий вариационного функционала действия. Это ковариантное тождество играет центральную роль в теории вариационных симметрий интегральных функционалов. В терминах ковариантного формализма приводятся формулы для компонент тензора энергии–импульса поля, который составляется из токов, соответствующих группам трансляций вдоль «прямолинейных» образующих плоского пространства–времени.

Ковариантная форма уравнений совместности на поверхностях сильного разрыва в микрополярном термоупругом континууме: гиперболическая теория

Ковалев В. А.*, Радаев Ю. Н.**

**Москва, Московский городской университет управления Правительства Москвы*

***Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*

radayev@ipmnet.ru

Работа посвящена выводу ковариантных уравнений совместности для сильных разрывов деформации, микродеформации и температурного смещения на соответствующих волновых поверхностях в нелинейных микрополярных термоупругих средах.

Теплопроводность в твердых деформируемых телах, обладающих дополнительными степенями свободы, проявляющимися, в частности, как совместные локальные вращения элементов, составляющих тело, представляет собой важную задачу современной теории и механики сплошных сред.

Настоящее исследование основано на представлениях о волновом механизме транспорта тепла и гиперболической теории термоупругости второго типа (GNII). В качестве термической переменной выступает температурное смещение. Репер локальных поворотов, ассоциированный с элементом микрополярного континуума, предполагается «нежестким». С целью полевой формулировки теории указана естественная плотность термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего термоупругого действия.

Опираясь на теоретико-полевую формулировку, приводится вывод ковариантных уравнений термоупругого поля как уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала действия. Уравнения поля гиперболической микрополярной термоупругости позволяют получить уравнение транспорта тепла гиперболического аналитического типа. Специальная форма первой вариации интегрального функционала с переменной областью интегрирования и возможными сильными разрывами физических полей применяется для определения ковариантных условий совместности сильных разрывов деформации и температурного смещения при переходе через волновые поверхности. Указанные условия содержат 4-тензоры напряжений Пиола–Кирхгофа и энергии–импульса. Поэтому вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия в случае плоского 4-пространства–времени применяются для построения канонического тензора энергии–импульса микрополярного термоупругого поля. Сформулирован закон сохранения (в четырехмерной ковариантной и в форме трехмерных уравнений, характерных для механики континуума), соответствующий трансляциям вдоль прямолинейных образующих плоского четырехмерного пространства–времени. Трехмерные условия на поверхности сильного разрыва, общепринятые в механике континуума, без труда получаются из 4-ковариантных пространственно–временных форм.

Раздувание кривой высокоэластичной трубки. Теория и эксперимент

Колесников А. М., Попов А. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Alexei.M.Kolesnikov@gmail.com

Кривой трубкой назовём оболочку в виде сектора тора с замкнутым поперечным сечением. В линейной теории известно, что кривая трубка с круглым поперечным сечением под действием внутреннего давления не изменяет своей кривизны при малых деформациях. Это подтверждено экспериментально для изотропных материалов. Трубка с эллиптическим сечением меняет свою кривизну под действием внутреннего давления. Если полуось в плоскости изгиба меньше, чем полуось в перпендикулярной плоскости, то под давлением кривизна трубки увеличивается. В обратном случае кривизна увеличивается. Это явление широко используется в манометрических трубках.

Задача о раздувании кривой трубки является частным случаем чистого изгиба кривой трубки внешними изгибающими моментами по концам и подверженной равномерному давлению изнутри. Общий подход к решению задачи чистого изгиба дан в работах Зубова Л. М. и Либаи А. и Симмондса Дж. Г. Подход основан на разложении деформации на две части: плоскую деформацию поперечного сечения и поворот каждого сечения на постоянный относительный угол. Предлагаемый метод позволяет свести задачу статики оболочки к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Кривизна деформированной трубки задается как параметр, а изгибающий момент определяется после решения задачи. В работе рассматривается тонкостенная кривая трубка из нелинейно упругого материала, нагруженная только внутренним давлением. Малая толщина стенок позволяет пренебрегать их изгибной жёстостью и использовать безмоментную теорию нелинейно упругих оболочек. Полученная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается численно методом пристрелки. На каждом шаге пристрелки интегрирование задачи Коши осуществляется оригинальным методом, основанном на конечно-разностном представлении и методе Рунге–Кутты с контролем погрешности на шаге. Кривизна деформированной трубки определяется методом линеаризации на основе решений краевых задач из условия равенства нулю изгибающего момента в поперечном сечении. Рассмотрены трубки кругового и эллиптических поперечных сечений, изготовленных из неогуковского материала. При малых деформациях решение нелинейной задачи согласуется с линейной теорией. Изменение кривизны трубки кругового сечения оказывается пренебрежимо мало по сравнению с изменением кривизны трубки эллиптического сечения даже при малой разнице полуосей. Однако, начиная с некоторого значения давления, поведение трубок меняется и уменьшение кривизны происходит примерно с одинаковой интенсивностью не зависимо от начальной формы поперечного сечения. Теоретические предсказания подтверждаются экспериментальными данными раздувания кривой высокоэластичной трубки.

Исследование поддержано Президентом РФ (МК-439.2011.1), минобрнауки РФ (П596, 14.A18.21.0389), РФФИ (12-01-00038-а, 12-01-31431-мол-а).

Анизотропия упругих свойств трехкомпонентных антифрикционных композитов с ориентированными неизометричными включениями

Колесников В. И.[*], Бардушкин В. В.[**], Колесников И. В.[*], Сычев А. П.[***], Сычев А. А.[***], Яковлев В. Б.[**]

[*]*Ростов-на-Дону, Ростовский гос. университет путей сообщения*

[**]*Москва, Московский институт электронной техники*

[***]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

alexsis1983@gmail.com

Матричные композиты находят широкое применение в узлах трения и сопряжений машин и механизмов. Однако использование двухкомпонентных материалов антифрикционного назначения в тяжелонагруженных узлах трения ограничено ввиду их малой удельной прочности и несущей способности. Поэтому для таких узлов целесообразно создавать многокомпонентные композиты, исходя из синтеза конструкционного материала с антифрикционным. Наряду с экспериментальными подходами, широко применяемыми для решения этой задачи, важную роль играют теоретические методы моделирования и расчета физико-механических (в частности, упругих) свойств создаваемых композитов. Такие модели дают возможность уже на стадии проектирования материалов прогнозировать влияние концентрации, геометрических и механических параметров структурных элементов на физико-механические свойства композитов.

На практике армирование антифрикционных композитных материалов часто производится неизометричными включениями. Так, в узлах трибосопряжений (например, в скользунах боковых опор электровоза) применяются композиты, армированные тканями, у которых по основе и по утку используются различные материалы. Широкое распространение в тяжелонагруженных узлах трения получили композиции на основе полимерного связующего и арматуры — волокон из политетрафторэтилена или графита, ортогональных стекло- или углеволокнам. Подобное армирование приводит к появлению анизотропии физико-механических свойств создаваемых композитов. Эта анизотропия может быть усилена или ослаблена в зависимости от требований, предъявляемых к материалу.

В работе решается задача прогнозирования и расчета эффективных упругих характеристик трехкомпонентных матричных композитов с эллипсоидальными включениями, ориентированными параллельно некоторой плоскости в двух взаимно перпендикулярных направлениях. При этом материал включений, расположенных в одном из указанных направлений, отличен от материала включений в перпендикулярном направлении. Моделирование опирается на обобщенное сингулярное приближение теории случайных полей. Получено удобное для численных расчетов (методом самосогласования) соотношение для прогнозирования значений компонент тензора эффективных модулей упругости, учитывающее влияние формы, ориентации и концентрации изотропных компонентов рассматриваемых трехкомпонентных композитов.

Для антифрикционных композитов на основе связующего ЭПАФ, армированного взаимно перпендикулярными волокнами из политетрафторэтилена и бесщелочного стекла, проведены модельные расчеты параметров упругой анизотропии, учитывающие изменения концентрации изотропных компонентов.

Исследование прочностных характеристик арматурных сталей

Косенко Е. Е.[*], Косенко В. В.[*], Черпаков А. В.[**]
[*]*Ростов-на-Дону, РГСУ*
[**]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
alex837@yandex.ru

Определение прочностных свойств железобетонных конструкций, каким-либо одним методом невозможно, поэтому при расчетах, помимо общих факторов, влияющих на образцы, используются вероятностные методы с применением расчетных характеристик арматуры и бетона. В основе таких расчетов лежит изменчивость свойств материалов и обобщается изменчивость свойств остальных факторов. Поскольку значительный запас прочности железобетонных конструкций определяется свойствами материалов, заложенные ещё на стадии производства, то именно эти свойства приобретают в итоге количественное расчетное значение.

Ранее проведенные работы показали, что при исследовании механических характеристик арматурных сталей обычно руководствуются показателями натурных образцов. Значения механических характеристик определены в сечении арматурных сталей классов А500С и Ат800, с использованием стандартных методов контроля (измерение твердости по Виккерсу) и методом ударного вдавливания индентора. Эти исследования показали, что у образцов арматуры, находящихся в состоянии поставки и упрочненных одноосным растяжением до различных уровней выше значений предела текучести (уровни упрочнения выражены коэффициентом упрочнения Ky, представляющим собой отношение действующего напряжения к физическому или условному пределу текучести) отмечается значительное рассеивание значений твердости, что объясняется неоднородной структурой сечения арматуры классов А500С и Ат800.

Проведен расчет предельных уровней упрочнения одноосным растяжением, исходя из условия вязкого разрушения и соответствующие им напряжения для исследуемых классов арматуры. Анализ проведенных исследований показал, что при напряжениях, превышающих значения предела текучести, наиболее эффективно использовать термомеханически упрочненные арматурные стали классов А500С и Ат800 из–за неизменной доли вязкой составляющей в изломе практически до значений предела прочности.

Эксперименты показали возможность применения арматурной стали при напряжениях превышающих значения предела текучести, однако следует учитывать, что при проведении экспериментов использовались образцы длиной 0,2 м в соответствии с ГОСТом. При переходе на стержни длиной 6 м, применяемые при изготовлении железобетонных конструкций, большое влияние оказывают геометрические размеры арматурных профилей, а именно диаметр арматуры, значения которого имеют значительное рассеивание. По причине различия диаметров по длине арматурных стержней весь эффект упрочнения одноосным растяжением может ограничиться областями с наименьшими значениями диаметра.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 12-08-90815-мол_рф_нр, 12-08-31306 мол_а, 12-08-31397 мол_а).

Зависимость характера разрушения и прочности хрупких тел при их сжатии от контактного трения и ориентации начальной трещины

Костандов Ю. А., Медведев В. С.

Симферополь, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

ipgd@yandex.ru

Проведено исследование влияния ориентации начальной трещины на характер разрушения и прочность содержащих ее образцов, изготовленных из песчано-цементной смеси, при их одноосном сжатии. Образцы представляли собой прямоугольные параллелепипеды размером $\{x \cdot y \cdot z\} = \{a \cdot h \cdot b\} = \{55 \cdot 55 \cdot 20\}$ мм с центральным сквозным разрезом длиной 18 мм и шириной 0,2 мм, имитирующем начальную трещину и ориентированным под углами α, равными $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ к направлению действующей нагрузки. Нагружение образцов проводилось при непосредственном контакте нагружаемых торцов образцов со стальными плитами пресса, что обеспечивало коэффициент контактного трения $f_S = 0,24$, а когда между нагружаемыми торцами образцов и плитами пресса размещались фторопластовые пластины, то значение коэффициент контактного трения снижалось $f_F = 0,035$.

Проводились видеорегистрация процесса разрушения и анализ образовавшихся в разрушенных образцах трещин и отдельностей, в результате которых можно сделать два основных вывода относительно разрушения образцов с начальным разрезом, имитирующем трещину: 1) увеличение трения между контактирующими поверхностями образцов и плитами пресса приводит к развитию диагонального разрушения образцов в сечении YOZ; 2) разрушение начинается с образования трещин между вершинами разреза в областях наиболее удаленными от нагружаемых граней образца или углов таких граней, которые будем называть противоположными.

Первый вывод можно объяснить тем, что при наличии трения между контактирующими поверхностями затрудняется поперечная деформация образца в плоскости XOZ вблизи нагруженных граней. Вместе с этим проявляется известная зависимость призменной прочности образцов от соотношения их высоты и ширины, состоящая в том, что прочность высокого образца ниже прочности широкого. Это приводит к тому, что разрушить образец по диагональным или близким к ним плоскостям в сечении YOZ легче, чем в сечении XOY.

Объяснение второго вывода основано на том, что трещина развивается из угловой точки образца по траектории максимальных эффективных касательных напряжений с учетом зависимости призменной прочности образца от соотношения его высоты и ширины.

Предложенное объяснение того, что при одноосном сжатии разрушение образцов с начальным разрезом начинается с образования трещин между вершинами разреза и противоположными гранями образцов или их углов, находится в полном соответствии с экспериментальными данными. Их отличие от результатов, полученных в других работах численным моделированием для углов ориентации трещины $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/3$, обусловлено, по-видимому, в первую очередь отсутствием в используемой численной модели зависимости призменной прочности образцов от соотношения их высоты и ширины.

Моделирование распределения неантагонистических популяций на пространственно-неоднородном ареале

Кругликов М. Г., Цибулин В. Г.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
mkruglicov@gmail.com

Процесс распространения неантагонистических популяций в кольцевой области моделируется на основе системы нелинейных параболических уравнений и метода прямых. Проанализировано формирование стационарных распределений плотностей популяций в случае коэффициентов линейного роста и функции ресурса, зависящих от пространственной координаты, и указаны соотношения для параметров, при которых система имеет непрерывное семейство стационарных решений. Для пространственно-периодических коэффициентов роста найдена область значений параметров, при которых наблюдается сосуществование популяций.

В математической биологии уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера и его обобщения применяются для описания динамики популяций на однородных ареалах с учетом ограниченного ресурса. В последнее время растет интерес к изучению эффектов неоднородности жизненных условий, влияющих на выживание популяций и способствующих сосуществованию различных видов.

Целью работы является моделирование формирования стационарных распределений неантагонистических близкородственных популяций на неоднородном ареале. На кольце рассматривается система параболических уравнений с нелинейностью логистического типа и коэффициентами линейного роста, зависящими от пространственной переменной. В численном эксперименте проанализировано формирование стационарных распределений плотностей близкородственных популяций в зависимости от параметров линейного роста при пространственной неоднородности ресурса.

Математическая модель роста и миграции близкородственных популяций описывается системой нелинейных уравнений параболического типа относительно плотностей $w_i = w_i(x,t), \quad i = 1,\ldots,M$:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x} + \eta_i w_i f, \quad q_i = -k_i \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad f = 1 - \frac{1}{P}\sum_{j=1}^{M} w_j,$$

где коэффициенты диффузии k_i, роста η_i и обобщенного ресурса P зависят от x.

Уравнения рассматриваются в кольцевой области $x \in [0,a]$, условия периодичности имеют вид:

$$w_i(0,t) = w_i(a,t), \quad k_i(0)\frac{\partial w_i(0,t)}{\partial x} = k_i(a)\frac{\partial w_i(a,t)}{\partial x}, \quad i = 1,\ldots,M,$$

причем в начальный момент времени заданы распределения популяций

$$w_i|_{t=0} = w_{i0}(x), \quad i = 1,\ldots,M.$$

Построение теории канатов двойной свивки. Задача растяжения–кручения

Курбатова Н. В., Устинов Ю. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
nvk-ru@yandex.ru

Канаты и тросы применяются в качестве гибких механических связей для перемещения грузов, оборудования, элементов конструкций. Прочность канатов существенно зависит от способа плетения, профиля поперечного сечения проволоки, из которых они свиваются и обусловливается условиями их эксплуатации. Наибольшее распространение получили круглые стальные канаты одинарной и двойной свивок.

У канатов одинарной свивки волокна располагаются по винтовым линиям вокруг центрального прямолинейного волокна в несколько слоев. Канаты двойной свивки плетутся из прядей, каждая отдельная прядь является канатом одинарной свивки, центральное волокно пряди в этом случае располагается по винтовой линии.

В настоящей работе авторская теория канатов одинарной свивки развивается применительно к новым объектам – канатам двойной свивки.

Моделирование напряженно-деформированного состояния каната и вычисление его жёсткостей опирается на теорию волокнистых композитов, уравнения сплошной упругой среды с винтовой анизотропией и решение Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией. При достаточно большом количестве слоев намотки, согласно теории усреднения, такой материал в каждой точке цилиндра можно рассматривать как локально трансверсально-изотропный, с главной осью симметрии направленной вдоль касательной к винтовым линиям. Упругие характеристики такого материалаЁ– эффективные модули, а характеристики каната получаются в результате предельного перехода аналитических выражений эффективных модулей биматериального композита к случаю материала в отсутствии заполнителя.

Связь между интегральными характеристиками напряженно-деформированного состояния: продольной силой P_z, крутящим моментом M_z, продольной деформацией ε и относительным углом закручивания φ строится на основе решений Сен-Венана и может быть представлена в виде системы:

$$\begin{cases} d_{11}\varepsilon + d_{12}\varphi = P_z, \\ d_{12}\varepsilon + d_{22}\varphi = M_z, \end{cases}$$

здесь $d_{11},\ d_{22}$ — характеристика жёсткости на растяжение; d_{12} — на кручение. Из системы следует, что продольная деформация порождает кручение, а крутящий момент помимо кручения — продольную деформацию.

В работе построены определяющие соотношения каната двойной свивки и получены коэффициенты жёсткостей такого каната на основе решений Сен-Венана.

Влияние магнитных граничных условий на динамические свойсвтва электромагнитоупругого слоя

Леви М. О.
Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН
moderx@mail.ru

Рассматривается динамическая связанная смешанная задача о сдвиговых гармонических колебаниях электромагнитоупругой полосы при различных электрических и магнитных условиях на ее гранях. Колебания инициируются потенциалом $\varphi_0 e^{-i\omega t}$, приложенным к находящемуся на поверхности полосы электроду, занимающего область $|x_1| \leq a$. Полоса выполнена из материала ромбической симметрии класса 2mm. Изучаются колебания слоя $|\,x_1|\,,\ |\,x_3\,| \leq \infty;\ \ 0 \leq x_2 \leq h$, $u_n = u_n(x_1, x_2)$; нижняя грань которого жестко защемлена, верхняя грань свободна от механических напряжений. Колебания в слое инициируются осциллирующей нагрузкой $q(x_1, t) = q_0(x_1)e^{-i\omega t}$ распределенной в области $|x_1| \leq a$ ($q = \{q_3, q_4, q_5\}$, здесь q_3 – компонента вектора механической нагрузки, q_4 – электрическая нагрузка, q_5 – магнитная нагрузка). Вне области $|x_1| \leq a$ поверхность свободна от механических напряжений. Колебания электромагнитоупругой среды описываются уравнениями движения и уравнениями Максвелла:$\nabla \cdot \boldsymbol{T} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\nabla \cdot D = 0$, $\nabla \cdot B = 0$. Компоненты уравнений в матричном представлении имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & \\ & -e \\ & -f \\ e^T & \\ & \varepsilon \\ & g \\ f^T & \\ & g \\ & \mu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{S} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

здесь $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$ — тензоры напряжений и деформаций второго порядка, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряжения электрического и магнитного полей, c, e, f, ϵ, μ, g — упругие, пьезоэлектрические, пьезомагнитные, диэлектрические, магнитной проницаемости и магнитоэлектрические коэффициенты соответственно. Колебания предполагаются установившимися, происходящими по гармоническому закону, все функции представляются в виде $F = F_0 e^{-i\omega t}$.

Методами операционного исчисления задача сведена к интегральному уравнению относительно неизвестной плотности распределения заряда. Детально исследованы свойства символа ядра интегрального оператора, в частности, влияние различных магнитных и электрических условий на верхней и нижней грани слоя на его дисперсионные свойства.

Конечно-элементный анализ пространственных колебаний горизонтальных цилиндрических оболочек с жидкостью

Лекомцев С. В.[*], **Бочкарёв С. А.**[*], **Матвеенко В. П.**[*], **Мурашкин Е. В.**[**]
[*]*Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН*
[**]*Владивосток, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН*
lekomtsev@icmm.ru

Работа посвящена численному анализу собственных колебаний горизонтально ориентированных цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных неподвижной жидкостью. Поиск решения задачи осуществлен в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов. Сжимаемая невязкая жидкость рассмотрена в рамках потенциальной теории, соответствующее волновое уравнение которой сведено к системе уравнений с помощью метода Бубнова–Галёркина. Криволинейная поверхность оболочки аппроксимирована совокупностью плоских элементов, одновременно воспринимающих как мембранные, так и изгибающие силы. Для описания движения упругого тела использован вариационный принцип возможных перемещений, в который включено линеаризованное уравнение Бернулли для вычисления гидродинамического давления, действующего со стороны жидкости на упругую конструкцию. Решение задачи сведено к вычислению собственных чисел связанной системы уравнений. Проверка достоверности разработанного кончено-элементного алгоритма осуществлена в результате сравнения полученных результатов с известными экспериментальными данными и данными других теоретических подходов, в которых, в отличие от настоящей работы, не предусмотрена возможность учёта сжимаемости жидкости.

В работе представлено исследование собственных колебаний горизонтально ориентированных цилиндрических оболочек при разном уровне заполнения жидкостью и различных комбинациях граничных условий, задаваемых на торцах. Установлено, что для рассматриваемых конфигураций существенно изменяются формы колебаний в зависимости от положения свободной поверхности.

Показано, что при определенном уровне жидкости возможно существование нескольких режимов колебаний с одинаковым числом полуволн в окружном и меридиональном направлении, которым соответствуют разные частоты в спектре. Выявлено, что влияние на динамические характеристики системы оказывает не только эквивалентная присоединенная масса жидкой среды, но и гидроупругое взаимодействие на смоченной поверхности, в результате чего даже незначительный объем жидкости приводит к снижению собственных частот колебаний горизонтально ориентированных цилиндрических оболочек.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00323-а) и УрО РАН (проект № 12-С-1-1015).

Моделирование распространения волн для гибридных сред

Литвинчук С. Ю., Белов А. А., Пазин В. П.
Нижний Новгород, НИИ механики Нижегородского гос. университета им. Н. И. Лобачевского
litvinchuk@mech.unn.ru

В рамках многомасштабного моделирования для учета дискретной структуры материала некоторой области применяется сшивание дискретной и континуальной областей. При этом вводится граница между областями, которая должна пропускать волны, падающие из дискретной области, не вызывая отражений, не существующих в реальности. Для изучения возможности увеличения диапазона частот колебаний, доходящих до границы и не вызывающих ложных отражений, применяется модель сплошной среды с помощью уравнений движения градиентного континуума. Метод сшивания дискретной и континуальной областей ориентирован на метод граничных элементов.

Приведено исследование по отражению волн на границе дискретных систем, а также развиты численные подходы для решения задач, которые становятся актуальными в исследованиях динамического деформирования различных материалов. В работе продемонстрированы возможности классического континуума. С этой целью изучены отражения плоских гармонических волн на границе одномерной цепочки и континуума, а также квадратной решетки и континуума. Для выявления специфики отражения волн в анизотропной квадратной решетке рассмотрены задачи об отражении от границы решетки с различными граничными условиями, а также от границы с другой решеткой. Рассмотрен метод сшивания областей, в котором точечный характер частиц в решетке не вызывает особенностей в решении уравнений движения для классического континуума. Показано, что в то время как классический континуум может служить неотражающей границей на низких частотах, на высоких частотах он не обладает такой способностью. Градиентный континуум рассматривается как альтернатива классическому. Исследование показало, что градиентный континуум обеспечивает безотражательную границу для дискретной области на всем диапазоне частот, хотя соответствующий подбор параметров является нетривиальной задачей.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы ГК №14.740.11.1427, при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00698-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8., 2843.2012.8.

Эффективный приближенный метод построения связанных полей многоэлектродных структур

Лыжов В. А.*, Тукодова О. М.*, Ворович Е. И., Агаян К. Л.*****

**Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

***Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

****Армения, Ереван, Институт механики Армянской Академии наук*

maggod-rnd@yandex.ru

Развитие элементной базы акустоэлектроники, проблема создания и использования современных искусственных композитных материалов, работающих в экстремальных условиях под действием постоянных динамических нагрузок, предъявляют повышенные требования к применяемым методам расчета и математическим моделям. При этом разработка точных методов решения краевых задач о колебаниях неоднородной пьезоактивной подложки при возбуждении планарными многоэлектродными системами сопряжено с высокими вычислительными затратами. В ряде случаев можно предложить эффективный метод построения приближенного решения указанной задачи на основании решения вспомогательной задачи для небольшого количества электродов и закономерностей распределения полей в многоэлектродных системах. Такая методика позволяет существенно уменьшить время построения решения и учесть как краевые эффекты, так и распределение поверхностных зарядов под внутренними электродами.

Предлагаемая схема расчета заключается в представлении действительного распределения поверхностных зарядов под электродами в виде распределения под несколькими крайними электродами и некоторой периодической системой между ними. Анализ точных решений для различных электродных систем показал, что учет 3-х крайних электродов позволяет достаточно хорошо описать краевые эффекты. Также допускается, что форма распределения зарядов под внутренними электродами совпадает с распределением под центральным электродом. Форма распределения зарядов под всей электродной системой должна совпадать с некоторой весовой функцией, вид которой определяется из решения контактной задачи для одного электрода. Ошибка расчета по такой упрощенной схеме обусловлена в основном несимметричностью влияния электродной системы на нецентральные электроды. Количество неизвестных функций при таком подходе редуцируется с N, где N — число поверхностных электродов, до 7. При этом вычислительные затраты на построение решения могут быть уменьшены в десятки раз в зависимости от количества электродов в моделируемой системе.

В рамках представленного метода может быть учтена сложная структура пьезоактивной подложки, а также наличие начальных напряжений в поверхностных или внутренних слоях подложки. Ошибка моделирования электрических и механических полей в среде при этом не превышает нескольких процентов по сравнению с точным решением.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президиума РАН № 25 и РФФИ (12-01-00811, 12-08-01040).

Об идентификации характеристик неоднородной пороупругой колонны

Ляпин А. А., Козин С. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
alexlpn@hotmail.com

В настоящей работе основное внимание уделено модели неоднородной пороупругости, для которой коэффициенты являются функциями координат. При этом основной интерес представляет вопрос определения некоторых коэффициентов по данным частотного зондирования путем решения обратных коэффициентных задач. В качестве примера была реализована задача о реконструкции характеристик неоднородной пороупругой колонны. В такой постановке полученные результаты могут быть применены для решения задач о реконструкции костной ткани или пороупругого слоя в режиме толщинных колебаний. Для описания поведения системы была использована модель среды Био, в которой неизвестными являются компоненты вектора смещений и давление жидкости в порах, а также учитываются высокочастотные слагаемые, что делает многие параметры зависимыми от частоты. Данная модель является наиболее реально отражающей поведение пороупругой среды, насыщенной жидкостью.

Колонна жестко защемлена на нижнем торце и подвергается нагружению продольной силой в режиме установившихся колебаний на верхнем. Решение прямой задачи отыскивалось численно при помощи метода стрельбы. Приведены амплитудно-частотные характеристики задачи, а также результаты сравнений решения для пороупругого и чисто упругого стержней. В дополнение к тому, что наличие диссипации в пороупругой среде ограничивает амплитуду функций в собственных частотах, величины этих собственных частот также смещаются в сравнении с упругой средой. В работе выведено операторное соотношение для общего случая анизотропных пороупругих сред, которое позволяет строить интегральные уравнения для определения любых параметров системы. Для поставленной задачи данное соотношение было упрощено путем введения соответствующих гипотез, а решение обратной задачи сведено к последовательности решений интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода методом Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации.

Для различных законов неоднородности упругого модуля и модуля Био приведены результаты реконструкции в разных частотных диапазонах. Результаты моделирования показали значительное влияние величины параметра пористости на амплитудно-частотные характеристики задачи, что так же сказывается на результатах реконструкции. В дополнение, точность восстановления характеристик заметно ухудшается на верхнем конце колонны, что может быть следствием некоторых свойств ядер интегральных уравнений.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (10-01-00194) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Сравнение результатов расчета обтекания профилей, полученных при помощи различных численных схем метода вихревых элементов

Макарова М. Е., Марчевский И. К.
Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана
masha-mak@mail.ru

Бессеточный лагранжев метод вихревых элементов позволяет эффективно моделировать внешнее обтекание профилей потоком несжимаемой среды и определять действующие на профиль аэрогидродинамические нагрузки. При этом вычислительные затраты во многих случаях оказываются существенно ниже, чем при использовании сеточных методов, в то время как точности получаемых результатов достаточно для инженерных приложений.

В работе произведено сравнение результатов решения задач о расчете обтекания профиля, полученных численно с помощью классического и модифицированного метода вихревых элементов, а также аналитически методом конформных отображений. Рассмотрены случаи обтекания профилей простых форм, для которых известен характер поведения решения в угловых точках или можно построить аналитическое решение.

Для нахождения интенсивности вихревого слоя на поверхности профиля в методе вихревых элементов используется условие равенства нулю предельного значения вектора скорости $\vec{v}_-$ на профиле. Это условие обеспечивается обнулением нормальной либо касательной компоненты вектора $\vec{v}_-$. Обнуление нормальной компоненты приводит к необходимости решения сингулярного интегрального уравнения, такой подход сокращенно назван НМВЭ. Обнуление касательной компоненты приводит к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с ограниченным (в случае гладкого профиля) ядром. Этот подход сокращенно назван КМВЭ.

Результаты расчетов показывают, что при моделировании обтекания эллипса с большим эксцентриситетом, а также профилей с острой кромкой (профили Жуковского), модифицированный метод позволяет получить существенно более точное решение, при этом число обусловленности матрицы системы, аппроксимирующей соответствующее интегральное уравнение, значительно меньше, чем при использовании классического подхода. Основная погрешность решения, полученного с помощью метода НМВЭ, сосредоточена у острой кромки или изолированных точечных вихревых особенностей, находящихся во внешнем течении.

При моделировании обтекания гладких профилей (окружность, эллипс с малым эксцентриситетом), когда вблизи профиля вихревые особенности отсутствуют, решения, полученные обоими методами, практически совпадают.

В случае неравномерной расчетной схемы или при расположении вихревой особенности вблизи границы обтекаемого профиля метод КМВЭ позволяет достичь большей по сравнению с НМВЭ точности и получить качественно правильное решение при меньшем количестве элементов расчетной схемы. Таким образом, модифицированный метод КМВЭ точнее обычного.

Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими функциями в исходных данных

Манжиров А. В.
Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
manzh@inbox.ru

[4] Предлагается метод решения систем смешанных интегральных уравнений

$$c(t)m_i(x)q_i(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V})\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{1} K_{ij}(x,\xi)q_j(\xi,t)\,d\xi = \delta_i(t) + \alpha_i(t)x - g_i(x)$$

с дополнительными условиями вида

$$\int_{-1}^{1} q_i(\xi,t)\,d\xi = P_i(t), \quad \int_{-1}^{1} q_i(\xi,t)\xi\,d\xi = M_i(t) \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

где $q_i(x,t)$, $\delta_i(t)$, $\alpha_i(t)$ — искомые функции; $P_i(t)$, $M_i(t)$, $c(t)$ — заданные функции времени; $m_i(x)$ и $g_i(x)$ — заданные быстро осциллирующие функции; $K_{ij}(x,\xi)$ — заданные функции двух переменных интегрируемые со своей второй степенью в квадрате $\{|x| \le 1, |\xi| \le 1\}$; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор; $\mathbf{V}$ — оператор Вольтерра по времени, $|x| \in [-1,1]$.

Такие уравнения возникают при рассмотрении контактных задач для вязкоупругих стареющих оснований с неоднородными и шероховатыми покрытиями и системы штампов со сложной формой подошв, причем $q_i(x,t)$ имеет смысл безразмерных контактных давлений, $\delta_i(t)$, $\alpha_i(t)$ — осадок и углов поворота штампов, $P_i(t)$, $M_i(t)$ — вдавливающих сил и поворачивающих штампы моментов, функции $K_{ij}(x,\xi)$ определены ядром плоской контактной задачи; $g_i(x)$ — заданная быстро осциллирующая функция, описывающая форму подошвы гладких жестких штампов; $m_i(x)$ — заданная быстро осциллирующая функция, описывающая шероховатость или поверхностную неоднородность слоистых оснований.

Такую систему уравнений и дополнительных условий можно в функциональном векторном пространстве записать в виде смешанного интегрального уравнения (с матричным ядром и матричным коэффициентом при внеинтегральном члене) и векторными дополнительными условиями.

Предлагаемый проекционный метод позволяет строить решения сложных задач множественного контакта в форме с выделенными в явном виде быстро осциллирующими функциями, что позволяет эффективно учитывать его тонкую структуру. Рассмотрены различные варианты математической постановки задачи. В качестве примера решена задача о взаимодействии произвольной системы жестких гладких штампов с вязкоупругим слоистым основанием, имеющим покрытие с произвольным видом неоднородности. Для всех вариантов постановки задачи получены аналитические решения. Сформулированы выводы о качественной оценке полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00991), Программы № 12 ОЭММПУ РАН и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-3288.2010.1.

Влияние газообмена на формирование пузырька в вязкоупругой прослойке стеклофазы при спекании керамики.

Мартынов Р. Э.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
sintanial@gmail.com

Известно, что при спекании керамики в жидкой фазе (стеклофаза), заполняющей пространство между крупинками порошка при высокой температуре, образуются несплошности (пузырьки). Обычно стеклофаза образует межзеренную пленку толщиной ≈ 10 нм, в которой критический размер пузырька превышает данный размер. По этой причине пузырек всегда образуется на границе кристаллит–стеклофаза и подчиняется условиям зарождения.

Исследование условий зарождения несплошностей связано с соотношением двух процессов: 1) кинетики проникания примесей, снижающих адгезионную прочность границы стеклофаза–кристаллит, и 2) скоростью удаления соседних кристаллитов друг от друга. При этом необходимо учитывать зависимость поверхностной энергии стеклофазы и кристаллита от концентрации растворенного газа. Для определения условий образования пузырьков в стеклофазе важна оценка кинетики насыщения газом слоя стеклофазы в процессе спекания керамики до величины концентрации растворенного газа, которая заметно влияет на условие зарождения пузырьков. Обычно рассмотривают процесс газонасыщения стеклофазы, состоящий из двух стадий. На первой стадии (от 1500K до 1000K) стеклофаза описывается как слой вязкой жидкости переменной толщины, меняющейся за счет расхождения пары зерен перпендикулярно слою при остывании.

В настоящем сообщении представлены результаты расчета второго этапа роста газового пузырька при остывании образца керамики от 1000K до температуры стеклования 478K. В данном интервале температур стекломасса прослойки представлена в виде вязкоупругого тела. Будем предполагать, что толщина слоя стеклорасплава в начальный момент данной стадии расчета равна толщине слоя по окончании первого этапа охлаждения, тогда задача решается с учетом напряжения дилатации, которое обусловлено внутренними термовязкоупругими напряжениями. Результаты расчетов показали, что кинетика насыщения примесью границы раздела двух материалов определяет её когезионные свойства. Поскольку существенно меняются внутренние напряжения в прослойке стеклофазы, то и условия формирования газового пузырька на низкотемпературном этапе остывания керамического образца значительно отличаются от высокотемпературного этапа.

Расчеты показали, что концентрация газа возле пузырька становится неоднородной. Происходит это за счет внутренних напряжений, возникающих при остывании. Также возле пузырька с течением времени концентрация постепенно падает, а возле мениска, наоборот, начинает расти. Температура, так же как и на первом этапе, возрастает от мениска до пузырька вдоль стеклофазы и максимальна возле пузырька.

Автор выражает благодарность профессору Карпинскому Д. Н. за постановку задачи и внимание к работе.

Задача кручения растущего призматического тела с сечением в форме лемнискаты Бута

Михин М. Н.
Кашира, Московский государственный университет приборостроения и информатики
mmikhin@inbox.ru

В работе исследована задача кручения растущего призматического тела с сечением в форме лемнискаты Бута. В момент приложения нагрузки $\tau_0 \geq 0$ к торцам цилиндрического тела прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Боковая поверхность тела Π_1 свободна от напряжений. В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом новые приращиваемые элементы не напряжены. В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание тела прекращается.

Исследуются три основных этапа деформирования тела: до начала наращивания, в процессе и после остановки роста. Краевая задача для основного (нерастущего) вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ представляет собой традиционную задачу кручения теории вязкоупругости. Начально-краевая задача для наращиваемой области обладает рядом особенностей: специфическое начально-краевое условие на растущей границе, нарушение условий совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин; зависимость определяющих соотношений от функции $\tau_0(x, y)$, которая может иметь разрывы первого рода. Основные соотношения задачи после остановки наращивания аналогичны соотношениям начально-краевой задачи для наращиваемой области, где отсутствует условие на границе роста.

Предложены методы решения таких задач, основанные на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с некоторым параметром, использовании методов конформного отображения для решения последних и восстановлении истинных характеристик напряженно-деформированного состояния тел при помощи полученных формул расшифровки.

Таким образом, если в готовом теле без учета наращивания максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе тела, то при наращивании максимум интенсивности касательных напряжений может достигаться: на границе раздела основного и дополнительного тел, на границе готового тела, в произвольной точке дополнительного тела.

Вариационные принципы для открытых течений

Моргулис А. Б.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А
amor@math.sfedu.ru

В работе рассмотрены плоские вихревые течения идеальной однородной и несжимаемой жидкости в конечных каналах. Течения считаются открытыми — поток имеет вход и выход, сквозь которые жидкость втекает в канал и вытекает из него.

Как известно, уравнение плоского стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости сводится к функциональной зависимости функции тока и вихря. При этом форма этой зависимости, вообще говоря, заранее неизвестна.

Обозначим через Ψ и Ω функцию тока и вихрь стационарного течения. Стационарное течение назовем А-течением, если во всей его области имеет место равенство $\Psi = F(\Omega)$, где функция F однозначна и монотонна на множестве значений Ω.

Класс А-течений впервые выделил В. И. Арнольд (1966). Он рассмотрел течения с непроницаемыми границами и течения, обладающие пространственной периодичностью, и установил экстремальные свойства А-течений по отношению к вариационным принципам двух типов. В первом рассмотрена полная кинетическая энергия жидкости на листе равнозавихренных полей, а во втором — некоторая «связка» интегралов энергии и вихря, но без ограничения равнозавихренности. Такие связки широко известны как функционалы Арнольда. В настоящей работе вариационные принципы для функционалов Арнольда распространяются на открытые течения.

Отметим, что экстремальные свойства открытого А-течения довольно слабо зависят от граничных условий на входе и выходе потока. Однако, именно граничные условия определяют баланс функционалов Арнольда в возмущённых течениях. При этом отдельно стоит отметить граничные условия, представленные В. И. Юдовичем (1963): на всей границе области течения задаётся нормальная скорость потока, и, дополнительно, на входе потока задаётся вихрь. Именно, при граничных условиях Юдовича функционал Арнольда, ассоциированный с данным А-течением, оказывается функционалом Ляпунова для всех возмущённых течений, подчинённых тем же граничным условиям.

Так же отличительным свойством граничных условий Юдовича является ограничение, которые накладываются на стационарный поток в виде зависимости $\Omega = f(\Psi)$, где функция f может быть выражена непосредственно из граничных данных. С учетом этого уравнения и свойства функции f можно априори проверить А-свойство и построить функционал Ляпунова. Отметим, что на основе уравнения $-\Delta\Psi = f(\Psi)$, к которому сводится уравнение стационарного течения, можно сформулировать еще один вариационный принцип.

Неединственность и бифуркация сквозного течения

Моргулис А. Б.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН
и Правительства РСО-А
amor@math.sfedu.ru

В работе рассмотрены течения идеальной жидкости в каналах. Здесь, формально, канал — криволинейный четырехугольник, где пара несмежных сторон (дуг) представляют собой вход и выход потока.

Стационарное течение называется *сквозным (безотрывным)*, если поле скорости жидкости всюду отлично от нуля (как внутри канала, так и на его границе, включая твёрдые стенки). Поскольку вихрь стационарного течения постоянен на линиях тока и в безотрывном потоке выполняется соотношение $\Omega = f(\Psi)$ во всей области канала, где f — однозначная функция, то удобно считать, что f определена на интервале $(0,1)$. Это допущение сводится к нормировке расхода жидкости, что не приводит к потере общности.

Если функция f монотонна, причем обратная к ней функция $\Psi = F(\Omega)$ однозначна, то стационарный поток является А-течением. Отметим, что А-течения с C^1 -гладкой убывающей функцией F глобально минимизируют функционал Арнольда:

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}) = \int\limits_D \left(\mathbf{v}^2/2 - F_0(\omega)\right)\, dx + \oint\limits_S \Psi\mathbf{v}\cdot\mathbf{dx};\ S = \partial D,\ \omega = \mathrm{rot}\mathbf{v},\ F_0 = \int F(r)dr.$$

При этом нет необходимости в формулировки каких-либо граничных условиях для возмущений. Отсюда так же следует единственность А-течения с убывающей функцией F.

Отметим, что А-течения при возрастающей функции F глобально максимизируют функционал Арнольда лишь при дополнительном условии. Например, в случае течений в канале, достаточно неравенства $\inf F' > \lambda_1^{-1}$, где λ_1 — минимальное собственное значение задачи Дирихле для оператора $-\Delta$. При этом максимум $\mathcal{W}$ разыскивается в классе полей с общими нормальными компонентами на S. В этом классе максимальное А-течение единственно (при заданной F).

Таким образом, сквозное течение в канале однозначно определяется «функциональным параметром» f, если f монотонно убывает и имеет C^1 -гладкую обратную. В работе показано, что в случае *возрастающей* f такая однозначность, вообще говоря, не имеет места. Неоднозначность обусловлена существованием не максимального течения, которое обнаруживается при ветвлении вырожденной критической точки. Это ветвление трактуется как бифуркация стационарного решения задачи Юдовича (1963), при которой пара близких стационаров при столкновении обмениваются максимальностью и устойчивостью.

Суперпозиция азимутальных волн около точки Res 2 в задаче Куэтта-Тейлора

Моршнева И. В., Овчинникова С. Н.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
morsh@math.sfedu.ru

Рассмотрена задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя соосными бесконечно длинными вращающимися цилиндрами. Поля скорости и давления полагаются периодическими вдоль общей оси цилиндров с заданным периодом. Нелинейная задача и линеаризованная на течении Куэтта система Навье-Стокса обладают цилиндрической симметрией — инвариантны относительно вращений вокруг и сдвигов вдоль оси z и преобразования инверсии. Изучается возникновение режимов в окрестности точки пересечения нейтральных кривых колебательной потери устойчивости течения Куэтта — точки бифуркации коразмерности 2. Рассмотрен случай резонансной ситуации Res 2, которая возникает, когда у нейтральных мод совпадают фазовые частоты и азимутальные квантовые числа, а осевые квантовые числа различны. В точке пересечения нейтральных кривых линеаризованная задача в силу симметрии имеет четыре независимые нейтральные моды. Нелинейное взаимодействие этих слегка измененных мод в окрестности точки бифуркации коразмерности 2 аналитически описано с помощью системы четырех комплексных уравнений для амплитуд, впервые построенной методом осреднения для случая изучаемого резонанса В. И. Юдовичем и С. Н. Овчинниковой. При переходе к полярным координатам для модулей комплексных амплитуд (вещественных амплитуд), которые являются инвариантами группы симметрии, и фазового инварианта получается замкнутая система уравнений пятого порядка (фактор-система или моторная система). Всякое равновесие моторной системы вместе с проходящей через него орбитой действия группы симметрии порождает периодическое или квазипериодическое движение амплитудной системы, которые при значениях параметров близких к критическим дают ведущие члены асимптотики периодических и квазипериодических режимов уравнений Навье-Стокса. В работах В. И. Юдовича, С. Н. Овчинниковой и И. В. Моршневой перечислены решения, отвечающие равновесиям моторной подсистемы в малой окрестности точки резонанса Res 2, даны условия существования и устойчивости некоторых из них.

В настоящей работе проведено изучение одного из равновесий моторной системы, у которого попарно равны ненулевые вещественные амплитуды. Ему отвечает суперпозиция азимутальных волн. Выписаны выражения для амплитуд. Они зависят от фазового инварианта. Для него получено уравнение, которое может иметь до четырех решений. Это означает, что возможно существование до четырех различных суперпозиций азимутальных волн. Проведено численное исследование существования суперпозиции азимутальных волн и количества таких режимов для различных значений параметров задачи.

Численное исследование редуцированной модели турбулентного руслового потока

Надолин К. А., Жиляев И. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
nadolin@math.sfedu.ru

В работе представлены результаты вычислительных экспериментов с редуцированной математической моделью мелкого протяженного слабо искривленного руслового потока. Основное внимание уделено учету турбулентности течения, что является одним из ключевых вопросов адекватного моделирования природных водотоков. Исследование продолжает цикл работ по изучению различных аспектов моделирования гидродинамики и массопереноса в мелководных протяженных и слабо искривленных русловых потоках на основе редуцированных трехмерных уравнений, предложенных ранее.

Для расчетов гидрологических характеристик водотоков применяются математические модели разных типов. Наиболее простыми в использовании являются формульные («нульмерные») и балансовые (камерные) модели. Широко используются также одномерные модели, полученные, например, осреднением по живому сечению потока. Однако применение таких моделей весьма ограничено, поскольку они позволяют вычислять лишь интегральные и усредненные характеристики потоков (расход воды, средняя скорость течения и т. п.). Во многих случаях требуется более детальное описание течения, например, учет его поперечной структуры при возникновении в верхнем слое противотока, вызванного действием ветра. Строго говоря, такой анализ требует привлечения трехмерных моделей, точно описывающих исследуемые процессы и основанных на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений. Однако на практике получить высокую точность моделирования не удается, поскольку имеющиеся данные гидрологических измерений обычно не имеют достаточно высокой точности, необходимой для задания гидрофизических параметров, а также начальных и граничных условий для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе трехмерных математических моделей усугубляется спецификой геометрии расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от 0.1 до 0.005. Все вышесказанное объясняет интерес к двумерным и редуцированным трехмерным математическим моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных.

Ранее предложен подход, позволяющий конструировать математические модели русловых потоков пониженной размерности. Настоящая работа посвящена тестированию одной из предложенных редуцированных математических моделей, а именно модели мелкого протяженного потока. Верификация модели проводится путем сравнения данных прямого численного моделирования на основе полных уравнений гидродинамики потока вязкой жидкости и результатов, полученных на основе редуцированной модели. Расчеты проводились с использованием конечно-элементного комплекса COMSOL Multiphysics (Femlab), а также программных пакетов Matlab и Maple.

Моделирование поро- и термоупругих композитов методами эффективных модулей и конечных элементов

Наседкин А. В., Наседкина А. А., Ремизов В. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
nasedkin@math.sfedu.ru

В работе рассматриваются вопросы моделирования композитных многофазных сред регулярной и нерегулярной структуры применительно к исследованиям поро- и термоупругих композитных материалов.

Методология моделирования состоит в следующих шагах: на микроуровне стоятся модели деформируемого каркаса представительных объемов, учитывающие некоторые характеристики пористых и многофазных анизотропных структур композита; данные модели трансформируются в конечно-элементные модели; методом эффективных модулей определяются эффективные свойства анизотропного композита с конечно-элементным решением ряда задач пороупругости для представительного объема со специальными граничными условиями; на макроуровне для расчета задач прочности и разрушения композит считается однородным упругим анизотропном материалом с эффективными свойствами.

Среди особенностей работы можно выделить следующие.

Рассмотрены различные модели представительных объемов каркасов заданной пористости и процентов включений фаз: случайное генерирование пор, специальные методологии частично случайной генерации структуры, поддерживающие связность каркаса и т. п.

При конечно-элементных расчетах неоднородных задач пороупругости для представительных объемов рассмотрены анизотропные пороупругие материалы и различные граничные условия для перемещений, порового давления, напряжений, скорости фильтрации и т. д. Эти наборы задач можно рассматривать как аналоги подходов Фойхта и Рейсса для неоднородной анизотропной структуры. Проведено сравнение эффективных модулей, полученных при расчетах различных граничных задач.

С использованием аналогии между задачами термоупругости и пороупругости обсуждаются возможности определения эффективных свойств анизотропных термоупругих композитов аналогичных структур.

Для выполнения конечно-элементных расчетов использовался вычислительный комплекс ANSYS, для которого был разработан набор специальных программ на командном макроязыке APDL ANSYS. При этом генерация ряда структур представительных объемов проводилась отдельными программами на Си с последующей передачей твердотельных и конечно-элементных моделей в ANSYS.

Разработанные технологии позволяют анализировать многофазные анизотропные пороупругие и термоупругие композиты с учетом их микроструктуры и исследовать задачи для макрообъемов этих композитов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ.

К обратной задаче реконструкции плоских неоднородных предварительных напряжений в пластине

Недин Р. Д.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
rdn90@bk.ru

Задачи механики деформируемого твердого тела при наличии предварительного напряженного состояния давно изучаются учеными-исследователями разных стран. Предварительные напряжения могут возникнуть в твердых телах вследствие неоднородной пластической деформации или жесткого соединения разных материалов в контактной зоне; такие поля напряжений очень часто появляются в процессах литья, прокатки, сварки, закалки, термообработки и других технологических операциях.

Рассмотрена обратная задача об идентификации неоднородного плоского поля предварительных напряжений в тонкой упругой изотропной пластине, в рамках акустического метода. В качестве дополнительной информации в обратной задачи использовано заданное поле смещений на части границы пластины под зондирующей нагрузкой в конечном наборе точек для нескольких частот колебаний. Поле предварительных напряжений характеризуются тремя компонентами тензора предварительных напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия. На основе обобщенного соотношения взаимности сформулировано уравнение итерационного процесса решения обратной задачи относительно поправок к предварительным напряжениям на текущей итерации для двух режимов колебаний пластины: планарных и изгибных. Предложен метод решения уравнения итерационного процесса с помощью выражения поправок к предварительным напряжениям через функцию напряжений Эри и применения конечномерного подхода, заключающегося в представлении функции Эри в виде суммы бигармонических полиномов. Решение обратной задачи на каждой итерации сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, формирующих полиномиальное разложение искомой функции предварительных напряжений Эри. Полученная система является плохообусловленной; для ее корректного решения использован метод регуляризации А. Н. Тихонова. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению неоднородных предварительно напряженных состояний в пластине. Выявлены специфические особенности и тенденции предложенного метода реконструкции. Сформулированы наиболее эффективные режимы акустического зондирования пластины и наиболее благоприятные для реконструкции частотные диапазоны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00194-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Разгон эллиптического цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью

Норкин М. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
norkin@math.rsu.ru

В работе рассматривается задача о поступательно-вращательном разгоне эллиптического цилиндра, полностью погруженного в вязкую и несжимаемую жидкость. Предполагается, что цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным поступательным ускорением, совершая при этом вращательные движения вокруг своей оси с постоянным угловым ускорением. Решение задачи строится при помощи прямого асимптотического метода, эффективного в случае, когда число Рейнольдса имеет одинаковый порядок с параметром, характеризующим малое время. Для коэффициентов асимптотических разложений получены смешанные краевые задачи для линейных уравнений Навье-Стокса, которые решаются в первоначально невозмущенной области (прямоугольнике с выброшенным эллипсом) методом конечных элементов. Исследовано влияние вращения цилиндра, числа Фруда, а также вязкости и поверхностного натяжения на форму внешней свободной границы жидкости. Предложенный метод обобщается на случай плавающего на поверхности жидкости эллиптического цилиндра.

В идеальной жидкости чрезвычайно сложной оказывается проблема брызговых струй, образующихся при поступательном движении твердого тела вдоль ее свободной границы. Эта проблема была решена в частном случае вертикальной стенки, которая движется из состояния покоя с постоянным ускорением или движется после удара с постоянной скоростью в сторону жидкости (A. C. King, D. J. Needhman, 1994; D. J. Needhman, J. Bllingham and A. C. King, 2007). В вязкой жидкости, вследствие условия прилипания, форма свободной границы вблизи тела отличается от соответствующей формы для случая идеальной жидкости, где точка контакта движется вдоль твердой поверхности тела. Ранее автором было показано, что в вязкой жидкости в случае, когда число Рейнольдса имеет одинаковый порядок с параметром, характеризующим малое время, форму брызговой струи можно определить на основании старшего приближения решения задачи на малых временах. В настоящей работе форма свободной границы жидкости определяется на основании первых двух членов асимптотики. При этом учитывается нелинейность задачи и влияние на форму свободной границы жидкости числа Фруда. Полученные задачи для коэффициентов асимптотических разложений решаются в слабой вариационной постановке. На их основе определяется форма внешней свободной границы жидкости. Формально анализ задачи удается провести без построения погранслойных решений в точках контакта тела и жидкости. В связи с этим заметим, что погранслойные решения сгладят функцию, описывающую возмущение свободной границы, только в маленьких окрестностях точек контакта и качественно не повлияют на полученную картину течения жидкости.

Разгон эллиптического цилиндра в неоднородной жидкости со свободной поверхностью

Норкин М. В., Яковенко А. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
norkin@math.rsu.ru

Сегодня большой интерес представляют задачи гидромеханики, в которых необходимо учитывать стратификацию жидкости по плотности, считая ее неоднородной. В работе рассматривается совместное движение идеальной, несжимаемой, неоднородной жидкости и полностью погруженного в нее эллиптического цилиндра на малых временах. Предполагается, что цилиндр движется из состояния покоя в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. Математическая постановка задачи включает в себя полные нелинейные уравнения движения идеальной, несжимаемой, неоднородной жидкости. На свободной границе необходимо удовлетворить динамическому и кинематическому условиям. На поверхности цилиндра задается нормальная компонента скоростей точек границы тела. На неподвижных твердых границах бассейна ставится условие непротекания. В начальный момент времени задано распределение плотности жидкости. Скорость жидкости и возмущение свободной границы в начальный момент времени равны нулю.

Решение задачи построено при помощи прямого асимптотического метода, эффективного на малых временах. Для коэффициентов асимптотических разложений получены линейные смешанные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в первоначально невозмущенной области (прямоугольнике с выброшенным эллипсом), которые решаются численно методом конечных элементов.

Основное внимание при исследовании задачи уделяется изучению влияния начального распределения плотности жидкости и числа Фруда на форму внешней свободной границы жидкости. В работе рассматривается экспоненциальное начальное распределение плотности. Показано, что разгон тела в неоднородной жидкости приводит к сильным деформациям ее свободной границы. При увеличении показателя стратификации возмущение свободной границы усиливается. Также отмечено качественное различие конфигураций свободных границ жидкости при значениях числах Фруда 1 и 0.4 (при уменьшении значений числа Фруда происходит качественное изменение картины течения жидкости).

Важно отметить, что полученное решение справедливо только для небольших и умеренных чисел Фруда, при которых не происходит отрыва частиц жидкости от поверхности цилиндра. В случае больших чисел Фруда происходит отрыв жидкости от тела, в результате которого вблизи цилиндра образуется каверна и появляется новая внутренняя свободная граница. Вопросы, связанные с образованием каверн, а также брызговых струй для плавающих на поверхности жидкости тел, являются наиболее интересными и мало изученными.

Отметим также, что предложенный в работе численно-аналитический метод допускает обобщение на случай разгона двух эллиптических цилиндров.

Устойчивость течения Куэтта между вращающимися цилиндрами с разными зазорами

Овчинникова С. Н.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
ovch.09@mail.ru

Представлена задача о движении жидкости между бесконечными соосными цилиндрами радиусов r_1, r_2, вращающимися с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 соответственно. Движение описывается уравнениями Навье–Стокса, зависящими от безразмерных параметров: $\eta = r_2/r_1$ — отношение радиусов и $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$ — отношение угловых скоростей цилиндров, $R = \Omega_1(r_2 - r_1)^2/\nu$ — безразмерное число Рейнольдса, ν — коэффициент кинематической вязкости. При любых значениях параметров существует точное стационарное вращательно симметричное решение уравнений движения — течение Куэтта.

В работе рассматриваются результаты вычислений, целью которых является изучение влияния величины безразмерного зазора $\eta-1$ на устойчивость течения Куэтта и на возникновение различных вторичных режимов течения. Устойчивость течения Куэтта изучается относительно $2\pi/\alpha$ периодичных вдоль оси цилиндров и 2π периодичных в азимутальном направлении возмущений с вектором скорости $e^{i(\omega_m t-\alpha z-m\theta)}\overline{v}(r)$, где азимутальное квантовое число m целое. Известно, что в случае $\Omega \geqslant 0$ существует упорядоченная по возрастанию последовательность критических чисел Рейнольдса $R_*^{(p)}(\Omega,\eta,\alpha)$, $p = 1, 2, \ldots$.

В большом числе экспериментальных работ использовались цилиндры с узким зазором и неподвижным внешним цилиндром ($\Omega = 0$), поэтому в работе рассчитаны нейтральные кривые $R = R_*^{(p)}(\Omega,\eta,\alpha)$, $p = 1, 2$ для узкого зазора $0 < \eta - 1 \leqslant 1$ и $\Omega = 0$. В малой окрестности каждой точки нейтральной кривой происходит бифуркация, на смену потерявшему устойчивость течению Куэтта появляется вторичный режим. Оказалось, что при увеличении зазора между цилиндрами нейтральные кривые, соответствующие невращательно симметричным возмущениям с большим числом волн в азимутальном направлении, сначала перестают быть выпуклыми, затем становятся замкнутыми и, постепенно сжимаясь, исчезают.

При любых значениях η нейтральные кривые, соответствующие различным азимутальным числам m и n, пересекаются. Пересекаются также кривые $R = R_*^{(p_1)}$ и $R = R_*^{(p_2)}$ с $m = n$ и $p_1 \neq p_2$, лишь кривую $R = R_*^{(1)}$ с $m = 0$ не пересекает ни одна нейтральная кривая. Анализ амплитудных систем на центральном многообразии, соответствующих точкам пересечения (точкам бифуркации коразмерности 2), позволяет изучить существование и устойчивость в малой окрестности таких точек решений системы Навье–Стокса.

Число точек пересечения нейтральных кривых также зависит от значений η. Чем больше зазор между цилиндрами, тем меньше точек пересечения.

Моделирование движения виброожиженного слоя между двумя полками

Орлова Н. С.
Владикавказ, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства РСО-А
norlova.umi.vnc@gmail.com

Ранее было исследовано ожижение частиц стекла, диаметром 0,13 мм, которое создавалось под воздействием вертикальных колебаний полки. Использовалась двухжидкостная модель, которая содержит уравнение неразрывности и уравнение количества движения для твердой фазы (1)–(2) и уравнения для газовой фазы, полученные с учетом закона Дарси (3)–(4), в одномерном приближении:

$$\frac{\partial(\rho_s\alpha_s)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_s\alpha_s V_s)}{\partial z}=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho_s\alpha_s V_s)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_s\alpha_s V_s V_s)}{\partial z}=-\alpha_s\frac{\partial P}{\partial z}+\beta(V_g-V_s)-G(\alpha_g)\frac{\partial\alpha_s}{\partial z}+\frac{\partial\sigma}{\partial z}-\rho_s\alpha_s g; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho_g}{\partial t}=\frac{1}{\alpha_g\mu_g}\cdot\frac{\partial(\rho_g\alpha_g k\frac{\partial P}{\partial z})}{\partial z}-\frac{\rho_g}{\alpha_g}\cdot\frac{\partial V_s}{\partial z}-V_s\frac{\partial\rho_g}{\partial z}; \tag{3}$$

$$V_g=V_s-\frac{k}{\mu_g}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}; \tag{4}$$

где ρ_g, V_g, α_g — плотность, скорость и объемная доля газа; а ρ_s, V_s, α_s — плотность, скорость и объемная доля твердых частиц, соответственно; P — давление газовой фазы; β — коэффициент обмена импульсами на поверхности раздела двух фаз; $G(\alpha_g)$ — коэффициент межчастичного взаимодействия; σ — напряжения, возникающие в слое частиц; k — проницаемость слоя частиц; g — ускорение свободного падения в проекции на ось z; μ_g — динамическая вязкость газа. Давление газа P рассчитывалось с помощью уравнения состояния для идеального газа при условии, что температура газа постоянна и равна 20^0C.

В настоящей работе исследовано движение виброожиженного слоя частиц стекла между двумя колеблющимися полками (верхней и нижней) с использованием двухжидкостной модели. Амплитуда и частота колебаний полок имеют значения $A = 1,42$ мм и $f = 50$ Гц, соответственно.

Исследование двухжидкостной модели с использованием закона Дарси для описания движения виброожиженного слоя частиц стекла, диаметром 0,13 мм, между двумя колеблющимися полками при разных значениях частоты колебаний, толщины засыпки слоя и расстояния между полками показало, что в случае относительно невысоких значений частоты колебаний полок (50 Гц) и толщины засыпки слоя (28 мм) и больших значениях расстояния между полками, не превышающих двух толщин засыпки, слой в процессе виброожижения переходит в более разрыхленное состояние.

Об изгибно-крутильных колебаниях стержней переменной жесткости

Осипов А. В.
Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет
kukuvzz@yandex.ru

В настоящее время все больше внимания уделяется исследованиям колебаний неоднородных стержней, являющихся элементами многих конструкций. В работе рассмотрены изгибно-крутильные колебания стержней переменной жесткости. Из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получены корректные уравнения и граничные условия для изгибно-крутильных колебаний консольно закрепленной балки с неоднородными физическими и геометрическими характеристиками. Задача описывается системой двух дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. Осуществлено обезразмеривание задачи, введены новые функции и переменные: безразмерные частоты колебаний, безразмерный модуль Юнга, безразмерный модуль сдвига. Для решения построенной краевой задачи реализован метод пристрелки, который заключается в сведении задачи к канонической системе восьми дифференциальных уравнений первого порядка и решении четырех независимых задач Коши с различными граничными условиями. В результате численного решения задач Коши в среде Maple определены функции смещения и угла поворота в конечном наборе точек. Осуществлен анализ точности предложенного подхода. В качестве модельного примера рассмотрены изгибно-крутильные колебания консольно закрепленной балки с постоянным по всей длине поперечным сечением в виде полукруга. Выполнено сравнение точного решения, полученного аналитически, и решения, полученного методом пристрелки при постоянных значениях жесткости и модуля сдвига. Показана работоспособность предложенного метода.

Проведена серия вычислительных экспериментов по решению задачи для различных законов изменения переменной жесткости и переменного модуля сдвига: монотонно возрастающие функции, монотонно убывающие функции, немонотонные функции, кусочно-разрывные функции. Определены значения резонансных частот и форм колебаний, исследовано влияние законов неоднородности на амплитудно-частотные характеристики.

В рамках изучаемой модели рассмотрена обратная задача по восстановлению переменных модуля Юнга и модуля сдвига по информации о смещениях и углах поворота, заданных (измеренных) в наборе точек. Решены возникающие при этом задачи Коши. Некорректность обратной задачи в этой постановке проявляется в том, что необходимо находить вторые производные от функции, заданной в конечном наборе точек. Для нахождения производных применены сплайн-аппроксимации. Приведены результаты вычислительных экспериментов по реконструкции неоднородных характеристик.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

О численном интегрировании уравнения переноса вихря для вязкого течения ньютоновских жидкостей в равноканальных многоугловых штампах

Периг А. В.[*], Голоденко Н. Н.[**]
[*]*Краматорск, Донбасская государственная машиностроительная академия*
[**]*Макеевка, Донбасская национальная академия строительства и архитектуры*
olexander.perig@gmail.com

Для построения математической модели задачи равноканального многоуглового прессования (РКМУП) использованы уравнения переноса вихря (УПВ):

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = (-\mathbf{Re}) \cdot \left(\frac{\partial\,(u\cdot\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial\,(v\cdot\zeta)}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

где безразмерная функция вихря определяется как $\zeta = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$.

Для численного интегрирования задача (1) записывается в конечных разностях по методу перемежающихся направлений. В работе дополнительно рассмотрен установившийся режим вязкого течения физической модели полимерного материала через многоугловой штамп $ABCD - EFGH$ с входной подвижной стенкой EF. В таком случае начальные условия могут приниматься в виде грубого приближения к стационарному решению: $u^0_{i,j} = 0$; $v^0_{i,j} = 0$; $\zeta^0_{i,j} = 0$; $\psi^0_{i,j} = 0$. Граничные условия для стенок многоуглового штампа записаны как условия для полного прилипания вязкого материала, причем учет наличия подвижной вертикальной левой входной стенки (EF) многоуглового штампа, движущейся параллельно направлению экструзии с безразмерной скоростью U_b, обеспечивается следующим граничным условием для безразмерной функции вихря ζ, записанной для узлов, относящихся к подвижной входной стенке (EF): $\zeta_{i,j} = 2\left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j} + U_b \cdot \eta\right)/\eta^2$. Численные решения задачи (1) показывают, что наличие подвижной входной стенки EF штампа, задающей переносное движение со скоростью U_b в системе «многоугловой штамп – вязкая заготовка», оказывает существенное влияние на характер вязкого течения деформируемого материала не только в окрестности подвижной стенки EF, но и во всей области $ABCD - EFGH$ многоуглового штампа. Установлено, что в случае, когда подвижная стенка EF движется навстречу вязкому потоку, т. е. $\mathbf{V}_{\text{wall EF}} \uparrow\downarrow \mathbf{U}_0$, где U_0 — скорость прессования, то ближайшая к подвижной стенке линия тока «ускоряется» по сравнению со случаем неподвижной стенки $\mathbf{V}_{\text{wall EF}} = 0$. Установлены технологические преимущества реализации подвижной стенки EF многоуглового штампа в рамках реализации различных технологических режимов процессов РКМУП. Сравнительный анализ расчетных линий тока показывает, что наличие подвижной стенки EF, движущейся навстречу вязкому потоку, приводит к уменьшению размеров застойной зоны EFG вязкого течения. Указанный факт показывает технологическую привлекательность реализации такого режима прессования полимера в штампе с подвижной стенкой EF.

О точных решениях уравнений Навье–Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами

Петров А. Г.
Москва, Институт проблем механики РАН
petrov@ipmnet.ru

Поле скорости $v_x(t,x,y), v_y(t,x,y)$ и давлением $p(t,x,y)$ для течения вязкой жидкости в слое между параллельными пластинами, расстояние $h(t)$ между которыми меняется, определяется из следующей краевой задачи для уравнений Навье-Стокса

$$\begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ v_x(t,x,0) = v_x(t,x,h) = 0, \quad v_y(t,x,0) = 0, \quad v_y(t,x,h) = \dot{h}, \end{array} \tag{1}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости, плотность жидкости принимаем за единицу.

Замена

$$v_x = \frac{\dot{h}}{h} x U(\eta), \quad v_y = \dot{h} V(\eta), \quad p = \dot{h}^2 \left[b \frac{x^2}{2h^2} + P(\eta) \right] + p_0(t), \quad \eta = \frac{y}{h}$$

приводит уравнения Навье–Стокса к обыкновенной системе дифференциальных уравнений для функций $U(\eta)$, $V(\eta)$, а функция $P(\eta)$ выражается через них аналитически.

При сближении пластин точное семейство решений непрерывно зависит от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dot{h}h/\nu$. Профиль продольной скорости выпуклый и изменяется от параболического при малых числах Рейнольдса к прямоугольному при числе Рейнольдса, стремящегося к бесконечности. Коэффициент давления монотонно изменяется с изменением числа Рейнольдса от нуля до бесконечности. При разъединении пластин найдено счетное множество точных решений в элементарных функциях

$$v_x = \frac{\dot{h}}{h} x \left[\cos\left(2n\pi \frac{y}{h} \right) - 1 \right], \quad v_y = \dot{h} \left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2n\pi} \sin\left(2n\pi \frac{y}{h} \right) \right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Оно порождает счетный набор непрерывных, несвязанных друг с другом семейств точных решений. Указаны области значений числа Рейнольдса, в которых существует единственное решение, области, в которых решений нет, и области с неединственным решением. При достаточно большом числе Рейнольдса вблизи границы всегда образуется противотечение: скорость направлена в противоположном направлении по отношению к средней скорости. На основе найденного точного решения проанализированы относительные погрешности асимптотических теорий смазочного слоя Рейнольдса и пограничного слоя Прандтля.

Анализ энергетических потерь при распространении в артериальном сосуде переменного диаметра

Поддубный А. А.[*], Устинов Ю. А.[**]
[*]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*
[**]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
poddubny_sfedu@mail.ru

Исследовано распространение пульсовой волны в артериальном сосуде переменного диаметра. Численный эксперимент строится на основе двух видов сужения: скачкообразном и параболической формы. Исследование проводилось с использованием методов гармонического анализа. Для этого систола пульсовой волны на временном отрезке, равном 1/3 сердечного цикла, аппроксимировалась отрезком ряда Фурье. Для участков со скачкообразным изменением диаметра артериального сосуда решение представлялось в виде суперпозиции гармонических волн с положительными и отрицательными волновыми числами, а амплитуды гармонических волн определялись из условий непрерывности давления и расхода на сечения сопряжения участков. Модель, когда сужение задается функционально, основывается на модернизированном уравнении И. С. Громеко. На участках с параболическими сужениями сечения использован численный метод построения фундаментальных решений с положительным и отрицательным значениями отвечающего им вектора Пойтинга-Умова (ВПУ). Общее решение представлялось в виде линейной комбинации этих решений, коэффициенты которых определялись также из условий непрерывности давления и расхода. В качестве характеристики сопротивления сужений распространению пульсовой волны был выбран энергетический коэффициент прохождения (ЭКП), который определялся как отношение величины ВПУ прошедшей волны, определяемого дистальнее сужения к величине ВПУ набегающей волны систолы на границу раздела участков. На основе описанной математической модели проведена серия расчетов для анализа изменения величины ЭКП в зависимости от параметров сужения (радиуса, длины, формы). Также проведены исследования для деформируемой оболочки с двумя последовательно расположенными сужениями. Рассмотрены как скачкообразные сужения, так и функционально заданные, параболические. Амплитуды определялись из уравнений, составленных на основании непрерывности расхода и давления на разрезах. Проведен численный эксперимент по нахождению ЭКП для двух типов сужений, расположенных последовательно. Составлена сравнительная таблица ЭКП для скачкообразного и параболического сужений. С помощью матричного метода разработан алгоритм исследования построения решений для сосуда с произвольным числом последовательно расположенных сужений любого из рассматриваемых типов.

Математическая модель развития донных волн в равнинных реках

Потапов И. И.
Хабаровск, Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН
potapovii@rambler.ru

Предложена математическая модель развития донных волн в равнинных реках, включающая в себя

- гидродинамическую модель речного потока,
- модель транспорта влекомых донных наносов,
- морфологическую модель, позволяющую описывать изменения донной поверхности.

1. Гидродинамическая модель потока строится на основе двумерных уравнений Рейнольдса, с замыканием модели в форме k-w. Краевые условия модели выполнены с учетом периодичности граничных условий на границах втекания и вытекания потока из расчетной области и подвижными границами дна и свободной поверхности потока.
2. Для расчета транспорта влекомых наносов донного материала используется модифицированная оригинальная формула, несодержащая в себе феноменологических параметров, учитывающая влияние донной геометрии и придонного давления на транспорт влекомых наносов.
3. Морфологическая модель позволяет описывать изменения донной поверхности через градиенты расхода влекомых наносов. Данная модель содержит в себе ряд механизмов стабилизации расчета донных волн, учитывающих механизмы лавинного движения донного материала и механизмы фильтрации, подавляющие возникновение нефизических осцилляций на поверхности донных форм.

Для поставленной задачи был предложен алгоритм ее решения на основе метода контрольных объемов. Алгоритм имеет ряд особенностей. В морфологических расчетах дна для низкочастотной фильтрации донной поверхности, был предложен метод коррекции потоков. При вычислении лавинных процессов для борьбы с осцилляциями донной поверхности в точках отрыва потока применена временная релаксация лавинных расходов.

Исследовано влияние относительной высоты дюны на характер распределения придонного градиента динамического давления на поверхности дюны. Показано, что вклад градиента динамического давления в транспорт влекомых наносов достигает от 15 до 25% от общей массы расхода, при этом градиент давления оказывается определяющим в процессе определения точки отрыва пограничного слоя на вершине дюны, остановки транспорта наносов и появления зоны их лавинного обрушения. Сделан вывод о том, что учет градиента динамического давления в уравнении расхода является значимым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-98518 р-восток-а) и фонда фундаментальных исследований ДВО РАН (код проекта 12-I-0-03-018).

Использование метода LS-STAG для моделирования обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды

Пузикова В. В.
Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана
valeria5555@mail.ru

Для численного решения задач математической физики обычно применяются различные сеточные методы. Использование структурированных сеток (по сравнению с неструктурированными) позволяет, как правило, уменьшить время счёта и необходимый объём оперативной памяти.

В то же время, построение регулярной криволинейной сетки в областях сложной формы часто оказывается затруднительным, поэтому представляют интерес методы погруженных границ, которые не требуют совпадения границ ячеек с границами расчетной области и позволяют решать задачи на прямоугольных сетках. Наиболее важным вопросом при этом является работа с усечёнными ячейками, т. е. ячейками неправильной формы, которые образуются при пересечении прямоугольных ячеек с погруженной границей области течения, поскольку решающую роль для точности и устойчивости расчёта играет дискретизация уравнений именно в них.

Использование методов погруженных границ даёт возможность решать задачи с изменяющейся в процессе счета областью течения (задачи аэроупругости, нестационарной аэродинамики, сопряженные задачи тепломассообмена и другие) без перестроения сетки на каждом шаге расчёта.

Один из наиболее эффективных методов данного класса — метод LS-STAG (Level Set STAGgered — метод погруженных границ с функциями уровня для разнесённых сеток). Метод предложен как развитие MAC-метода (метода маркеров и ячеек) и обладает, как показывают численные эксперименты, вторым порядком точности.

Точное представление погруженной границы достигается путём использования знакопеременной функции расстояния (функции уровня) для её явного представления. Использование функций уровня позволяет легко вычислять все необходимые геометрические характеристики ячеек сетки и уменьшить затраты машинного времени на обработку ячеек сложной формы.

В работе рассматривается обтекание профиля потоком вязкой несжимаемой среды, причём форма профиля в общем случае описывается набором точек, координаты которых могут быть заданы неточно (являются экспериментальными данными).

Аппроксимация границы профиля кривой Безье позволяет достаточно просто строить функцию уровня, необходимую для LS-STAG дискретизации. Приведённые расчёты для кругового, квадратного, эллиптического и крылового профилей показывают, что даже на сравнительно грубых сетках метод LS-STAG с аппроксимированной функцией уровня позволяет получить качественно и количественно верное решение. Предложенный подход можно использовать и для более сложной задачи — моделирования обтекания системы профилей.

Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений

Ревина С. В.

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет

Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А

revina@math.rsu.ru

Рассматривается двумерное $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

где ν — безразмерная вязкость. Через $\langle f \rangle$ будем обозначать среднее по x_1, а через $\langle\langle f \rangle\rangle$ — среднее по прямоугольнику периодов $\Omega = [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\ell_1}\int\limits_0^{\ell_1} f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1, \quad \langle\langle f \rangle\rangle(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega f(\boldsymbol{x}, t)\, dx_1\, dx_2,$$

Средняя по пространству скорость считается заданной:

$$\langle\langle \boldsymbol{v} \rangle\rangle = \boldsymbol{q}.$$

Предполагается, что поле скорости $\boldsymbol{v}$ периодично по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами ℓ_1, ℓ_2 соответственно, причем $\ell_2 = 2\pi/\alpha$, $\alpha \to 0$.

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу сдвиговых течений:

$$\boldsymbol{V} = (0, V)(x_1, \alpha x_2).$$

Отметим, что к рассматриваемому классу так же принадлежит течение Колмогорова

$$\boldsymbol{V} = (0, \gamma \sin x_1),$$

имеющее важные геофизические приложения.

Выведены рекуррентные формулы для k-го члена длинноволновой асимптотики задачи устойчивости двумерных сдвиговых течений с ненулевым средним $\langle V \rangle \neq 0$. Показано, что критические собственные значения являются нечетными функциями волнового числа, а критические значения вязкости — четными функциями. Если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией пространственной переменной, то собственные значения находятся точно и равны $\sigma_{1,2} = \pm im\alpha\langle V \rangle$, где $m \neq 0$ — волновое число.

Полученные результаты можно применить для обоснования монотонной потери устойчивости течений с нулевым средним, обобщающих течение Колмогорова, а также для нахождения рекуррентных формул k-го члена асимптотики таких течений.

Возможность обоснования монотонной потери устойчивости играет ключевую роль в задаче устойчивости течений, периодически зависящих от времени.

Теория построения моделей сложных сред с конечными деформациями

Роговой А. А.
Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН
rogovoy@icmm.ru

Все кинематические и силовые величины в сложных средах определяются историей термо-упруго-неупругого процесса, происходящего в них. Для описания истории процесса наиболее удобна процедура, основанная на кинематике наложения малых деформаций на конечные. Обычно эта процедура используется при решении нелинейных краевых задач методом последовательного нагружения (силового и/или кинематического). Однако эта процедура эффективна и для построения кинематических соотношений термо-упруго-неупругого процесса и определяющих уравнений, которые удовлетворяют принципам термодинамики и объективности. Совокупность положений, основанных на этой процедуре, и составляет теорию построения моделей сложных сред с конечными деформациями и структурными изменениями в материале.

Определяющие соотношения для сложных сред при малых деформациях могут быть построены с использованием простого, но эффективного подхода, основанного на возможности представить полную деформацию суммой упругих, неупругих и температурных деформаций. Аналогичный подход может быть положен в основу построения определяющих соотношений термо-упруго-неупругих процессов при конечных деформациях. Но для того, чтобы иметь возможность суммировать деформации, необходимо ввести, помимо начальной и текущей конфигураций, еще и промежуточную конфигурацию, близкую к текущей, и использовать деформации, возникающие при переходе из промежуточной конфигурации в эту близкую текущую.

В рамках такого подхода разработана теория построения моделей, описывающих поведение сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях в материалах, и удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности. Для учета изменения в процессе деформирования структуры материала введены скалярные структурные параметры, зависящие от неупругой кинематики и влияющие на параметры определяющих уравнений, описывающих упругие и неупругие процессы в среде. Предложен функционал, основанный на упругом потенциале и совпадающий с ним в случае чисто упругого процесса. Функционал является одним из слагаемых в свободной энергии. Используя первый закон термодинамики, построено уравнение теплопроводности. Выделены источники тепла, производимого упругими деформациями, неупругими деформациями и структурными изменениями, происходящими в материале.

В рамках разработанной теории построены эволюционные модели термоупругого процесса при конечных деформациях, изотермического вязкоупругого процесса без структурных изменений в материале, термоупругопластического процесса со структурными изменениями в материале (адиабатическое сжатие образца), построена модель сплава с памятью формы (аустенитно-мартенситный переход) при конечных деформациях и модель поведения мягкого магнитного материала в постоянном в начальной конфигурации внешнем магнитном поле.

Расчет вторичных режимов движения жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами

Романов М. Н.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
romanovmaks@yandex.ru

Исследуются различные режимы движения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя бесконечными концентрическими вращающимися проницаемыми цилиндрами в случае, когда имеется приток жидкости через поверхность одного цилиндра и отток через поверхность другого.

Основной режим представляет собой стационарное вращательно-симметричное течение с нулевой аксиальной компонентой вектора скорости и спиралевидными траекториями движения частиц. Это течение может потерять устойчивость двумя способами. В результате монотонной вращательно-симметричной неустойчивости оно сменяется вторичным стационарным течением, а в случае колебательной трехмерной потери устойчивости — вторичным автоколебательным режимом с бегущими в азимутальном направлении волнами. Вблизи пересечения этих двух бифуркаций существует множество различных вторичных режимов, возникающих благодаря нелинейному взаимодействию монотонной вращательно-симметричной и колебательных трехмерных мод.

Нелинейный анализ устойчивости, выполненный в работе, базируется на теории бифуркаций коразмерности два, развитой в работах В. И. Юдовича, Ж. Йосса и П. Шосса. Она применима для широкого класса задач о круговых течениях жидкости с цилиндрическими симметриями. Использование этой теории позволяет свести исходную задачу к асимптотической модели, представляющей собой динамическую систему трех нелинейных комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые являются обобщением известного амплитудного уравнения Ландау. Неизвестными в этой системе являются комплексные амплитуды разыскиваемых вторичных течений. Коэффициенты системы находятся численно путем решения серии линейных краевых задач для комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с переменными комплексными коэффициентами. Данная амплитудная система расщепляется на две вещественные системы. Одна из них имеет четвертый порядок и служит для определения модулей амплитуд и фазового инварианта. Эта система называется моторной подсистемой амплитудной системы.

Исследование моторной подсистемы позволило найти следующие вторичные течения жидкости: вторичное стационарное течение, пара спиральных волн, чистые азимутальные волны, смешанные азимутальные волны первого и второго родов, а также двухчастотные и трехчастотные квазипериодические движения жидкости. Эти режимы при различных значениях параметров задачи оказываются как устойчивыми, так и неустойчивыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-05-01138, № 12-01-31262) и Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., гос. контракт № 14.A18.21.0873.

О существовании глобальных переходов между стационарными режимами задачи обтекания

Сазонов Л. И.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А
sazonov@math.rsu.ru

Пусть ограниченное тело $B \subset \mathbb{R}^3$ движется в жидкости, занимающей все пространство вне тела, со скоростью $-\alpha(t)e_1$, где e_1 — единичный орт оси Ox_1. Тогда поле скорости жидкости $u = u(x,t)$ удовлетворяет следующей начально–краевой задаче для системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u,\nabla)u = \triangle u - \nabla p, \\ div\, u = 0,\, u|_{\partial B(t)} = -\alpha(t)e_1,\, u|_\infty = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $B(t)$ — область, занимаемая телом в момент времени t. Здесь, не нарушая общности, считается, что плотность жидкости и коэффициент вязкости равны единице. Переходя к системе координат, жестко связанной с телом, получаем, что поле скорости жидкости $v(x,t)$ и давление $r(x,t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v,\nabla)v - \alpha'(t)e_1 = \triangle v - \nabla r, \\ div\, v = 0,\, v|_{\partial\Omega} = 0,\, v|_\infty = \alpha(t)e_1, \end{cases} \tag{2}$$

в области $\Omega \times (0,\infty)$, где $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B(0)$.

Пусть v_{α_1}, v_{α_2} — стационарные режимы задачи обтекания, т. е. решения стационарной системы Навье–Стокса в области Ω

$$\begin{cases} \triangle v - \nabla p = (v,\nabla)v, \\ div\, v = 0,\, v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

удовлетворяющие соответственно условиям

$$v|_\infty = \alpha_1 e_1,\, v|_\infty = \alpha_2 e_1.$$

Задачей о переходе между стационарными режимами v_{α_1} и v_{α_2} будем называть задачу об определении решения нестационарной системы Навье–Стокса (2), удовлетворяющего начальному условию $v|_{t=0} = v_{\alpha_1}$ и предельному соотношению $\lim\limits_{t\to\infty} v = v_{\alpha_2}$.

В работе установлено существование решения представленной задачи в предположении, что стационарные режимы входят в гладкое семейство устойчивых течений, и получены оценки сходимости к режиму v_{α_2}. В исследовании существенно используются результаты автора о существовании локальных переходов для близких режимов.

Численный анализ виброакустических свойств композитных трехслойных оболочек вращения, колеблющихся в акустической среде

Сафроненко В. Г.[*]**, Донченко Е.Н.**[*]**, Шутько В.М.**[**]
[*]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*
[**]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
safron@math.sfedu.ru

Для подавления вредных вибраций и шума целесообразно использование в тонкостенных конструкциях материалов с высокими коэффициентами внутреннего рассеяния колебательной энергии. К ним относятся современные волокнистые и металлокомпозиты на полимерной основе, которым свойственны повышенная податливость на сдвиг, анизотропия и неоднородность. Это влечет необходимость построения и использования адекватных математических и вычислительных моделей композиционных конструкций.

В рамках предложенной ранее математической модели, описывающей гармонические колебания композитных на полимерной основе оболочек в сжимаемой жидкости, рассмотрены вынужденные колебания оболочек вращения трехслойной структуры, находящихся в линейной акустической среде. Постановка задачи для непологой оболочки вращения базируется на гипотезе о ломаной линии и учитывает потери механической энергии при гармонических колебаниях в рамках концепции комплексных модулей. Математическая модель позволяет рассматривать несущие слои и заполнитель как композитные слои с полимерным связующим. При этом физико-механические характеристики полимерного связующего рассматриваются с позиций ортотропной термовязкоупругости.

Предполагается, что оболочка колеблется в линейной акустической среде, описываемой уравнением Гельмгольца с соответствующими условиями неразрывности на поверхности оболочки. Для решения поставленной связанной задачи используется приближенный подход, основанный на методе моделирования реакции акустической среды путем введения локального импеданса, определяемого из решения модельных задач. Применение указанного метода позволяет последовательно решать задачу о динамическом напряженно-деформированном состоянии трехслойной оболочки и после нахождения полей перемещений и давления на поверхности определять поле динамического давления в жидкости с помощью интеграла Гельмгольца. Для численного решения задачи используется метод разложения в комплекснозначные ряды Фурье с последующим формированием квазиодномерной системы нормального вида, которая решается применением метода прогонки. В качестве численного примера рассмотрены вынужденные колебания круговой цилиндрической оболочки. Определяются как помодовые, так суммарные амплитудно-частотные и диссипативные характеристики оболочки, а также дальнее поле звукового давления в окружающей акустической среде.

Гидродинамическое моделирование движителя в виде цилиндрической оболочки в потоке жидкости

Сметанин Б. И., Тарасов А. Е.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
smet@math.rsu.ru

Рассмотрена осесимметричная задача о вынужденных колебаниях круговой цилиндрической оболочки в потоке идеальной несжимаемой жидкости в линейной постановке. Задача является математической моделью волнового движителя в виде цилиндрической оболочки, взаимодействующей с жидкостью. Движение жидкости считается потенциальным, возмущения оболочкой потока жидкости являются малыми. Использовано линейное уравнение движения технической теории оболочек, полученное С. П. Тимошенко.

Применение интегрального преобразования позволило привести задачу к решению системы двух уравнений: интегрального и дифференциального. В качестве искомых функций выбраны функция давления потока на оболочку и функция радиальных перемещений точек оболочки. Линейность используемых уравнений позволила разделить решения интегрального и дифференциального уравнений.

Ядро интегрального уравнения имеет вид интеграла, подынтегральная функция которого содержит полюс на действительной оси плоскости комплексного переменного. Контур интегрирования у этого интеграла выбирается из условия затухания возмущений при удалении от передней части оболочки в сторону набегающего потока. Наличие полюса у подынтегральной функции ядра приводит к появлению внеинтегрального слагаемого при деформации контура на действительную ось. Ядро интегрального уравнения имеет сингулярную особенность. С учетом этого свойства ядра для решения интегрального уравнения применен метод ортогональных многочленов. При этом в представлении решения интегрального уравнения выделяется множитель, содержащий его особенность. Искомые функции ищутся в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода.

При построении решения дифференциального уравнения изгибных колебаний оболочки искомая функция ищется в виде разложения по функциям Крылова, которые являются собственными функциями колебаний пластины в вакууме, один конец которой жестко закреплен, а второй конец свободен. Эти функции образуют полную ортогональную систему функций.

Решения систем линейных алгебраических уравнений, полученных при исследовании интегрального и дифференциального уравнений, ищутся методом редукции. После нахождения этих решений по известным формулам могут быть определены основные механические характеристики задачи, в частности, сила тяги движителя. Эта сила состоит из двух составляющих. Первая из них определяется проекцией сил давления на ось оболочки. Вторая составляющая, подсасывающая сила, обусловлена большой скоростью жидкости вблизи передней кромки оболочки и, как следствие, разрежением жидкости. Эта сила направлена против потока.

Моделирование удара круглой пластинки, погруженной в несжимаемую жидкость

Сметанин Б. И., Федяева К. Е.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
smet@math.rsu.ru

Задачи об ударе играют важную роль при изучении внезапного возникновения движения тел в жидкости и при исследовании условий посадки летательных аппаратов на воду, в частности, объектов, возвращаемых из космоса.

В работе рассмотрена осесимметричная задача об ударе тонкой жесткой круглой пластинки, погруженной в несжимаемую жидкость, при наличии свободной поверхности. Движение жидкости в момент удара является потенциальным. Задача такого типа ранее исследована Седовым Л. И. Им рассмотрена плоская задача о горизонтальном ударе вертикальной пластинки, погруженной в несжимаемую жидкость, при наличии свободной поверхности. На задней поверхности пластинки в момент удара происходит отрыв жидкости, область отрыва выходит на свободную поверхность. Седовым Л. И. было установлено наличие области контакта на задней поверхности пластинки в некоторой окрестности ее конца.

В настоящей работе исследованы случаи различного расстояния от пластинки до свободной поверхности. Удар производится центральный, внедрение пластинки происходит без перекоса. В момент удара происходит отрыв жидкости (образование каверны) от задней поверхности пластинки. Целью работы является определение нормальных скоростей точек свободной поверхности и точек каверны при различном расстоянии от пластинки до свободной поверхности, а также исследование импульсивного давления в области контакта пластинки с жидкостью.

С использованием интегрального преобразования Ханкеля получена система двух интегральных уравнений. Эта система преобразована к одному сингулярному интегральному уравнению относительно некоторой вспомогательной функции. Исследованы свойства ядра этого уравнения. Эти свойства позволили установить характерную особенность решения интегрального уравнения. Решение ищется в виде разложения по многочленам Якоби с выделением установленной особенности. Для определения коэффициентов разложения применен метод коллокации. Метод позволяет свести решение интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений. При построении приближенного решения интегрального уравнения в рассмотренном диапазоне изменения характерного параметра задачи с достаточной для практического применения точностью можно ограничиться использованием 8-10 узлов коллокации. На основании этого решения получены графики суммарного ударного импульса, а также нормальных скоростей точек свободной поверхности и каверны для различных положений пластинки. Из графика скоростей точек каверны следует вывод о наличии контакта на задней поверхности пластинки в некоторой окрестности ее контура. Полученные результаты можно рассматривать как нулевое приближение при исследовании этой задачи с учетом области контакта на задней поверхности пластинки.

Неголономные связи в задаче контактного износа системы «колесо-рельс»

Солодовник М. Д.
Луганск, Восточноукраинский национальный унивеситет им. В. Даля
polina3045@mail.ru

Реализована задача о взаимодействии железнодорожной колёсной пары с рельсами с учётом проскальзываний, что придаёт задаче прикладной характер. В этом случае, очевидно, можно пренебречь нутационной составляющей движения колёс ($\Theta = 0$), а угловую скорость собственного вращения $varphi$ считать постоянной.

Как известно, повышенный контактный износ для колёс и рельсов характерен в местах искривления пути, стрелочных переводов, наклонов железнодорожного полотна и т. п. В задаче рассмотрен случай появления в этих местах виляния (малых циклических верчений) колёсных пар, которые инициируют появление прецессионной составляющей движения, характеризующейся углом ψ. Как показывают многочисленные теоретические, экспериментальные и эксплуатационные результаты, в местах проскальзывания происходит интенсивный износ контактирующихся поверхностей. С механической точки зрения двухсторонняя связь между колесом и рельсом нарушается и становится неголономной (неинтегрируемой).

Для определения контактных усилий, вызывающих износ, используются уравнения Лагранжа с учетом упругого скольжения при дополнительном условии неголономности.

Реализация полученной нелинейной системы позволяет определить закон движения центра масс колёсной пары и угла ψ, затем по известной схеме — контактное усилие при скольжении для оценки упругопластической степени износа. Разумеется, что полученное решение не выходит за рамки теории упругости и пластичности и не учитывает тепловых эффектов. Известно, что механическое трение всегда сопровождается выделением тепла в зоне контакта «колесо-рельс» для тонкого слоя в рельсе и в более толстом слое для предгребневой части колеса. Теплофизические свойства контактирующих тел из-за наличия поверхностного износа, шероховатости, заводских и эксплуатационных дефектов весьма неоднородны, что составляет определенную сложность в формулировке граничных условий. Само же решение теплофизической задачи после определения контактного давления со скольжением позволяет определить предельную скорость скольжения колеса, при которой внутренняя поверхность гребня, находясь в пластическом состоянии, начинает подплавляться и разрушаться. Для уменьшения износа предгребневой части колеса, в отличие от уже известных методов, представляют интерес разработки принципиально новых конструктивных решений, которые находятся в процессе обсуждения их целесообразности. Это — одно из перспективных направлений в изменении конструкции колеса. Для более изнашиваемой части рельса также есть ценные предложения, направленные на продление безопасного ресурса подвижного состава.

О некоторых задачах статики и динамики узких тонкостенных конструкций

Столяр А. М.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
ajoiner@mail.ru

Рассматривается применение метода асимптотического интегрирования в сочетании с методом пограничного слоя Люстерника–Вишика к решению ряда сингулярно возмущённых краевых и начально-краевых линейных и нелинейных задач о поведении различных узких пластинок и цилиндрических панелей со свободными продольными сторонами в условиях статического и динамического воздействия. В частности, рассмотрены задачи об изгибе изотропной прямоугольной пластины на нелинейно-упругом основании; об изгибе ортотропной пластины; о колебаниях ортотропной прямоугольной пластины на упругом основании; о колебаниях ортотропной пластины в нелинейной постановке. Уравнения пластин и оболочек рассматриваются в рамках моделей Кирхгофа и Кармана.

Малым параметром, который присутствует как в уравнениях, так и в граничных условиях, является отношение длин смежных сторон упругого элемента. Решение строится в виде суммы рядов по малому параметру. Коэффициенты первого ряда определяются в ходе первого итерационного процесса прямой подстановкой этого ряда в уравнения, краевые (и начальные) условия. Главные члены разложения удовлетворяют известным линейным и нелинейным начально-краевым задачам меньшей размерности. Последующие члены разложения удовлетворяют уравнениям математической физики того же типа. Однако для постановки задач необходимы дополнительные граничные условия. Невязки, которые появляются в ходе первого итерационного процесса при попытке удовлетворить граничным условиям, компенсируются в ходе второго итерационного процесса функциями пограничного слоя. Последние являются решением соответствующих линейных задач для бигармонического оператора (и его обобщений) в прямоугольнике (в полу-полосе). Функции пограничного слоя строятся в виде рядов по функциям П. Ф. Папковича. В этой связи рассматривается задача о возможности представления двух действительных функций в виде упомянутых рядов. Получены условия сходимости этих рядов, которые используются конструктивно — для вычисления граничных значений функций второго итерационного процесса.

Рассмотрены различные типы граничных условий, при которых проведение предельного перехода к задачам меньшей размерности оказывается возможным (или невозможным — при некоторых соотношениях между физическими параметрами оболочки).

С механической точки зрения в задачах о поведении узких пластин и цилиндрических панелей понятно, что предельный переход от двумерных к одномерным — балочным (арочным) уравнениям имеет место, когда продольные границы пластины свободны от усилий и моментов. Оказывается, что такой переход возможен и при заданных на сторонах панели изгибающих моментах.

О влиянии граничных условий на динамические характеристики термоупругого слоя

Суворова Г. Ю.
Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН
galias@yandex.ru

В рамках линеаризованной теории распространения термоупругих волн рассматриваются динамические связанные задачи в трехмерной постановке о гармонических колебаниях предварительно напряженной термоупругой полосы, занимающей область $|x_1| \leq \infty$, $0 \leq x_3 \leq h$. Предполагается, что колебания осуществляются под действием распределенной в области осциллирующей нагрузки, определяемой температурой или смещением поверхности среды $\mathbf{u_0}(x_1)e^{-i\omega t}$. На нижней грани поставлены условия: теплоизоляция или фиксированная температура, жесткое сцепление с недеформируемым основанием или же отсутствие трения.

Материал полосы предполагается гиперупругим, ортотропным, колебания — установившимися по гармоническому закону, начальная деформация — однородной, определяемой соотношениями

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{R} = X_k \mathbf{i_k}, \quad \mathbf{r} = x_k \mathbf{i_k}, \quad \mathbf{\Lambda} = \lambda_k \mathbf{i_k} \mathbf{i_k}, \tag{1}$$

где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты связанные с естественным состоянием, X_1, X_2, X_3 — декартовы координаты в начально-деформированном состоянии, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — кратности удлинений вдоль координатных осей.

Краевая задача описывается:

– линеаризованными уравнениями движения термоупругой среды

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \theta_{ij} = c^*_{ijkl} u_{k,l} - Q^*_{ij} u_4 \tag{2}$$

– линеаризованным уравнением теплопроводности

$$K_{ik} u_{4,ik} = \kappa \frac{\partial u_4}{\partial t} + \theta_1 Q^*_{ik} \frac{\partial u_{k,i}}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{c_\varepsilon \rho_0 \theta_1}{\theta_0} \tag{3}$$

с соответствующими граничными условиями.

Методами операционного исчисления смешанная контактная задача сведена к решению интегрального уравнения

$$\tau_0 (x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega} k (x_1 - \xi)\, q (\xi)\, d\xi \,, \quad k (s) = \int\limits_{\Gamma} K (\alpha) e^{-i\alpha s} d\alpha \,. \tag{4}$$

Построена функция Грина трехмерной задачи о колебаниях преднапряженного термоупругого слоя под действием тепловой нагрузки, найдены численно ее комплексные полюса. Исследовано влияние граничных условий на нижней границе слоя на дисперсионные свойства среды для частного случая — плоской задачи о колебаниях слоя под действием заданной на поверхности среды нормальной компоненты теплового потока. Решена смешанная задача о возбуждении колебаний в слое температурой для разных граничных условий.

Развитие теории дифракции Кирхгофа для многократных отражений волн

Сумбатян М. А., Боев Н. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
sumbat@math.rsu.ru

Работа посвящена развитию классической теории дифракции Кирхгофа применительно к многократному отражению волн от произвольной системы поверхностей (трехмерная теория). Показано, что при асимптотической оценке кратных дифракционных интегралов главный член асимптотики определяет звуковой луч, который отразился «зеркально» от всех отражателей по законам лучевой теории. Второй член асимптотики определяется вкладом от границ отражающих поверхностей.

В коротковолновой теории дифракции существует ряд классических теорий, позволяющих эффективно строить явные аналитические решения. В частности, в рамках физической теории дифракции Кирхгофа, для случая однократного отражения от гладкой поверхности, решение выписывается в виде некоторого дифракционного интеграла по этой поверхности. Ранее авторами было предложено обобщение теории Кирхгофа на случай нескольких последовательных отражений для двумерной задачи. Также было дано обобщение на трехмерный случай и осуществлен переход от скалярной задачи к упругой. Оказалось, что в случае одного отражения главный член асимптотики совпадает с лучевым зеркальным отражением по другим теориям. Для случая многократного отражения предложенный подход позволил впервые получить в явном аналитическом виде решение многих новых задач.

Результаты сравнения показывают, что главный лучевой член асимптотики дает очень грубое приближение к точному решению. В связи с этим становится актуальным построение следующего члена асимптотического разложения, чему и посвящена данная работа. Показано, что второй член асимптотики определяется вкладом граничных контуров отражающих поверхностей, при этом он имеет более высокий асимптотический вклад, чем следующий (второй) член полного разложения в точках «зеркального» отражения.

В качестве примера рассмотрено двукратное отражение от пары квадратных отражателей, расположенных под прямым углом друг к другу. При этом траектория луча зеркального переотражения после второго отражения меняет плоскость, в которой она расположена изначально. Ранее было показано, что главный лучевой член разложения обладает большой погрешностью, если его сравнить с результатами прямого численного расчета. Точность аналитического решения может быть улучшена путем учета второго члена асимптотики, который определяется вкладом от граничных контуров. В итоге первые 2 члена асимптотического представления двукратно отраженной волны имеют следующий вид:

$$p^{sc}(x) \sim \frac{e^{ik(L_0+L_1+L_2)}}{L_0+L_1+L_2} + \sum_{h=1}^{6} I_h(k) + O\left(\frac{1}{k}\right) \ (k \to \infty), \quad I_h(k) = O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right),$$

причем все шесть величин I_h выписываются в явном виде.

Длинные нелинейные волны, возбуждаемые приливом

Трепачев В. В.[*], **Трепачева А. В.**[**]
[*]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
[**]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
trepachev.victor@yandex.ru

Исследуется краевая задача для нелинейной системы уравнений теории длинных плоских волн, бегущих в заданном направлении на поверхности идеальной тяжелой несжимаемой жидкости над ровным твердым дном. Влияние дисперсии на волновое движение не учитывается. Безвихревое волновое движение жидкости в канале постоянной глубины вызвано периодическим колебанием во времени уровня поверхности жидкости, имеющим произвольный заданный спектральный состав в устье канала. Предложенная теория более полно соответствует данным наблюдений возбуждения волн приливом, т. к. позволяет учитывать состав спектра приливных волн, приходящих из открытого моря. Из полученных результатов теория Г. Ламба, развитая им для гармонических приливных волн, возбуждающих устье канала, вытекает в виде частного случая.

В линейной теории волн полностью отсутствуют эффекты опрокидывания и образования разрывов, кроме того, такое линеаризованное приближение часто не является равномерным на больших временах. В работе используется наиболее простой способ для исследования систем нелинейных уравнений теории волн — метод последовательных приближений. При этом в линейном приближении амплитуда первой гармоники постоянна, а амплитуда второй гармоники растет вместе с расстоянием по линейному закону. Подробный анализ модельных волновых уравнений показал, что в самой точке возникновения разрыва амплитуда второй гармоники принимает значения, примерно, одной второй от амплитуды первой гармоники. Отметим однокомпонентное гармоническое приливное колебание, возбуждающее бегущую волну на мелководье прибрежного района, рассматривалось в монографии Г. Ламба с помощью первых двух приближений метода последовательных приближений. На практике используют часто большее число составляющих гармонического разложения приливного потенциала. Ограничиваются однако рассмотрением порядка 11 наиболее существенных гармоник. В полусуточные составляющие входят гармоники, имеющие периоды: 12,42; 12,00; 12,66 и 11,97 часа. В работе предложена такая теория, в которой спектральный состав приливного колебания, возбуждающего волну на мелководье, может быть достаточно произвольным. Подобная теория важна для практики, т. к. известно, что конкретный вид спектрального состава и высота приливного колебания изменяются часто весьма в значительных пределах в зависимости от местных и региональных особенностей бассейна океана. Решена проблема построения условий для определения произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных как для возвышения поверхности жидкости, так и для скорости частиц жидкости в горизонтальном направлении над ровным дном.

Возбуждение кноидальных волн

Трепачев В. В.[*], Трепачева Г. Н.[**]
[*]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
[**]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*
trepachev.victor@yandex.ru

Построены новые более полные условия возбуждения для распространяющихся в одном направлении, плоских, длинных, периодических, обладающих малой дисперсией и одновременно нелинейных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, которая находится в безвихревом движении над ровным твердым дном. Анализ для волнового движения проводится с помощью уравнения Кортевега – де Вриза для возвышения поверхности в приближении Буссинеска. Вводится дополнительное условие, отражающее тот факт, что движение жидкости несжимаемо. Из полученных результатов вытекают известные в виде частных случаев, в частности теория бегущих симметричных кноидальных волн, предложенная Дж. Уиземом.

Уравнение теории длинных бегущих волн, учитывающее, одновременно, как нелинейные малые эффекты относительного порядка $\alpha = a/h_0$, (где a — амплитуда волны, h_0 — глубина слоя в невозмущенном состоянии), так и малые дисперсионные эффекты относительного порядка $\beta = h_0^2/\lambda^2$, (где λ — длина волны), называется уравнением Кортевега – де Вриза. Вывод уравнения Кортевега – де Вриза и асимптотическая оценка его погрешности приводится в известной монографии Дж. Уизема в 1977 г. Некоторые достаточные условия возникновения кноидальных волн и уединенной волны найдены в 1983 г. Н. Бхатнанагаром. В 1973 г. В. И. Карпман показал, что теория Кортевега – де Вриза ограничивается слабой нелинейностью, привел пример, когда превышение критической амплитуды вызывает нарушение эффекта стационарности распространения волны. Эффекты амплитудной и частотной дисперсии анализируются Т. С. Мурти только для случая уединенной волны в 1981 г. применительно к проблеме морских волн цунами. В 1977 г. С. Лейбович и А. Сибасс предложили для описания кноидальных волн использовать три независимых параметра: средний уровень колебаний, амплитуду колебаний и величину модуля эллиптической функции. Виноградова М. Б. и Руденко О. В. в 1990 г. вводят удобное для приложения понятие постоянной полной энергии. Л. М. Бреховских и В. В. Гончаров отметили, что даже слабая дисперсия волн на мелкой воде в рамках теории Кортевега – де Вриза препятствует образованию фронта ударной волны, а также способствует образованию стационарной нелинейной волны, которая распространяется без изменения своей формы. Вопрос о том, каким образом проявляется эффект несжимаемости среды для дисперсии кноидальных волн на поверхности жидкости в литературе не рассматривался. Несжимаемость среды приводит к снижению количества независимых параметров до двух.

Колебания штампа на составной гетерогенной полосе

Усошина Е. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
elka-way@rambler.ru

Динамические воздействия массивных объектов на пористоупругие основания, описываемые как контактные задачи, привлекают неизменный интерес, что объясняется многочисленными приложениями в сейсморазведке, геофизике, строительстве. Наименее изученными в настоящее время являются вопросы влияния неоднородности слоистой пористой среды, ее водонасыщенности на распределение контактных напряжений. Учет обводненности и водонасыщенности, неоднородности основания позволяет с большей точностью моделировать динамические процессы в реальных средах, в том числе, и грунтовых.

Рассматривается задача о гармонических колебаниях массивного штампа на поверхности составной гетерогенной полосы под действием приложенной к нему силы. Составная гетерогенная полоса содержит заглубленный слой идеальной жидкости, который расположен на недеформируемом основании. Движение пористоупругой гетерогенной полосы, состоящей из упругого скелета и пор, заполненных вязкой аэрированной жидкостью, описывается уравнениями Био. Рассматривается случай непроницаемого штампа, вне области контакта лицевая поверхность свободна от напряжений. На линии раздела жидкой и гетерогенной сред предполагается свободная фильтрация жидкости через границу, при этом в пористой среде отсутствуют касательные напряжения, нормальные напряжения в пористой среде равны давлению в жидкости, движение жидкости через границу непрерывно. Силы трения между штампом и поверхностью основания отсутствуют. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность.

Матрица Грина для полосы строится с применением преобразование Фурье к определяющим уравнениям сред. Контактная задача при этом сводится к системе парных интегральных уравнений. Свойства ядра одного из интегральных уравнений изучались в предыдущих работах автора. Контакные напряжения ищутся в виде ряда по многочленам Чебышева с выделенной особенностью на краях штампа. Для решения системы парных интегральных уравнений используется метод коллокации. Узлы коллокации совпадают с узлами Чебышева. Через решения конечной системы алгебраических уравнений определяются напряжения под штампом, а также связь между воздействующей на штамп силой и осадкой штампа.

Численный эксперимент показал быструю сходимость метода, определено оптимальное количество точек коллокации. Изучено влияние водонасыщенности, неоднородности строения среды, частоты колебаний на контактные напряжения под штампом. Показано, что учет этих параметров приводит к существенному уточнению значений контактных напряжений.

Запрещенные зоны в функционально-градиентных фононных кристаллах при возбуждении плоских P и SV волн

Фоменко С. И., Голуб М. В.
Краснодар, Кубанский государственный университет,
Институт математики, механики и информатики
sfom@yandex.ru

Композитные материалы с полупериодической или периодической внутренней структурой в последние годы получают все более широкое применение в самых разных отраслях. Так они уже нашли применение в авиа- и машиностроении, космической отрасли, как компоненты нано- и метаматериалов. Примером такого внедрения в оптике и микроэлектронике служат фотонные кристаллы, состоящие из системы периодических неоднородностей. В этих материалах наблюдается эффект появления зон полного непропускания нестационарного электромагнитного сигнала, так называемые запрещенные зоны (band gap). Волновые явления в фононных кристаллах схожи с наблюдаемыми в фотонных кристаллах. Здесь также наблюдаются на определенных частотных диапазонах области полного отражения волновой энергии от периодической структуры (запрещенные зоны). Но рассматриваемые явления в упругих фононных кристаллах более сложны для анализа из-за бо́льшего количества распространяющихся в среде волн. Рассматриваемые в работе материалы имеют практическую значимость в задачах виброгашения и виброфокусировки, увеличения прочности конструкций, при создании актуаторов и фильтров, а также в других приложениях.

При изготовлении слоистых фононных кристаллов методом напыления, прессованием или с использованием других технологических процессов изменение физико-механических свойств при переходе от одного слоя к другому может происходить не скачкообразно, а непрерывно по некоторому закону. Целью настоящей работы является анализ влияния непрерывной неоднородности (функционально-градиентная прослойка) между слоями на волновые явления в рассматриваемых слоистых структурах, который, безусловно, необходим при проектировании фононных кристаллов и расчете их динамических свойств.

В работе рассматривается неограниченная упругая среда с внутренней периодической неоднородностью (фононный кристалл), состоящая из упругих однородных и/или функционально-градиентных слоев. Колебания генерируются падающей P- или S-волной. Волновое поле строится с использованием метода T-матриц, в том числе с помощью явного выделения сингулярных составляющих T-матрицы, что становится актуальным при увеличении числа ячеек в кристалле.

Установлено, что наличие функционально-градиентной прослойки между упругими слоями в ячейках фононного кристалла существенно влияет на запрещенные зоны в частотной области: они могут сдвигаться, расширяться или сужаться при увеличении относительной толщины градиентной составляющей. Приводятся диаграммы запрещенных зон в зависимости от толщин слоев, типа падающей волны и угла падения.

Плоская контактная задача для трехслойного цилиндрического основания

Чебаков М. И., Абрамович М. В., Колосова Е. М.
Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.
chebakov@math.sfedu.ru

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости о взаимодействии абсолютно жесткого цилиндра с внутренней поверхностью цилиндрического основания, состоящего из двух круговых цилиндрических слоев жестко соединенных между собой и с упругим пространством, при этом слои и пространство имеют различные упругие постоянные. Такая задача достаточно хорошо моделирует работу композиционного цилиндрического подшипника скольжения особенно при нагрузках, когда угловой размер площадки контакта соизмерим с шириной подшипника, а модуль упругости вкладыша и подложки различны и значительно ниже модуля упругости вала подшипника. Для поставленной задачи с помощью программ аналитических вычислений впервые получены точное интегральное уравнение первого рода с ядром, представленным рядом в явном аналитическом виде. Изучены основные свойства ядра интегрального уравнения, в том числе показано, что числитель и знаменатель символов ядер могут быть представлены в виде многочленов по произведениям степеней модулей сдвига слоев и полупространства. Найденные коэффициенты многочленов содержат степенные, показательные и логарифмические функции от коэффициентов Пуассона материала слоев и относительных радиусов границ. Установлено, что свойства трансформанты ядра интегрального уравнения при поведении в нуле и единице различны в случаях, когда двухслойное основание жестко закреплено по внешней границе или соединено с упругим пространством.

Изложена схема решения интегрального уравнения прямым методом коллокаций, которая позволяет получать решение задачи практически при любых значениях исходных параметров. Было проведено тестирование алгоритма расчетов путем сравнения числовых результатов в частных случаях (однослойное и двухслойное основание) с результатами, полученными при решении аналогичной задачи для однородного цилиндрического слоя другими аналитическими (асимптотическими) методами. Вычисления проводились при различных значениях N точек коллокаций с целью контроля сходимости расчетной схемы. Расчеты показали, что наблюдается уточнение результатов с увеличением числа точек коллокаций и при $N > 2001$ они практически не изменялись и совпадали с большой точностью при соответствующих геометрических параметрах с известными результатами в частных случаях.

Рассчитаны распределения контактных напряжений, размеры области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующих на него силы в зависимости от геометрических и механических параметров слоев и пространства.

Конечно-элементное моделирование железобетонной балки с дефектами

Черпаков А. В.[*], Каюмов Р. А.[**], Косенко Е. Е.[***], Косенко В. В.[***], Демидова А. В.[***], Зайцева М. М.[****]

[*]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.*

[**]*Казань, Казанский гос. архитектурно-строительный университет*

[***]*Ростов-на-Дону, Ростовский государственный строительный университет*

alex837@yandex.ru

На практике огромное количество конструкций изготавливают из железобетона. При проектировании ж/б конструкции в нее закладывается большой коэффициент запаса прочности, что позволяет при различных напряженных состояниях в сочетании с локальными повреждениями нести поставленные задачи. В течении срока эксплуатации возникают разные ситуации, несущие стихийный характер, которые могут привести к разрушению конструкции. Идентификация дефектов ж/б конструкции на различных стадиях ее эксплуатации, начиная с момента производства, может играть весомую роль в уточнении ее текущей несущей способности. Исследования показывают, что статическое пробное нагружение конструкции не учитывает повреждения, заложенные на стадии производства, которые могут уменьшить срок службы всей конструкции.

Идентификация дефектов в ж/б конструкции должна производится на двух этапах — численное моделирование и отработка на практике при сопоставлении диагностических признаков. В качестве метода идентификации дефектов в ж/б конструкции может быть использован неразрущающий метод вибродиагностики, позволяющий быстро оценить поврежденность конструкции.

В связи с тем, что механические свойства материала ж/б конструкции и первичные параметры сечения известны, анализ поврежденности конструкций основан на моделировании исследования параметров повреждений и их местоположения. Моделирование в элементах конструкции использует аналитический и конечно-элементный подходы, в сочетании с анализом признаков идентификации дефектов, а также базу натурных экспериментов с помощью тензометрического, оптического и вибродиагностического методов.

Применение различных методов диагностики с проведением модального анализа позволяет решить задачу идентификации повреждений в простых элементах ж/б стержневых конструкций с повышенной степенью достоверности результатов расчета.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 12-08-90815-мол_рф_нр).

Колебания неоднородного пороупругого слоя с пустыми порами

Шведов Д. С.
Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет
schvedden@gmail.com

Теория пористых линейно упругих материалов с пустотами первоначально была разработана Коуином и Нунциато. Она предназначена для моделирования упругих материалов, содержащих распределение малых пустот или пор. Главной особенностью данной теории является введение в определяющие соотношения новой переменной, характеризующей относительный объем пор, который берется в качестве независимой кинематической переменной. Включение новой переменной требует дополнительных сил для обеспечения равновесия объема пор. Массовая плотность выражается в виде произведения относительной пористости и массовой плотности основного материала. Следует отметить, что если объем пор обращается в ноль, поведение материала описывается классической теорией упругости. Теория пористых линейно упругих материалов с пустотами играет важную роль в практических проблемах изучения деформирования геологических и синтетических пористых сред, хорошо описывает поведение композитных, керамических, пенистых и пористых материалов. Отметим, что задачи пороупругости с постоянными физическими характеристиками для слоистых структур исследованы достаточно подробно с помощью аппарата интегрального преобразования Фурье. В то же время подобные задачи для неоднородных слоистых структур мало исследованы, причем необходимо не только исследование волновых полей и изучение влияния пористости, но и формулировка подходов, позволяющих определить законы неоднородности пористости и упругих характеристик.

В рамках плоской деформации рассмотрена задача об установившихся колебаниях неоднородного по толщине изотропного пористого упругого слоя. Нижняя грань слоя сцеплена с абсолютно жестким основанием, колебания вызываются поверхностной нагрузкой на верхней грани. При известных законах неоднородности для аналогов параметров Ляме – положительных функциях вертикальной координаты – колебания слоя описываются системой трех уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. С помощью преобразования Фурье и обращения некоторых операторов задача сведена к системе трех интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами. Осуществлена дискретизация системы интегральных уравнений Фредгольма с использованием квадратурной формулы трапеций и метода коллокаций. С помощью интерполяционной формулы Ньютона-Котеса построено численное обращение преобразования Фурье. Расчет вектора смещения и функции относительного объема осуществлен при различных наборах узловых значений. Рассмотрены различные законы изменения модулей Ламе и пористости. Представлены результаты вычислительных экспериментов для возрастающих и убывающих функций, характеризующих законы неоднородности в случае сосредоточенной и распределенной нагрузки. Изучены законы формирования волновых полей на границе слоя в зависимости от частоты колебаний.

Потеря устойчивости круглых плит из функционально-градиентных материалов

Шейдаков Д. Н.*, **Шейдаков Н. Е.****
**Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
***Ростов-на-Дону, Ростовский гос. экономический университет (РИНХ)*
sheidakov@mail.ru

Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел занимает важное место в механике сплошных сред, так как разрушение различных конструкций нередко происходит именно вследствие потери устойчивости под действием внешних нагрузок. В случае упругой среды теория устойчивости достаточно подробно разработана для однородных материалов. Имеется большое число публикаций по устойчивости как тонких и тонкостенных тел в форме стержней, пластин и оболочек, так и массивных (трехмерных) тел. Однако с распространением новых конструкционных материалов (поликристаллические и композитные материалы, зернистые и порошкообразные материалы, а также пористые материалы и пены), актуальной становится проблема устойчивости тел с функционально-градиентной структурой.

Целью настоящего исследования является изучение бифуркации равновесия нелинейно упругих плит из функционально-градиентных материалов. В рамках общей теории устойчивости трехмерных тел проведен анализ выпучивания круглой плиты при радиальном сжатии-растяжении. Для описания поведения плиты использовалась модель микрополярной сплошной среды. При этом предполагалось, что упругие свойства материала изменяются по толщине. Такой подход позволил более подробно изучить влияние структуры материала на потерю устойчивости плиты. Для определения докритического напряженно-деформированного состояния круглой плиты в условиях больших деформаций использовался полуобратный метод нелинейной теории упругости. Для модели физически-линейного материала получена система линеаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение неоднородной плиты в возмущенном состоянии. С использованием специальных подстановок сформулированы линеаризованные краевые задачи, как для общего случая, так и для случая осесимметричных возмущений. В последнем исследование устойчивости круглой плиты сведено к решению линейной однородной краевой задачи для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Путем численного решения сформулированных краевых задач для некоторых конкретных материалов найдены спектры критических значений коэффициента радиального сжатия-растяжения и соответствующие им моды выпучивания. Используя полученные результаты, проанализирован размерный эффект и изучено влияние упругих свойств материала на бифуркацию равновесия. Особое внимание уделено анализу того, как характер изменения свойств материала по толщине влияет на потерю устойчивости нелинейно-упругих плит с функционально-градиентной структурой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-08-01152-а, 12-01-00038-а) и частичной поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596).

Управление ЭГД течением в жидкой пленке при помощи электрического поля

Ширяева Е. В., Ширяева И. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
shir@math.sfedu.ru

Численно при помощи метода конечных элементов исследована задача об электрогидродинамическом течении в тонкой подвешенной жидкой пленке. Приведены результаты расчетов, показывающие возможность управления структурой течения при помощи внешнего электрического поля. Предполагается, что плоская подвешенная жидкая пленка с недеформируемыми границами находится во внешнем электрическом поле, создаваемым конденсатором, и сквозь пленку, в направлении перпендикулярном направлению внешнего поля, протекает электрический ток. Пространственное модулирование внешнего поля как кусочно-постоянное, так и гладкое, например, периодическое, позволяет создавать в пленке вращательные течения с заданным количеством вихрей.

Для проведения вычислений использована асимптотическая модель, описывающая квазидвумерное электрогидродинамическое течение. Такая модель применима не только для подвешенных тонких жидких пленок, но и для тонких плоских микроканалов. Указанная модель получена методом осреднения по толщине пленки в работах одного из авторов, в которых, в частности, показано, что средние напряжения Рейнольдса играют роль ζ-потенциала и, фактически, пространственная модуляция внешнего поля позволяет задавать на боковых границах пленки касательные скорости течения жидкости. Такие граничные условия, в конечном итоге, и обуславливают вращательное течение жидкости. Вычисления показали, что для параметров, соответствующих реальным пленкам, вихревые течения достаточно быстро становятся почти стационарными. На практике, такие течения можно использовать для интенсивного перемешивания многокомпонентных смесей в микроканалах.

Расчеты выполнены методом конечных элементов при помощи свободно распространяемого пакета FreeFem. Для прямоугольных областей с размерами $1:2$ использовались сетки с характерными размерами треугольников порядка 0,02, что позволило получать точность расчетов порядка одного процента. Для решения гидродинамической части задачи использовался метод проекций Чорина.

В основном, в работе представлены результаты расчетов функции тока течений для внешних электрических полей с кусочно-постоянной пространственной модуляцией. Приведены примеры образования вращательных структур с количеством вихрей от одного до четырех. Продемонстрированы примеры различных пространственных модуляций, приводящих к образованию одинакового количества вихрей (четырех). Помимо примеров вихревых структур, возникающих при кусочно-постоянных модуляций внешнего поля, приведен пример возникновения вихревой структуры в случае гладкой пространственно периодической модуляции.

Колебания оболочек с отрицательным коэффициентом Пуассона

Юдин А. С., Юдин С. А.

Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикл. математики им. Воровича И. И.

yudin@math.sfedu.ru

Одним из современных направлений механики деформируемого твердого тела является создание новых материалов композиционного типа, обладающих, в частности, отрицательным коэффициентом Пуассона (ОКП). В научной литературе имеются публикации, в которых указывается на необычное конструкционное поведение таких материалов. Обсуждаются некоторые концепции получения композитов сложной структуры, которые при макродеформации проявляют себя как материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона. В частности, подобным образом деформируются композиты, армированные жесткими волокнами овального сечения в одном направлении и криволинейными нитевидными волокнами в ортогональном направлении. Отрицательный коэффициент Пуассона могут также проявлять материалы двумерной пористой структуры (пенообразные) с ячейками специальной формы.

В предлагаемой работе рассматриваются вынужденные гармонические колебания диссипативных оболочек с точки зрения виброгашения. Используется метод комплексных амплитуд и полуаналитический подход к решению. В случае свободно опёртой на торцах цилиндрической оболочки подход основан на применении рядов Фурье по двум координатам. Задача на вынужденные колебания решается разложением амплитуд перемещений по собственным формам колебаний. При этом обеспечивается разделение уравнений для определения коэффициентов по номерам гармоник. Алгоритм на этой базе позволяет быстро строить необходимые для анализа характеристики с учётом потерь в материале.

Рассмотрена конструктивно-анизотропная цилиндрическая оболочка с отношением длины к радиусу 3.14. Коэффициент потерь в материале равен 0.03. Учёт потерь в оболочке выполняется через комплексные жёсткости. Вынуждающая гармоническая сила приложена посередине длины оболочки. Коэффициент Пуассона (КП) варьировался от 0.3 (обычный материал, исходная оболочка) до 0.3 (оболочка с ОКП). При значении КП=0.2 снижение модуля амплитуды входной податливости (перемещение под силой) составляет 8%. Для коэффициента 0.1 снижение составляет 16%, для 0–19%. Т. е. для материалов с положительным КП уровни вибрации ниже для меньших его значений. В отрицательной зоне эффект ещё выше и составляет 23–24%, что свидетельствует о достаточно заметном преимуществе материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона для целей виброзащиты. Показаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) входных податливостей для оболочки из традиционного материала (КП=0.3) и оболочки с КП=0.3. АЧХ характеризуются тем, что с увеличением частоты соответствующие формы колебаний на резонансных пиках имеют значения окружных гармоник в последовательности 3, 4, 2, 5 при одной продольной полуволне. На АЧХ, помимо уменьшения амплитуд колебаний, наблюдается также существенный сдвиг вверх резонансных частот. Для подавления вибраций это также положительный фактор, поскольку на более высоких частотах эффективнее задействуется поглощение колебательной энергии в материале.

Содержание

Для заметок

Для заметок