Российский Национальный комитет
по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Российский фонд фундаментальных исследований
Южный федеральный университет
Южный научный центр РАН

XVII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды»

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ

г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г.

ТОМ I

Ростов-на-Дону
2014

УДК 532.5
ББК 22.25
С 56

Отв. редактор А. О. Ватульян.
Редакторы: В. Н. Говорухин, М. Ю. Жуков, Л. М. Зубов, А. В. Наседкин, А. В. Попов, А. Н. Соловьев, В. Г. Цибулин, М. И. Чебаков, А. С. Юдин,

С 56 Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г. в 2 т. – Ростов-на-Дону. Издательство Южного федерального университета, 2014.
ISBN 978-5-9275-1321-5
Т. 1. – 232 с.
ISBN 978-5-9275-1322-2 (Т.1)

Сборник содержит научные доклады, представленные на XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г.

Конференция приурочена к 80-летию со дня рождения известного математика и механика, Заслуженного деятеля науки и техники Российской Федерации профессора В. И. Юдовича.

Основные результаты исследований посвящены моделированию течений идеальной и вязкой жидкости, проблемам устойчивости в механике, деформированию тел из физически и геометрически нелинейных материалов, разработке новых вычислительных технологий применительно к различным задачам механики деформируемого твердого тела, в частности, в механике контактных взаимодействий, теории пластин и оболочек, теории пластичности и разрушения, предварительно напряженных тел, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами (гетерогенных, пьезоэлектрических и функционально-градиентных материалов) и их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

Оригинал-макет подготовлен в системе LaTeX Поповым А. В.
Статьи публикуются с файлов-оригиналов, представленных авторами в оргкомитет конференции.

ISBN 978-5-9275-1322-2 (1 том) УДК 532.5
ISBN 978-5-9275-1321-5 ББК 22.25

XVII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды». (г.Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 14-01-20317

Содержание

Моргулис А. Б., Сазонов Л. И. О трудах В. И. Юдовича по математической гидродинамике 6
Азаров А. Д., Азаров Д. А. Описание высокоэластических деформаций с помощью трехмерной механической модели 11
Айзикович С. М., Ванг Ю. Ч., Волков С. С. Внедрение параболического индентора в неоднородную полосу, лежащую на упругом основании 16
Айзикович С. М., Васильев А. С., Волков С. С., Ке Л. Л. Контактные задачи для трансверсально-изотропного полупространства с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием 20
Акопьян В. А., Захаров Ю. Н., Паринов И. А., Рожков Е. В., Чебаненко В. А. Влияние вида и скорости механического нагружения на мощность и энергоэффективность многослойных пьезогенераторов . 24
Акопян В. Н., Саакян А. В. О вдавливании двух гладких штампов в упругую полуплоскость, содержащую жесткое включение конечной длины, одна грань которого оторвана от матрицы 29
Алексеев Г. В., Бризицкий Р. В. О разрешимости смешанной краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики . . . 34
Андреева Е. М., Крукиер Л. А., Муратова Г. В. Многосеточный метод для задач гидрогазодинамики 39
Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В. Численный анализ дисперсионных уравнений в случае наследственно-упругого сплошного цилиндра . 44
Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Кромочные волны в пластинах 49
Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г. Анализ бифуркаций и колебательных режимов сильно нелинейной виброударной системы 54
Баженов В. Г., Баранова М. С., Нагорных Е. В. Экспериментально-теоретическое исследование процессов упруговязкопластического деформирования и разрушения металлов и сплавов на газодинамической копровой установке 59
Баженов В. Г., Дюкина Н. С. Численное исследование сейсмических вибраций крупногабаритных сооружений с учетом контактного взаимодействия с грунтовым основанием 64
Базаренко А. Н., Петровская Н. В., Рябов Н. А. Примеры нелокальных бифуркаций инвариантных торов в малокомпонентных гидродинамических моделях с малым параметром 69
Батищев В. А., Петровская Д. С. Численный расчет спиральных мод в аорте 74
Богачев И. В., Ватульян К. А., Явруян О. В. Особенности реконструкции характеристик ФГМ с локализованным градиентом свойств 79
Боев Н. В., Андрющенко Е. В. Исследование фокусировки обратно отраженной акустической волны от препятствий канонической формы . 84
Бойко С. Б., Сандраков Г. В. Моделирование гидродинамических процессов с учетом фазовых переходов 89

Болнокин В. Е., Елагин А. В., Сторожев В. И. Управление эффектами взаимодействия геометрически нелинейных нормальных волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре с обобщенными смешанными краевыми условиями на границе 94
Бормотин К. С. Численное решение задач рационального формообразования тонкостенных конструкций в режиме ползучести 99
Бочарова О. В., Анджикович И. Е. О возможности мониторинга состояния структурно-неоднородных тел 104
Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеенко В. П. Аэроупругая устойчивость функционально-градиентных цилиндрических оболочек, содержащих жидкость 109
Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Павлова Л. Н., Пак Г. Н. Физико-механические свойства бетонов, содержащих техногенное сырье . . 114
Ватульян А. О., Ляпин А. А. Установившиеся колебания пороупругих одномерных тел с учетом предварительного состояния 119
Ватульян А. О., Недин Р. Д. Колебания тел при наличии неоднородных предварительно напряженных упруго-пластических зон 123
Гималтдинов И. К., Кильдибаева С. Р. Накопление газогидратной пены внутри купола под водой 128
Глухов И. А., Сторожев В. И. Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами 132
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А., Фоменко С. И. Распределение энергии поверхностного источника между волнами Лэмба . 137
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Ламмеринг Р. Теоретические и экспериментальные методы определения дисперсионных характеристик слоистых композитных материалов 142
Годес А. Ю., Лобода В. В. Об особенностях деформирования дуговой межфазной трещины с учетом контакта ее берегов 147
Гришина О. А., Кириллова И. В. Биомеханическое моделирование хирургического лечения острого коронарного синдрома 152
Демидов И. В., Фрейдин А. Б. Химическое сродство и кинетика фронта химической реакции в деформируемом материале: одномерный случай 156
Днепровский В. Г., Карапетьян Г. Я., Зорин Д. А. Исследование состояния поверхности подложек из сапфира с помощью поверхностных акустических волн 161
Долгих Т. Ф. Вычисление бифуркационных кривых для стационарной задачи конвекции Рэлея–Бенара–Кармана 166
Дорошенко О. В., Голуб М. В. Вывод пружинных граничных условий для неидеального контакта разнородных изотропных упругих материалов (трёхмерный случай) 171
Елаева М. С. Исследование математической модели разделения смеси веществ методом капиллярного зонального электрофореза 176
Еремеев В. В. Выпучивание двухслойной круглой плиты с предварительно напряженным слоем 181

Жамакочян К. А., Саркисян С. О. Метод конечных элементов в динамических задачах микрополярных упругих тонких балок 186
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Метод годографа для решения задачи о движении двухкомпонентной смеси под действием электрического поля 191
Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Численное исследование нестационарной задачи о поведении многокомпонентных смесей под действием электрического поля 196
Жукова Н. М. Влияние локальных нарушений условия электронейтральности на динамику формирования pH-градиента в растворе 201
Залётов В. В., Залётов С. В., Илюхин А. А. Численное исследование аналитического решения задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей . . . 206
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Квазитвердые состояния микрополярных упругих тел с распределенными дислокациями 211
Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А. Расчеты сложного упругопластического деформирования металлов по модифицированной модели теории процессов 216
Ильин К. И., Моргулис А. Б. Неустойчивость закрученных течений в зазоре между проницаемыми цилиндрами 221
Лекомцев С. В., Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П. Устойчивость некруговых цилиндрических оболочек с жидкостью под действием механических и температурных нагрузок 226

О ТРУДАХ В. И. ЮДОВИЧА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Моргулис А. Б., Сазонов Л. И.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства РСО–Алания

Дан обзор двух направлений в математической гидродинамике, развившихся из результатов В. И. Юдовича.

В начале нулевых В. И. Юдович опубликовал три обзора [1–3]. Название одного из них — *«Непреодолимое очарование и кошмарная трудность математической гидродинамики»*[1] — в полной мере отражает отношение автора к обозреваемому предмету. Именно в математической гидродинамике Виктор Иосифович добился целого ряда научных прорывов, и сегодня его результаты вдохновляют новые исследования во многих направлениях. В этой заметке мы коснёмся всего лишь двух тем: обоснования линеаризации и медленного коллапса.

1. Обоснование линеаризации. Рассмотрим систему Навье–Стокса в области Ω и её стационарое решение $(v_0(x), p_0(x))$. Определим спектр устойчивости как множество тех $\sigma \in \mathbb{C}$, которым соответствуют собственные моды малых возмущений вида $(\hat{u}(x), \hat{p}(x))\mathrm{e}^{\sigma t}$, сохраняющие граничные условия на $\partial\Omega$. ***Принцип линеаризации*** состоит в следующем: *пусть $Re\sigma < 0$ для всего спектра устойчивости v_0. Тогда v_0 устойчиво по Ляпунову, и, более того, все его возмущения (конечные, но достаточно малые) затухают при $t \to +\infty$. Если же $Re\sigma > 0$ в какой-то точке спектра, то v_0 неустойчиво.*

Ещё в середине 20-го века высказывались серьёзные сомнения в полной применимости линеаризации в задачах об устойчивости движения жидкости.[2] Тем не менее, В. И. Юдович обосновал принцип линеаризации в задачах об устойчивости стационарных и периодических по времени решений системы Навье–Стокса, включая автоколебания, см. [4].

На самом деле Виктор Иосифович обосновал принцип линеаризации для абстактных бесконечномерных систем с «вязкой диссипацией». Грубо говоря, предполагается, что линейная часть такой системы порождает аналитическую полугруппу, которая в состоянии хорошо «сгладить» нелинейность. В случае устойчивости по линейному приближению, эта полугруппа отрицательного типа, и нелинейное уравнение возмущений сводится к интегральному уравнению относительно векторной функции времени со значениями в подходящем банаховом пространстве. Экспоненциальная устойчивость равносильна разрешимости этого уравнения при любых достаточно малых данных в классе функций определённых на

[1] Под этим названием текст был впервые опубликован в виде англоязычного препринта. Русскоязычная версия опубликована под другим названием [2].

[2] Обсуждение этого вопроса можно найти в известной книге C. C. Lin The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press, 1955.

положительной временной полуоси и экспоненциально убывающих при $t \to +\infty$. Неустойчивость доказывается несколько проще, поскольку нет необходимости отслеживать поведение системы на бесконечных временах.

Отнесение конкретной системы к указанному классу сводится к оценке резольвенты оператора линеаризации. Виктор Иосифович установил такую оценку для резольвенты линеаризованной системы Навье–Стокса в гладкой ограниченной области или при условиях периодичности. Грубо говоря, требуется, чтобы длины волн рассматриваемых возмущений были ограничены сверху. Если речь идёт о течениях в бесконечной трубе, то такое ограничение создаётся условиями периодичности[3].

Обратимся теперь к проблеме устойчивости стационарного режима обтекания тела вязкой жидкостью. В этом случае ограничения на длины волн неестественны, и встаёт вопрос об их снятии. Так как скорость основного течения на бесконечности задана и отлична от нуля, используется линеаризация Озеена:

$$u_t + (v_0, \nabla)u + (u, \nabla)v_0 = -\nabla p + \Delta u - u_x,\ \mathrm{div} u = 0,\ u|_S = 0,\ u(\infty) = 0, \quad (1)$$

где $S = \partial\Omega$, и ось Ox направлена по потоку на бесконечности. Для таких операторов характерен непрерывный спектр, касающийся мнимой оси, так что имеет место своеобразный критический случай. Тем не менее, Л. И. Сазонов (1994,2003,2009,2012)[4] установил что линеаризация законна, если нейтральный *точечный* спектр пуст. Однако, критический случай все же напоминает о себе: затухание возмущений оказывается не экспоненциальным, а степенным. Реализация плана Юдовича в такой ситуации требует точной оценки степенного затухания полугруппы, ассоциированной с (1). Сперва такие оценки устанавливаются для полугруппы оператора Озеена ((1) при $v_0 = 0$). Для этой цели применяются гидродинамические потенциалы. Далее требуется оценить влияние возмущений, возникающих от обтекаемого тела ($v_0 \neq 0$), которые не обязаны быть малыми. Здесь помогает теория обратимости элементов некоммутативных банаховых алгебр, точнее, локальный принцип обратимости Аллана–Дугласа. Близкие методы позволяют распространить принцип линеаризации на периодические режимы обтекания.

2. Медленный коллапс. Виктор Иосифович, был, наверное, первым, кто в полной мере осознал, что само понятие устойчивости движения бесконечномерных систем зависит от метрики в пространстве возмущений. В динамике жидкости это обстоятельство отчасти скрывается сглаживающим влиянием вязкости, но в пределе исчезающей вязкости может проявиться в полной мере. Разыскивая подходящие примеры, в начале 70-х Виктор Иосифович открыл частные, но довольно широкие классы течений идеальной несжимаемой жидкости, вихрь которых (или, в двумерном случае, его градиент) с течением времени неограниченно растет по абсолютной величине [7, 8]. Такое поведение естественно трактовать как *медленный*, происходящий за бесконечное время, коллапс.

[3]Непериодический случай см. в [5].

[4]Ввиду недостатка места, мы даём точные ссылки только на работы В. И. Юдовича (иногда — с соавторами). Остальные ссылки довольно легко уточняются в Сети, и частично — в статьях из списка литературы.

Возможность коллапса гладкого течения за конечное время в двумерном случае исключена (W. Wolibner, 1933), а в трёхмерном — не исключена, но и не установлена, подробности см. в [1].

Медленный коллапс может рассматриваться как механизм накачки энергии, а в двумерном случае — энстрофии (т. е. среднеквадратической завихренности), в коротковолновую часть спектра. В этой связи особый интерес представляет гипотеза Виктора Иосифовича о том, что медленный коллапс происходит в большинстве течений; очевидное исключение составляют стационарные потоки, но и они принадлежат замыканиям этого большинства в любой из топологий C^k, $k > 1$. Эта гипотеза в полной мере не доказана, но подтверждается множеством частных примеров и результатов. Следуя [7, 8], рассмотрим, например, плоское течение в прямом канале. Пусть декартовы координаты x, y введены так, что $y = 0$ на стенке S_0; обозначим через ω завихренность этого течения. Тогда

$$(d/dt)(\omega_y(x,0,t)\omega_x(x,0,t)) = \omega(a,0,0)\omega_x^2(x,0,t), \quad x = x(a,t), \tag{2}$$

где a — начальная координата частицы жидкости, двигающейся вдоль S_0. Видно, что правая часть (2) знакоопределена, поэтому левая часть — функционал Ляпунова. Однако для любого стационарного течения правая часть (2) равна нулю тождественно. Тождество (2) влечёт неограниченный рост $(\nabla\omega)(x,0,t)$, $(x = x(a,t))$ при $t \to +\infty$, если начальное значение его правой части положительно [7, 8]. Отсюда, в частности, следует, что медленный коллапс течения в канале можно создать возмущением сдвигового течения, причём опасное возмущение может быть взято C^k−малым при любом фиксированном $k > 1$. Таким образом, *все* сдвиговые течения неустойчивы в метрике градиента вихря. Вместе с тем, сдвиговое течение может быть устойчивым в более слабой метрике, например, в метрике энстрофии (среднеквадратической завихренности). Такую устойчивость несложно проверить, пользуясь известными условиями В. И. Арнольда (1966). Обобщения функционалов типа (2) см. в [8, 9]. В последней работе эти функционалы записаны в бескоординатный форме и на этой основе исследован медленный коллапс течений в произвольной области.

Г. Кох (H. Koch (2002)) установил неустойчивость по Ляпунову *всех* плоских стационарных неизохронных[5] течений, если возмущения скорости измеряются метрикой $C^{k,\alpha}$, $k > 1$, $0 < \alpha < 1$. Доказательство основывается на двух соображениях: (а) сдвиг скорости (неизохронность) в основном течении приводит к постепенному росту дисторсий, и потому к растяжению градиента вихря; (б) такое растяжение сохранится при возмущениях, если предположить устойчивость в достаточно сильной метрике. Близкие соображения ранее использовал Н. С. Надирашвили (1991). Он доказал, что динамическая система, порождаемая уравнениями Эйлера в плоском кольце не обладает свойством возвращаемости траекторий, если в пространстве скоростей введена C^1-метрика. Примечательно, что формально система гамильтонова (В. И. Арнольд, 1966).

Поскольку твёрдотельное вращение в круге и состояние покоя в произвольной области изохронны, теорема Коха не может быть применена к ним непосред-

[5]Течение *изохронно*, если движение жидкости реализует периодическое семейство гомеоморфизмов области течения.

ственно. Вместе с тем, в обоих случаях функционалы типа (2) работают и дают гораздо больше, чем неустойчивость — потерю гладкости при C^k– малых возмущениях, $k > 1$ — любое [8, 9]. В общем случае эти функционалы имеют дискретный аналог. На этой основе удаётся доказать утверждение типа теоремы Коха [9]; существенное усовершенствование заключается в том, что неустойчивость получается в метрике градиента вихря при C^k–малых ($k > 1$ — любое) начальных возмущениях, тогда как теорема Коха требует измерять возмущения одной и той же метрикой, как в начальный, так и во все последующие моменты времени.

В трёхмерном случае имеется много красивых явных примеров медленного коллапса [8]. Особенно хорош пример несжимаемой пылевой среды. Классы течений, допускающих функционалы Ляпунова типа (2), существенно уже двумерных, но всё же не пусты. D. Serr (1999) нашёл классы трёхмерных течений, допускающих рост интегралов вихря по определённым материальным объёмам. Аналогичные течения стратифицированной жидкости см. в [10]. А. И. Шнирельман (1997) построил *линейный* возрастающий функционал Ляпунова для уравнений Эйлера[6]. На всех *гладких* течениях этот функционал постоянен. Тем не менее, он позволяет доказать постепенное «заострение» сингулярностей негладких течений. Линейных регулярных (в смысле распределений) функционалов Ляпунова не существует (за исключением тривиальных констант движения) [9].

Трёхмерные обобщения теоремы Коха неизвестны, равно как и примеры нетривиальных 3D-устойчивых течений. Известна *короктоволновая* линейная 3D-неустойчивость, [7] но неизвестно, влечёт ли она нелинейную неустойчивость.

О «типичной» скорости роста градиентов вихря мало что известно. Возможности здесь весьма широки. В. И. Юдович [11] установил, что L_p-нормы градиентов вихря ($p > 2$) растут не быстрее функции вида $c_0 exp(\exp(c_1 t))$. При этом макисмальный градиент скорости не превосходит $C_0\exp(C_1 t)$. Константы в *обоих* оценках зависят от L_p-нормы начального градиента вихря ($p > 2$). После Виктора Иосифовича регулярность двумерных течений исследовалась многими авторами с использованием разнообразных шкал пространств, но никому не удалось ни положить $p \leqslant 2$, ни уточнить скорость роста оценок со временем, ни получить оценку максимального градиента скорости через одно только его начальное значение. Недавние результаты ряда авторов указывают, что такие улучшения невозможны. Так, V. Sverak и A. Kisilev (2014, arXiv:1310.4799) анонсировали доказательство точности оценки Юдовича для некоторого гладкого течения в круге. J. Bourgain and D. Li (2013-2014, arXiv:1405.2847, arXiv:1307.7090) установили следующее: (а) существуют течения во всей плоскости, такие что, вихрь $\omega = \omega(x,t)$ непрерывен и поле скорости имеет конечную энергию во все моменты времени, начальный вихрь ω_0 финитен[8] и имеет градиент, принадлежащий L_2, но $\limsup_{t\to+0} \|\nabla\omega(\cdot,t)\|_{L_2} = \infty$ (!); (б) таких ω_0 много, а именно, для любой гладкой финитной функции η, нечётной относительно некоторой оси, найдётся ω_0, сколь угодно близкое к η в смысле малости величины $\max|\xi| + \int(\nabla\xi)^2 dz+$

[6]Ранее обсуждались функционалы Ляпунова *лагранжевых* уравнений гидродинамики.

[7]A. Lifschitz, E.Hameiri, 1991; S. Friedlander, M. Vishik, 1991; M. Vishik, 1996; дальнейшее развитие и ссылки см. в работах R.Shvydkoy, 2003-2010.

[8]т. е. отличен от нуля лишь внутри некоторого шара

энергия, $\xi = \omega_0 - \eta$. Столь же сильная некорректность установлена и в 3D для начальных скоростей из простанств Соболева $H^{5/2}$, а также из C^k, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, сильная некорректность есть в C^1 и C^2, но не в $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, где имеются по меньшей мере локальные оценки (Н. М. Гюнтер, 1927-28 и L Lichtenstein, 1925-1930).

Работа выполнялась в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание № 1.1398.2014/K).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Юдович В. И.* Глобальная разрешимость — против коллапса в динамике несжимаемой жидкости // Математические события XX века. М.: Фазис, 2002. С. 519–548.

[2] *Юдович В. И.* О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 1. С. 61–102.

[3] *Yudovich V. I.* Eleven great problems of mathematical hydrodynamics. // Mosc. Math. J. 2003. Vol. 3. no. 2. P. 711–737.

[4] *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1984. 191 с.

[5] *Юдович В. И., Ревина С. В.* Lp-оценки резольвенты оператора Стокса в бесконечном цилиндре // Мат. сборник. 1996. Т. 187 (229). № 6. С. 97–118.

[6] *Сазонов Л. И., Юдович В. И.* Устойчивость стационарных решений параболических уравнений и системы Навье–Стокса во всем пространстве // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 151–158.

[7] *Юдович В. И.* О потере гладкости решения уравнения Эйлера со временем // Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, Институт гидродинамики СО АН СССР, 1974. С. 71–78.

[8] *Yudovich V. I.* On the loss of smoothness of the solutions to the Euler equations and the inherent instability of an ideal fluid flows // Chaos. 2000. V. 10. Iss. 3. P. 705–719.

[9] *Morgulis A., Shnirelman A., Yudovich V.* Loss of Smoothness and Inherent Instability of 2D Inviscid Fluid Flows // Communications in Partial Differential Equations. 2008. 33:6. P. 943—968.

[10] *Юдович В. И.* О неограниченном росте вихря и циркуляции скорости течений стратифицированной и однородной жидкости // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 4. С. 627–636.

[11] *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область // Мат. сборник. 1964. Т. 64, № 4. С. 562–588.

Morgulis A. B., Sazonov L. I. *Yudovich's works in the mathematical fluid dynamics.* We present the survey of two topics which have arisen from Yudovich's results in the mathematical fluid dynamics.

ОПИСАНИЕ ВЫСОКОЭЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ТРЕХМЕРНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Азаров А. Д.[1], Азаров Д. А.[2]
[1]*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону*
[2]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Разработана трехмерная механическая модель для описания больших вязкоупругих деформаций. С помощью расчета «удлинений связей» и внутренних сил реакций механической конструкции модели через соотношения «силы–удлинения» предлагается моделировать закон состояния «напряжения–деформации» сплошной среды. Соотношения новой модели демонстрируются на примере одноосного растяжения

Аналогично способу моделирования больших упругих деформаций, представленному в статьях [1–4], рассматривается некоторый элементарный объем сплошной среды: куб с заключенной в него трехмерной механической конструкцией (см. рисунок 1). Ее узлы привязаны к центрам граней куба. Конструкция представляет собой систему деформируемых стержней (пружин, связей), отражающих свойства взаимодействий между всеми гранями элементарного объема при деформировании. В теории упругости изотропные свойства материала определяются двумя разными механическими показателями упругости. В предлагаемой модели введены два типа связей между противоположными гранями и между смежными гранями. «Длины связей» после деформирования определяют форму элементарного объема сплошной среды.

Деформационные характеристики стержней не являются свойствами связей между отдельными молекулами или атомами, но отражают некоторые интегральные оценки силовых взаимодействий общей структуры атомов-молекул, лежащих в основе реальных материалов.

Ниже рассматривается задача об одноосном растяжении изотропного материала, но поскольку в ходе деформирования материал приобретает свойства трансверсальной деформационной анизотропии, это отражено в уравнениях модели (введена разница в характеристиках связей по разным стержням).

Модель содержит три типа уравнений: геометрические соотношения (длины связей и углы), условия равновесия внешних и внутренних сил, зависимости сил от удлинений связей (функции жесткости).

Геометрия модели определяется размерами в недеформированном состоянии: a, b, c, l, n, p и в деформированном: A, B, C, L, N, P. При этом

$$A = a + \delta_a,\ B = b + \delta_b,\ C = c + \delta_c,\ L = l + \delta_l,\ P = p + \delta_p,\ N = n + \delta_n \qquad (1)$$

где δ_i — изменения (удлинения и сжатия) размеров (длин) связей. Для этих параметров справедливы зависимости:

$$l^2 = a^2 + b^2, p^2 = a^2 + c^2, n^2 = b^2 + c^2, L^2 = A^2 + B^2, P^2 = A^2 + C^2, N^2 = B^2 + C^2. \quad (2)$$

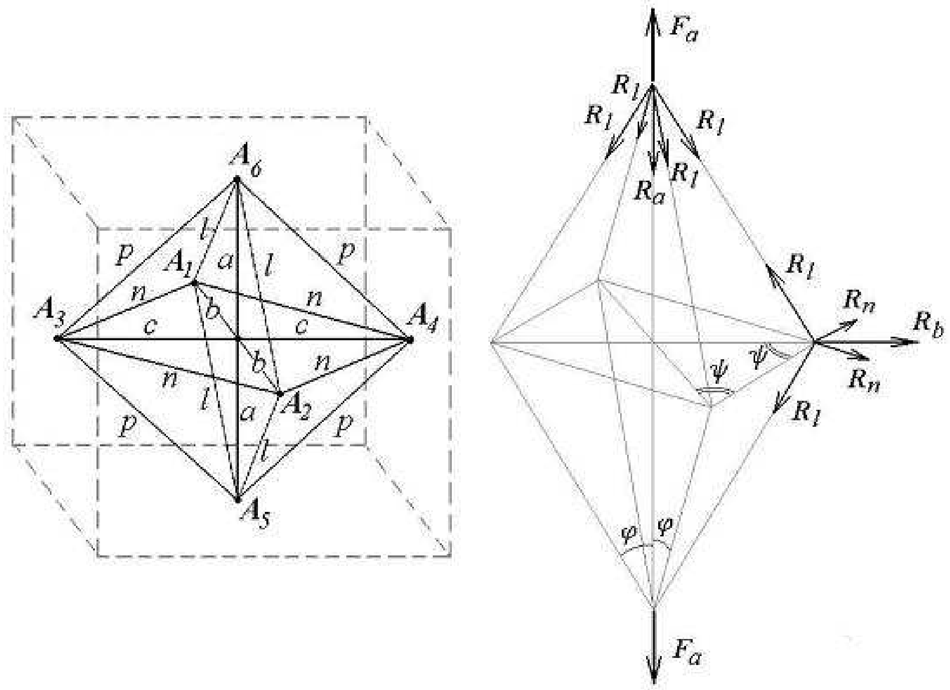


Рисунок 1 – *Геометрия связей и реакции связей модели*

В качестве элементарного объема без потери общности можно взять куб: $a = b = c = 1$, $l = n = p = \sqrt{2}$. При принятых условиях в отсчетной конфигурации углы между связями равны либо $\pi/4$, либо $\pi/2$.

В случае одноосного растяжения силой F_a поперечные силы $F_b = F_c = 0$, и в силу очевидной симметрии $\delta_b = \delta_c$, $\delta_l = \delta_p$, $n = l = \sqrt{2}$. Для деформированных углов (рисунок 1) в актуальной конфигурации модели (конструкции) $\psi = \pi/4$, а для угла φ получаем:

$$\cos\varphi = \frac{A}{L} = \frac{1+\delta_a}{\sqrt{2}+\delta_l}, \quad \sin\varphi = \frac{B}{L} = \frac{1+\delta_b}{\sqrt{2}+\delta_l}. \tag{3}$$

Соотношения (1), (2) дают зависимости (квадратные уравнения), достаточные для определения $\delta_l = \delta_p$, δ_n, если известны δ_a и $\delta_b = \delta_c$:

$$\delta_l^2 + 2l\delta_l - q_l = 0, \quad q_l = 2\delta_a + \delta_a^2 + 2\delta_b + \delta_b^2, \tag{4}$$

$$\delta_n^2 + 2n\delta_n - q_n = 0, \quad q_n = 4\delta_b + 2\delta_b^2. \tag{5}$$

В общем случае, из квадратных уравнений (4), (5) получаем функцию $\delta_l = \delta_p = \widetilde{\delta}_l(\delta_a, \delta_b)$

$$\widetilde{\delta}_l = -l \pm \sqrt{l^2 + q_l}, \quad \delta_n = \sqrt{2}\delta_b = l\delta_b. \tag{6}$$

Тогда из (3) следует

$$\cos\varphi(\delta_a, \delta_b) = \frac{1+\delta_a}{\sqrt{2}+\widetilde{\delta}_l(\delta_a, \delta_b)}, \quad \sin\varphi(\delta_a, \delta_b) = \frac{1+\delta_b}{\sqrt{2}+\widetilde{\delta}_l(\delta_a, \delta_b)}. \tag{7}$$

Для упругого материала для каждой связи в простейшем случае можно записать линейный физический закон: $R_i = k_i \delta_i$, $i = a, b, c, l, n, p$. Здесь R_i имеет смысл реакции связи, а параметр k_i — определяет жесткость (упругость) связи. Ниже рассмотрен случай изотропного материала $k_a = k_b = k_c$, $k_l = k_p = k_n$. В ходе деформирования изначально изотропный материал приобретает анизотропию, и становится трансверсально-изотропным $k_a \neq k_b = k_c$, $k_l \neq k_p = k_n$, поэтому, несмотря на равенство значений параметров в отсчетной конфигурации, далее для них сохраняются разные обозначения.

Для описания высокоэластических материалов, проявляющих вязкоупругие свойства, вместо упругих зависимостей используются дифференциальные соотношения, соответствующие, так называемому, «стандартному вязкоупругому телу»

$$\begin{cases} R_i = k_{i0}\delta_i(t) - k_{i1}\eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i = -\tau_i^{-1}(\eta_i(t) - \delta_i(t)) \quad\quad i = a, b, l, n \\ \quad\quad \eta_i(0) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Каждое из уравнений описывает релаксационный переход — убывание жесткости связи от «мгновенно-упругого значения» k_{i0} к «равновесному» значению $(k_{i0} - k_{i1})$. Параметры τ_a, τ_b, τ_l, τ_n определяют времена релаксационных переходов для каждой зависимости (связи). Эти параметры входят в дифференциальные уравнения в комплексе со временем t/τ_i, и определяют скорости релаксационных переходов.

В случае растяжения силой F_a вследствие очевидной симметрии, достаточно составить уравнения равновесия внешних и внутренних сил в двух узлах модели в проекциях на две ортогональные оси (см. рисунок 1). С учетом оговоренного характера деформационной анизотропии, получаем уравнения равновесия

$$F_a = R_a + 4R_l \cos\varphi, \quad 0 = R_b + 2R_l \sin\varphi + lR_n.$$

Из зависимостей (8) и из второго условия равновесия получаем уравнение для определения δ_b при заданном δ_a:

$$0 = [k_{b0}\delta_b(t) - k_{b1}\eta_b(t)] + 2[k_{l0}\delta_l(t) - k_{l1}\eta_l(t)] sin\varphi(\delta_a(t), \delta_b(t)) + l[k_{n0}\delta_n(t) - k_{n1}\eta_n(t)], \tag{9}$$

а из первого условия равновесия силу F_a, необходимую для растяжения на величину δ_a

$$F_a = [k_{a0}\delta_a(t) - k_{a1}\eta_a(t)] + 4[k_{l0}\delta_l(t) - k_{l1}\eta_l(t)] cos\varphi(\delta_a(t), \delta_b(t)). \tag{10}$$

Таким образом, получена система нелинейных уравнений (6)–(10)(включающая обыкновенные дифференциальные уравнения), которая позволяет найти все неизвестные функции $\delta_b(t)$, $\delta_l(t)$, $\delta_n(t)$, $F_a(t)$. Очень важным физическим условием модели является геометрическая ограниченность поперечной деформации $-1 < \delta_b(t) < 0$ при растяжении , несмотря на то, что δ_a может быть большой величиной. После того как для разных значений процесса растяжения $\delta_a(t)$ численно восстановлена зависимость $F_a(\delta_a)$, можно получить значение δ_a для любого заданного значения F_a.

Для решения задачи уравнения (6)–(9) были приведены к системе пяти нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно пяти неизвестных функций $\eta_b(t)$, $\eta_l(t)$, $\eta_n(t)$, $\delta_b(t)$, $\delta_l(t)$, которая интегрируется численным методом. Выражение силы реакции R_a, в зависимости от удлинения $\delta_a(t)$, вычисляется для любых значений t автономно. Значение растягивающей силы F_a определяется формулой (10).

На рисунке 2 представлен модельный пример зависимости «сила–удлинение», которой можно поставить в соответствие закон состояния «напряжения–деформации» нелинейной сплошной вязко-упругой среды. Модельный материал с параметрами $k_{a0} = k_{b0} = 1000$, $k_{l0} = k_{n0} = 500$, $k_{a1} = 500$, $k_{b1} = 600$, $k_{l1} = 200$, $k_{n1} = 350$, $\tau_a = 3$, $\tau_b = 2$, $\tau_l = 4$, $\tau_n = 3$ позволяет воспроизвести характерные для полимерных материалов реологические свойства.

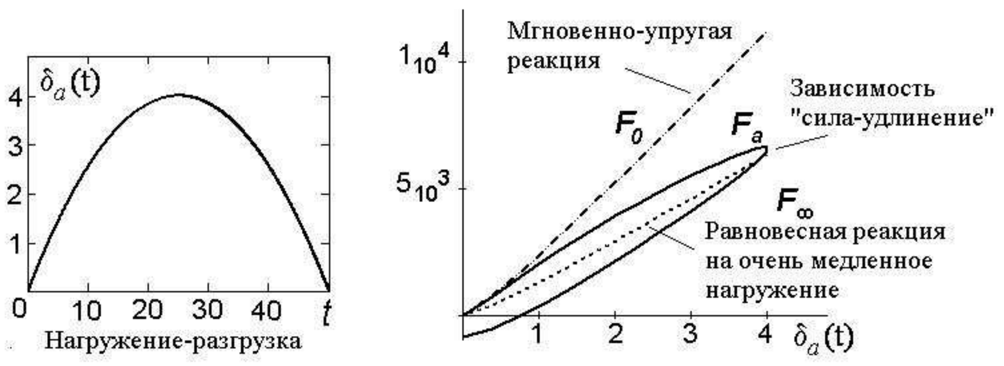


Рисунок 2 – *Зависимость «сила-удлинение» при нагружении и разгрузке*

На рисунке 3 показаны процессы изменения во времени внутренних реакций связей модели и внешней силы. Ассиметрия графиков на этапах нагружения и разгрузки демонстрирует реологическое запаздывание реакций.

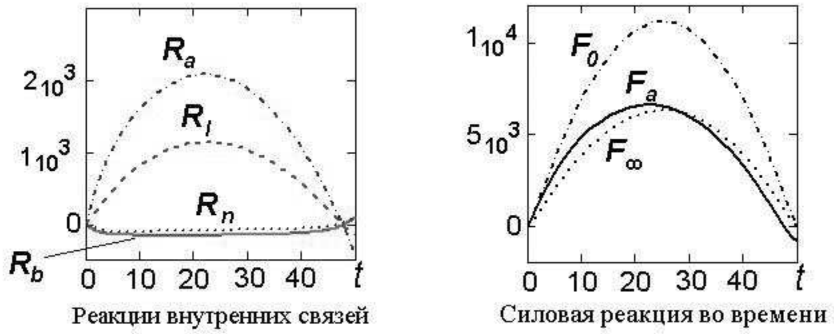


Рисунок 3 – *Реакции связей модели и сила F_a, как процессы во времени*

Для полного описания сложной s-образной кривой «сила–удлинение» для каучуков требуется развитие модели с применением нелинейных внутренних связей. Характер нелинейности становится ясным из статьи [3]. На s-образной кривой «сила–удлинение» для каучуков наблюдаются три характерных участка. Каждому из этих участков соответствует свой тип межмолекулярных взаимодействий, определяемый существенной перестройкой структуры материала. В настоящей модели использованные зависимости свойств связей (8) являются линейными, что достаточно для описания умеренно-больших вязкоупругих деформаций (когда еще нет значительной перестройки структуры).

Для идентификации параметров модели необходимы данные измерений растягивающей силы F_a, продольного удлинения δ_a и поперечного уменьшения сечения δ_b на образце материала для различных режимов нагружения во времени. Также, как в линейной теории вязкоупругости, характерными типами воздействий являются: нагружение при разных скоростях и релаксация при разных уровнях удлинения δ_a.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Азаров А. Д., Азаров Д. А.* Трехмерная механическая модель для описания больших упругих деформаций при одноосном растяжении // Вестник ДГТУ, 2011, Т. 11, № 2(53), Ростов-на-Дону, С. 147–156.

[2] *Азаров А. Д., Азаров Д. А.* Сопоставление трехмерной механической модели с законом состояния Мурнагана // Тр. XVI Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 16–19 октября 2012. Ростов-на-Дону: ЮФУ, Т. I. С. 5–9.

[3] *Азаров Д. А.* Нелинейно-деформируемая трехмерная механическая модель несжимаемых упругих материалов // Тр. XV Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 5–7 декабря 2011. Ростов-на-Дону: ЮФУ, Т. I. С. 11–15.

[4] *Азаров А. Д., Азаров Д. А.* Описание больших сдвиговых деформаций упругой среды с помощью трехмерной механической модели // Тр. VII Всероссийской (с междунар. участием) конф. по механике деформируемого твердого тела, г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.: в 2 т., Т. I., Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2013. С. 17–21.

Azarov A. D., Azarov D. A. *Description of large shear deformations of the elastic continuum by 3d mechanical model.* The three-dimensional mechanical model for the description of big viscoelastic deformations is developed. It is proposed to model the constitutive laws of the continuum by calculating the extensions of the connections and internal forces of reactions of a mechanical construction of model through «force-lengthening» ratios. The features of the model are shown for the case of uniaxial tension.

ВНЕДРЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА В НЕОДНОРОДНУЮ ПОЛОСУ, ЛЕЖАЩУЮ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Айзикович С. М.[1], Ванг Ю. Ч.[2], Волков С. С.[1]
[1]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*
[2]*Национальный университет Чэнгун, Тайнань*

В работе в аналитическом виде построено решение плоской контактной задачи о внедрении параболического индентора в неоднородную (функционально-градиентную) полосу, лежащей на упругой однородной полуплоскости. Для построения решения используется двусторонне асимптотически точный метод. Построенное решение является эффективным в широком диапазоне геометрических и физических параметров задачи. Рассмотрены численные примеры влияния на распределение контактных напряжений под индентором различных случаев неоднородности полосы. Исследовано влияние на напряжения наличия существенного скачка модуля Юнга в зоне сопряжения полоса-основание. Получена простая аналитическая формула для определения значений напряжений под центром индентора.

1. Постановка задачи. Недеформируемый параболический индентор взаимодействует с поверхностью Γ упругой неоднородной полосы Ω, лежащей на упругой однородной полуплоскости. С полуплоскостью связана декартова система координат x, y. Индентор вдавливается в поверхность полосы Ω силой P, при этом длина линии контакта равна $2a$. Вне зоны контакта индентора с основанием поверхность полосы не нагружена.

Коэффициенты Ламе Λ и M в полосе изменяются с глубиной по закону

$$\Lambda(y) = \begin{cases} \Lambda_1(y), & -H \leqslant z \leqslant 0 \\ \Lambda_2, & -\infty < x < -H \end{cases} \qquad \mathrm{M}(y) = \begin{cases} \mathrm{M}_1(y), & -H \leqslant z \leqslant 0 \\ \mathrm{M}_2. & -\infty < x < -H \end{cases} \tag{1}$$

Граничные условия задачи при сделанных предположениях имеют вид:

$$y = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_y^{(1)} = 0, & |x| > a \\ \nu^{(1)} = -f(x). & |x| \leqslant a \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $f(x)$ — функция, характеризующая форму индентора

Считаем, что на границе между полосой (верхний индекс (1)) и полуплоскостью (верхний индекс (2)) выполнено одно из двух условий:
а) покрытие жестко сцеплено с полуплоскостью

$$y = -H: \quad \begin{cases} \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad |x| > a \\ u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad |x| > a \end{cases} \tag{3}$$

б) покрытие свободно лежит на полуплоскости (без учета сил трения)

$$y = -H: \quad \begin{cases} \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(2)} = 0, \\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}. \end{cases} \tag{4}$$

u и v — смещения вдоль осей x и y соответственно. Считаем, что при $(|x|;-y) \to \infty$ напряжения в полуплоскости исчезают.

Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под индентором:

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = -q(x), \quad |x| \leqslant a. \tag{5}$$

Края индентора не врезаются в поверхность полуплоскости, т.е. выполнено соотношение:

$$q(\pm a) = 0. \tag{6}$$

2. Интегральное уравнение задачи и его решение. Поставленная контактная задача о вдавливании индентора в неоднородное покрытие упругой полуплоскости, сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int\limits_{-a}^{a} p(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\alpha)}{|\alpha|} e^{i\alpha(t-x)} d\alpha dt = 2\pi\Theta_0 f(x), \quad |x| \leqslant a. \tag{7}$$

В (7) $L(\alpha)$ — трансформанта ядра интегрального уравнения; $f(x) = \delta - cx^2$; δ — осадка поверхности под центром индентора; $\Theta_0(0) = 2\mathrm{M}(0)(\Lambda(0) + \mathrm{M}(0))(\Lambda(0) + 2\mathrm{M}(0))^{-1}$, где $\mathrm{M}(0)$ и $\Lambda(0)$ — коэффициенты Ламе полосы, значение которых берется на поверхности.

Далее рассмотрим четный случай, т.е. $f(x)$ и $p(t)$ — четные функции, тогда уравнение (7) можно представить в виде:

$$\int\limits_{0}^{a} p(t) \int\limits_{0}^{\infty} \frac{L(\alpha)}{|\alpha|} \cos(\alpha(t-x)) d\alpha dt = 2\pi\Theta_0 f(x), \quad |x| \leqslant a. \tag{8}$$

В работах [1–3] показано, что трансформанта ядра $L(\alpha)$ интегрального уравнения задачи о вдавливании индентора в неоднородное покрытие упругой полуплоскости обладает следующими свойствами:

$$L(\alpha) = A + B|\alpha| + C|\alpha^2| + O\left(|\alpha|^3\right), \quad \alpha \to 0, \tag{9}$$

$$L(\alpha) = 1 + D\,|\alpha|^{-1} + E\alpha^{-2} + O\left(|\alpha|^3\right), \quad \alpha \to \infty. \tag{10}$$

Трансформанту ядра $L(\alpha)$, обладающую свойствами (9), (10) можно, с высокой точностью, аппроксимировать следующим выражением [3,4]:

$$L(\alpha) \approx L_N(\alpha) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 + {A_i}^2}{\alpha^2 + {B_i}^2}, \quad A_i, B_i \in C. \tag{11}$$

Используя подход работ [3,5], для трансформанты ядра вида (11), с учетом (6), можно построить аналитическое решение уравнения (8), которое имеет вид:

$$p(x) = 2\frac{P_1}{\pi}\sqrt{1-x^2} + \left(\sum_{i=1}^{N} 2C_i I_1(A_i\lambda^{-1})\sqrt{1-x^2} - C_i A_i \lambda^{-1}\int\limits_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\Big[tI_0(A_i\lambda^{-1})\,\mathrm{ch}\left(A_i\lambda^{-1}(t-x)\right) - I_1(A_i\lambda^{-1})\,\mathrm{sh}\left(A_i\lambda^{-1}(t-x)\right)\Big]dt\right). \quad (12)$$

Постоянная c определяется из соотношения

$$c = \frac{L_N(0)}{\Theta_0}\left(\frac{P_1}{\pi} + \sum_{i=1}^{N} C_i I_1(A_i\lambda^{-1})\right). \quad (13)$$

Система линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_i дана ниже:

$$\sum_{i=1}^{N} C_i \left(\frac{I_0(A_i\lambda^{-1})A_i\lambda^{-1}K_1(B_k\lambda^{-1}) + I_1(A_i\lambda^{-1})B_k\lambda^{-1}K_0(B_k\lambda^{-1})}{A_i^2\lambda^{-2} - B_k^2\lambda^{-2})} + \left(\frac{2K_1(B_k\lambda^{-1})}{B_k^2\lambda^{-2}} + \frac{K_0(B_k\lambda^{-1})}{B_k\lambda^{-1}}\right) I_1(A_i\lambda^{-1})\right) = -\frac{P_1 2K_1(B_k\lambda^{-1})}{\pi B_k^2\lambda^{-2}}, \quad k = 1..N. \quad (14)$$

В формулах (12)–(14) $\lambda = \frac{h}{a}$ — характерный геометрический параметр задачи, h — толщина полосы, $P_1 = \frac{P}{a}$, где P — вдавливающая сила; координата x отнесена к радиусу зоны контакта a.

Из (12) можно получить аналитическое представление для значения контактных напряжений p в центре зоны контакта:

$$p = p(0) = 2\frac{P_1}{\pi} + \sum_{i=1}^{N} C_i\left(2I_1(A_i\lambda^{-1}) - A_i\lambda^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\left(I_0(A_i\lambda^{-1})L_1(A_i\lambda^{-1}) - I_1(A_i\lambda^{-1})L_0(A_i\lambda^{-1})\right) + I_0(A_i\lambda^{-1})\right)\right) \quad (15)$$

Заключение. В работе получено решение плоской контактной задачи о внедрении параболического индентора в неоднородное покрытие упругой полуплоскости. Использованный подход дает возможность рассматривать различные законы изменения модулей упругости по глубине полосы, в том числе сложные немонотонные законы [4], позволяет учесть изменение по глубине коэффициента Пуассона. Полученное приближенное решение эффективно во всем диапазоне значений параметра λ. Метод позволяет учитывать существенный скачок упругих модулей на границе сопряжения покрытия и подложки, что позволяет исследовать контактную задачу об индентировании мягкой неоднородной полосы, лежащий на существенно более жестком основании.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №14-07-00705-а, №14-08-92003-ННС_а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Айзикович С. М., Александров В. М.* О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // Доклады АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40–43.

[2] *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. № 1. С. 40–43.

[3] *Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А. В., Кренев Л. И., Трубчик И. С.* Контактные задачи теории упругости для функционально-градиентных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.

[4] *Айзикович С. М., Васильев А. С.* Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства // ПММ. 2013. Т. 77. № 1. С. 129–137.

[5] *Айзикович С. М.* Сдвиг штампом упругого неоднородного полупространства специального вида // Известия АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 66–72.

Aizikovich S. M., Volkov S. S., Wang Y.-C. *Indentation of a parabolic indenter into an inhomogeneous strip lying on an elastic foundation.* In this work, an analytical solution of a plane contact problem about indentation of a parabolic indenter into an inhomogeneous (functionally-graded) strip lying on an elastic homogeneous half-lane. To construct the solution, a bilateraly asymptotically exact method is used. Obtained solution can be effectively used in a wide range of values of geometric and physical parameters. The effect of different inhomogeneity cases on the contact stresses distribution is studied based on sample calculations. Also, the effect of significant change of Young's modulus value in the strip-foundation interface on the contact stresses is considered. We obtained a simple analytic expression for determining value of stresses under the indenter.

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НЕОДНОРОДНЫМ ПО ГЛУБИНЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Айзикович С. М.[1], **Васильев А. С.**[1], **Волков С. С.**[1], **Ке Л. Л.**[2]
[1]*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*
[2]*Пекинский университет транспорта*

В работе рассматриваются контактные задачи теории упругости о вдавливании и кручении недеформируемого штампа, сцепленного с трансверсально-изотропным полупространством с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием. Ось действия вдавливающей силы (для задачи вдавливания) и крутящего момента (для задачи кручения) нормальна к поверхности полупространства. Вне штампа поверхность полупространства не загружена. Модули упругости в покрытии изменяются с глубиной по произвольным непрерывным законам (функционально-градиентное покрытие) или описываются кусочно-постоянными функциями (многослойное покрытие). Для задачи вдавливания рассматриваются штампы цилиндрической, сферической или конической формы.

В рамках линейной теории упругости сформулированы математические постановки задач. Для сведения решения задач к решению парных интегральных уравнения использована техника интегральных преобразований Ханкеля. Вычисление значения трансформант ядер интегральных уравнений сведено к решению краевой задачи, которая решается численно для произвольных законов изменения упругих свойств в покрытии и имеет аналитическое решения в некоторых частных случаях. Проанализированы свойства трансформант ядер, характерные для однородных и неоднородных покрытий.

Трансформанты ядер аппроксимируются специальными выражениями, для которых получены замкнутые аналитические решения парных интегральных уравнений. Полученные решения асимптотически точны для малых и больших значений геометрического параметра задачи (отношение толщины покрытия к радиусу зоны контакта). Также получены аналитические зависимости вдавливающей силы (крутящего момента) от размера зоны контакта.

Для построения аппроксимаций трансформант ядер используется специально разработанный итерационный алгоритм, позволяющий получить аппроксимации с относительной погрешностью, не превышающей доли процента, даже для сложных законов изменения упругих свойств в покрытии.

Решения парных интегральных уравнений дают аналитические формулы для контактных напряжений на поверхности покрытия, зная которые становится возможным определить напряженно-деформированное состояние по глубине полупространства.

Численные примеры, иллюстрирующие качественные и количественные различия между процессом упругого деформирования материалов с однородными и неоднородными, изотропными и трансверсально-изотропными покрытиями приведены для ряда характерных законов изменения модулей упругости по глубине, различных толщин покрытий и упругих свойств подложки.

1. Постановка задач. Недеформируемый круглый штамп с плоским основанием контактирует с верхней гранью Г упругого неоднородного полупространства Σ по поверхности $z = 0, r \leqslant a$. С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z. Модули упругости полупространства изменяются по законам:

$$c_{kj} = \begin{cases} c_{kj}^{(c)}(z), & -H \leqslant z \leqslant 0 \\ c_{kj}^{(s)} = const, & -\infty < z < -H, \end{cases} \qquad (kj) = 11, 12, 13, 33, 44,$$

где $c_{kj}^{(c)}$ — непрерывно-дифференцируемые или кусочно-постоянные функции, определяющие закон изменения упругих свойств в слое $(-H \leqslant z \leqslant 0)$.

Задача А. К штампу приложен крутящий момент M, ось которого совпадает с осью z и нормальна к поверхности Г. Штамп жестко сцеплен с поверхностью Г. Под действием момента M штамп повернется относительно оси z на угол ε, вызвав деформацию кручения Ω. Требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений под штампом: $\tau_{\varphi z}|_{z=0} = \tau_a(r), \quad r \leqslant a$.

Задача Б. К штампу приложена вдавливающая сила P, ось которой совпадает с осью z и нормальна к поверхности Г. Под действием силы P штамп переместится в направлении оси z на величину $-\delta$. Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом: $\sigma_z|_{z=0} = -q_a(r), \quad r \leqslant a$.

2. Построение решений задач А и Б. Используя технику интегральных преобразований, поставленные задачи сводятся к решению следующих интегральных уравнений [1, 2]:

$$\text{А)} \int_0^1 \tau(\rho)\rho \int_0^\infty L_{\text{А}}(u) J_1(ur'\lambda^{-1}) J_1(u\rho\lambda^{-1}) du d\rho = \lambda\Theta_{\text{А}}(0) r'\varepsilon, \quad r' \leqslant 1, \tag{1}$$

$$\text{Б)} \int_0^1 q(\rho)\rho \int_0^\infty L_{\text{Б}}(u) J_0(ur'\lambda^{-1}) J_0(u\rho\lambda^{-1}) du d\rho = \lambda\Theta_{\text{Б}}(0)\delta, \quad r' \leqslant 1, \tag{2}$$

Здесь $\lambda = H/a$, $\Theta_{\text{А}}(0)$, $\Theta_{\text{Б}}(0)$ — некоторые известные выражения, зависящие от значений упругих модулей на поверхности, $L_{\text{А}}(u)$, $L_{\text{Б}}(u)$ — трансформанты ядер интегральных уравнений, значения которых находятся численно [1,2], использована замена переменных $r' = r/a$, $q(\rho) = q_a(\rho a)$, $\tau(\rho) = \tau_a(\rho a)$.

Используя двухсторонний асимптотический метод [3], можно получить приближенные аналитические решения интегральных уравнений (1), (2) в виде [1, 2]:

$$\tau(r') = \frac{4}{\pi}\varepsilon\Theta_{\text{А}}(0) \left\{ \frac{1}{\Pi_{\text{А}}(0)} \frac{r'}{\sqrt{1 - r'^2}} + \sum_{i=1}^N C_i Z(r', A_i\lambda^{-1}) \right\}, \tag{3}$$

$$q(r') = \frac{2}{\pi}\delta\Theta_{\text{Б}}(0) \left\{ \frac{1}{\Pi_{\text{Б}}(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - r'^2}} + \sum_{i=1}^N C_i \left(\frac{\operatorname{ch}(A_i\lambda^{-1})}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{A_i}{\lambda} \int_{r'}^1 \frac{\operatorname{sh}(A_i\lambda^{-1}t)}{\sqrt{t^2 - r'^2}} dt \right) \right\}, \tag{4}$$

$$Z(r,A) = \frac{\operatorname{sh} Ar}{r} + \frac{r \operatorname{sh} A}{\sqrt{1-r^2}\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)} - Ar\int\limits_r^1 \frac{\operatorname{ch} Atdt}{\sqrt{t^2-r^2}\left(t+\sqrt{t^2-r^2}\right)}.$$

Здесь постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений, $\Pi_{\text{А}}(u), \Pi_{\text{Б}}(u)$ — аппроксимации трансформант ядер интегральных уравнений:

$$\Pi_{\text{А}}(u) = \prod_{i=1}^{N} \frac{u^2+A_i^2}{u^2+B_i^2} \approx L_{\text{А}}(u), \quad \Pi_{\text{Б}}(u) = \prod_{i=1}^{N} \frac{u^2+A_i^2}{u^2+B_i^2} \approx L_{\text{Б}}(u), \tag{5}$$

Решения (3), (4) являются асимптотически точными при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ [3]. Точность решения для произвольного значения λ зависит от точности аппроксимации трансформанты ядра функцией (4). Алгоритм построения аппроксимаций высокой точности и связь между погрешностями решения и аппроксимации описаны в работе [4].

3. Численные примеры. Рассмотрим трансверсально-изотропную упругую подложку с модулями сдвига $G_{r\phi}(-H) = 5$ ГПа, $G_{\phi z}(-H) = 6$ ГПа и пусть модули сдвига на поверхности покрытия равны $G_{r\phi}(0) = G_{\phi z}(0) = 0.608$ ГПа. Такие значения модулей сдвига соответствуют свойствам хряща (покрытие) и кортикальной кости (подложка). Предположим, модули сдвига покрытия изменяются по одному из следующих законов:

1. $f_{r\phi}(z) = 5.03 - 4.422e^{5z/H}$, $f_{\phi z}(z) = 6.037 - 5.428e^{5z/H}$;
2. $f_{r\phi}(z) = 0.608 - 4.392z/H$, $f_{\phi z}(z) = 0.608 - 5.392z/H$;
3. $f_{r\phi}(z) = f_{\phi z}(z) = 0.608$;
4. $f_{r\phi}(z) = f_{\phi z}(z) = 0.118 + 0.489e^{5z/H}$.

Для наглядности рассмотрим относительную величину $\tau_{\text{rel}} = \tau(\lambda, r)/\tau_{\text{hom}}(r)$, где $\tau(\lambda, r)$ — контактные напряжения под штампом для рассматриваемой неоднородной среды, $\tau_{\text{hom}}(R)$ — контактные напряжения однородной изотропной среды с модулем сдвига, равным $\sqrt{G_{r\phi}(-H)G_{\phi z}(-H)}$.

Графики величины τ_{rel} для материалов 1–4 в случае относительно тонкого покрытия ($\lambda \approx 1/100$) и покрытия, сравнимого по размерам с размерами штампа ($\lambda = 1$), изображены на рисунках 1, 2. Из графиков видно, что неоднородность

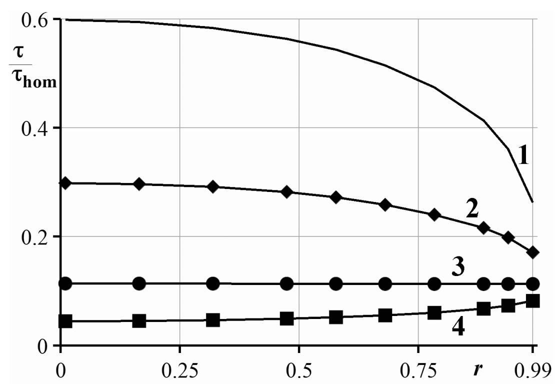


Рисунок 1 – Относительные контактные напряжения для законов 1–4. $\lambda = 1$

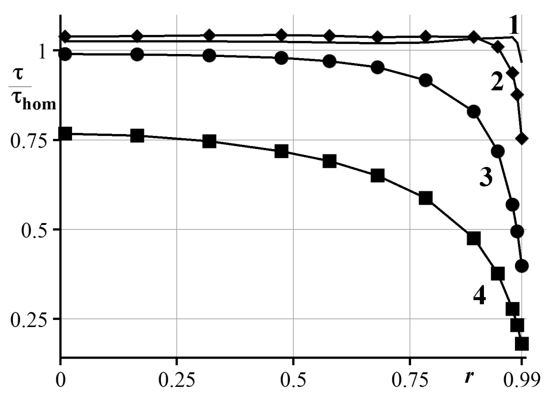


Рисунок 2 – Относительные контактные напряжения для законов 1–4. $\lambda = 0.014$

покрытия оказывает существенное влияние на решение контактной задачи, особенно для покрытий малой толщины. Наиболее существенное перераспределение контактных напряжений по сравнению со случаем однородного полупространства наблюдается на краю штампа ($r \to 1$).

Работа поддержана грантами РФФИ 14-07-90406-Укр_а, 14-08-91166-ГФЕН_а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Vasiliev A., Sevostianov I., Aizikovich S., Jeng Y.-R.* Torsion of a punch attached to transversely-isotropic half-space with functionally graded coating // Intern. J. Engng. Sci. 2012. Vol. 61. P. 24–35.

[2] *Айзикович С. М., Александров В. М.* Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство // Известия РАН. МТТ. 1984. № 2. С. 73–77.

[3] *Айзикович С. М.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // ПММ. 1990. Т. 54, № 5. С. 872–877.

[4] *Айзикович С. М., Васильев А. С.* Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства // ПММ. 2013. Т. 77, № 1. С. 129–137.

Aizikovich S. M., Vasiliev A. S., Volkov S. S., Ke L. L. *Contact problems for a transversely isotropic half-space with an inhomogeneous by depth transversely isotropic coating.* We consider elastic contact problems on indentation or torsion of an undeformable punch attached to a transversely-isotropic half-space with an inhomogeneous by depth transversely-isotropic coating. The indentation force (for indentation problem) and the torque (for torsion problem) are normal to surface of the half-space. Outside the punch, the half-space surface is unloaded. Elastic modulus of the coating vary by its depth by arbitrary continious (FGM) or piecewise-continious (layered composite) functional law. Mentioned problems was formulated using the linear theory of elasticity. To reduce problems to a solution of dual integral equations, we used Hankel's integral transform. Calculation of IE kernel transforms is carried out by numerical (or analytical for some particular cases) solution of a boundary value problem.

Kernel transforms are approximated by special expressions, for which analytical closed-form solutions of dual integral equations was derived. The obtained solutions are asymptotically exact for small and large values of ratio of coating thickness to contact area radius. Specially designed iterative approximation algorithm allows one to obtain approximations with relative error not greater than percent, even for complicated inhomogeneity laws. The analytical relations of indentation force (or torque) value from the size of contact area was obtained. Solution of dual integral equations derives analytical expressions for contact stresses on the coating surface, which can be used to determine stress-strain state in the depth of half-space.

Numerical examples are given illustrating qualitative and quantitative differences between elastic deformation of materials with homogeneous or inhomogeneous, and isotropic or transversely isotropic coatings. These results are proided for some typical laws of material properties variation by depth, different coating thickness values and different elastic properties of substrate.

ВЛИЯНИЕ ВИДА И СКОРОСТИ МЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЬЕЗОГЕНЕРАТОРОВ

Акопьян В. А.[1], Захаров Ю. Н.[2], Паринов И. А.[1], Рожков Е. В.[1], Чебаненко В. А.[1]

[1]*НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И. И. ЮФУ, Ростов-на-Дону*

[2]*НИИ физики ЮФУ, Ростов-на-Дону*

В работе приведены результаты исследования характеристик многослойных пьезогенераторов (ПЭГ) осевого типа прямоугольной формы с размерами 24×16×36 мм и кольцевой диаметром 18×8 мм высотой 11 мм, полученные при нагружении в квазистатическом и низкочастотном импульсном режимах. Определены оптимальные режимы нагрузок для максимальной выходной мощности генератора.

Известны работы, посвященные исследованиям характеристик ПЭГ, обзор которых проведен в [1]. ПЭГ осевого типа изучены в меньшей степени. Режим осевого механического воздействия хорошо известен и теоретически рассмотрен для процесса нагружения на низких частотах при больших уровнях механического напряжения [2]. Его выбор обусловлен областью применения ПЭГ осевого типа в качестве перспективных автономных источников энергии, преобразующих механическую энергию колебаний из внешней среды в электрическую. При этом ни в одной из известных работ [3–6], посвященных исследованиям характеристик ПЭГ осевого типа, не была рассмотрена задача влияния скорости нагружения на их выходные характеристики. Частично этот вопрос обсуждался в работе [7], посвященной исследованиям многослойного ПЭГ осевого типа, в которой была выявлена связь частоты нагружения со степенью нелинейности выходных характеристик ПЭГ. Все это свидетельствует об актуальности решения задачи о влиянии скорости механического нагружения на выходное напряжение ПЭГ.

В статье приведены результаты исследований характеристик ПЭГ осевого типа в режиме его низкочастотного импульсного и квазистатического механического нагружения, изложена краткая методика и результаты испытаний ПЭГ различной конфигурации с чувствительным элементом из пьезокерамик составов ЦТС. Показано, что при нагружении ПЭГ в импульсном режиме при частоте нагружения выше определенного значения его выходная мощность существенно больше, чем при квазистатическом режиме.

Объект исследований. Были исследованы многослойные ПЭГ осевого типа двух конфигураций: призматической геометрии с размерами поперечного сечения 24×16 мм^2 и высотой 10, 21 и 36 мм (модель 1) и кольцевой геометрии с наружным и внутренним диаметрами ∅18 и 8 мм с высотой 26 и 38 мм (модель 2). Многослойные ПЭГ первой модели выполнены из пьезоэлементов (ПЭ) из пьезокерамики ЦТС-19М толщиной 0,5 мм, электроды которых выведены на внешние поверхности ПЭ и соединены параллельно. ПЭ были поляризованы по высоте до значение пьезоэлектрического модуля d_{33}=360 пКл/Н.

Пьезогенератор (модель 2) состоит из 16 дисковых пьезолементов с внешним диаметром 18 мм и внутренним 8 мм, каждый толщиной 2 мм, с общей высотой многослойного ПЭГ 38 мм и общей электрической емкостью 21300 пФ. Исследования выходных характеристик обеих моделей ПЭГ были проведены в 2-х режимах: модель 1 при квазистатическом механическом нагружении ПЭГ и модель 2 при низкочастотном импульсном механическом нагружении.

Методика эксперимента. Измерения характеристик ПЭГ в квазистатическом режиме проводились на стандартной испытательной машине МИ-40КУ при различных скоростях нагружения от 2.5 мм/мин до 14 мм/мин.Регистрация и обработка экспериментальных данных проводились с помощью АЦП Е-14-140М и ПО PowerGraph. Величина нагружающего усилия, действующего на чувствиетльный элемент (ЧЭ) ПЭГ, регистрировалась при помощи динамометра испытательной машины, а съем значений электрического напряжения осуществлялся с сопротивления нагрузки $R_н$, подключенного параллельно испытываемому генератору (см. рисунок 1).

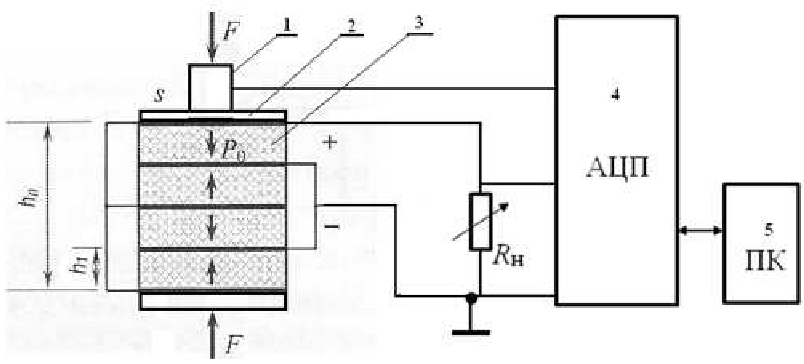


Рисунок 1 – Структурная измерительная схема: 1 — динамометр; 2 — металлическая накладка; 3 — пьезоэлемент; 4 — модуль АЦП; 5 — компьютер; $R_н$ — сопротивление нагрузки; h_1 — высота пьезоэлемента; $h_н$, — высота пакета пьезоэлементов генератора

При различных значениях сопротивления нагрузки $R_н$ и скоростях механического нагружения, равных 0.9, 1.9, 3.47, 4.3 кН/с были зарегистрированы значения выходного напряжения ПЭГ. Зависимость $U_{вых}(R_н)$ показала, что максимальное значение выходного напряжения достигается при $R_н = 2.5$ МОм. На основе обработки результатов измерений были построены графики зависимостей $U_{вых}(v)$, где v — скорость механического нагружения для 3-х образцов ПЭГ различной емкости (рисунок 2). Как следует из рисунка, максимальное значение выходного напряжения, равное 220 В, достигается при скорости нагружения $v = 4.3$ кН/с.

Поведение пьезопреобразователей при одноосном сжатии, параллельном вектору поляризации, при квазистатическом механическом нагружении пока еще мало изучено. В ГОСТе 12370–66 указан только верхний предел скорости нагружения при испытаниях на изгиб, равный 4 Н/с. Зависимость выходного напряжения ПЭГ от генерируемого заряда Q определяется в виде [4, 5]:

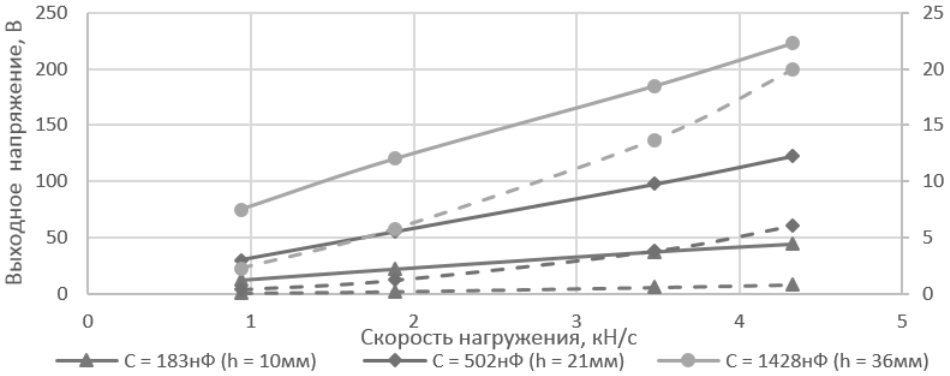


Рисунок 2 – Зависимость выходного напряжения (сплошная линия) и мощности (пунктирная линия) генераторов 24×16×36 мм^3 емкостью 1428 нФ, 24×16×21 мм^3 емкостью 502 нФ и 24×16×10 мм^3 емкостью 183 нФ от скорости механического нагружения при различной емкости ПЭГ.

$$U_{\text{вых}} = \frac{dQ}{dt} R_{\text{н}} \tag{1}$$

где $R_{\text{н}}$ — электрическое сопротивление нагрузки.

Из (1), следует, что выходное напряжение зависит от скорости роста заряда, и в конечном счете, от скорости механического нагружения. Этот факт ранее был описан в [9, 10] для зависимостей плотностей заряда и величины пьезомодуля d_{33} (в образце из пьезокерамики PZT-5) от медленно нарастающего сжимающего усилия до 350 МПа. В [9] было показано, что величина плотности заряда почти линейно растет с увеличением сжимающего напряжения до 100 МПа, но скорость нагружения не была приведена. Далее при увеличении напряжения график этой зависимости становится нелинейным. Известна зависимость скорости нарастания заряда от скорости нагружения [9]:

$$\frac{dQ}{dt} = d_{33} S \frac{d\sigma_{33}}{dt}, \tag{2}$$

где S — площадь поперечного сечения ПЭ.

Очевидно, что при постоянных значениях d_{33} и S зависимость заряда и выходного напряжения ПЭГ от скорости нагружения имеет почти линейный характер в условиях квазистатического нагружения. На графике $U_{\text{вых}}(v)$ (Рис.2), полученном для ПЭГ с ЧЭ из пьезокерамики ЦТС-19М (d_{33}=360 пКл/Н), зависимость $U_{\text{вых}}(v)$ имеет почти линейный характер. Далее по результатам измеренных пиковых значений выходного напряжения и выбранных величин сопротивления нагрузки $R_{\text{н}}$ по формуле:

$$W_{\text{вых}} = \frac{(U_{\text{вых}}^{\text{пик}})^2}{R_{\text{н}}}, \tag{3}$$

были рассчитаны значения $W_{\text{вых}}^{\text{пик}}$ и построен график зависимости от скорости нагружения (рисунок 2).

Из полученной зависимости следует, что при квазистатическом нагружении чем больше электрическая емкость ПЭГ, тем больше выходная мощность.

На втором этапе были проведены измерения выходного напряжения ПЭГ кольцевого типа (модель 2) при другом виде механической нагрузки — низкочастотном импульсном нагружении. Эксперимент проводился на разработанном ранее лабораторном испытательном стенде.

Для модели 2 ПЭГ осевого типа по значениям выходного напряжения при осевом импульсном нагружении с амплитудой $F_{сж}$=19,5 МПа и различных значениях электрического сопротивления нагружения $R_н$ были построены зависимости выходного напряжения $U_{разм}$ и выходной мощности от частоты нагружения ПЭГ. Ниже приведены графики этой зависимости для 2-й геометрии модели 2 (см. рисунок 3).

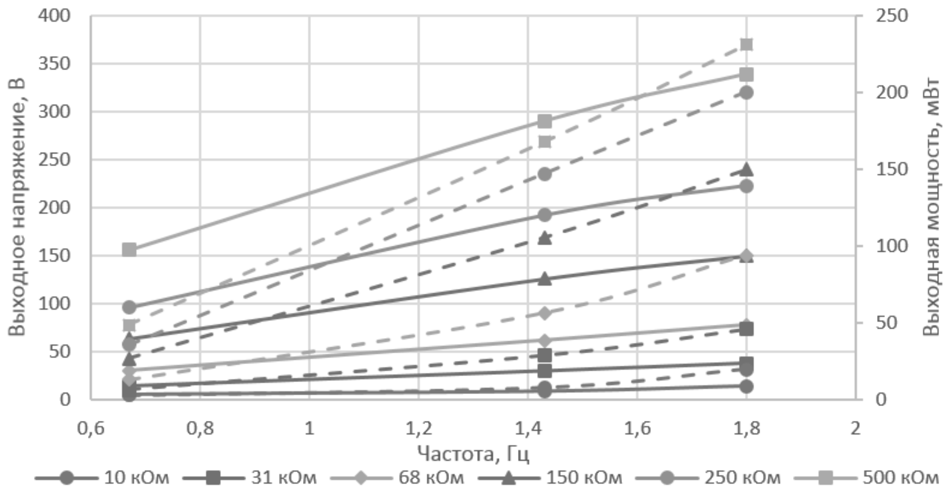


Рисунок 3 – Зависимость выходного электрического напряжения (сплошная линия) и выходной электрической мощности (пунктирная линия) от частоты нагружения при различных значениях электрического сопротивления нагрузки для кольцевого типа ПЭГ высотой 38 мм при импульсной механической нагрузке 19.5 МПа.

Как следует из графиков (рисунок 3) выходные электрическое напряжение и мощность ПЭГ при увеличении частоты его нагружения монотонно растет и демонстрирует почти линейный характер при значениях сопротивления нагрузки $R_н$ в диапазоне от 68 до 500 кОм. Максимальное пиковое значение выходного напряжения оказалось равным 327 В при электрической нагрузке 500 кОм, а электрическая мощность — 213 мВт.

Заключение.

1. Установлено, что выходная мощность ПЭГ осевого типа возрастает с увеличением частоты механического нагружения и электрического нагрузочного сопротивления.

2. При импульсной механической нагрузке 19.5 МПа можно получить выходную мощность 213.9 мВт при электрической нагрузке $R_н$=500 кОм. При этом мощность, отнесенная к объему ЧЭ данной модели ПЭГ равнялась 27.565 мВт/см^3, что на два порядка превышало значения относительной мощности ПЭГ многослойного типа модели 1 при квазистатическом нагружении (см. рисунки 2 и 3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (12-08-01137-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Akopyan V. A., Zakharov Yu. N., Parinov I. A. et al.* Chapter 23. Theoretical and Experimental Investigations of Piezoelectric Generators of Various Types // Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications, Ivan A. Parinov, Shun Hsyung-Chang (Eds.) 2013, New York: Nova Science Publishers. P. 309–334.

[2] *Махутов М. А.* Прочность конструкций при малоцикловом нагружении. М.: Наука, 1983. 270 с.

[3] *Головнин В. А., Горнев Е. С., Дайнеко А. В. и др.* Сравнительные характеристики пьезокерамических механоэлектрических преобразователей для генерации электричества // Вестник ТвГУ. Сер. «Физика». 2010. № 11. С. 33–46.

[4] *Rödig T., Schönecker A.* A Survey on Piezoelectric Ceramics for Generator Applications // Journal of the American Ceramic Society. 2010. Vol. 93, № 4. P. 901–912.

[5] *Казаков В., Климашин В., Никифоров В., и др.* Многослойные пьезоэлектрические актюаторы и особенности их применения // Компоненты и технологии. 2007. № 6. С. 62–65.

[6] *Афонин С. М.* Корректирующие устройства систем управления деформацией пьезоактюаторов нано - и микроперемещений //Нано– и микросистемная техника. 2011. № 3. С. 30–38.

[7] *Гриценко А., Никифоров В., Щеголева Т., и др.* Состояние и перспективы развития пьезоэлектрическогих генераторов // Компоненты и технологии. 2012. № 9. С. 63–68.

[8] *Мэзон У.* Физическая акустика. Том 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. 588 с.

[9] *Смажевская Е. Г., Фельдман Н. Б.* Пьезоэлектрическая керамика. М.: Советское радио, 1971. 200 с.

[10] *Zhao S., Erturk A.*Energy harvesting from harmonic and noise excitation of multilayer piezoelectric stacks: modeling and experiment // Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems. 2013. Vol. 8688, № 86881Q. P. Q1–Q8.

Akopyan V. A., Zaharov Y. N., Parinov I. A., Rozkov E. V., Chebanenko V. A. *Influence of the type and speed of mechanical loading on the output power and efficiency of multilayered piezoelectric generators*. The paper presents the results of a study of the output characteristics of uniaxial multilayered piezoelectric generators (PEG) of stack type with a rectangular shape with dimensions 24×16×36 mm and with the a ring shape with diameter 18×8 mm height 11 mm, obtained under quasi-static loading in the low-frequency and pulsed modes. The optimal loading regimes for maximum power output of the generator were defined.

О ВДАВЛИВАНИИ ДВУХ ГЛАДКИХ ШТАМПОВ В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, ОДНА ГРАНЬ КОТОРОГО ОТОРВАНА ОТ МАТРИЦЫ

Акопян В. Н., Саакян А. В.
Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Рассматривается однородная упругая полуплоскость, которая на некой глубине от границы содержит жесткое тонкое включение конечной длины, сцепленное с ней только по одной грани, и деформируется двумя гладкими штампами, приложенными к ее границе. На основе разрывных решений уравнений теории упругости для полуплоскости задача математически формулируется в виде системы из четырех сингулярных интегральных уравнений (СИУ) первого и второго рода относительно комплексных комбинаций контактных напряжений и производной перемещений берегов трещины. Определены показатели особенности искомых функций в концах отрезков интегрирования. Решение определяющей системы сингулярных интегральных уравнений строится методом механических квадратур. Проведен численный анализ и построены графики распределения контактных напряжений под штампами и под включением.

1. Постановка задачи. Пусть однородная упругая полуплоскость, занимающая в полярной системе координат (r, φ) область $\{0 \leqslant r < \infty, -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$, на отрезке $[a, b]$ линии $\varphi = 0$ содержит абсолютно жесткое тонкое включение, одна сторона которого оторвана от матрицы, и деформируется при помощи двух гладких штампов с плоскими основаниями, действующими на отрезках $[a_j, b_j]$ $(b_j > a_j > 0; j = 1, 2)$ границы полуплоскости $\varphi = (-1)^{j+1}\pi/2$ соответственно (рисунок 1).

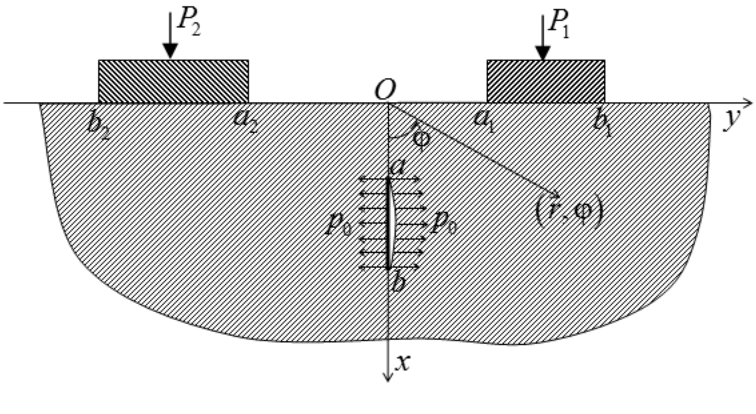


Рисунок 1 – *Схема поставленной задачи*

Мысленно разделив полуплоскость по линии $\varphi = 0$ на две четверть-плоскости и снабдив компоненты напряжений и перемещений, относящиеся к точкам четверть плоскостей $D_{\pm} = \{0 \leqslant \pm\varphi \leqslant \pi/2;\ 0 \leqslant r < \infty\}$, верхними индексами $(+)$ и

(-) соответственно, поставленную задачу можем сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи для областей $D_{\pm}$:

$$\begin{array}{ll}
\tau_{r\varphi}^{\pm}(r,\pm\pi/2)=0; & (0<r<\infty) \\
\sigma_{\varphi}^{+}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{+}(r,0)=\sigma_{\varphi}^{-}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{-}(r,0); & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix}0<r<a\\ b<r<\infty\end{pmatrix}$} \\
u_{r}^{+}(r,0)+iu_{\varphi}^{+}(r,0)=u_{r}^{-}(r,0)+iu_{\varphi}^{-}(r,0); & \\
\sigma_{\varphi}^{+}(r,\pi/2)=0; & (r<a_1,\ r>b_1) \\
\sigma_{\varphi}^{-}(r,-\pi/2)=0; & (r<a_2,\ r>b_2)
\end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ll}
\sigma_{\varphi}^{+}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{+}(r,0)=0; & \multirow{2}{*}{$(a<r<b)$} \\
u_{r}^{-}(r,0)+iu_{\varphi}^{-}(r,0)=c+i\gamma r; & \\
u_{\varphi}^{+}(r,\pi/2)=c^{+}; & (a_1<r<b_1) \\
u_{\varphi}^{-}(r,-\pi/2)=c^{-}; & (a_2<r<b_2)
\end{array} \quad (2)$$

Здесь $u_r^{\pm}(r,\varphi)$ и $u_{\varphi}^{\pm}(r,\varphi)$ — компоненты смещения точек областей $D_{\pm}$, удовлетворяющие уравнениям Ляме и связанные с компонентами напряжений $\sigma_{\varphi}^{\pm}(r,\varphi)$ и $\tau_{\varphi}^{\pm}(r,\varphi)$ известными формулами закона Гука [1], c и γ — постоянные, определяющие соответственно поступательное движение и поворот включения, а $c^{\pm}$ — постоянные, описывающие меру погружения штампов.

Продолжив условия (1) на интервалы (a,b) и (a_j,b_j) $(j=1,2)$, введем новые неизвестные функции:

$$\begin{array}{ll}
\left[\sigma_{\varphi}^{+}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{+}(r,0)\right]-\left[\sigma_{\varphi}^{-}(r,0)-i\tau_{r\varphi}^{-}(r,0)\right]=\chi(r) & \multirow{2}{*}{$(a<r<b)$} \\
\left[u_{r}^{+}(r,0)+iu_{\varphi}^{+}(r,0)\right]-\left[u_{r}^{-}(r,0)+iu_{\varphi}^{-}(r,0)\right]=W(r) & \\
\sigma_{\varphi}^{+}(r,\pi/2)=-p_1(r); & (a_1<r<b_1) \\
\sigma_{\varphi}^{-}(r,-\pi/2)=-p_2(r); & (a_2<r<b_2)
\end{array} \quad (3)$$

Далее, решив при помощи интегрального преобразования Меллина вспомогательную граничную задачу, определяемую условиями (1) и (3), выразим компоненты напряжения и производную от смещения через введенные неизвестные функции $\chi(r)$, $W(r)$ и $p_j(r)$ $(j=1,2)$. Удовлетворяя условиям (2), получим систему СИУ для определения указанных функций. При помощи замены переменных сформулируем полученные уравнения на интервале (-1,1) и введем безразмерные функции по формулам:

$$\varphi_j(x)=\frac{1}{(b-a)\mu}\left[\chi(z)-(-1)^j\frac{2i}{\kappa}W'(z)\right]; \quad \varphi_{j+2}(x)=\overline{\varphi_j(x)} \quad (j=1,2);$$

$$\varphi_j(x)=\frac{p_{j-4}(z_{j-4})}{(b_{j-4}-a_{j-4})\mu} \quad (j=5,6); \quad \kappa=\sqrt{3-4\nu};$$

$$z=\frac{b-a}{2}(x+\lambda); \quad \lambda=\frac{b+a}{b-a}; \quad z_k=\frac{b_k-a_k}{2}(x+\lambda_k); \quad \lambda_k=\frac{b_k+a_k}{b_k-a_k} \quad (k=1,2)$$

где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона материала полуплоскости, а черточка над функциями $\varphi_j(x)$ означает комплексно-сопряженные значения этих функций. В итоге, после некоторых математических выкладок, для определения этих функций получим следующую систему СИУ:

$$\begin{aligned}&\varphi_j(x)+\frac{id_j}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_j(s)}{s-x}ds+\sum_{k=1}^{6}\int\limits_{-1}^{1}K_{jk}(s,x)\,\varphi_k(s)ds=f_j\quad\left(j=\overline{1,4}\right)\\&(-1)^j\frac{1-\nu}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_j(s)}{s-x}ds+\sum_{k=1}^{6}\int\limits_{-1}^{1}K_{jk}(s,x)\,\varphi_k(s)ds=0\qquad(j=5,6)\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь

$$f_j=2\frac{p_0}{\mu}-\frac{4(-1)^j}{\kappa}\gamma;\quad d_j=\frac{1-2\nu-(-1)^j i\kappa}{2\,(1-\nu)};\quad d_{j+2}(x)=-\overline{d_j(x)}\quad(j=1,2)\,;$$

а функции $K_{jk}(x,s)\quad(j,k=1-6)$ — регулярные функции, явные виды которых здесь не приводятся из-за их громоздкости. Отметим, что систему (4) нужно рассматривать при условиях равновесия штампов и включения и условии равенства нулю раскрытия трещины в ее концевых точках:

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi_j(x)dx=\frac{p_0}{\mu}\quad\left(j=\overline{1,4}\right);\quad\int\limits_{-1}^{1}\varphi_5(x)dx=P_1^*=\frac{P_1}{\mu};\quad\int\limits_{-1}^{1}\varphi_6(x)dx=P_2^*=\frac{P_2}{\mu}\,.\tag{5}$$

Неизвестный угол поворота включения γ найдем из условия равенства нулю главного момента, действующего на включение

$$\int\limits_{-1}^{1}x\left[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\varphi_4(x)\right]dx=0.\tag{6}$$

Предполагая, что неизвестные функции системы (4) имеют степенные особенности, и исследуя поведение уравнений системы в окрестности концов отрезка интегрирования, используя известные результаты о поведении интеграла типа Коши в концевых точках [2], найдем, что решение системы можно представить в виде $\varphi_j(x)=\varphi_j^*(x)\,(1-x)^{\alpha_j}(1+x)^{\beta_j}$ где $\varphi_j^*(x)$ неизвестные функции, удовлетворяющие условию Гельдера на отрезке $[-1,1]$, а показатели α_j,β_j определяются формулами

$$\alpha_j=\beta_{5-j}=-\frac{2-(-1)^j}{4}-\frac{i\ln\kappa}{2\pi};\quad\beta_j=\alpha_{5-j}=-\frac{2+(-1)^j}{4}+\frac{i\ln\kappa}{2\pi}\quad(j=1,2)$$

$$\alpha_5=\beta_5=\alpha_6=\beta_6=-0.5\,.$$

Систему СИУ (4) решим методом механических квадратур [3], сводя ее, вместе с условиями (5) и (6), к системе из $6n+1$ линейных алгебраических уравнений относительно n коэффициентов каждого из многочленов, интерполирующих функции

$\varphi_j^*(x)$ $\left(j=\overline{1,6}\right)$, и угла поворота включения γ. После решения с.л.а.у, подлежащие определению функции $\varphi_j(x)$ $\left(j=\overline{1,6}\right)$ запишутся в виде:

$$\varphi_j(x)=\frac{2(1-x)^{\alpha_j}(1+x)^{\beta_j}}{n+\alpha_j+\beta_j+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{l_{i+n(j-1)}P_n^{(\alpha_j,\beta_j)}(x)}{\left(x-\xi_i^{(j)}\right)P_{n-1}^{(\alpha_j+1,\beta_j+1)}\left(\xi_i^{(j)}\right)};\ P_n^{(\alpha_j,\beta_j)}\left(\xi_i^{(j)}\right)=0.$$

Здесь вектор $L\{l_j\}$ $\left(j=\overline{1,6n+1}\right)$ — решение с.л.а.у. При этом $\gamma=l_{6n+1}$.

Коэффициенты концентрации разрушающих напряжений в окрестности вершины включения-трещины определяются формулами:

$$K_I(1)-iK_{II}(1)=-\frac{id_1\sqrt{2\pi}}{4\sin(\pi\alpha_1)}\varphi_1^*(1);\ K_I(-1)-iK_{II}(-1)=\frac{id_2\sqrt{2\pi}}{4\sin(\pi\alpha_2)}\varphi_2^*(-1).$$

2. Численный анализ. При проведении численного анализа длины оснований штампов и включения приняты неизменными и одинаковыми, тогда параметры λ, λ_1, λ_2 будут характеризовать удаленность соответствующих объектов от начала координат. Численные расчеты проводились при $n=10$, разница с результатами при $n=20$ составляет 1–2%. Отметим, что на рисунках приведены безразмерные аналоги величин, указанных в описании графиков. На рисунке 2 представлены графики распределения контактного давления под штампами при разном расположении штампов и включения друг относительно друга. Сплошная линия соответствует случаю $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$, пунктирная — случаю $\lambda=\infty$, $\lambda_1=\lambda_2=2$, т. е. случаю отсутствия включения, линия точка-тире — случаю $\lambda=2$, $\lambda_1=\lambda_2=\infty$, то есть решению задачи Садовского для одного штампа.

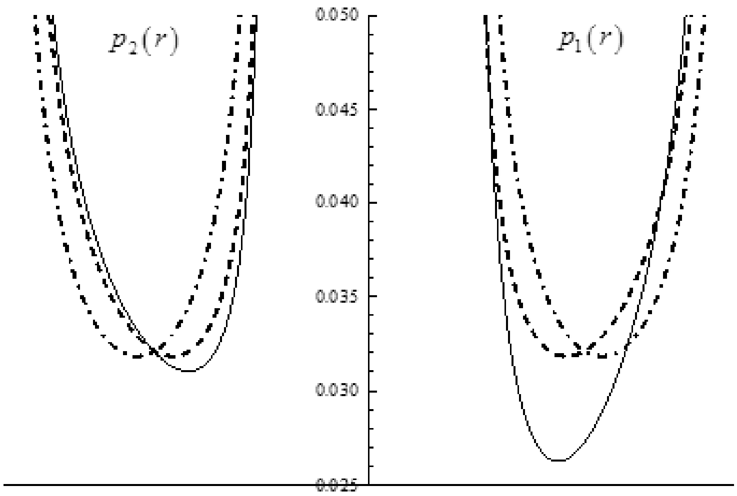


Рисунок 2 – *Распределение контактного давления под штампами*

На рисунке 3 представлены графики распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений под включением для указанных выше случаев взаиморасположения штампов и включения. Здесь пунктирная линия соответствует решению задачи для упругой плоскости, содержащей жесткое включение, одна грань которого сцеплена с плоскостью, а другая не контактирует с ней и подвержена действию равномерно распределенной нагрузки. Решение этой задачи в замкнутом виде есть в [1], а решение подобной задачи для составной плоскости, опять-таки в замкнутом виде, получено в работе [4]. Линия точка-тире соответствует рассматриваемой задаче при отсутствии штампов.

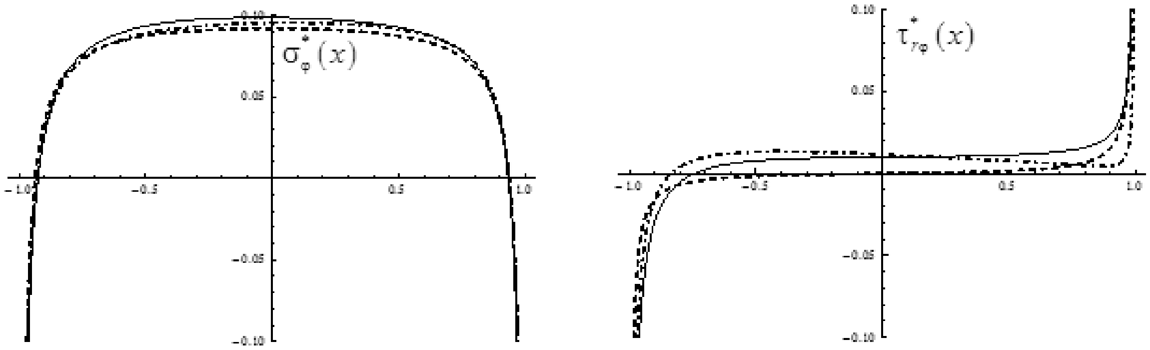


Рисунок 3 – *Нормальные и тангенциальные напряжения под включением*

Нетрудно заметить, что взаиморасположение штампов и включения в большей мере влияет на распределение тангенциальных напряжений под включением и контактного давления под штампом, находящимся со стороны трещины.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966.

[2] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968.

[3] *Sahakyan A. V.* Method of discrete singularities for solution of singular integral and integro-differential equations. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Georgia, Vol. 156 (2011). P. 101–111.

[4] *Акопян В. Н.* Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Изв. НАН РА, Механика, 1995. Т. 48, № 4. С. 57–65.

Hakobyan V. N., Sahakyan A. V. *About identation of two smooth punchs into a half plane containing a rigid inclusion of finite length, one side of which is torn off from the matrix.* The problem under consideration is reduced to system of four singular integral equations of the first and second kind respect to complex combination of stresses jump and jump in the derivative of displacements of the crack, as well contact stresses under punches. The governing system is solved by the method of mechanical quadratures. Numerical analysis was conducted.

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Алексеев Г. В., Бризицкий Р. В.
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Доказывается глобальная разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики, рассматриваемых при неоднородных смешанных граничных условиях для магнитного поля и однородном условии Дирихле для скорости.

1. Введение. Постановка задачи.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей Σ_τ и Σ_ν. В данной статье рассматривается следующая краевая задача для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - æ\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f},\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_1\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{E} + æ\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j},\ \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = q,\ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = \mathbf{q},\ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{k}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$ — векторы скорости и магнитного поля, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/\rho_0$, $p = p'/\rho_0$, где $\mathbf{E}'$ — электрическое поле, p' — давление, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность жидкости, $æ = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma = æ\nu_m$, σ, μ, ν и ν_m — постоянные коэффициенты электропроводности, магнитной проницаемости, кинематической и магнитной вязкостей, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\mathbf{j}$ — плотность сторонних токов, $\mathbf{f}$ — плотность внешних сил. Ниже на задачу (1)–(3) будем ссылаться как на задачу 1. Все величины в (1)–(3) являются размерными и записаны в системе СИ. В случае, когда $q = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, граничные условия в (3) для $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ отвечают часто встречающейся в приложениях ситуации, когда часть Σ_τ границы $\partial\Omega$ является идеально проводящей, тогда как Σ_ν является идеальным диэлектриком.

Исследованию разрешимости краевых задач для стационарных уравнений МГД посвящен ряд статей, из которых отметим работы [2–7]. Отметим, что в [1–5, 7] использовались условия $\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$ и $\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, отвечающие идеально проводящей границе, тогда как в [6] использовалось условие $\mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, отвечающее идеальному диэлектрику. Насколько известно авторам, до выхода [8] краевые задачи вида (1)–(3) для уравнений МГД при смешанных краевых условиях для магнитного поля еще не исследовались в литературе. В то же время в работах [9–11] была развита теория разрешимости краевых задач для div-rot систем и статических уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях. В [8] с использованием результатов [9–11] доказана глобальная разрешимость задачи (1)–(3) при однородных граничных условиях для скорости и электромагнитного поля. Целью настоящей работы является доказательство глобальной разрешимости задачи (1)–(3).

Будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, $H^0(D) \equiv L^2(D)$, где D обозначает область Ω, ее границу $\Sigma = \partial\Omega$ либо открытое непустое подмножество $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Соответствующие пространства вектор–функций будем обозначать через $H^s(D)^3$ и $L^2(D)^3$. Скалярные произведения и нормы в $L^2(D)$ и $L^2(D)^3$ обозначаем через $(\cdot,\cdot)_D$ и $\|\cdot\|_D$. При $D = \Omega$ индекс Ω будем опускать, полагая $(\cdot,\cdot)_\Omega = (\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|$. Через $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ и $\|\cdot\|_{-1,\Omega}$ будем обозначать нормы в $H^1(\Omega)^3$ и в $H^{-1}(\Omega)^3$. Для произвольного гильбертова пространства H через H^* будем обозначать двойственное к нему пространство. Как и в [10, 11], будем предполагать, что выполняются условия:

(i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, граница $\partial\Omega$ которой состоит из конечного числа непересекающихся замкнутых поверхностей класса C^2;

(ii) Σ_τ — непустое открытое подмножество границы $\partial\Omega$, состоящее из $M+1$ непересекающихся непустых открытых компонент $\{\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_M\}$ и существует положительное число d_0 такое, что $\operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_j) \geqslant d_0 > 0$ при $i \neq j$ и $M \geqslant 1$. Граница каждой из компонент σ_i есть либо пустое множество либо кривая класса $C^{1,1}$. Положим $\Sigma_\nu = \partial\Omega \setminus \overline{\Sigma}_\tau$.

Пусть $\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций, $H_0^1(\Omega)$ — пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, $V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$, $H^{-1}(\Omega)^3 = (H_0^1(\Omega)^3)^*$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p,1) = 0\}$, $H^1(\Omega,\Sigma_\tau) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Sigma_\tau} = 0\}$, $H_T^{1/2}(\Sigma_\nu)^3 = \{\mathbf{h} \in H^{1/2}(\Sigma_\nu)^3 : \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = 0\}$, $C_{\Sigma_\tau 0}(\overline{\Omega})^3 := \{\mathbf{h} \in C^0(\overline{\Omega}) : \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau}{=}0,\ \mathbf{h}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu}{=}\mathbf{0}\}$, $H(\operatorname{div},\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$, $H(\operatorname{rot},\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{rot}\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3\}$, $H^0(\operatorname{rot},\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{rot},\Omega) :\ \operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$, $H_{DC}(\Omega) = H(\operatorname{div},\Omega) \cap H(\operatorname{rot},\Omega)$, $\|\mathbf{u}\|_{DC}^2 := \|\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|^2$. Будем использовать следующие формулы Грина:

$$\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{w} - \mathbf{w}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u})dx = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{w}_T d\sigma \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, \tag{4}$$

$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi\, dx + \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\,\varphi\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\varphi\, d\sigma \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3,\ \varphi \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) справедливы соответственно для $\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot},\Omega)$ и $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div},\Omega)$ [12, с. 30] при надлежащей интерпретации интегралов по границе $\partial\Omega$. В случае, когда $\mathbf{w} \in C_{\Sigma_\tau 0}(\overline{\Omega})^3 \cap H^1(\Omega)^3$ или $\varphi \in H^1(\Omega,\Sigma_\tau)$, правые части в (4) и (5) принимают соответственно вид $\int_{\Sigma_\tau} (\mathbf{u}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{w}_T d\sigma$ и $\int_{\Sigma_\nu} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\varphi d\sigma$. Основываясь на этом, будем говорить, следуя [10], что функция $\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot},\Omega)$ удовлетворяет условию $\mathbf{u}\times\mathbf{n} = \mathbf{0}$ слабо на Σ_τ, если $\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{w} - \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})dx = 0$ для всех $\mathbf{w} \in C_{\Sigma_\tau 0}(\overline{\Omega})^3 \cap H^1(\Omega)^3$. Аналогично, будем говорить, что функция $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div},\Omega)$ удовлетворяет условию $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ слабо на Σ_ν, если $\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{div}\mathbf{u}\,\varphi)dx = 0$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega,\Sigma_\tau)$.

Через $H_{DC\Sigma_\tau}(\Omega)$ обозначим замыкание пространства $C_{\Sigma_\tau 0}(\overline{\Omega})^3 \cap H^1(\Omega)^3$ по введенной выше норме $\|\cdot\|_{DC}$. Положим $V_{\Sigma_\tau}(\Omega) = \{\mathbf{h} \in H_{DC\Sigma_\tau}(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{h} = 0 \text{ в } \Omega\} \cap \mathcal{H}_{\Sigma_\tau}(\Omega)^\perp$, $H_m^1(\Omega)^3 = \{\mathbf{h} \in H^1(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{h} = 0 \text{ в } \Omega\} \cap \mathcal{H}_{\Sigma_\tau}(\Omega)^\perp$, где

$$\mathcal{H}_{\Sigma_\tau}(\Omega) = \{\mathbf{h} \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{h} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{h} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega,\ \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = 0,\ \mathbf{h}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = \mathbf{0}\},$$

$$\mathcal{H}_{\Sigma_\nu}(\Omega) = \{\mathbf{h} \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{h} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{h} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega,\ \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = 0,\ \mathbf{h}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{0}\}.$$

Ниже будем использовать следующие свойства введенных пространств, доказанных в [10, 11] при выполнении условий (i), (ii):
1) пространства $\mathcal{H}_{\Sigma_\tau}(\Omega)$ и $\mathcal{H}_{\Sigma_\nu}(\Omega)$ конечномерны;
2) $H_{DC\Sigma_\tau}(\Omega) \subset H^1(\Omega)^3$ и норма $\|\cdot\|_{DC}$ эквивалентна $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ на $H_{DC\Sigma_\tau}(\Omega)$;
3) $\mathrm{rot}\, H_{DC\Sigma_\tau}(\Omega) = \mathrm{rot}\, V_{\Sigma_\tau}(\Omega)$ и справедливо ортогональное разложение

$$L^2(\Omega)^3 = \nabla H^1(\Omega, \Sigma_\tau) \oplus \mathrm{rot}\, H_{DC\Sigma_\tau}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{\Sigma_\nu}(\Omega); \tag{6}$$

4) с некоторой константой $\delta_1{=}\delta_1(\Omega, \Sigma_\tau){>}0$ выполняется неравенство

$$\|\mathrm{rot}\, \mathbf{h}\|^2 \geqslant \delta_1 \|\mathbf{h}\|^2_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{h} \in V_{\Sigma_\tau}(\Omega). \tag{7}$$

Согласно [10, 12], при выполнении условий (i), (ii) существуют константы $C_0 = C_0(\Omega), C_1 = C_1(\Omega)$, $\beta = \beta(\Omega)$, $\delta_0 = \delta_0(\Omega) > 0$ и $\gamma_i = \gamma_i(\Omega) \geqslant 0$, $i = 0, 1$, такие, что $\|\mathbf{\Psi}\|_{\Sigma_\tau} \leqslant C_0 \|\mathbf{\Psi}\|_{1,\Omega}$ для всех $\mathbf{\Psi} \in V_{\Sigma_\tau}(\Omega)$. Кроме того, выполняются неравенства

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geqslant \delta_0 \|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \ \ \|\mathrm{rot}\, \mathbf{H}\| \leqslant C_1 \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}\ \forall \mathbf{H} \in H^1(\Omega)^3, \tag{8}$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \mathbf{v} \neq 0} \frac{-(\mathrm{div} \mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geqslant \beta \|p\| \ \ \forall p \in L^2_0(\Omega), \tag{9}$$

$$|((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leqslant \gamma_0 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1_0(\Omega)^3,$$
$$|(\mathrm{rot}\, \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leqslant \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3. \tag{10}$$

Введем произведения пространств $Y = H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_m(\Omega)^3$, $X = H^1_0(\Omega)^3 \times V_{\Sigma_\tau}(\Omega)$ и $Z = V \times V_{\Sigma_\tau}(\Omega)$, а также двойственные к X и Z пространства $X^* = H^{-1}(\Omega)^3 \times V_{\Sigma_\tau}(\Omega)^*$ и $Z^* = V^* \times V_{\Sigma_\tau}(\Omega)^*$. Пространства Y, X и Z — гильбертовы по норме $\|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_X = (\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} + æ\|\mathbf{H}\|^2_{1,\Omega})^{1/2}$. Здесь æ — размерный параметр из первого уравнения в (2).

Введем на пространстве $H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_m(\Omega)^3$ форму $a(\cdot,\cdot)$ формулой

$$a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) := \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \nu_1(\mathrm{rot}\mathbf{H}, \mathrm{rot}\mathbf{\Psi}), \ \ \nu_1 = æ\nu_m.$$

Из (7), (8) следует, что форма a коэрцитивна на $X = H^1_0(\Omega)^3 \times V_{\Sigma_\tau}(\Omega)$, причем

$$a((\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) \geqslant \nu_*(\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} + æ\|\mathbf{\Psi}\|^2_{1,\Omega})\ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in X, \nu_* = \min(\delta_0 \nu, \delta_1 \nu_m). \tag{11}$$

Предположим в дополнение к (i), (ii), что выполняются условия:
(iii) $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$, $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$;
(iv) $\mathbf{k} \in L^2_T(\Sigma_\tau)^3$; $q \in H^{1/2}(\Sigma_\tau)$, $\mathbf{q} \in H^{1/2}_T(\Sigma_\nu)^3$;
(v) существуют векторы $\mathbf{H}_0 \in H^1_m(\Omega)^3 \cap H^0(\mathrm{rot}, \Omega)$ и $\mathbf{E}_0 \in H^0(\mathrm{rot}, \Omega)$ такие, что $q = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_\tau}$, $\mathbf{q} = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}|_{\Sigma_\nu}$, $\mathbf{k} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}|_{\Sigma_\tau}$, причем с некоторой константой C_Σ справедлива оценка $\|\mathbf{H}_0\|_{1,\Omega} \leqslant C_\Sigma(\|q\|_{H^{1/2}(\Sigma_\tau)} + \|\mathbf{q}\|_{H^{1/2}(\Sigma_\nu)^3})$.

Предположим, что четверка $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E})$ является решением задачи 1. Умножим первое уравнение в (1) на $\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3$, первое уравнение в (2) — на $\mathrm{rot}\, \mathbf{\Psi}$, $\mathbf{\Psi} \in V_{\Sigma_\tau}(\Omega)$, проинтегрируем по Ω, применим формулы Грина (4), (5) и сложим. Приходим к слабой формулировке задачи 1. Она заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_m(\Omega)^3 \times L^2_0(\Omega)$ из соотношений

$$a((\mathbf{u}, \mathbf{v}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathrm{div}\, \mathbf{v}, p) + æ(\mathrm{rot}\, \mathbf{\Psi} \times \mathbf{H}, \mathbf{u}) -$$

$$-æ(\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H},\mathbf{v}) = \langle\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\rangle = \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle + (\nu_1\mathbf{j}+\mathbf{E}_0,\operatorname{rot}\mathbf{\Psi})\ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in X, \qquad (12)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,\ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = q,\ \ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = \mathbf{q}. \qquad (13)$$

Указанную тройку $(\mathbf{u},\mathbf{H},p)$ назовем слабым решением задачи 1. Используя условия (iii), (iv), можно показать, что $F\in X^*$, причем

$$\|\mathbf{F}\|_{X^*}\leqslant M,\ M = \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + æ^{-1/2}(C_1\nu_1\|\mathbf{j}\| + C_0\|\mathbf{k}\|_{\Sigma_\tau}). \qquad (14)$$

Рассматривая сужение тождества (12) на $Z = V\times V_{\Sigma_\tau}(\Omega)$, будем иметь

$$a((\mathbf{u},\mathbf{v}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v}) + æ[(\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}\times\mathbf{H},\mathbf{u}) - (\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H},\mathbf{v})] =$$

$$= \langle\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\rangle\ \ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in Z. \qquad (15)$$

Отметим, что хотя (15) не содержит пары $(p,\mathbf{E})$, ее можно восстановить по паре $(\mathbf{u},\mathbf{H})\in H_0^1(\Omega)^3\times H_m^1(\Omega)^3$, удовлетворяющей (15), так, что выполняется тождество (12) и все уравнения в (2). Это достигается путем использования условия (9) для формы $-(\operatorname{div}\mathbf{v},p)$, ортогонального разложения (6) пространства $L^2(\Omega)^3$ и составляет содержание леммы.

Лемма 1. *Пусть при выполнении условий (i)–(v)* $(\mathbf{u},\mathbf{H})\in Y = H_0^1(\Omega)^3\times H_m^1(\Omega)^3$ *— решение задачи (13), (15). Тогда существуют такие функции* $p\in L_0^2(\Omega)$ *и* $\mathbf{E}\in H^0(\operatorname{rot},\Omega)$, *что* $\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{k}$ *в* $L_T^2(\Sigma_\tau)^3$, *тройка* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p)$ *является слабым решением задачи 1, а четверка* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,\mathbf{E})$ *удовлетворяет уравнениям в (2) почти всюду в* Ω *и первому уравнению в (1) в смысле обобщенных функций.*

Из леммы 1 следует, что для доказательства существования слабого решения задачи 1 достаточно доказать существование решения $(\mathbf{u},\mathbf{H})\in Y$ задачи (13), (15).

Сформулируем основной результат о разрешимости задачи 1.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(v). Тогда существует слабое решение* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p)$ *задачи 1 и справедливы следующие оценки:*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\leqslant M_\mathbf{u}\equiv(1/\nu_*)M,\ \ \nu_* = \min(\delta_0\nu,\delta_1\nu_m), \qquad (16)$$

$$\|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}\leqslant M_\mathbf{H}\equiv(1/\nu_*\sqrt{æ})M + C_\Sigma(\|q\|_{1/2,\Sigma_\tau} + \|\mathbf{q}\|_{1/2,\Sigma_\nu}), \qquad (17)$$

$$\|p\|\leqslant M_p\equiv\beta^{-1}[(\nu+\gamma_0 M_\mathbf{u})M_\mathbf{u} + æ\gamma_1 M_\mathbf{H}^2 + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}]. \qquad (18)$$

Здесь M, C_Σ *и* β *— константы, введенные в (14), условии (v) и (9), соответственно. Если функции* $\mathbf{f},\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{q}$ *и* q *малы либо “вязкости”* ν *и* ν_m *велики в том смысле, что* $\gamma_0 M_\mathbf{u} + \gamma_1(\sqrt{æ}/2)M_\mathbf{H} < \delta_0\nu$, $\gamma_1 M_\mathbf{u} + \gamma_1(\sqrt{æ}/2)M_\mathbf{H} < \delta_1\nu_m$, *где* δ_0, δ_1, γ_0 *и* γ_1 *— константы, введенные в (7), (8) и (10), то слабое решение единственно.*

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 3.1 [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00313-а), Министерства образования и науки РФ (контракт 14.Y26.31.0003).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Солонников В. А.* О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики // Труды матем. ин-та имени В. А. Стеклова. 1960. Т. 59. С. 174–187.

[2] *Алексеев Г. В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2003. Т. 44. № 6. С. 170–179.

[3] *Алексеев Г. В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики // Докл. АН. 2004. Т. 395. № 3. С. 322–325.

[4] *Алексеев Г. В.* Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45. № 2. С. 243–262.

[5] *Schotzau D.* Mixed finite element methods for stationary incompressible magnetohydrodynamics // Numer. Math. 2004. V. 96. P. 771–800.

[6] *Алексеев Г. В., Бризицкий Р. В.* Разрешимость смешанной краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики // Дальневосточн. матем. журн. 2002. № 3. С. 85–301.

[7] *Бризицкий Р.В., Терешко Д. А.* Разрешимость краевых задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики при неоднородных смешанных граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 2. С. 239–250.

[8] *Alekseev G., Brizitskii R.* Solvability of the boundary value problem for stationary magnetohydrodynamic equations under mixed boundary conditions for the magnetic field // Applied Mathematics Letters. 2014. V. 32. P. 13–18.

[9] *Fernandes P., Gilardi G.* Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 7. № 7. P. 957–991.

[10] *Auchmuty G.* Auchmuty, The main inequality of vector field theory // Math. Modeling and Methods in Applied Sciences. 2004. V. 14. P. 79–103.

[11] *Auchmuty G., Alexander J. S.* Finite energy solutions of mixed 3d div-curl systems // Quarterly of Applied Mathematics. 2006. V. 64. P. 335–357.

[12] *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. 412 с.

Alekseev G. V., Brizitskii R. V. *On solvability of the mixed boundary value problem for the stationary magnetohydrodynamic equations*. The global solvability of the boundary value problem for the stationary magnetohydrodynamic equations considered under inhomogeneous mixed boundary conditions for the magnetic field and homogeneous Dirichlet condition for the velocity is proved.

МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

Андреева Е. М., Крукиер Л. А., Муратова Г. В.
Южно-Российский региональный центр информатизации ЮФУ, Ростов-на-Дону

В работе представлены некоторые алгоритмы для решения уравнений конвекции-диффузии многосеточным методом.

Введение. Процессы гидрогазодинамики как объект научного исследования известны в течение многих столетий. В силу своей практической значимости они прочно занимают довольно обширную нишу среди других научных задач. Однако в течение последних нескольких десятков лет сформировался обособленный раздел науки — вычислительная гидрогазодинамика (англ. Computational Fluid Dynamics — CFD). CFD возникла на стыке вычислительной математики и теоретической гидромеханики. В ней рассматриваются такие актуальные направления, как расчет движений вязкой жидкости, численное исследование течений газа с физико-химическими превращениями, изучение распространения ударных волн в различных средах, решение газодинамических задач при наличии излучения и пр.

Бурному росту CFD-расчетов способствуют совершенствование компьютерных технологий, создание универсальных, удобных в использовании программных CFD-комплексов. Однако исследование новых эффективных методов решения задач CFD также сохраняет свою актуальность.

Фундаментальной основой большинства задач CFD являются уравнения Навье–Стокса, которые определяют любые однофазные (газ или жидкость) потоки. Существует множество подходов к решению уравнений Навье–Стокса с использованием многосеточной технологии [1, 2].

Другим наиболее распространенным типом уравнений в задачах CFD является уравнение конвекции-диффузии. В данной работе представлен краткий обзор по использованию MGM для задач CFD. Особое внимание уделено решению задач конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией.

1. Основные этапы развития MGM. Как известно, MGM являются эффективными численными методами решения краевых задач, обладая неулучшаемой оценкой сходимости [3]. Впервые многосеточный метод был предложен Р. Федоренко для уравнения Лапласа в единичном квадрате [4]. Н. Бахвалов теоретически обосновал более сложный случай для переменных коэффициентов [5]. Далее появился ряд публикаций, развивающих идею объединения дискретизации с использованием грубых сеток в итерационной схеме. Благодаря исследованиям Хакбуша [7, 10], Брандта [8], Троттенберга [9] многосеточный метод получил широкое развитие.

Большой вклад в развитие MGM внесли российские ученые Г. Астраханцев, Н. Бахвалов, Р. Федоренко, В. Шайдуров, получившие в 2003 году государственную премию Российской Федерации за цикл фундаментальных работ по созданию высокоэффективных многосеточных методов для численного решения широкого класса задач математической физики.

В настоящее время многосеточный метод используется почти во всех областях, где уравнения в частных производных решаются численными методами [11]. Его эффективность обусловлена тем, что многосеточный метод позволяет решить линейную систему N×N с вычислительными затратами O(N). Алгоритмическую основу многосеточного метода составляет прием, основанный на свойстве некоторых итерационных методов сходиться с высокой скоростью на первых итерациях, замедляясь в дальнейшем. Это происходит за счет быстрого подавления высокочастотных компонент начальной ошибки в разложении по базису из собственных векторов, т. е. метод быстро гасит высокочастотные гармоники ошибки, что позволяет за несколько итераций существенно подавить их вклад [12].

2. MGM для задач конвекции-диффузии. Многосеточный метод широко используется для решения задач конвекции-диффузии. В [6] представлены гибридные многосеточные методы. Модификация алгебраического многосеточного метода на основе технологии GPGPU представлена в [13]. Полученный алгоритм был успешно применен к решению ряда задач гидромеханики. В частности, было представлено существенное ускорение скорости сходимости для ряда задач моделирования пластовой нефти.

В [14] представлены модификации MGM с треугольными кососимметричными сглаживателями [15] для задачи конвекции-диффузиии с преобладающей конвекцией. Представим подробнее данный алгоритм MGM.

Рассмотрим модельную задачу в области $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(v_k(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial\left(v_k(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\right)}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{Pe}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{V} = (v_1, v_2)$ — вектор скорости, Pe — число Пекле, $f(\mathbf{x})$ — некоторая заданная функция. Мы считаем среду несжимаемой $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$.

Для дискретизации уравнения (1) используем метод конечных разностей с центрально-разностной аппроксимацией первых производных. Получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$Lu = f. \tag{2}$$

Матрица L является сильно несимметричной, без диагонального преобладания. Представим матрицу L в виде суммы ее симметричной L_0 и кососимметричной L_1 частей:

$$L = L_0 + L_1,$$

Полученная в результате дискретизации матрица L диссипативна, это означает, что ее симметричная часть положительно определена:

$$L_0^* > 0,$$

В матричной норме выполняется неравенство $\|L_0\|_* << \|L_1\|_*$.

Матрица L_1 может быть представлена как сумма

$$L_1 = K_l + K_u \quad \text{и} \quad K_u = -K_l^*,$$

где K_l и K_u являются, соответственно, нижне- и верхнетреугольными частями кососимметричной матрицы L_1.

Для решения линейной системы (2), мы предлагаем использовать MGM, в качестве сглаживателя которого выбирается треугольный кососимметричный итерационный метод (ТКМ) [14].

Итерационный метод записывается в каноническом виде:

$$B\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + Lu_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Для метода ТКМ оператор B строится следующим образом:

$$B = E + 2\tau K_l \quad \text{или} \quad B = E + 2\tau K_u, \tag{4}$$

для ТКМ1:

$$B = \alpha E + 2K_l \quad \text{или} \quad B = \alpha E + 2K_u, \tag{5}$$

для ТКМ2:

$$B = \alpha_i E + 2K_\ell \quad \text{или} \quad B = \alpha_i E + 2K_u, \tag{6}$$

где τ — скалярный параметр. Параметры предложенного метода $\alpha_i, \alpha > 0$ получаем под формулам:

$$\alpha = \|M\|, \quad \alpha_i = \sum_{j=0}^{n} |m_{ij}|, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $M = L_0 + K_u - K_l$, $M = \{m_{ij}\}_0^n$ — симметричная матрица, n — размерность матрицы L.

Методы рассматриваемого класса быстро подавляют высокочастотные компоненты ошибки. Это необходимое свойство для сглаживателя многосеточного метода [16].

Результаты исследования многосеточного метода с треугольными сглаживателями представлены в таблице 2. Рассмотрены четыре типа задач с различными полями скоростей, представлеными в таблице 1 для разных чисел Пекле: $Pe = 10$, 100, 1000, 10000. Символ D означает, что для данной задаче метод не сходится.

Таблица 1 – Поля скоростей для тестовых задач

Задача N	v_1	v_2
1	1	-1
2	$1 - 2x$	$2y - 1$
3	$x + y$	$x - y$
4	$\sin 2\pi x$	$-2\pi y \cos 2\pi x$

Численные результаты показали эффективность предложенных модификаций многосеточного метода для решения задач конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией.

Таблица 2 – Число итераций MGM и время расчета на сетке 32×32

Pe	MGM (Метод Зейделя)	MGM (TKM)	MGM (TKM1)	MGM (TKM2)	κ= Peh$\|v\|/2$
Задача 1: $v_1(\mathbf{x}) = 1$ $v_2(\mathbf{x}) = -1$					
10	13	35	30	30	0,009765
100	63	7	5	5	0,097656
1000	D	13	9	9	0,976562
10000	D	78	58	58	9,765625
Задача 2: $v_1(\mathbf{x}) = 1 - 2x_1$ $v_2(\mathbf{x}) = 2x_2 - 1$					
10	22	72	53	50	0,009765
100	18	24	19	14	0,097656
1000	D	16	12	6	0,976562
10000	D	59	51	32	9,765625
Задача 3: $v_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ $v_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$					
10	16	43	35	34	0,019531
100	23	9	7	5	0,195312
1000	D	17	12	8	1,953125
10000	D	74	55	36	19,53125
Задача 4: $v_1(\mathbf{x}) = \sin 2\pi x_1$ $v_2(\mathbf{x}) = -2\pi x_2 \cos 2\pi x_1$					
10	17	39	32	27	0,061359
100	D	16	12	7	0,613592
1000	D	29	22	10	6,135923
10000	D	193	159	57	61,35923

Заключение. В данной работе представлены некоторые алгоритмы для решения уравнений конвекции-диффузии многосеточным методом. Рассмотрена модификация многосеточного метода для решения задач конвекции-диффузиии с преобладающей конвекцией, где в качестве сглаживателей используются треугольные кососимметричные методы. Проведенные теоретические и численные исследования показывают эффективность данной модификации многосеточного метода для рассматриваемого класса задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.

[2] *Wurst M.* Multigrid Methods and Applications in CFD [Электронный ресурс] // Chair for efficient algorithms:[сайт]. Дата обновления 07.06.2013. URL:http://www14.in.tum.de/konferenzen/Jass09/courses/3/Wurst_paper.pdf (дата обращения: 01.06.14).

[3] *Yavneh I.* Why multigrid methods are so efficient // Comput. Sci. Engrg. 2006. Vol. 8. P. 12–22.

[4] *Федоренко Р. П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1. № 5. С. 922-927.

[5] *Бахвалов Н. С.* О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 5. С. 861–883.

[6] *Chaabane Khelifi S., Méchitoua N., Hülsemann F., Magoulès F.* A hybrid multigrid method for convection-diffusion problems // J. Comput. Appl. Math. 2013. in press.

[7] *Hackbusch W.* Ein iteratives Verfahren zur schnellen Auflosung elliptischer Randwertprobleme // Report 76-12, Mathematisches Institut der Universitat zu Koln. 1976.

[8] *Brandt A.* Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems // Math. Comput. 1977. Vol. 31. P. 333–390.

[9] *Hackbusch W., Trottenberg U.* Multigrid Methods. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 960. Springer. 1982.

[10] *Hackbusch W.* Multigrid Methods and Applications. Berlin: Springer, 1985.

[11] *Trottenberg U., Oosterlee C., Schuller A.* Multigrid. Academic Press. 2001.

[12] *Muratova G. V., Krukier L. A., Andreeva E. M.* Fourier analysis of multigrid method with triangular skew-symmetric smoothers // Communication on Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 27. № 3. P. 355–361.

[13] *Demidova D. E., Shevchenkob D. V.* Modification of algebraic multigrid for effective GPGPU-based solution of nonstationary hydrodynamics problems // J. Comp. Science. 2012. Vol. 3. № 6. P. 460–462.

[14] *Крукиер Л. А., Муратова Г. В., Андреева Е. М.* Многосеточный метод решения задач конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией, Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2011.

[15] *Крукиер Л. А.* Кососимметричные итерационные методы решения стационарной задачи конвекции-диффузии с малым параметром при старшей производной // Изв. ВУЗов. Математика. 1997. № 4. С. 77–85.

[16] *Muratova G. V., Andreeva E. M.* Multigrid method for solving convection-diffusion problems with dominant convection // J. Comput. Appl. Math. 2009. Vol. 226. P. 77–83.

Andreyeva E. M., Krukiyer L. A., Muratova G. V. *Multigrid method in computational fluid dynamics*. The paper discribes some algorithms for solving equations of convection-diffusion using multigrid method.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Рассматривается бесконечный сплошной круговой цилиндр, выполненный из наследственно-упругого материала. Свойства материала описываются с помощью модели Работнова. При изучении собственных колебаний исследуются свойства тех мод, которые при использовании потенциальной формы решения изменяются по гармоническому закону. Для случая осесимметричной задачи выведены дисперсионные уравнения, которые решены численно. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами других авторов для упругого и вязкоупругого случаев. Проанализировано влияние наследственных факторов на поведение дисперсионных кривых.

1. Постановка задачи. Рассмотрим распространение гармонических волн в бесконечном сплошном круговом наследственно-упругом цилиндре радиуса R в цилиндрической системе координат. Динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается уравнениями движения в напряжениях и перемещениях, записанными в цилиндрической системе координат и уравнениями состояния для наследственно-упругого материала

$$\begin{cases} \tilde{E}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} = \sigma_{rr} - \tilde{\nu}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \\ \dfrac{1}{r}\tilde{E}\left(u_r + \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) = \sigma_{\varphi\varphi} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}), \\ \tilde{E}\dfrac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_{zz} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \\ \dfrac{1}{2}\tilde{E}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u_\varphi}{r}\right)\right) = (1+\tilde{\nu})\,\sigma_{r\varphi}, \\ \dfrac{1}{2}\tilde{E}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) = (1+\tilde{\nu})\,\sigma_{rz}, \\ \dfrac{1}{2}\tilde{E}\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right) = (1+\tilde{\nu})\,\sigma_{\varphi z}, \end{cases} \tag{1}$$

где σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\varphi z}$, σ_{zz} — компоненты тензора напряжений, u_r, u_φ, u_z — компоненты вектора перемещений, ρ — плотность материала, t — время, $\tilde{E}$, $\tilde{\nu}$ — интегральные операторы, определяемые формулами

$$\begin{gathered} \tilde{E} = E(1-\Gamma^*), \quad \tilde{\nu} = \nu + \frac{1-2\nu}{2}\Gamma^*, \\ \Gamma^* f(t) = k\int_{-\infty}^{t} \mathrm{Э}_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t-\tau) f(\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{2}$$

E, ν — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, k, β — параметры материала.

В качестве ядра интегрального оператора будем использовать дробно-экспоненциальную функцию Работнова [1]

$$Э_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t) = (t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)},$$

где $\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} \exp(-y) dy$ — гамма-функция.

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод, которые при использовании потенциальной формы решения изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения, уравнениям состояния (1) и однородным граничным условиям на лицевой поверхности.

Решение для перемещений $\overline{u}$ будем искать в виде

$$\overline{u} = \left(\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \overline{\mathrm{H}}\right) \exp\left(i\omega t\right), \tag{3}$$

где Φ, $\overline{\mathrm{H}}$ — потенциальные функции, ω — частота.

С учетом (2) и (3) уравнения состояния (1) можно переписать, заменив $\tilde{E}$ на EE^F, а $\tilde{\nu}$ — на ν^F, где

$$E^F = 1 - \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}, \qquad \nu^F = \nu + \frac{1-2\nu}{2} \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}.$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad t_* = \frac{tc_2}{R} \tag{4}$$

и безразмерные величины

$$u^*_\alpha = \frac{u_\alpha}{R}, \quad \sigma^*_{\alpha\gamma} = \frac{\sigma_{\alpha\gamma}}{E}, \quad \beta_* = \sqrt{\frac{R}{c_2}}\beta, \quad k_* = \sqrt{\frac{R}{c_2}}k, \quad \omega_* = \frac{R}{c_2}\omega, \tag{5}$$

где $c_2 = \sqrt{\dfrac{E}{2(1+\nu)\rho}}$, $\alpha, \gamma = r, \varphi, z$. В дальнейшем звездочки опускаем.

Выражая напряжения через перемещения из полученных уравнений состояния и подставляя их в уравнения движения, с учетом (4) и (5), получаем уравнения движения в перемещениях

$$\nabla^2 \overline{u} + \left(k_F^{-2} - 1\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{u} - \Omega^2 \overline{u} = 0, \tag{6}$$

где

$$k_F^{-2} = \frac{2 - 2\nu^F}{1 - 2\nu^F}, \qquad \Omega^2 = \omega^2 \frac{1+\nu^F}{2(1+\nu)E^F}.$$

Граничные условия на лицевой поверхности $\xi = 1$ имеют вид

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0. \tag{7}$$

2. Вывод дисперсионных уравнений. Рассмотрим осесимметричную задачу. Тогда для нахождения решения задачи растяжения-сжатия и изгиба цилиндра потенциальные функции Φ и $\overline{\mathrm{H}}$ можно взять в виде

$$\begin{aligned} &\Phi = f(\xi)\exp(i\tilde{\chi}\zeta), \\ &\mathrm{H}_\varphi = q_\varphi(\xi)\exp(i\tilde{\chi}\zeta), \quad \mathrm{H}_r = \mathrm{H}_z = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $i\tilde{\chi} = -\delta - i\chi$, χ — волновое число; $\delta > 0$ — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты ζ, а в случае задачи кручения

$$\mathrm{H}_z = q_z(\xi)\exp(i\tilde{\chi}\zeta), \quad \Phi = \mathrm{H}_r = \mathrm{H}_\varphi = 0. \tag{9}$$

Получим сначала дисперсионное уравнение для задачи растяжения-сжатия и изгиба. Подставляя выражения (8) в (6), будем иметь для функций $f(\xi)$ и $q_\varphi(\xi)$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{f''(\xi)}{a^2} + \frac{f'(\xi)}{a^2\xi} + f(\xi) = 0, \\ &\frac{q''_\varphi(\xi)}{b^2} + \frac{q'_\varphi(\xi)}{b^2\xi} - \left(\frac{1}{\xi^2 b^2} - 1\right) q_\varphi(\xi) = 0, \end{aligned}$$

где $a^2 = k_F^2\Omega^2 - \tilde{\chi}^2$, $b^2 = \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$.

Последние два уравнения для случая сплошного цилиндра имеют следующие решения:

$$f(\xi) = A_1 J_0(a\xi), \qquad q_\varphi(\xi) = A_2 J_1(b\xi), \tag{10}$$

где $J_n(\bullet)$ — функции Бесселя n-го порядка, A_1, A_2 — неизвестные постоянные.

Удовлетворяя общее решение (10) граничным условиям (7), получим дисперсионное уравнение

$$\left(\Omega^2 - 2\tilde{\chi}^2\right)^2 J_0(a)J_1(b) + 4\tilde{\chi}^2 ab J_0(b)J_1(a) - 2\Omega^2 a J_1(a)J_0(b) = 0. \tag{11}$$

Используя представление (9) для функций Φ и $\overline{\mathrm{H}}$ и производя аналогичные рассуждения, получим в случае задачи кручения сплошного цилиндра дисперсионное уравнение

$$bJ_0(b) - 2J_1(b) = 0. \tag{12}$$

3. Анализ дисперсионных уравнений и их численных решений. Формально дисперсионные уравнения (11) и (12) имеют тот же вид, что и соответствующие дисперсионные уравнения для упругого сплошного цилиндра [2], но, в отличие от последних, левая часть каждого из уравнений в наследственно-упругом случае является комплексно-значной функцией.

Дисперсионные уравнения (11) и (12) были решены численно методом продолжения решения по параметру [3].

На рисунках 1–6 приведены проекции дисперсионных кривых на плоскости (ω, χ) и (ω, δ) для случая растяжения-сжатия и изгиба для различных значений параметров материала. Знак «+» над номером ветки соответствует значениям $\delta < 0$, а знак «–» — значениям $\delta > 0$.

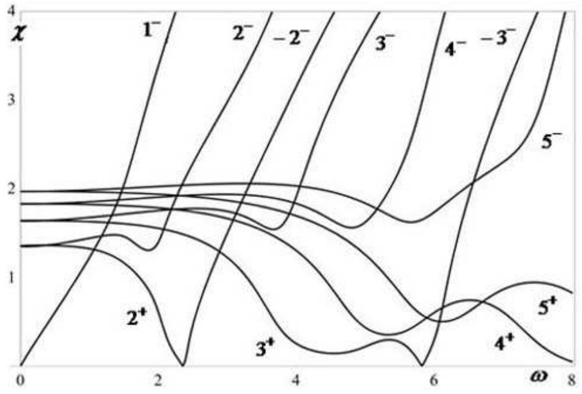


Рисунок 1 – Проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) при $k = 0.53$, $\beta = 1$

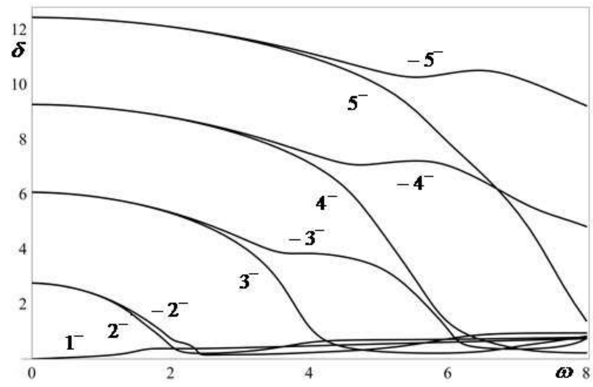


Рисунок 2 – Проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, δ) при $k = 0.53$, $\beta = 1$

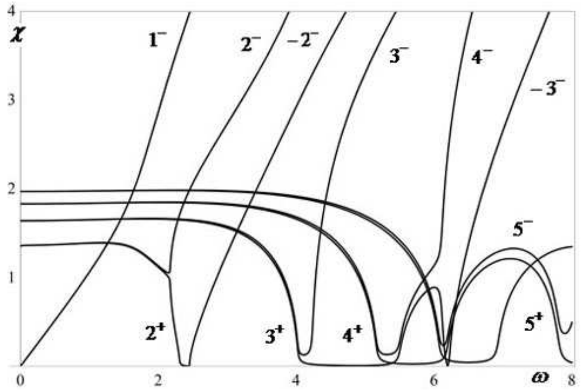


Рисунок 3 – Проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) при $k = 0.53$, $\beta = 10$

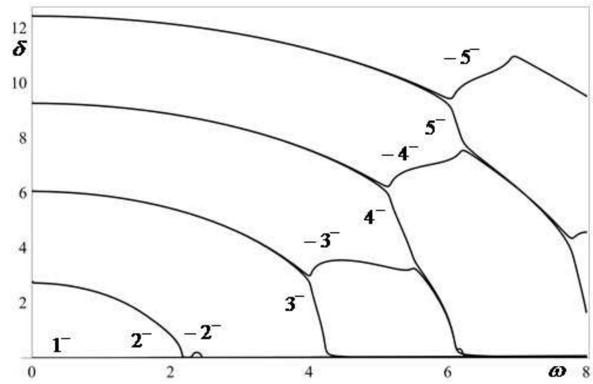


Рисунок 4 – Проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, δ) при $k = 0.53$, $\beta = 10$

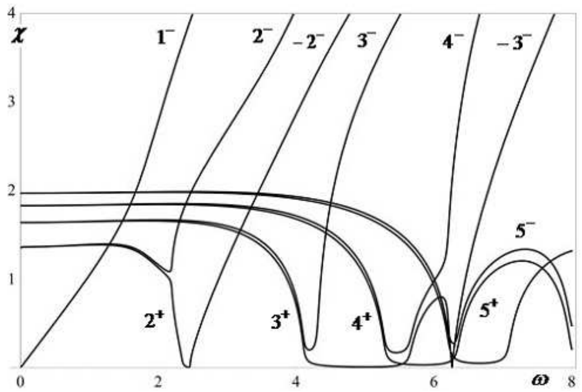


Рисунок 5 – Проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) при $k = 0.05$, $\beta = 1$

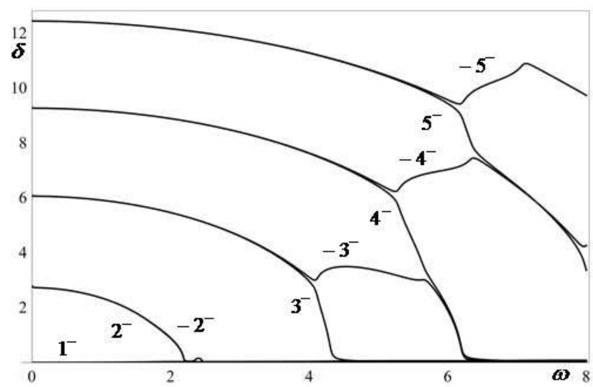


Рисунок 6 – Проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, δ) при $k = 0.05$, $\beta = 1$

Соответствующие решения получены для задачи кручения.

Анализ дисперсионных уравнений и их численных решений позволяет сделать следующие выводы:

1) существует симметрия дисперсионных кривых при замене $\tilde{\chi}$ на $-\tilde{\chi}$;

2) чем больше значение k и (или) меньше значение β, тем раньше и больше начинают расходиться дисперсионные кривые с положительной и отрицательной мнимой частью $\tilde{\chi}$;

3) при уменьшении значений k и (или) при увеличении значений β поведение дисперсионных кривых стремиться к упругому случаю [2];

4) дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра являются комплексными с положительной мнимой частью $\tilde{\chi}$, что определяет затухание решение по координате;

5) для наследственно-упругого спектра теряет смысл понятие частоты запирания, так как $\tilde{\chi} = 0$ и $\omega > 0$ не являются корнями дисперсионных уравнений;

6) в окрестностях частот запирания упруго спектра ветви наследственно-упругого спектра имеют наибольшую кривизну. Увеличение значений k, как и уменьшение значений β, ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях. Таким образом, упругий спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при $k \to 0$, $\beta \gg 1$.

В заключении заметим, что полученные в работе результаты хорошо согласуются с результатами, представленными в работах [2, 4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Работнов Ю. И.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

[2] *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. Думка, 1981. 284 с.

[3] *Барышев А. А., Лысункина Ю. В.* О применении метода продолжения решения по параметру к анализу дисперсионных уравнений в системе Mathematica // Математика. Механика: сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 108–111.

[4] *Червинко О. П., Сенченков И. К.* Гармонические волны в слое и бесконечном цилиндре // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 12. С. 31–37.

Anofrikova N. S, Sergeeva N. V. *The numerical analysis of the dispersion equations in the case of the viscoelastic entire cylinder.* The infinite entire circular cylinder made of viscoelastic material is considered. The properties of the material are described by the Rabotnov's model. Free vibrations are studied. The properties of the modes which change according to the harmonic law are investigated. In this case the potential form of the solution is used. The dispersion equations are derived for the case of the axisymmetric problem. The numerical solutions of dispersion equations are obtained. The obtained results are compared with the results of the other authors for elastic and viscoelastic cases. The influence of viscosity factors on the behavior of the dispersion curves is analysed.

КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ

Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Исследуются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль кромки пластины (кромочные волны). На лицевых сторонах ставятся граничные условия свободного края, либо граничные условия жёсткого защемления. На торце ставятся смешанные граничные условия, либо граничные условия свободного края. Для описания симметричных и антисимметричных колебаний пластины используются трёхмерные уравнения теории упругости. Для различных видов граничных условий на торце проведён асимптотический анализ кромочных волн высшего порядка, показывающий, что в случае смешанных граничных условий на торце фазовая скорость исследуемых волн стремится либо к скорости волны Рэлея, либо к скорости волны сдвига.

Введение. Кромочными волнами в [1] названы поверхностные волны, распространяющиеся вдоль свободной кромки полубесконечной пластины. До последнего времени эти волны, как правило, изучались на основе тех или иных двумерных теорий пластин. Двумерные теории пластин описывают только первую, или фундаментальную, кромочную волну в длинноволновом диапазоне. Если применить для описания колебаний пластины трехмерную теорию упругости, то окажется, что кроме этой волны существуют другие кромочные волны, которые можно назвать кромочными волнами высшего порядка. До последнего времени такие волны были практически не изучены. В работах [2, 3] рассмотрены кромочные волны в пластине со свободными либо жестко защемленными лицевыми поверхностями для случая симметричных колебаний пластины с торцом, свободным от напряжений. Данная работа посвящена обобщению результатов, полученных при исследовании кромочных волн в пластинах с различными граничными условиями на лицевых поверхностях и торце.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гармонические колебания упругой пластины, занимающей в декартовых координатах (x, y, z) область $0 \leqslant x < \infty$, $|y| \leqslant h$, $-\infty < z < \infty$. Для описания колебаний пластины применим трёхмерные уравнения теории упругости. На лицевых поверхностях поставим граничные условия свободного края, либо граничные условия жёсткой заделки. При $x = 0$ поставим одно из следующих граничных условий:

$$\sigma_x = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_x = u_y = \sigma_{xz} = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_x = \sigma_{xy} = u_z = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим отдельно каждый вид граничных условий на торце.

Торец свободен от напряжений

Фундаментальные кромочные волны при данных граничных условиях подробно исследованы в [3].

Для кромочных волн высшего порядка были получены следующие асимптотики собственных частот при $s \to \infty$:

$$\omega_n^{(\infty)} = c\sqrt{s^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \tag{4}$$

в случае жёстко защемлённых лицевых сторон, где n — номер кромочной волны высшего порядка, c — скорость волны Рэлея.

В случае лицевых сторон свободных от напряжения, данный вид граничных условий на торце подробно исследован в работе [4]. На рисунке 1 приведены дисперсионные кривые для кромочных волн высшего порядка в случае жёстко защемлённых лицевых сторон: пунктирной линией обозначены асимптотики (4), толстой сплошной — результаты численных расчётов, тонкой сплошной — частоты запирания.

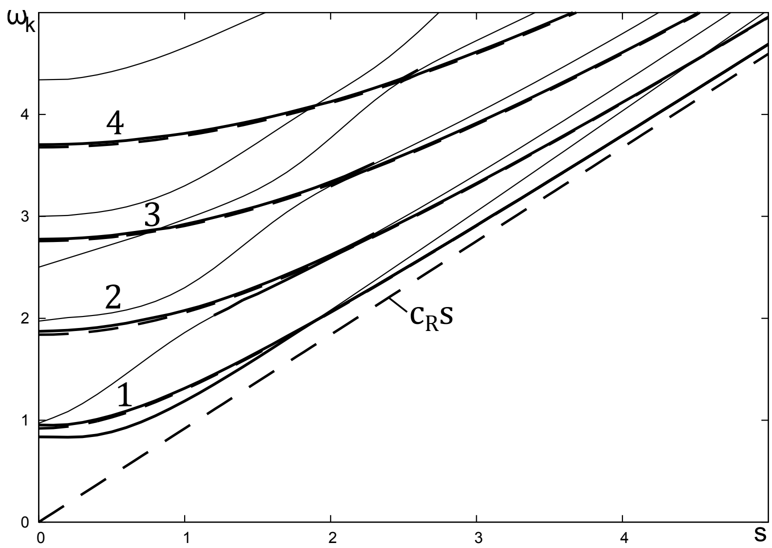


Рисунок 1 – Дисперсионные кривые в случае жёстко защемлённых лицевых поверхностей и торца свободного от напряжений

На торце ставятся граничные условия (2) или (3)

В случае симметричных колебаний пластины с граничными условиями (2) существует фундаментальная кромочная волна. Её дисперсионные кривые представлены на рисунке 2. Тонкими линиями представлена скорость классической волны Рэлея, толстыми — дисперсионные кривые фундаментальных кромочных волн, полученные на основе численного анализа. При данных граничных условиях на торце поведение дисперсионной кривой фундаментальной кромочной волны качественно отличается от поведения аналогичной кривой в случае торца свободного от напряжений. С ростом волнового числа фазовая скорость этой волны стремится не к скорости угловой волны, а к некоторой другой величине, не совпадающей также со скоростью классической волны Рэлея. Кроме фундаментальной волны в пластине с данными граничными условиями существуют и кромочные волны высшего порядка.

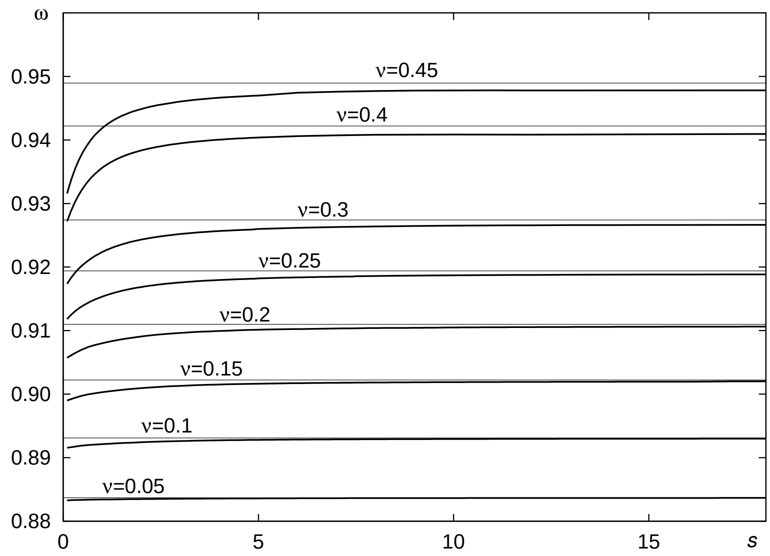


Рисунок 2 – Зависимость дисперсионных кривых фундаментальной волны от коэффициента Пуассона

В результате асимптотического анализа, аналогичного описанному в работе [3], были получены следующие асимптотики собственных частот кромочных волн высшего порядка при $s \to \infty$:

$$\omega_n^{(\infty)} = c\sqrt{s^2 + n^2} \tag{5}$$

в случае свободных и жёстко защемлённых лицевых сторон, где n — номер кромочной волны высшего порядка, c — корень дисперсионного уравнения:

$$(2 - c^2)(2\sin^2\alpha - c^2) + c^2\cos^2\alpha - 4\sqrt{1 - \kappa^2 c^2}\sqrt{1 - c^2}\sin^2\alpha = 0, \tag{6}$$

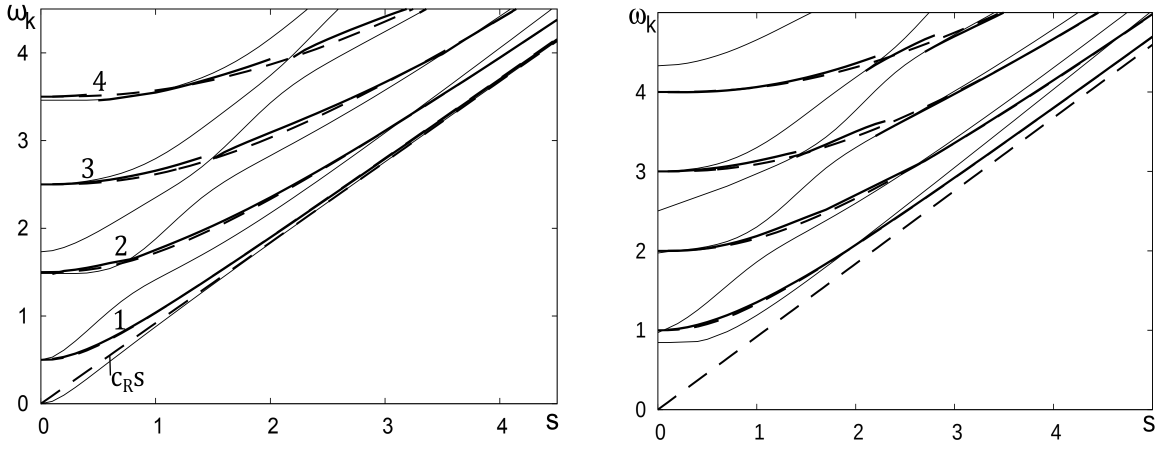
где α — угол распространения волны. Угол α связан с номером кромочной волны высшего порядка следующим соотношением: $tg(\alpha) = s/n$.

Для подтвержения теоретических выводов была проведена серия численных экспериментов. Метод численного решения, основанный на разложении по модам, подробно описан в [3]. На рисунке 3,*а* и 3,*б* приведены дисперсионные кривые для кромочных волн высшего порядка: толстой пунктирной линией обозначены асимптотики (5), толстой сплошной — результаты численных расчётов, тонкой сплошной — частоты запирания.

Для случая граничных условий (3) асимптотики имеют вид

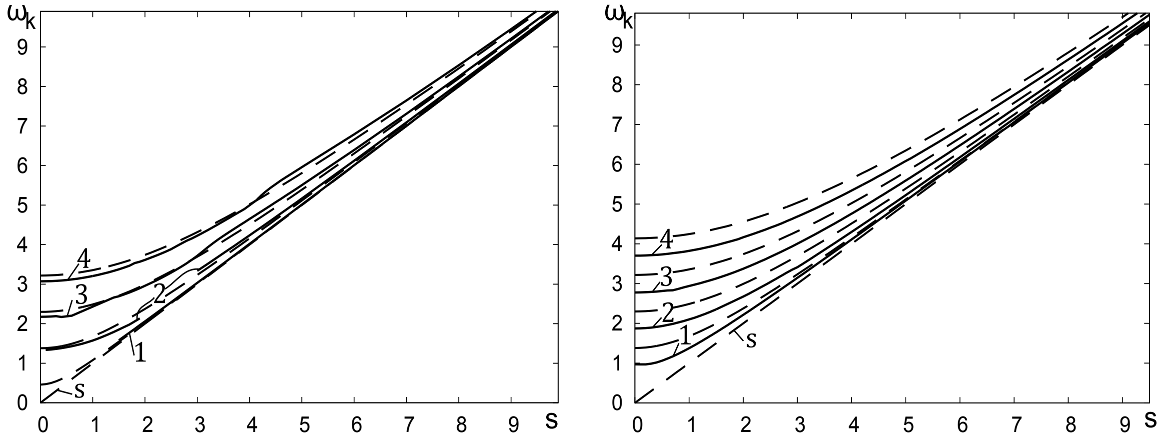
$$\omega_n^{(\infty)} = c\sqrt{s^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}, \tag{7}$$

где c — корень дисперсионного уравнения (6), в котором выполнена замена $\sin \longrightarrow \cos$, $\cos \longrightarrow \sin$.



а *б*

Рисунок 3 – Дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка: *а* — торец свободен от напряжений, *б* — торец жёстко защемлён



а *б*

Рисунок 4 – Дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка: *а* — торец свободен от напряжений, *б* — торец жёстко защемлён

Графики, аналогичные избраженным на рисунках 3,*а* и 3,*б*, представлены на рисунке 4.

Заключение. Аналитическое исследование поставленной задачи показало наличие в пластине при различных граничных условиях на торце и лицевых поверхностях как фундаментальных кромочных волн, так и бесконечного счетного множества кромочных волн высшего порядка. Исследовано наличие либо отсутствие фундаментальных кромочных волн в зависимости от вида граничных условий. Отмечено особое поведение дисперсионных кривых фундаментальной кромочной волны в случае свободных лицевых поверхностей и смешанных граничных условий на торце. Рассмотрено влияние частот запирания на поведение кромочных волн высшего порядка: частоты запирания плоских мод приводят к появлению нерегулярностей и разрывов. Это явление объясняется взаимодействием поверхностной волны и толщинных колебаний. Для случая торца свободного от напряжений рассмотрены антисимметричные колебания пластины, не рассматривавшиеся ранее. Для смешанных граничных условий на торце получены асимптотики дисперсионных зависимостей, показывающие, что в коротковолновом пределе фазовые скорости всех обнаруженных волн стремятся либо к скорости волны Рэлея, либо к скорости волны сдвига, в зависимости от вида смешанных граничных условий на торце.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Белубекян М. В.* Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Институт механики НАН Армении, Ереван. 1997. № 3. С. 79–96.

[2] *Zernov V., Kaplunov J. D.* Three-dimensional edge waves in plates // Proc. R. Soc. Lond. A. 2008. № 464. С. 301–318.

[3] *Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 280 с.

[4] *Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю.* Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. № 13. С. 50–56.

Ardazishvili R. V, Wilde M. V, Kossovich L. Yu. *Edge Waves in Plates*. This paper is concerned with the propagation of surface waves localized near the edge of plate (edge waves). Symmetric and antisymmetric waves in a plate with free or fixed faces and free or mixed boundary conditions on the front edge are considered. To study higher order edge waves three-dimensional equations of theory of elasticity are used. For different types of boundary conditions on the front edge asymptotic analysis of higher order edge waves is performed. This analysis shows that in case of mixed boundary conditions on the front edge phase velocities of all higher order edge waves tend to the velocities of Rayleigh wave or shear wave depending on the boundary conditions.

АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г.
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

В работе анализируется устойчивость периодического движения двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы. Зоны неустойчивости и точки бифуркации определяются на основе теории Флоке по значениям мультипликаторов — собственных значений матрицы монодромии. Матрица монодромии находится по ходу численного решения исходных нелинейных уравнений движения системы методом продолжения решения по параметру. Значения мультипликаторов, выходящих за переделы единичного круга, определяют тип бифуркационной точки. В зонах неустойчивости прямым численным интегрированием найдены колебательные режимы, реализуемые в системе при соответствующих значениях параметров.

1. Введение. Изучение динамического поведения сильно нелинейных виброударных систем (ВУС) в разных условиях функционирования, режимов колебаний и их устойчивости, бифуркаций и ветвления, механизмов возникновения хаотических колебаний, «скользящих режимов» и других специфических особенностей виброударного движения отвечает потребностям прикладной механики и техники и в силу этого вызывает значительный интерес. В последние десятилетия таким проблемам посвящается все большее количество исследований, статей, монографий, конференций и симпозиумов [1–3].

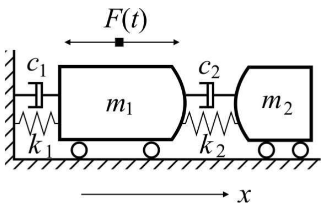


Рисунок 1 – Схема ВУС

Сильная нелинейность ВУС обусловливается, в первую очередь, многократным изменением их структуры за счет повторяющихся соударений элементов. Моделирование удара нелинейной силой контактного взаимодействия также добавляет нелинейный член в уравнения движения. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений движения ВУС методом продолжения типа предиктор-корректор, а именно продолжения решения по параметру в совокупности с методом стрельбы дает возможность сразу же находить зоны неустойчивости движения. Численные методы продолжения известны давно. Разработанные на их основе методики и *softwares* достаточно широко применяются для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений [4–8]. Однако, наличие повторяющихся ударов при движении ВУС значительно осложняет проблему. Для таких задач применение метода продолжения по параметру ограничивается сравнительно небольшим числом работ (см., например [9, 10]).

2. Постановка задачи. В работе анализируется динамическое поведение двухмассовой ВУС с двумя степенями свободы, состоящей из основного (m_1) и присоединенного (m_2) тел, связанных между собой линейными упругими пружинами и демпферами (рисунок 1). Основное тело подвержено действию периодической внешней нагрузки $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Уравнения движения ВУС имеют вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{con}(x_2 - x_1),\\
\ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2 x_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) -\\
&\quad - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{con}(x_2 - x_1)],
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \dfrac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \dfrac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \dfrac{m_2}{m_1}$; $F_{con}(x_2 - x_1)$ — сила контактного взаимодействия, моделирующая удар и действующая, естественно, лишь во время удара. За начало координаты x выбирается центр масс основного тела в том положении, когда все пружины находятся в недеформированном состоянии, при этом расстояние между телами принимается равным D. Начальные условия задачи таковы: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = D$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$.

Соударения тел предполагаются упругими, низкоскоростными, коллинеарными, без трения, поверхности тел в зоне контакта криволинейные. При таких предположениях удар достаточно удачно моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия на базе квазистатической теории Герца [11–13], учитывающей лишь локальные деформации соударяющихся тел в зоне контакта:

$$\begin{aligned}
F_{con}(x_2 - x_1) &= K[H(x_2 - x_1)\cdot(x_2 - x_1)]^{3/2},\\
K &= \frac{4}{3}\frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A + B}}, \quad \delta_i = \frac{1 - {\mu_i}^2}{E_i\pi}, i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $(x_2 - x_1)$ — относительное сближение тел за счет местной деформации в зоне контакта, $H(x_2 - x_1)$ — ступенчатая функция Хевисайда, μ_i и E_i — коэффициенты Пуассона и модули Юнга материалов соударяющихся тел, A, B и q — константы, характеризующие местную геометрию зоны контакта.

3. Точки бифуркации и колебательные режимы в зонах неустойчивости. Периодические решения неавтономной системы нелинейных ОДУ движения ВУС (1) находятся методом продолжения решения по параметру в синтезе с методом стрельбы и процедурой Ньютона–Рафсона. На шаге прогноза (шаг *предиктор*) применяется метод Рунге–Кутта 4-го порядка. Использование этой методики вместе с учетом удара путем введения в уравнения движения моделирующей нелинейной силы (2) дает возможность построить диаграммы решений — зависимость динамических характеристик ВУС от того или иного параметра. При этом наилучшим параметром продолжения является длина дуги кривой решения. Такая параметризация позволяет строить продолжение решения в особых точках, в частности, в точках поворота, и находить точки ветвления. Устойчивость движения определяется по значениям мультипликаторов. На основе теории Флоке установлено, что движение теряет устойчивость, когда мультипликаторы — собственные числа матрицы монодромии, покидают единичный круг. При решении системы ОДУ методом продолжения матрица монодромии совпадает с матрицей линеаризированной алгебраической системы, которая определяется в процессе численного интегрирования.

На рисунке 2 приведена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) присоединенного тела ВУС, полученная при определенных числовых параметрах системы, приведеных в [12, 13]. По оси ординат отложены значения амплитуд, вычисленные как

$$A = \frac{|x_{max}| + |x_{min}|}{2}.$$

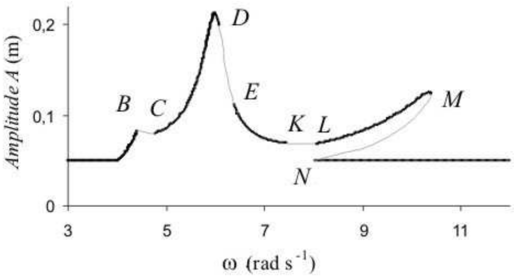


Рисунок 2 – АЧХ .

Участки неустойчивости — *BC, DE, KL, MN* — показаны серым цветом.

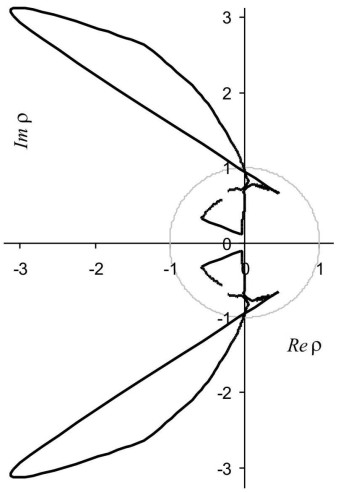


Рисунок 3 – Мультипликаторы на *BC*.

В точке B два комплексно сопряженных собственных числа матрицы монодромии переходят через единичную окружность (рисунок 3): периодическое решение теряет устойчивость, рождается инвариантный тор. На рисунке 4 приведен фазовый портрет и сечение Пуанкаре для присоединенного тела в квазипериодическом режиме, полученном при $\omega = 4,75\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. В точке B происходит переход от безударного режима колебаний, существующего на участке решений AB, к движению с периодическими ударами, мультипликаторы меняются скачком и принимают большие значения. Точка B — точка разрывной бифуркации [1].

На участке DE от ветви периодического решения отходит ветвь решений с двойным периодом — собственное число матрицы монодромии проходит по вещественной оси через точку —1 (рисунок 5). Здесь имеет место бифуркация удвоения периода, которая последовательно повторяется в узком интервале значений параметра ω, образующих последовательность Фейгенбаума. На рисунке 7,а,б,в изоб-

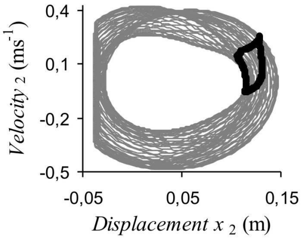


Рисунок 4 – Квазипериодический режим на участке BC

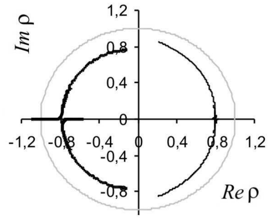


Рисунок 5 – Мультипликаторы на участке DE

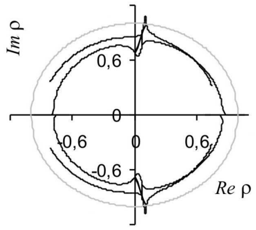
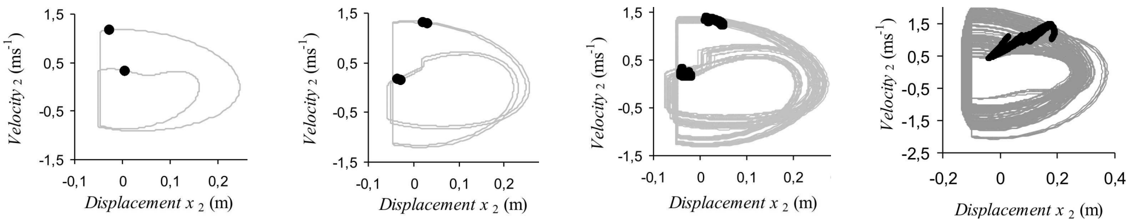


Рисунок 6 – Мультипликаторы на участке KL

ражены фазовые портреты и сечения Пуанкаре для присоединенного тела ВУС в режимах с периодами $2T$, $4T$, $8T$. Такая бифуркация часто приводит к хаосу. Действительно, при $\omega = 6,1$ rad $\cdot$ s^{-1} получаем хаотический режим колебаний, фазовый портрет и сечение Пуанкаре показаны на рисунке 7,г.



а) $2T$ б) $4T$ в) $8T$ г) хаос

Рисунок 7 – Последовательность бифуркаций удвоения периода на DE

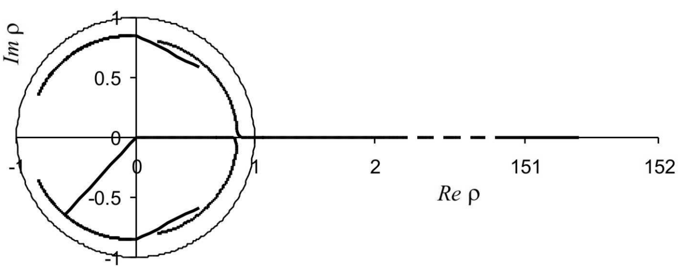


Рисунок 8 – Мультипликаторы в точке поворота M

На участке KL два комплексно сопряженных собственных числа переходят через единичную окружность (рисунок 6) — от исходной ветви, которая теряет устойчивость, отходит ветвь двухчастотных колебаний, рождается инвариантный тор.

Наконец, в точке поворота M собственное число проходит по вещественной оси через точку $+1$ (рисунок 8) — одна ветвь LM отвечает устойчивому периодическому решению, другая MN — неустойчивому.

Выводы. Разработке новых методов нахождения точек бифуркации на диаграмме периодических решений уделяется большое внимание исследователей. Выполненный в работе анализ бифуркаций и реализуемых в зонах неустойчивости решений представил подробную картину динамического поведения виброударной системы с двумя степенями свободы. Применение метода продолжения решения по параметру в сочетании с методом стрельбы к исследованию системы с повторяющимися ударами имеет свои особенности и трудности. Учет удара введением моделирующей нелинейной силы контактного взаимодействия, описанной законом Герца, помогает их преодолеть и обеспечивает возможность построения диаграммы решений как для ВУС с твердым ударом, рассмотренным в работе, так и с мягким.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Иванов А. П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Междунар. прогр. образования, 1997. 336 с.

[2] *Ibrahim R. J.* Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2009. № 43. P. 31–54.

[3] *Albert C. J. Luo, Yu Guo* Vibro-impact Dynamics. Wiley, 2013. 270 p. Online ISBN: 9781118402924.

[4] *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.

[5] *Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П.* Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейних механических системах. Львов: Вища школа, 1983. 286 с.

[6] *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 368 с.

[7] *Seydel R.* Practical bifurcation and stability analysis. Berlin: Springer. 2010. ISBN: 978-1-4419-1739-3.

[8] *Nayfeh Ali H., and Balakumar Balachandran.* Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods. Wiley, New York. 2008.

[9] *Padmanabhan C. and Singh R.* Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique // Journal of Sound and Vibration. 1995. Vol. 184, № 1. P. 35–58.

[10] *Gontier C., and Toulemonde C.* Approach to the periodic and chaotic behaviour of the impact oscillator by a continuation method // European journal of mechanics. A. Solids. 1995. Vol. 16, № 1. P. 141–163.

[11] *Гольдсмит В.* Теория и физические свойства соударяемых тел. Пер. с англ. М., Стройиздат, 1965. 449 с.

[12] *Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г.* Анализ динамического поведения виброударных систем разных типов. LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH & Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. 132 с.

[13] *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Comparison of Two Impact Simulation Methods Used for Nonlinear Vibroimpact Systems with Rigid and Soft Impacts. // Journal of Nonlinear Dynamics. Vol. 2013. Article ID 485676, 12 pages, 2013. doi:10.1155/2013/485676.

Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G. *Analysis of bifurcations and vibration regimes for strongly nonlinear vibroimpact system.* The stability of periodic motion for two-mass two-degree-of-freedom vibroimpact system is analyzed. The instability zones and bifurcation points are determined by the multipliers values — monodromy matrix eigenvalues based on Floquet't theory. We find monodromy matrix during numerical solution of initial nonlinear motion equations by parameter continuation method. The multipliers values which leave the unit circle determine the bifurcation point kind. We have found vibration regimes at instability zones by direct numerical integration..

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ НА ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ КОПРОВОЙ УСТАНОВКЕ

Баженов В. Г., Баранова М. С., Нагорных Е. В.
НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского

Все известные методики испытаний на растяжение образцов колпачкового типа основываются на схеме Гопкинсона и методе Кольского (У. Линдхольм, Д. Мор, Ж. Гари, Т. Николас и др.). На этих установках при горизонтальном расположении стержней сложно реализовать скорости деформации порядка 10^2 c^{-1}. Экспериментальные исследования характеристик разрушения методом прямого удара на образцах колпачкового типа на вертикальной газодинамической копровой установке авторам неизвестны, также отсутствует анализ достоинств и недостатков использования в качестве мерного стержня сплошных или трубчатых опорных и измерительных элементов. В работе [1] проведены исследования процесса растяжения образцов колпачкового типа в экспериментах на растяжение по схеме Гопкинсона (система «ударник — передающий мерный стержень — образец колпачкового типа — опорная мерная труба») с целью оценки скоростей и степеней деформаций в образцах. В данной работе рассматривается схема метода прямого удара, реализуемая в экспериментах на газодинамической копровой установке (система «ударник — передающее кольцо — образец колпачкового типа — опорный мерный стержень»). Эти две схемы анализируются с точки зрения степеней и скоростей деформации и точности восстановления параметров деформирования при экспериментальных исследованиях.

1. Схема установки и методика испытаний. Копровая установка на растяжение методом прямого удара (рисунок 1) содержит элементы: опорный мерный стержень (отмечен цифрой 1), испытуемый образец колпачкового типа (2), передающее кольцо (3), ударник (4).

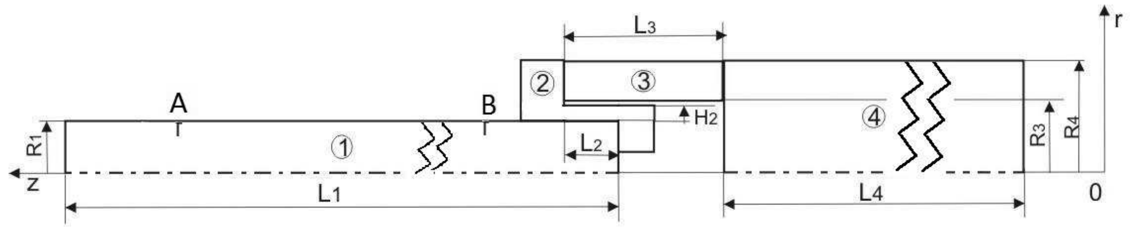


Рисунок 1 – *Схема копровой установки*

Геометрические параметры элементов копровой установки: радиус и длина мерного стержня $R_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ м и $L_1 = 1,2$ м, толщина и длина рабочей части образца $H_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ м и $L_2 = 0{,}6 \cdot 10^{-2}$ м, внутренний радиус и длина кольца

$R_3 = 2{,}17 \cdot 10^{-2}$ м и $L_3 = 5 \cdot 10^{-2}$ м, радиус и длина ударника $R_4 = 3{,}45 \cdot 10^{-2}$ м и $L_4 = 30{,}85 \cdot 10^{-2}$ м. Материал ударника, трубы и мерного стержня — сталь 20, механические характеристики: $K = 1{,}7917 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8{,}269 \cdot 10^4$ МПа, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Материал образца — сплав Д16Т, механические характеристики: $K = 6{,}25 \cdot 10^4$ МПа, $G = 2{,}885 \cdot 10^4$ МПа, $\rho = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, предел текучести $\sigma_T = 190$ МПа. В эксперименте регистрируется начальная скорость ударника V_0. Тензометрические датчики, установленные на мерном стержне в сечениях А и В на расстоянии $l_A = l_B$=0,3 м (рисунок 1), регистрируют импульс деформации ${e_z}^A(t)$, ${e_z}^B(t)$ на концах стержня в зависимости от времени. По методике восстановления волнового процесса по показаниям двух датчиков деформаций [2] восстанавливаются напряжения и скорость на ударяемом торце мерного стержня. По методике [3] определяется осевая сила и перемещения ударяемого торца мерного стержня, перемещения поверхности контакта образца и кольца. Осевые силы на поверхностях контакта колпачка и мерного стержня, колпачка и передающего кольца полагаем равными, пренебрегая волновым процессом в испытуемом образце. Таким образом, регистрируя двумя тензодатчиками деформации в мерном стержне, можно определить усилия, скорости перемещений и перемещения на ударяемом торце мерного стержня и контактной поверхности передающего кольца. В дальнейшем, заменим регистрацию деформаций тензодатчиками в физическом эксперименте регистрацией деформаций в математическом эксперименте. Осуществим численное моделирование волнового процесса в системе «ударник — передающее кольцо — образец — опорный мерный стержень» в осесимметричной постановке с использованием ППП «Динамика - 2» [4].

2. Верификация методики. Для верификации методики и оценки погрешности восстановления усилий, перемещений и скоростей перемещений на контактных поверхностях мерного стержня и передающего кольца на рисунках 2–5 представлены результаты расчетов при скоростях удара V_0=3; 5 м/с в осесимметричной постановке (кривые 1) и по одномерной модели (кривые 2). Схема и геометрические параметры элементов копровой установки представлены на рисунке 1. Показания двух датчиков брались из расчетов в осесимметричной постановке. На рисунке 2 приведены зависимости осевой силы на ударяемом торце мерного стержня от безразмерного времени $F_z \sim \hat{t}$, полученные из одномерного и осесимметричного расчета. Безразмерное время $\hat{t} = t/T$, где $T = 68$ мкс — время пробега упругой волны по суммарной длине ударника $L_4 = 0{,}3$ м и кольца $L_3 = 0{,}05$ м. На рисунке 3 приведены зависимости перемещений на ударяемом торце мерного стержня от безразмерного времени $u_z^1 \sim \hat{t}$, полученные по методике [3] и из осесимметричного расчета. На рисунке 4 приведены зависимости скоростей перемещений на контактной поверхности передающего кольца с колпачком от безразмерного времени ${\dot{u}_z}^1 \sim \hat{t}$, полученные интегрированием уравнения движения ударника и передающего кольца по методике [3] и осесимметричного расчета. На рис. 5 приведена зависимость $\Delta l/L_2 \sim \hat{t}$ от безразмерного времени, где $\Delta l = u_z^3 - u_z^1$.

Различия расчета осевых сил и скоростей перемещений в осесимметричной и в одномерной постановках не превышают 5 %, а по деформациям и перемещениям — не более 2 %. Следовательно, при обработке результатов физического эксперимента основные погрешности будут зависеть от точности регистрации на-

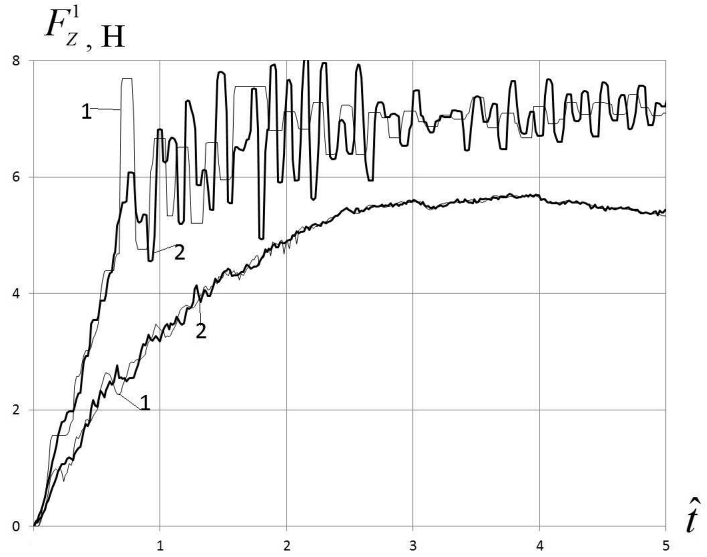


Рисунок 2 – *Осевая сила на ударяемом торце мерного стержня*

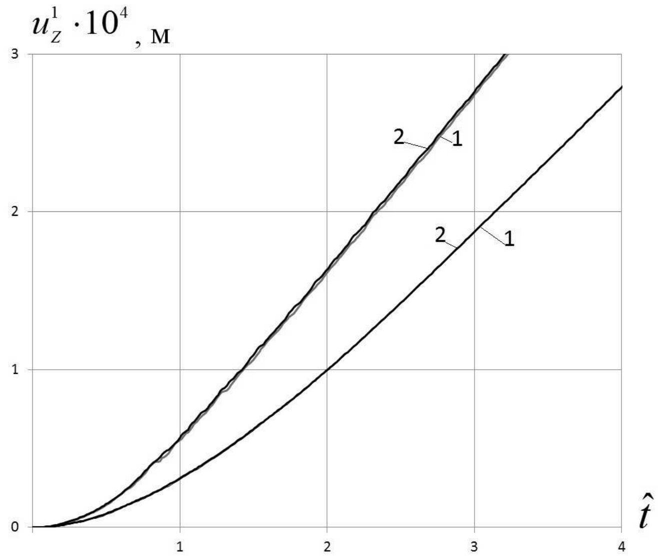


Рисунок 3 – *Перемещение на ударяемом торце мерного стержня*

чальной скорости удара и деформаций датчиками в мерном стержне. При сопоставлении схем динамического испытания материалов методом разрезного стержня Гопкинсона и методом прямого удара, необходимо отметить, что каждая из этих схем имеет свои достоинства и недостатки. В экспериментах по схеме Гопкинсона формируется импульс нагружения, близкий к прямоугольному и, следовательно, скорость деформации в испытуемом образце близкая к постоянной. Эту схему трудно реализовать в газодинамической установке копрового типа из-за большой протяженности стержней. Метод прямого удара, из-за наличия только одного мерного стержня, обладает меньшей точностью определения величин сил и скоростей перемещений на контактных поверхностях образца, но позволяет достичь боль-

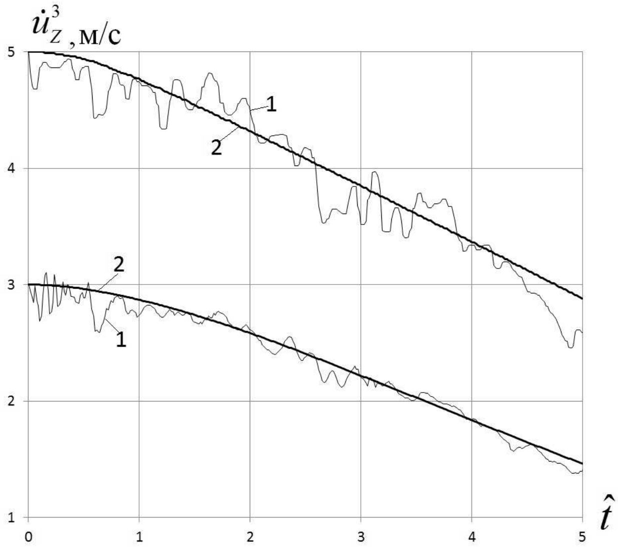


Рисунок 4 – *Скорость перемещений на контактной поверхности передающего кольца с колпачком*

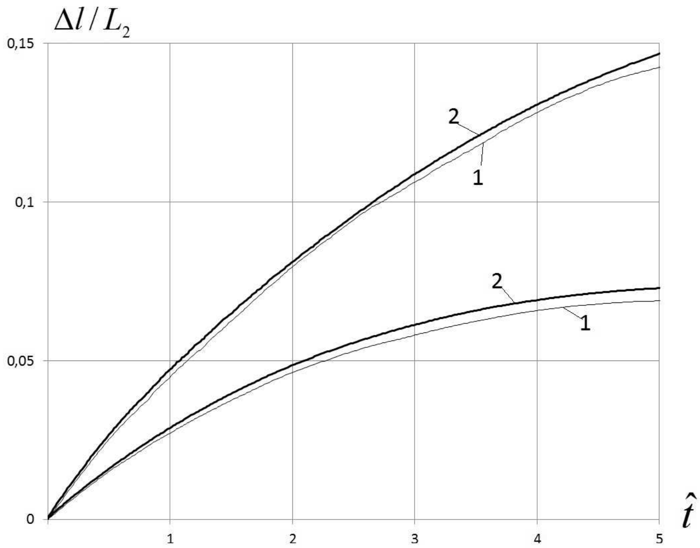


Рисунок 5

шей энергии удара, а, следовательно, и степени деформации при малых и больших скоростях удара. Поэтому он предпочтителен при использовании двух датчиков деформации для испытаний на растяжение-сжатие при немалых деформациях и больших временах процесса деформирования вплоть до разрушения. При этом точность оценки параметров процессов деформирования достаточно высока, поскольку время установления волнового процесса в испытуемом образце пренебрежимо мало.

Заключение. Проведено численное моделирование процесса деформирования образцов колпачкового типа при растяжении на вертикальной газодинамической установке. Посредствам сопоставления результатов расчета процесса удара в осесимметричной и одномерной постановках показано, что погрешность восстановления усилий, скоростей перемещений и перемещений в испытуемых образцах на основе одномерной модели не превышает 5 %. Сделан вывод, что применение метода прямого удара предпочтительно при низких скоростях удара и (или) при больших деформациях до разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В., Жегалов Д. В., Жестков М. Н.* Численное моделирование экспериментов на растяжение при ударном нагружении образцов колпачкового типа на газодинамической копровой установке // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник.Нижний Новгород Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2013. № 75. С. 88–95.

[2] *Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В.* Методика исследования упругопластических характеристик материалов на газодинамической копровой установке по показаниям двух датчиков деформаций // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2011. № 6(1). С. 154–157.

[3] *Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В.* Развитие и верификация метода прямого удара для идентификации вязкопластических характеристик материалов в экспериментах на газодинамической копровой установке // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник.Нижний Новгород Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2009. № 71. С. 184–192.

[4] *Баженов В. Г., Зефиров С. В., Кочетков А. В. и др.* Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами Мат. моделирование. 2000. Т 12. № 6. С. 67–72.

Bazhenov V. G., Baranova M. S., Nagornykh E. V. *Experimental and theoretical study of processes of elastoviscoplastic deformation and failure of metals and alloys using gas-gun stand*. All known testing technique of the tensile of hat-shaped specimens are based on the Hopkinson's scheme and Kolsky's method (U. Lindholm, D. Mohr, G. Gary, T. Nicholas, etc.). It is difficult to implement the strain rate in the order of 100 1/sec in these apparatuses at horizontal configuration of rods. Experimental studies of the characteristics of failure by a direct impact to the hat-shaped specimen on the vertical gas-gun stand are unknown to authors. Also there isn't s analysis of the advantages and disadvantages of using a solid or tubular support and measuring elements as a measuring rod. Studies of the stretching process of hat-shaped specimens have conducted in tensile experiments based on the Hopkinson's scheme(system "striker — transmitting measuring rod — hat-shaped specimen — support measuring tube") in order to assess the speed and degree of deformation in the specimens in paper [1]. In this paper we consider the scheme of direct impact, implemented in experiments on gas-gun stand (system "striker — transfer ring — hat-shaped specimen — support measuring rod"). These two schemes are analyzed in terms of the extent and rate of deformation and accuracy of recovery of deformation parameters in experimental studies.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВИБРАЦИЙ КРУПНОГАБАРИТНЫХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ГРУНТОВЫМ ОСНОВАНИЕМ

Баженов В. Г., Дюкина Н. С.

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского

Предлагаемый авторами метод анализа сейсмостойкости заглубленных сооружений существенно сокращает вычислительные затраты и учитывает эффекты контактного взаимодействия сооружения с грунтовым основанием. Данный метод решения, алгоритмы моделирования контактного взаимодействия и учета поля сил тяжести реализованы в сертифицированном программном комплексе «Динамика-3» и применены для оценки сейсмопрочности подземных трубопроводов, примыкающих к ответственным сооружениям АЭС. Проведены исследования поведения сооружений в зависимости от параметров сейсмического воздействия и различных геометрических и физических параметров сооружения и грунта.

Предлагаемые строительными нормами методы оценки сейсмостойкости сооружений используют упрощенную модель грунтового основания и применимы только для малозаглубленных сооружений. Исследование сейсмостойкости заглубленных сооружений и примыкающих к ним подземных трубопроводов подразумевает включение в рассмотрение массива прилегающего к сооружению грунта, большие размеры которого позволяют минимизировать отраженные от границ грунтового массива волны вблизи сооружения. Выбор мелкой разностной сетки, необходимой для точного описания сооружения и высокочастотных сейсмических осцилляций, делает численное моделирование крупногабаритных задач сейсмики крайне трудоемким даже на суперкомпьютерах. Предлагаемый авторами метод анализа сейсмостойкости заглубленных сооружений [1] существенно сокращает вычислительные затраты и учитывает эффекты контактного взаимодействия сооружения с грунтовым основанием.

Для описания движения сплошных сред в лагранжевых переменных в неподвижной декартовой системе координат применяются уравнения, следующие из вариационного принципа баланса мощностей:

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\sigma_{ij}(\delta\dot{u}_{i,j}+\delta\dot{u}_{j,i})}{2}+\rho\ddot{u}_i\delta\dot{u}_i+\rho f_i\delta\dot{u}_i\right)d\Omega-\int_G p_i\delta\dot{u}_i dS-\int_G q_i\delta\dot{u}_i dS=0. \quad (1)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_i — скорости перемещений, p_i, q_i — компоненты поверхностной нагрузки и контактного давления, f_i — компоненты массовых сил, отнесенные к единице массы $(i = x, y, z)$. Нормальные к поверхности контакта компоненты усилий q_i находятся из условия непроникания, а касательные усилия — в соответствии с законом Амонтона–Кулона. Связь контактирующих подобластей полагается односторонней, то есть допускается их отрыв друг от друга и повторное вступление в контакт.

Решение определяющей системы уравнений (1) при заданных начальных и граничных условиях основывается на вариационно-разностном методе дискретизации по пространственным координатам и явной схеме интегрирования по времени [2]. Процесс деформирования сплошной среды во времени разбивается на временные слои $t^0, t^1, \ldots, t^k, \ldots$ с шагами $\Delta t^{k+1} = t^{k+1} - t^k$. Схема вычисления скоростей и перемещений по времени представляется в виде:

$$\begin{aligned} (\dot{u}_i)_j^{k+1/2} &= (\dot{u}_i)_j^{k-1/2} + (F_i)_j^k \Delta t^{k+1/2}/(M)_j^k, \\ (u_i)_j^{k+1} &= (u_i)_j^k + (\dot{u}_i)_j^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \\ \Delta t^{k+1/2} &= \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2}, (i = x, y, z). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь F_i — обобщенные силы, действующие на расчетный узел j, M — масса в j-м узле. Выбор шага интегрирования Δt^{k+1} осуществляется из условия устойчивости Куранта. Применение процедуры консервативного сглаживания к разностной схеме второго порядка точности (2) позволяет подавить нефизические осцилляции численного решения.

Массив грунта представляется прямоугольным параллелепипедом, к нижней границе которого прикладывается сейсмическое воздействие в виде компонент вектора скорости v_x, v_y, v_z, вычисленных так, чтобы вблизи сооружения воспроизводилась заданная акселерограмма. На боковых груницах грунтового массива задаются специально разработанные мало отражающие волны граничные условия, суть которых заключается в высылке скоростей перемещений из приграничных узлов сетки в граничные на каждом на временном шаге. Из численных экспериментов установлен размер грунтового массива, достаточный для исключения влияния краевых эффектов на результаты расчета вблизи сооружения, — 20 характерных размеров основания сооружения в плане. Жесткие грунты моделируются однородной или многослойной идеально упругой средой, для мягких грунтовых оснований применяется трансверсально-изотропная модель, учитывающая изменение характеристик грунта с глубиной [3]. Расчетная область находится в поле сил тяжести. Расчет полей перемещений и напряжений от действия сил тяжести осуществляется с применением процедуры гашения кинетической энергии в момент достижения максимума до ее установления с заданной точностью. Между сооружением и грунтом моделируется контактное взаимодействие с трением.

Методика определения кинематических граничных условий на нижней границе грунтового массива по известной на дневной поверхности экспериментальной акселерограмме [1] основана на допущении, что приходящие от источника землетрясения к сооружению волны можно считать плоскими и распространяющимися по нормали к дневной поверхности грунта. В соответствии с предлагаемой численной методикой сейсмограмма на нижней поверхности грунта представляется в виде кусочно-линейной функции

$$C_1(t_h) = \sum_i a_i H(t_h - t_i),$$

где a_i — приращение к амплитуде сейсмограммы в данной характерной точке; $H(t_h - t_i)$ — функция Хевисайда; t_h — дискретные значения времени, отвечающие характерным точкам сейсмограммы на поверхности; t_i — сдвиг по времени характерной точки сейсмограммы. Далее сеточно-характеристическим методом решается одномерная задача распространения в грунтовой среде волны, заданной на границе в виде функции Хевисайда. Зная, как изменилась тарировочная функция при пробеге через грунтовый массив, по экспериментальной сейсмограмме C_1 в каждой опорной точке можно восстановить искомую сейсмограмму на нижней границе области грунта C_0:

$$C_0(t_h) = \frac{C_1(t_h + t^*)H_0(t_h)}{H_1(t_h + t^*)}\ ,$$

где H_0 — тарировочная функция; H_1 — сейсмограмма на поверхности, полученная из решения задачи; t^* — время пробега волны от нижней границы грунтового массива до его поверхности. Линейная интерполяция по полученным опорным точкам позволяет найти сейсмограмму на подошве грунтового массива отдельно для сдвиговых и продольных волн. Шаг разностной сетки обуславливается точностью описания высокочастотных осцилляций, присутствующих в сейсмограмме. Чтобы дисперсионные эффекты численного решения по явной схеме «крест» не искажали заданную кусочно-линейной функцией волну, необходимо брать число Куранта равным единице. Тогда схема «крест» даст те же результаты, что и сеточно-характеристический метод на фиксированной сетке, и дисперсия численного решения не возникнет.

Описанные методы решения, алгоритмы моделирования контактного взаимодействия и учета поля сил тяжести реализованы в сертифицированном программном комплексе «Динамика-3» (сертификат № РОСС RU.ME20.HOO338 Госстандарта России, Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013, выданный Научно-техническим центром по ядерной и радиационной безопасности). С целью повышения эффективности численных исследований сейсмостойкости сооружений проведено распараллеливание алгоритма конечно-элементной методики решения трехмерных нелинейных задач динамики конструкций по принципу пространственной декомпозиции расчетной области [4], в соответствии с которым вычисления в подобластях расчетной области распределяются по узлам кластера. Алгоритм решения задачи на каждом временном слое распадается на две части: последовательную и параллельную. Основной объем вычислений (определение компонент деформаций, напряжений, узловых сил, интегрирование уравнений движения и т. д.) осуществляется параллельно, в последовательной части происходит согласование рассчитанных величин, полученных на разных узлах кластера [5]. Распараллеливание алгоритма позволило сократить вычислительные затраты и повысить эффективность численных исследований. Благодаря этому стал технически возможным многократный пересчет задачи с различными вариантами воздействия, сформированного вероятностными методами из экспериментальной сейсмограммы. Результаты таких расчетов позволяют отражать опыт многих землетрясений, что повышает их достоверность.

Разработанная вычислительная модель динамического взаимодействия сооружения с грунтом применена для оценки сейсмопрочности подземных трубопроводов, примыкающих к ответственным сооружениям АЭС Бушер (Иран), Нововоронежской АЭС-2, Калининской, Ростовской АЭС (Россия), Белорусской АЭС (Белоруссия) по заказу ОАО «НИАЭП» (Н. Новгород).

Проведен анализ факторов, влияющих на поведение сооружений при сейсмических вибрациях [6]. Исследовано поведение сооружений в зависимости от различных геометрических и физических параметров сооружения и грунта: массивности и эксцентриситета центра масс сооружения, величины заглубления фундамента, коэффициента трения на поверхности контакта сооружения и грунта, интенсивности и напрвления распространения сейсмических волн, многослойности грунтового основания. Ниже приводятся основные результаты исследований:

- Массивность сооружения оказывает влияние лишь на вертикальные взаимные смещения стенок здани и грунта;

- Анализ взаимодействия сооружения с грунтом в зависимости от эксцентриситета центра масс проведен для сооружений, заглубленных на 15% и 25% высоты. Установлено, что эксцентриситет центра масс при сейсмическом воздействии влияет на раскачивание конструкции в целом в большей мере, чем на взаимные смещения боковых стенок сооружения и прилегающего грунта;

- С увеличением заглубления от 25% до 100% от высоты здания вертикальные смещения уменьшаются соответственно в 3 раза, а горизонтальные — в 6 раз;

- Анализ влияния коэффициента трения на контактных поверхностях на взаимодействие сооружения и грунта при сейсмических воздействиях проведен для полностью заглубленных сооружений и сооружений, заглубленных на треть высоты. Установлено, что коэффициент трения оказывает существенное влияние лишь на вертикальные смещения для полностью заглубленных зданий;

- Между ускорениями на поверхности грунта и взаимными смещениями грунта и здания и меется зависимость близкая к линейной;

- Расположение источника сейсмического воздействия не влияет на раскачивание сооружения. Различия в результатах решения для предельных вариантов расположения источника сейсмических волн — существенное удаление по горизонтали и по вертикали — объясняются давлением грунта на здание со стороны подхода горизонтально распространяющихся волн.

- На основании серии вычислительных экспериментов с многослойными грунтами установлено, что существенным для проведения расчетов на сейсмостойкость является геологическое строение грунта на глубине до 8 величин заглубления здания в грунт. Таким образом, численные исследования позволили оценить необходимую для геологических изысканий глубину разреза, в котором должны быть изучены механические характеристики слоев грунта.

- Трансверсально-изотропная модель грунта позволяет эффективно решать задачи сейсмики заглубленных сооружений для оснований малой плотности, поскольку процесс численного моделирования осадки грунта в поле сил тяжести проходит при меньших скоростях и перемещениях грунта

Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-593.2014.8, гранта Министерства образования и науки (соглашение № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ от 27.08.2013) и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-31113, № 14-08-01129).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Баженов В. Г. Дюкина Н. С.* Методы численного исследования сейсмостойкости заглубленных сооружений. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 141 с.

[2] *Баженов В. Г. Чекмарев Д. Т.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. 118 с.

[3] *Дюкина Н. С. Кибец А. И. Жестков М. Н.* Анализ сейсмических колебаний заглубленных сооружений с учетом трансверсально-изотропного основания // Пробл. прочн. и пластичн. 2013. №75(1). С. 40–46.

[4] *Воеводин В. В. Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. СПб: БХВ-Петербург, 2002. 609 с.

[5] *Баженов В. Г. Гордиенко А. В. Кибец А. И. Лаптев П. В.* Адаптация последовательной методики решения нелинейных задач динамики конструкций для многопроцессорных ЭВМ // Мат. IV Междунар. науч.-практ. семинара «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». Самара, 2004. С. 20–25.

[6] *Баженов В. Г. Дюкина Н. С.* Численное исследование взаимодействия сооружений с грунтовым основанием при сейсмических воздействиях // Выч. мех. сплошных сред. 2012. Vol. 5. №1. С. 19–24.

Bazhenov V. G., Dyukina N. S. *Numerical study of seismic vibrations of large structures taking into account contact interaction with subgrade.* The method for the analysis of the problems of the seismic stability of buried structures proposed by authors significantly reduces the computational cost and takes into account the effects of soil-structure interaction. This method, together with the modeling algorithms of contact interaction and gravity forces accounting have been implemented in the certified program tool «Dynamics-3» and applied to estimate seismic resistance of underground piping attached to responsible nuclear power facilities for NPP. The behavior of structures depending on the seismic effect has been studied for various geometrical and physical parameters of the structure and soil.

ПРИМЕРЫ НЕЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ В МАЛОКОМПОНЕНТНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Базаренко А. Н., Петровская Н. В., Рябов Н. А.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлены результаты численного и аналитического исследования бифуркаций для двух малокомпонентных гидродинамических моделей, содержащих малый параметр.

1. 6d-модель термогравитационной конвекции сверхтекучей жидкости. В работе [1] в приближении Обербека–Буссинеска построена замкнутая математическая модель термогравитационной конвекции сверхтекучей жидкости. На ее основе для задачи о двумерной конвекции сверхтекучей жидкости в подогреваемом снизу цилиндре с горизонтальной осью выведена простейшая шестимерная модель

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\varepsilon M x + y \\
\dot{y} &= -xz - \varepsilon D y - \varepsilon(y(2u+v) + zw) \\
\dot{z} &= xy - \varepsilon D(Q+z) - \varepsilon(z(2v+u) + yw) \\
\dot{u} &= -2xw - \varepsilon u + \varepsilon y^2 \\
\dot{v} &= 2xw - \varepsilon v + \varepsilon z^2 \\
\dot{w} &= x(u-v) - \varepsilon w + \varepsilon yz
\end{aligned} \tag{1}$$

представляющая собой обобщение известной системы Лоренца. При ее выводе использован подход, предложенный В. Ф. Должанским для задачи о конвекции вязкой жидкости в подогреваемом эллипсоиде [2]. В случае идеальной конвекции решения системы (1) определяют *точные* решения исходной задачи.

Параметры M, D и Q пропорциональны коэффициентам вязкости, температуропроводности и градиенту линейного распределения температуры на границе области. Параметр ε можно считать малым при некоторых предположениях относительно остальных параметров задачи. В частности, он мал, если малы перекрестные эффекты (подробнее см. в [1]). Система (1) инвариантна относительно преобразования $J : (x, y, z, u, v, w) \mapsto (-x, -y, z, u, v, -w)$.

При $\varepsilon = 0$ система имеет пять независимых первых интегралов, она интегрируема, и почти все ее решения — периодические. Это позволило в работе [3] применить метод осреднения для систем, близких к интегрируемым [4], для доказательства существования и приближенного вычисления периодических решений системы (1) в предельном случае, когда $\varepsilon \to 0$, а параметры M, D и Q фиксированы. Как известно (см., например, [4, 5]), если осредненные уравнения первого приближения имеют асимптотически устойчивое по Ляпунову равновесие, то исходная система уравнений при достаточно малых ε имеет асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл. Поэтому исследование периодических решений системы (1) при малых ε сводится к анализу равновесий осредненной системы.

Последняя представляет собой нелинейную систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений для медленных переменных — интегралов порождающей системы. Ее правые части выражаются через полные эллиптические интегралы с модулем, зависящим от медленных переменных. Существование равновесий в предельных случаях $Q \to 0$ и $Q \to \infty$ установлено в [3] аналитически, также аналитически исследована их устойчивость.

Подобно системе Лоренца, уравнения (1) в предельном случае $\varepsilon \to 0$ можно трактовать как уравнения регулируемого маятника. Периодические движения жидкости при этом делятся на две группы: колебательного типа (когда среднее за период значение завихренности равно нулю) и вращательного типа (среднее за период значение завихренности отлично от нуля). Первые существуют и устойчивы при достаточно малых Q, вторые — при достаточно больших Q [3]. Соответствующие фазовые траектории в каждой группе либо J-симметричны («большие» циклы), либо образуют J-симметричные пары («малые» циклы). Ниже приводятся результаты численного исследования устойчивости и бифуркаций равновесий осредненных уравнений первого приближения и соответствующих им порождающих циклов.

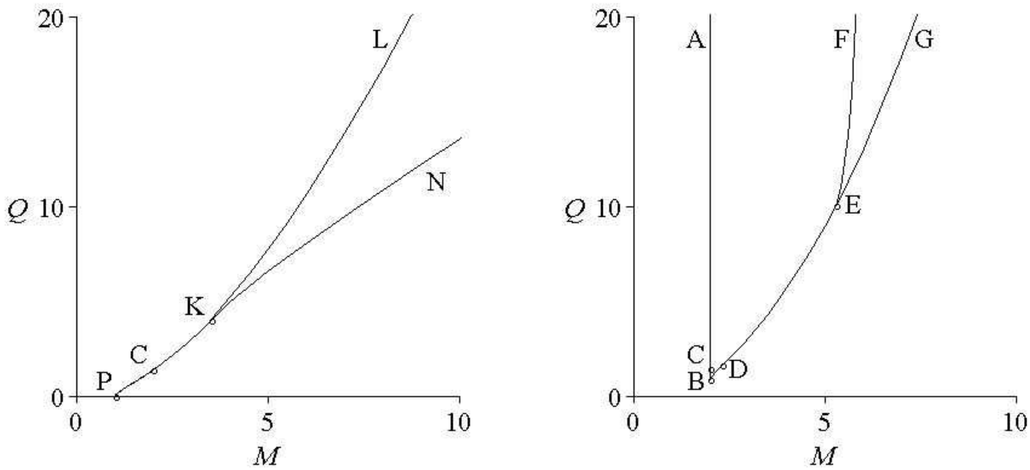


Рисунок 1 – Бифуркационные диаграммы на плоскости параметров (M, Q); слева: «большие» циклы, справа: «малые» циклы

На рисунке 1 слева приведена типичная бифуркационая диаграмма на плоскости параметров (M, Q) при фиксированном значении параметра $D = 1$ для периодических движений либрационного типа. В области параметров ниже кривой $PCKN$ устойчивы равновесия осредненных уравнений, которым отвечают J-симметричные порождающие циклы. Обнаружены три различных способа потери их устойчивости с ростом параметра Q. В точках кривой PC порождающий цикл вырождается в сепаратрисную восьмерку нулевого равновесия. В точках кривой CK имеет место бифуркация слияния и гибели пары равновесий. Второе (неустойчивое) равновесие возникает при несколько меньших значениях Q, и ему соответствует порождающий цикл, возникающий при распаде сепаратрисной восьмерки. В точках кривой KN потеря устойчивости происходит в результате бифуркации Эйлера и сопровождается рождением симметричной пары равновесий, устойчивых в области между кривыми KN и KL. В точках кривой KL эти равновесия гибнут, сливаясь с неустойчивыми. Выше кривой $PCKL$ не существует равновесий осредненных уравнений, которым отвечают периодические движения либрационного типа.

На рисунке 1 справа приведена бифуркационая диаграмма на плоскости параметров (M, Q) при $D = 1$ для периодических движений типа вращений. В области параметров, ограниченной кривой $ACBDEF$, устойчивы равновесия осредненных уравнений, которым отвечают J-симметричные пары порождающих циклов. На линии AB эти порождающие циклы стягиваются к равновесиям системы (1). В точках кривой BD имеет место бифуркация слияния и гибели пары равновесий осредненных уравнений, устойчивого и неустойчивого (неустойчивым равновесиям отвечают порождающие циклы, возникающие при распаде сепаратрисной восьмерки при несколько меньших значениях M). Точкам кривой DE отвечает колебательная потеря устойчивости, а точкам кривой EF — бифуркация Эйлера. Новые равновесия устойчивы в области параметров между кривыми EF и EG, в точках кривой EG происходит колебательная потеря устойчивости. Численно установлено, что колебательная потеря устойчивости равновесий осредненных уравнений является мягкой, возникающие предельные циклы устойчивы. Напомним, что если осредненные уравнения первого приближения имеют асимптотически устойчивый предельный цикл, то исходная система уравнений при достаточно малых ε имеет асимптотически орбитально устойчивый двумерный инвариантный тор T^2 (см., например, [4, 5]). При $\varepsilon \to 0$ число вращения на T^2 стремится к нулю, при $\varepsilon = 0$ тор становится семейством циклов порождающей системы. Соответственно, с ростом ε наблюдается рождение двумерного тора из семейства порождающих циклов.

2. 6d-модель движения вязкой жидкости в кольцевой области. В работах [6, 7], численно, с применением метода Галеркина, изучалось двумерное течение вязкой жидкости в кольцевой области, вызванное равномерным вращением внутренней границы. Интерес к этой задаче был вызван экспериментально обнаруженными В.А. Владимировым необычными режимами течений в тонком в осевом направлении кольцевом зазоре [8]. При быстром вращении внутреннего цилиндра наблюдались солитоноподобные режимы: медленно и равномерно прецессирующие в азимутальном направлении струи жидкости с интенсивным течением в радиальном направлении. В численных экспериментах [6, 7] с моделями высокой размерности (до 400 уравнений) наблюдались движения с аналогичными свойствами. Механизм их возникновения с ростом числа Рейнольдса Re не был исследован — они не ответвляются от основного стационарного режима движения (течения Куэтта), а возникают «из воздуха». Кроме того, остался открытым вопрос о существовании таких движений при неограниченно больших числах Рейнольдса. Для ответа на эти вопросы в данной работе исследована галеркинская модель минимальной размерности 6, которая допускает движения с описанными свойствами ([7], уравнения (2.7) при $m + n \leqslant 3$). Ввиду инвариантности исходной задачи относительно группы вращений, переход к полярным координатам $x_i = z_i \cdot \cos\phi_i$, $y_i = z_i \cdot \sin\phi_i$ позволил получить фактор-систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений относительно полярных радиусов z_i, $i = 1, 2, 3$, и двух фазовых инвариантов $\psi_{1,2}$ — линейных комбинаций угловых переменных ϕ_i. Невырожденным равновесиям фактор-системы соответствуют предельные циклы в фазовом пространстве 6d-модели с теми же свойствами устойчивости, а предельным циклам фактор-системы — двумерные инвариантные торы.

На рисунке 2 слева представлены результаты численного и аналитического исследования равновесий и предельных циклов фактор-системы. На графике по горизонтали — параметр $\varepsilon = Re^{-1}$, по вертикали — амплитуда решения (один из полярных радиусов z_i).

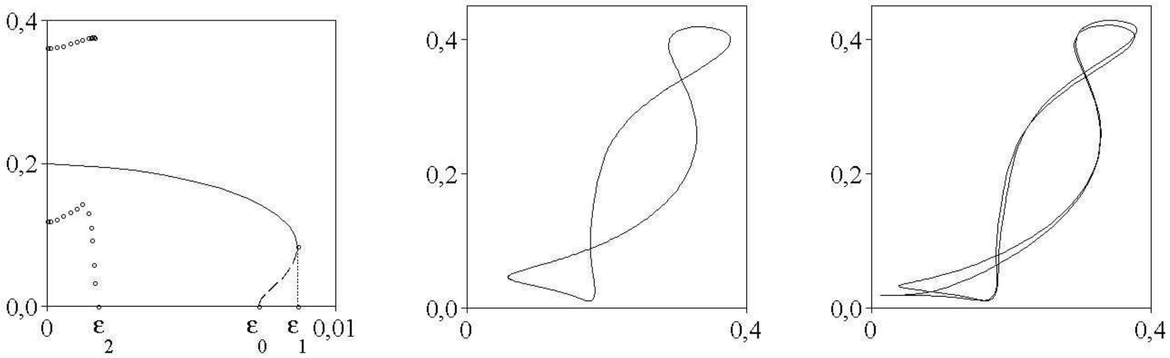


Рисунок 2 – Слева: зависимость амплитуды стационарных и периодических решений фактор-системы от параметра ε; в центре и справа: проекции предельного цикла фактор-системы на плоскость переменных (z_1, z_2)

Нулевому равновесию фактор-системы отвечает хорошо известное решение исходной задачи — течение Куэтта, устойчивое при $\varepsilon > \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \approx 0.00733$. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ происходит жесткая потеря устойчивости тривиального равновесия, возникающие при этом равновесия неустойчивы (эта ветвь на графике изображена пунктиром). При $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \approx 0.00867$, неустойчивое равновесие сливается с устойчивым и оба погибают. Ветвь устойчивых равновесий существует при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, то есть, при неограниченно больших значениях числа Рейнольдса (на графике эта ветвь изображена сплошной линией). Устойчивым равновесиям фактор-системы отвечают периодические движения жидкости — медленная равномерная прецессия в азимутальном направлении единственного четко локализованнного вихря (движения типа V в терминологии [6, 7]).

При существенно меньших значениях параметра ε (при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 \approx 0.00175$) фактор-система помимо устойчивого равновесия имеет также асимптотически устойчивый предельный цикл. В фазовом пространстве 6d-модели ему отвечает аттрактор в виде двумерного инвариантного тора, соответствующие движения жидкости — это движения типа J в терминологии [6, 7]. На рисунке 2 слева точками представлены результаты численного расчета предельных циклов фактор-системы; по вертикали отложены величины $\min z_1$ и $\max z_1$. Простой «однооборотный» предельный цикл устойчив для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_3 \approx 0.00174$, его проекция на плоскость переменных (z_1, z_2) приведена на рисунке 2 в центре. При $\varepsilon = \varepsilon_3$ он претерпевает бифуркацию удвоения периода, при этом возникает устойчивый «двухоборотный» предельный цикл — его проекция на рисунке 2 справа. Одновременно в фазовом пространстве 6d-модели происходит бифуркация удвоения двумерного тора.

При последующем увеличении ε, $\varepsilon \to \varepsilon_2$, расстояние между «двухоборотным» предельным циклом фактор-системы и ее тривиальным равновесием стремится к нулю. Результаты вычислений позволяют предположить, что этот предельный цикл при $\varepsilon = \varepsilon_2$ рождается из гомоклинической траектории тривиального равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Жуков М.Ю., Петровская Н.В.* Конвекция в сверхтекучей жидкости. Часть 1. Вывод уравнений; конечномерная модель. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 331–В94. 1994. 24 с.

[2] *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов Е. М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 368 с.

[3] *Жуков М. Ю., Петровская Н. В.* Асимптотический анализ шестимерной модели термогравитационной конвекции в жидком гелии. В сб.: «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, 2005.

[4] *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики / Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[5] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 410 с.

[6] *Petrovskaya N. V., Zhukov M. Yu.* Numerical Simulation of the Fluid Flow in Annulus. Preprint No. 5, 17 December 2001, 54 p. HIMSA, University of Hull.

[7] *Petrovskaya N. V., Zhukov M. Yu.* Low-order models of 2D fluid flow in annulus. arXiv:0905.1876v1. PDF, LaTeX. 12 p. 2009.

[8] *Vladimirov V. A.* Proceedings of the First International Conference on Flow Interaction. Hong Kong, 1994. P. 366–369.

Bazarenko A. N., Petrovskaya N. V., Ryabov N. A. *Examples of unlocal bifurcations of invariant tori in low-dimensional hydrodynamical models with small parameter*. Two low-dimensional hydrodynamical models with small parameter are under concideration. The results of analytical and numerical investigation of bifurcations are presented.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СПИРАЛЬНЫХ МОД В АОРТЕ

Батищев В. А., Петровская Д. С.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследованы короткие спиральные волны в аорте. Для решений системы Навье–Стокса построены асимптотические разложения как коротких спиральных волн, так и квазистационарных мод. Показано, что короткие спиральные волны, в отличие от длинных спиральных волн, заполняют все поперечное сечение цилиндра. Механизмом переноса этих волн является стационарный поток. Длинные и короткие спиральные моды изменяют направление вращения жидкости на противоположное как со временем, так и по сечению цилиндра. Квазистационарные моды в первом приближении не изменяют направления вращения жидкости со временем. Сумма коротких и квазистационарных мод может приводить к однонаправленному вращению жидкости, однако направление вращения может измениться один или несколько раз в течении сердечного цикла.

1. Введение. Во второй половине прошлого века появились сообщения о существовании винтовых течений крови в кровеносных сосудах человека и животных. Анализ экспериментальных данных показал, что закрученное течение крови возникает в левом желудочке сердца в диастолу и усиливается в систолу. Систола — одна из фаз сердечного цикла, сокращение сердца. Вторая часть сердечного цикла называется диастолой. Во время систолы кровь нагнетается в артериальную систему. Винтовое течение крови возникает в сердце из-за закрученной структуры стенок левого желудочка сердца, сокращения трабекулярных мышц желудочка, колебательного движения сердца в систолу.

К причинам возникновения спиральных течений крови в аорте относятся также и механические свойства стенок кровеносных сосудов. В своих работах Устинов Ю. А. рассчитал длинные пульсовые волны в артериальных сосудах с учетом винтовой анизотропии стенок сосудов.

В настоящей работе исследованы короткие спиральные волны, вызванные закрученным движением крови на входе в аорту. Показано, что в аорте возможно однонаправленное вращение жидкости. Однако, направление вращения может изменяться на противоположное один или несколько раз в течение систолы. Наибольшего значения окружная компонента скорости достигает во второй половине систолы.

2. Математическая модель. Рассматривается задача о спиральных волнах малой амплитуды в аорте, которая моделируется цилиндром кругового сечения. Поверхность цилиндра представляет собой тонкую упругую изотропную оболочку толщины h и радиусом срединной поверхности равным a. Движение жидкости рассчитывается на основе системы уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\, \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — вектор скорости, p — давление, ρ, ν — плотность жидкости и кинематический коэффициент, (r, θ, z) — цилиндрические координаты.

Исследуется осесимметричная задача, в которой вектор скорости, давление и смещения точек срединной поверхности оболочки не зависят от окружной координаты θ. Течение жидкости периодично по времени с заданным периодом равным T. Задача приводится к безразмерному виду. В качестве масштабов длины, времени, скорости, давления и смещений точек оболочки приняты соответствующие параметры a, $1/\omega$, U, ρU^2, U/ω. Здесь $\omega = 2\pi/T$. Параметр U — максимальное значение скорости частиц жидкости в поле длинных продольных волн.

Уравнение для окружной компоненты скорости в безразмерных переменных приводится к виду

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + R\Big(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}\Big) = \varepsilon_\nu^2\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2}\right). \tag{1}$$

Здесь $R = U/(a\omega)$. Параметр ε_ν мал и определяется формулой $\varepsilon_\nu = \sqrt{\nu/(\omega a^2)}$. Для аорты собаки $\varepsilon_\nu \approx 1/13$.

Отметим, что в работе используются динамические уравнения тонкой упругой цилиндрической оболочки, моделирующей стенки аорты. При переходе к безразмерным переменным в уравнениях оболочки возникает малый параметр $\varepsilon_k = \omega a\sqrt{2a\rho/(hE)}$. Здесь E — модуль Юнга.

3. Асимптотические разложения. Решение задачи представим в виде суммы трех вектор-функций $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(r,z)+\mathbf{V}_1(r,z_1,t)+\mathbf{V}_2(r,z,z_1,t)$. Здесь $z_1 = \varepsilon_k z$ — медленная осевая координата. Вектор $\mathbf{V}_0$ — описывает стационарное течение. Вектор $\mathbf{V}_1 = (v_r, v_\theta, v_z, p, u_r, u_\theta, u_z)$ — описывает длинные волны, зависящие только от медленной осевой координаты, радиальной координаты и времени. Вектор $\mathbf{V}_2 = (w_r, w_\theta, w_z, q, u_r^1, u_\theta^1, u_z^1)$ описывает короткие волны малой амплитуды. Первые четыре компоненты векторов $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ — это компоненты вектора скорости и давление, а последние три – это компоненты смещений точек срединной поверхности оболочки.

Стационарный поток, описываемый вектором $\mathbf{V}_0$, представим течением жидкости с полем скоростей, у которого поперечная и окружная компоненты отсутствуют, а осевая компонента изменяется квадратично по радиальной координате

$$v_z = V(r) = \alpha_0(1-r^2), \quad v_r = v_\theta = 0, \quad p = c - 4\varepsilon_\nu^2\alpha_0 z/R.$$

Асимптотические разложения, описывающие длинные волны, представленные вектором $\mathbf{V}_1$, запишем в виде рядов по степеням параметра ε_k

$$v_z = V(r) + v_{z0} + \varepsilon_k v_{z1} + \ldots, \quad v_\theta = \varepsilon_k v_{\theta 0} + \ldots \quad (\varepsilon_k \to 0)$$

$$v_r = \varepsilon_k v_{r1} + \ldots, \quad u_z = U_z + \varepsilon_k u_{z1} + \ldots, \quad u_\theta = \varepsilon_k u_{\theta 0} + \ldots$$

4. Короткие спиральные волны. В отличие от длинных спиральных волн, короткие спиральные волны заполняют все поперечное сечение цилиндра. Эти волны описываются окружной компонентой w_θ вектора $\mathbf{V}_2$. Предположим, что компонента w_θ имеет такой же порядок малости $O(\varepsilon_k)$, как и окружная длинноволновая компонента v_θ. Покажем, что короткие спиральные волны слабо зависят от упругих свойств оболочки, а механизмом их переноса является стационарный поток. Порядки остальных компонент вектора $\mathbf{V}_2$ находятся при анализе порядков всех членов системы Навье–Стокса и динамических уравнений оболочки. Асимптотические разложения компонент вектора $\mathbf{V}_2$ при $\varepsilon_k \to 0$ представим в виде

$$w_\theta = \varepsilon_k w_{\theta 1} + ..., \quad w_z = \varepsilon_k^2 w_{z1} + ..., \quad u_\theta^1 = \varepsilon_k^3 u_{\theta 1} + ...$$

Остальные компоненты разлагаются в аналогичные ряды.

Компонента $w_{\theta 1}$ учитывает конвективный перенос как средним потоком, так и длинными волнами и определяется из краевой задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial w_{\theta 1}}{\partial t} + RV_z \frac{\partial w_{\theta 1}}{\partial z} = \varepsilon_\nu^2 \left(\nabla^2 w_{\theta 1} - \frac{w_{\theta 1}}{r^2}\right), \\ w_{\theta 1} = 0 \ (r=1), \quad w_{\theta 1} = 0 \ (r=0), \quad w_{\theta 1} \to 0 \ (z \to \infty).\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $V_z = v_{z0}(r, z_1, t) + V(r)$.

Построим решение задачи в виде отдельных мод. Разделяя переменные, функцию $w_{\theta 1}$ представим в виде $w_{\theta 1} = W_{\theta 1}(r, t, z_1)\exp(ikz)$.

Длинные продольные волны при малых значениях параметра ε_ν распространяются в области пограничного слоя вблизи оболочки. Функцию v_{z0} представим в виде суммы двух слагаемых $v_{z0} = v_{z0}^0(t, z_1) + h_{z0}(t, z_1, s_1)$. Первое слагаемое v_{z0}^0 описывает осевую компоненту скорости вне области пограничного слоя. Функция h_{z0} локализована в пограничном слое вблизи оболочки. Функция v_{z0}^0 не зависит от радиальной координаты r, а ее среднее по времени значение равно нулю. В результате, функцию $W_{\theta 1}$ можно представить в виде $W_{\theta 1} = Q(t, z_1)W$, где $Q = \exp\left(-ikR\int v_{z0}^0(t, z_1)dt\right)$. Решение W представим в виде суммы двух слагаемых $W = w + H$. Здесь w определяет значение функции W в пограничном слое, а H — малая поправка к w, которая определена в области пограничного слоя.

Разделяя переменные, решение представим в виде $w = F(r)\exp(-int)$. Амплитуда $F(r)$ и комплексное волновое число k находятся из краевой задачи на собственные значения. Последняя задача решалась численно. При $\varepsilon_\nu \to 0$ вблизи оси цилиндра возникает тонкий критический слой, в котором локализована часть мод функции F. При каждом фиксированном значении индекса n найдено счетное число собственных функций $F_{n,m}$ и собственных чисел $k_{n,m}$, где $n, m = 1, 2, 3, ...$.

Приведем решение задачи (2) в виде отдельных спиральных мод

$$w_{\theta 1} = Q_{n,m}(t, z_1)\big(F_{n,m}(r) + H_{n,m}\big)\exp\big(i(k_{n,m}z - nt)\big). \tag{3}$$

Здесь n, $m = 1, 2, 3, ...$. Функция $Q_{n,m}$ получается заменой декремента k на $k_{n,m}$ в формуле для Q. Функция $F_{n,m}$ описывает спиральную моду вне области пограничного слоя. Функция $H_{n,m}$ — малая погранслойная поправка, локализованная в пограничном слое D_S и исчезающая вне D_S. Комплексное волновое число и собственную функцию представим в виде $k_{n,m} = k_r + ik_i$, $F_{n,m} = g_{n,m} + if_{n,m}$. Численные расчеты показали, что декремент затухания k_i и волновое число монотонно затухают с ростом параметра R_p, равного $R_p = U_p/(\omega a)$. При $m = 1, n \geqslant 1$ с ростом индекса n увеличиваются значения параметров k_r и k_i, а функции $f_{n,m}$ и $g_{n,m}$ локализуются вблизи оси цилиндра. Локализация усиливается с уменьшением параметра ε_ν. При $\varepsilon_\nu \to 0$ вблизи оси симметрии возникает вязкий критический слой с толщиной порядка $O(\sqrt{\varepsilon_\nu})$. При выходе из этого слоя спиральные моды затухают по экспоненциальному закону.

5. Квазистационарные моды. Короткие и длинные спиральные моды изменяют направление вращения жидкости как по сечению, так и со временем в течении систолы. Построим асимптотические разложения решений уравнений движения, которые в главном приближении не зависят от времени, а первая мода не изменяет направления вращения по пространственным координатам. Малые параметры ε_ν и ε_k свяжем по формуле $\varepsilon_k = c_\varepsilon \varepsilon_\nu^2$. Для параметров, соответствующих аорте собаки приведем значение $c_\varepsilon \approx 3.44$. Итак, асимптотические разложения решений задачи имеют вид

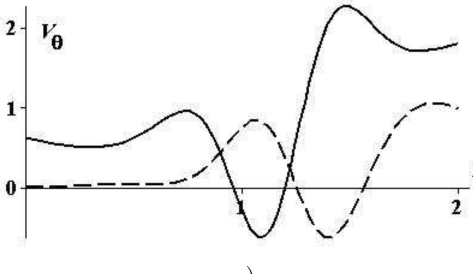
$$w_\theta = \varepsilon_k w_0 + \varepsilon_k^2 w_1 + \varepsilon_k^{5/2} H_0 + O(\varepsilon_k^3) \quad (\varepsilon_k \to 0).$$

Функции w_k описывают решения вне области пограничного слоя. Функция H_0 локализована в пограничном. Функция w_0 определяется из краевой задачи на собственные значения.

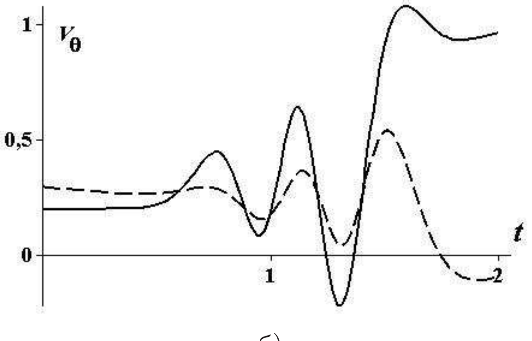
6. Свойства спиральных мод. Приведем результаты расчетов коротких спиральных волн вне области пограничного слоя по формуле (3). На рисунках 1–3 приведены амплитуды спиральных мод при различных значениях индексов m и n. На рисунке 1а приведена сумма амплитуд первой спиральной моды $n = m = 1$ и первой квазистационарной моды при $r = 0.5$ в сечении $z = 0$ (сплошная линия) и $z = 6$ (пунктирная линия). Рисунку 1б соответствует сумма амплитуд моды $n = 2$, $m = 1$ и первой квазистационарной моды. Здесь сплошная линия соответствует значению $z = 0$, а пунктирная — $z = 6$. Правая часть формулы (3) умножалась на комплексную постоянную $c = c_r + ic_i$. На рисунке 1а $c_r = c_i = -1$, а на рисунке 1б эта постоянная равна $c = 0.1(-1 + i)$.

На рисунке 2 изображена амплитуда первой спиральной моды $m = n = 1$ в зависимости от времени в течении систолы (рисунок 1а) и в зависимости от осевой координаты z (рисунок 2б). На рисунке 2б сплошная, пунктирная и штрихпунктирная линии соответствует началу систолы $t = 0$, середине систолы $t = \pi/3$ и концу систолы $t = 2\pi/3$.

Анализ численных расчетов приводит к следующим выводам. В течении систолы жидкость вращается в одну сторону, однако направление вращения изменяется на противоположное в течении небольшого промежутка времени. Длина этого промежутка мала по сравнению с продолжительностью сердечного цикла. Этот промежуток может находиться вблизи любой временной точки систолы (ри-

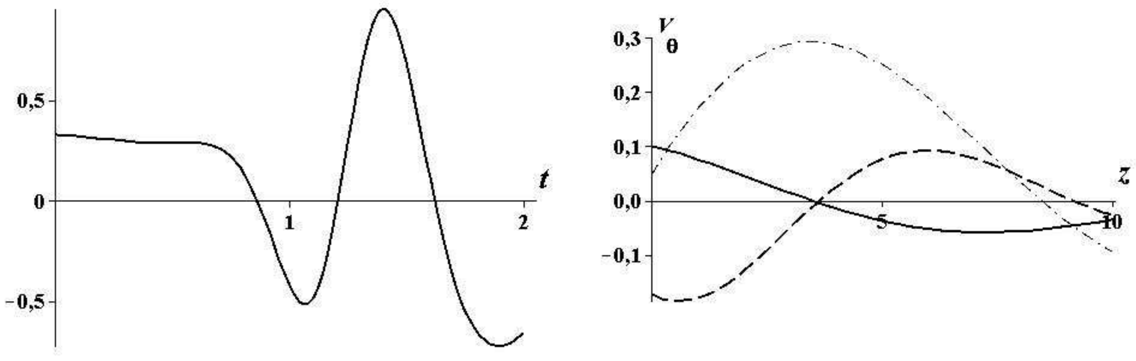


а)



б)

Рисунок 1 – Амплитуды спиральных волн в зависимости от времени в течении систолы



а) б)

Рисунок 2 – Первая спиральная мода

сунок 1). Возможно однонаправленное движение жидкости, которое описывается первой квазистационарной модой. Жидкость может изменять направление вращения в течении систолы несколько раз (рисунок 2а).

Наибольшее значение окружной компоненты скорости достигается во второй половине систолы. В начале систолы существует небольшой временной отрезок, в течение которого компонента $w_{\theta 1}$ изменяется незначительно. Длина этого временного отрезка увеличивается как при удалении от входного сечения цилиндра, так и с ростом индекса m. Высшие моды $m \geqslant 3$ возбуждаются в конце систолы. При удалении от входного сечения спиральные моды затухают, причем старшие моды затухают сильнее, чем первая мода. При фиксированных пространственных координатах окружная компонента скорости совершает колебания по времени, причем частота колебаний увеличивается с ростом индекса n.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Устинов Ю. А.* Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Доклады РАН. 2004. Т. 398. № 3. С. 71–76.

[2] *Батищев В. А., Устинов Ю. А.* Математическая модель распространения спиральных волн в аорте // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 1. С. 102–110

Batishchev V. A., Petrovskya D. S. *Numerical calculation of spiral modes in the aorta.* Short spiral waves are investigated in the aorta. For solutions of the Navier–Stokes equations we constructed asymptotic expansions for both short spiral waves and quasi-stationary modes. It has been shown that short spiral waves, unlike the long spiral waves fill the entire cross section of the cylinder. Transfer mechanism of these waves is a steady stream. Long and short helical modes change the direction of rotation of the fluid in the opposite as with time, and the cross section of the cylinder. Quasi-stationary modes in the first approximation do not change the direction of rotation of the liquid over time. Amount short and quasistationary modes can lead to unidirectional rotation of the liquid, but the direction of rotation can be changed several times during the cardiac cycle.

ОСОБЕННОСТИ РЕКОНСТРУКЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ФГМ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМ ГРАДИЕНТОМ СВОЙСТВ

Богачев И. В.[1], **Ватульян К. А.**[1], **Явруян О. В.**[2]
[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*
[2]*Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства РСО–Алания*

Рассмотрены задачи идентификации свойств ФГМ на примере анализа установившихся колебаний упругого и вязкоупругого слоя с сильным локализованным градиентом механических свойств по толщине. Представлены итерационные схемы решения таких задач, основанные на методе линеаризации и последовательном численном анализе интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го родов. В соответствии с предложенными подходами представлены результаты вычислительных экспериментов для различных видов неоднородностей, установлены диапазоны чувствительности и нечувствительности предложенной схемы.

Введение. Одной из наиболее интенсивно развивающихся областей является механика функционально-градиентных материалов (ФГМ). Ввиду особенностей их структуры, свойства таких материалов могут значительно изменяться по пространственным координатам, что делает классические подходы к исследованию композитов [1], основанные либо на процедуре пространственного осреднения, либо на теории смесей, неадекватными при их моделировании в сложных условиях нагружения. Количественное определение неоднородных характеристик ФГМ позволит моделировать реальное поведение конструкций из них.

Стоит отметить, что одним из распространенных видов ФГМ, активно использующихся в промышленности, являются материалы, лицевой слой которых выполняют из твердых материалов и соединяют с внутренним слоем, имеющим реологические свойства, различными технологическими методами. В связи со спецификой структуры таких материалов, их свойства могут значительно меняться на некоторых участках и такие материалы являются существенно неоднородными.

В данной работе в качестве примера рассмотрены задачи реконструкции характеристик упругого и вязкоупругого слоя с локализованным градиентом свойств по толщине. Представлены результаты вычислительных экспериментов, обсуждены некоторые особенности, возникающие в процессе решения.

1. Постановка задачи и построение итерационного процесса. Рассмотрим установившиеся колебания неоднородного вязкоупругого слоя толщины h, нижняя грань которого жестко защемлена, на части верхней границы приложены нагрузки, определяемые вектором p, где $p = (p_1,\, 0,\, 0)$ (подобная постановка рассмотрена в работах [2, 3]). Для описания вязкоупругих свойств слоя использована модель стандартного вязкоупругого тела Зинера. Предполагается, что материал, из которого изготовлен слой, является функционально-градиентным с сильно локализованным градиентом свойств по толщине. Задача состоит в определении мгновенного и длительного модулей слоя по дополнительной информации о функции смещения на верхней границе слоя, измеренной в некотором частотном диапазоне. В случае, если слой является упругим, необходимо дополнить постановку принципом предельного поглощения.

Пользуясь подходом, предложенным в статье [2], осредним краевую задачу по переменной x_1. В результате несложных преобразований исходная задача сведется к более простой, зависящей от осредненных функций смещения:

$$\begin{aligned}&(\mu U)_{,3} + \rho\omega^2 U = 0\\&U|_{x_3=0} = 0,\ \ \mu U|_{x_3=h} = 1,\\&U(h,\omega) = F(\omega),\ \ \omega \in [\omega_1, \omega_2],\end{aligned} \tag{1}$$

где $U(x_3,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_3,\omega) dx_1$ — осредненная функция смещения, $u(x_1, x_3, \omega)$ — функция смещения слоя, $\mu(x_3, i\omega) = \dfrac{(in\omega\mu_2(x_3) + \mu_1(x_3)}{1 + in\omega}$ — функция комплексного модуля, ρ — плотность, $\mu_1(x_3)$ и $\mu_2(x_3)$ — мгновенные и длительные модули среды, удовлетворяющие условию $0 < \mu_1(x_3) < \mu_2(x_3)$, n — время релаксации (const). Величины ρ и n считаются известными.

Итерационный процесс и операторные соотношения будем строить для вспомогательной задачи, которая получается после введения безразмерных переменных $x = x_3/h$, $u = U_i/h$, $\kappa^2 = \dfrac{\rho\omega^2 h^2}{\mu_1(0)}$ и безразмерных характеристик:

$$\begin{aligned}&(G(x, i\kappa)u'(x,\kappa))' + \kappa^2 u(x,\kappa) = 0,\\&u(0,\kappa) = 0,\ \ G(1, i\kappa)u'(1,\kappa) = 1.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $G(x, i\kappa) = \dfrac{i\tau\kappa g(x) + h(x)}{1 + i\tau\kappa}$, $\tau = n\sqrt{\dfrac{\mu_1(0)}{\rho h^2}}$, где $g(x) = \dfrac{\mu_1(x)}{\mu_1(0)}$, $h(x) = \dfrac{\mu_2(x)}{\mu_1(0)}$.

Для вспомогательной задачи (2) обратная задача заключается в определении функций $h(x)$, $g(x)$ $(0 < h(x) < g(x))$, $u(x,\kappa)$ при наличии дополнительного условия о величине осредненной функции смещения на верхней границе слоя:

$$u(1,\kappa) = f(\kappa),\ \ \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \tag{3}$$

Приведем общую схему итерационного процесса для решения сформулированной задачи, подобного описанному в [2]. Операторные уравнения для k-того шага итерационного процесса имеют вид:

$$u^k(x) = \int_0^1 K^k(\xi,\, x)u^k(\xi)d\xi + \int_0^x \frac{d\eta}{G^k(\eta, i\kappa)} \tag{4}$$

где $K^k(\xi,\, x) = \kappa^2 \displaystyle\int_0^{\min\{\xi,\, x\}} \frac{d\eta}{G^k(\eta, i\kappa)}$, $\xi \in [0,\ 1]$.

$$\int_0^1 \delta G^{k+1}(x, i\kappa)((u^k(x,\kappa))')^2 dx = f(\kappa) - u^k(1,\kappa), \tag{5}$$

где $G^{k+1}(x, i\kappa) = G^k(x, i\kappa) + \delta G^{k+1}(x, i\kappa)$.

Для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (4) использован метод коллокаций, а уравнение (5) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с суммируемым ядром, решение которого является некорректной задачей, в связи с чем был использован метод регуляризации А. Н. Тихонова.

В результате реализации k-го шага итерационного процесса находится функция $G^{k+1}(x, i\kappa)$ (и, следовательно, $h(x)$, $g(x)$), являющиеся приближенным решением задачи. Выход из итерационного процесса производится либо по величине функционала невязки, либо по числу итераций.

2. Численные эксперименты. Далее представлены результаты реконструкции функций, соответствующих в первой серии экспериментов модулю сдвига (упругий случай), во втором — мгновенным и длительным модулям (вязкоупругий случай). Каждая серия состоит из двух экспериментов: в первом свойства слоя меняются по толщине на 100% во втором — на 500%. Начальные приближения разыскивались на основании минимизации функционала невязки в классе линейных функций (или констант). На графиках сплошной линией показан график исходной функции, пунктиром — начального приближения, точками — восстановленной.

1. Упругий случай ($\tau = 0$).

1.1. Восстанавливаемая функция $h(x) = e^{(-20(x-0.5)^2)} + 1$. Начальное приближение найдено в виде $h_0(x) = 1.5$, частотный диапазон [2.2, 4.85]. Потребовалось 15 итераций, результат восстановления представлен на рисунке (рисунок 1, а), погрешность не превышает 4%.

1.2. Восстанавливаемая функция $h(x) = e^{(-20(x-0.5)^2)} + 0.2$. Начальное приближение найдено в виде $h_0(x) = 0.45$, частотный диапазон [1.25, 2.4]. Потребовалось 3 итерации, результат восстановления представлен на рисунке (рисунок 1, б), по-

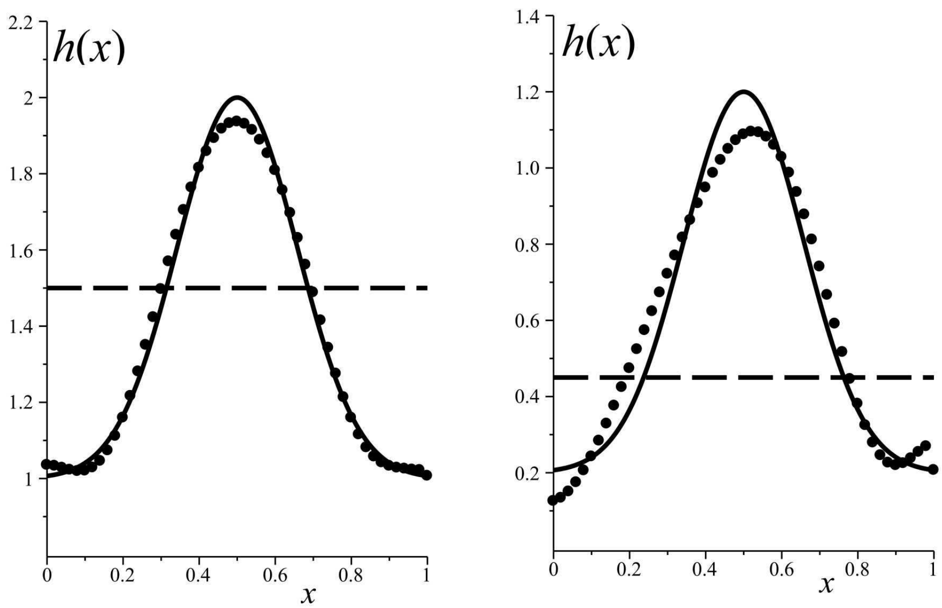


Рисунок 1 – Упругий случай. Восстановление функции $h(x)$ в примерах 1.1 (а) и 1.2 (б) грешность не превышает 8%.

2. Вязкоупругий случай ($\tau = 0.1$).

2.1. Восстанавливаются функции $h(x) = 0.8e^{(-20(x-0.5)^2)} + 1$, $g(x) = e^{(-20(x-0.5)^2)} + 1.05$. Начальные приближения найдены в виде $h_0(x) = 1.125$, $g_0(x) = 1.4$, частотный диапазон [2.4, 5]. Потребовалось 10 итераций, результат восстановления представлен на рисунке (рисунок 2), погрешность не превышает 4%.

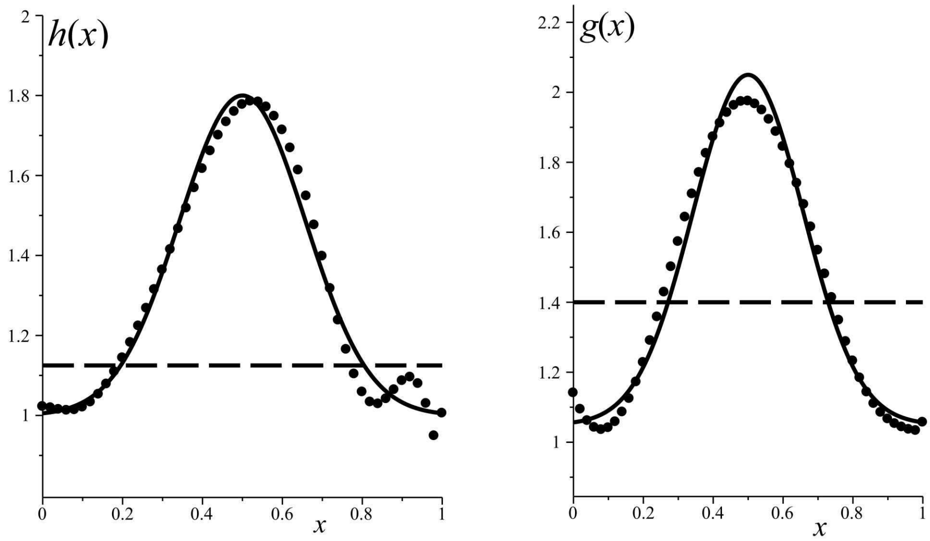


Рисунок 2 – Вязкоупругий случай. Восстановление функций $h(x)$ и $g(x)$ в примере 2.1

2.2. Восстанавливаются функции $h(x) = e^{(-20(x-0.5)^2)} + 0.2$, $g(x) = e^{(-20(x-0.5)^2)} + 0.25$. Начальные приближения найдены в виде $h_0(x) = 0.45$, $g_0(x) = 0.475$, частотный диапазон [1.25, 2.5]. Потребовалось 14 итераций, результат восстановле-

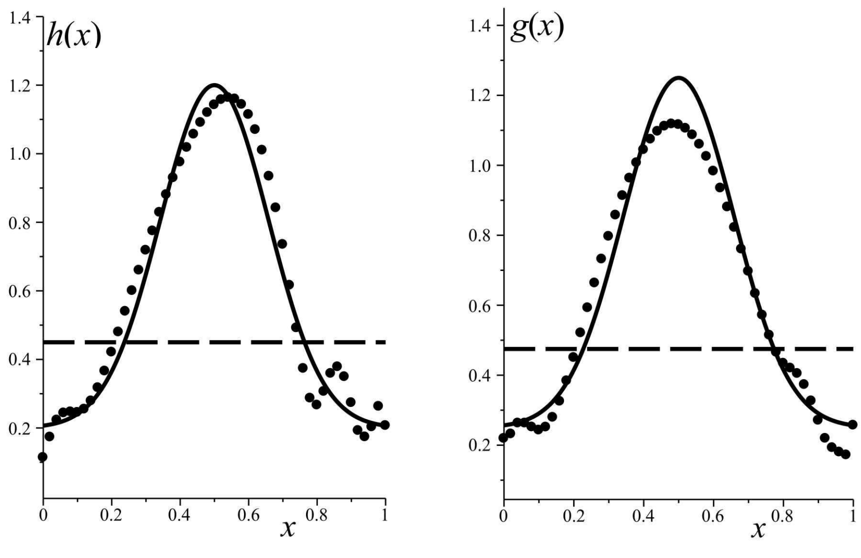


Рисунок 3 – Вязкоупругий случай. Восстановление функций $h(x)$ и $g(x)$ в примере 2.2

ния представлен на рисунке (рисунок 3), погрешность не превышает 10%.

Заключение. Отметим, что хотя идентификация сильно неоднородных функций происходит с относительно невысокой погрешностью, восстановление на некоторых участках, в частности, в окрестности максимума функций-свойств, происходит хуже, чем на остальных участках. Подобное явление наблюдалось и при решении задачи об идентификации свойств кожного покрова, в процессе которого было показано, что характеристики тканей с более высокими мгновенным и длительным модулями (дерма, эпидермис) восстанавливаются хуже в связи с тем, что на входную информацию в задаче основное влияние оказывают характеристики низкомодульного подкожного жира. В данной задаче также хуже восстанавливаются свойства материалов на участках, соответствующих вставкам повышенной жесткости.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К и программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки президиума РАН №1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1974. 338 с.

[2] *Богачев И. В., Ватульян А. О., Явруян О. В.* Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журнал. 2011. № 6. Т. 57. С. 723–730.

[3] *Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В.* Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей // Российский журнал биомеханики. 2013. № 13. Т. 3. С. 37–48.

Bogachev I. V., Vatulyan K. A, Yavruyan O. V. *The features of properties reconstruction of FGM with localized gradient properties.* We consider problems identification of the properties FGM by analyzing the steady oscillations of elastic and viscoelastic layer with strong localized gradient of mechanical properties in thickness. Iterative schemes of solving such problems, based on the method of linearization and numerical analysis of Fredholm integral equations of the 1st and 2nd kinds are presented. In accordance with the proposed approach a large number of computational experiments for different types of irregularities is presented. Ranges of sensitivity and insensitivity of the proposed scheme are established.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОКУСИРОВКИ ОБРАТНО ОТРАЖЕННОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ОТ ПРЕПЯТСТВИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Боев Н. В., Андрющенко Е. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

На основе явного аналитического выражения в рамках геометрической теории дифракции исследована амплитуда давления в обратно отраженной высокочастотной акустической волне от поверхностей твердых отражателей канонической формы. Проведен детальный численный анализ амплитуды давления в случае обратного отражения от цилиндра, сферы, трехосного эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов, эллиптического и гиперболического параболоидов для различных значений геометрических параметров граничных поверхностей. Построены графики зависимости амплитуды давления от удаленности источника и приемника волны от поверхностей рассеивателей. Установлены точки фокусировки давления в отраженной волне.

Методы расчета акустики помещений основаны на замене граничных поверхностей неплоских отражателей набором граней вписанного или описанного многогранника около отражающей поверхности. Такой подход, конечно, существенно упрощает численные расчеты в рамках геометрической теории дифракции (ГТД). Давление в переотраженной произвольное конечное число раз высокочастотной акустической волне определяется обратной величиной к сумме расстояний от источника волны до первой точки зеркального отражения, между последовательными точками зеркального отражения, от последней точки зеркального отражения до точки приема. Вместе с тем, при такой замене, во-первых, искажается траектория лучей, во-вторых, не учитывается явно искривленность поверхностей через локальные параметры кривизны поверхностей [1] в точках зеркального отражения. Проведенное исследование основано на явном выражении давления в однократно отраженной высокочастотной волне. Оно получено в рамках ГТД на основе асимптотической оценки двукратного дифракционного интеграла [2] Кирхгофа методом двумерной стационарной фазы [3]. Выражение для давления в точке приема содержит все геометрические параметры задачи: расстояния от точки зеркального отражения до источника и приемника волны, направление падающей волны, главные кривизны поверхности в точке зеркального отражения.

1. Постановка задачи. В рамках трехмерной задачи рассмотрим обратное отражение круговой акустической волны вызванной точечным источником давления (2), помещенным в точке A, от характерных точек B зеркального отражения следующих канонических поверхностей: трехосного эллипсоида (1a), однополостного гиперболоида (1b), двуполостного гиперболоида (1c), эллиптического параболоида (1d), эллиптического параболоида (1e) (рисунок 1): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (1a); $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (1b); $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (1c); $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=2z$ (1d); $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{b}=2z$ (1e);

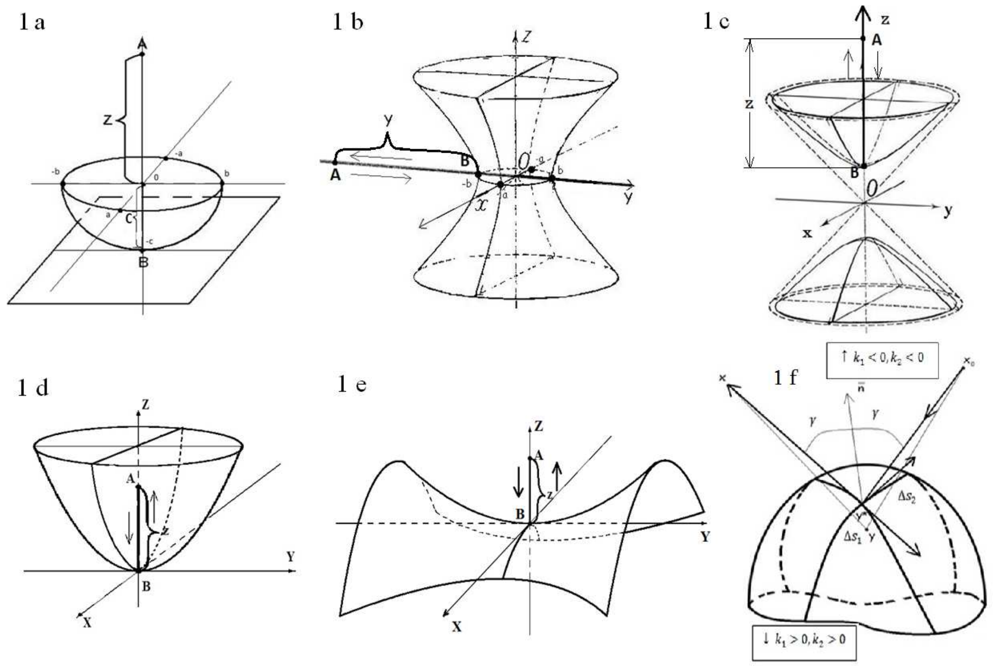


Рисунок 1 – 1a — Обратное отражение высокочастотной акустической волны от точки $(0, 0, -c)$ трехосного эллипсоида, 1b — от точки $(0, -b, 0)$ однополостного гиперболоида, 1c — от точки $(0, 0, c)$ двуполостного гиперболоида, 1d — от точки $(0, 0, 0)$ эллиптического параболоида, 1e — от точки $(0, 0, 0)$ гиперболического параболоида; 1f — однократное отражение высокочастотной акустической волны от твердого отражателя

Источник и приемник волны расположен в точке A. Точка B — точка зеркального отражения звуковой волны от поверхности препятствия. При этом нормаль к поверхности в точке B находится на прямой BA.

Цель исследования: дать качественный и количественный анализ амплитуды давления в обратно отраженной волне в зависимости от удаленности источника и приемника волны от поверхности отражателей.

Аналитическое выражение давления в отраженной волне получено в [4] на основе исследования задачи в общей постановке (рисунок 1). В этой работе задача однократного отражения высокочастотной акустической круговой волны от гладкой поверхности препятствия исследуется в рамках трехмерной задачи (рисунок 1). Пусть из точки x_0 бесконечной трехмерной акустической среды на препятствие, ограниченное произвольной гладкой поверхностью S, падает круговая высокочастотная монохромотическая волна (рисунок 1). Ее зависимость от времени $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота колебаний. Амплитуда давления в точке y акустической среды, порожденной круговой волной от точечного источника, находящегося в точке x_0 задается соотношением: $p^{inc}(y) = \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}, \quad R_0 = |x_0 - y|$, где $R_0 = |x_0 - y|$ — расстояние между точками x_0 и y, $k = \omega/c$ — волновое число, c — скорость акустической волны. В дальнейшем рассматривается высокочастотный режим колебаний, а поэтому параметры ω и k являются большими. Будем рассматривать распространение волны в направлении $\vec{q} = x_0y^*/|x_0y^*|$, где точка $y^* \in S$. При взаимодействии падающей волны с граничной поверхностью S формируется отраженная волна.

2. Метод решения. Явное выражение для амплитуды давления в высокочастотной волне, отраженной от граничной поверхности получено на основе интегрального представления [2]:

$$p\ (x) = \frac{i\,k}{2\,\pi}\frac{\cos\gamma}{L_0\,L}\iint\limits_S\ e^{ik\phi}\,dS\,,\ \ \phi = |x_0 - y| + |x - y|\,,\ \ |x_0 - y^*| = L_0,\ \ |x - y^*| = L.$$

Главный член асимптотики дифракционного интеграла соответствует геометрической теории дифракции [5–7]:

$$p(x) = \frac{\exp\left\{i\left[k(L_0+L) + \frac{\pi}{4}(\delta_2+2)\right]\right\}}{\sqrt{\left|(L_0+L)^2 - 2L_0L(L_0+L)(2H\cos^2\gamma + \tilde{k}\sin^2\gamma)\cos^{-1}\gamma + 4L_0^2L^2K\right|}}\ ,$$

в которой $K = k_1\,k_2$ — гауссова кривизна, а $H = (\ k_1 + k_2)/\,2$ — средняя кривизна поверхности в точке зеркального отражения y^*, а $\tilde{k}$ — кривизна нормального сечения поверхности отражателя плоскостью луча $x_0 - y^* - x$, γ — угол между нормалью и направлением падения волны.

3. Численные результаты. Для каждого типа отражателей вычислены главные кривизны граничных поверхностей в точках зеркального отражения B. Численный анализ для каждого вида рассеивателей проведен для нескольких вариантов геометрических параметров. На рисунках 2–4 для однополостного (рисунок 2) и двуполостного (рисунок 3) гиперболоидов и гиперболического параболоида (рисунок 4) построены графики зависимостей величины давления в точке приема обратно отраженной волны от удаленности источника и приемника волны для поверхностей рассматриваемых отражателей канонической формы. Построенные графики сравниваются с графиками величины давления в отраженных волнах от плоских отражателей расположенных в касательных плоскостях при той же траектории отраженного луча. В рамках проблемы замены неплоских отражателей набором плоских отражателей это позволяет провести количественный анализ погрешности вычисления давления при такой замене в зависимости от удаленности источника и приемника волны. Количество положительных кривизн то есть количество вогнутых главных нормальных сечений поверхности отражателя определяет количество вертикальных асимптот графика величины давления. Это вызвано тем, что определитель матрицы Гессе находящийся в знаменателе выражения давления обращается в ноль, что соответствует всплеску давления, то есть фокусировке амплитуды отраженной волны. С уменьшением положительной главной кривизны нормального сечения соответствующая точка фокусировки удаляется от точки зеркального отражения (рисунок 3). На рисунках 2–4 указаны координаты точек пересечения графиков. Абсциссы этих точек делят горизонтальную ось на несколько интервалов. Чем ближе расположена кривая к оси абсцисс, тем больше рассеяние волны на поверхности отражателя в рассматриваемом интервале.

4. Заключение. Численный анализ амплитуды давления в случае обратного отражения детально проведен для рассеивателей классической формы: цилиндра, сферы, трехосного эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов,

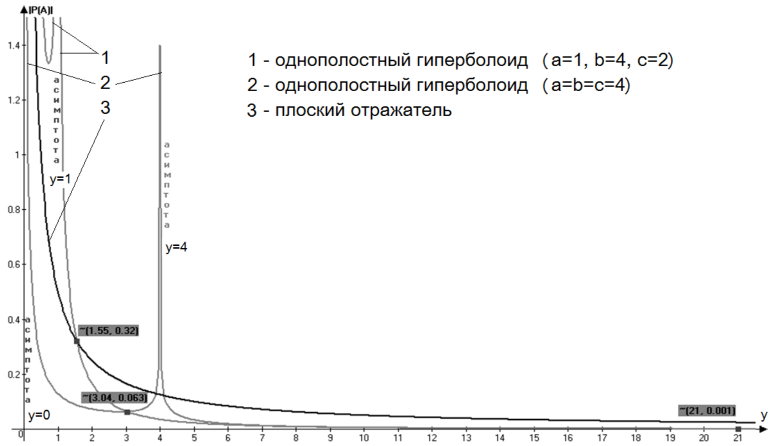


Рисунок 2 – Обратное отражение высокочастотной акустической волны от однополостных гиперболоидов (1,2) и плоского отражателя (3)

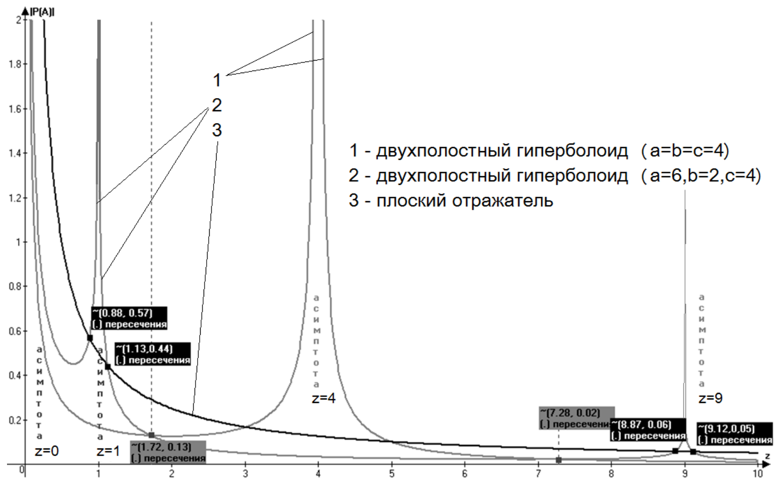


Рисунок 3 – Обратное отражение высокочастотной акустической волны от двуполостных гиперболоидов (1,2) и плоского отражателя (3)

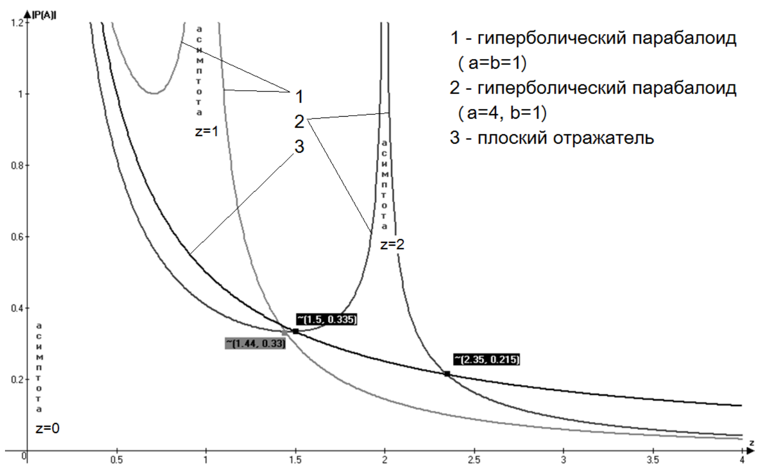


Рисунок 4 – Обратное отражение высокочастотной акустической волны от гиперболических параболоидов (1,2) и плоского отражателя (3) эллиптического и гиперболического параболоидов для различных значений параметров граничных поверхностей. Построены графики зависимости амплитуды давления от удаленности источника и приемника волны от поверхностей рассеивателей. Для эллиптических, гиперболических и параболических точек граничных поверхностей в зависимости от сочетаний знаков и величин главных кривизн поверхностей установлены точки фокусировки акустической волны. Для указанных канонических поверхностей проведен сравнительный анализ амплитуд отраженных от неплоских поверхностей и плоских отражателей, расположенных в касательных плоскостях поверхностей в точках зеркального отражения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Госуд. Изд-во технико-теоретической литературы. 1956. 420 с.

[2] Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. М.: Судостроение. 1972. 352 с.

[3] Федорюк М. В. Метод перевода. М.: Наука. 1977. 368 с.

[4] Боев Н. В., Сумбатян М. А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // Доклады РАН. 2003. 392, №5. С. 614–617.

[5] Боровиков В. А., Кирбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь. 1978. 248 с.

[6] Sumbatyan M. A., Boyev N. V. High-frequency diffraction by nonconvex obstacles // J. Acoust. Soc. Am. 1994. 95, №5. (Part 1). P. 2347–2353.

[7] McNamara D. A., Pistorius C. W. I., MalherbeI. A. G. Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction. Norwood: Artech House. 1990. 372 p.

Boyev N. V., Andryushenko E. V. *Investigation of focusing acoustical wave backscattered from obstacles of canonical form.* On the basis of explicit analytical expression in the framework of geometrical diffraction theory, the pressure amplitude is investigated in high-frequency acoustic wave backscattered from surfaces of solid reflectors of canonical form. A detailed numerical analysis of pressure amplitude in case of back reflection from cylinder, sphere, triaxial ellipsoid, hyperboloid of one sheet, two-sheeted hyperboloid, elliptical and hyperbolic paraboloids for various values of geometric parameters of boundary surfaces. The graphs of dependence of pressure amplitude on remote source and of wave receiver on reflector surfaces. The focus point of pressure in the reflected wave are determined.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Бойко С. Б.[1], **Сандраков Г. В.**[2]
[1] *Таврический государственный агротехнологический университет, Мелитополь*
[2] *Киевский национальный университет имени Т. Г. Шевченко*

Рассматривается новый метод математического моделирования динамики смесей и структурно-неоднородных материалов в области высоких давлений, энергий и фазовых превращений, например, типа графит–алмаз. Этот метод основан на дискретизации законов сохранения массы, моментов и энергии. Такая дискретизация является естественной, и численные расчеты реализуются как компьютерное моделирование динамических процессов в материале, содержащем частицы графита, которые могут претерпевать фазовые превращения. При численной реализации рассматриваемого метода используется комбинирование консервативного метода частиц в ячейках и метода крупных частиц и учтены основные положения теории фазовых превращений.

1. Введение. Исследование и оптимизация физических и физико-химических динамических процессов, происходящих в неоднородных веществах при больших скоростях, высоких давлениях и энергиях в области фазовых превращений, требуют достаточно точного определения значений давлений, энергий и скоростей, возникающих в различных точках этих веществ в соответствующие моменты времени. Определение значений таких величин возможно на основе математического и численного моделирования быстро протекающих нестационарных нелинейных гидродинамических процессов, учитывающего основные положения теории фазовых превращений. Задача о построении и исследовании таких гидродинамических моделей, учитывающих основные положения теории фазовых превращений, поставлена В. И. Юдовичем в работе «Одиннадцать великих проблем математической гидродинамики» [1] как одна из основных задач математической физики.

Один из подходов к разработке таких математических моделей предложен в работах Р. И. Нигматулина (представлен, например, в [2]) и основан на концепции многофазных сплошных сред. Однако, общие многофазные уравнения из этих работ, характеризующие многофазные сплошные среды, как правило, не являются замкнутыми, что осложняет исследование этих уравнений и соответствующих многофазных моделей. Например, в таких уравнениях возникает проблема описания перераспределения массы и энергии между фазами в процессе развития динамики фазовых превращений. Кроме того, в таких многофазных моделях, учитывающих фазовые превращения, предполагается, что некоторые из рассматриваемых фаз первоначально имеют нулевую плотность, которая может возрастать в некоторых точках пространства при развитии динамики процесса. При использовании известных вычислительных алгоритмов для расчета уравнений таких многофазных моделей возникает необходимость деления на плотность при численном расчете значений соответствующих параметров. Таким образом, необходимость деления на малую или даже нулевую плотность может приводить к неустойчивости и возможной некорректности подходящего вычислительного алгоритма.

Здесь будет представлен новый метод математического и численного моделирования динамики структурно-неоднородных материалов при больших скоростях, давлениях и энергиях в области фазовых превращений. Этот метод основан на дискретизации законов сохранения массы, моментов и энергии, представленных в интегральной и дифференциальной формах. Такая дискретизация является естественной, и численное расчеты реализуются как компьютерное моделирование динамики несущей жидкости, содержащей частицы, которые могут претерпевать фазовые превращения, например, типа графит–алмаз. При реализации этого метода проблема описания перераспределения массы и энергии между фазами не возникает. Например, перераспределение энергии между фазами в этом методе осуществляется на основе предположения о локальном совпадении давлений в каждой из фаз. Это предположение является естественным, поскольку «при высоких давлениях свойства твердого тела приближаются к свойствам жидкостей, а для смесей жидкостей характерным является совпадение их давлений» ([2], стр. 242). Представленный метод адаптирует и обобщает метод работ [3–5]. При численной реализации этого метода используется комбинирование метода частиц в ячейках Ф. Харлоу [6] и метода крупных частиц О. М. Белоцерковского [7].

2. Постановка задачи и основные соотношения метода. В представляемом методе моделирования динамики неоднородных жидкостей (или материалов) используются эйлеров и лагранжев подходы одновременно. Этот метод основан на дискретизации законов сохранения массы, моментов и энергии, представленных в следующей интегральной форме

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\int\limits_{S(t)} (\rho W)\cdot \eta\, ds, \\
\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho W\, d\tau = -\int\limits_{S(t)} p\,\eta\, ds, \\
\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\, E\, d\tau = -\int\limits_{S(t)} (pW)\cdot \eta\, ds,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $V(t)$ и $S(t)$ обозначают объем и поверхность некоторой лагранжевой области в жидкости, η является внешней нормалью для такой области, $p = p(\rho, E)$ и ρ, W, E обозначают искомые неизвестные плотность, скорость и полную энергию, соответственно. В случае рассмотрения трехмерной лагранжевой области скорость представима в виде $W = (u, v, w)$.

В известном смысле [6, 7] законы сохранения (1) являются эквивалентными законам сохранения массы, моментов и энергии, представленных в следующей дифференциальной форме

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W) = 0, \\
\frac{\partial \rho W}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W \otimes W) + \nabla p = 0, \\
\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W E) + \operatorname{div}(p W) = 0,
\end{gathered} \tag{2}
$$

где $W \otimes W$ обозначает тензорный квадрат вектор-функции $W = W(t, x, y, z)$, заданной в точке (x, y, z) некоторой эйлеровой области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ в момент времени $t \in [0, T]$ для некоторого положительного T. Здесь предполагается, что рассматриваемые жидкости являются невязкими, а конкретные типы таких жидкостей (твердых тел или материалов) определяются в этих уравнением через конкретизацию формы уравнения состояния.

Пространственная дискретизация в представляемом методе определяется следующим образом. Область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, занимаемая жидкостью, разбивается на ячейки малого размера, например, с равномерными шагами Δx, Δy, Δz по пространственным переменным. Каждой такой ячейке, как обычно, приписывается номер i, j, k и средние значения плотности, скорости, давления и энергии. Эти средние значения относятся к центру ячейки и обозначаются соответственно ρ^n_{ijk}, u^n_{ijk}, v^n_{ijk}, w^n_{ijk}, p^n_{ijk}, E^n_{ijk}.

Индекс n в этих обозначениях указывает на номер временного шага, что соответствует естественной временной дискретизации, поскольку расчеты проводятся шаг за шагом с достаточно малым положительным временным интервалом Δt, начиная с заданной начальной конфигурации рассматриваемой жидкости. Поэтому, значения n в процессе расчетов изменяются от 0 до $N = T/\Delta t$ в предположении, что $N = T/\Delta t$ является целым числом.

Жидкость, заполняющая каждую из таких ячеек i, j, k, рассматривается как совокупность нескольких частиц (которые можно рассматривать и как «молекулы» или, точнее, вычислительные «молекулы», поскольку размер таких частиц существенно больше размера реальных молекул жидкости). При этом, частицы, отвечающие несущей жидкости, заполняющей ячейку с номером i, j, k, рассматриваются как объединенная «большая» частица (как в методе крупных частиц [7]), а включения, отвечающие вкраплениям графита, рассматриваются как совокупность «малых» частиц, расположенных в ячейке i, j, k (как в методе частиц в ячейках [6]). Система включений графита перенумеровывается и моделируется малыми частицами. Малым частицам приписываются пространственные координаты, плотность, давление, объем и внутренняя энергия, которые конкретизируются в начальный момент времени при $n = 0$. Кроме того, каждой частице (в которой может возникнуть и алмазная фаза с течение времени) на временном шаге n приписываются плотность графитовой составляющей, ее внутренняя энергия и объем и массовая доля содержания графита. При этом, прямые и обратные фазовые переходы графит–алмаз в рассматриваемой модели рассчитываются на основе линейного уравнения кинетики, представленного в [2].

Таким образом, расчеты проводятся шаг за шагом с достаточно малым временным интервалом Δt, начиная с заданной начальной конфигурации рассматриваемой неоднородной жидкости, определяющей значения параметров при $n = 0$. Соответствующий временной шаг перехода с временного слоя с номером $n - 1$ на временной слой с номером n для моделирования движения рассматриваемой неоднородной жидкости с включениями графита разбивается на четыре этапа: подготовительный, эйлеров, лагранжев и заключительный этапы. Такое разбиение принято также называть расщеплением по физическим процессам временного шага или расщеплением временного шага на дробные шаги переходов.

В предположении, что все значения искомых величин на временном слое с номером $n-1$ (или, что эквивалентно, в момент времени $t=(n-1)\,\Delta t$) уже определены, подготовительный этап начинается с вычисления значения массовой доли содержания графита для одной из малых частиц. Для вычисления этого значения используется конечно-разностная аппроксимация для уравнений кинетики.

На эйлеровом (втором) этапе при переходе с временного слоя с номером $n-1$ вычисляются промежуточные значения скоростей и энергии из разностных аппроксимаций для системы уравнений (2) в предположении отсутствия потока массы частиц через границы эйлеровых ячеек, что соответствующей переносу моментов и энергии в каждой ячейке, определяемому силами давления в соответствии с уравнениями моментов и энергии из (2). При этом на первом предварительном этапе, внутренняя энергия больших и малых частиц, находящихся в каждой ячейке, распределяется между этими частицами так, чтобы давление и температура в этой ячейке были равными. Такое перераспределение энергии в ячейке является естественным, поскольку большая частица индуцирует некоторое давление и температуру через свое уравнение состояния, малые частицы индуцируют некоторое давление и температуру через свои уравнения состояния и совпадение этих давлений и температур характерно для неоднородных жидкостей в достаточно малом объеме, соответствующему одной ячейке в рассматриваемый момент времени $n\Delta t$.

На третьем этапе вычислений, принимается в расчет движение рассматриваемых частиц под действием вычисленных моментов, что соответствует лагранжеву этапу рассматриваемой аппроксимации уравнения сохранения массы. На этом этапе моделируется перемещение частиц за время Δt и вычисляются потоки массы и энергии через границы эйлеровых ячеек. Новые координаты частиц вычисляются по формулам изменения лагранжевых координат. После сравнения новых координат частиц с координатами эйлеровых ячеек определяется, осталась ли конкретная частица в прежней ячейке или перешла в соседнюю и в какую именно. На основе такого сравнения моделируется перенос массы из некоторой конкретной ячейки в соседние ячейки, обусловленный движением малых и больших частиц.

На четвертом заключительном этапе, потоки массы, скорости и энергии используются для вычисления значений параметров ρ^n_{ijk}, u^n_{ijk}, v^n_{ijk}, w^n_{ijk}, E^n_{ijk}, определяющих динамику жидкости, на n временном слое для ячейки с номером i, j, k. Конкретные формулы вычислений этих этапов приведены в работе [5] и являются достаточно громоздкими. Однако, эти формулы представляются рациональными с физической и математической точек зрения, поскольку законы сохранения (1) и (2) выполняются на разностном уровне в процессе всех этапов вычислений.

Рассмотренный метод разработан для численного моделирования следующего физического процесса. Предположим, что частицы графита распределены равномерно в некоторой жидкости. Точнее, имеется сплошная среда с частицами графита и предполагается, что такая среда может рассматриваться при высоких давлениях как «жидкость», определяемая подходящим уравнением состояния. Метод давал возможность моделировать процессы прохождения сильных ударных волн в такой неоднородной среде, что позволяло наблюдать фазовые переходы частиц графита при проведении компьютерных экспериментов. Результаты таких экспериментов существенно зависели от плотности распределения частиц графита и интенсивности ударных волн. Некоторые результаты таких расчетов и графики соответствующих распределения плотностей и давлений приведены в работе [8].

Рассмотренный метод применялся также для численного моделирования динамики неоднородной жидкости и ионизированной плазмы [3–5] и представляется перспективным для проведения численных расчетов параметров процессов диффузии и абсорбции в структурно-неоднородных жидкостях и газах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Юдович В. И.* Одиннадцать великих проблем математической гидродинамики // Вестник молодых ученых. Серия: прикладная математика и механика. 2003. № 2. С. 3–18.

[2] *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.

[3] *Boyko S. B., Mischenko V. V., Sandrakov G. V.* The numerical investigation method for evaporated plasma // Журнал вычисл. и прикл. матем. 2007. № 2 (95). P. 3–12.

[4] *Сандраков Г. В., Бойко С. Б.* Математическое моделирование динамики структурно-неоднородных жидкостей // Журнал вычисл. и прикл. матем. 2011. № 1 (104). С. 109–120.

[5] *Бойко С. Б., Сандраков Г. В.* Математическое моделирование динамики фазовых превращений графит-алмаз // Журнал вычисл. и прикл. матем. 2012. № 2 (108). С. 88–109.

[6] *Харлоу Ф.* Численный метод частиц в ячейках // Вычислительные методы в гидродинамике. М: Мир, 1967. С. 316–342.

[7] *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 392 с.

[8] *Boyko S. B., Sandrakov G. V.* Parameter computing of hydrodynamics processes with phase transitions // Bulletin of Taras Shevchenko University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. 2013. Special num. P. 11–16.

Boyko S. B., Sandrakov G. V. *Modeling of hydrodynamics processes with phase transitions.* A new modeling method of parameter computing for some processes of heterogeneous fluid dynamics with take of phase transitions like graphite-diamond is presented. The method is based on a discretization of conservation laws for masses, momentums, and energies. The discretization is natural and numerical simulations are realized as direct computer experiments for dynamics of main fluid together with transited drops without use multiphase flows approach. The combination of Harlow's particle-in-cell method and Belotserkovskii's large particles method is used for parameter computing by the method simulation.

УПРАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ С ОБОБЩЕННЫМИ СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

Болнокин В. Е.[1], **Елагин А. В.**[2], **Сторожев В. И.**[2]
[1]*Научно-исследовательский и экспериментальный институт автомобильной электроники и электрооборудования, Москва*
[2]*Донецкий национальный университет*

Построено численно-аналитическое решение задачи о нелинейном взаимодействии пар осесимметричных нормальных волн кручения, распространяющихся вдоль протяженных трансверсально-изотропных цилиндров с обобщенными смешанными граничными условиями на боковой поверхности. Решение позволяет проанализировать управляющее влияние величин коэффициентов пропорциональности граничных напряжений и перемещений у поверхности керамических цилиндров на степень взаимодействия волн с различной относительной длиной и принадлежностью разным ветвям дисперсионного спектра.

Представленные в работах [1–7] численно-аналитические исследования по проблеме анализа нелинейного ангармонического взаимодействия осесимметричных нормальных упругих волн в протяженных цилиндрах пространственного геометрического строения касаются только случаев изотропных цилиндров из материалов со свойствами, описываемыми потенциалом Мурнагана. В данной работе в рамках модели геометрически нелинейного динамического деформирования рассматривается задача описания показателей ангармонического взаимодействия для пар осесимметричных нормальных волн кручения, распространяющихся вдоль протяженных трансверсально-изотропных цилиндров с обобщенными смешанными граничными условиями пропорциональности напряжений и перемещений на боковой поверхности. Построенное решение применимо для анализа управляющего влияния коэффициентов в указанных условиях на показатели нелинейного взаимодействия.

Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндр кругового сечения с радиусом R , занимающий область

$$V = \{0 \leqslant r \leqslant R,\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\, -\infty < z < \infty\ \} = \{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leqslant R,\, -\infty < x_3 < \infty\}$$

в отнесенных к нормирующему параметру $R_* = R$ безразмерных цилиндрических $Or\theta z$ и прямоугольных $Ox_1x_2x_3$ координатах. Для описания волнового динамического деформирования цилиндра из материала с осью упругой симметрии, ориентированной вдоль координатной оси Oz, используется модель, включающая тензорное представление упругого потенциала $U = \frac{1}{2}c_{jqpk}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{pk}$ с квадратичными членами по деформациям ε_{jq} в координатах $Ox_1x_2x_3$, выражения для механических напряжений на основных площадках этих координат $\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d}$ и тензорные нелинейные соотношения для конечных деформаций $\varepsilon_{jq} = (u_{j,q} + u_{q,j} + u_{l,q} u_{l,j})/2$, в которых $u_{j,q} = \partial u_j / \partial u_q$ $(j = \overline{1,3})$ — компоненты вектора волновых упругих перемещений в прямоугольных координатах. Элементы тензора упругих постоянных цилиндра c_{ij} и динамические напряжения σ_{jd} являются безразмерными характеристиками, отнесенными к нормирующему параметру c_*. Компоненты u_j $(j = \overline{1,3})$ и u_r, u_θ, u_z вектора перемещений отнесены к нормирующему параметру $u_* = \max\limits_{\{r,\theta,z,t,\alpha\}} |u_\alpha(r,\theta,z,t)|]$. Отношение введенных нормирующих параметров $\delta = u_*/R$ в рамках гипотезы о малости исследуемых нелинейных волновых эффектов интерпретируется как малый параметр $\delta \ll 1$.

На боковой поверхности цилиндра заданы обобщенные смешанные граничные условия $(\sigma_{r\alpha} + \gamma_\alpha u_\alpha)_{r=1} = 0$ $(\alpha = r,\theta,z)$, где γ_α — варьируемые коэффициенты с управляющей функцией. В рамках применяемой методологии для компонентов вектора волновых перемещений u_α $(\alpha = r,\theta,z)$ вводятся представления $u_\alpha = u_\alpha^{(l)} + \delta \cdot u_\alpha^{(n)}$, включающие линейные составляющие $u_\alpha^{(l)}$ и нелинейные ангармонические возмущения $u_\alpha^{(n)}$. Выражения для компонентов тензора динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ на основных площадках цилиндрической системы координат, соответствующие такому варианту представления u_α, принимают форму сумм линейных и квадратичных членов по степеням параметра δ $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(l)})\delta + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(n)}) + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)})\right)\delta^2$ $(\alpha,\beta = r,\theta,z)$, а входящие в эти представления характеристики тензоров $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)})$ $(q = l;n)$ и $\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)})$ для случая осесимметричного геометрически нелинейного деформирования трансверсально-изотропного цилиндра имеют вид

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{12} r^{-1} u_r^{(q)}(r) + c_{11}\partial_r u_r^{(q)}(r) + c_{13}\partial_z u_z^{(q)}(r),\\
\sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{11} r^{-1} u_r^{(q)}(r) + c_{12}\partial_r u_r^{(q)}(r) + c_{13}\partial_z u_z^{(q)}(r),\\
\sigma_{r\theta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\left(\partial_r u_\theta^{(q)}(r) - r^{-1} u_\theta^{(q)}(r)\right), \ldots,\\
\sigma_{r\theta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\left(\partial_r u_\theta^{(q)}(r) - r^{-1} u_\theta^{(q)}(r)\right);
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) = \tfrac{1}{2}(c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}(r)\right)^2 + c_{11}\left(\partial_z u_r^{(l)}(r)\right)^2 + c_{12} r^{-2}\left(u_r^{(l)}(r)\right)^2 +\\
(c_{13} + 2c_{44})\left(\partial_r u_z^{(l)}(r)\right)^2 + c_{11} r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}(r)\right)^2 + c_{12}\left(\partial_z u_\theta^{(l)}(r)\right)^2 +\\
2c_{44}\partial_z u_r^{(l)}(r)\partial_r u_z^{(l)}(r) + 2c_{13}\partial_r u_r^{(l)}(r)\,\partial_z u_z^{(l)}(r) + 2c_{12} r^{-1} u_r^{(l)}(r)\partial_r u_r^{(l)}(r) +\\
3c_{11}\left(\partial_r u_r^{(l)}(r)\right)^2 - (c_{11} + c_{12}) r^{-1} u_\theta^{(l)}(r)\partial_r u_\theta^{(l)}(r) + c_{11}\left(\partial_r u_\theta^{(l)}(r)\right)^2\Big);\\
\sigma_{\theta\theta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) = \tfrac{1}{2}\left(2c_{13} r^{-1}\partial_z u_r^{(l)}(r) u_r^{(l)}(r) + c_{12}\left(\partial_z u_r^{(l)}(r)\right)^2 + 3c_{11} r^{-2}\left(u_r^{(l)}(r)\right)^2 +\right.\\
+ c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}(r)\right)^2 + c_{11}\left(\partial_z u_\theta^{(l)}(r)\right)^2 + c_{11} r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}(r)\right)^2 + c_{13}\left(\partial_r u_z^{(l)}(r)\right)^2 +\\
+ 2c_{12} r^{-1} u_r^{(l)}(r)\partial_r u_r^{(0,l)}(r) + c_{12}\left(\partial_r u_r^{(l)}(r)\right)^2 - (c_{11} - c_{12}) r^{-1} u_\theta^{(l)}(r)\partial_r u_\theta^{(l)}(r) +\\
\left. + c_{11}\left(\partial_r u_\theta^{(0,l)}(r)\right)^2\right), \ldots,
\end{gathered}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) = \tfrac{1}{2}((c_{12}-c_{11})\partial_z u_r^{(l)}(r)\partial_z u_\theta^{(l)}(r) + (c_{12}-c_{11})r^{-2}u_r^{(l)}(r)u_\theta^{(l)}(r) +$$
$$+2c_{44}\partial_z u_\theta^{(l)}(r)\partial_r u_z^{(l)}(r) + (c_{12}-c_{11})r^{-1}\partial_r u_r^{(l)}(r)u_\theta^{(l)}(r) + 2c_{13}\partial_r u_\theta^{(l)}(r)\,\partial_z u_z^{(l)}(r) +$$
$$+2c_{11}r^{-1}u_r^{(l)}(r)\partial_r u_\theta^{(l)}(r) + 2c_{11}\partial_r u_r^{(l)}(r)\partial_r u_\theta^{(l)}(r)),$$
$$\sigma_{\theta r}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) = \tfrac{1}{2}(-2c_{13}r^{-1}u_\theta^{(l)}(r)\partial_z u_z^{(l)}(r) + (c_{12}-c_{11})\partial_z u_r^{(l)}(r)\partial_z u_\theta^{(l)}(r) -$$
$$-2c_{11}r^{-2}u_r^{(l)}(r)u_\theta^{(l)}(r) - 2c_{11}r^{-1}\partial_r u_r^{(l)}(r)u_\theta^{(l)}(r) + (c_{11}-c_{12})r^{-1}u_r^{(l)}(r)\partial_r u_\theta^{(l)}(r) +$$
$$+(c_{11}-c_{12})\partial_r u_r^{(l)}(r)\partial_r u_\theta^{(l)}(r)); \partial_\alpha = \partial/\partial\alpha \quad \alpha = (r,\theta,z).$$

В случае анализа эффектов нелинейного взаимодействия для двух одновременно распространяющихся осесимметричных волн кручения вводятся представления $u_\theta^{(l)} = u_{1\theta}^{(l)} + u_{2\theta}^{(l)}$, $u_r^{(l)} = u_z^{(l)} = 0$; $u_\alpha^{(n)} = u_{1\alpha}^{(n)} + u_{2\alpha}^{(n)} + u_{12\alpha}^{(n)}$ $(\alpha = r, z)$, $u_\theta^{(n)} = 0$, в которых

$$u_{j\theta}^{(l)} = u_{j\theta}^{(0,l)}(r)\exp(-i(\omega_j t - k_j z)), u_{j\alpha}^{(n)} = u_{j\alpha}^{(0,n)}(r)\exp(-2i(\omega_j t - k_j z)),$$
$$u_{12\alpha}^{(n)} = u_{12\alpha}^{(0,n)}(r)\exp(-i((\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)z)).$$

Меру ангармонического взаимодействия рассматриваемой пары волн характеризует вторая гармоника комбинационного типа $u_{12\alpha}^{(n)}$. Амплитудные составляющие $u_{j\theta}^{(0,l)}(r)$ в данных представлениях определяются из однородных дифференциальных уравнений $r^2(u_{j\theta}^{(0,l)})'' + r(u_{j\theta}^{(0,l)})' + ((\beta_j r)^2 - 1)u_{j\theta}^{(0,l)} = 0$, где $\beta_j = (\Omega_j^2 - 2c_{44}(c_{11}-c_{12})^{-1}k_j^2)^{1/2}$, $\Omega_j^2 = (2\rho\omega_j^2(c_{11}-c_{12})^{-1})^{1/2}$. Базисные решения, описывающие моды крутильных волн с номером p, имеют вид $u_\theta^{(0,l)}(r) = u^{(0)}\beta_p^* J_1(\beta^* r)$, где $\Omega = (\beta_p^2 + 2c_{44}(c_{11}-c_{12})^{-1}k^2)^{1/2}$, β_p — корни трансцендентного дисперсионного уравнения $\beta^* J_0(\beta^*) - 2J_1(\beta^*) + \gamma_\theta J_1(\beta^*) = 0$; $u^{(0)}$ — произвольный амплитудный параметр сводной волны кручения, который полагается одинаковым для обеих взаимодействующих волн.

Амплитудные составляющие $u_{12\alpha}^{(0,n)}(r)$для комбинационной второй гармоники являются решениями неоднородной системы дифференциальных уравнений, правая часть которой выражается через функции $u_{j\theta}^{(0,l)}(r)$:

$$\Delta_{1,1}^{(1)}u_{12r}^{(0,n)} + \Delta_{1,2}^{(1)}r^{-2}u_{12r}^{(0,n)} + \Delta_{1,3}^{(1)}r^{-1}(u_{12r}^{(0,n)})' + \Delta_{1,4}^{(1)}(u_{12z}^{(0,n)})' + \Delta_{1,5}^{(1)}(u_{12r}^{(0,n)})'' =$$
$$= \Delta_{1,1}^{(2)}r^{-1}u_{1\theta}^{(0,l)}\,u_{2\theta}^{(0,l)} + \Delta_{1,2}^{(2)}r^{-3}u_{1\theta}^{(0,l)}\,u_{2\theta}^{(0,l)} + \Delta_{1,3}^{(2)}(u_{1\theta}^{(0,l)})'u_{2\theta}^{(0,l)} + \Delta_{1,4}^{(2)}r^{-2}(u_{1\theta}^{(0,l)})'\,u_{2\theta}^{(0,l)} +$$
$$+\Delta_{1,5}^{(2)}u_{1\theta}^{(0,l)}(u_{2\theta}^{(0,l)})' + \Delta_{1,6}^{(2)}r^{-2}u_{1\theta}^{(0,l)}(u_{2\theta}^{(0,l)})' + \Delta_{1,7}^{(2)}r^{-1}(u_{1\theta}^{(0,l)})'(u_{2\theta}^{(0,l)})' +$$
$$+\Delta_{1,8}^{(2)}r^{-1}(u_{1\theta}^{(0,l)})''\,u_{2\theta}^{(0,l)} + \Delta_{1,9}^{(2)}(u_{1\theta}^{(0,l)})''\,(u_{2\theta}^{(0,l)})' + \Delta_{1,10}^{(2)}r^{-1}u_{1\theta}^{(0,l)}\,(u_{2\theta}^{(0,l)})'' +$$
$$+\Delta_{1,11}^{(2)}(u_{1\theta}^{(0,l)})'\,(u_{2\theta}^{(0,l)})'',$$
$$\Delta_{2,1}^{(1)}u_{12z}^{(0,n)} + \Delta_{2,2}^{(1)}r^{-1}u_{12r}^{(0,n)} + \Delta_{2,3}^{(1)}(u_{12r}^{(0,n)})' + \Delta_{2,4}^{(1)}r^{-1}(u_{12z}^{(0,n)})' + \Delta_{2,5}^{(1)}(u_{12r}^{(0,n)})'' =$$
$$= \Delta_{2,1}^{(2)}r^{-2}u_{1\theta}^{(0,l)}\,u_{2\theta}^{(0,l)} + \Delta_{2,2}^{(2)}r^{-1}(u_{1\theta}^{(0,l)})'\,u_{2\theta}^{(0,l)} + \Delta_{2,3}^{(2)}r^{-1}u_{1\theta}^{(0,l)}\,(u_{2\theta}^{(0,l)})' +$$
$$+\Delta_{2,4}^{(2)}\,(u_{1\theta}^{(0,l)})'\,(u_{2\theta}^{(0,l)})' + \Delta_{2,5}^{(2)}\,(u_{1\theta}^{(0,l)})''u_{2\theta}^{(0,l)} + \Delta_{2,6}^{(2)}\,u_{1\theta}^{(0,l)}(u_{2\theta}^{(0,l)})''. \tag{1}$$

В представлениях (1) $\Delta_{j,i}^{(p)}$ — коэффициенты вида

$\Delta_{1,1}^{(1)} = c_{66}(\omega_1+\omega_2)^2 - c_{44}(k_1+k_2)^2, \ldots, \Delta_{1,5}^{(1)} = c_{11}$, $\Delta_{2,1}^{(1)} = -c_{33}(\omega_1+\omega_2)^2 + c_{66}(k_1+k_2)^2, \ldots, \Delta_{2,5}^{(1)} = c_{44}$, $\Delta_{1,1}^{(2)} = (c_{12}-c_{11})k_1k_2, \ldots, \Delta_{1,11}^{(2)} = -c_{11}$, $\Delta_{2,2}^{(2)} = ik_1(c_{11}-c_{12})/2, \ldots, \Delta_{2,6}^{(2)} = ik_1(c_{12}-c_{11})/2$.

Частные решения системы (1) получены на основе замены входящих в выражение $u_\theta^{(0,l)}(r)$ цилиндрических функций Бесселя первого рода представлениями в виде абсолютно сходящихся степенных рядов по переменной r, в результате которой правые части $Q_1(r)$, $Q_2(r)$ уравнений (1) соответственно записываются в виде рядов $Q_1(r) = (u^{(0)})^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p r^p$, $Q_2(r) = (u^{(0)})^2 \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p r^p$ с аналитическими представлениями для коэффициентов α_p, β_p.

Таким образом, полное решение исследуемой краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1) может быть записано в виде $u_{12r}^{(n)} = [-(A_1\xi_1 J_1(\xi_1 r) + A_2\xi_2 J_1(\xi_2 r)) + (u^{(0)})^2 F_1(r)] \exp[-i((\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)z)]$,
$u_{12z}^{(n)} = [A_1\eta_1 J_0(\xi_1 r) + A_2\eta_2 J_0(\xi_2 r) + (u^{(0)})^2 F_2(r)] \exp[-i((\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)z)]$,

$$\xi_j = [(-B - (-1)^j (B^2 - 4AC)^{1/2})/(2A)]^{1/2},$$
$$\eta_j = (i(k_1+k_2)(c_{13}+c_{44})\xi_j^2)/(\Omega^2 - c_{33}(k_1+k_2)^2 - c_{44}\xi_j^2),$$
$$A = c_{11}c_{44}, B = -[(c_{11}+c_{44})\Omega^2 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33}(k_1+k_2)^2)],$$
$$C = (\Omega^2 - c_{33}(k_1+k_2)^2)(\Omega^2 - c_{44}(k_1+k_2)^2) \quad (j=1,2); \Omega^2 = \rho(\omega_1+\omega_2)^2 R_*^2 c_*^{-1};$$

F_j — частные решения системы уравнений (1) в виде рядов $F_1(r) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p$, $F_2(r) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p r^p$ с определяемыми из рекуррентных формул коэффициентами

$$a_1 = \alpha_1/\Delta_{1,3}^{(1)}, \quad b_1 = \beta_1/\Delta_{2,3}^{(1)};$$
$$a_2 = \frac{(\alpha_2 - b_1\Delta_{1,4}^{(1)})}{\Delta_{1,2}^{(1)} + 2\Delta_{1,3}^{(1)} + 2\Delta_{1,5}^{(1)}}, \quad b_2 = \frac{(\beta_2 - a_1(\Delta_{2,2}^{(1)} - \Delta_{2,4}^{(1)}))}{2\Delta_{2,3}^{(1)} + 2\Delta_{2,5}^{(1)})};$$
$$a_{p+2} = \frac{(\alpha_{p+2} - \Delta_{1,1}^{(1)} a_p - \Delta_{1,4}^{(1)}(p+1)b_{p+1})}{(\Delta_{1,2}^{(1)} + \Delta_{1,3}^{(1)}(p+2) + \Delta_{1,5}^{(1)}(p+2)(p+1))}, \quad b_{p+2} = \frac{(\beta_{p+2} - \Delta_{2,1}^{(1)} b_p - \Delta_{2,2}^{(1)} a_{p+1} - \Delta_{2,4}^{(1)}(p+1)a_{p+1})}{\Delta_{2,3}^{(1)}(p+2) + \Delta_{2,5}^{(1)}(p+2)(p+1)}$$
$$(p = \overline{1,\infty}).$$

Выражения для коэффициентов A_1, A_2 определяются из краевых условий

$$(\sigma_{12rr}^{(n)}(u_\theta^{(l)}) + \sigma_{12rr}^{(l)}(u_{12r}^{(n)}, u_{12z}^{(n)}) + \gamma_r u_{12r}^{(n)})_{r=1} = 0,$$
$$(\sigma_{12rz}^{(n)}(u_\theta^{(l)}) + \sigma_{12rz}^{(l)}(u_{12r}^{(n)}, u_{12z}^{(n)}) + \gamma_z u_{12z}^{(n)})_{r=1} = 0,$$

в предположении о том, что точки $(k_1+k_2, \omega_1+\omega_2)$ не принадлежат какой-либо из мод дисперсионного спектра линейных осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа в цилиндре с рассматриваемым типом обобщенных смешанных граничных условий. Они имеют вид

$$A_1 = (u^{(0)})^2(\chi_{12}P_2 - \chi_{22}P_1)/(\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{21}\chi_{12}),$$
$$A_2 = (u^{(0)})^2(\chi_{11}P_2 - \chi_{21}P_1)/(\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{12}\chi_{21}),$$
$$\chi_{11} = ic_{13}\eta_1(k_1+k_2)\, J_0(\xi_1) - \gamma_r\xi_1 J_1(\xi_1) - c_{12}\xi_1 J_1(\xi_1) - 1/2\, c_{11}\xi_1^2(J_0(\xi_1) - J_2(\xi_1)),$$
$$\chi_{12} = ic_{13}\eta_2(k_1+k_2)\, J_0(\xi_2) - \gamma_r\xi_2 J_1(\xi_2) - c_{12}\xi_2 J_1(\xi_2) - 1/2\, c_{11}\xi_2^2(J_0(\xi_2) - J_2(\xi_2)),$$
$$\chi_{21} = \eta_1\gamma_z J_0(\xi_1) - c_{44}\eta_1\xi_1\, J_1(\xi_1) - ic_{44}(k_1+k_2)\xi_1 J_1(\xi_1),$$
$$\chi_{22} = \eta_2\gamma_z\, J_0(\xi_2) - c_{44}\eta_2\xi_2\, J_1(\xi_2) - ic_{44}(k_1+k_2)\xi_2 J_1(\xi_2),$$
$$P_1 = [F_1(r)\gamma_r + ic_{13}F_2(r)(k_1+k_2) + c_{12}F_1(r) + (-ic_{12}k_1k_2 + c_{11})J_1(\beta_1^* r)J_1(\beta_2^* r) +$$
$$+1/2(-c_{11}+c_{12})(J_1(\beta_1^* r))' J_1(\beta_2^* r) + 1/2(-c_{11}+c_{12})J_1(\beta_1^* r)(J_1(\beta_2^* r))' +$$
$$+c_{11}(J_1(\beta_1^* r))'(J_1(\beta_2^* r))']_{r=1},$$
$$P_2 = [F_2(r)\gamma_z + ic_{44}F_1(r)(k_1+k_2) + c_{12}F_1(r) ic_{44}k_2(J_1(\beta_1^* r))' J_1(\beta_2^* r) +$$
$$+ic_{44}k_1 J_1(\beta_1^* r)(J_1(\beta_2^* r))']_{r=1}.$$

Построенное таким образом численно-аналитическое решение позволяет исследовать управляющее влияние величин коэффициентов пропорциональности граничных напряжений и перемещений у поверхности керамических цилиндров на степень взаимодействия волн с различной относительной длиной и принадлежностью разным ветвям дисперсионного спектра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *1. Sugimoto N., Hirao M.* Nonlinear mode coupling of elastic waves // J. Acoust. Soc. Am. 1977. Vol. 62, № 1. P. 23–32.

[2] *Sugimoto N.* Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves // J. Acoust. Soc. Am. 1978. Vol. 64, № 4. P. 1190–1195.

[3] *Елагин А. В., Сторожев В. И.* Нелинейное ангармоническое взаимодействие двух осесимметричных продольно-сдвиговых волн в закрепленном цилиндре // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій. 2011. Вип. 16. С. 266–272.

[4] *Елагин А. В.* Ангармонические возмущения в суммарном поле двух нормальных волн кручения в изотропном цилиндре // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. 2011. Т. 22. С. 81–90.

[5] *Елагин А. В.* Нелинейное ангармоническое взаимодействие осесиммеричной продольно-сдвиговой волны и волны кручения в закрепленном цилиндрее // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер А: Природн. науки. 2012. № 1. С. 51–55.

[6] *Елагин А. В., Моисеенко И. А.* Генерирование нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в протяженном цилиндре при разнотипных краевых условиях // Изв. высш. учебн. заведений. Сев.-Кав. регион. Техн. науки. 2012. № 2. С. 29–32.

[7] *Елагин А. В.* Кинематические характеристики волн, возникающих при нелинейном взаимодействии продольно-сдвиговой и крутильной нормальных волн в цилиндре // Акуст. симп. (Київ, 27–29 вересня 2011р.) К.: ІГМ НАНУ, 2011. С. 117–122.

Bolnokin V. E., Yelagin A. V., Storozhev V. I. *Controlling of geometrically nonlinear effects of interaction of normal torsion waves in an transversely isotropic cylinder with a generalized mixed boundary condition.* In article are obtained the theoretical numerical-analytical solution of problem of nonlinear anharmonic coupling of two axisymmetric normal elastic torsion waves propagated along the axial direction in a transversely isotropic cylinder of circular cross section with a mixed edge condition on lateral surface. With its using can be investigated of control influence the proportionality coefficients of the boundary stresses and displacements at the surface of the ceramic cylinders on the degree of interaction of waves with different relative length and belonging to different branches of the dispersion spectrum. Keywords: transversely isotropic cylindrical waveguide, mixed edge condition, geometric nonlinearity, normal torsion wave, nonlinear anharmonic coupling, numerical-analytical solution.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РАЦИОНАЛЬНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

Бормотин К. С.

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

Дается формулировка обратных квазистатических задач теории ползучести в виде оптимального управления. Используя критерий минимизации поврежденности в функционалах обратных задач находятся оптимальные законы деформирования в ползучести. В численном решении обратных задач формообразования итерационным методом используется непрерывная функция оптимального нагружения, зависящая от двух параметров. Построен и численно реализован метод определения параметров по заданным условиям задачи. Решение каждого шага итерационного метода выполняется методом конечных элементов в программной системе MSC.Marc. Дан сравнительный анализ результатов расчета изгиба пластинки при различных режимах нагружения.

1. Постановка и решения обратных задач оптимального управления. В связи с внедрением новых технологических процессов, режимов, материалов при изготовлении деталей сложно-конструктивных форм с высокими требованиями к размерной точности и эксплуатационному ресурсу наиболее выгодным становится применение численного моделирования. В настоящее время наблюдается значительный интерес к процессам формообразования алюминиевых сплавов в режимах ползучести и оценке пружинения. В данной работе строятся и используются в численном решении функционалы обратных задач теории ползучести с учетом прямых пространственных постановок задач неупругого деформирования и упругой разгрузки. Такой способ решения задач моделирования обусловлен наилучшей точностью, учетом физических и геометрических свойств детали, по сравнению с осредненными свойствами пластин и оболочек, и учетом осредненных оценок пружинения. Процессы формообразования деталей, в частности, тонкостенных конструкций (панелей крыла самолета) в ползучести, сопровождаются накоплением в материале поврежденности, что может привести к разрушению. В связи с этим актуальной задачей в обработке материалов давлением является задача определения рациональных путей деформирования в ползучести. В данной работе приводится обобщенная вариационная формулировка обратной квазистатической задачи пластического формообразования деталей с учетом деформаций ползучести в виде оптимального управления, учитывающей параметр повреждаемости. Параметр поврежденности дает количественную оценку накопления в материале поврежденности в процессе ползучести и остаточного прочностного ресурса.

Пусть $V \subset R^3$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей S. Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ — вектора текущих и остаточных перемещений $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3$, $Q = V \times [0 \leqslant t \leqslant T]$.

В постановке обратных задач формообразования используются функционалы вариационного принципа Хилла [1], описывающие задачи квазистатического деформирования. В этом случае предполагается выполнение кинематических граничных условий $\dot{u}_i = \dot{u}_i^*$ на границе S, условий на остаточные скорости перемещений $\dot{\tilde{u}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^*$, соотношений между деформациями и перемещениями, соотношений между напряжениями и деформациями. При такой формулировке, выраженной в скоростях, путь деформирования определяется однозначно по заданным остаточным скоростям перемещений и в этом случае доказывается единственность, устойчивость решения и строится итерационный метод [2–4].

В случае заданных остаточных перемещений в конечный момент времени соответствующие текущие перемещения на всем промежутке времени могут быть различными. Для однозначности определения вводится критерий оптимальности используя параметр поврежденности. Параметр поврежденности дает количественную оценку накопления в материале поврежденности в процессе ползучести и, соответственно, остаточного прочностного ресурса. Таким образом, формулируется задача оптимального деформирования: как следует деформировать элемент среды в течение заданного времени t^*, чтобы в момент $t = t^*$ получить заданные значения деформаций ползучести и параметр поврежденности Ω при этом был минимальным [5, 6].

При учете диссипируемой работы параметр поврежденности описывается формулой:

$$\dot{\Omega} = \frac{dA}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c}{A^* dt} = \frac{\sigma_{ij}\eta_{ij}}{A^*}$$

где A^* — критическая величина работы разрушения истинного напряжения на деформации ползучести (рассеянная энергия к моменту разрушения) [7, 8].

Таким образом, задача оптимизации заключается в нахождении такого пути деформирования за время T, при котором значение

$$\Omega(T) = \int_0^T \dot{\Omega} dt = \frac{1}{A^*}\int_0^T \sigma_{ij}\eta_{ij} dt \quad \text{или} \quad \int_0^T \sigma_{ij}\eta_{ij} dt$$

будет минимальным.

Используя теорию многокритериальной оптимизации [9], с помощью метода весовых коэффициентов, приняв за критерии качества функционалы вариационных принципов задач неупругого деформирования и упругой разгрузки, диссипируемую работу, функционал обратной задачи оптимального деформирования представляется в виде:

$$J_o(\dot{u}_i, \dot{\tilde{u}}_i) = \int_V W(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_S \dot{p}_i \dot{u}_i dS + w_1 \int_V W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) dV + w_2 \int_V \sigma_{ij}\eta_{ij} dV, \qquad (1)$$

где $w_1 > 0$, $w_2 > 0$ — весовые коэффициенты, $W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\eta_{kl}$, $W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\eta_{kl}$ — потенциалы деформирования в ползучести [10], c_{ijkl} — компоненты симметричного тензора упругих констант, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ — скорости текущих и остаточных деформаций, $\eta_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^c$ — скорости деформаций ползучести, $i, j, k, l = 1, 2, 3$,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}), \qquad (2)$$

выражения с повторяющимися индексами означают суммирование по ним от 1 до 3, а через запятую обозначено дифференцирование: $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

В частности, по закону установившейся ползучести деформации могут быть определены в виде $\eta_{ij} = \gamma s_{ij}$, где $\gamma = \dfrac{3}{2} B \overline{\sigma}^{n-1}$, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, $\overline{\sigma} = \sqrt{\dfrac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ — эффективное напряжение (интенсивность напряжений), B, n — константы ползучести [10].

Задача минимизации функционала (1) представляет задачу оптимального управления, в которой функциями состояния являются функции остаточных перемещений $\tilde{u}_i$, а функциями управления — текущие перемещения u_i.

При деформировании детали возможны ограничения на технологический процесс, критерии разрушения и т. д., которые можно учитывать в формулировке (1) [11].

Из равенства $\delta J_o = 0$, при учете независимости вариаций $\dot{u}_i$, $\dot{\tilde{u}}_i$, η_{ij} и (2), следуют уравнения равновесия для текущих и остаточных скоростей напряжений, уравнение

$$w_2 \sigma_{ij} = c_{klij} (\dot{\varepsilon}_{kl} + w_1 \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}) \tag{3}$$

в области V и граничные условия на поверхности S [11, 12].

Аналогично можно представить функционал вариационной формулировки обратных геометрически нелинейных задач ползучести, например для TL-формулировки [10] (в качестве отсчетной конфигурации выбирается начальная конфигурация тела).

При известном пути нагружения в работах [2–4] на основе функционалов обратной задачи построен итерационный метод в виде

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k (\dot{\tilde{u}}_i^* - \dot{\tilde{u}}_i^k), \quad 0 < \alpha^k < 2,$$

и доказана сходимость его к решению обратных задач формообразования.

Для учета критерия оптимальности в численном решении обратных задач формообразования необходимо на каждом шаге интегрирования уравнений метода конечных элементов обеспечить выполнение соотношения (3). На основе критерия минимизации поврежденности в функционалах обратных задач находятся оптимальные законы деформирования в ползучести для частных задач.

В обратной задаче одноосного растяжения стержня в ползучести с минимальной поврежденностью, используя соотношение (3), определена зависимость рационального пути нагружения от весовых коэффициентов и времени в виде [11]: $p = [\frac{(1+w_1)EB}{w_2} + (p^{*(1-n)} - \frac{(1+w_1)EB}{w_2}) e^{w_2(1-n)t}]^{\frac{1}{1-n}}$ (E — модуль упругости, p^* — начальная нагрузка). Аналогичное выражение строится для перемещений.

При рассмотрении задач изгиба пластин, в случае малых деформаций, так же с помощью соотношения (3) и ряда ограничений, находится путь деформирования в виде линейной функции $w = \dfrac{t}{T} w^*$, где w^* — прогиб в конечный момент времени. В случае весьма тонкой пластинки, прогибы которой могут во много раз превысить ее толщину, определен оптимальный путь деформирования в виде $w = \sqrt{\frac{t}{T}} w^*$ [5, 12].

Численное решение обратных задач рационального формообразования строится на основе итерационного метода с учетом непрерывной параметрической функции оптимального нагружения.

В этом случае искомый прогиб задается в виде

$$w(t, x_1, x_2) = \frac{f(t)}{f(T)} w^*(x_1, x_2), \tag{4}$$

где

$$f(t) = \left[\frac{(1+w_1)EB}{w_2} + (B^{-1/n}) - \frac{(1+w_1)EB}{w_2})e^{w_2(1-n)t}\right]^{\frac{n}{1-n}}, \tag{5}$$

T — конечное время деформирования в режиме ползучести.

Таким образом, оптимальный путь нагружения предлагается определять по формулам (4), (5) по значениям весовых коэффициентов.

Построен и численно реализован алгоритм определения параметров по заданным условиям задачи. Решение каждого шага итерационного метода выполняется методом конечных элементов в программной системе MSC.Marc. Дается сравнительный анализ результатов расчета изгиба пластинки при различных режимах нагружения.

Постановка обратных квазистатических задач теории ползучести в виде оптимального управления позволяет с помощью разработанного алгоритма находить численные рациональные решения для более сложных деталей, свободных от представлений идеальной пластинки и оболочки, в частности при формообразовании панелей крыла самолета [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (МК-481.2013.1), Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект 909).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hill R.* On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // J. Mech. Phys. Solids. 1957. V. 5. № 4. P. 229–241.

[2] *Бормотин К. С.* Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. Раздел 1. С. 141–1148.

[3] *Bormotin K. S.* Iterative method for solving geometrically nonlinear inverse problems of structural element shaping // Computational mathematics and mathematical physics. 2013. V. 53. № 12. P. 1908–1915.

[4] *Бормотин К. С., Логвина В. С.* Метод решения итеративной регуляризацией обратных задач формообразования деталей // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. Раздел 1. С. 77–84.

[5] *Цвелодуб И. Ю.* Об оптимальных путях деформирования в условиях ползучести. Некоторые приложения к задачам обработки материалов давлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 128–136.

[6] *Цвелодуб И. Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1991. 216 с.

[7] *Радченко В. П., Еремин Ю. А.* Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М: Машиностроение, 2004. 265 с.

[8] *Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В.* О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Проблемы прочности. 1979. № 7. С. 62–67.

[9] *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М: Наука, 1986.

[10] *Коробейников С. Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

[11] *Бормотин К. С.* Обратные задачи оптимального управления в теории ползучести // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т.15. № 2. С. 33–42.

[12] *Бормотин К. С., Олейников А. И.* Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2012. 53. № 5. С. 136–146.

[13] *Аннин К. С., Олейников А. И., Бормотин К. С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикладная механика и техническая физика. 2010. 51 № 4. С. 155–165.

Bormotin K. S. *A numerical of solving problems of forming thin-walled designs in a creep theory*. The inverse quasi-static problems of the creep theory is formulated in the form of optimum control. A number of optimum laws of deformation in creep are proposed on the basis of the minimization damage criterion in the functionals of inverse problems. When solving inverse forming problems by an iterative method, a continuous optimum loading function dependent on two parameters is used. A method for finding the parameters according to the given initial conditions is also proposed and implemented numerically. At each step of the iterative method, the solving procedure is based on a finite element method in the framework of the MSC.Marc software system. A comparative analysis of numerical results is given in the case of plate bending for various modes of loading.

О ВОЗМОЖНОСТИ МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Бочарова О. В.[1], **Анджикович И. Е.**[2]
[1]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*
[2] *НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону*

Создан многофункциональный измерительный комплекс, позволяющий проводить исследования, сопоставлять сигналы и строить спектральные характеристики датчиками различного типа. Рассмотрены особенности волновых полей на поверхности структурно неоднородных тел. Численно и экспериментально проведено исследование возможности определения наличия дефекта, его размера и расположения по параметрам поверхностного волнового поля.

Задачи неразрушающего контроля состояния, определения дефектов различных механических объектов всегда были и остаются актуальными. Проблема разработки методов неразрушающего контроля состояния и прочностного ресурса узлов и деталей инженерных конструкций ответственного назначения является ключевой для повышения надежности их эксплуатации и предотвращения аварийных ситуаций. Современное развитие технологий производства новых материалов, а также повышенные требования к эксплуатационным характеристикам деталей и узлов конструкций, выполненных из этих материалов и работающих в сложных условиях, приводят к необходимости создания простых и эффективных методов постоянного мониторинга состояния объекта, не наносящих при этом ему ущерба. В процессе производства для контроля качества изготовления деталей широко используются методы акустического контроля. Обзор этих методов их достоинств и недостатков приведен в работах [1–3].

В настоящей работе был создан многофункциональный измерительный комплекс, позволяющий проводить исследования, сопоставлять сигналы и строить спектральные характеристики датчиками различного типа, а также создана экспериментальная установка, позволяющая в лабораторных условиях оценивать изменение поверхностного волнового поля на образцах различных технологических материалов.

На рисунке 1 приведена блок-схема эксперимента с использованием датчика деформации, миниатюрных акселерометров и лазерного виброметра.

При проведении экспериментов возбуждение колебаний в модели производилось двумя способами — посредством электродинамического вибратора B&K через лёгкий штамп, приклеенный к поверхности образца акустической мастикой, либо ударным электромагнитным приспособлением (электромагнитный молоток). Тем самым моделировались гармонический и импульсный способ воздействия на объект. Использование лазерного измерителя виброскорости колебаний PDV-100 в точке расположения датчика деформации позволяло наиболее достоверно оценивать динамику работы последнего. Сигнал, снятый с датчика деформации, уси-

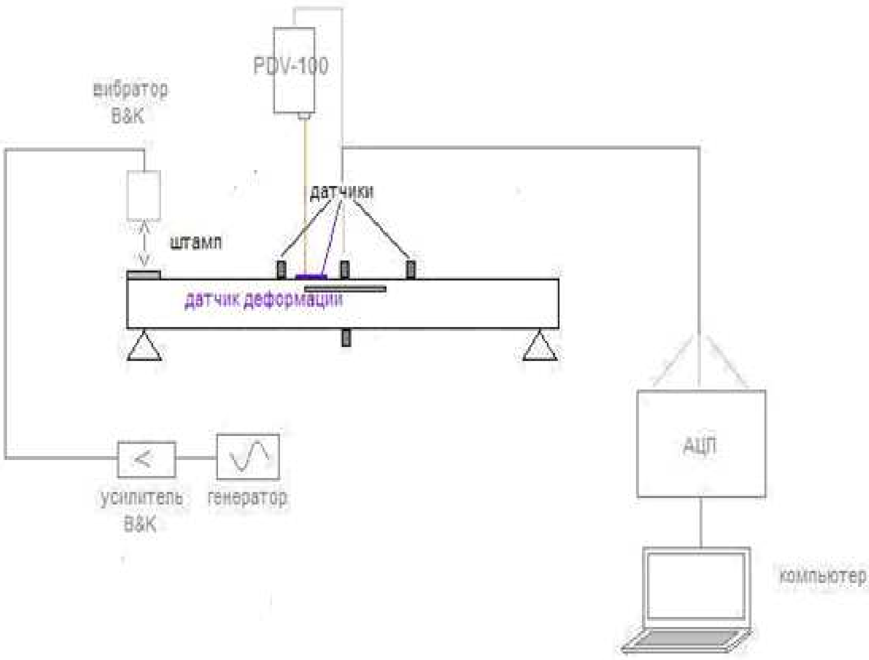


Рисунок 1 – Блок-схема эксперимента

ливался зарядовым усилителем B&K (на блок-схеме не показан) и обрабатывался АЦП. Регистрация и спектральный анализ сигналов, полученных датчиками, проводились компьютерными программами, соответственно Test Xpress LMS либо Powergrapf.

Следует отметить, что в силу конструктивных особенностей датчика деформации, а именно — отсутствия присоединенной массы, как в случае классического акселерометра, АЧХ сегнетоэлектрического датчика носит более равномерный характер, в то время как АЧХ пьезоэлектрического акселерометра изобилует различными резонансами.

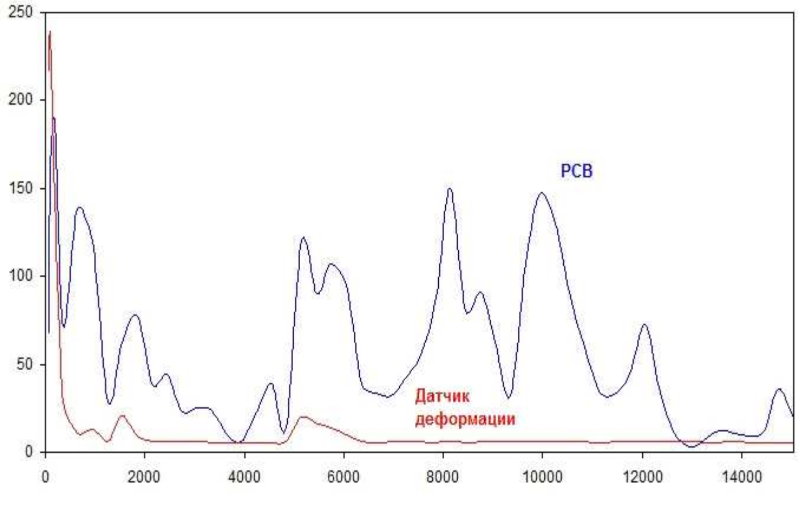


Рисунок 2 – АЧХ при гармоническом способе возбуждения колебаний

На рисунке 2 представлены АЧХ, снятые с датчика деформации и акселерометра (фирмы PCB Piezotronics) при гармоническом способе возбуждения колебаний в алюминиевой балке квадратного сечения.

На рисунках 3 и 4 приведены осциллограммы, снятые с акселерометра (3) и датчика деформации (4), расположенных на алюминиевой балке с квадратным сечением при импульсном возбуждении колебаний. Из сравнения рисунков видно, что осциллограмма акселерометра носит более «изрезанный» характер.

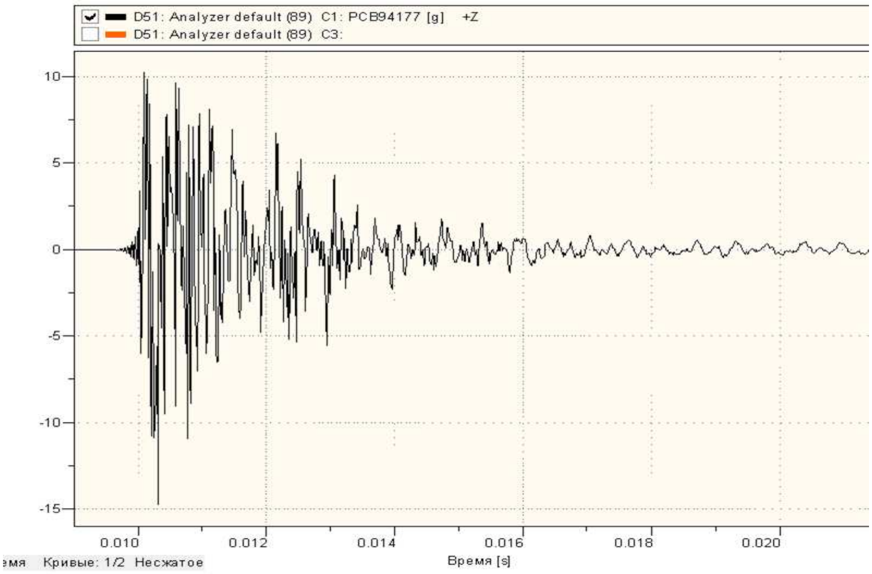


Рисунок 3 – Осциллограмма, снятая с акселерометра при импульсном возбуждении колебаний

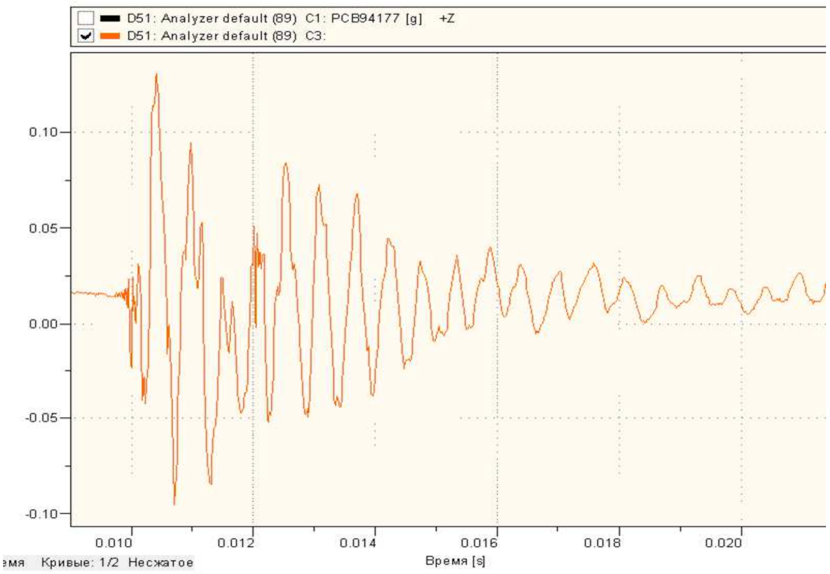


Рисунок 4 – Осциллограмма, снятая с датчика деформации при импульсном возбуждении колебаний

Параллельно для аналогичной модели проводился вычислительный эксперимент, основанный на использовании метода конечных элементов. Исследовались особенности динамического процесса на поверхности прямоугольного параллелепипеда с размерами $50 \times 80 \times 960$, в котором прорезаны сквозные поперечные цилиндрические полости. Нижняя грань параллелепипеда жестко приклеена к недеформируемому основанию. Поверхностные колебания в образце возбуждались импульсным воздействием вблизи его левой грани. Дефект располагался на расстоянии 280 мм от левого края образца. Диаметр полости, равно как и глубина ее залегания (расстояние от верхней точки полости до поверхности среды) варьировались. Для расчета волнового поля на поверхности параллелепипеда, ослабленного наличием полости, был применен пакет ANSYS с использованием командного языка APDL.

На рисунке 5 представлены корреляционные функции двух сигналов. Первый из сигналов представляет собой амплитуду поверхностного волнового поля для образца без дефектов, измеренную датчиком, находящимся на расстоянии 100 мм от левого края. Второй сигнал представляет собой амплитуду поверхностного волнового поля, измеренную датчиком, находящимся на расстоянии 380 мм для различных образцов (1 — образец без дефектов, 2 — образец с полостью диаметром 30 мм, находящейся на расстоянии 5 мм от верхней границы, 3 — образец с полостью диаметром 30 мм, находящейся на расстоянии 15 мм от верхней границы). По оси абсцисс отложен лаг индекс, по оси ординат коэффициент корреляции.

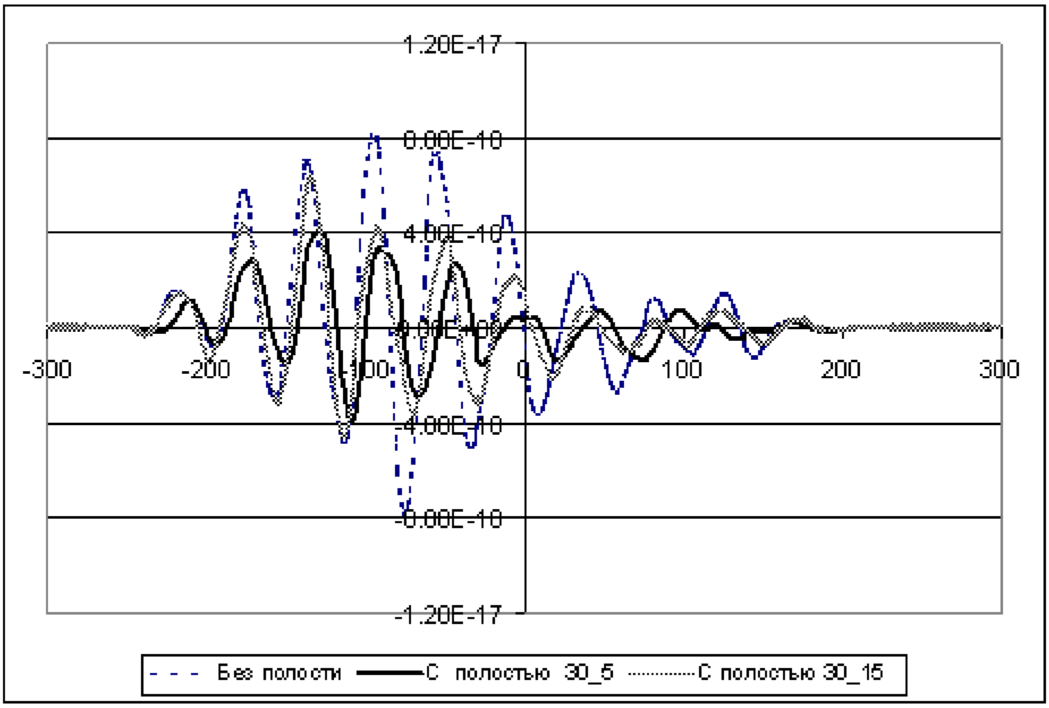


Рисунок 5 – Корреляционные функции. Датчик находится на расстоянии 380 мм.

На рисунке 6 представлены результаты для случая, когда второй сигнал представляет собой амплитуду поверхностного волнового поля,измеренную датчиком, находящимся на расстоянии 580 мм.

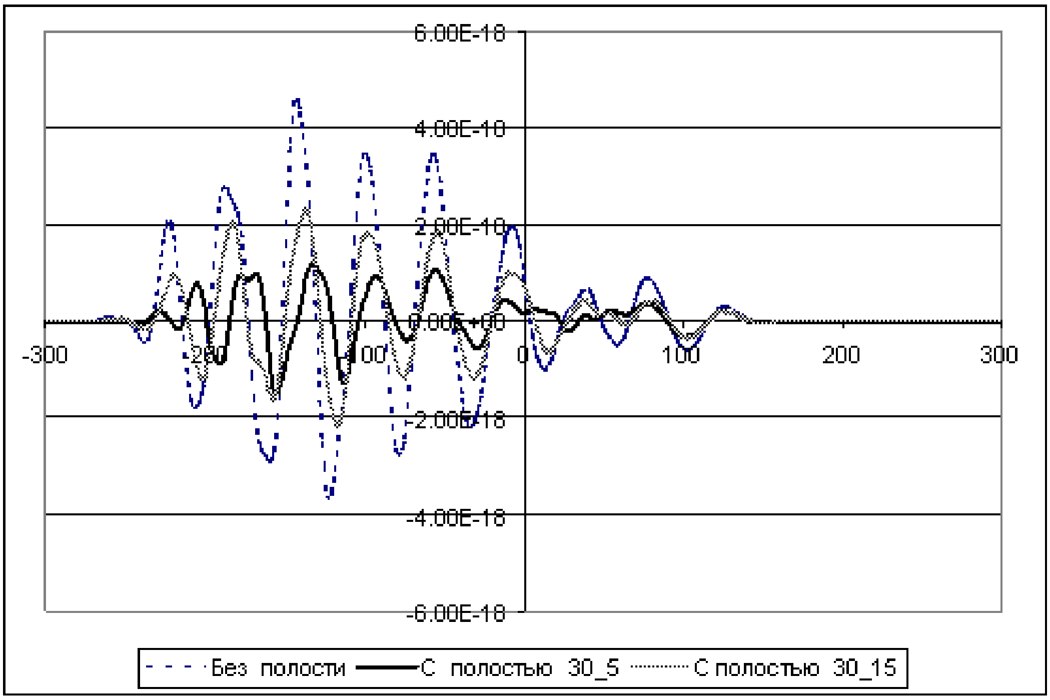


Рисунок 6 – Корреляционные функции. Датчик находится на расстоянии 580 мм.

Как показали результаты эксперимента, наличие дефекта, его размер и глубина расположения существенно влияют на характеристики волнового поля. Причем наличие дефекта оказывает влияние не только на ближние, но и на удаленные датчики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ланге Ю. В.* Акустические низкочастотные методы контроля и средстванеразрушающего контроля многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 276 с.

[2] *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И., Лебедев В. К.* Основы ультразвукового неразрушающего метода определения напряжений в твердых телах. Киев: Наукова думка, 1974. 106 с.

[3] *Глаговский Б. А., Московенко И. Б.* Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении. Л.: Машиностроение, 1977. 208 с.

Bocharova O. V., Andzhikovich I. E. *About possibility of monitoring of structurally inhomogeneous solids condition.* A multifunctional measuring system which allows conducting studies, to compare the signals and to construct the spectral characteristics of various types of sensors is created.The features of the wave field on the surface of structurally inhomogeneous bodies are examined. Numerically and experimentally the investigation of possibility of defect presence definition, its size and location through the parameters of the surface wave field is carried out.

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ

Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеенко В. П.
Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Работа посвящена анализу аэроупругой устойчивости цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного (ФГ) материала, которые с наружной поверхности обтекаются сверхзвуковым потоком газа, а внутри содержат неподвижную или текущую идеальную сжимаемую жидкость. Для пустых и содержащих жидкость круговых цилиндрических оболочек приведены результаты численных экспериментов по оценке влияния свойств ФГ-материала на границы аэроупругой устойчивости при разных комбинациях граничных условий и линейных размерах. Показано, что наличие жидкости внутри оболочки оказывает существенное влияние как на характер динамического поведения связанной системы «газ-оболочка-жидкость», так и на границу аэроупругой устойчивости.

1. Введение. Панельный флаттер пустых цилиндрических ФГ-оболочек вращения, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, исследуется в работах [1, 2]. Здесь изучено влияние разнообразных консистенций ФГ-материала на границы аэроупругой устойчивости оболочек, подвергающихся дополнительному воздействию температурных и механических нагрузок. Влияние свободной поверхности неподвижной жидкости, содержащейся внутри изотропной цилиндрической оболочки, на критические скорости внешнего сверхзвукового потока газа исследовано в [3]. Показано, что оболочка наполовину наполненная жидкостью обладает наибольшим сопротивлением к внешнему воздействию, а эффект плескания на свободной поверхности жидкости, расположенной перпендикулярно направлению течения газа, оказывает наиболее сильное влияние для коротких оболочек. В случае оболочек, выполненных из ФГ-материала, влияние как неподвижной, так и текущей жидкости, расположенной внутри оболочки, остается не изученным и является предметом исследований настоящей работы.

2. Постановка задачи. Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка, выполненная из ФГ-материала, длиной L и радиусом R. Снаружи оболочка со скоростью U_∞ обтекается сверхзвуковым потоком идеального сжимаемого газа. Внутри оболочки содержится сжимаемая жидкость, которая неподвижна или течёт со скоростью U. Целью работы является исследование влияния свойств ФГ-материала на границы аэроупругой устойчивости оболочки с жидкостью при различных вариантах граничных условий и линейных размерах конструкции.

3. Численная реализация. Эффективные физико-механические характеристики ФГ-оболочки P_{eff}, а именно, модуль упругости E, коэффициент Пуассона и плотность материала ρ, определяются свойствами составляющих материалов P_i согласно степенному закону [1]

$$P_{eff} = P_1 + (P_2 - P_1)\,(1/2 + z/h)^N, \qquad (1)$$

где N — показатель объёмной доли, изменяющийся от нуля до бесконечности, z — радиальная координата, h — толщина оболочки.

Потенциальное движение идеальной сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением, дискретизация которого по пространственным переменным совместно с условием непроницаемости на смоченной поверхности и соответствующими граничными условиями, осуществляемая методом конечных элементов с использованием процедуры Бубнова–Галёркина, позволяет получить систему алгебраических уравнений [4].

Применяя для оболочки, рассматриваемой в рамках гипотез Кирхгофа–Лява, принцип возможных перемещений, в который включаются уравнения для вычисления гидродинамического (уравнение Бернулли) и аэродинамического давлений (по квазистатической аэродинамической теории [5]), получаем связанную систему уравнений. В матричном виде она может быть записана следующим образом

$$\left(\mathbf{K} - \lambda^2\mathbf{M} + i\lambda\mathbf{C} + \mathbf{A}\right)\left\{\begin{array}{cc} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{\phi} \end{array}\right\}^{\mathrm{T}} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_{sf} \\ \mathbf{C}_{fs} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{A}_{sf} \\ \mathbf{A}_{fs} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_{m_s}\int_{S_s}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}dS,\ \mathbf{M}_s = \sum_{m_s}\int_{S_s}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\rho_0\mathbf{N}dS, \mathbf{M}_f = \sum_{m_f}\int_{V_f}\frac{1}{c^2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}dV,$$

$$\mathbf{K}_f = \sum_{m_f}\int_{V_f}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{,r}\mathbf{F}_{,r} + \frac{1}{r^2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{,\theta}\mathbf{F}_{,\theta} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{,x}\mathbf{F}_{,x}\right)dV,\ \mathbf{A}_{fs} = -\sum_{m_s}\int_{S_\sigma}U\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{N}}_{,s}dS,$$

$$\mathbf{C}_{sf} = \rho_f\sum_{m_s}\int_{S_\sigma}\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}dS,\ \mathbf{A}_{sf} = \rho_f\sum_{m_s}\int_{S_\sigma}U\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_{,x}dS,\ \mathbf{C}_{fs} = -\sum_{m_s}\int_{S_\sigma}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{N}}dS,$$

$$\mathbf{A}_f = -\sum_{m_f}\int_{V_f}M^2\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{,s}\mathbf{F}_{,s}dV,\ \mathbf{C}_f = \sum_{m_f}\int_{V_f}\frac{2U}{c^2}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}_{,x}\mathbf{F}dV,\ \mathbf{C}_s = q_1\sum_{m_s}\int_{S_s}\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{N}}dS,$$

$$\mathbf{A}_s = \sum_{m_s}\int_{S_s}\left(q\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{N}}_{,s} + q_2\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{N}}\right)dS,\ q = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\beta} = \frac{\kappa p_\infty M_\infty^2}{\beta},\ q_1 = q\frac{M_\infty^2 - 2}{U_\infty\beta^2},$$

$$q_2 = \frac{q}{2R\beta},\ \beta = \left(M_\infty^2 - 1\right)^{1/2},\ M_\infty = \frac{U_\infty}{c_\infty},\ M = \frac{U}{c},\ i^2 = -1,\ \rho_0 = \int_h \rho_{eff}dz.$$

Здесь: (r, θ, x) и (s, θ, z) — цилиндрическая и криволинейная система координат; m_f и m_s — число конечных элементов, на которые разбиваются области жидкости V_f и оболочки V_s; S_f и S_s — поверхности, ограничивающие объемы жидкости и оболочки; $S_\sigma = S_f \cap S_s$ — смоченная поверхность; $\mathbf{B}$ — матрица связи вектора деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента; $\mathbf{D}$ — матрица эффективных жёсткостей; $\mathbf{F}, \mathbf{N}$ и $\bar{\mathbf{N}}$ — матрицы функций формы для потенциала возмущения скорости, перемещений оболочечного элемента и нормальной составляющей вектора перемещения оболочки; M и M_∞ — числа Маха в жидкости и газе; $\rho_\infty, p_\infty, c_\infty$ и c — плотность, статическое давление, скорость звука в невозмущённом потоке газа и скорость звука в жидкости; κ — показатель адиабаты; $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{\phi}$ — некоторые функции координат; $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ — характеристический показатель.

Решение задачи о панельном флаттере цилиндрической ФГ-оболочки, содержащей жидкость, сводится к определению и анализу собственных значений λ системы (2). Для вычисления λ применяется итерационный алгоритм на основе метода Мюллера.

4. Численные примеры. В численных примерах рассматривается оболочка ($h = 1 \times 10^{-4}$ м), выполненная из алюминия (внутренняя поверхность, Al) и оксида циркония (наружная поверхность, ZrO_2) [5]. Расчёты выполнялись для свободно опёртых (SS) или жёстко закреплённых (CC) на обоих торцах и консольно закреплённых (CF) оболочек, обтекаемых потоком газа со следующими параметрами: $\kappa = 1,4$, $M_\infty = 3$, температура торможения в свободном потоке $T_\infty = 48,89$°C. В качестве варьируемой величины используется статическое давление в невозмущенном потоке p_∞, а для представления результатов вычислений применяется безразмерный параметр динамического давления $\bar{q} = q/E^1_{eff} \times 10^{-7}$, где E^1_{eff} — эффективный модуль упругости ФГ-материала, полученный при $N = 1$.

На рисунке 1 представлены зависимости параметра $\bar{q}$ от номера гармоники j при разной величине объёмной доли N для пустых (рисунок 1а) и заполненных неподвижной жидкостью (рисунок 1б) свободно опёртых оболочек. При этом критический номер гармоники j, т. е. номер гармоники, на котором имеет место минимальное значение $\bar{q}$, или, другими словами, форма потери устойчивости, в случае пустой оболочки определяется заданной консистенцией ФГ-материала. Для оболочки с жидкостью форма потери устойчивости для разных значений N остаётся, как правило, неизменной. Кроме этого, для рассматриваемой конфигурации наличие в оболочке жидкости приводит к существенному снижению границ аэроупругой устойчивости.

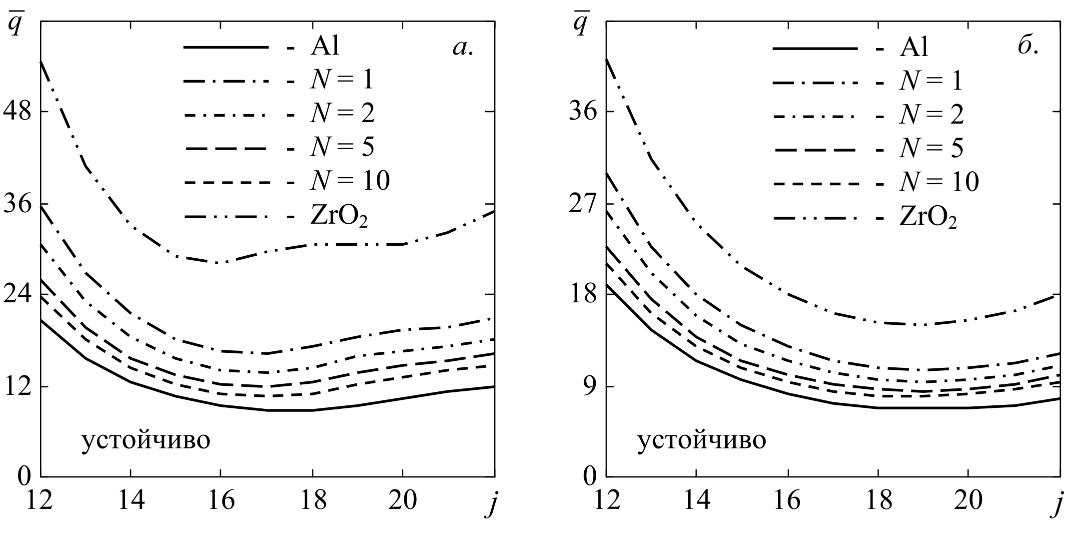


Рисунок 1 – Зависимости параметра $\bar{q}$ от номера гармоники j для (а) пустой оболочки и (б) оболочки, заполненной неподвижной жидкостью: $L/R = 2$, $h/R = 1000$

Результаты для других граничных условий (ГУ) и геометрических размеров при $L/R = 2$ приведены в таблице 1. Из представленных данных следует, что жёстко закрепленные на обоих краях оболочки с неподвижной жидкостью, обеспечивают наибольшую сопротивляемость воздействию сверхзвукового потока газа.

Таблица 1 – Критические значения безразмерного параметра динамического давления $\bar{q}$ для оболочек с разными граничными условиями и геометрическими размерами

ГУ	h/R	ZrO_2	$N=1$	$N=2$	$N=5$	$N=10$	Al
SS	500	82,36	56,07	50,17	45,04	41,92	34,79
	1000	15,03	10,53	9,473	8,539	7,972	6,724
	2000	2,935	2,076	1,870	1,689	1,578	1,339
CC	500	104,3	71,53	63,98	57,35	53,34	44,10
	1000	19,40	13,62	12,23	10,99	10,26	8,672
	2000	3,834	2,706	2,439	2,204	2,059	1,743
CF	500	57,38	39,78	35,67	32,05	29,87	25,02
	1000	10,99	7,714	6,953	6,287	5,874	4,945
	2000	2,166	1,535	1,383	1,249	1,168	0,992

В случае текущей внутри оболочки жидкости монотонный характер изменения параметра $\bar{q}$ от номера гармоники j нарушается. Это демонстрируется данными, приведёнными на рисунке 2а. Здесь показаны зависимости параметра $\bar{q}$ от номера гармоники j для свободно опёртой оболочки с текущей внутри неё со скоростью $M = 6,6 \times 10^{-3}$ жидкостью.

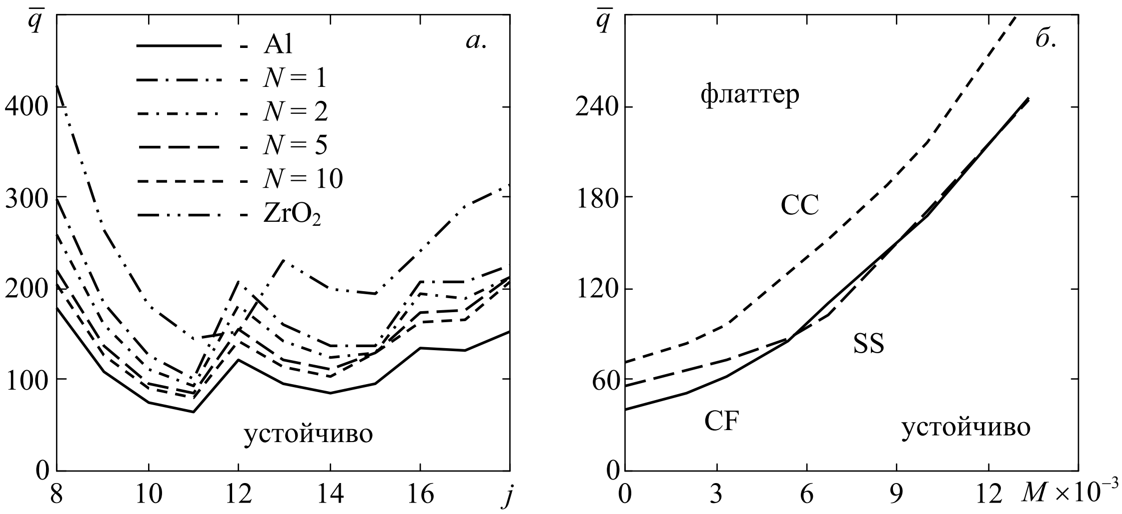


Рисунок 2 – Зависимости безразмерного параметра $\bar{q}$ от (а) номера гармоники j для оболочки с текущей жидкостью и (б) числа Маха M внутреннего потока жидкости для оболочек с разными граничными условиями: $L/R = 2$, $h/R = 500$

Наличие текущей жидкости приводит к смене вида потери устойчивости. Если для пустых оболочек и оболочек с неподвижной жидкостью потеря устойчивости осуществляется в виде флаттера по двум формам колебаний, то учёт внутреннего течения жидкости приводит к неустойчивости в виде флаттера по одной форме колебаний для любой комбинации граничных условий. При этом даже незначительное течение внутри оболочки приводит к повышению критических скоростей внешнего потока газа. Таким образом, внутреннее течение оказывает существенное стабилизирующее воздействие. Данный факт более наглядно отражён на рисунке 2б. Здесь приведены зависимости параметра $\bar{q}$ от числа Маха M внутреннего потока жидкости для оболочек с разными граничными условиями при $N = 1$.

Как и в случаях с пустой оболочкой и оболочкой с неподвижной жидкостью жёстко закреплённые оболочки с текущей жидкостью оказываются более устойчивыми при их обтекании газом. При этом необходимо отметить, что критические скорости внутреннего течения жидкости и граничные условия для оболочки не оказывают никакого влияния на характер динамического поведения связанной системы «газ-оболочка-жидкость». Например, при отсутствии внешнего течения потеря устойчивости жёстко закреплённых оболочек осуществляется в виде дивергенции при скорости $M = 42,4 \times 10^{-3}$, тогда как для консольных оболочек — в виде флаттера по одной форме колебаний и скорости $M = 79,5 \times 10^{-3}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-96049) и гранта президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ НШ-2590.2014.1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Haddadpour H., Mahmoudkhani S., Navazi H. M.* Supersonic flutter prediction of functionally graded cylindrical shells // Compos. Struct. 2008. V. 83, № 4. P. 391–398.

[2] *Sabri F., Lakis A. A.* Efficient hybrid finite element method for flutter prediction of functionally graded cylindrical shells // J. Vib. Acoust. 2014. V. 136. № 1. 011002.

[3] *Sabri F., Lakis A. A.* Effects of sloshing on flutter prediction of liquid-filled circular cylindrical shell // J. Aircr. 2011. V. 48. № 6. P. 1829–1839.

[4] *Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П.* Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Известия РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 189–199.

[5] *Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В.* Исследование панельного флаттера круговых цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного материала // Вестник ПНИПУ. Механика. 2014. № 1. С. 57–75.

Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. *Aeroelastic stability of functionally graded cylindrical shells containing fluid.* The paper is devoted to the analysis of the aeroelastic stability of cylindrical shells in a supersonic gas flow. The shells are made of functionally graded material and contain quiescent or flowing compressible non-viscous fluid. The paper presents the results of numerical experiments carried out to estimate the effect of the properties of functionally graded materials on the aeroelastic stability boundary of empty and filled with fluid circular cylindrical shells for different combinations of boundary conditions and linear dimensions. It has been shown that the presence of fluid within the shell has a significant influence on both the dynamic behavior of the coupled «gas-shell-liquid» system, and on the border of the aeroelastic stability.

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЕТОНОВ, СОДЕРЖАЩИХ ТЕХНОГЕННОЕ СЫРЬЕ

Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Павлова Л. Н., Пак Г. Н.
НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Приведены результаты исследований физико-механических свойств бетонов, содержащих золошлаковые отходы и горелые породы шахтных отвалов. Установлено, что использование такого техногенного сырья позволяет снизить расход вяжущего и улучшить физико-механических свойствах бетона.

Использование техногенного сырья в промышленности строительных материалов является одним из стратегических путей снижения добычи природного минерального сырья, а также решения экологической проблемы по улучшению состояния окружающей среды. В Ростовской области многотоннажным техногенным сырьем являются запасы шахтных пород и золошлаковых отходов. По химическому, гранулометрическому и фазово-минералогическому составу это техногенное сырье во многом идентично природному минеральному сырью. Его можно использовать в технологии строительных материалов, в дорожном, гидротехническом и других видах строительства. Однако нестабильность химико-минералогического состава и свойств зол ТЭС, как и многих других техногенных материалов [1, 2], сдерживает их применение в производстве бетона вследствие значительных колебаний свойств получаемой на их основе изделий. Данный негативный аспект может быть устранен путем применения дополнительной подготовки рассматриваемых техногенных материалов перед использованием в бетонных смесях.

Цель работы — исследовать физико-механические свойства бетонов, содержащих золошлаковые отходы или горелые шахтные породы. В качестве объектов исследования выбраны золошлаковые отходы Новочеркасской ГРЭС (зола сухого отбора, золошлаки) и горелые породы некоторых шахтных отвалов угольно-промышленных районов Ростовской области. Применение золошлаковых отходов в технологии строительных материалов в отличие от горелых шахтных пород более распространено. В составах бетона зола сухого отбора и тонкодисперсные горелые породы можно использовать как гидравлическую добавку, золошлаки, дробленые породы и отсевы дробления — в качестве крупного и мелкого заполнителя. Подбор состава бетона производится расчетно-экспериментальным способом, основываясь в выборе единых критериев для оценки различных отходов и их влияния на свойства бетонов, положениями структурной теории бетонов [3, 4]. Состав бетонной смеси подобран таким образом, чтобы при данных условиях укладки и твердения бетон обладал заданными свойствами (прочностью, морозостойкостью, плотностью и др.). Оптимальным считается состав бетона, который обеспечивает получение требуемых показателей свойств при минимальном расходе цемента (максимальной экономии цемента при введении техногенного сырья).

Испытания бетонов проведены в лабораторных условиях и при выпуске изделий из экспериментального бетона в условиях производства. В лабораторных условиях испытания выполнены на образцах-кубах, образцах-балочках и цилиндрах. Набор прочности бетона происходил в нормальных условиях твердения и при тепловлажностной (пропаривание) обработке. Контрольными служили образцы бетона того же состава, что и экспериментальные, но с использованием традиционных материалов. В производственных условиях изготовление образцов для испытания выполнено параллельно с изготовлением изделий из тех же бетонных смесей и при тех же условиях формования и термообработки. Контроль прочности и других показателей физико-механических свойств бетона проведен на изделиях методами неразрушающего контроля и на образцах по методикам нормативных документов.

По химическому составу горелые породы и золошлаковые отходы относятся к полукислому сырью, с высоким содержанием красящих оксидов. Несмотря на имеющиеся различия в составе и свойствах зол и горелых пород, в них есть много общего: они являются продуктом обжига углевмещающих пород и содержат минеральную и органическую часть. Минеральная часть представлена в основном видоизмененным в процессе обжига глинистым веществом, органическая часть — видоизмененными модификациями угля. В золе присутствуют основные группы веществ: кристаллические, стекловидные, аморфные и органические. В отличие от зол горелые породы содержат в значительном количестве глинистые, железистые и кремнеземистые гидравлические компоненты. Горелые породы проявляют свойства активного глинита, а золы — среднеактивной силикатно-железистой добавки. Поверхность частиц горелой породы менее закристаллизована и оплавлена. Наибольший эффект в активность зол вносит стеклофаза.

В качестве примера ниже приведены результаты по использованию золошлаковых отходов и горелых шахтных пород в тяжелых бетонах. В таблице 1 представлены данные по некоторым свойствам бетонов, содержащих материалы из золошлаковых отходов и горелых пород. Золошлаковые отходы (зола сухого отбора и золошлаковая смесь) использовались без специальной подготовки. Из горелых пород при дроблении и измельчении получали фракционированный заполнитель и тонкодисперсную фракцию.

В результате исследований было установлено, что тонкодисперсные золы и горелые породы в составе бетона являются одновременно активной добавкой, усиливающей процесс гидратации, мелким заполнителем, пластификатором, микронаполнителем, улучшающим структуру бетона, повышающим плотность цементного камня. Для бетонов, содержащих тонкодисперсные добавки, характерно увеличение объема смешанного цементно-зольного (цементно-породного) теста, который для умеренно жестких смесей составляет 320–380 л/м^3, для подвижных – 420–470 л/м^3. Это отражается на реологических свойствах бетонных смесей: повышается пластичность, связность, водоудерживающая способность, улучшается однородность, обрабатываемость бетонной смеси. Так, удобоукладываемость смеси с тонкодисперсными добавками значительно улучшается, отсутствуют седиментационные явления. Качество поверхностей изделий улучшается за счет сокращения количества крупных раковин и пор.

Таблица 1. Физико-механические свойства бетонов с техногенными добавками

Класс бетона, (марка) осадка конуса	Прочность, МПа				Марка		Объемная масса, кг/м³	Экономия цемента, %
	пропаривание*		нормальное твердение, 28~сут.		морозо-стойкость	водоне-проницае-мость		
	сжатие	изгиб	сжатие	изгиб				
ЗОЛОБЕТОН								
B7,5; (M100) ОК 3-4 см	8,1	0,84	12,05	1,27	F 50	W2	2280	50
B10; (M150) ОК 3-4 см	11,3	2,24	18,74	3,26	F50	W2	2250	50
B15; (M200) ОК 3-4 см	15,7	3,50	22,43	5,12	F75	W4	2210	50
B20; (M250) ОК 3-4 см	18,2	4,06	26,02	5,83	F100	W4	2240	30
B22,5; (M300) ОК 1-3 см	22,6	4,55	32,29	6,51	F200	W6	2230	30
B30; (M400) ОК 4-6 см	29,8	5,20	41,52	7,44	F300	W8	2220	25
B35; (M450) ОК 1 см	33,4	5,38	47,71	7,85	F300	W10	2230	25
ГОРЕЛОПОРОДНЫЙ БЕТОН								
B7,5; (M100) ОК 3-4 см	7,8	0,64	11,67	0,94	F50	W2	2200	20
B10; (M150) ОК 3-4 см	10,8	1,48	15,98	2,15	F50	W2	2230	50
B15; (M200) ОК 3-4 см	14,6	2,38	21,47	3,43	F75	W2	1990	15
B20; (M250) ОК 1-3 см	17,9	3,08	26,43	4,47	F100	W4	2130	15
B22,5; (M300) ОК 4-6 см	21,5	3,52	31,84	5,12	F200	W6	2150	15
B30; (M400) ОК 4-6 см	28,0	4,06	39,27	5,83	F250	W8	2180	10
B35; (M450) ОК 1 см	32,8	4,27	46,13	6,17	F250	W10	2210	10

*После пропаривания прочность бетона составляет не менее 70 % от проектной

Визуальный контроль за уплотнением бетонной смеси позволяет сделать вывод, что равноподвижные смеси поосадке конуса при введении золы имеют лучшие формовочные свойства, чем у бетонов без золы. Пластифицирующий эффект молотой горелой породы ниже, чем у золы. В основном это связано с формой, пористостью и шероховатостью поверхности частиц породы. Было установлено, что обеспечить высокие прочностные показатели бетонов позволяет применение тонкодисперсных добавок с удельной поверхностью 500–600 м^2/кг. Этот вывод согласуется с утверждением авторов [5] о том, что оптимальная дисперсность минеральной добавки к цементу должна на 120–200 м^2/кг превышать дисперсность клинкерного минерала (цемента). Одной из особенностей бетонов с добавками золы, золошлаковых смесей, горелых шахтных пород является способность в течение длительного времени набирать прочность после достижения проектной.

Бетоны, содержащие техногенное сырье (золошлаковые отходы или горелые шахтные породы), имеют высокие показатели прочности при изгибе. На рисунке 1 показана зависимость прочности при изгибе от прочности на сжатие для трех видов бетона: золобетона (кривая 1), горелопородного (кривая 2) и бетона на традиционных материалах (кривая 3 — контроль). Наибольшие значения прочности при изгибе имеет золобетон, наименьшие — обычный бетон. Повышенная прочность золобетона связана с выраженным пластифицирующим эффектом золы, что способствует формированию более однородной и плотной структуры бетона. Зола активнее, чем горелая порода, участвует в физико-химических процессах твердения бетона и в результате количество новообразований в золобетоне больше, чем в горелопородном и обычном бетоне.

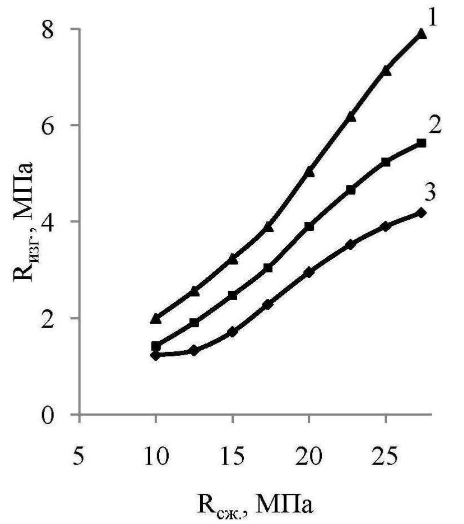


Рисунок 1 – *Зависимость прочности бетона при изгибе от его прочности на сжатие:*
1 — золобетон;
2 — горелопородный бетон;
3 — обычный бетон (контроль)

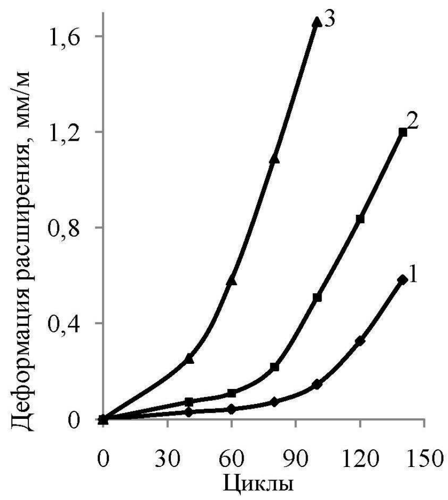


Рисунок 2 – *Кинетика развития линейных деформаций бетона при циклических испытаниях в растворе Na_2SO_4:*
1 — состав с добавкой молотой горелой породы;
2 — состав с добавкой золы;
3 — контрольный состав

Другой отличительной особенностью бетонов на техногенном сырье является повышенная сульфатостойкость. Наблюдения за расширением образцов при попеременном насыщении в растворе сульфата натрия и высушивании показывают, что у золо- и горелопородных бетонов деформации, сравнимые по величине с деформациями обычных бетонов, появляются при значительно большем количестве циклов испытаний. На рисунке 2 кривая для обычного бетона располагается левее и имеет более крутой подъем, чем кривые для бетонов с золой и горелой породой.

Влияние зол и горелых пород на сульфатостойкость бетонов имеет физический и химический характер. Физическая природа этого вяления связана с относительным увеличением контактов между частицами и формированием более однородной и плотной структуры бетона. Физико-химический характер обусловлен пуццолановыми свойствами, которые способны проявлять золошлаковые отходы и горелые породы. Результатом проявления пуццолановой активности является связывание минеральными добавками свободной извести, образующейся при гидратации цемента, и образованием значительного количества цементирующих веществ. Контактный слой при этом имеет более развитую и менее дефектную поверхность, более стойкую к деформационным проявлениям и воздействию агрессивных сред.

Положительное влияние золошлаковых отходов и горелых пород на физико-механические свойства бетонов, а также возникающая возможность при их применении существенно сокращать расход цемента без ухудшения свойств и качества бетона, дают основание рекомендовать их для широкого использования в технологии бетона.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Евтушенко Е. И.* Учет нестабильности свойств техногенных отходов в производстве строительных материалов // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2004. № 8. С. 143–145.

[2] *Лесовик В. С., Евтушенко Е. И.* Стабилизация свойств строительных материалов на основе техногенного сырья // Изв. вузов. Строительство. 2002. № 12. С. 40–44.

[3] *Баженов Ю. М., Алимов Л. А., Воронин В. В.* Развитие теории формирования структуры и свойств бетонов с техногенными отходами // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 7. С. 55–58.

[4] *Баженов Ю. М., Алимов Л. А., Воронин В. В.* Прогнозирование свойств бетонных смесей и свойств бетонов с техногенными отходами // Изв. вузов. Строительство. 1997. № 4. С. 68–72.

[5] *Величко Е. Г., Белякова Ж. С.* Физико-химические и методологические основы получения многокомпонентных систем оптимизированного состава // Строительные материалы. 1966. № 3. С. 27–30.

Buravchuk N. I., Guryanova O. V., Pavlova L. N., Pak G. N. *Physical and mechanical properties of concretes containing industrial raw materials*. The results of studies of physical and mechanical properties of concrete containing slag waste and burnt rock mine dumps. Found that the use of such man-made raw materials reduces fuel binder and improve the physical and mechanical properties of concrete.

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПОРОУПРУГИХ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Ватульян А. О. [1], Ляпин А. А [2].

[1] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

[2] *НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону*

На основе аналога вариационного принципа Лагранжа для пористоупругих сред сформулированы уравнения установившихся продольных и изгибных колебаний для одномерного пороупругого тела с учетом начального состояния среды и неоднородности материальных характеристик. Полученные краевые задачи изучены при помощи численных методов. Проанализировано влияние наличия начального состояния на динамические характеристики среды.

Учет наличия предварительных напряжений в пороупругих телах является необходимым требованием при корректном описании динамического поведения различных пористых структур, таких грунт или костная ткань. Важной задачей является определение уровня таких начальных напряжений. В рамках задач пороупругости уже были предложены подходы к формулировке соответствующих интегральных уравнений [1] и реконструкции некоторых характеристик [2] при решении обратных задач. В представляемой статье предложен подход к формулировке уравнений движения пороупругого континуума с учетом предварительных напряжений. В случае, когда необходимо перейти от полной трехмерной модели к более простым одномерным или двумерным моделям движения сред основной трудностью является корректная формулировка граничных условий. В смешанных задачах, и в частности в задачах для пороупругих сред, этот момент является принципиальным. В таких случаях эффективным методом является вариационная формулировка задач. В рамках модели пороупругости Био коллективом авторов ранее был сформулирован аналог вариационного принципа Лагранжа [3], позволяющий корректно формулировать уравнения движения и естественные граничные условия путем введения соответствующих гипотез. Рассмотрим аналог функционала Лагранжа для пороупругой среды (1):

$$\begin{gathered} L=\int_V(-\frac{1}{2}C_{vjkl}u_{k,l}\varepsilon_{vj}+A_{vj}pu_{vj}+f_vu_v+\frac{1}{2}\rho\omega^2u_vu_v+ \\ +\frac{\phi^2}{R}\frac{p^2}{2}+\frac{1}{2i\omega}K_{vj}p_{,v}p_{,j}+\frac{1}{2i\omega}K_{vj}p_{,v}p_{,j}+\frac{1}{i\omega}fp)dV+\int_{S_\sigma}q_vu_vdS+\frac{1}{i\omega}\int_{S_h}hpdS \end{gathered} \tag{1}$$

где C_{vjkl} — компоненты тензора упругих констант, u_k — компоненты вектора смещений, ε_{kl} — компоненты тензора конечной деформации, A_{vj} — компоненты тензора модулей Био, p — поровое давление, f_v, f — компоненты массовых сил и источников давления, ρ — плотность среды, ω — частота установившихся колебаний, ϕ — пористость среды, K_{vj} — компоненты тензора проницаемости, q_v, h —

компоненты вектора нагрузок и поток жидкости на соответствующих границах S_σ, S_h.

Для перехода к одномерным уравнениям введем следующие гипотезы (2):

$$
\begin{aligned}
u_1(x_1,x_3) &= u_0(x_1) - x_3 w_0'(x_1) + u(x_1) - x_3 w'(x_1),\\
u_3(x_1,x_3) &= w_0(x_1) + w(x_1),\\
p(x_1,x_3) &= p_0(x_1) + p(x_1) + x_3 p_{01}(x_1) + p(x_1) + x_3 p_1(x_1);
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь функции с нулем при нижнем индексе отвечают за начальное состояние, а без — за текущее. Вариация функционала ведется только по функциям текущего состояния.

Введем обезразмеривающие параметры:

$$
\begin{aligned}
\{u,u_0,w,w_0\} &= \{U,U_0,W,W_0\}\cdot l,\\
\{p,p_0,p_1,p_{01}\} &= \{P,P_0,P_1,P_{01}\}\cdot P_*,\\
\gamma_1 = \frac{C_{11}}{C_{11}^{max}}, \gamma_5 = \frac{C_{55}}{C_{11}^{max}}, f_0 &= \frac{F}{F^{max}}, J_0 = \frac{J}{l^2 F^{max}},\\
\beta = \frac{aP_*}{C_{11}^{max}F^{max}}, \delta = \frac{\phi^2}{R}\frac{P_*^2}{C_{11}^{max}}, \mu &= \frac{k}{l}\sqrt{\frac{\rho}{C_{11}^{max}}}P_*, \eta = \frac{P_*}{C_{11}^{max}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где C_{11}^{max} — максимум соответствующего упругого модуля, l — длина стержня, F, F^{max} — площадь поперечного сечения и ее максимум соответственно, J, J^{max} — момент инерции сечения и его максимум соответственно, a — модуль Био, k — коэффициент проницаемости среды, P_* — характерное давление.

С учетом введенных гипотез и обезрамеривающих параметров в результате имеем систему дифференциальных уравнений (4) и граничные условия (5) для описания установившихся колебаний стержня, жестко закрепленного на левом конце и с заданной системой усилий на правом.

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1(f_0U'(1+U_0') + J_0W_0''W'' + \frac{1}{2}f_0W_0'W') - f_0\beta P)' + f_0\kappa^2 U = 0,\\
-(f_0\frac{\mu}{i\kappa}P')' + f_0\delta P + \beta f_0 U' = 0,\\
-(\gamma_1 J_0(W'' + U_0'W'' + W_0''U'))'' + (\frac{1}{2}f_0\gamma_1 W_0'U')' -\\
-(\gamma_5 f_0 W'W_0')' - (\beta J_0 P_1)'' - (\kappa^2 J_0 W')' + \kappa^2 f_0 W = 0,\\
-(\frac{\mu J_0}{i\kappa}\eta P_1')' + \delta J_0 P_1 - \beta J_0 W'' + \frac{\mu}{i\kappa}\eta f_0 P_1 = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_1(f_0U'(1+U_0') + J_0W_0''W'' + \frac{1}{2}f_0W_0'W') - f_0\beta P)_{x_1=1} = Q_1,\\
(\gamma_1 J_0(W'' + U_0'W'' + W_0''U'))' +\\
+\frac{1}{2}f_0\gamma_1 W_0'U' - \gamma_5 f_0 W'W_0')' - (\beta J_0 P_1)' - \kappa^2 J_0 W')_{x_1=1} = Q_3,\\
((-(\gamma_1 J_0(W'' + U_0'W'' + W_0''U'))' + (\beta J_0 P_1)')_{x_1=1} = 0,\\
(P_1')_{x_1=1} = 0, (U)_{x_1=1} = 0,\\
(W)_{x_1=1} = 0, (W')_{x_1=1} = 0, (P_1)_{x_1=1} = 0;
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Как можно видеть, учет начального состояния требует решения совместных уравнений относительно продольного и поперечного перемещения для текущего состояния. Для решения краевой задачи (4), (5) был использован метод стрельбы, для которого предварительно задача была сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Проанализируем влияние учета начального состояния на динамическое поведение среды. На рис 1 представлены поля продольного и изгибного смещения для трех задач: задачи без учета предварительного состояния, статической задачи, которая используется в качестве предварительного состояния и задача с учетом предварительно состояния.

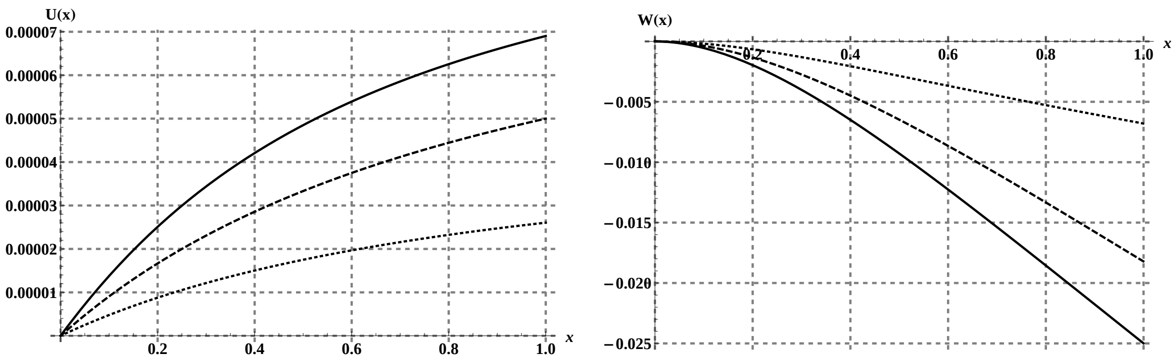


Рисунок 1 – *Распределение функций продольного смещения (слева) и прогиба (справа). Сплошная лининя — задача с учетом предварительного состояния, пунктир — статическое решение, точки — без учета предварительного состояния.*

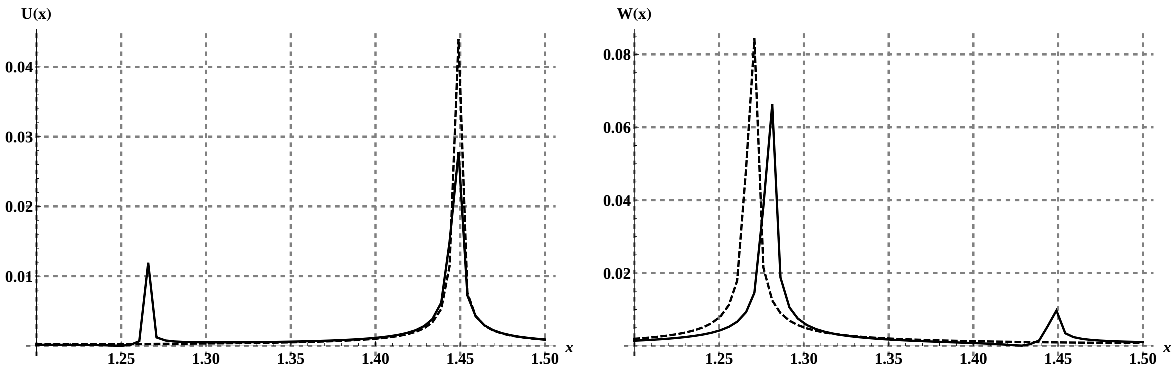


Рисунок 2 – *Амплитудно-частотные характеристики для функций продольного смещения (слева) и прогиба (справа). Сплошная линия — задача с учетом предварительного состояния, пунктир — без учета предварительного состояния.*

Как видно из рисунка 2, наличие и учет начального состояния для пороупругой среды вносит некоторые изменения в динамическое поведение. В силу того, что задача для текущего состояния — связанная по продольным и изгибным смещениям, резонансные частоты для соответствующих задач также меняются в обоих полях. Такое внимание ко вкладу начального состояния в амплитудно-частотные характеристики среды обусловлено тем, что данные характеристики являются основной информацией при решении обратных задач. Таким образом, чем более явное влияние тех или иных параметров на динамическое поведение среды, тем более точно может быть решена обратная задача по восстановлению соответствующих характеристик.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 213.01-12/2014-38, № 13-01-00196 А.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ватульян А. О., Ляпин А. А.* Динамическая теорема вазимности и фундаментальные решения для пороупругих сред // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2010. № 4. С. 14–20

[2] *Ватульян А. О., Ляпин А. А.* Об обратных коэффициентных задачах пороупругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 2. -С. 114–121.

[3] *Ватульян А. О., Ляпин А. А.* О вариационной постановке задач пороупругости в случае установившихся колебаний // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2011. № 4. С. 20–23.

Vatulyan A. O., Lyapin A. A. *Steady-state vibrations of poroelastic 1-D bodies taking into account initial state.* On the basis of analogue of Lagrange variational principle for poroelastic media the equations for steady longitudinal and bending vibrations are formulated taking into account the initial state of the environment and the heterogeneity of the material characteristics. The resulting boundary value problems are studied using numerical methods. The influence of the presence of the initial state on the dynamic characteristics of the medium are analyzed.

КОЛЕБАНИЯ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН

Ватульян А. О., Недин Р. Д.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Представлены постановки задач о колебаниях твердых тел при наличии предварительных напряжений, в частности, возникающих при разгрузке после образования пластических зон. Получены постановки краевых задач для предварительно напряженных стержней и пластин в рамках различных моделей. Проанализировано влияние упругих и упруго-пластических предварительных напряжений (ПН) на динамические характеристики тел. Сформулированы и решены численно с помощью итеративной регуляризации соответствующие нелинейные некорректные обратные задачи. На основе вычислительных экспериментов даны рекомендации по выбору типа зондирующей нагрузки и частотных диапазонов, при которых реконструкция ПН в рассматриваемых телах осуществляется с наилучшей точностью.

1. Общая постановка краевой задачи. Линеаризованная краевая задача о колебаниях предварительно напряженного тела имеет следующий общий вид:

$$T_{ij},_j + \rho b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad T_{ij} = \Gamma_{ij} + \sigma_{ij}, \quad \sigma^0_{ij},_j + \rho b^0_i = 0, \tag{1}$$

$$u^0_i|_{S^0_u} = f^0_i, \quad \sigma^0_{ij} n_j\big|_{S^0_u} = P^0_i, \quad u_i|_{S_u} = 0, \quad T_{ij} n_j\big|_{S_u} = P_i, \tag{2}$$

Здесь величины с верхним индексом «ноль» относятся к начальному состоянию, величины без индекса — компоненты соответствующих добавочных векторов и тензоров: массовой силы (b_i), поверхностной нагрузки (P_i), перемещений (u_i), напряжений Коши (σ_{ij}); T_{ij} — компоненты несимметричного добавочного первого тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа. Будем использовать модель ПН Треффтца в форме $\Gamma_{ij} = u_{i,m}\sigma^0_{mj}$ [1], позволяющую описывать неоднородные поля ПН различной природы, в частности, возникающие в телах при разгрузке после образования локализованных пластических зон.

2. Постановки краевых задач для стержней и пластин. Выведены постановки краевых задач об установившихся колебаниях различных тел в рамках плоской задачи. На основе гипотез типа Тимошенко $u_1 = \theta x_3 + \zeta, u_2 = 0, u_3 = w$ (где $\theta = \theta(x_1)$ — угол поворота главной оси стержня, обусловленный изгибом, $\zeta = \zeta(x_1)$ — продольное смещение, $w = w(x_1)$ — прогиб стержня) осуществлен вывод краевой задачи

$$\begin{gathered} -(\mathrm{M} + \Sigma^0_{33})\theta + \omega^2(\mathrm{P}_1\zeta + \mathrm{P}_2\theta) = 0, \\ \left[(E_1 + \Sigma^1_{11})\theta' + (E_0 + \Sigma^0_{11})\zeta' + \Sigma^0_{13}\theta\right]' + \omega^2(\mathrm{P}_0\zeta + \mathrm{P}_1\theta) = 0, \\ \left[(\mathrm{M} + \Sigma^0_{11})w' + \mathrm{M}\theta\right]' + \omega^2\mathrm{P}_0 w = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$w(0)=0,\ \theta(0)=0,\ \zeta(0)=0,$$
$$\left[(E_2+\Sigma^2_{11})\theta'+(E_1+\Sigma^1_{11})\zeta'+\Sigma^1_{13}\theta\right](l)=0,$$
$$\left[(E_1+\Sigma^1_{11})\theta'+(E_0+\Sigma^0_{11})\zeta'+\Sigma^0_{13}\theta\right](l)=P_1,$$
$$\left[(\mathrm{M}+\Sigma^0_{11})w'+\mathrm{M}\theta\right](l)=-P_2$$

для предварительно напряженного упругого изотропного консольно-закрепленного стержня, где введены следующие обозначения $\mathrm{M}=\int\limits_F \mu dF, E_0=\int\limits_F EdF, E_1=\int\limits_F Ex_3dF, E_2=\int\limits_F Ex_3^2dF,\ \Sigma^0_{11}=\int\limits_F \sigma^0_{11}dF, \Sigma^1_{11}=\int\limits_F \sigma^0_{11}x_3dF, \Sigma^2_{11}=\int\limits_F \sigma^0_{11}x_3^2dF,\ \Sigma^0_{13}=\int\limits_F \sigma^0_{13}dF, \Sigma^1_{13}=\int\limits_F \sigma^0_{13}x_3dF, \Sigma^0_{33}=\int\limits_F \sigma^0_{33}dF, \mathrm{P}_0=\int\limits_F \rho dF, \mathrm{P}_1=\int\limits_F \rho x_3dF, \mathrm{P}_2=\int\limits_F \rho x_3^2dF$, представляющие собой осредненные характеристики соответствующих функций, зависящие от осевой координаты x_1. При этом рассмотрен самый общий случай неоднородности всех параметров задачи, включая объемное распределение ПНС. В случае, когда рассматривается ПНС, при котором компонентами σ^0_{13} и σ^0_{33} можно пренебречь по сравнению с $\sigma^0_{11}=\sigma^0_{11}(x_1,x_3)$, а параметры материала стержня неоднородны только по x_1, система (3) примет вид

$$\left[(EJ+\Sigma^2_{11})\theta'+\Sigma^1_{11}\zeta'\right]'-\mu F(w'+\theta)+\rho J\omega^2\theta=0,$$
$$\left[\Sigma^1_{11}\theta'+(EF+\Sigma^0_{11})\zeta'\right]'+\rho F\omega^2\zeta=0,\quad \left[(\mu F+\Sigma^0_{11})w'+\mu F\theta\right]'+\rho F\omega^2 w=0,\quad (4)$$
$$w(0)=\theta(0)=\zeta(0)=0,\quad \left[(EJ+\Sigma^2_{11})\theta'+\Sigma^1_{11}\zeta'\right](l)=0$$
$$\left[\Sigma^1_{11}\theta'+(EF+\Sigma^0_{11})\zeta'\right](l)=P_1,\quad \left[(\mu F+\Sigma^0_{11})w'+\mu F\theta\right](l)=-P_2.$$

Заметим, что если поле ПНС таково, что $\Sigma^1_{11}=0$, эта система распадается на две независимые задачи: о планарных

$$\left[(EF+\Sigma^0_{11})\zeta'\right]'+\rho F\omega^2\zeta=0,$$
$$\zeta(0)=0,\quad \left[(EF+\Sigma^0_{11})\zeta'\right](l)=P_1 \quad (5)$$

и изгибных колебаниях консольно-закрепленного стержня

$$\left[(EJ+\Sigma^2_{11})\theta'\right]'-\mu F(w'+\theta)+\rho J\omega^2\theta=0,$$
$$\left[(\mu F+\Sigma^0_{11})w'+\mu F\theta\right]'+\rho F\omega^2 w=0, \quad (6)$$
$$w(0)=\theta(0)=0,\quad \left[(EJ+\Sigma^2_{11})\theta'\right](l)=0,\quad \left[(\mu F+\Sigma^0_{11})w'+\mu F\theta\right](l)=-P_2.$$

В качестве примера рассмотрена задача о упруго-пластическом чистом изгибе балки прямоугольного поперечного сечения в рамках модели Эйлера–Бернулли. В этом случае поле остаточных напряжений после разгрузки имеет вид кусочно-линейной функции по x_3 [2]

$$\sigma^0_{11}(x_3)=\begin{cases} -\dfrac{\sigma^0_A}{A}x_3,\ \text{при } x_3\in[-A,0],\\ -\sigma^0_A-\dfrac{\sigma^0_H-\sigma^0_A}{H-A}(x_3-A),\ \text{при } x_3\in[-H,-A],\\ \dfrac{\sigma^0_A}{A}x_3,\ \text{при } x_3\in[0,A],\\ \sigma^0_A+\dfrac{\sigma^0_H-\sigma^0_A}{H-A}(x_3-A),\ \text{при } x_3\in[A,H], \end{cases}$$

В этом случае единственная отличная от нуля (в силу нечетности по x_3) интегральная характеристика ПН примет вид $\Sigma_{11}^1 = b\left[(\sigma_H^0 - \sigma_A^0)(H+A) + A\sigma_A^0\right]$ (здесь $2H$ и b — размеры поперечного сечения балки; $\sigma_A^0 = \sigma_{11}^0(A)$, $\sigma_H^0 = \sigma_{11}^0(H)$; A — точка на оси x_3, разделяющая упругую и пластическую зоны). Краевая задача для шарнирно опертой балки при наличии описанного выше ПНС принимает вид

$$\left[(EF\zeta' - \Sigma_{11}^1 w'')\right]' + \rho F\omega^2\zeta = 0, \quad \left[(EJw'' - \Sigma_{11}^1\zeta')\right]'' - \rho F\omega^2 w = -q, \tag{7}$$

$$w|_{x1=0,l} = w''|_{x1=0,l} = 0, \ \zeta|_{x1=0,l} = 0.$$

Аналогично проведен вывод краевой задачи для предварительно напряженной тонкой изотропной пластины в рамках модели Тимошенко в общем случае неоднородности всех параметров задачи. Решение задачи (6) получено численно с помощью метода пристрелки; при этом задача предварительно сведена с помощью простых замен к канонической системе дифференциальных уравнений. С помощью МКЭ получено численное решение краевых задач для стержня и пластины, проведена оценка его точности на основе сравнения с классической балочной теорией Эйлера–Бернулли. В рамках постановок (6)-(9) исследовано влияния уровней ПН на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) точек области. Осуществлено сравнение моделей пластин Кирхгофа и Тимошенко на примере изгибных колебаний тонкой прямоугольной пластины, в которой имеется поле ПН, образованное в результате приложения предварительной нагрузки к границе пластины.

3. Обратные задачи об идентификации ПН. В постановке обратной задачи требуется определить компоненты тензора ПН в теле, если к свободной поверхности тела S_σ прикладывается периодическая зондирующая нагрузка, поле смещений $\underline{f}|_{S_\sigma} = \underline{u}|_{S_\sigma}$измеряется в заданном наборе точек для нескольких частот $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$ $(k = \overline{1,m})$. В рамках такой постановки обратная задачи нелинейна и некорректна; для ее решения применен метод итерационной регуляризации, в основе которого лежит интегральное уравнение

$$\int\limits_V \sigma_{mj}^{0(n)} u_{i,j}^{(n-1)} u_{i,m}^{(n-1)} dV + \int\limits_{S_\sigma} P_i\left(f_i - u_i^{(n-1)}\right) dS_\sigma = 0, \tag{8}$$

полученное в работе [3].Уравнение (8) позволяет строить итерационный процесс, на каждом шаге которого решается прямая задача для текущего приближения для ПН $\tilde{\sigma}_{ij}^0$ и вычисляется соответствующее поле смещений и деформаций, после чего из уравнения (8) находятся новые поправки к неизвестным функциям ПН $\sigma_{ij}^{0(n)}$, и в конце итерации текущее приближение уточняется с учетом вычисленной поправки: $\tilde{\sigma}_{ij}^0 := \tilde{\sigma}_{ij}^0 + \sigma_{ij}^{0(n)}$. Такой подход требует знания начального приближения $\sigma_{ij}^{0(0)}$, поиск которого можно осуществлять в каком-нибудь узком классе функций, например, в классе постоянных или линейных функций. Рассмотрены одномерные обратные задачи об идентификации одноосного ПНС в ленточных пластинах при планарных и изгибных колебаниях в рамках модели Кирхгофа и в стержне в рамках модели Тимошенко при изгибных колебаниях. Все обратные задачи сведены к итерационному процессу, исходя из (8): для задач о ленточной пластине при планарных и изгибных колебаниях в рамках модели Кирхгофа и о стержне в рамках модели Тимошенко уравнения взаимности сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма (ИУФ) 1-го рода

$$\int_{\Omega} \sigma_{11}^{0(n)} \left[\left(u_{1,1}^{(n-1)} \right)^2 + \left(u_{2,1}^{(n-1)} \right)^2 \right] d\Omega = \int_{l_\sigma} P_\alpha \left(u_\alpha^{(n-1)} - f_\alpha \right) dl_\sigma,$$

$$\int_S \sigma_{11}^{0(n)} \left[\frac{h^3}{12} \left(\left(w,_{11}^{(n-1)} \right)^2 + \left(w,_{12}^{(n-1)} \right)^2 \right) + h \left(w,_1^{(n-1)} \right)^2 \right] dS = \int_{l_\sigma} q(w^{(n-1)} - f) dS,$$

$$\int_0^l \sigma_{11}^{0(n)} \left(J[\theta^{(n-1)}]'^2 + F[w^{(n-1)}]'^2 \right) dx_1 = P \left(w^{(n-1)}(l) - f(l) \right), \omega \in [\omega_-, \omega_+],$$

соответственно. Отметим, что решение ИУФ 1-го рода — некорректная задача; для его решения использован метод регуляризации А.Н. Тихонова. Также рассмотрены двумерные обратные задачи об идентификации плоского ПНС в пластине при планарных и изгибных колебаниях в рамках модели Тимошенко. Соотношения взаимности при этом имеют общий вид [4]

$$\int_{\Omega} \left[\sigma_{11}^{0(n)} K_{11}^{(n-1)} + \sigma_{22}^{0(n)} K_{22}^{(n-1)} + \sigma_{12}^{0(n)} K_{12}^{(n-1)} \right] d\Omega = F^{(n-1)}, \tag{9}$$

где в случае планарных колебаний ядра и правая часть интегрального уравнения имеют вид $K_{11}^{(n-1)} = \left(u_{1,1}^{(n-1)} \right)^2 + \left(u_{2,1}^{(n-1)} \right)^2$, $K_{22}^{(n-1)} = \left(u_{1,2}^{(n-1)} \right)^2 + \left(u_{2,2}^{(n-1)} \right)^2$, $K_{12}^{(n-1)} = 2 \left(u_{1,1}^{(n-1)} u_{1,2}^{(n-1)} + u_{2,1}^{(n-1)} u_{2,2}^{(n-1)} \right)$, $F^{(n-1)} = \int_{l_\sigma} P_\alpha (u_\alpha^{(n-1)} - f_\alpha) dl_\sigma$, а в случае изгибных колебаний в рамках модели Тимошенко —

$$K_{11}^{(n-1)} = H \left[\left(\theta_{1,1}^{(n-1)} \right)^2 + \left(\theta_{2,1}^{(n-1)} \right)^2 \right] + h \left(w,_1^{(n-1)} \right)^2,$$

$$K_{22}^{(n-1)} = H \left[\left(\theta_{1,2}^{(n-1)} \right)^2 + \left(\theta_{2,2}^{(n-1)} \right)^2 \right] + h \left(w,_2^{(n-1)} \right)^2,$$

$$K_{12}^{(n-1)} = 2 \left[H \left(\theta_{1,1}^{(n-1)} \theta_{1,2}^{(n-1)} + \theta_{2,1}^{(n-1)} \theta_{2,2}^{(n-1)} \right) + h w,_1^{(n-1)} w,_2^{(n-1)} \right],$$

$$F^{(n-1)} = -\int_{l_\sigma} P(w^{(n-1)} - f) dl_\sigma.$$

Подход к реконструкции основан на предварительном разбиении области пластины на сетку суперэлементов $\{\Omega_k\}_{k=1}^N$, на каждом из которых задана функция Эри $\Phi_k|_{\Omega_k}(x_1, x_2)$, через которую выражены неизвестные поправки к ПН. Представляя функции Φ_k в виде линейной комбинации бигармонических полиномов, уравнение (9) сводится к плохо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения каждой функции $\Phi_k|_{\Omega_k}$; для ее решения использован метод регуляризации А.Н. Тихонова [5]. Результат реконструкции, найденный в классе кусочно-постоянных функций, сглаживался с помощью кубической сплайн-интерполяции. Во всех рассмотренных обратных задачах поиск начального приближения к неизвестной функции ПН осуществлялся в классе линейных функций на основе минимизации функционала невязки. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции ПНС. Максимальная относительная погрешность между точным и восстановленным законом не превосходит 8%. Для большинства рассмотренных примеров второй частотный диапазон оказался более благоприятным с точки зрения точности результаты восстановления, по сравнению с первым и третьим; при планарных колебаниях пластины нагружение касательной нагрузкой на свободных гранях пластины является более эффективным, чем нагружение нормальной нагрузкой.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки России №9.665.2014/к, при поддержке РФФИ (13-01-00196-а, 14-01-31393 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Trefftz. Zur theorie der stabilitat des elastischen gleichgewichts. ZAMM: Z. Angew. Math. Mech, 1933. V. 12, No 2, pp. 160–165.

[2] Ильюшин А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации. М., Ленинград: ОГИЗ, 1948, 376 с.

[3] R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates, Int. J. Solids Struct. No 50, 2013. pp. 2107-2114.

[4] R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates, in: H. Altenbach, V. Eremeyev (Eds.), Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011. pp. 165-182.

[5] R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate, ZAMM: Z. Angew. Math. Mech. V. 94, No 1-2, 2014. pp. 142-149.

Vatulyan A.O., Nedin R.D. *Oscillations of bodies in presence of heterogeneous residually stressed elastoplastic zones*. Statements of problems on vibration of solid bodies in the presence of residual stress, in particular, produced during unloading after formation of plastic zones. Refined statements of boundary problems for prestressed rods and plates in the framework of different models. An effect of elastic and elastoplastic residual stress on dynamical characteristics of bodies. Corresponding ill-posed nonlinear inverse problems are formulated and solved numerically by means of iterative regularization. Based on computational experiments, the recommendations on selection of efficient sounding loading type and frequency ranges from the viewpoint of identification accuracy are given.

НАКОПЛЕНИЕ ГАЗОГИДРАТНОЙ ПЕНЫ ВНУТРИ КУПОЛА ПОД ВОДОЙ

Гималтдинов И. К., Кильдибаева С. Р.
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

В работе рассматривается процесс миграции газовых пузырьков и их накопление в куполе. Миграция пузырьков сопровождается образованием гидратной корки. В работе принято, что интенсивность образования гидратного пузырька лимитируется лишь интенсивностью отвода тепла. Определены профили температуры воды внутри купола, зависимость плотности газового пузырька от вертикальной координаты.

Газовые гидраты рассматриваются в качестве перспективного источника добычи углеводородов, что связано с нетронутыми запасами и компактностью: в 1 м^3 газогидрата содержится около 160 м^3 газа и 0.8 м^3 воды [1]. Также известно, что в Мировом океане происходят непрерывные выбросы метана [2]. Исследования, проведенные в Охотском море на Сахалинском склоне, показали, что выход метановых пузырьков со дна моря сопровождается образованием гидрата на его поверхности. Существует два взгляда на кинетику образования гидрата на поверхности пузырька при всплытии со дна водоема. При первом подходе исследователи полагают, что кинетика гидратообразования лимитируется теплоотводом, при втором — интенсивностью поступления газа через гидратную пленку, образовавшуюся на поверхности пузырька, преодолевая диффузионное распределение.

Примем, что на дне водоема существует источник истечения пузырьков метана с известным массовым расходом M_g, отнесенным на единицу площади. Ось z направим вертикально вверх. Пусть все основные теплофизические параметры течения системы, состоящей из частиц газа и воды, однородны по сечению и способствуют процессу гидратообразования. Непосредственно над местом истечения пузырьков устанавливается купол для сбора пузырьков газа, схема которого представлена на рисунке 1. Пусть n — число пузырьков в единице объёма, а υ_{gh} — скорость, с которой поднимаются пузырьки, при этом дроблением и слипанием будем пренебрегать. Так как в куполе происходит противоточное движение, т. е. пузырьки движутся вверх, а вода из-за «вытеснения пузырьками» — вниз, тогда для скорости υ_{gh} можем записать $\upsilon_{gh} = w - \upsilon_l$, где w — скорость миграции газогидратного пузырька относительно жидкости, υ_l — скорость воды.

Тогда уравнение сохранения числа пузырьков запишется в виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n\upsilon_{gh}}{\partial z} = 0.$$

Запишем уравнения сохранения масс для пузырьков и воды [3]:

$$\frac{\partial \alpha\rho^0_{gh}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha\rho^0_{gh}\upsilon_{gh}}{\partial z} = nJ_h,$$

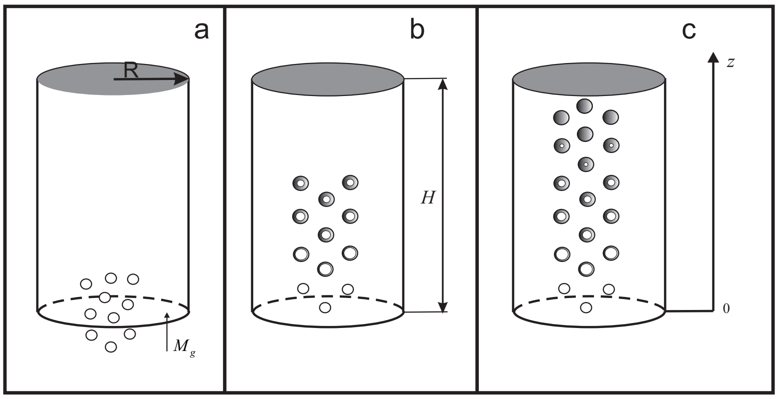


Рисунок 1 – Схема купола

$$\frac{\partial(1-\alpha)\rho_l^0}{\partial t}+\frac{\partial(1-\alpha)\rho_l^0\upsilon_l}{\partial z}=-nJ_l,$$

где J_h и J_l — интенсивности образования гидрата и расхода воды, идущей на его образование; α — объемное содержание пузырьков; ρ_{gh}^0 — средняя плотность газогидратного пузырька, определяемая как отношение массы пузырька на его объем.

Гидрат является клатратным соединением с массовым содержанием газа G, поэтому интенсивность образования гидрата и расхода воды связаны как:

$$J_l=(1-G)J_h.$$

Приведенные уравнения необходимо дополнить следующим кинематическим соотношением:

$$\alpha=\frac{4}{3}\pi a^3 n.$$

где a — радиус газогидратного пузырька.

Уравнения импульса для газогидратных пузырьков и для жидкости в безынерционном приближении соответственно могут быть записаны в виде [3]:

$$-\alpha\frac{\partial p}{\partial z}-nf-\alpha\rho_{gh}^0 g=0,$$

$$-(1-\alpha)\frac{\partial p}{\partial z}+nf-(1-\alpha)\rho_l^0 g=0,$$

$$\upsilon_{gh}=w-\upsilon_l,$$

$$f=C_w\frac{\rho_l^0 w^2\pi a^2}{2},\ C_w=C_w(\mathrm{Re}),\ Re=\frac{2a\rho_l^0 w}{\mu_l},$$

Запишем уравнение изменения температуры жидкости за счет температурного следа пузырьков, возникающего вследствие гидратообразования:

$$\rho_l^0 c_l(1-\alpha)\left(\frac{\partial T_l}{\partial t}-\upsilon_l\frac{\partial T_l}{\partial t}\right)=nQ,\quad Q=4\pi a^2 q,$$

где T_l и c_l — температура и теплоемкость воды; Q и q — интенсивности источника тепла из-за гидратообразования, отнесенные на единицу объема и однородного пузырькового включения. Здесь и далее нижние индексы g, l, h относятся к параметрам газа, воды и гидрата.

Жидкость будем считать несжимаемой, а газ калорически совершенным:

$$\rho_l^0 = const, \;\; p_g = \rho_g^0 R_g T.$$

Полагаем, что газогидратные пузырьки состоят из газового ядра радиусом и гидратной «корки». Тогда для средней плотности ρ_{gh}^0:

$$\frac{4}{3}\pi a_g^3 \rho_g^0 + \frac{4}{3}\pi (a^3 - a_g^3) G \rho_h^0 = \frac{4}{3}\pi a_{g0}^3 \rho_{g0}^0. \qquad (1)$$

Плотность гидрата выразим из (1) следующим образом:

$$\rho_{gh}^0 = \frac{a_g^3 \rho_g^0 + (a^3 - a_g^3)\rho_h^0}{a^3}.$$

В газогидратном пузырьке газ содержится как в свободном состоянии, так и в составе гидрата с массовым содержанием G. Запишем условие постоянства общей массы газа в пузырьке как:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{gh}^0 = \frac{4}{3}\pi a_g^3 \rho_g^0 + \frac{4}{3}\pi (a^3 - a_g^3)\rho_{g0}^0,$$

где a_{g0}, ρ_{g0}^0 — искомые значения радиуса и плотности газа в пузырьке.

Интенсивность теплового потока между жидкостью и поверхностью газового пузырька выразим следующим образом[3, 4]:

$$q = \beta (T_a - T_l), \;\; \beta = \frac{\lambda_l \mathrm{Nu}}{2a}, \;\; \mathrm{Nu} = 2 + 0.46 \mathrm{Re}^{0.55} \mathrm{Pr}^{0.3}, \;\; \mathrm{Pr} = \frac{\mu_l c_l}{\lambda_l}, \;\; \mathrm{Re} = \frac{2a\rho_l^0 w}{\mu_l}.$$

В рассмотренной модели было принято, что интенсивность образования гидратного пузырька лимитируется лишь интенсивностью отвода тепла. В результате расчетов были получены зависимости температуры воды внутри купола и плотности газовых пузырьков от вертикальной координаты. Определена высота, на которой газовый пузырек полностью превращается в гидратную частицу.

На рисунке 2 представлена зависимость плотности пузырька газа, частично покрытого гидратной коркой. На рисунке 3 приведено распределение температуры воды внутри купола. Оба графика соответствуют моменту времени, когда пузырьки газа достигли высоты 14 м.

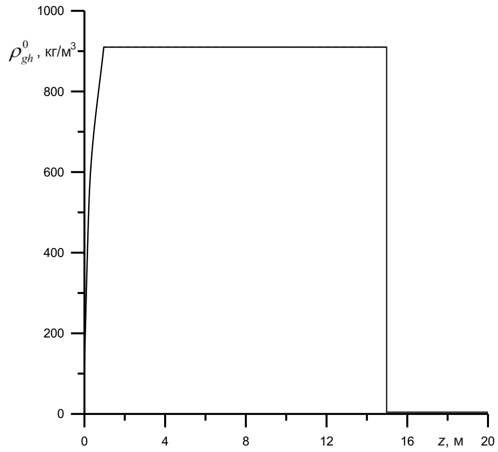


Рисунок 2

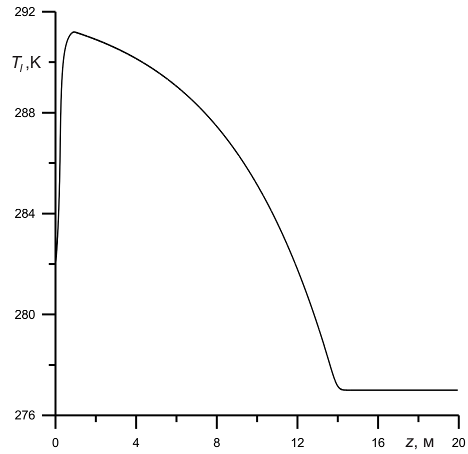


Рисунок 3

Работа поддержана грантом СФ БашГУ, договор № В14-6.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Макогон Ю. Ф.* Гидраты природных газов. Москва: Недра. 1974. 285 с.

[2] *Sautera E. J. et al.* Methane discharge from a deep-sea submarine mud volcano into the upper water column by gas hydrate-coated methane bubbles // Earth and Planetary Science Letters. 2006. № 243(3–4). P. 354–365.

[3] *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. Москва: Наука, 1987. 464 с.

[4] *Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А.* Химическая гидродинамика: Справочное пособие. Москва: Квантум. 1996. 336 с.

Gimaltdinov I. K., Kildibaeva S. R. *Gas hydrate accumulation of foam inside the dome under water*. The paper deals with the migration of gas bubbles and their accumulation in the dome. Migration of bubbles accompanied by the formation of hydrated crust. In this paper it is assumed that the rate of formation of hydrated bubble is limited only by the intensity of heat removal. Defined profiles of water temperature inside the dome, the dependence of the density of the gas bubble on the vertical coordinate.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ СЛОЕ МЕЖДУ РАЗНОТИПНЫМИ АНИЗОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Глухов И. А., Сторожев В. И.
Донецкий национальный университет

В аналитической форме равенств нулю функциональных определителей восьмого порядка получены трансцендентные дисперсионные соотношения, описывающие закономерности распространения локализованных продольно-сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропного слоя, заключенного между двумя идеально контактирующими с ним трансверсально-изотропными полупространствами в случае различия физико-механическими свойств для всех трех компонент рассматриваемого волновода. Приведены отдельные результаты качественного анализа полученных соотношений.

Вопросы о спектрах, кинематических и энергетических свойствах локализованных волн деформаций в упругом слое между упругими полупространствами, представляющие интерес в связи с дальнейшим совершенствованием ряда геоакустических технологий и методов ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых, на данный момент частично исследованы лишь в рамках моделей, не учитывающих различные варианты анизотропии физико-механических свойств всех компонентов волноводов и различий в свойствах вмещающих анизотропных полупространств [1–4]. В данном контексте, целью настоящей работы является получение и анализ дисперсионных соотношений для локализованных волн продольно-сдвигового типа в трансверсально-изотропном упругом слое между разнотипными трансверсально-изотропными анизотропными полупространствами.

Рассматривается волноводная структура, занимающая область

$$V_\Sigma = V^{(+)} \cup V^{(0)} \cup V^{(-)},$$

$$V^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h/2\},\ V^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h/2\},$$
$$V^{(0)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, -h/2 \leqslant x_3 \leqslant h/2\}$$

в отнесенных к нормирующему параметру R_* безразмерных прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$. Все три ее компоненты составлены из различных трансверсально-изотропных материалов с коллинеарными Ox_3 осями упругой симметрии и физико-механическми характеристиками в виде отнесенных к c_* модулей упругости $c_{ij}^{(+)}$, $c_{ij}^{(-)}$, $c_{ij}^{(0)}$ и плотностей $\rho^{(+)}$, $\rho^{(-)}$, $\rho^{(0)}$. Анализу подлежат процессы распространения в данной структуре гармонических упругих волн $P-SV$ типа вдоль направления в плоскости слоя V, в качестве которого без ограничения общности может быть выбрано координатное направление Ox_1. Рассматриваемая модель описывается краевой задачей, включающей системы уравнений волнового деформирования для всех компонент волновода

$$L_{j1}^{(\xi)} u_1^{(\xi)}(x_1, x_3, t) + L_{j3}^{(\xi)} u_3^{(\xi)}(x_1, x_3, t) = 0 \quad (j = \overline{1,2}), \tag{1}$$

в которых

$$L_{11}^{(\xi)}(\partial_1,\partial_3,\partial_t)=c_{11}^{(\xi)}\partial_1^2+c_{44}^{(\xi)}\partial_3^2+\rho^{(\xi)}\partial_t^2,$$
$$L_{23}^{(\xi)}(\partial_1,\partial_3,\partial_t)=c_{44}^{(\xi)}\partial_1^2+c_{33}^{(\xi)}\partial_3^2+\rho^{(\xi)}\partial_t^2,$$
$$L_{13}^{(\xi)}(\partial_1,\partial_3,\partial_t)=L_{21}^{(\xi)}(\partial_1,\partial_3,\partial_t)=(c_{13}^{(\xi)}+c_{44}^{(\xi)})\partial_1\partial_3,\ \partial_s=\partial/\partial x_s\ \ (s=1;3),\ \partial_t=\partial/t;$$
$$\xi\in\{+,-,0\};$$

$u_1^{(\xi)}(x_1,x_3,t)$, $u_3^{(\xi)}(x_1,x_3,t)$ — безразмерные компоненты отнесенного к R_* комплексного вектора динамических перемещений, а также краевые условия идеального механического контакта составляющих волновода

$$u_s^{(-)}(x_1,-h/2,t)=u_s^{(0)}(x_1,-h/2,t), \tag{2}$$
$$\sigma_{3s}^{(-)}(x_1,-h/2,t)=\sigma_{3s}^{(0)}(x_1,-h/2,t),$$
$$u_s^{(+)}(x_1,h/2,t)=u_s^{(0)}(x_1,h/2,t),$$
$$\sigma_{3s}^{(+)}(x_1,h/2,t)=\sigma_{3s}^{(0)}(x_1,h/2,t)$$
$$(s=1;3),$$

где $\sigma_{ij}^{(\xi)}$ — отнесенные к c_* нормированные компоненты тензора динамических напряжений.

В процессе построения дисперсионных соотношений для компонент вектора динамических перемещений вводятся исходные представления

$$u_1^{(+)}(x_1,x_3,t)=(A_{11}^{(+)}\exp(-\alpha_1^{(+)}x_3)+A_{21}^{(+)}\exp(-\alpha_2^{(+)}x_3))E(x_1,t), \tag{3}$$
$$u_3^{(+)}(x_1,x_3,t)=(A_{13}^{(+)}\exp(-\alpha_1^{(+)}x_3)+A_{23}^{(+)}\exp(-\alpha_2^{(+)}x_3))E(x_1,t);$$
$$u_1^{(0)}(x_1,x_3,t)=(A_{11c}^{(0)}\cosh(\alpha_1^{(0)}x_3)+A_{21c}^{(0)}\cosh(\alpha_2^{(0)}x_3)+$$
$$+A_{11s}^{(0)}\sinh(\alpha_1^{(0)}x_3)+A_{21s}^{(0)}\sinh(\alpha_2^{(0)}x_3))E(x_1,t),$$
$$u_3^{(0)}(x_1,x_3,t)=(A_{13c}^{(0)}\sinh(\alpha_1^{(0)}x_3)+A_{23c}^{(0)}\sinh(\alpha_2^{(0)}x_3)+$$
$$+A_{13s}^{(0)}\cosh(\alpha_1^{(0)}x_3)+A_{23s}^{(0)}\cosh(\alpha_2^{(0)}x_3))E(x_1,t);$$
$$u_1^{(-)}(x_1,x_3,t)=(A_{11}^{(-)}\exp(\alpha_1^{(-)}x_3)+A_{21}^{(-)}\exp(\alpha_2^{(-)}x_3))E(x_1,t),$$
$$u_3^{(-)}(x_1,x_3,t)=(A_{13}^{(-)}\exp(\alpha_1^{(-)}x_3)+A_{23}^{(-)}\exp(\alpha_2^{(-)}x_3))E(x_1,t);$$
$$E(x_1,t)=\exp[-i(\omega t-kx_1)],$$

в которых

$$\alpha_j^{(\xi)}=(-b^{(\xi)}+(-1)^j((b^{(\xi)})^2-4a^{(\xi)}c^{(\xi)})^{1/2})/(2a^{(\xi)}), \tag{4}$$
$$a^{(\xi)}=c_{33}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)},$$
$$b^{(\xi)}=(c_{33}^{(\xi)}+c_{44}^{(\xi)})(\Omega^{(\xi)})^2+((c_{13}^{(\xi)})^2-2c_{13}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)}-c_{11}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)})k^2,$$
$$c^{(\xi)}=((\Omega^{(\xi)})^2-c_{11}^{(\xi)}k^2)((\Omega^{(\xi)})^2-c_{44}^{(\xi)}k^2),$$
$$(\Omega^{(\xi)})^2=\rho^{(\xi)}\omega^2R_*^2/c_*.$$

Подстановка этих представлений в соответствующие дифференциальные уравнения приводит к соотношениям

$$A_{13}^{(+)}=\delta_{13}^{(+)}A_{11}^{(+)},\ \delta_{13}^{(+)}=[((\Omega^{(+)})^2-c_{11}^{(+)}k^2-c_{44}^{(+)}(\alpha_1^{(+)})^2)/(ik(c_{13}^{(+)}+c_{44}^{(+)})\alpha_1^{(+)}\delta^{(+)}],$$

$$A_{23}^{(+)}=\delta_{23}^{(+)}A_{21}^{(+)},\ \delta_{23}^{(+)}=[(ik(c_{13}^{(+)}+c_{44}^{(+)})\alpha_1^{(+)}\delta^{(+)}/((\Omega^{(+)})^2-c_{44}^{(+)}k^2-c_{33}^{(+)}(\alpha_1^{(+)})^2)],$$

$$A_{13}^{(-)}=\delta_{13}^{(-)}A_{11}^{(-)},\ \delta_{13}^{(-)}=[((\Omega^{(-)})^2-c_{11}^{(-)}k^2-c_{44}^{(-)}(\alpha_1^{(-)})^2)/(ik(c_{13}^{(-)}+c_{44}^{(-)})\alpha_1^{(-)}\delta^{(-)}],$$

$$A_{23}^{(-)}=\delta_{23}^{(-)}A_{21}^{(-)},\ \delta_{23}^{(-)}=[(ik(c_{13}^{(-)}+c_{44}^{(-)})\alpha_1^{(-)}\delta^{(-)}/((\Omega^{(-)})^2-c_{44}^{(-)}k^2-c_{33}^{(-)}(\alpha_1^{(-)})^2)],$$

$$A_{13c}^{(0)}=\delta_{13c}^{(0)}A_{11c}^{(0)},\ \delta_{13c}^{(0)}=[((\Omega^{(0)})^2-c_{11}^{(0)}k^2-c_{44}^{(0)}(\alpha_1^{(0)})^2)/(ik(c_{13}^{(0)}+c_{44}^{(0)})\alpha_1^{(0)}\delta^{(0c)}],$$

$$A_{23c}^{(0)}=\delta_{23c}^{(0)}A_{21c}^{(0)},\ \delta_{23c}^{(0)}=[(ik(c_{13}^{(0)}+c_{44}^{(0)})\alpha_1^{(0)}\delta^{(0c)}/((\Omega^{(0)})^2-c_{44}^{(0)}k^2-c_{33}^{(0)}(\alpha_1^{(0)})^2)],$$

$$A_{13s}^{(0)}=\delta_{13s}^{(0)}A_{11s}^{(0)},\ \delta_{13s}^{(0)}=[((\Omega^{(0)})^2-c_{11}^{(0)}k^2-c_{44}^{(0)}(\alpha_1^{(0)})^2)/(ik(c_{13}^{(0)}+c_{44}^{(0)})\alpha_1^{(0)}\delta^{(0s)}],$$

$$A_{23s}^{(0)}=\delta_{23s}^{(0)}A_{21s}^{(0)},\ \delta_{23s}^{(0)}=[(ik(c_{13}^{(0)}+c_{44}^{(0)})\alpha_1^{(0)}\delta^{(0s)}/((\Omega^{(0)})^2-c_{44}^{(0)}k^2-c_{33}^{(0)}(\alpha_1^{(0)})^2)].$$

Последующее использование представлений (3) при записи краевых условий (2) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений с матрицей $\|d_{n,m}(\omega,k)\|$ относительно остающихся неопределенных постоянных коэффициентов в представлениях (3), в которой ненулевые элементы имеют вид

$$d_{1,m}=e_m^{(-)},d_{1,m+2}=-c_m,d_{1,m+4}=s_m,$$

$$d_{2,m}=\delta_{m3}^{(-)}e_m^{(-)},d_{2,m+2}=\delta_{m3c}^{(0)}s_m,d_{2,m+4}=-\delta_{m3s}^{(0)}c_m,$$

$$d_{3,m}=c_{44}^{(-)}(ik\delta_{m3}^{(-)}+\alpha_m^{(-)})e_m^{(-)},d_{3,m+2}=-c_{44}^{(0)}(ik\delta_{m3c}^{(0)}+\alpha_m^{(0)})s_m,$$

$$d_{3,m+4}=-c_{44}^{(0)}(ik\delta_{m3s}^{(0)}+\alpha_m^{(0)})c_m,d_{4,m}=(c_{13}^{(-)}ik+c_{33}^{(-)}\alpha_m^{(-)}\delta_{m3}^{(-)})e_m^{(-)},$$

$$d_{4,m+2}=-(c_{13}^{(0)}ik+c_{33}^{(0)}\delta_{m3c}^{(0)}\alpha_m^{(0)})c_m,d_{4,m+4}=-(c_{13}^{(0)}ik+c_{33}^{(0)}\delta_{m3s}^{(0)}\alpha_m^{(0)})s_m,$$

$$d_{5,m+2}=-c_m,d_{5,m+4}=-s_m,d_{5,m+6}=e_m^{(+)},$$

$$d_{6,m+2}=-\delta_{m3c}^{(0)}s_m,d_{6,m+4}=-\delta_{m3s}^{(0)}c_m,d_{6,m+6}=\delta_{m3}^{(+)}e_m^{(+)},$$

$$d_{7,m+2}=c_{44}^{(0)}(ik\delta_{m3c}^{(0)}+\alpha_m^{(0)})s_m,d_{7,m+4}=-c_{44}^{(0)}(ik\delta_{m3s}^{(0)}+\alpha_m^{(0)})c_m,$$

$$d_{7,m+6}=c_{44}^{(+)}(ik\delta_{m3}^{(+)}-\alpha_m^{(+)})e_m^{(+)},d_{8,m+2}=-(c_{13}^{(0)}ik+c_{33}^{(0)}\delta_{m3c}^{(0)}\alpha_m^{(0)})c_m,$$

$$d_{8,m+4}=(c_{13}^{(0)}ik+c_{33}^{(0)}\delta_{m3s}^{(0)}\alpha_m^{(0)})s_m,d_{8,m+6}=(c_{13}^{(+)}ik-c_{33}^{(+)}\alpha_m^{(+)}\delta_{m3}^{(+)})e_m^{(+)}$$

$$(m=\overline{1,2}).$$

Равенство нулю ее функционального определителя представляет собой искомое дисперсионное соотношение.

Для описания областей изменения параметров частоты и волнового числа, в которых возможно существование локализованных бегущих волн при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств, применительно к рассматриваемому случаю проведено качественное исследование распределений корней характеристических полиномов для систем дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитудных функций волновых перемещений в слое и полупространствах. Требуемое свойство заключается в том, что значения $\alpha_j^{(+)}$ и $\alpha_j^{(-)}$ должны быть действительными.

В общем случае анализируемые характеристические полиномы могут быть записаны в виде

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + b^{(\xi)}/a^{(\xi)}(\alpha^{(\xi)})^2 + c^{(\xi)}/a^{(\xi)} = 0,$$

где $a^{(\xi)}$, $b^{(\xi)}$, $c^{(\xi)}$ определены соотношениями (4). Соответственно этим представлениям область изменения (ω, k) разбивается зависимостями, следующими из условия $c^{(\xi)}(\omega, k) = 0$. Из представлений для $c^{(\xi)}(\omega, k)$ следует, что эти зависимости имеют вид $\omega = \left(c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)}\right)^{1/2} R_* k$ и $\omega = \left(c_{44}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)}\right)^{1/2} R_* k$, а области постоянства типа корней характеристических полиномов представляют собой секторы трех типов — секторы типа 1, в которых $\omega > \left(c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)}\right)^{1/2} R_* k$; секторы типа 2, в которых $\left(c_{44}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)}\right)^{1/2} R_* k < \omega < \left(c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)}\right)^{1/2} R_* k$; секторы типа 3, в которых $\omega < \left(c_{11}^{(\xi)} c_*/\rho^{(\xi)}\right)^{1/2} R_* k$.

Для оценки типа корней в секторах первого типа может быть рассмотрен асимптотический вариант характеристического полинома при $\omega >> k$

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + \rho^{(\xi)} R_*^2 c_*^{-1} \omega^2 \left(\left(c_{33}^{(\xi)}\right)^{-1} + \left(c_{44}^{(\xi)}\right)^{-1}\right)(\alpha^{(\xi)})^2 + \left(\rho^{(\xi)} R_*^2 c_*^{-1} \omega^2\right)^2 \left(c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}\right)^{-1} = 0,$$

из анализа которого следует, что в данных областях корни характеристических полиномов имеют мнимые значения.

Тип корней в секторах третьего рода может быть установлен путем анализа асимптотического варианта характеристического полинома при $\omega << k$

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + k^2\left(\left(c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)}\right)^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - \left(c_{44}^{(\xi)}\right)^2\right)\left(c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}\right)^{-1}(\alpha^{(\xi)})^2 + k^4 c_{11}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)} = 0.$$

Он связан со знакоопределенностью комбинаций упругих постоянных

$$R_1(c_{ij}^{(\xi)}) = \left(\left(c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)}\right)^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - \left(c_{44}^{(\xi)}\right)^2\right)/\left(c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}\right))^2 - 4c_{11}^{(\xi)}/c_{33}^{(\xi)},$$

$$R_2^{(\pm)}(c_{ij}^{(\xi)}) = -\left(\left(c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)}\right)^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - \left(c_{44}^{(\xi)}\right)^2\right)/\left(c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}\right)) \pm \left(R_1(c_{ij}^{(\xi)})\right)^{1/2}.$$

В частности, при условиях

$$R_1(c_{ij}^{(\xi)}) \geqslant 0, R_2^{(+)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0, R_2^{(-)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0$$

характеристические полиномы в секторах третьего типа имеют действительные корни, что является необходимым условием для существования анализируемых локализованных волн.

Представленный качественный анализ позволяет априори выделить области изменения (ω, k), в которых потенциально существуют ветви дисперсионных спектров исследуемых локализованных волн. Эти области представляют собой пересечения секторов существования четверок действительных корней характеристических полиномов для обоих вмещающих слой анизотропных полупространств.

В итоге исследований построена также предельная асимптотическая форма дисперсионных соотношений для симметричных и антисимметричных локализованных волн в высокочастотном коротковолновом диапазоне. Осуществлены расчеты ряда низших ветвей спектра локализованных волн в нескольких типах рассматриваемых структур с компонентами, обладающими свойствами поперечно-анизотропных геоматериалов. Сделан ряд обобщающих выводов относительно механизмов трансформации спектров бегущих локализованных волн при разных схемах монотонного варьирования физико-механических параметров слоя и вмещающих полупространств.

Рассмотрены вопросы применимости полученных результатов в технологиях геоакустического зондирования пластов полезных ископаемых.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Velasco V. R., Djafari-Rouhani B.* Dynamics of systems with two interfaces // Phys. Rev. 1982. Vol B 26., P. 1929–1941.

[2] *Wendler L., Grigoryan V. G.* Acoustic interface waves in sandwich structures // Surface Science 1988. 206, P. 203–224.

[3] *Григорян В. Г., Вендлер Л.* Локализованные акустические волны в слоистых структурах // Физика твердого тела. 1991. Т. 33, № 7. Р. 2120–2128.

[4] *Datta S. K.* On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol 108, P. 2005–2011.

Glukhov I. O., Storozhev V. I. *Propagation of localized waves in anisotropic elastic layer between the anisotropic half-spaces with different properties.* In the analytical form of the functional determinant of the eighth order are received transcendental dispersion relations describing the patterns of propagation of localized longitudinal-shear elastic waves along a transversely isotropic layer between two transversely isotropic half-spaces in the case of differences of physical and mechanical properties for all three components of considered waveguide. Some qualitative results of analysis of obtained relations are presented.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ИСТОЧНИКА МЕЖДУ ВОЛНАМИ ЛЭМБА

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А., Фоменко С. И.

Институт математики, механики и информатики,
Кубанский государственный университет, Краснодар

Исследуются энергетические характеристики волн Лэмба, возбуждаемых в упругой изотропной полосе вертикальными и касательными поверхностными нагрузками. Приводятся частотные зависимости волновых чисел и осредненной за период колебаний энергии каждой из возбуждаемых мод. Анализируется распределение суммарной энергии источника между модами в зависимости от типа источника и частоты.

1. Введение. Настоящая статья является продолжением работ [1, 2], в которых исследовались энергетические характеристики установившихся упругих колебаний, возбуждаемых поверхностными нагрузками в многослойных и функционально-градиентных волноводах. Рассматривались такие характеристики как осредненный по времени поток энергии через заданную поверхность, вектор плотности и линии тока энергии. В рамках данного подхода были выявлены и изучены такие явления как вихревые структуры между слоями и/или неоднородностями, обратные потоки энергии, экранирование и локализация энергии в упругих волноводах с дефектами и др. [3–6]. Целью данной работы является анализ мощности волн Лэмба и их вклад в общую энергию упругих волн, возбуждаемых эталонными поверхностными источниками. Рассматриваются три вида источника: точечные нормальная и тангенциальная нагрузки, а также пара точечных касательных нагрузок, моделирующих действие полосового пьезоактуатора.

2. Постановка и решение задачи.

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания упругой изотропной полосы $D = \{(x,z) | -\infty < x < +\infty; -h < z < 0\}$ со свободными границами, вызванные поверхностной нагрузкой q, приложенной в области $\Omega = [-a; a]$, $z = 0$. Смещение точек упругой полосы описываются вектором перемещений $\mathbf{u}(x,z)e^{-i\omega t}$, $\mathbf{u} = \{u, w\}$, ω — круговая частота колебаний, t — время. Задача рассматривается в линейной постановке, поэтому множитель $e^{-i\omega t}$ далее опущен. Комплексная амплитуда $\mathbf{u}$ удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\mathcal{L}\mathbf{u} \equiv (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\triangle\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0, \quad (x,z) \in D,$$

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega, \end{cases} \quad \boldsymbol{\tau}|_{z=-h} = 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}$ — линейный дифференциальный оператор уравнений Ламе, λ, μ — коэффициенты Ламе, ρ — плотность, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{xz}, \sigma_z\}$ — вектор напряжений на горизонтальной поверхности, $\mathbf{q}(x)$ — заданные поверхностные напряжения.

Решение краевой задачи (1) имеет вид:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} K(\alpha, z)\mathbf{Q}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad \mathbf{Q}(\alpha) = \mathcal{F}_x[q] = \int\limits_{-a}^{a}\mathbf{q}(x)e^{i\alpha x}dx. \tag{2}$$

Матрица $K(\alpha, z) = F_x[k]$ — Фурье-символ матрицы Грина $k(x, z)$. Столбцы матрицы $k = (\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2})$ являются решениями краевых задач соответственно для точечных тангенциальных и нормальных нагрузок, приложенных к поверхности полосы в точке $(0, 0)$. Подробный вывод и конкретный вид элементов матрицы $K(\alpha, z)$ см., например, в [7].

Для подынтегральной функции в представлении решения краевой задачи (2) справедлива лемма Жордана, вследствие чего при $|x| > a$:

$$\mathbf{u} = \sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{a^{\pm}}_m(z)e^{\pm i\zeta_m x}.$$

Здесь знак $(+)$ выбирается, если $x > a$, а при $x < -a$ используется $(-)$. Собственная форма $\mathbf{a}_m^{\pm}(z)$ в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\mathbf{a}_m^{\pm}(z) = \mp i \operatorname*{Res}_{\alpha=\mp\zeta_m}[K(\alpha, z)\mathbf{Q}(\alpha)].$$

Таким образом решение (2) представимо в виде суммы мод с амплитудами $\mathbf{a}_m^{\pm}(z)$ и волновыми числами ζ_m. Вещественным полюсам ζ_m соответствуют незатухающие бегущие волны Лэмба, а комплексным волновыми числами ζ_m — моды, экспоненциально затухающие с удалением от источника вдоль оси Ox. Вследствие затухания последние не переносят энергию от источника на бесконечность и поэтому далее не рассматриваются.

2. Распределение энергии.

Осредненный за период поток энергии гармонических колебаний через некоторую поверхность S определяется интегралом от нормальной составляющей вектора плотности энергии $\mathbf{e} = \{e_x, e_z\}$ (вектора Умова–Пойнтинга) по данной поверхности:

$$E = \int\limits_{S} e_n ds,$$

здесь $e_n = \mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = -\frac{\omega}{2}\mathrm{Im}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_n)$, $\mathbf{n}$ — нормаль к S в текущей точки интегрирования; $\boldsymbol{\tau}_n = \mathrm{T}_n\mathbf{u}$ — вектор напряжений в этой точке.

Поток энергии E_0, поступающей от поверхностного источника в среду через область приложения нагрузки, определяется интегралом:

$$E_0 = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\int\limits_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{q})dx = \frac{\omega}{4\pi}\mathrm{Im}\int\limits_{\Gamma} K(\alpha, 0)\mathbf{Q}(\alpha)\mathbf{Q}^*(\alpha^*)d\alpha.$$

Для него справедливо следующее равенство, характеризующее баланс энергии в соответствии с законом ее сохранения в идеально-упругой среде:

$$E_0 = \sum_{m=1}^{N}E_m^- + \sum_{m=1}^{N}E_m^+. \tag{3}$$

Здесь $E_m^{\pm}$ — энергия, переносимая m-той модой на бесконечность вправо $(+)$ или влево $(-)$ от источника, N — число вещественных полюсов (бегущих волн),

$$E_m^{\pm} = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\int\limits_{-h}^{0}(\mathbf{b}_m^{\pm}(z), \mathbf{a}_m^{\pm}(z))dz; \quad \mathbf{a}_m^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} a_{m,1}^{\pm}(z) \\ a_{m,2}^{\pm}(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_m^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} \pm i\zeta_m(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & \pm i\zeta_m\mu & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(a_{m,1}^{\pm}, \frac{\partial a_{m,1}^{\pm}}{\partial z}, a_{m,2}^{\pm}, \frac{\partial a_{m,2}^{\pm}}{\partial z} \right)^T.$$

Кроме того, интерес представляют величины

$$\mu_m = (E_m^+ + E_m^-)/E_0, \quad m = 1, 2, ...N,$$

определяющие долю каждой моды в суммарном потоке энергии E_0.

Ниже приводятся результаты численного анализа для поверхностных нагрузок следующего вида:

1. Точечная вертикальная нагрузка $\mathbf{q}_2(x) = \{0, \delta(x)\}$, преобразование Фурье которой $\mathbf{Q}_2 = \{0, 1\}$.
2. Точечная касательная нагрузка $\mathbf{q}_1(x) = \{\delta(x), 0\}$, $\mathbf{Q}_1 = \{1, 0\}$.
3. Пара точечных противоположно направленных касательных нагрузок, моделирующих действие полосового пьезоактуатора ширины $2a$: $\mathbf{q}_3(x) = \{\delta(x-a)-\delta(x+a), 0\}$, $\mathbf{Q}_3 = \{2i\sin\alpha a, 0\}$.

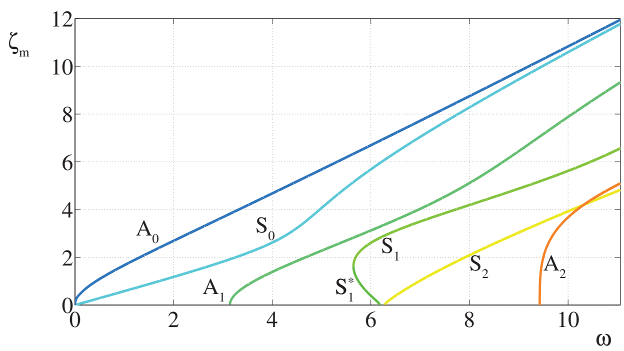


Рисунок 1 – Дисперсионные кривые для рассматриваемой упругой полосы

Рассмотрим упругую полосу со следующими безразмерными параметрами: $\lambda = 1.87$, $\mu = 1$, $\rho = 1$, $h = 1$. В частотном диапазоне $0 < \omega < 11$ в ней возбуждаются три антисимметричные моды (A_n) и три симметричные моды (S_n), рисунок 1.

На рисунке 2a представлены частотные зависимости энергии отдельных мод (сплошные линии) и общей энергии E_0 (пунктирная линия), поступающей в среду от вертикального точечного источника. Изменение доли энергии каждой моды μ_n в зависимости от частоты показано на рисунке 2b. Из двух фундаментальных мод, возбуждаемых в низкочастотном диапазоне, основную часть энергии источника переносит антисимметричная мода A_0 (при $\omega < 0.5$ практически всю энергию), в то время как доля моды S_0 сначала мала, но постепенно увеличивается, сравниваясь

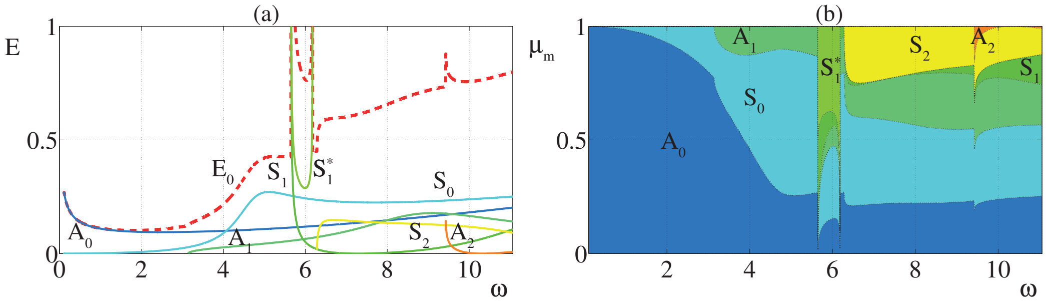


Рисунок 2 – Абсолютные (a) и относительные (b) значения энергии бегущих волн, возбуждаемых вертикальной нагрузкой

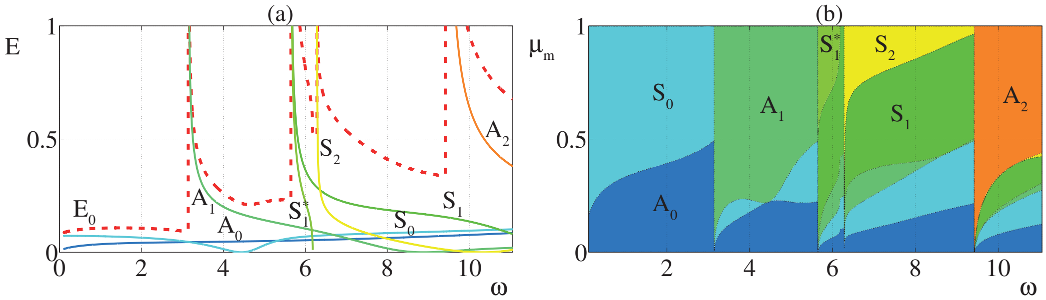


Рисунок 3 – Абсолютные (a) и относительные (b) значения энергии для касательной нагрузки

с долей A_0 уже за пределами двухмодового диапазона после появления третьей моды A_1. Фундаментальные моды S_0 и A_0 несут более половины энергии источника во всем рассматриваемом частотном диапазоне, за исключением диапазона $5.6 < \omega < 6.2$, в котором возбуждается обратная волна S_1^*.

Для касательной нагрузки наоборот — в низкочастотном диапазоне основную часть энергии источника переносит сдвиговая мода S_0, а доля моды A_0 постепенно нарастает с частотой, становясь равной энергии S_0 только в самом конце двухмодового диапазона перед частотой отсечки моды A_1 (рисунок 3). За частотой отсечки доминирующим становится вклад в энергию этой новой моды A_1. Такая закономерность сохраняется и при появлении следующих мод: в отличие от предыдущего случая, наблюдается значительный вклад в общую энергию каждой из новых появляющихся мод, в то время как оставшаяся меньшая часть энергии источника распределяется между остальными возбуждаемыми модами.

Кроме того, в случае точечной касательной нагрузки наблюдаются бесконечные резонансы на частотах отсечки. Математически это явление связано с наличием двукратных полюсов матрицы Грина в точках выхода дисперсионных кривых с частотной оси (рисунок 1). В случае вертикальной нагрузки или актуатора (третий тип источника, рисунок 4), эти полюса устраняются. В последнем случае нулями вектор-функции $\mathbf{Q}_3$, совпадающими с частотами отсечки всех мод, кроме S_1 и левой границы диапазона обратной волны S_1^*.

Работа поддержана Минобрнауки России (госзадание №1.189.2014K) и Рос-

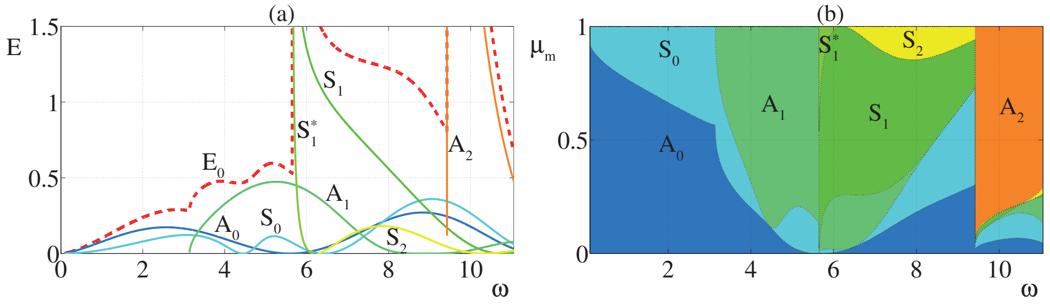


Рисунок 4 – Абсолютные (a) и относительные (b) значения энергии волн, возбуждаемых полосовым пьезоактуатором; $a/h = 0.5$

сийским фондом фундаментальных исследований (проект № 13-01-96520).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Глушков Е. В.* Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // Прикл. математика и механика, 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 94–100.

[2] *Глушкова Н. В., Фоменко С. И.* Эффект эстафетной передачи энергии между модами бегущих волн // Труды VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: Т. I. Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2013. С. 159–163.

[3] *Babeshko V. A., Glushkov E. V., Glushkova N. V.* Energy vortices and backward fluxes in elastic waveguides // Wave Motion, 1992. T. 16. P. 183–192.

[4] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В.* Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акустический журнал. 2006. Т. 52. №3. С. 314–325.

[5] *Гринченко В. Т. Малешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.

[6] *Ерофеев В. И., Шешенина О. А.* Волны в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией // Математическое моделирование систем и процессов. 2002. № 10 С. 32–41.

[7] *Глушкова Н. В.* Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости. Дис. ... д-ра физ.-мат.наук, 01.02.04, Ростовский госуниверситет, 2000 г., 220 с.

Glushkov E. V., Glushkova N. V., Evdokimov A. A., Fomenko S. I. *Distribution of surface source energy between Lamb waves*. Energy characteristics of Lamb waves excited in an isotropic elastic layer by normal and tangential surface loads are considered. The frequency dependencies of wavenumbers and averaged over the period of oscillation energy of each of the excited modes are given. The distribution of the total source energy among the modes depending on the source type and frequency are discussed.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Глушков Е. В.[1], Глушкова Н. В.[1], Еремин А. А.[1], Ламмеринг Р.[2]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар*
[2]*Университет им. Гельмута Шмидта, Гамбург*

В работе обсуждаются теоретические методы расчета дисперсионных характеристик многослойных композитных материалов и экспериментальные неразрушающие способы их определения. Для вычисления волновых чисел и фазовых и групповых скоростей бегущих волн применяются подходы, основанные на физически наглядных асимптотических выражениях для цилиндрических упругих волн, распространяющихся от поверхностного источника в радиальном направлении. Экспериментальные дисперсионные кривые групповых скоростей и волновых чисел бегущих волн определяются по результатам измерения волновых полей сканирующим лазерным виброметром, к которым применяется вейвлет-преобразование и двукратное преобразование Фурье по пространственной горизонтальной и временной переменным, соответственно. Приводятся результаты применения предлагаемых методик для определения дисперсионных характеристик волоконно-армированных композитных пластин.

1. Задача определения дисперсионных характеристик бегущих упругих волн, например, групповых скоростей или волновых чисел, представляет интерес для систем ультразвукового неразрушающего контроля и волнового мониторинга элементов конструкций. Так, для эффективной реализации алгоритма поиска дефектов на основе времени прихода волнового сигнала, отраженного неоднородностью, необходимо знать групповые скорости бегущих волн. Другим примером служит неразрушающая методика идентификации эффективных упругих постоянных композитного материала, основанная на минимизации невязки между расчетными и экспериментальными значениями фазовых и/или групповых скоростей, а также длин волн.

2. Рассматриваются гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}$, $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$, свободного слоистого анизотропного материала толщины H, возникающие под действием произвольной поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}$, локализованной в области Ω на поверхности $z = 0$ (далее гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен).

В рамках полуаналитического интегрального подхода поле перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$ представимо в виде свертки матрицы Грина $k(\mathbf{x},\omega)$ и вектор-функции нагрузки $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{u} = k * q = \iint\limits_{\Omega} k(x-\xi, y-\eta, z)\mathbf{q}(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

или в виде обратного преобразования Фурье,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{xy}^{-1}[KQ] = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma^+} \int\limits_{0}^{2\pi} K(\alpha,\gamma,z)\mathbf{Q}(\alpha,\gamma)e^{-i\alpha r\cos(\gamma-\varphi)}d\gamma d\alpha \tag{1}$$

где $K = \mathcal{F}_{xy}[k]$ и $\mathbf{Q} = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{q}]$ — Фурье-символы матрицы Грина и вектор-функции $\mathbf{q}$. В представлении (1) переменные $\mathbf{x}$ и параметры преобразования Фурье $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ взяты в цилиндрической (r, φ, z) и полярной (α, γ) системах координат соответственно. Контур интегрирования Γ^+ проходит в плоскости комплексной переменной α вдоль вещественной полуоси $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$, обходя вещественные полюса $\zeta_n = \zeta_n(\gamma) > 0$ матрицы K в соответствии с принципом предельного поглощения.

В дальней от источника зоне справедливы асимптотические представления, получаемые из равенства (1) с использованием теории вычетов и метода стационарной фазы [1]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N_r} \mathbf{u}_n(x) + O((\xi r)^{-1}), \quad \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) \sim \sum_{m=1}^{M_n} \mathbf{a}_{mn}(\varphi, z)e^{is_{nm}r}/\sqrt{\zeta_n r}, \quad \zeta r \to \infty \tag{2}$$

$$\mathbf{a}_{nm} = -\zeta_n \sqrt{i\zeta_n/(2\pi s_n''(\gamma_m))}\,\mathrm{res} K(\alpha, \theta_m, z)|_{\alpha=\zeta_n} \mathbf{Q}(-s_{nm}, \varphi)$$
$$s_{nm} = s_n(\gamma_m) = \zeta_n(\theta_m)\sin\gamma_m, \quad \theta_m = \gamma_m + \varphi + \pi/2$$

Здесь N_r — количество вещественных полюсов матрицы K, γ_m — стационарные точки (корни уравнения $s_n'(\gamma) = 0$), M_n — количество корней γ_m на промежутке $0 < \gamma < \pi$. Каждое слагаемое во второй сумме соотношения (2) представляет собой цилиндрическую бегущую волну с волновым числом $s_{nm}(\varphi)$, распространяющуюся с групповой скоростью

$$c_g(\varphi) = [ds_{nm}/d\omega]^{-1} \tag{3}$$

Таким образом, для определения дисперсионных характеристик слоистого анизотропного композита на основе указанных выше соотношений численно находятся полюса Фурье-символа матрицы Грина K, и решается трансцендентное уравнение $s_n'(\gamma) = 0$ для каждой из бегущих волн, описываемых формулой (3). Выражения (2) —(3) позволяют не только получить явный вид зависимости волновых чисел и групповых скоростей цилиндрических бегущих волн от угла наблюдения φ, но и эффективно определить так называемый угол отклонения, характеризующий разницу между углом наблюдения φ и углом γ_m, под которым распространяются соответствующие направлению φ плоские волны (для изотропного материала $\gamma_m = \varphi$).

В качестве примера использования описанного выше подхода на рисунке 1 приводятся дисперсионные кривые групповых скоростей нескольких первых нормальных мод в трансверсально-изотропном упругом слое толщины $H = 2.16$ мм, плоскость изотропии которого совпадает с плоскостью yOz [2]. Пунктирными линиями на графике (a) для направления одной из осей симметрии материала $\varphi = \gamma = 0$ показаны результаты работы [2], в которой для расчета групповых скоростей использовался метод полуаналитических конечных элементов (ПАКЭ), сплошными

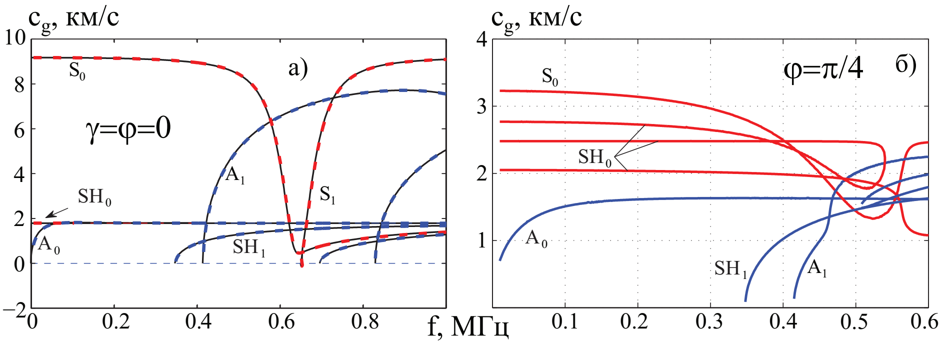


Рисунок 1 – Дисперсионные кривые групповых скоростей бегущих волн в трансверсально-изотропном упругом слое: а) — направление $\varphi = 0$ вдоль оси симметрии; б) — $\varphi = \pi/4$

линиями, накладывающимися на пунктирные, — результаты, полученные с помощью формулы (3). В то же время, применение ПАКЭ для построения частотных зависимостей групповых скоростей в направлениях, не совпадающих с осями симметрии материала, приводит к неверным результатам, противоречащим экспериментальным данным. Так, в работе [2] для фундаментальной симметричной моды в области низких частот $c_g(\pi/4) \approx 6.7$ км/с, тогда как из экспериментов, проведенных для аналогичного композита [3], следует, что данное значение не должно превосходить 4 км/с. Полученные с помощью соотношения (3) дисперсионные кривые групповых скоростей для направления $\varphi = \pi/4$ показаны на рисунке 1-б. Для SH-волн присутствуют структуры в виде петель, а также наблюдается разделение одной кривой на несколько. Данные результаты согласуются с результатами работы [4], где для расчета групповых скоростей в заданном направлении наблюдения φ использовались волновые числа плоских волн.

3. Применявшаяся для экспериментов установка состоит из системы сканирующей лазерной виброметрии Polytec PSV-400, генераторов сигналов произвольной формы и цифровых осциллоскопов фирмы Tektronix Inc., а также высокочастотного усилителя NF HSA 4014. Для возбуждения колебаний используются тонкие пьезокерамические преобразователи круглой и квадратной формы различных размеров, изготовленные из керамики PIC 151 (PI Ceramics GmbH). Исследуемая в экспериментах композитная пластина со схемой укладки препрегов $[0^o]_4$ имеет размеры $1000 \times 1000 \times 1.15$ мм^3 и плотность 1482 кг/м^3.

Для определения частотной зависимости групповых скоростей бегущих волн в заданном направлении наблюдения φ с помощью лазерного виброметра измерялась вертикальная компонента скоростей $v_z(\mathbf{x}, t) = \dot{u}_z(\mathbf{x}, t)$ нескольких точек поверхности, расположенных на достаточном удалении от пьезоактуатора и друг от друга (точки A и B на рисунке 2-а). Далее к полученным волновым сигналам применялось непрерывное вейвлет-преобразование с материнским вейвлетом Габора:

$$W(t, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_z(\tau)\overline{\psi\left(f \cdot (\tau - t)\right)}\, d\tau$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\exp\left[-\frac{(2\pi/\gamma)^2}{2}t^2 + 2\pi i t\right], \quad \gamma = \pi\sqrt{2/\ln 2}$$

Известно, что время прихода волнового пакета для соответствующей центральной частоты характеризуется максимальными значениями амплитуды вейвлет-коэффициентов $|W(t,f)|$ [5]. Групповая скорость каждой из мод вычисляется путем деления расстояния между точками A и B, на разность между временами прихода соответствующего ей сигнала в каждую из этих точек.

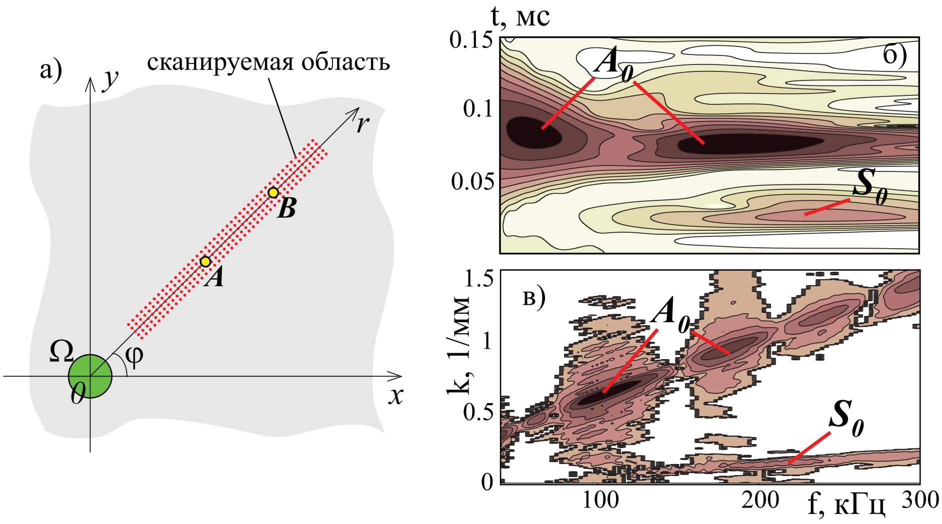


Рисунок 2 – а) — схематичное изображение точек, в которых производились измерения. Результаты обработки экспериментально измеренных волновых сигналов в композите $[0^o]_4$: б) — функция $|W(t,f)|$, в) — линии уровня функции $|H(k,f)|$

Экспериментальные дисперсионные кривые для волновых чисел бегущих волн были измерены с использованием преобразования Фурье по временной и пространственной переменным [6], примененного к волновым сигналам, измеренным в наборе точек, отмеченных на рисунке 2-а красными маркерами:

$$H(k,f) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty v_z(r,t) e^{i(kr+2\pi f t)} dr dt$$

где k — волновое число, f — частота. Локальные максимумы функции $|H(k,f)|$ позволяют определить положение дисперсионных кривых волновых чисел в плоскости (k,f).

В качестве иллюстрации применения данных подходов к определению дисперсионных характеристик бегущих волн на рисунках 2-б и 2-в приводятся скалограмма (значения функции $|W(t,f)|$) сигнала, измеренного в точке $A(80,0,0)$ мм, и линии уровня функции $|H(k,f)|$, вычисленные для того же материала при $\varphi = 0$. На обоих графиках темный цвет соответствует областям, в которых достигаются максимальные значения соответствующих величин. Соответствующие экспериментальные дисперсионные кривые групповых скоростей и длин волн $\lambda = 2\pi/k$ мод A_0 и S_0 для направления $\varphi = 0$ показаны на рисунке 3.

Работа выполнена в рамках гос. задания Министерства образования и науки РФ (проект № 11.9165.2014) и при поддержке РФФИ (грант № 14-08-00370).

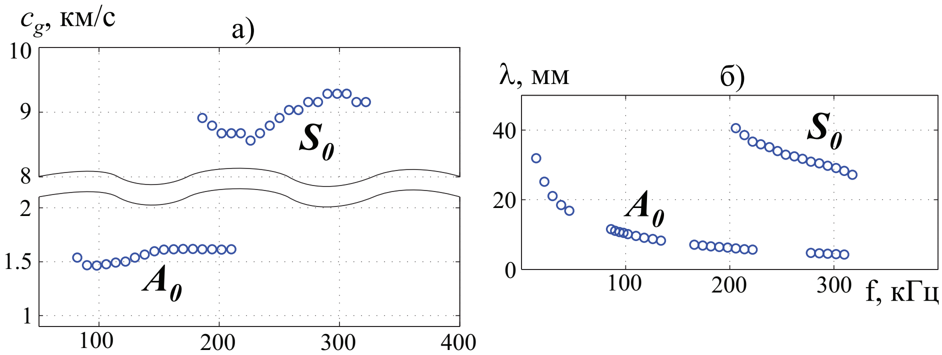


Рисунок 3 – Определенные из экспериментов дисперсионные кривые групповых скоростей (а) и длин волн (б) мод A_0 и S_0 для направления $\varphi = 0$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2011. Vol. 129. P. 2923–2934.

[2] *Marzani A., De Marchi L.* Characterization of the elastic moduli in composite plates via dispersive guided waves data and genetic algorithms // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2012. Vol. 24, № 17. P. 2135–2147.

[3] *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A., Lammering R.* Group velocity of cylindrical guided waves in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2014. Vol. 135, № 1. P. 148–154.

[4] *Neau G.* Lamb waves in anisotropic viscoelastic plates. Study of the wave fronts and attenuation. London: Imperial Colledge, 2003. 110 p.

[5] *Kishimoto K., Inoue H., Hamada M., Shibuya T.* Time frequency analysis of dispersive waves by means of wavelet transform // J. App. Mech. 1995. Vol. 62, № 4. P. 841–846.

[6] *Alleyne D. N., Cawley P.* A 2-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multi-mode signals // J. Acoust. Soc. Am. 1991. Vol. 89, P. 1159–1168.

Glushkov E. V., Glushkova N. V., Eremin A. A., Lammering R. *Theoretical and experimental approaches for estimation of guided wave dispersion characteristics of layered composite materials.* In the present paper numerical techniques for evaluating dispersion characteristics of guided waves (GW) in laminate composites as well as non-destructive experimental methods of their estimation are discussed. Theoretical values of GW wavenumbers, phase and group velocities are obtained from the the far-field GW asymptotics, which are derived from the integral representations in terms of the Green's matrix of the multilayered structure considered. Experimental dispersion curves are acquired using wavelet transform (for group velocities) or double Fourier transform (for wavenumbers) over spatial and time variables applied to the data measured with a contactless laser vibrometer. Practical implementation of these methods is discussed and illustrated by examples of their application to several carbon fiber reinforced plastic plate samples.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДУГОВОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С УЧЕТОМ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Годес А. Ю., Лобода В. В.
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния изотропной упругой плоскости с круговым упругим включением и дуговой трещиной на границе раздела сред под действием усилий, приложенных на бесконечности, с учетом макрозоны контакта, возникающей между берегами трещины. Задача приведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с соответствующими дополнительными условиями. Полученная система интегральных уравнений решена приближенно путем сведения к системе линейных алгебраических уравнений. Разработан итерационный алгоритм нахождения неизвестной зоны контакта берегов трещины, найдено раскрытие трещины.

Введение. В настоящее время широко используются различные элементы конструкций, состоящие из композиционных материалов с круглыми упрочняющими волокнами, при изготовлении или эксплуатации которых на границе раздела сред часто возникают межфазные трещины. Решение в рамках модели открытой трещины [2] зачастую приводит к физически нереальному взаимопроникновению ее берегов, в связи с чем возникает необходимость изучения контактной модели межфазной дуговой трещины под действием нагрузки, приложенной на бесконечности.

1. Постановка задачи. Рассматривается изотропная упругая плоскость $r > a$, которая содержит изотропное упругое круговое включение $0 \leqslant r \leqslant a$, скрепленное с плоскостью по всей границе, кроме дуги $r = a$, $|\theta| < \beta$, где возникла трещина. Механические свойства включения и матрицы соответственно определяются модулями сдвига μ_1, μ_2 и постоянными Мусхелишвили κ_1, κ_2. Предполагается, что берега трещины могут контактировать без трения. Вне зоны контакта $\theta \notin \Omega$ берега трещины свободны от напряжений, а в пределах зоны взаимодействия берегов $\theta \in \Omega$ нормальные напряжения являются непрерывными при переходе через трещину и сжимающими. Главные напряжения на бесконечности равны N_1 и N_2, причем угол между направлением N_1 и осью Ox составляет α (см. рисунок 1).

Граничные условия поставленной задачи имеют вид:

$$\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad u_r^{(1)} + iu_\theta^{(1)} = u_r^{(2)} + iu_\theta^{(2)} \quad \text{при } r = a, \ \beta < |\theta| \leqslant \pi; \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)} = 0 \quad \text{при } r = a, \ |\theta| < \beta, \ \theta \notin \Omega; \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0 \quad \text{при } r = a, \ |\theta| < \beta, \ \theta \in \Omega; \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} e^{2i(\alpha-\theta)} \quad \text{при } r \to \infty. \quad (4)$$

2. Сведение задачи к системе сингулярных интегральных уравнений. Для решения данной задачи используется метод комплексных потенциалов

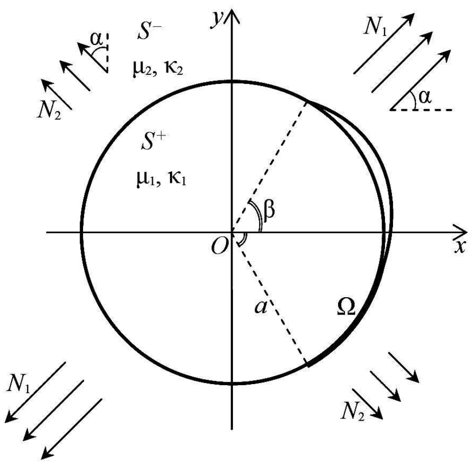


Рисунок 1

Колосова–Мусхелишвили [3]. С этой целью вводятся неизвестные комплексные потенциалы $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ в области S^+ и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ в области S^-, и поставленная задача сводится к граничной задаче для четырех функций комплексного переменного, аналитических в заданных областях, с краевыми условиями (1)–(4). Далее, в соответствии с методикой, изложенной в [6], с помощью условий на границе раздела сред (1) задача сводится к определению двух комплексных потенциалов $\omega'(z)$ и $F'(z)$, аналитических в заданных областях.

В соответствии с методикой, предложенной в [4, 5], вводится функция, которая характеризует раскрытие трещины во всех точках $t = ae^{i\varphi}$ дуги $r = a$, $|\varphi| < \beta$:

$$D(t) = d(\varphi) = u_x^{(2)} - u_x^{(1)} + i(u_y^{(2)} - u_y^{(1)}) = e^{i\varphi}(u_r^{(2)} - u_r^{(1)} + i(u_\theta^{(2)} - u_\theta^{(1)})),$$

где

$$d'(\varphi) = \frac{a}{\mu_1} e^{i\varphi}(b_r(\varphi) + ib_\theta(\varphi)) \quad \text{при} \ \ |\varphi| < \beta.$$

Из условия на бесконечности (4), условий ограниченности перемещений в начале координат и условия равенства нулю вращения на бесконечности следует, что напряженно-деформированное состояние системы полностью определяется функциями $b_r(\varphi)$ и $b_\theta(\varphi)$. Из граничных условий на трещине (2)–(3) можно получить следующую систему сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения неизвестных функций:

$$-C_1 b_\theta(\zeta) - \frac{\eta^2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi b_r(\xi)}{g(\xi)} d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{b_r(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi + C_2 \frac{\eta}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{b_\theta(\xi)}{g(\xi)} d\xi + \\ + C_3 N(\zeta) = C_4 + C_5 \cos 2(\alpha - \theta), \quad (5)$$

$$C_1 b_r(\zeta) - \frac{\eta^2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi b_\theta(\xi)}{g(\xi)} d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{b_\theta(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi - C_1 \frac{\eta}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{b_r(\xi)}{g(\xi)} d\xi = C_5 \sin 2(\alpha - \theta), \quad (6)$$

где

$$\eta = \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}, \quad \zeta = \frac{1}{\eta}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}, \quad \xi = \frac{1}{\eta}\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad g(\xi) = 1 + \xi^2\eta^2, \quad \lambda = \frac{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}{\mu_2 + \mu_1\kappa_2},$$

$$\frac{1}{k} = 2\lambda\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{1+\kappa_2}{1+\kappa_1} + \lambda - 1, \quad C_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad C_2 = -(1+2k), \quad C_3 = -\frac{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}{\mu_2(1+\lambda)},$$

$$C_4 = -(\mu_1 + \mu_2\kappa_1)\frac{k\mu_1}{\mu_2^2}\frac{1+\kappa_2}{1+\kappa_1}\frac{N_1+N_2}{2}, \quad C_5 = -\frac{\mu_1\lambda(1+\kappa_2)}{\mu_2(1+\lambda)}\frac{N_1-N_2}{2}.$$

Система уравнений (5)–(6) дополняется условиями однозначности смещений

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-\eta^2\xi^2)b_r(\xi) - 2\eta\xi b_\theta(\xi)}{g^2(\xi)}d\xi = 0, \qquad \int\limits_{-1}^{1}\frac{2\eta\xi b_r(\xi) + (1-\eta^2\xi^2)b_\theta(\xi)}{g^2(\xi)}d\xi = 0. \qquad (7)$$

В уравнение (5) входит функция $N(\zeta)$, которая определяет нормальные напряжения на берегах трещины. Из граничных условий на трещине (2)–(3) следует, что она равна нулю в точках $\zeta \in \Omega$ и неизвестна в точках $\zeta \notin \Omega$. В случае, когда присутствует макрозона контакта берегов трещины, $N(\zeta)$ становится неизвестной функцией, и система уравнений (5)–(7) дополняется условием равенства нулю раскрытия трещины в области контакта

$$\Delta(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \Omega, \qquad (8)$$

причем раскрытие трещины определяется следующим образом:

$$\Delta(\zeta) = \frac{2\eta a}{\mu_1}\int\limits_{-1}^{\zeta}\frac{b_r(\xi)\cos(\varphi-\theta) - b_\theta(\xi)\sin(\varphi-\theta)}{g(\xi}d\xi, \quad |\zeta| < 1. \qquad (9)$$

3. Приближенное решение системы сингулярных интегральных уравнений. Для решения полученной системы уравнений (5)–(8) используется метод коллокации в сочетании с квадратурной формулой Гаусса–Чебышева, причем наличие осцилляции в очень малых окрестностях «открытых» вершин трещины не учитывается. Введем обозначения

$$\xi_j = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = \overline{1,\, n}; \qquad \zeta_i = \cos\frac{i\pi}{n}, \quad i = \overline{1,\, n-1};$$

$$b_r(\zeta) = \frac{B_1(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad b_\theta(\zeta) = \frac{B_2(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad B_{1j} = B_1(\xi_j), \quad B_{2j} = B_2(\xi_j), \quad g_j = g(\xi_j).$$

После введения квадратурно-интерполяционных сумм в соответствии с [1] система сингулярных интегральных уравнений (5)–(7) сводится к системе $2n$ линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{C_1}{n}\Big(\frac{(-1)^{i+j}}{\xi_j - \zeta_i}\sqrt{\frac{1-\xi_j^2}{1-\zeta_i^2}} - \frac{\eta}{g_j}\Big)B_{1j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\xi_j - \zeta_i} - \frac{\xi_j\eta^2}{g_j}\Big)B_{2j} = C_5\sin 2(\alpha - \theta_i),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\xi_j - \zeta_i} - \frac{\xi_j\eta^2}{g_j}\Big)B_{1j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\Big(\frac{C_2\eta}{g_j} - \frac{C_1(-1)^{i+j}}{\xi_j - \zeta_i}\sqrt{\frac{1-\xi_j^2}{1-\zeta_i^2}}\Big)B_{2j} +$$

$$+ C_3N(\zeta_i) = C_4 + C_5\cos 2(\alpha - \theta_i), \quad i = \overline{1,\, n-1},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1-\eta^2\xi_j^2}{g_j^2}B_{1j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{2\eta\xi_j}{g_j^2}B_{2j}=0,\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{2\eta\xi_j}{g_j^2}B_{1j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1-\eta^2\xi_j^2}{g_j^2}B_{2j}=0. \tag{10}$$

При отсутствии зоны контакта система (10) является замкнутой, в противоположном случае необходимо ввести следующие из (8)–(9) дополнительные уравнения для определения неизвестных напряжений в контактной зоне. Зоной контакта является область $\Omega = \{\zeta :\ d_1 \leqslant \zeta \leqslant d_2\}$, в которой выбраны точки $y_i = d_1 + \frac{i-1}{m-1}(d_2-d_1)$, $i=\overline{1,\,m}$. Далее введено обозначение $N_i = N(y_i)$, где

$$N\left(\zeta_i\right)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m} N_j \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\frac{\zeta_i-y_k}{y_j-y_k}, & \zeta_i\in\Omega,\\ 0, \quad \zeta_i\notin\Omega.\end{cases} \tag{11}$$

Раскрытие трещины вычисляется следующим образом:

$$\Delta(\zeta)=\frac{\pi\eta a(\zeta+1)}{n\mu_1}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\xi_j^2}{1-z_j^2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{1k}\cos(\varphi_k-\theta)-B_{2k}\sin(\varphi_k-\theta)}{g_k}\times$$
$$\times\prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}\frac{z_j-\xi_l}{\xi_k-\xi_l},\quad |\zeta|<1, \tag{12}$$

где $z_j = \frac{y_i-1}{2}+\frac{y_i+1}{2}\xi_j$, $\theta_i = 2\,\mathrm{arctg}(\eta y_i)$, $\vartheta_j = 2\,\mathrm{arctg}(\eta z_j)$.

Уравнения $\Delta(y_i)=0$, $i=\overline{1,\,m}$ образуют вместе с уравнениями (10) и выражениями (11)–(12) замкнутую систему $2n+m$ линейных алгебраических уравнений. Границы зоны контакта берегов трещины заранее неизвестны. Они подбираются итерационно из условия равенства нулю нормального напряжения на границе контактной зоны, не совпадающей с вершиной трещины.

4. Результаты численного моделирования. Сравнение результатов численного анализа для случая, когда контактная зона отсутствует, с точным решением бесконтактной задачи [2] показало, что примененные квадратурно-интерполяционные формулы дают решение с максимальной относительной погрешностью нахождения раскрытия трещины около 0,1%. На рисунках 2, 3 представлены графики раскрытия трещины для углов приложения нагрузки на бесконечности $\alpha = 45°$ и $\alpha = 70°$ соответственно. Все приведенные результаты получены для плоского деформированного состояния, коэффициентов Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ и угла полураствора трещины $\beta = 60°$ при $N_2 = 0$, $N_1 > 0$. Из анализа результатов следует, что в случае, когда угол приложения нагрузки $\alpha = 45°$, присутствует макрозона контакта берегов трещины, примыкающая к нижней вершине трещины; когда $\alpha = 70°$ — зона контакта не примыкает ни к одной из вершин трещины.

Заключение. Описанная в настоящей работе методика позволяет определить напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с круговым включением и дуговой трещиной на границе раздела сред в случае нагрузок, приложенных на бесконечности с учетом зоны контакта берегов трещины. Сформулированная нелинейная задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с

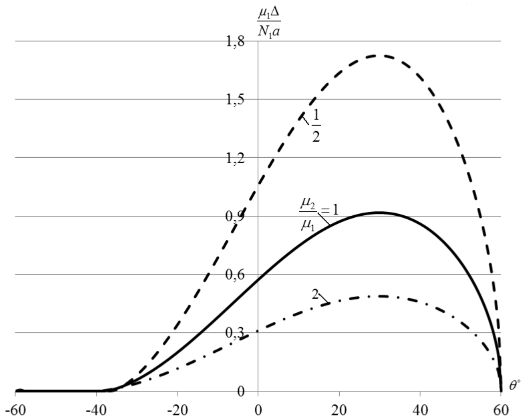


Рисунок 2

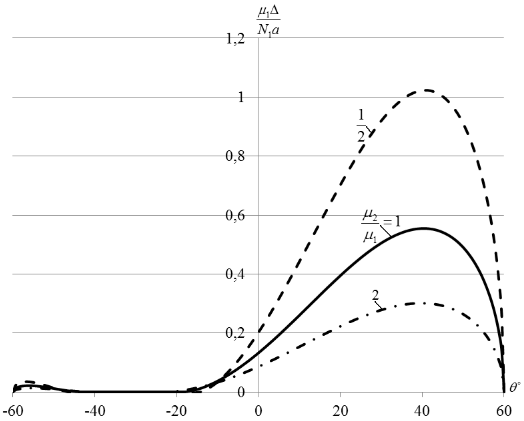


Рисунок 3

дополнительными условиями, для решения которой разработан итерационный алгоритм. Для различных видов внешней нагрузки найдены зоны контакта берегов трещины и ее раскрытие.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.

[2] *Годес А. Ю., Лобода В. В.* Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с дуговой трещиной между круговым включением и матрицей // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». 2013. Вип. 17, Т. 1. С. 3–10.

[3] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1949. 636 с.

[4] *Chao R., Laws N.* The Fiber-Matrix Interface Crack // Journal of Applied Mechanics. December 1997. Vol. 64. P. 992–999.

[5] *Comninou M.* The Interface Crack // Journal of Applied Mechanics. December 1977. Vol. 44. P. 631–636.

[6] *England A. H.* An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion // Journal of Applied Mechanics. September 1966. Vol. 34. P. 637–640.

Hodes A. J., Loboda V. V. *On peculiarities of deformation of arc interfacial cracks with regard to the contact of its shores*. A problem concerning definition of stresses and displacements in the elastic plane with a circular elastic inclusion and an arc crack at the interface is considered under the loading applied at infinity with taking into account the macrozone of contact between the crack faces. This problem is reduced to the system of two singular integral Fredholm equations of the second kind with the correspondent additional conditions. The derived system is approximately solved by means of reduction to the system of linear algebraic equations. The iterative algorithm of the unknown contact zone determination is developed, the crack opening is found.

БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИРУРГИЧЕСКОГО ЛЕЧЕНИЯ ОСТРОГО КОРОНАРНОГО СИНДРОМА

Гришина О. А., Кириллова И. В.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Создана биомеханическая модель коронарных артерий человека, которая позволяет выбрать рациональную методику проведения аортокоронарного шунтирования. Модель позволяет учитывать степень поражения коронарного русла, локализацию атеросклеротической бляшки, варьировать механические свойства материала шунта и его диаметр, угол и зоны вшивания шунта. Использовалась реалистичная пространственно-ориентированная модель коронарных артерий. В качестве модели крови выбрана несжимаемая ньютоновская жидкость, движение которой описывается уравнениями Навье–Стокса для нестационарного случая. На входе задавалась функция скорости, соответствующая физиологическому закону. На выходах из артерии задавалось функция интермиокардиального давления, зависящая от времени. В зоне контакта коронарного русла с миокардом задавалась функция внешнего давления сердечной мышцы. Результаты численного моделирования позволили провести прогнозирование гемодинамики и напряженно-деформированного состояния коронарного русла после проведения аортокоронарного шунтирования.

1. Введение. Одной из приоритетных задач трансляционной медицины является диагностика и улучшение качества лечения болезней системы кровообращения человека. По данным годового отчета о состоянии здоровья населения России в 2011 г., представленным отделом медицинской статистики ЦНИИ организации и информатизации здравоохранения Минздрава России одной из наиболее распространенных форм болезней системы кровообращения являются ишемическая болезнь сердца (ИБС), в частности — острый коронарный синдром (ОКС). Одним из исходов ОКС является инфаркт миокарда, при этом контингент пациентов с данным заболеванием «молодеет» год от года. Уровень летальности, масштабы инвалидизации и временной нетрудоспособности при ИБС в целом и ОКС в частности, представляют не только важную медицинскую, но и серьезную социально-экономическую проблему, так как в первую очередь речь идет о наиболее молодой, высококвалифицированной и творчески активной части населения.

Действенным способом лечения ОКС является коронарное шунтирование. Ранняя тромботическая окклюзия при коронарном шунтировании в основном обусловлена кровотоком, не соответствующим норме, в области дистального анастомоза, что вызвано малым диаметром принимающей артерии, которая часто стенозирована атеросклеротическим поражением. Другие факторы, вызывающие острую окклюзию шунта включают компрессию зоны анастомоза атеросклеротической бляшкой, неоптимальный выбор места наложения анастомоза, расслоение стенки шунта или коронарной артерии (КА) в области анастомоза, натяжение или искривление трансплантата нерациональной длины для выбранного маршрута шунтирования.

Доказано, что биомеханическое моделирование позволяет оценить гемодинамику здоровых и пораженных коронарных артерий с учетом напряженно-деформированного состояния их стенок, а также провести планирование хирургического лечения острого коронарного синдрома. Планирование хирургического лечения дает возможность изменять дооперационную анатомию, дизайн различных послеоперационных конфигураций, выбрать рациональный тип трансплантата и метод его вшивания, а в сочетании с надежностью CFD решателей, предоставляет уникальную возможность для хирургов.

Несмотря на большое количество работ, посвященных моделированию и различным методам исследования коронарных артерий, на сегодняшний день нет данных, описывающих гемодинамику и напряженно-деформированное состояние анатомически реальных коронарных артерий с учетом их взаимодействия с миокардом, а так же нет четких критериев выбора рационального вида реконструктивного вмешательства, оценки миокардиального кровоснабжения после проведения хирургического лечения ОКС.

Целью работы является модификация биомеханической модели коронарных артерий человека для улучшения качества диагностики и хирургического лечения острого коронарного синдрома. Для достижения поставленной цели использовался программный комплекс ANSYS Multiphysics.

2. Постановка задачи. Для создания трехмерной максимально точной геометрической модели коронарных артерий человека с учетом пространственной ориентированности ветвей проведено исследование архитектоники, морфометрических и морфологических параметров коронарных сосудов и поверхности сердца человека. В результате получены твердотельные объемы, соответствующие крови и стенке для правой и левой коронарных артерий. По результатам коронарограмм определены форма, степень и локализация патологического сужения русла коронарной артерии. Построены модели левой и правой коронарных артерий с симметричным/асимметричным сужениями различной степени.

На основе исследований механических и физиологических параметров сосудов создана биомеханическая модель коронарных артерий сердца человека в программном комплексе ANSYS Multiphysics.

Кровь задавалась однородной, несжимаемой, ньютоновской жидкостью. Задавалась плотность и динамическая вязкость в явном виде. Движение крови описывалось нестационарными уравнениями Навье–Стокса.

Материал стенок моделировался однородным, изотропным и идеально-упругим. Значения плотности, коэффициента Пуассона и модуля упругости были получены экспериментально для каждого типа материала. Модель выбрана на основе данных, полученных в результате испытаний образцов коронарных артерий сердца человека в физиологическом растворе.

Для связанной упруго-гидродинамической задачи ставились граничные условия, объединяющие гидродинамическую и упругую части. На стенку со стороны потока крови действуют силы вязкости и давление, а на границе потока и стенки ставятся условия прилипания. Торцы сосуда жестко закреплялись. На входе в коронарные артерии задалась функция скорости потока крови, изменяющаяся по физиологическому закону, а на выходах — функция интермиокардиального давления сердца человека. В зоне контакта бассейна коронарного русла с миокардом задавалась функция внешнего давления сердца. Такой тип постановки задачи и граничных условий более корректно описывает физиологический процесс в сравнении с биомеханическими моделями других авторов.

Была проведена оценка сеточной сходимости и выбран оптимальный размер элементов. В результате на полученные объемы была наложена нерегулярная тетраэдрическая сетка с размером элементов 0,7 мм для правой коронарной артерии и 0,9 мм для левой коронарной артерии, 0,5 мм для жидкости. В среднем модель левой коронарной артерии включает 1.4 млн. элементов, правой коронарной артерии — 1.2 млн. элементов (рисунок 1).

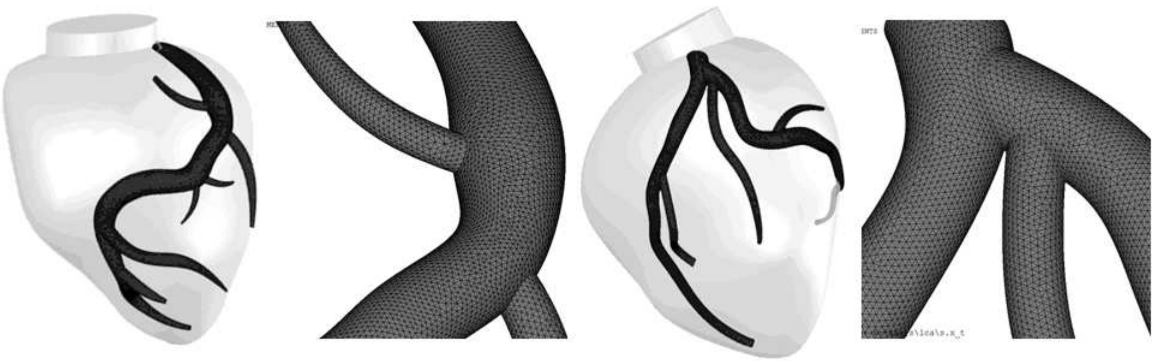


Рисунок 1 – *Биомеханическая модель коронарных артерий человека*

3. Численный анализ. Проведено численное моделирование коронарных артерий с различной степенью поражения артериального бассейна и локализацией атеросклеротической бляшки, в том числе рассмотрены случаи многоэтажного поражения русла КА. При атеросклеротическом поражении коронарной артерии наблюдается локальное увеличение скорости кровотока в зоне максимального сужения. Наблюдается рециркуляция потока в постстенотических зонах. Данное нарушение ламинарного потока крови по сосуду возникает в ответ на изменение диаметра сосуда. Наиболее типичными местами турбулентного кровотока в коронарных артериях являются разветвления, изгибы, перегибы, и область, расположенная дистальнее места образования атеросклеротической бляшки. В постстенотическом сегменте снижается давление. Данный эффект является клинически важным, поскольку в этом случае увеличивается вероятность наличия бляшки с неоднородной структурой и высокой эмбологенностью.

Рассмотрена модель аортокоронарного шунтирования стенозированного сегмента артерии. Для задания механических свойств трансплантата применялась модель изотропного, идеально-упругого материала с различным модулем Юнга (0.8 МПа, 1.3 МПа, 1.5 МПа, 3 МПа). Диаметр шунта варьировался от 1 мм до 8 мм. Моделировалось вшивание шунта под углом 45°, 60° и 90°.

В результате создана биомеханическая модель коронарных артерий человека, которая позволяет определить на предоперационной стадии коронарный кровоток до шунтирования и после его проведения, а также выбрать рациональную методику проведения коронарного шунтирования.

4. Заключение Модель коронарных артерий позволила определить гемодинамику с учетом напряженно-деформированного состояния стенки КА и кондуита в зависимости от степени поражения коронарного русла, локализации атеросклеротической бляшки, материала и диаметра шунта, угла и зоны вшивания шунта. В результате численного моделирования выявлено: 1) увеличение модуля упругости шунта вызывает критические напряжения в устье коронарной артерии, а также образование закрученного потока в зоне анастомоза; 2) использование шунта, с механическими свойствами близкими к соответствующим параметрам КА, обеспечивает восстановление кровотока в русле и сохранение рационального напряженно-деформированного состояния стенок шунта и коронарных артерий для дальнейшего их функционирования; 3) применение шунта диаметром превосходящим диаметр принимающей артерии в несколько раз приводит к образованию вихревого потока и возникновению критических напряжений в зоне вшивки шунта; 4) удерживание шунта под углом близким 45° к сосуду позволяет существенно уменьшить риск послеоперационных осложнений, позволяя избежать образования вихревого потока в зоне вшивания шунта.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 09-01-00804-а, 14-01-31383-мол_а).

Grishina O. A., Kirillova I. V. *Biomechanical modeling of surgical treatment of acute coronary syndrome*. The biomechanical model of human coronary arteries was created , which allows you to choose a rational methodology for coronary artery bypass grafting. The model allows to consider the degree of coronary lesions, localization of atherosclerotic plaques, varied mechanical properties of the material and its shunt diameter, angle and place of bypass insertion. The realistic space-oriented model of the coronary arteries was used. Newtonian fluid which motion is described by the Navier-Stokes equations for the nonstationary case was chosen as a model of blood. The function of the velocity corresponding to physiological laws was set at the inlet, time-dependent function of intramyocardial pressure — at the outlets. Function of external pressure of the heart muscle was set in the area of coronary channel and myocardium contact. The results of numerical modeling allowed predicted of hemodynamics parameters and the stress-strain state of coronary channel after coronary artery bypass grafting.

ХИМИЧЕСКОЕ СРОДСТВО И КИНЕТИКА ФРОНТА ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ДЕФОРМИРУЕМОМ МАТЕРИАЛЕ: ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Демидов И. В.[1], **Фрейдин А. Б.**[1,2,3]
[1]*Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*
[2]*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*
[3]*Санкт-Петербургский государственный университет*

На примере одномерной постановки изучается влияние механических напряжений на скорость химической реакции, протекающей между газовой и твердой компонентами. В результате записи балансов массы, импульса, энергии и энтропийного неравенства получено выражение для производства энтропии в стержне с распространяющимся фронтом химической реакции и, как следствие, найдена зависимость химического сродства от напряжений и деформаций. Сформулировано кинетическое уравнение в виде зависимости скорости реакции от сродства и, следовательно, от напряжений. Исследовано распространение фронта химической реакции в упругом и вязко-упругом стержнях при стационарном и циклическом нагружениях. Исследован запирающий эффект: блокирование реакции напряжениями, а также влияние знака напряжений (растяжение/сжатие) и вязкости материалов на кинетику фронта реакции. Полученные результаты позволяют понять, как вид нагружения, реология материала и деформации, порождаемые химической реакцией, влияют на протекание химической реакции, что, в свою очередь может быть учтено при постановке и решении трехмерных задач.

Рассмотрим одномерный деформируемый стержень, с протекающей в нем химической реакцией вида
$$\nu_- B_- + \nu_* B_* \to \nu_+ B_+,$$
где B_- и B_+ — химические формулы деформируемых твердых компонент, B_* — газообразной компоненты, ν_-, ν_+ и ν_* — стехиометрические коэффициенты. Реакция сосредоточена на фронте — подвижной границе раздела между твердыми исходной и получаемой компонентами и поддерживается диффузией газовой компоненты.

Вводятся две отсчетные конфигурации: L^0 для стержня в состоянии B_- и L^g — в состоянии B_+. Величины, определенные относительно отсчетных конфигураций L^0 и L^g помечаем индексами 0 и g, соответственно.

Аналогично тому, как это было сделано в трехмерном случае [1, 2] (см. также [3]), в результате записи балансов массы, импульса и энергии и второго закона термодинамики, записанных в одномерном случае для системы «деформируемое тело — диффундирующий газ», получено выражение для химического сродства:
$$A = \nu_* M_* \mu_* + \frac{\nu_- M_-}{\rho_-^0}\left(w_- - \frac{\partial x_-}{\partial X^0}\sigma\right) - \frac{\nu_+ M_+}{\rho_+^g}\left(w_+ - \frac{\partial x_+}{\partial X^g}\sigma\right) - \\ -\frac{1}{2}\nu_+ M_+ \frac{\langle \rho^g \rangle}{\rho_+^g}\left[\!\left[\frac{\partial x}{\partial X^g}\right]\!\right] W_g^2 + \frac{1}{2}\nu_* M_* \left((v_*^2 - \langle v^2 \rangle) - v_\Gamma^t (v_* - \langle v \rangle)\right) \qquad (1)$$
где $M_{*,\pm}$ — молярные массы компонент реакции, μ_* и $w_\pm$ — линейные плотности химического потенциала газовой компоненты и свободной энергии твердых

компонент, ρ_-^0 и ρ_+^g — плотности твердых компонент относительно отсчетных конфигураций L^0 и L^g, $x_\pm$, X^0, X^g — координаты точек твердых компонент в актуальной конфигурации и отсчетных конфигурациях, $v_{*,\pm}$ — скорости частиц газа и точек компонент $B_\pm$ в актуальной конфигурации, W_g — скорость фронта реакции относительно L^g-конфигурации, v_Γ^t — скорость фронта реакции в актуальной конфигурации, σ — напряжение, угловые скобки означают осреднение величины: $\langle a\rangle = \dfrac{1}{2}(a_+ + a_-)$, а двойные квадратные — скачок величины: $[\![a]\!] = (a_+ - a_-)$.

Рассмотрим квазистатический случай, когда можно пренебречь инерционными слагаемыми. Введем равновесную концентрацию c^g_{eq} газовой компоненты такую, что $A(c^g = c^g_{eq}) = 0$. Тогда вблизи положения химического равновесия, то есть, при $A/(RT) \ll 1$, получаем, что скорость фронта химической реакции

$$W_g = \frac{\nu_+ M_+}{\rho_+^g} k_*^g \nu_* (c_\Gamma^g - c_{eq}^g) \tag{2}$$

где k_*^g — константа реакции, c_Γ^g — концентрация газовой компоненты на фронте реакции — находится из решения задачи диффузии.

В приближении стационарной диффузии $D\dfrac{\partial^2 c^g}{(\partial X^g)^2} = 0$, где D — коэффициент диффузии, и $\tilde{c}^g = c^g - c^g_{eq}$. Дополнив это уравнение граничными условиями:

$$X^g = 0: \quad D\frac{\partial c^g}{\partial X^g} = \beta(c^g - c_*), \quad X^g = X_\Gamma^g: \quad D\frac{\partial c^g}{\partial X^g} + k_*^g \nu_* (c^g - c_*) = 0 \tag{3}$$

где β — коэффициент массоотдачи, c_* — насыщаемость превращенного материала газовой компонентой, получим, что

$$c^g(X_\Gamma^g) = \frac{c_* - c^g_{eq}}{X_\Gamma^g + \zeta_1 + \zeta_2}(\zeta_1 + X_\Gamma^g - X^g), \quad \zeta_1 = D/k_*^g \nu_*, \quad \zeta_2 = D/\beta \tag{4}$$

Если в случае малых деформаций твердые компонеты — линейно-упругие, то

$$w_-(\varepsilon_-) = \eta_- + \frac{1}{2}C_-\varepsilon_-^2 = \eta_- + \frac{1}{2}\sigma_-\varepsilon_-, \quad \sigma_- = C_-\varepsilon_- \tag{5}$$

$$w_+(\varepsilon_+) = \eta_+ + \frac{1}{2}C_+\varepsilon_+^2 = \eta_+ + \frac{1}{2}\sigma_+(\varepsilon_+ - \varepsilon^{ch}), \quad \sigma_+ = C_+(\varepsilon_+ - \varepsilon^{ch}) \tag{6}$$

где ε^{ch} — деформация твердого материала, вызванная химической реакцией, $\eta_\pm$ и $\varepsilon_\pm$ — энергии ненапряженных и деформации твердых компонент.

Полагая, что $M_*\mu_* = \eta_*(T) + RT\ln\dfrac{c}{c_*}$, получаем что

$$A = \nu_* RT \ln\frac{c}{c_*} + \widehat{\eta}(T) + \frac{\nu_- M_-}{2\rho_-^0}\frac{\sigma^2}{C_-}\left(\frac{C_-}{C_+} - 1\right) + \frac{\nu_- M_-}{\rho_-^0}\sigma\varepsilon^{ch}. \tag{7}$$

где $\widehat{\eta}(T) = \dfrac{\nu_- M_-}{\rho_-^0}(\eta_- - (\varepsilon^{ch}+1)\eta_+ + \nu_*\eta_*(T))$ (см. аналогичную формулу в [4]). Зависимость равновесной концентрации от напряжения (рисунок 1) принимает вид:

$$c_{eq} = c_* \exp\left[\frac{1}{\nu_* RT}\left(\frac{\nu_- M_-}{2\rho_-^0}\frac{\sigma^2}{C_-}\left(1 - \frac{C_-}{C_+}\right) - \frac{\nu_- M_-}{\rho_-^0}\sigma\varepsilon^{ch} + \widehat{\eta}(T)\right)\right]. \tag{8}$$

Следует отметить, что максимум кривой не достижим, так как при выбранных параметрах соответствует напряжениям порядка модуля Юнга. Для распространения фронта необходимо выполнение условия $c_\Gamma > c_{eq}/c_* < 1$. Так как во всем диапазоне допустимых напряжений мы получаем ниспадающую кривую, то растягивающие напряжения способствуют протеканию химической реакции, а сжимающие — замедляют и блокируют.

Если $\sigma = const$, то из (2) следует дифференциальное уравнение, определяющее положение X_Γ фронта химической реакции. Решая его, находим

$$X_\Gamma(t) = -(\zeta_1+\zeta_2) + \sqrt{(\zeta_1+\zeta_2)^2 + \frac{2\nu_+ M_+ \zeta_1}{\rho_+^g} k_*^g \nu_* (c_* - c_{eq}) t} \tag{9}$$

Пусть теперь материал B_+ — вязко-упругий, а B_- — линейно упругий. Воспользуемся моделью Максвелла. Тогда

$$w_+(\varepsilon_+) = \eta_+ + \frac{1}{2}C_+\varepsilon_+^2 = \eta_+ + \frac{1}{2}\sigma_+(\varepsilon_+ - \varepsilon^{ch} - \varepsilon^\eta), \quad \sigma_+ = C_+(\varepsilon_+ - \varepsilon^{ch} - \varepsilon^\eta) \tag{10}$$

где ε^η — вязкие деформации. Если напряжение постоянно, то

$$A = \nu_* RT \ln\frac{c}{c_*} + \widehat{\eta}(T) + \frac{\nu_- M_-}{2\rho_-^0}\frac{\sigma^2}{C_-}\left(\frac{C_-}{C_+} - 1\right) + \frac{\nu_- M_-}{\rho_-^0}\left(\sigma\varepsilon^{ch} + \frac{\sigma^2}{\eta}t\right) \tag{11}$$

$$c_{eq} = c_* \exp\left[\frac{1}{\nu_* RT}\left(-\widehat{\eta}(T) - \frac{\nu_- M_-}{2\rho_-^0}\frac{\sigma^2}{C_-}\left(\frac{2C_-}{\eta}t + \frac{C_-}{C_+} - 1\right) - \frac{\nu_- M_-}{\rho_-^0}\sigma\varepsilon^{ch}\right)\right]. \tag{12}$$

Равновесная концентрация зависит теперь не только от напряжений, но и от времени и с течением времени падает.

Рассмотрим материал с нелинейной вязкостью $\eta(\sigma) = \eta_0 \exp\left(\dfrac{\sigma\varkappa}{\sinh(\sigma\varkappa)}\right)$, где η_0 и $\varkappa$ — параметры (см., напр., [5–7]). Пусть напряжения меняются циклически

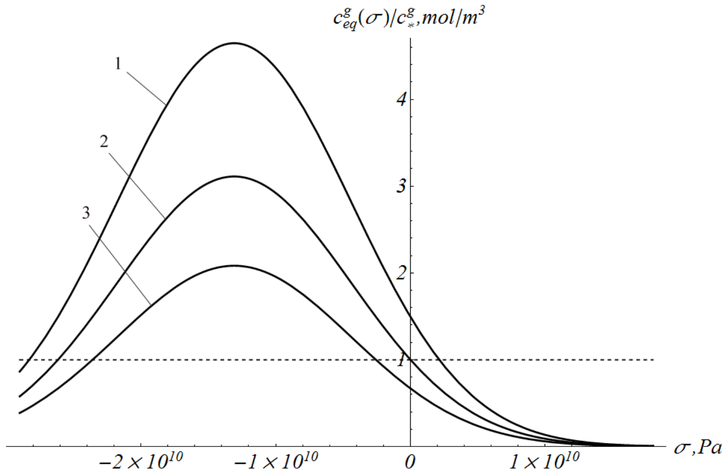


Рисунок 1 – Зависимость равновесной концентрации от напряжений ($\widehat{\eta}_1(T) = -1000$, $\widehat{\eta}_2(T) = 0$, $\widehat{\eta}_3(T) = 1000$)

с амплитудой σ_a и частотой ω. Тогда (рисунок 2)

$$c_{eq} = c_*^g \exp\left[\frac{1}{\nu_* RT}\left(-\widehat{\eta}(T) - \frac{\nu_- M_-}{\rho_-^0}\varepsilon^{ch}\sigma_a \sin\omega t - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\nu_- M_- \sigma_a^2 \sin^2\omega t}{2\rho_-^0 C_-}\left(\left(\frac{C_-}{C_+} - 1\right) + \frac{2C_-}{\eta_0}\exp\left(-\frac{\sigma_a \varkappa \sin\omega t}{\sinh(\sigma_a \varkappa \sin\omega t)}\right)t\right)\right)\right] \quad (13)$$

При постоянных внешних напряжениях закон движения фронта реакции принимает вид:

$$X_\Gamma^g(t) = -(\zeta_1 + \zeta_2) + \left\{(\zeta_1 + \zeta_2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2\nu_+ M_+ \zeta_1}{\rho_+^g} k_*^g \nu_* \left[c_* t - (c_{eq}^E)_E \frac{\nu_* RT \rho_-^0 \eta}{\nu_- M_- \sigma^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{\nu_- M_- \sigma^2}{\nu_* RT \rho_-^0 \eta} t\right)\right)\right]\right\}^{1/2} \quad (14)$$

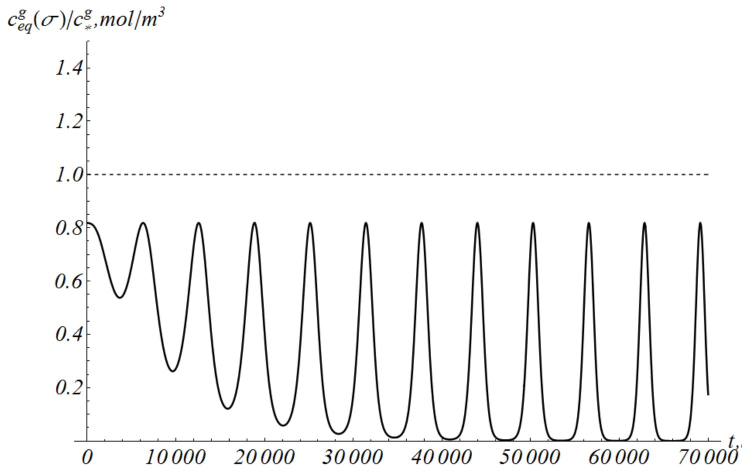


Рисунок 2 – Зависимость равновесной концентрации от времени при циклическом нагружении ($\widehat{\eta}(T) = 500$)

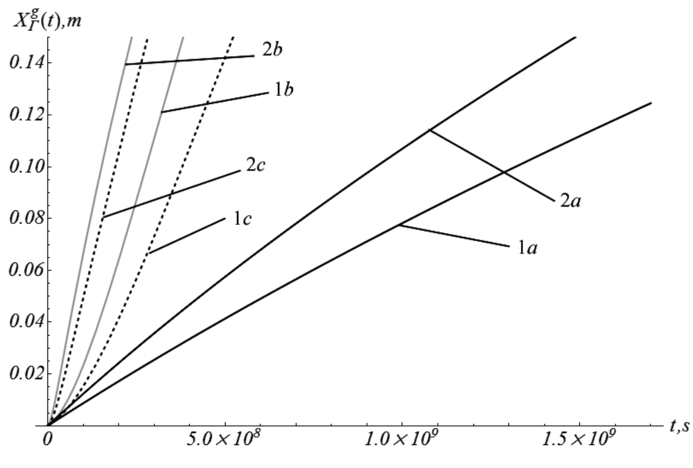


Рисунок 3 – Зависимость положения фронта химической реакции от времени: a) — линейно-упругая модель (постоянные напряжения), b) — вязко-упругая модель (постоянные напряжения), c) — вязко-упругая модель (циклическое нагружение) 1) — $\sigma = 10$ МПа, 2) — $\sigma = 40$ МПа где c_{eq}^E — равновесная концентрация в случае линейно-упругого тела, определяемая формулой (8).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 13-08-00553), Программы фундаментальных исследований Президиума Российской академии наук и Российского научного фонда (грант № 14-19-01190).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Freidin A. B.* Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids // ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Vol. 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids. 2013.

[2] *Фрейдин А. Б.* О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах // Изв. РАН. МТТ. 2014. №6 (в печати).

[3] *Freidin A., Vilchevskaya E., Korolev I.* Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids // Int. J. Eng. Sci. 2014. doi:10.1016/j.ijengsci.2014.03.008

[4] *Vilchevskaya E. N., Freidin A. B.* Modelling a chemical reaction front propagation in elastic solids: 1D case // Proceedings of XXXVI International Summer School-Conference Advance Problems in Mechanics (APM 2009). P. 681–691.

[5] *Kao D., McVitie J., Nix W., Saraswat K.* Two dimensional thermal oxidation of silicon-II. modeling stress effect in wet oxides //IEEE Trans. Electron Devices. 1988. № 1. P. 25–37.

[6] *Sutardja P., Oldham W.* . Modeling of stress effects in silicon oxidation // IEEE Trans. Electron Devices. 1988. № 11. P. 2415–2421.

[7] *Huntz A., Amiri G. C., Evans H., Cailletaud G.* Comparison of oxidation-growth stresses in NiO film measured by deflection and calculated using creep analysis or finite-element modeling // Oxidation of Metals. 2002. V. 11. P. 2415–2421.

Demidov I. V., Freidin A. B. *Chemical affinty and chemical reaction front kinetics in deformable material: 1D case*. The influence of stresses on the rate of a chemical reaction between solid and gas constituents is studied in 1D-case. The dependence of the chemical affinity on stresses and strains is derived as a result of the analysis of mass, momentum and energy balances and the entropy inequality. The kinetic equation is formulated for the reaction rate. The propagation of the reaction front in an elastic and visco-elastic rod is studied at stationary and cyclic loading. Reaction locking effect and the influence of the stress sign (tension/compression) and viscosity are examined. The results obtained allow to clarify how the type of loading, material rheology and transformation strains affect the reaction. This in turn may be taken into account for 3D-problems statements.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПОДЛОЖЕК ИЗ САПФИРА С ПОМОЩЬЮ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Днепровский В. Г.[1], **Карапетьян Г. Я.**[1], **Зорин Д. А.**[2]
[1]*НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону*
[2]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Обсуждается новый метод исследования поверхности сапфировых кристаллов с использованием поверхностных акустических волн, генерируемых в сапфировом кристалле в диапазоне частот от 1,8 до 2,3 МГц с помощью клинообразного преобразователя, и в диапазоне 119–123 МГц посредством встречно-штыревого преобразователя на подложке ниобата лития через тонкий слой жидкости.

Сапфир при комнатных температурах является одним из лучших диэлектриков. Его показатель преломления увеличивается с уменьшением длины волны и достигает значения 2,5 в ультрафиолетовом диапазоне ($\lambda = 0,1425$ мкм). Наличие дефектов и повреждений оказывает решающее влияние на качество кристаллов, нашедших широкое применение в высокотемпературной оптике и микроэлектронике. В то же время неразрушающие методы контроля и исследования дефектности и внутренних напряжений изделий из сапфира пока еще применяются недостаточно.

Привлекательность применения поверхностных акустических волн (ПАВ) для решения задач неразрушающего контроля обусловлена следующими факторами: зарождением трещиноподобных дефектов, химическим, коррозионным и абразивным разрушениями, происходящими чаще всего в поверхностных и приповерхностных слоях объектов; распространение ПАВ в поверхностном слое толщиной несколько миллиметров позволяет выявлять приповерхностные дефекты порядка микрометров, которые практически невозможно выявить другими методами.

В данной работе был предложен способ опроса преобразователей излучающих и принимающих ПАВ с помощью измерения частотной характеристики параметра S11 с дальнейшим Фурье преобразованием этой зависимости для получения временных зависимостей, а также способ возбуждения ПАВ в исследуемом образце с помощью пьезоэлектрического звукопровода со встречно-штыревым преобразователем (ВШП) через тонкий слой жидкости между пьезоподложкой и поверхностью исследуемого образца.

Были проведены исследования шлифованного кристалла сапфира диаметром 60 мм и толщиной 5 мм, а также полированного кристалла сапфира прямоугольной формы с размерами $0,5 \times 3 \times 12$ см. ПАВ возбуждались с помощью клинообразных преобразователей, причем для кристалла сапфира угол клина равнялся 30^o (рисунок 1).

В предлагаемом методе неразрушающего контроля при периодической подаче на преобразователь ПАВ зондирующего электромагнитного импульса, в котором частота дискретно меняется по линейному закону, производится измерение

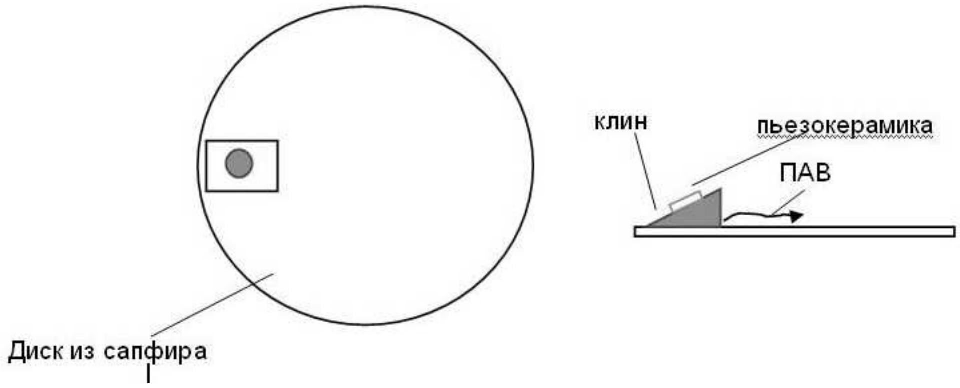


Рисунок 1 – Определение поверхностных дефектов в сапфире с помощью клинообразного преобразователя ПАВ

частотной зависимости комплексного коэффициента отражения S11 этого преобразователя, ПАВ и последующее Фурье преобразование полученной частотной зависимости, по которому можно определить местоположение и величину дефекта по амплитуде и задержке отраженных от него ПАВ. Причем длительность зондирующего электромагнитного импульса выбирается таким образом, что измерение на каждой частоте ведется некоторое время, за которое ПАВ проходит расстояние большее, чем удвоенное расстояние между преобразователем и дефектом. Частота заполнения электромагнитного импульса формируется с помощью цифрового синтезатора частоты с дискретностью перестройки в 1 Гц для повышения точности измерения.

В качестве измерителя частотных характеристик использовался измеритель комплексных коэффициентов передачи (ИККП) «Обзор-103». Зондирующий электромагнитный импульс с линейной частотной модуляцией и с дискретностью перестройки частоты в 1 Гц от этого прибора подается на клиновидный преобразователь ПАВ, который их возбуждает в кристалле сапфира, на котором могут быть дефекты, от которых отражаются ПАВ. Измерения производятся в диапазоне частот $1,8-2,3$ МГц. В этом диапазоне частот длина ПАВ будет меньше толщины кристалла сапфира, что дает возможность распространяться ПАВ вдоль поверхности кристалла.

В диапазоне частот $119-123$ МГц поиск дефектов на поверхности кристалла производился при возбуждении ПАВ с помощью однонаправленного ВШП с внутренними отражателями, расположенного на пьезоподложке из ниобата лития $YX/128^o$ — среза через тонкий слой жидкости (спирт, вода). Это позволяет возбуждать ПАВ с длиной $10-12$ мкм для выявления мелких дефектов в исследуемом образце.

ПАВ возбуждались с помощью клинообразных преобразователей на низких частотах ($1,8-2,3$ МГц). Зондирующий электромагнитный импульс с линейной частотной модуляцией и с дискретностью перестройки частоты в 1 Гц от этого прибора подается на клиновидный преобразователь ПАВ, который возбуждает их в монокристалле сапфира. В случае наличия дефектов в приповерхностной области образца, наблюдается отражение от них части энергии поверхностной волны.

Измерения производились в диапазоне частот $1,8-2,3$ МГц и $1,95-2$ МГц. Измерения проводились при разных длительностях импульса с линейной частотной модуляцией: $0,55$ с, $1,25$ с и $24,8$ с. При этом уровень шумов при наименьшем времени составил 40 дБ, а при наибольшем — более 120 дБ. На Фурье-преобразованиях частотных зависимостей параметра S11 хорошо видны отраженные ПАВ от краев кристалла (рисунок 2).

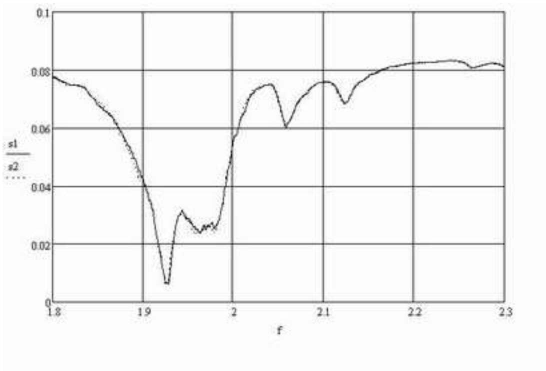


Рисунок 2 – Частотная зависимость клинообразного преобразователя на шлифованном диске сапфира

Из рисунка 2 видно, что преобразователь эффективно излучает ПАВ в районе 2 МГц. На рисунке видна изрезанность АЧХ из-за отражений ПАВ от края диска. Фурье-преобразование этой АЧХ позволяет увидеть отраженный импульс во временной области (рисунки $3, 4$). Из этих рисунков видно, что отраженный импульс достаточно близко располагается от стробирующего импульса. Поэтому нельзя сказать, что нет отражений от дефектов на кристалле, так как этих импульсов может быть не видно из-за близости стробирующего импульса. Кроме того, длина ПАВ здесь равна примерно 2 мм, что не позволяет обнаруживать мелкие дефекты (менее 1 мм).

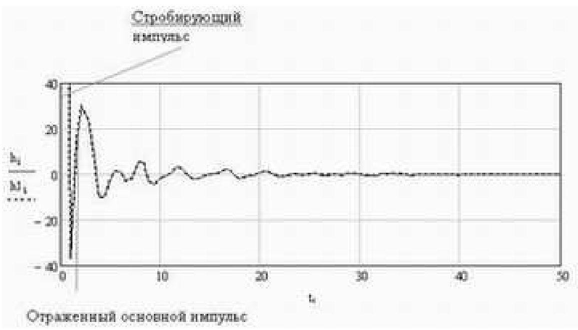


Рисунок 3 – Временная зависимость клинообразного преобразователя на шлифованном кристалле сапфира диаметром 60 мм. По горизонтальной оси время $t = 0,2t_i$ мкс

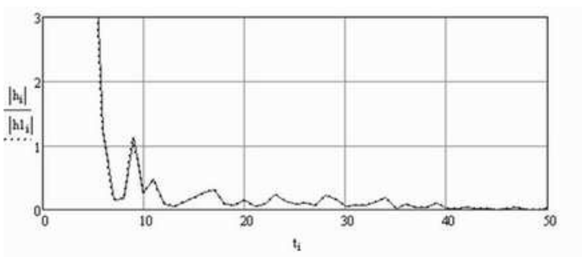


Рисунок 4 – Временная зависимость клинообразного преобразователя на полированном прямоугольном кристалле сапфира

Из этих рисунков видно, что отраженный от края импульс находится дальше от стробирующего импульса в прямоугольном кристалле сапфира, так как его длина вдвое превышает диаметр круглого шлифованного кристалла. Остальные импульсы на этих рисунках являются переотражениями от краев кристаллов. Кроме того, наиболее вероятные мелкие дефекты, размеры которых много меньше 1 мм, как уже отмечалось, не будут обнаружены этим методом, так как длина ПАВ в 2 раза превышает эту величину. Поэтому надо значительно повысить частоту ПАВ. Имеются преобразователи ПАВ, представляющие собой пьезоподложку из YX/128^o — среза ниобата лития, на полированной поверхности которого расположен однонаправленный ВШП [1]. С помощью такого преобразователя можно будет возбуждать и принимать ПАВ в сапфировой подложке с полированной поверхностью, чтобы они не затухали на шероховатостях, так как будут возбуждаться ПАВ с частотой 120 МГц и длиной волны 35 мкм. Возбуждение ПАВ будет производится через тонкий слой жидкости между пьезоподложкой и поверхностью сапфировой подложки (рис. 5).

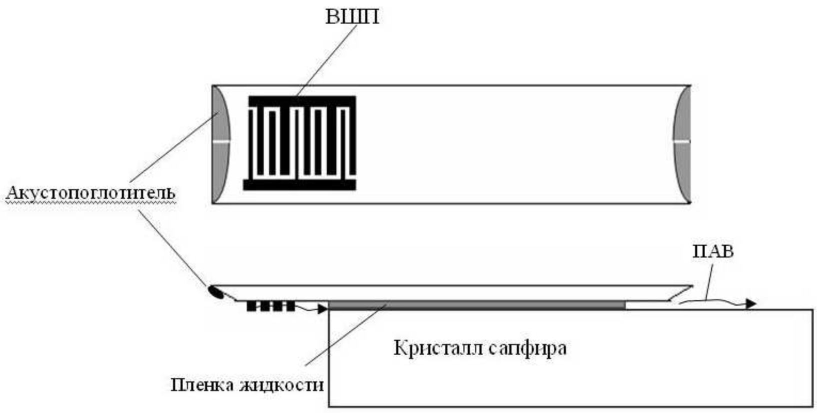


Рисунок 5 – Возбуждение ПАВ в кристалле сапфира с помощью однонаправленного ВШП

В качестве жидкости использовался спирт-ректификат. Толщина слоя жидкости была не более 2 мкм.

На рисунке 6 показана частотная зависимость преобразователя ПАВ в виде ВШП на подложке ниобата лития, когда такой преобразователь не касается (пунктирная линия) и касается (сплошная линия) полированного кристалла сапфира через слой жидкости. Как видно из этого рисунка, кривые имеют изрезанный вид, что свидетельствует о существенном отражении ПАВ как от края подложки ниобата лития, так и от края кристалла сапфира, поскольку период изрезанности при этом меньше, чем при отражении от края подложки ниобата лития. На рисунке 7 показаны временные характеристики, которые получаются как Фурье- преобразование частотных. Из этих зависимостей хорошо видно, что ПАВ хорошо отражаются от края подложки ниобата лития (пунктирная кривая) и от края кристалла (сплошная кривая). Но также видно, что имеются отражения ПАВ с задержкой большей, чем при отражениях от края подложки из ниобата лития.

Это означает, что ПАВ проникают через слой жидкости и проходят в кристалл сапфира, где они отражаются от его края и снова возвращаются на ВШП, прохо-

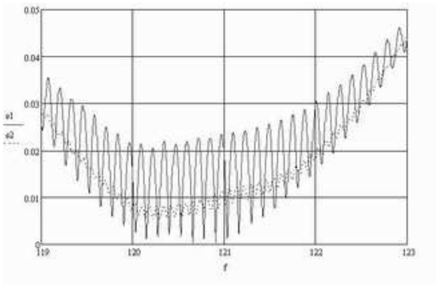


Рисунок 6 – Частотные зависимости преобразователя ПАВ в виде ВШП на подложке ниобата лития. Сплошная линия: преобразователь прижат к сапфиру через слой жидкости. Пунктирная линия: преобразователь без кристалла сапфира (то же — на рис. 7 и 8).

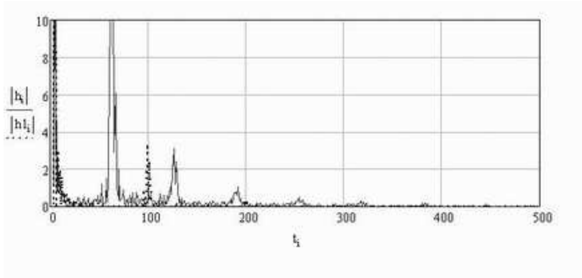


Рисунок 7 – Временная зависимость преобразователя ПАВ с однонаправленным ВШП на полированном прямоугольном кристалле сапфира (время $t = 32t_i/1000$ мкс)

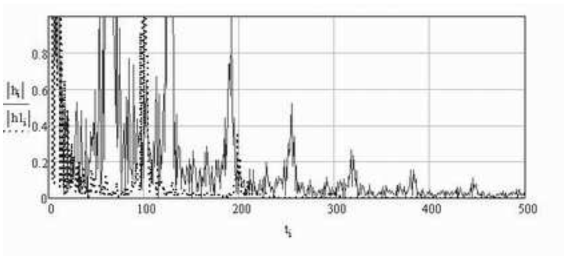


Рисунок 8 – Временная зависимость преобразователя ПАВ с однонаправленным ВШП на полированном прямоугольном кристалле сапфира в уменьшенном масштабе

дя слой жидкости. Видно (рисунок 8), что имеются многочисленные отражения, которые возможно являются отражениями от дефектов кристалла, так как длина ПАВ на этих частотах не превышает 35 мкм. Поэтому они могут эффективно отражаться от дефектов с размерами в несколько микрон.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Карапетьян Г. Я., Багдасарян С. А., Багдасарян Н. С.* «Однонаправленный преобразователь поверхностных акустических волн», патент РФ на изобретение № 2195069, приоритет 08.04.2002, БИ № 35, 2002.

Dneprovsky V. G.,Karapetyan G. Ya., Zorin D. A. *Investigation of Sapphire Wafers Surface Using Surface Acoustic Waves.* A new method of research of a surface of sapphire crystals using surface acoustic waves generated at frequencies of 1.8 to 2.3 MHz by a wedge-shaped converter, and at frequencies 119–123 MHz excited in the sapphire crystal by interdigital transducer on the substrate of lithium niobate through the thin layer of liquid is discussed.

ВЫЧИСЛЕНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА–КАРМАНА

Долгих Т. Ф.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена задача о стационарном течении вязкой жидкости в случае конвекции Рэлея–Бенара–Кармана в цилиндре с непроницаемыми границами и вращающимися в противоположные стороны основаниями, на которых задана разность температур. Численно исследовано качественное изменение стационарных режимов течения жидкости при изменении числа Рэлея с помощью метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона. Представлены результаты расчётов для различных отношений высоты цилиндра к его радиусу и определены критические числа потери устойчивости.

Введение. Задача о конвекции Рэлея–Бенара–Кармана в случае, когда отношения высоты цилиндра к радиусу равно единице, исследована в работе [1]. Для исследования потери устойчивости основного режима течения взамен традиционного решения спектральной задачи теории гидродинамической устойчивости используется прямой численный метод решения нестационарной задачи в сочетании с движением по параметру (числу Рэлея). В первую очередь это связано с тем, что явные выражения для основного режима течения в рассматриваемой задаче отсутствуют. Обычно основной режим находят численно, и затем решают задачу устойчивости, линеаризованную на полученном решении исходной задачи. В работе [1] показано, что гораздо эффективнее строить численное решение исходной задачи при помощи метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона. Дополнительное преимущество такого подхода в том, что при движении по параметру легко следить за качественными изменениями структуры течения. Следует сказать, что количественные характеристики изменения качественного поведения решения во многих задачах, включая рассматриваемую, часто выбрать достаточно сложно.

В данной работе методами [1] численно исследована задача о конвекции Рэлея–Бенара–Кармана для цилиндров, у которых отношения высоты цилиндра к радиусу $2h/R = 0.25$ и $2h/R = 4$. В случае $2L/R = 4$, в частности, показано, что такая, на первый взгляд разумная характеристика, как симметрия решения, точнее соответствующий коэффициент симметрии, не описывает качественные перестройки решения — режимам течения с двумя и четырьмя вихрями отвечает один и тот же коэффициент симметрии.

1. Основные уравнения. Уравнения, описывающие конвекцию Рэлея–Бенара–Кармана в вязкой несжимаемой жидкости в цилиндре, вдоль оси которого действует сила тяжести, с предположением вращательной симметрии и стационарности, в цилиндрических координатах и безразмерных переменных имеют вид

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} - \frac{v^2}{r}\boldsymbol{k_r} + \frac{uv}{r}\boldsymbol{k_\varphi} = -\nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}\mathrm{Re}^2}\,\theta\boldsymbol{k_z}, \tag{1}$$

$$-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k_z}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta=\frac{1}{\mathrm{PrRe}}\Delta\theta,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,$$

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \nabla=\boldsymbol{k_r}\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{k_z}\frac{\partial}{\partial z},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}(A_r,A_\varphi,A_z)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{k_r}+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{k_\varphi}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{k_z}.$$

На основаниях цилиндра, которые вращаются с одинаковой по величине Ω ($\Omega=1$), но противоположной по направлению угловой скоростью, заданы условия прилипания и температура, а на боковых стенках цилиндра — условия прилипания и отсутствие потока тепла

$$u=w=0,\quad v=\Omega r,\quad \theta=0,\quad z=h; \tag{2}$$

$$u=w=0,\quad v=-\Omega r,\quad \theta=0,\quad z=-h;$$

$$u=w_r=0,\quad v=0,\quad \theta_r=0,\quad r=0;$$

$$u=w=0,\quad v=0,\quad \theta_r=0,\quad r=R.$$

Здесь $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ — скорость, p — давление, θ — отклонение от равновесной температуры $T^{(0)}(z)$, $\boldsymbol{k_r}$, $\boldsymbol{k_\varphi}$, $\boldsymbol{k_z}$ — орты цилиндрической системы координат, R, h — радиус и полувысота цилиндра.

В качестве равновесной температуры $T^{(0)}(z)$ выбрано распределение

$$T^{(0)}(z)=\frac{T_0(h-z)}{2h},\quad T_0=1, \tag{3}$$

где T_0 — температура нижнего основания цилиндра.

Такой выбор равновесной температуры соответствует решению задачи $\boldsymbol{v}=0$, при $\Omega=0$, $T^{(0)}(-h)=T_0$, $T^{(0)}(h)=0$. Температура в области имеет вид

$$T(x,z)=T^{(0)}(z)+\theta(x,z). \tag{4}$$

Связь между размерными и безразмерными величинами имеет вид

$$\{\overline{\boldsymbol{v}},\overline{p},\overline{T},\overline{r},\overline{z}\}=\{R_*\Omega_*\boldsymbol{v},\ R_*^2\Omega_*^2\rho_*p_*,\ T_*T,\ R_*r,\ R_*z\},\quad h_*=hR_*,$$

где R_* — радиус цилиндра, h_* — полувысота цилиндра, ρ_* — плотность жидкости. Числа Рейнольдса Re, Прандтля Pr и Рэлея Ra заданы соотношениями

$$\mathrm{Re}=\frac{\Omega_*R_*^2}{\mu_*},\quad \mathrm{Ra}=\frac{g_*\beta_*T_*R_*^3}{\delta_*\mu_*},\quad \mathrm{Pr}=\frac{\mu_*}{\delta_*},$$

где g_* — ускорение силы тяжести, Ω_*, R_*, T_* — величины угловой скорости, радиуса и разности температур, δ_* — коэффициент температурного расширения, β_* — температуропроводность, μ_* — кинематическая вязкость.

2. Результаты вычислительных экспериментов. Для отыскания решения задачу (1)–(3) приводим к операторному виду $F(u,v,w,p,\theta)=0$ — вариационной форме, которая обычно применяется для решения задачи Стокса методом конечных элементов (подробнее см. [1]).

Операторное уравнение решаем методом Ньютона

$$DF(\boldsymbol{v}^k, p^k, \theta^k)(\delta\boldsymbol{v}, \delta p, \delta\theta) = F(\boldsymbol{v}^k, p^k, \theta^k), \quad (\boldsymbol{v}, p, \theta)^{k+1} = (\boldsymbol{v}, p, \theta)^k - (\delta\boldsymbol{v}, \delta p, \delta\theta),$$

где DF — производная Фреше.

Численное решение осуществляем с помощью пакета конечных элементов FreeFem++ [2]. Зеркальную симметрию $(u, v, w, p, \theta)(r, z) = (u, v, -w, p, -\theta)(r, -z)$ решения задачи (1)–(3), контролируем при помощи коэффициента симметрии функции тока ψ

$$S = \int\limits_{D_+} \Psi\, dr\, dz \Big/ \int\limits_{D_-} \Psi\, dr\, dz, \quad D_\pm = \{0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant z \leqslant \pm h\}.$$

Обеспечение возможной симметрии относительно $z = 0$ при вычислениях обеспечивалось выбором симметричной квадратной сетки. Для проведения расчётов, которые проводились с относительной погрешностью не превышающей 10^{-9}, задавалось 1800 кусочно-квадратичных элементов. Расчёты осуществлялись с некоторым шагом по Ra, а все остальные параметры задавались фиксированными

$$\mathrm{Re} = 90, \quad \mathrm{Pr} = 1.$$

На рис. 1 приведены изолинии функции тока для различных значений числа Рэлея

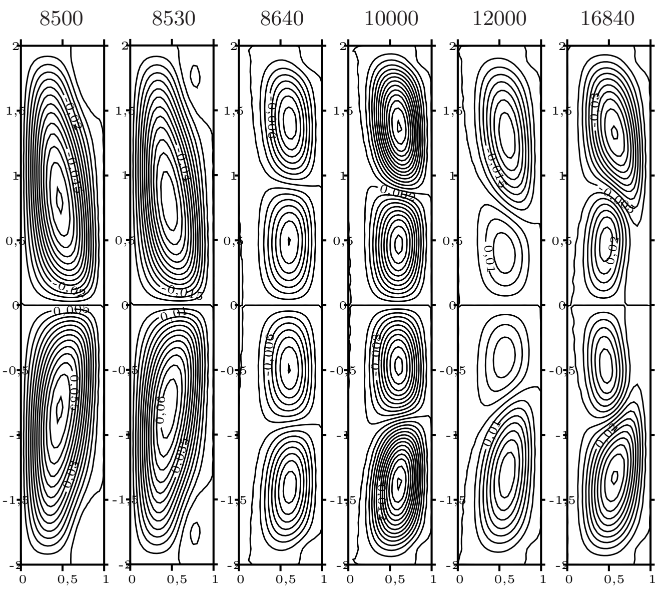


Рисунок 1 – Изолинии функции тока для различных значений Ra, $2h/R = 4$

На рис. 2, 3 даны изолинии скоростей $u(x, z)$, $v(x, z)$, $w(x, z)$, функции тока $\psi(x, z)$, температуры $\theta(x, z)$, азимутальной компоненты вихря скорости $\omega(x, z)$ и давления $p(x, z)$ для значений числа Рэлея $\mathrm{Ra} = 8530$ и $\mathrm{Ra} = 8640$ в случае $2h/R = 4$. Именно на интервале $8540 \lesssim \mathrm{Ra} \lesssim 8640$ происходит изменение структуры течения — режим с двумя вихрями теряет устойчивость и переходит в режим с четырьмя вихрями.

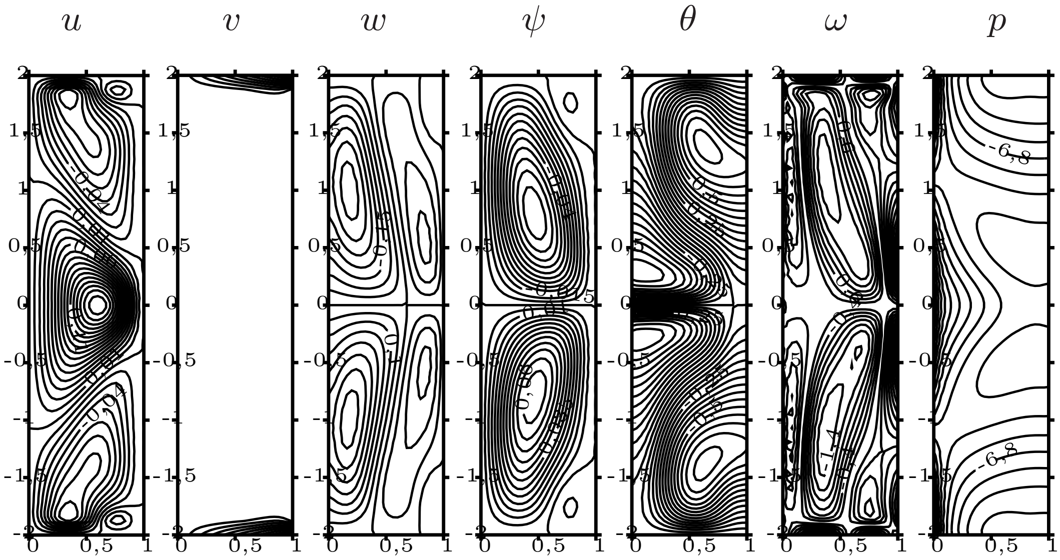


Рисунок 2 – Изолинии характеристик течения $\mathrm{Ra} = 8530$, $2h/R = 4$

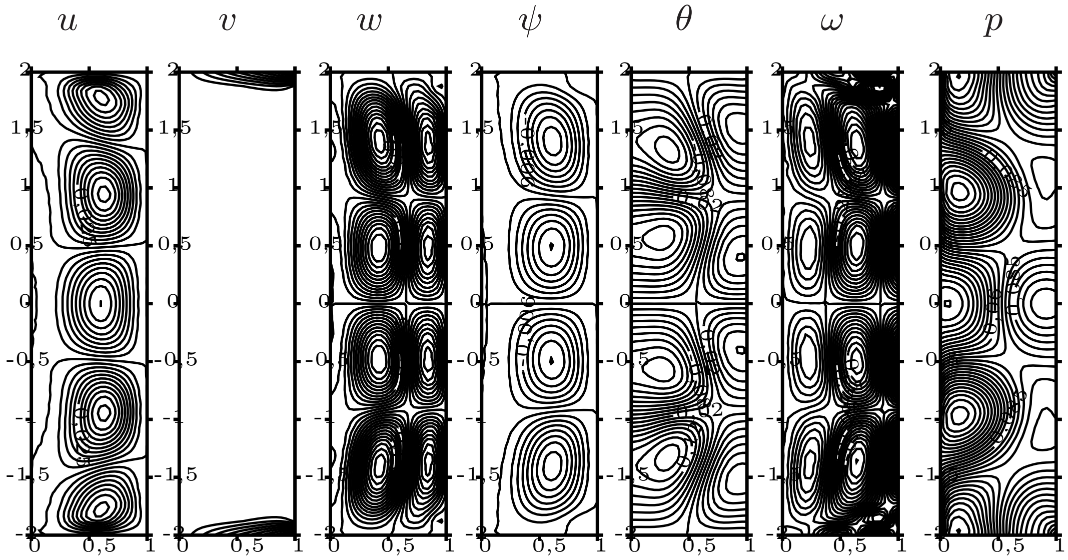


Рисунок 3 – Изолинии характеристик течения $\mathrm{Ra} = 8640$, $2h/R = 4$

Обратим внимание на то, что потеря устойчивости происходит без потери зеркальной симметрии. В частности, это означает, что если в качестве бифуркационной кривой выбирать зависимость коэффициента симметрии от числа Рэлея: $S = S(\mathrm{Ra})$, то такой переход между режимами не будет наблюдаться.

На рис. 4 показаны изолинии скоростей $u(x, z)$, $v(x, z)$, $w(x, z)$, функции тока $\psi(x, z)$, температуры $\theta(x, z)$, азимутальной компоненты вихря скорости $\omega(x, z)$ и давления $p(x, z)$ для значений числа Рэлея $\mathrm{Ra} = 17000$ в случае $2h/R = 0.25$. Вплоть до значений $\mathrm{Ra} \approx 18000$ основной режим не теряет устойчивости, что находится в хорошем соответствии с асимптотическими результатами работы [3].

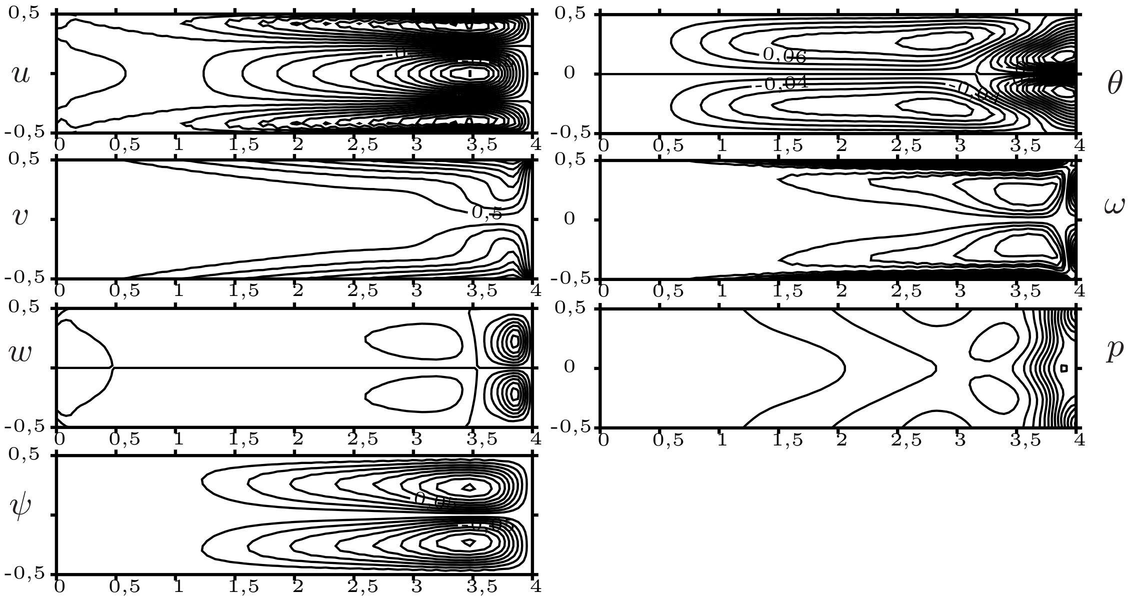


Рисунок 4 – Изолинии характеристик течения $\mathrm{Ra} = 8640$, $2h/R = 0.25$

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Расчет стацонарных режимов конвекции Рэлея–Бенара–Кармана // Труды XVI Международной конференции «Современные проблемы МСС», Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2012. С. 99–103.

[2] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

[3] *Молодчаная А. В., Ширяева Е. В.* Асимптотическая модель конвекции Бенара–Кармана для тонких цилиндров // Труды XV Международной конференции «Современные проблемы МСС», Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2011. С. 176–180.

Dolgikh T. F. *Calculation of bifurcation curves for stationary problem of the Rayleigh–Benard–Karman convection.* The problem on the Rayleigh–Benard–Karman convection in cylinder is studied. Qualitative change of stationary modes of fluid flow is investigated. To solve the problem we use the finite element method and the Newton method. The results of calculations for different relations height of the cylinder to its radius is presented.

ВЫВОД ПРУЖИННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА РАЗНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ (ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

Дорошенко О. В., Голуб М. В.
Институт математики, механики и информатики,
Кубанский государственный университет, Краснодар

При выводе значений матрицы жесткости для пружинных граничных условий, описывающих повреждённый интерфейс в трёхмерном случае, используется решение задачи о рассеянии плоских упругих волн на круглой интерфейсной трещине. При относительно малых размерах трещин или низких частотах строится асимптотическое решение для одиночной трещины, дающее простой вид матрицы жесткости. Пренебрегая взаимодействием трещин, полное рассеянное волновое поле описывается путём усреднения по ансамблю. Приравнивая коэффициенты прохождения для распределения трещин и для пружинных граничных условий, определяются диагональные элементы матрицы жесткости, выражаемые через упругие модули материалов и отношение площади повреждённой части к общей рассматриваемой площади.

1. Введение. Композитные материалы в настоящий момент широко используются вследствие лучших по сравнению однородными материалами свойств, что достигается комбинацией различных материалов. При неразрушающем контроле конструкций нередко используют упругие волны, по амплитудам которых получают информацию о состоянии структуры. Наличие интерфейсов не только усложняет волновую картину, но и увеличивает риск образования внутренних дефектов. Соответственно, для идентификации дефектов с приемлемой точностью методами неразрушающего контроля и мониторинга структур необходимы эффективные математические и компьютерные модели, описывающие колебания повреждённых конструкций при распространении волн. Начиная со второй половины XX века теоретически и экспериментально стали активно исследоваться задачи распространения упругих волн через интерфейсы с повреждениями, были рассмотрены различные варианты распределения и ориентации микротрещин [1].

Были также созданы модели для описания поврежденных или неидеальных интерфейсов, которые во многом опираются на подходы, разработанные для случая идеального контакта: пружинные граничные условия (ПГУ) или замена поврежденной зоны вязкоупругим тонким слоем со свойствами, определяемыми микроструктурой зоны неидеального контакта [2]. Такого рода повреждения моделируются как набор трещин или как распределение пятен контакта между свободными от напряжений поверхностями [3]. Выведенные ранее ПГУ с явно выраженными константами позволяют эффективно и просто описывать прохождение упругих волн через зоны повреждённости в плоском случае [4] и в трёхмерном случае для задач статики [5]. В трёхмерном случае значения для ПГУ были получены только для случая контакта одинаковых материалов, соответственно, настоящая работа расширяет границы применимости на случай различных изотропных материалов для динамических задач, используя подход Бострёма–Викхема [6].

2. Пружинные граничные условия.

Для описания рассеяния на некотором распределении трещин можно ввести эквивалентные им по дифракционным свойствам пружинные граничные условия:

$$\boldsymbol{\tau}^1 = \boldsymbol{\tau}^2 = \kappa\left(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right), \tag{1}$$

где κ — матрица 3×3, диагональная в изотропном случае, с жесткостями, определяемыми путем приравнивания коэффициентов прохождения для распределения трещин и ПГУ. Из рассмотрения падающей под прямым углом к интерфейсу P-волны может быть определён элемент κ_{33}, аналогично могут быть найдены компоненты $\kappa_{11} = \kappa_{22}$, если рассмотреть S-волны с поляризацией $\theta = (0^\circ, 90^\circ)$. Для волнового поля с учетом ПГУ в трехмерном случае справедливо представление

$$\mathbf{u}^{\mathrm{s}} = \begin{cases} \mathbf{p}^s\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^1 z} + \hat{R}_s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_s^1 z}\right), & z < 0, \\ \mathbf{p}^s\hat{T}_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s^2 z}, & z > 0, \end{cases}$$

$$\hat{R}_s^- = \frac{\mathrm{i}c_1^s k_1^s c_2^s k_2^s + \kappa_s(c_1^s k_1^s - c_2^s k_2^s)}{\mathrm{i}c_1^s k_1^s c_2^s k_2^s + \kappa(c_1^s k_1^s + c_2^s k_2^s)}, \quad \hat{T}_s^- = \frac{2\kappa_s c_1^s k_1^s}{\mathrm{i}c_1^s k_1^s c_2^s k_2^s + \kappa_s(c_1^s k_1^s + c_2^s k_2^s)}. \tag{2}$$

Индекс $s = 1, 2$ обозначает падение P и S волн, j указывает на полупространство, при этом k_j^s — волновое число, а $c_j^1 = \mu_j + 2\lambda_j$ и $c_j^2 = \mu_j$ выражены через упругие модули λ_j и μ_j. Для определения κ_s необходимо получить полный коэффициент прохождения для распределения трещин, который в свою очередь зависит от скачка смещений на одиночной трещине.

3. Решение для одиночной круговой трещины.

Для описания волнового поля, рассеянного круговой трещиной, выполняется переход в цилиндрическую систему координат, где компоненты вектора перемещений в каждом из полупространств $j = 1, 2$, записанные в терминах потенциалов ψ_i, удовлетворяют волновым уравнениям

$$\nabla^2\psi_{3,j} + h_j^2\psi_{3,j} = 0, \quad \nabla^2\psi_{i,j} + k_j^2\psi_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь h_j — волновое число для продольных волн ($k_j^1 = h_j$), а k_j для поперечных волн ($k_j^2 = k_j$). Для потенциалов справедливо представление в виде рядов [8]

$$\psi_1(r,\theta,z) = \sum_{l=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_1^m(r,z)\chi_2^{l,m}(\theta) \quad \psi_i(r,\theta,z) = \sum_{l=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_i^m(r,z)\chi_1^{l,m}(\theta) \quad i = 2, 3$$

$$\chi_2^{1,m}(\theta) = \chi_1^{2,m}(\theta) = \sin m\theta, \quad \chi_1^{1,m}(\theta) = -\chi_2^{2,m}(\theta) = \cos m\theta.$$

Подстановка разложений в волновые уравнения и применение интегрального преобразования Ханкеля позволяет получить следующие выражения:

$$\psi_{i,j}^m(r,z) = \int_0^\infty \Psi_{i,j}^m(\alpha)e^{-\sigma_{i,j}|z|}J_m(\alpha r)\alpha, \mathrm{d}\alpha \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

$$\sigma_{3,j} = \sqrt{\alpha^2 - h_j^2}, \quad ; \quad \sigma_{1,j} = \sigma_{2,j} = \sqrt{\alpha^2 - k_j^2}, \quad \operatorname{Im}\sigma_n \geqslant 0, \operatorname{Re}\sigma_n \leqslant 0.$$

В терминах потенциалов в силу свойств преобразования Ханкеля гораздо удобнее использовать $u_r^m \pm u_\theta^m$ и $\tau_{rz}^m \pm \tau_{\theta z}^m$ [8], а рассеянное поле

$$\mathbf{w}^{\mathrm{sc},lm}(r,z) = \begin{cases} \mathbf{w}_1^{\mathrm{sc},lm}(r,z) = \int\limits_0^\infty \mathrm{J}^{lm}(\alpha r) K_1^l(\alpha,z)\mathbf{Q}^{lm}(\alpha)\alpha\,\mathrm{d}\alpha, & z<0 \\ \mathbf{w}_2^{\mathrm{sc},lm}(r,z) = \int\limits_0^\infty \mathrm{J}^{lm}(\alpha r) K_2^l(\alpha,z)\mathbf{Q}^{lm}(\alpha)\alpha\,\mathrm{d}\alpha, & z>0 \end{cases}, \tag{5}$$

$$\mathrm{J}^{ml}(\alpha r) = \begin{pmatrix} J_{m+(-1)^l}(\alpha r) & 0 & 0 \\ 0 & J_{m-(-1)^l}(\alpha r) & 0) \\ 0 & 0 & J_m(\alpha r) \end{pmatrix},$$

может быть записано в компактном виде через матрицы Грина $K_j^l(\alpha,z)$ [7]

$$K_j^l(\alpha,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[M_j(\alpha,z)-N_j(\alpha,z)] & -\frac{1}{2}[M_j(\alpha,z)+N_j(\alpha,z)] & (-1)^l\alpha P_j(\alpha,z) \\ -\frac{1}{2}[M_j(\alpha,z)+N_j(\alpha,z)] & \frac{1}{2}[M_j(\alpha,z)-N_j(\alpha,z)] & -(-1)^l\alpha P_j(\alpha,z) \\ -(-1)^l\alpha S_j(\alpha,z) & (-1)^l\alpha S_j(\alpha,z) & R_j(\alpha,z) \end{pmatrix}.$$

Векторы $\{P_j(\alpha,z),0,R_j(\alpha,z)\}$ и $\{Mj(\alpha,z),0,S_j(\alpha,z)\}$ — антисимметричные решения для полупространств в плоском случае, а $\{0,N_j(\alpha,z),0\}$ — в антиплоском:

$$M_j(\alpha,z) = (-1)^{j+1}\frac{\mu_j\sigma_{1,j}}{\Delta_j}\left[\eta_j e_{1,j} - 2\alpha^2 e_{3,j}\right],$$

$$S_j(\alpha,z) = \frac{\mu}{2\Delta_j}\left[\eta_j e_{3,j} - 2\sigma_{1,j}\sigma_{3,j}e_{1,j}\right], \quad P_j(\alpha,z) = \frac{\mu}{2\Delta_j}\left[2\sigma_{1,j}\sigma_{3,j}e_{3,j} - \eta_j e_{1,j}\right],$$

$$R_j(\alpha,z) = (-1)^j\frac{\mu\sigma_{1,j}}{\Delta_j}\left[-\eta_j e_{1,j} + 2\alpha^2 e_{3,j}\right], \quad N_j(\alpha,z) = \frac{(-1)^j}{\sigma_{1,j}}e_{1,j},$$

$$e_{k,j} = \mathrm{e}^{-\sigma_{k,j}|z|} \quad \eta_j = 2\,\alpha^2 - k_j{}^2 \quad \Delta_j = \mu_j[(2\alpha^2-k_j{}^2)^2 - 4\alpha^2\sigma_{1,j}\sigma_{3,j}]$$

Граничные условия $\{\tau_{rz}^{lm},\tau_{\theta z},\tau_{zz}^{lm}\}\big|_{z=0} = \{q_1,q_2,q_3\}$ также могут быть переписаны

$$\mathbf{q}^{lm}(r) = \left\{\tau_{rz}^{lm}(r,0)+\tau_{\theta z}^{lm}(r,0), \tau_{rz}^{lm}(r,0)-\tau_{\theta z}^{lm}(r,0), \tau_{zz}^{lm}(r,0)\right\},$$

$$\mathbf{Q}^{lm}(\alpha) = \int\limits_0^\infty \mathrm{J}^{lm}(\alpha r)\mathbf{q}^{lm}(r) r\,\mathrm{d}r,$$

Подстановка интегральных представлений для напряжений в рассеянном поле $\tau^{sc,lm}$ приводит к системе интегральных уравнений

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{J}^{lm}(\alpha r)L^l(\alpha)\Delta\mathbf{W}^{lm}(\alpha)\alpha\,\mathrm{d}\alpha = -\mathrm{i}c_1^s k_1^s(1-R_s^-)\tilde{\mathbf{w}}_s^{lm}, \quad L^l(\alpha) = [K_1^l(\alpha,0)-K_2^l(\alpha,0)]^{-1},$$

где компоненты скачка смещений $\mathbf{w}^{lm}(r) = \mathbf{w}_1^{sc,lm}(r,0^-) - \mathbf{w}_2^{sc,lm}(r,0^+)$ отыскиваются в виде разложения по присоединенным полиномам Лежандра [8]:

$$\Delta w_k^{lm}(r,\theta) = \sum_{t=0}^\infty \beta_{kt}^{lm}\psi_{kt}^m(r)\chi^{lm}(\theta), \tag{6}$$

$$\psi^m_{(3/2\pm 1/2)t}(r) = \frac{P^{m\pm 1}_{m+2t+1\pm 1}\left(\sqrt{1-r^2/a^2}\right)}{P^m_{m+2t+1\pm 1}(0)}, \psi^m_{3t}(r) = \frac{P^m_{m+2t+1}\left(\sqrt{1-r^2/a^2}\right)}{P^{m+1}_{m+2t+1}(0)}.$$

После применения к интегральному уравнению схемы Галеркина получили систему уравнений, решением которой являются коэффициенты разложения:

$$\sum_{k=0}^{3}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{lm}_{kt}\int_0^{\infty} L^l_{ik}\Psi^{ml}_{kt}(\alpha a)\Psi^{ml}_{jt'}(\alpha a)\alpha^2 \mathrm{d}\alpha = -\mathrm{f}\tilde{w}^s_i\int_0^a \psi_{jt'}(r) r \mathrm{d}r$$

где $\mathrm{f} = -\mathrm{i}c^s_1 k^s_1(1-R^-_s)$, $i = 1,2,3$, $j = 2,1,3$ (при $l = 1$), $j = 1,2,3$ (при $l = 2$). Поскольку преобразование Ханкеля от базисных функций дает функции Бесселя, получаем решение для падающей P-волны с вектором $\tilde{\mathbf{w}}^1 = (0,0,1)$, $(l = 1, m = 0)$.

4. Распределение трещин.

В трехмерном случае плотность распределения трещин $C = S_{dam}/S_{total}$ также задается как отношение площади поврежденной (отслоившейся) области S_{dam} или суммарной площади трещин к общей рассматриваемой площади S_{total}. При относительно малых размерах трещин или низких частотах может быть построено асимптотическое решение, позволяющее выразить полный коэффициент прохождения через скачок перемещения на одиночной трещине, полученный выше. Рассматривается случай, когда дефекты одинаковы по размеру и распределены случайным образом, взаимодействием между ними пренебрежём. Для определения рассеянного поля используется среднее по ансамблю значение, которое вдали от границ полупространств представляется в виде плоских волн. Затем к полям u^{in}_y и u^{sc}_y применяется теорема Бетти для прямоугольного контура интегрирования. Поскольку ненулевой вклад в интегралы дают лишь два слагаемых, то после преобразований получаются выражения для амплитуд:

$$P^-_s = -\frac{1}{2}(1-R^-_s)C\mathbf{p}^s\cdot\bar{\mathbf{v}}^s, \quad P^+_s = -\frac{1}{2}(1+R^-_s)C\mathbf{p}^s\cdot\bar{\mathbf{v}}^s,$$

и полный коэффициент прохождения

$$\tilde{T} = T^-_s + P^+_s = T^-_s\left(1-\frac{1}{2}C\mathbf{p}^s\cdot\bar{\mathbf{v}}^s\right),$$

$$\mathbf{p}^s\cdot\bar{\mathbf{v}}^s = \int_0^{2\pi}\int_0^a\sum_{t=0}^{\infty}\beta_{3t}\psi^0_{3t}(r)\chi^{10}(\theta)\mathrm{d}\theta r\mathrm{d}r = -\mathrm{i}c^1_1k^1_1(1-R^-_s)\frac{2\pi a^2}{9}g_3,$$

$$g_3^{-1} = \left(\frac{l^2_{13}}{l_{12}}\cdot\frac{9}{8\pi}+l_{33}\cdot\frac{\pi}{6}\right), \quad \frac{l^2_{13}}{l_{12}} = \frac{2m_1m_2}{8m_1-m_2-32}, \quad l_{33} = \frac{2}{32-m_2^2},$$

$$m_1 = \frac{k_1^2}{h_1^2-k_1^2}-\frac{k_2^2}{h_2^2-k_2^2}, \quad m_2 = \frac{h_1^2}{h_1^2-k_1^2}-\frac{h_2^2}{h_2^2-k_2^2}.$$

Приравнивая коэффициенты прохождения $\hat{T}_s$ и $\tilde{T}_s$, можно получить значения для жесткости

$$\kappa = \frac{2\mathrm{i}}{C\mathbf{p}^s\cdot\bar{\mathbf{v}}^s}\cdot\frac{c^1_sk^1_sc^2_sk^2_s}{c^1_sk^1_s+c^2_sk^2_s} = -\frac{9g_3^{-1}}{\pi Ca^2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33011).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Sotiropoulos D. A., Achenbach J. D.* Reflection and transmission of ultrasound by a region of damaged material // Journal of Nondestructive Evaluation. 1990. Vol. 9. P. 22–32.

[2] *Baik J.M., Thompson R.B.* Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // J. Nondestr. Eval. 1984. V. 4. P. 177–196.

[3] *Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S.I., Seghi R.R.* Effective spring stiffness for a planar periodic array of collinear cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials // Mechanics of Materials. 2011. Vol. 43. P. 87—98.

[4] *Golub M.V., Boström A.* Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // Wave Motion. 2011. V. 48(2). P. 105–115.

[5] *Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S.I., Seghi R.R.* Effective spring stiffness for non-interacting penny-shaped cracks at an interface between two dissimilar, isotropic, linearly elastic materials // Mathematics and Mechanics of Solids. 2011. Vol. 16. P. 58—69.

[6] *Boström A., Wickham G.R.* On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Journal of Nondestructive Evaluation. 1991. V. 10. P. 139–149.

[7] *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // Прикладная математика и механика. 1996. Вып. 60. С. 282–289.

[8] *Krenk S., Schmidt H.* Elastic Wave Scattering by a Circular Crack // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1982. V. 308. P. 167–198.

Doroshenko O. V., Golub M. V. *3D spring boundary conditions derivation for non-perfect contact of dissimilar elastic isotropic media.* Stiffness matrix for spring boundary conditions in a three-dimensional case is constructed using a solution for plane elastic wave diffraction by a circular interface crack. Density of crack distribution is assumed a ratio of the damaged interface area to the total area considered. For cracks of small size and for low frequencies an asymptotic for a single circular crack can be constructed. The latter leads to a simple expression for the stiffness matrix. Total scattered wavefield is described using ensemble average technique if the interaction between the cracks is not taken into account. From the equality of the transmission coefficients for the distribution of cracks and spring boundary condition the diagonal elements of stiffness matrix are derived.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗДЕЛЕНИЯ СМЕСИ ВЕЩЕСТВ МЕТОДОМ КАПИЛЛЯРНОГО ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА

Елаева М. С.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

Рассмотрена математическая модель капиллярного зонального электрофореза, которая в бездиффузионном приближении представляет собой систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Тип этой системы может быть как гиперболическим, так и эллиптическим, в зависимости от начальных данных. С помощью обобщенного метода годографа получено точное решение задачи в форме нелинейной системы алгебраических уравнений. Проведены численные эксперименты в гиперболическом и эллиптическом случаях.

1. Постановка задачи. Математическая модель зонального электрофореза конструируется на основе общих уравнений массопереноса веществ электрическим полем в химически активной среде с «почти мгновенными» химическими реакциями [1, 2]. Предполагается, что многокомпонентная смесь состоит из двух групп веществ: буферной смеси и веществ, подлежащих фракционированию. Концентрации разделяемых веществ малы по сравнению с постоянными концентрациями веществ буферной смеси, но они влияют на проводимость всей смеси в целом. Под действием внешнего электрического поля группа разделяемых веществ перемещается в буферной смеси и, в течении некоторого времени, образует зоны, содержащие только чистые вещества. Упрощенная модель зонального электрофореза в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{i}_k = 0, \quad \boldsymbol{i}_k = -\varepsilon\gamma_k \nabla a_k + \gamma_k e_k(\overline{\psi}) a_k \boldsymbol{E}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \quad \sigma/\sigma_0 = 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k.$$

Здесь a_k, $\boldsymbol{i}_k$ — молярная концентрация и плотность молярного потока; $\boldsymbol{E}$ — напряженность внешнего электрического поля; $e_k(\overline{\psi})$ — молярный заряд компоненты при заданной кислотности смеси $\overline{\psi}$; $\boldsymbol{j}$ — плотность электрического тока; ε — характерный коэффициент диффузии; γ_k — подвижность компоненты в электрическом поле; σ — проводимость смеси; α_k — коэффициент влияния концентрации a_k на проводимость смеси.

На основе модели (1) строится модель капиллярного зонального электрофореза, которая является одномерной, поскольку процесс разделения протекает в тонком длинном капилляре. Кроме того, будем считать, что плотность электрического тока постоянная и достаточно большая величина. Это позволит пренебречь эффектами диффузии. Таким образом, получим следующую систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_k u_k}{1+s}\right) = 0, \quad s = \sum_{i=1}^{n} u_i, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь $u_k = \alpha_k a_k$ — «эффективные» концентрации, которые могут быть как положительными, так и отрицательными, но величина $1 + s > 0$, μ_k — электрофоретические подвижности.

Система уравнений (2) может быть записана в инвариантах Римана

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} + \lambda_k(R)\frac{\partial R_k}{\partial x} = 0, \quad \lambda_k(R) = R_k \prod_{i=1}^{n} \frac{R_i}{\mu_i}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Связь $u_k = u_k(R)$ дается соотношениями

$$u_s = \prod_{k=1}^{n} \mu_k \prod_{k=1}^{n} (\mu_s - R_k)\left(\mu_s \prod_{k=1}^{n} R_k \prod_{k=1, k\neq s}^{n} (\mu_s - \mu_k)\right)^{-1}.$$

Для определения обратной зависимости $R_k = R_k(u)$ следует найти корни характеристического полинома $L(R)$

$$L(R) \equiv \prod_{k=1}^{n} (\mu_k - R) - R \sum_{j=1}^{n} u_j \prod_{k=1, k\neq j}^{n} (\mu_k - R).$$

Тип системы уравнений (2) (или (3)) при $u_k \geqslant 0$ гиперболический. Однако, концентрации u_k могут быть как положительными, так и отрицательными, что может повлечь изменение типа квазилинейных уравнений. В частности, для двухкомпонентной смеси при $F(u_1, u_2) > 0$, $1 + s > 0$ тип системы — гиперболический, а в области $F(u_1, u_2) < 0$ тип системы — эллиптический, где

$$F(u_1, u_2) \equiv (\mu_1 + \mu_2 + u_1\mu_2 + u_2\mu_1)^2 - 4(1+s)\mu_1\mu_2.$$

2. Применение обобщенного метода годографа в гиперболическом случае. Рассмотрим двухкомпонентную смесь веществ. В этом случае система уравнений (2), дополненная начальными данными, имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_1 u_1}{1+s}\right) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_2 u_2}{1+s}\right) = 0, \quad s = u_1 + u_2, \tag{4}$$

$$u_1\big|_{t=0} = u_2^0 \mathcal{H}(x), \quad u_2\big|_{t=0} = u_2^0 \mathcal{H}(x), \quad \mathcal{H}(x) = \frac{1 + \operatorname{th} \beta x}{2}.$$

Здесь u_k^0 — заданные концентрации компонент, $\mathcal{H}$ — «непрерывный аналог» функции Хевисайда, β — параметр сглаживания.

Сделаем замену переменных $t \to \mu_1\mu_2 t$ и запишем систему (4) в терминах инвариантов Римана

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + R_i R_1 R_2 \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0, \quad R_i\big|_{t=0} = \mathcal{R}_i(x), \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

где $\mathcal{R}_1(x)$, $\mathcal{R}_2(x)$ — гладкие функции, определяемые корнями уравнения

$$(1 + s_0\mathcal{H}(x))\mathcal{R}^2 - (r_0\mathcal{H}(x) + (\mu_1 + \mu_2))\mathcal{R} + \mu_1\mu_2 = 0, \tag{6}$$

$$s_0 = u_1^0 + u_2^0, \quad r_0 = u_1^0\mu_2 + u_2^0\mu_1.$$

Обобщенный метод годографа применим ко многим так называемым одномерным системам гидродинамического типа [4–6]. Согласно этому методу решение диагональной полугамильтоновой системы, в частности, системы вида (5), определяется решением алгебраической системы уравнений

$$w_i(R) = x - \lambda_i(R)t,$$

где $w_i(R)$ — общее решение линейной системы уравнений с переменными коэффициентами

$$\partial_k w_i(R) = \frac{w_k(R) - w_i(R)}{\lambda_k(R) - \lambda_i(R)}\partial_k\lambda_i(R), \quad i \neq k.$$

Указанный метод позволяет представить решение задачи (5) в виде нелинейной системы алгебраических уравнений

$$x - \lambda_i t = \lambda_i\frac{\partial H}{\partial R_i}, \quad \lambda_i = R_i R_1 R_2, \quad H(R_1, R_2) = \frac{A(R_1) - A(R_2)}{R_2 - R_1}, \tag{7}$$

$$A(R) = \frac{s_0 R - r_0}{2\beta\mu_1\mu_2}\left\{\mathcal{H}(R)\ln\mathcal{H}(R) + (1 - \mathcal{H}(R))\ln(1 - \mathcal{H}(R))\right\}.$$

Систему (7) необходимо решить численно. В [7] было получено аналитическое решение задачи Римана в случае $n = 2$. Сравним аналитическое решение задачи о распаде начального разрыва и решение задачи о распаде сглаженного начального разрыва. Естественно, можно проводить только качественное сравнение результатов, так как решаются принципиально разные задачи. Для задачи с кусочно-постоянным разрывом поведение сильного разрыва описывается соотношением Рэнкина–Гюгонио, а в исследуемой задаче (4) (или (5)) такие условия не задаются.

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рисунке 1, где видно достаточно хорошее соответствие решений. Сплошные линии отвечают распаду кусочно-постоянного разрыва, а пунктирные линии показывают решение задачи (4) и (5). Символами «s», «r» на рисунке обозначены ударные волны и волны разрежения, соответственно, а стрелками указано направление движения профилей функций $R_k(x,t)$, $u_k(x,t)$.

3. Применение обобщенного метода годографа в эллиптическом случае. В случае эллиптичности системы уравнений (4) (или (5)) результаты, полученные с помощью метода обобщенного годографа, также применимы.

Начальные данные $(u_1^0, u_2^0) = ((\mu_1 - \mu_2)/\mu_2, (\mu_2 - \mu_1)/\mu_1)$ выберем так, что при $x < x_0 = -\ln 3/(2\beta)$ они лежат в области гиперболичности, а при $x > x_0$ — в области эллиптичности. При этом в формулах (7) $s_0 = (\mu_2 - \mu_1)^2/(\mu_1\mu_2)$, $r_0 = 0$.

Введем замену переменных $R_{1,2} = c(x,t) \mp \sqrt{\theta(x,t)}$, позволяющую следить за изменением типа системы в процессе эволюции решения. При $\theta > 0$ имеем систему гиперболического типа и вещественные инварианты Римана, а при $\theta < 0$

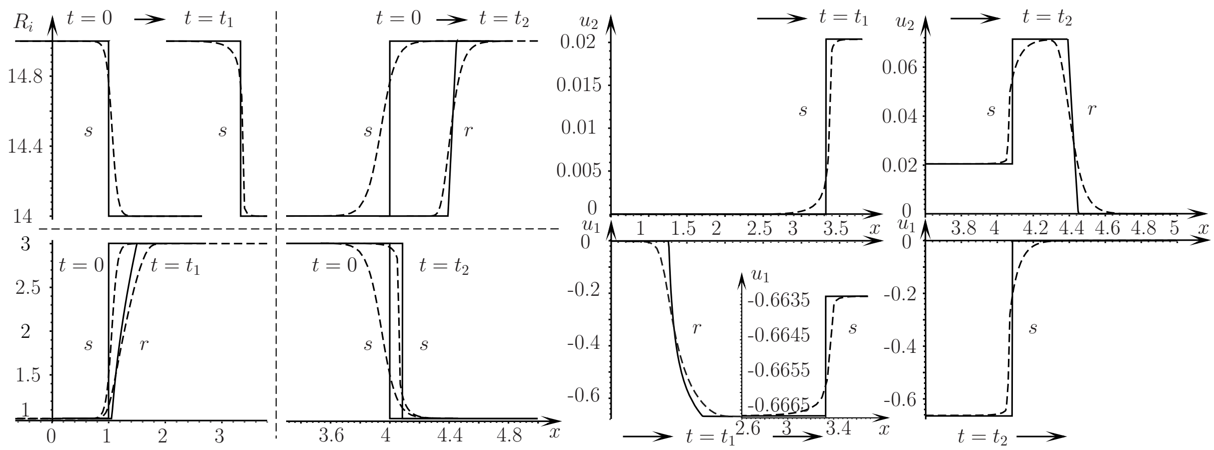


Рисунок 1 – Поведение сглаженных разрывов $R_i(x,t)$ и $u_i(x,t)$ при $t_1 = 0.0037$, $t_2 = 0.002$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 15$, $u_1^0 = -0.6633$, $u_2^0 = 0.0204$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $|\beta| = 10$

система имеет эллиптический тип и комплексно сопряженные инварианты Римана. Алгебраические соотношения метода годографа (7) преобразуются к виду

$$H_c + 2cH_\theta = -2t, \; -x = (c^2 - \theta)^2 H_\theta, \; H = \frac{A(c - \sqrt{\theta}) - A(c + \sqrt{\theta})}{2\sqrt{\theta}}. \qquad (8)$$

Реализован достаточно эффективный способ решения системы уравнений (8) при $x = \mathrm{const}$ или $t = \mathrm{const}$. Пусть x фиксировано. Дифференцируя по t выражение (8), получим систему дифференциальных уравнений

$$a_{11}c' + a_{12}\theta' = 0, \quad a_{21}c' + a_{22}\theta' = -2, \quad c\Big|_{t=0} = c(x,0), \quad \theta\Big|_{t=0} = \theta(x,0), \qquad (9)$$

$$a_{11} = (c^2 - \theta)a_{22} - 2ca_{12}, \quad a_{12} = (c^2 - \theta)H_{\theta\theta} - 2H_\theta,$$

$$a_{21} = H_{cc} + 2cH_{\theta c} + 2H_\theta, \quad a_{22} = H_{\theta c} + 2cH_{\theta\theta}, \quad (\ \ )' = d/dt.$$

Начальные данные определяются из (5), (6).

Аналогично можно получить задачу для определения решения при фиксированном t

$$a_{11}(c,\theta)\frac{dc}{dx} + a_{12}(c,\theta)\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{c^2 - \theta}, \quad a_{21}(c,\theta)\frac{dc}{dx} + a_{22}(c,\theta)\frac{d\theta}{dx} = 0,$$

$$c\Big|_{x=x_*} = c(x_*,t), \quad \theta\Big|_{x=x_*} = \theta(x_*,t),$$

где функции $c(x_*,t)$, $\theta(x_*,t)$ являются, например, решением задачи (9) в точке (x_*,t).

На рисунке 2 (слева) приведены результаты интегрирования задачи (9) для точек $x = x_1 = 0.024$ и для $x = x_2 = 0.025$. Начиная с момента $t \approx 0.0161$ поведение функций $c(x_1,t)$, $\theta(x_1,t)$ и $c(x_2,t)$, $\theta(x_2,t)$ существенно отличается друг от друга, то есть в точке $x \approx 0.024595$ в момент $t \approx 0.0161$ происходит «опрокидывание» профиля движущейся волны. Это приводит к тому, что ветви функций $c(x,t)$, $\theta(x,t)$ при $t < 0.0161$ и $t > 0.0161$ соответствуют различным решениям. На рисунке 2 (справа) показано движение волн при $t = 0$, 0.008, 0.016, то есть до момента опрокидывания, которое происходит в области эллиптичности уравнений (при $\theta < 0$).

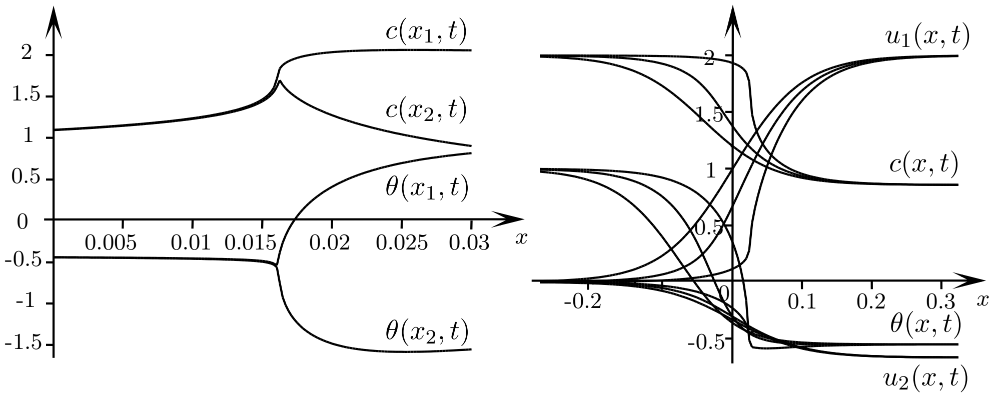


Рисунок 2 – $c(x,t)$ и $\theta(x,t)$, $u_k(x,t)$ для $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\beta = 10$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И.* Математическая теория электрофореза: Применение к методам фракционирования биополимеров. Киев: Наукова думка, 1983. 202 с.

[2] *Жуков М. Ю.* Нестационарная модель изотахофореза // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. № 4. С. 549–565.

[3] *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского Университета, 2005. 215 с.

[4] *Новиков С. П., Дубровин Б. А.* Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. Вып. 6. С. 29–98.

[5] *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР, серия Математическая. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048–1067.

[6] *Павлов М. В.* Гамильтонов формализм уравнений электрофореза. Интегрируемые уравнений гидродинамики: Препринт института теоретической физики (ИТФ) им. Л. Д. Ландау. М., 1987. № 17.

[7] *Елаева М. С.* Исследование зонального электрофореза двухкомпонентной смеси веществ // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 9. С. 146–160.

Elaeva M. *Mathematical modeling of mixture separation by capillary zone electrophoresis.* The mathematical model of diffusionless capillary zone electrophoresis is studied. This model is a system of first order quasi-linear PDEs. The type of system can be hyperbolic or elliptic depending on the initial data. Using the generalized hodograph method an exact implicit solution in form of a nonlinear system of algebraic equations is obtained. In hyperbolic and elliptic cases the numerical experiments are presented.

ВЫПУЧИВАНИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ СЛОЕМ

Еремеев В. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В рамках нелинейной теории упругости рассмотрена задача о потере устойчивости равномерно сжатой двухслойной круглой пластинки, нижний слой которой предварительно сжат или растянут. В качестве уравнения состояния использована модель несжимаемого неогукова материала (модель Трелоара). Предполагается, что нижний слой подвергнут радиальному растяжению или сжатию, так что в нем существуют начальные деформации и напряжения. Далее двухслойная пластинка подвергается равномерному сжатию. Устойчивость пластинки изучается на основе нелинейной трехмерной теории упругости статическим методом Эйлера, состоящим в определении параметров деформации, при которых линеаризованная краевая задача допускает нетривиальные решения. Составлены трехмерные линеаризованные уравнения равновесия для каждого слоя. Методом разделения переменных построены решения этих уравнений. Получено уравнение для определения критических деформаций. Проведен анализ зависимости критического усилия от начальной деформации и жесткости предварительно напряженного слоя.

1. Введение. При описании деформирования неоднородных тел зачастую бывают ситуации, когда невозможно выбрать единую для всех точек тела отсчетную конфигурацию так, чтобы она была ненапряженной для всего тела. Примерами таких ситуаций являются тела с предварительно напряженными включениями, которые создают несовместные (разрывные) деформации. Предварительно напряженные включения возникают, например, при соединении элементов конструкций с натягом, в конструкциях с остаточными напряжениями, обусловленными пластическими деформациями, неравномерным нагревом, фазовыми переходами, напылением поверхностного слоя и другими факторами. В этих случаях за отсчетную конфигурацию следует принимать такую, которая является естественной (ненапряженной) для одних частей тела и напряженной для других частей.

2. Основные соотношения. Уравнения равновесия нелинейной теории упругости при отсутствии массовых сил относительно отсчетной конфигурации записываются следующим образом [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{C}), \tag{1}$$

где ∇ — оператор градиента в отчетной конфигурации, $\mathbf{D}$ — тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{C}$ — градиент деформации.

Тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{C}$ зависят, вообще говоря, от отсчетной конфигурации. Пусть мы имеем две отсчетные конфигурации κ и κ', а $\mathbf{C}$ $(\kappa \to \chi,)$ и $\mathbf{C}'$ $(\kappa' \to \chi)$ — соответствующие им градиенты деформации, отвечающие одной текущей конфигурации χ. Справедлива следующая формула преобразования градиента деформации при изменении отсчетной конфигурации: $\mathbf{C} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}'$, где $\mathbf{P}$ — градиент деформации при переходе от одной отсчетной конфигурации к другой: $\mathbf{P}:\ \kappa \to \kappa'$.

Записывая выражения для тензоров Пиолы в разных отсчетных конфигурациях

$$\mathbf{D} = (\det \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{D}' = (\det \mathbf{C}')\mathbf{C}'^{-1} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, получаем связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}'$:

$$\mathbf{D}' = (\det \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}. \tag{2}$$

Для несжимаемого материала определители градиента деформации в разных отсчетных конфигурациях и градиента деформации перехода равны единице: $\det \mathbf{C} = \det \mathbf{C}' = \det \mathbf{P} = 1$.

В качестве уравнения состояния примем модель несжимаемого неогуковского материала. Для него удельная потенциальная энергия деформации W и тензор напряжений Пиолы относительно ненапряжений отсчетной конфигурации задаются следующими выражениями

$$W = \frac{\mu}{2}\left[\operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T) - 3\right], \quad \mathbf{D} = \mu\mathbf{C} - p\mathbf{C}^{-T},$$

где μ — параметр материала, играющий роль модуля сдвига, p — давление в несжимаем теле, не выражаемое через деформацию.

Согласно (2) тензор напряжений Пиолы для неогуковского материала относительно преднапряженной отсчетной конфигурации имеет вид

$$\mathbf{D}' = \mu_1\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}' - p'\mathbf{C}'^{-T}.$$

Для исследования устойчивости равновесия применяется метод линеаризации нелинейных уравнений [1]. Суть метода состоит в том, что на известное напряженное состояние тела, которое называется невозмущенным, накладывается малая деформация, далее разыскиваются такие параметры нагружения, при которых линеаризованная задача допускает нетривиальные решения. Рассмотрим возмущения вида $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \eta\boldsymbol{w}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \eta\dot{\mathbf{D}} + \ldots$,

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{d}{d\eta}\mathbf{D}(\mathbf{C} + \eta\nabla\boldsymbol{w})\bigg|_{\eta=0},$$

где η — малый параметр, нижний индекс «0» относится к невозмущенному состоянию, $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор точек тела в возмущенном деформированном состоянии, $\boldsymbol{w}$ — вектор малых добавочных перемещений. Подставляя эти разложения в нелинейные уравнения равновесия и граничные условия, удерживая члены только первого порядка относительно параметра η, получим линейную однородную краевую задачу для вектор-функции $\boldsymbol{w}$.

Для неогуковского материала линеаризованные уравнения состояния имеют вид [2]

$$\dot{\mathbf{D}} = \mu\nabla\boldsymbol{w} - \dot{p}\mathbf{C}^{-T} + p\mathbf{C}^{-T} \cdot \nabla\boldsymbol{w} \cdot \mathbf{C}^{-T}. \tag{3}$$

Аналогично определяется $\dot{\mathbf{D}}'$:

$$\dot{\mathbf{D}}' = \mu_1\mathbf{A} \cdot \nabla\boldsymbol{w} - \dot{p}\mathbf{C}^{-T} + p'\mathbf{C}^{-T} \cdot \nabla\boldsymbol{w} \cdot \mathbf{C}^{-T}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P}. \tag{4}$$

Для несжимаемого материала также необходимо рассматривать линеаризованное условие несжимаемости

$$\operatorname{tr}(\mathbf{C}^{-1} \cdot \nabla \boldsymbol{w}) = 0. \tag{5}$$

Таким образом, линеаризованная задача для предварительно напряженного тела состоит из уравнений равновесия (1), в которых используются линеаризованные уравнения состояния (3) или (4), линеаризованное условие несжимаемости (5), дополненных соответствующими граничными условиями, которые здесь не приводятся.

3. Устойчивость круглой двухслойной плиты. Рассмотрим полученные уравнения в случае круглой двухслойной плиты с начальными напряжениями. Для определенности примем, что начальные напряжения действуют в нижнем слое Пусть плита радиуса a имеет толщину H, верхний слой имеет толщину h_1, а нижний — h_2, $H = h_1 + h_2$. Нижний слой равномерно растянут в α раз. Рассмотрим осесимметричную деформацию плиты, так что имеем соотношения:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}' = \lambda \mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_\mathrm{r} + \lambda \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi + \lambda^{-2}\mathbf{e}_\mathrm{z}\mathbf{e}_\mathrm{z}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{P}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{P} = \alpha^2 \mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_\mathrm{r} + \alpha^2 \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi + \alpha^{-4}\mathbf{e}_\mathrm{z}\mathbf{e}_\mathrm{z},$$

где r, ϕ, z — цилиндрические координаты, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_z$ — соответствующие координатные орты, λ — параметр деформации.

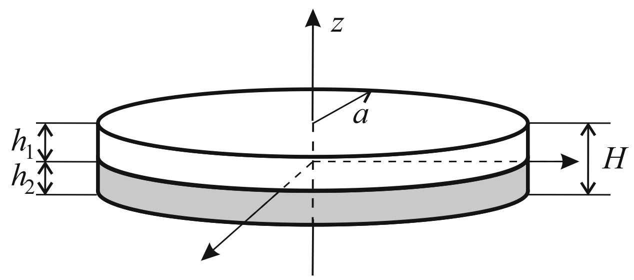


Рисунок 1 – Круглая двухслойная пластинка

Начальное напряженное плоское состояние плиты описывается формулами

$$D_r = D_\phi = \mu\lambda - p\lambda^{-1}, \quad D_z = \mu\lambda^{-2} - p\lambda^2,$$

$$D'_r = D'_\phi = \mu_1 \lambda \alpha^2 - p'\lambda^{-1}, \quad D'_z = \mu_1 \lambda^{-2}\alpha^{-4} - p'\lambda^2,$$

где

$$p = \frac{\mu}{\lambda^4}, \quad p' = \frac{\mu_1}{\lambda^4 \alpha^4}.$$

Будем разыскивать осесимметричное решение линеаризованной задачи в форме

$$\boldsymbol{w} = u(r,z)\mathbf{e_r} + w(r,z)\mathbf{e_z},$$

$$u(r,z) = U_n(z)J_1(k_n r), \quad w(r,z) = W_n(z)J_0(k_n r), \quad \dot{p}(r,z) = P_n(z)J_0(k_n r),$$

где J_0 и J_1 функции Бесселя, $k_n = \frac{\gamma_n}{a}$, γ_n — n-й корень уравнения $J_1(\gamma) = 0$. Граничные и условия сопряжения слоев даются формулами

$$r = a : u(a,z) = 0, \quad \mathbf{e_r} \cdot \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e_z} = 0;$$

$$z = -h_2: \quad \dot{D}'_{zs} = 0;$$
$$z = 0: \quad \dot{D}'_{zs} = \dot{D}_{zs}, \quad u' = u, \quad w' = w;$$
$$z = h_1: \quad \dot{D}_{zs} = 0, \qquad s = r, z.$$

Получены линеаризованные уравнения равновесия и краевые условия, выраженные в терминах неизвестных функций $U_n(z)$, $W_n(z)$, $P_n(z)$, которые здесь не приводятся в силу недостатка места.

4. Результаты расчетов. В качестве тестового примера рассмотрена однослойная пластинка. Для соотношения $\gamma_1 h/a = 1$ полученное значение критической деформации $\lambda = 0.944$ совпадает со значением критической деформации из [2].

Далее, все результаты получены для $\gamma_1 = 3.8317, a = 3.8317$. Под критическим усилием понимается величина

$$N = \int_{-h_2}^{h_1} D_r dx_3$$

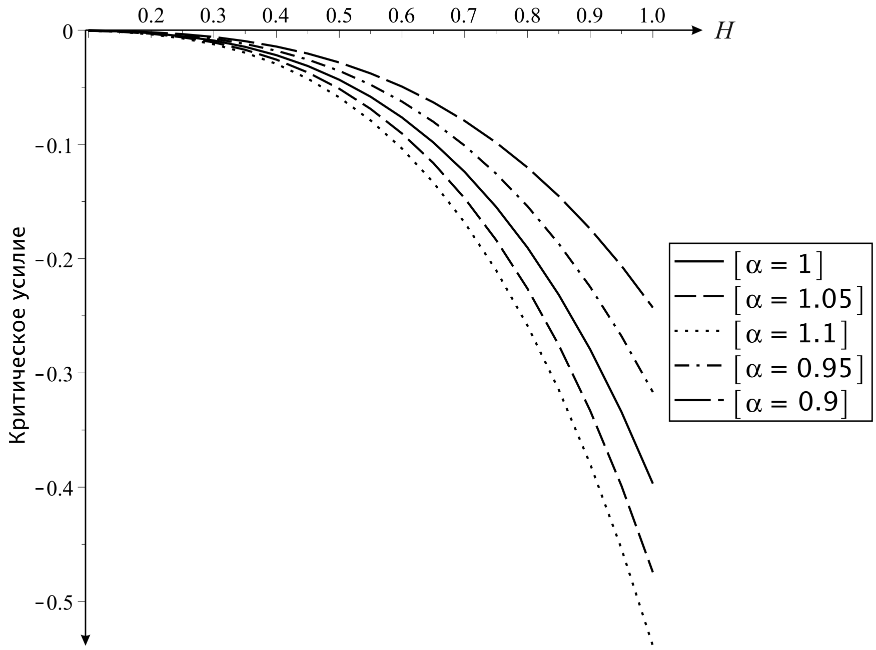


Рисунок 2 – Критическое усилие в зависимости от толщины пластинки H

На рисунке 2 представлены графики зависимости критического усилия от общей толщины пластинки H при $h_2 = h_1, \mu = \mu_1 = 1$ и при различных значениях параметра начальной деформации α нижнего слоя. На рисунке 3 показана зависимость критического усилия от модуля сдвига нижнего слоя при фиксированной толщине плиты $h_2 = h_1 = 0.5$, при $\mu = 1$ и при различных значениях параметра начальной деформации α.

Из расположения кривых на рисунках 2 и 3 видно, что предварительно растянутый нижний слой повышает устойчивость пластинки. На рисунке 3 показано, что при росте модуля сдвига нижнего слоя μ_1 увеличивается величина сжимающего усилия, необходимого для потери устойчивости.

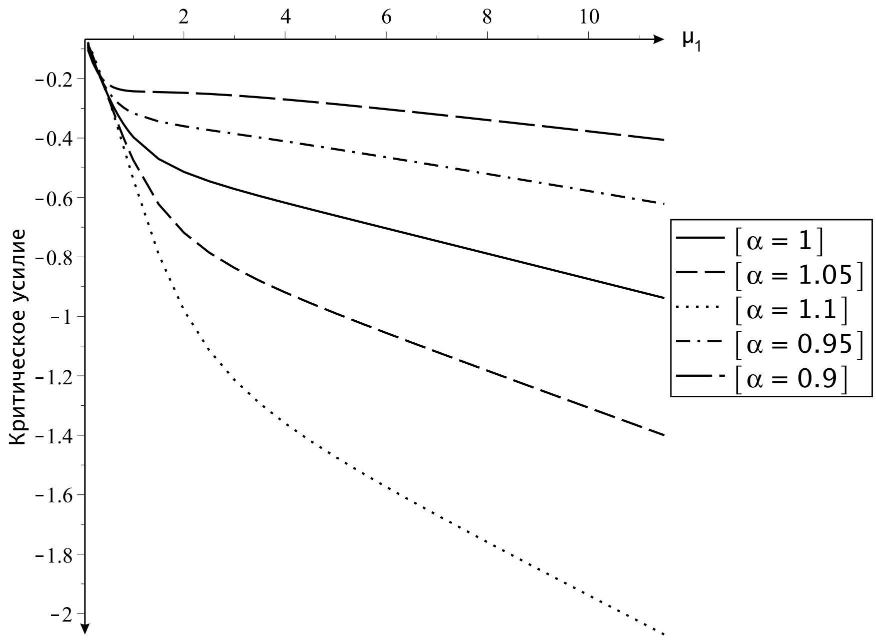


Рисунок 3 – Критическое усилие в зависимости от модуля сдвига нижнего слоя μ_1

Автор благодарит Л. М. Зубова за помощь в подготовке статьи.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1990. 512 с.

[2] *Зубов Л. М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 632–642.

Eremeev V. V. *Buckling of a two-layered circular plate with initially prestressed layer*. Within the framework of nonlinear elasticity we analyze instability of a uniformly compressed circular two-layered plate with initially compressed or stretched layer. As a constitutive relation of material we use the incompressible neo-Hookean model. We assume that the bottom layer is subjected by radial tension or compression. As a result in this layer there are initial strains and stresses. The two-layered plate is subjected by uniform compression. The stability of the plate we study with the use the static Euler's method. It consists of in determination of loading parameters for which the linearized boundary-value problem has non-trivial solutions. We derive the three-dimensional linearized equilibrium equations for each layer. The solutions of the latter equations are obtained with the help Fourier method. The equation for critical strains is derived. We present analysis of dependence of critical stress resultant on the initial strains and stiffness parameters.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

Жамакочян К. А., Саркисян С. О.
Гюмрийский государственный педагогический институт, Армения

Разработка и применение метода конечных элементов (МКЭ) для решения различных статических и динамических задач микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек в настоящее время является актуальной задачей.

В данной работе для задачи о свободных изгибных колебаниях микрополярной упругой тонкой балки, когда на ее концах имеются различные граничные условия, выведены матрицы жесткости и масс для конечного элемента. Для рассмотренных конкретных задач разработанный алгоритм доведен до получения окончательных численных результатов. На основе анализа этих результатов выявлены основные свойства микрополярности материала балки в смысле о воздействии их на динамические характеристики свободных колебаний.

1. Введение. Метод конечных элементов (МКЭ) является в настоящее время наиболее универсальным и практически используемым методом решения различных трудных прикладных граничных задач в различных областях науки и техники, в частности, для статических и динамических задач упругих тонких балок, пластин и оболочек в классической постановке [1, 2].

В работах [3, 4] построены прикладные теории статики и динамики микрополярных изотропных и ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений и соответствующие вариационные принципы.

Целью данной работы является разработка МКЭ для задач о свободных колебаниях микрополярной изотропной упругой тонкой балки, когда на ее концах задаются различные граничные условия.

2. Постановка задачи. Основная система прикладной теории изгиба микрополярной балки выражается так [3, 4]:

Уравнения движения:

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -2q + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \;\; \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h\cdot 2q_1 + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -2m_2 + 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \;\; L_{13} = 2Bhk_{13},$$

$$N_{12} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + (\mu-\alpha)\Gamma_{21}],$$

$$N_{21} = 2h[(\mu-\alpha)\Gamma_{12} + (\mu+\alpha)\Gamma_{21}]. \tag{2}$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \;\; \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \;\; K_{11} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \;\; k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}. \tag{3}$$

Здесь N_{12}, N_{21} — усредненные усилия по толщине балки; M_{11}, L_{13} — усредненные моменты от силового напряжения σ_{11} и моментного напряжения μ_{13} по толщине балки; Γ_{12}, Γ_{21} — сдвиговые деформации; K_{11} — изгибание оси балки (связанного с изгибающим моментом M_{11}), а k_{13} — изгибание оси балки (связанного с изгибающим моментом L_{13}); $2q$ — интенсивность нормальной к оси балки распределенной нагрузки; $2q_1$ — интенсивность распределенной нагрузки направленной параллельно к оси балки; $2m_2$ — интенсивность распределенного внешнего момента; E и μ — классические модули упругости и сдвига материала балки; α и B — новые упругие константы микрополярного материала балки; ρ — плотность материала балки; I — мера инерции при вращении.

Граничные условия на торце балки (на $x_1 = 0$ или $x_1 = a$) имеют вид:

$$M_{11} = M_{11}^*, \;\text{ или }\; \psi = \psi^*, \;\; N_{12} = N_{12}^*, \;\text{ или }\; w = w^*, \;\; L_{13} = L_{13}^*, \;\text{ или }\; \Omega_3 = \Omega_3^*. \tag{4}$$

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации микрополярно-упругой тонкой балки выражается так:

$$U = \int\limits_0^a (W + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \psi + I h \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \Omega_3) dx_1, \tag{5}$$

где

$$W = E\frac{h^3}{3} K_{11}^2 + h(\mu+\alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + Bhk_{13}^2. \tag{6}$$

Здесь W — линейная плотность потенциальной энергии деформации микрополярной балки при изгибе.

3. Матрица жесткости и матрица масс конечного элемента микрополярной балки. Рассмотрим вывод матрицы жесткости конечного элемента микрополярной балки. Выберем для прогиба w, полного поворота ψ нормального элемента и для свободного поворота нормального элемента Ω_3 разложения по координате x_1 в виде кубических полиномов:

$$\begin{gathered} w(x_1)f(t) = (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3) \sin \omega_n t, \\ \psi(x_1)f(t) = (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3) \sin \omega_n t, \\ \Omega_3(x_1)f(t) = (c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3) \sin \omega_n t. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь a_i, b_i, c_i — коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты. Узловые перемещения обозначим следующим образом:

$$\begin{gathered} w(0) = \delta_1, \; w'(0) = \delta_2, \; \psi(0) = \delta_3, \; \psi'(0) = \delta_4, \; \Omega_3(0) = \delta_5, \; \Omega_3'(0) = \delta_6, \\ w(a) = \delta_7, \; w'(a) = \delta_8, \; \psi(a) = \delta_9, \; \psi'(a) = \delta_{10}, \; \Omega_3(a) = \delta_{11}, \; \Omega_3'(a) = \delta_{12}. \end{gathered} \tag{8}$$

Как видим данный конечный элемент имеет двенадцать степеней свободы.

Подставим разложения (7) в (8), выразим коэффициенты a_i, b_i, c_i через узловые перемещения и повороты δ_k. Подставив a_i, b_i, c_i в (7), имеем для перемещения и поворотов аппроксимации:

$$w(x_1) = \sum_{i=1,2,7,8} \delta_i N_i(x_1), \;\; \psi(x_1) = \sum_{i=3,4,9,10} \delta_i N_i(x_1), \;\; \Omega_3(x_1) = \sum_{i=5,6,11,12} \delta_i N_i(x_1), \quad (9)$$

где $N_i(x)$ — функции формы элемента, которые имеют вид:

$$N_1 = N_3 = N_5 = 1 - \frac{3}{a^2}x_1^2 + \frac{2}{a^3}x_1^3, \;\; N_2 = N_4 = N_6 = x_1 - \frac{2}{a}x_1^2 + \frac{1}{a^2}x_1^3,$$

$$N_7 = N_9 = N_{11} = \frac{3}{a^2}x_1^2 - \frac{2}{a^3}x_1^3, \;\; N_8 = N_{10} = N_{12} = -\frac{1}{a}x_1^2 + \frac{1}{a^2}x_1^3. \quad (10)$$

Подставив (9) в функционал (5), после интегрирования получим функцию двенадцати независимых переменных $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}$. Минимизация функционала (5) приводит к нахождению минимума функции двенадцати независимых переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, 12).$$

Вычислив соответствующие частные производные, получим:

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \cdot \{\delta\} = 0. \quad (11)$$

Здесь K — матрица жесткости элемента размером 12×12, представляющего собой важнейшее понятие метода конечных элементов; M — матрица масс элемента размером 12×12, $\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}\}$ — вектор узловых перемещений и поворотов.

Ниже приведены выражения для элементов матрицы жесткости конечного элемента:

$$K_{11} = -K_{17} = K_{77} = \frac{12(\alpha+\mu)}{5a}h, \;\; K_{22} = K_{88} = \frac{4(\alpha+\mu)}{15}ha,$$

$$K_{33} = K_{99} = \frac{26(\alpha+\mu)a^2 + 28Eh^2}{35a}h, \;\; K_{44} = K_{10,10} = \frac{6(\alpha+\mu)a^2 + 28Eh^2}{315}ha,$$

$$K_{55} = K_{11,11} = \frac{84B + 104\alpha a^2}{35a}h, \;\; K_{66} = K_{12,12} = \frac{28B + 8\alpha a^2}{105}ha,$$

$$K_{12} = K_{18} = -K_{27} = -K_{78} = \frac{(\alpha+\mu)}{5}h, \;\; K_{13} = K_{19} = -K_{37} = -K_{79} = (\alpha-\mu)h,$$

$$K_{14} = -K_{1,10} = -K_{23} = K_{29} = K_{38} = -K_{47} = K_{7,10} = -K_{89} = \frac{(\alpha-\mu)}{5}ha,$$

$$K_{15} = K_{1,11} = -K_{57} = -K_{7,11} = 2\alpha h, \;\; K_{24} = K_{26} = K_{8,10} = K_{8,12} = 0,$$

$$K_{16} = -K_{1,12} = -K_{25} = K_{2,11} = K_{58} = -K_{67} = K_{7,12} = -K_{8,11} = \frac{2}{5}\alpha ha,$$

$$K_{28} = -\frac{(\alpha+\mu)}{15}ha, \;\; K_{2,10} = -K_{48} = -\frac{(\alpha-\mu)}{30}ha^2, \;\; K_{2,12} = -K_{68} = -\frac{1}{15}\alpha ha^2,$$

$$K_{34} = -K_{9,10} = \frac{11(\alpha+\mu)a^2 + 7Eh^2}{105}h,\ K_{35} = K_{9,11} = \frac{52}{35}\alpha ha,$$

$$K_{36} = K_{45} = -K_{9,12} = -K_{10,11} = \frac{22}{105}\alpha ha^2,\ K_{39} = \frac{9(\alpha+\mu)a^2 - 28Eh^2}{35a}h,$$

$$K_{3,10} = -K_{49} = -\frac{13(\alpha+\mu)a^2 - 14Eh^2}{210}h,\ K_{3,11} = K_{59} = \frac{18}{35}\alpha ha,$$

$$K_{3,12} = -K_{4,11} = K_{5,10} = -K_{69} = -\frac{13}{105}\alpha ha^2,\ K_{46} = K_{10,12} = \frac{4}{105}\alpha ha^3,$$

$$K_{4,10} = -\frac{9(\alpha+\mu)a^2 + 14Eh^2}{630}ha,\ K_{4,12} = K_{6,10} = -\frac{1}{35}\alpha ha^3,$$

$$K_{56} = -K_{11,12} = \frac{21B + 44\alpha a^2}{105}h,\ K_{5,11} = -\frac{84B - 36\alpha a^2}{35a}h,\ K_{5,12} = \frac{21B - 26\alpha a^2}{105}h,$$

$$K_{6,11} = -\frac{21B - 26\alpha a^2}{105}h,\ K_{6,12} = -\frac{7B + 6\alpha a^2}{105}ha.$$

А ненулевые элементы матрицы масс имеют следующий вид:

$$M_{11} = M_{77} = \frac{26}{35}\rho ha,\ M_{22} = M_{88} = \frac{2}{105}\rho ha^3,\ M_{33} = M_{99} = \frac{26}{105}\rho h^3 a,$$

$$M_{44} = M_{10,10} = \frac{2}{315}\rho h^3 a^3,\ M_{55} = M_{11,11} = \frac{26}{35}Iha,\ M_{66} = M_{12,12} = \frac{2}{105}Iha^3,$$

$$M_{12} = -M_{78} = \frac{11}{105}\rho ha^2,\ M_{17} = \frac{9}{35}\rho ha,\ M_{18} = -M_{27} = -\frac{13}{210}\rho ha^2,$$

$$M_{28} = -\frac{1}{70}\rho ha^3,\ M_{34} = -M_{9,10} = \frac{11}{315}\rho h^3 a^2,\ M_{39} = \frac{3}{35}\rho h^3 a,$$

$$M_{3,10} = -M_{49} = -\frac{13}{630}\rho h^3 a^2,\ M_{4,10} = -\frac{1}{210}\rho h^3 a^3,\ M_{56} = -M_{11,12} = \frac{11}{105}Iha^2,$$

$$M_{5,11} = \frac{9}{35}Iha,\ M_{5,12} = -M_{6,11} = -\frac{13}{210}Iha^2,\ M_{6,12} = -\frac{1}{70}Iha^3.$$

4. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим задачу свободных колебаний микрополярных тонких балок, когда концы ее шарнирно-оперты.

Для граничных условий шарнирного опирания имеем

$$w = 0,\ \ M_{11} = 0,\ \ L_{13} = 0,\ \ \text{при}\ \ x_1 = 0; a, \tag{12}$$

которые с учетом (2),(3) и (8) эквивалентны следующим условиям:

$$\delta_1 = w(0) = 0,\ \ \delta_7 = w(a) = 0,\ \ \delta_4 = \psi'(0) = 0,\ \ \delta_{10} = \psi'(a) = 0,$$

$$\delta_6 = \Omega_3'(0) = 0,\ \ \delta_{12} = \Omega_3'(a) = 0.$$

Составим систему уравнений (11), соответствующую рассматриваемой задаче. Потребуем, чтобы определитель матрицы $([K]-\omega_n^2[M])$ был равен нулю. Тогда для определения собственных частот ω_n^2 получим алгебраическое уравнение шестой степени. Для повышения точности решений понятно, что необходимо разбивать балку на несколько конечных элементов. Рассмотрим, также случай, когда балка разбита на два конечных элемента. Результат вычислений (собственных частот) приведем для случая, когда физические постоянные имеют значения: $\alpha = 1.6$ МПа, $E = 5.2$ МПа, $\mu = 2$ МПа, $B = 300$ Н, $\rho = 1114$ кг/м^3, $I = 5.31 \cdot 10^{-6}$ кг/м, а геометрические размеры балки такие: $a = 8$ см, $h = 0.2$ см.

Наименьшая частота колебаний будет $\omega_1 = 127$ Гц, в случае, когда балка в целом считается как один конечный элемент; $\omega_1 = 121$ Гц, в случае, когда балка разбита на два конечных элемента; $\omega_1 = 121$ Гц, при точном решении; $\omega_1 = 19.3$ Гц, в случае классического материала балки.

Рассмотрим также случай, когда один конец балки жестко закреплен, другой конец — свободный. Тогда наименьшая частота колебаний будет $\omega_1 = 44.6$ Гц, в случае, когда балка в целом считается как один конечный элемент; $\omega_1 = 44.5$ Гц, в случае, когда балка разбита на два конечных элемента; $\omega_1 = 6.89$ Гц, в случае классического материала балки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C154.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига. Изд-во: Зинатне. 1988. 284 с.

[2] *Белкин А. Е., Гаврюшин С. С.* Расчет пластин методом конечных элементов. М.: Изд-во: МГТУ. 2008. 231 с.

[3] *Sargsyan S. H.* Effective Monifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. V. 2. № 1. P. 98–108.

[4] *Маргарян Л. М., Саркисян С. О.* Математические модели динамики микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких балок // Известия НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65. № 1. С. 17–28.

Zhamakochyan K. A., Sargsyan S. H. *Finite element method in dynamic problems of micropolar elastic thin bars*. Currently the development and application of finite element method (FEM) is an actual problem for solving different static and dynamic problems of micropolar elastic thin bars, plates and shells. In the present paper stiffness and masses matrices for the finite element are obtained for the problem of free bending vibrations of micropolar elastic thin bar in case of different boundary conditions. The developed algorithm for the considered concrete problems is brought to final numerical results. On the basis of these results basic properties of micropolar bar material are identified from the point of view of its impact on the dynamic characteristics of free vibrations.

МЕТОД ГОДОГРАФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Предложено сочетание аналитического и численного метода решения системы двух квазилинейных уравнений гиперболического типа, позволящее эффективно решать задачу Коши, как с гладкими, так и разрывными начальными данными, строить опрокидывающиеся и автомодельные решения. В качестве примера исследована задача о движении компонент смеси под действием электрического поля.

1. Введение. Хорошо известно, что система двух квазилинейных уравнений

$$u_t^i + \sum_j A_j^i(u) u_x^j = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

для функции $u^k(x,t)$ всегда приводится к инвариантам Римана

$$R_t^k + \lambda^k(R) R_x^k = 0, \quad k = 1, 2, \tag{2}$$

где $\lambda^k(R)$ — собственные значения заданной матрицы $A_j^i(u)$, и связь между переменными считается определенной: $u^k = u^k(R^1, R^2)$, $R^k = R^k(u^1, u^2)$.

Метод годографа, заключающийся в замене роли зависимых R^1, R^2 и независимых переменных t, x, то есть в поиске решений вида $t = t(R^1, R^2)$, $x = x(R^1, R^2)$, позволяет записать решение (1) или (2) в алгебраической форме

$$x - \lambda^i(R) t = w^i(R), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $w^i(R)$ определяются системой уравнений [1]

$$(w^i - w^k) \partial_i \lambda^k = (\lambda^i - \lambda^k) \partial_k w^i, \quad i \neq k, \quad \partial_i = \partial / \partial R^i.$$

Например, для уравнений газовой динамики в случае политропного газа, уравнений хроматографии и изотахофореза, $w^i(R)$ известны [2, 3], однако в общем случае определить $w^i(R)$ достаточно трудно. Соотношения (3) дают решение лишь в неявном виде — для определения $R^k = R^k(x,t)$ необходимо решать систему нелинейных уравнений, что зачастую оказывается более сложной задачей, чем исходная.

2. Законы сохранения. В работе [4] рассмотрен вариант метода годографа, основанный на наличии для уравнений (1) или (2) законов сохранения

$$\varphi_t(R^1, R^2) + \psi_x(R^1, R^2) = 0, \tag{4}$$

то есть существовании таких функций — плотности $\varphi(R^1, R^2)$ и потока $\psi(R^1, R^2)$, для которых закон (4) выполнен автоматически в силу, например, уравнений (2).

Пусть имеется задача Коши для системы, записанной в инвариантах Римана

$$R^k_t + \lambda^k(R^1, R^2)R^k_x = 0, \quad R^k(\tau, 0) = R^k_0(\tau), \quad a \leqslant \tau \leqslant b, \tag{5}$$

где $R^k_0(\tau)$ — заданные функции.

В [4] для определения $\varphi(R^1, R^2)$, $\psi(R^1, R^2)$ предлагается решать задачу для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\varphi_{R^1R^2} + \frac{\lambda^1_{R^2}\varphi_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2} - \frac{\lambda^2_{R^1}\varphi_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2} = 0, \quad \psi_{R^1R^2} - \frac{\lambda^2\lambda^1_{R^2}\psi_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2} + \frac{\lambda^1\lambda^2_{R^1}\psi_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2} = 0 \tag{6}$$

с условиями (условия в [4] отличаются несущественно)

$$(\psi - \lambda^1\varphi)\big|_{R^1=r^1} = 1, \quad (\psi - \lambda^2\varphi)\big|_{R^2=r^2} = -1, \quad r^1 = R^1_0(b), \quad r^2 = R^2_0(a). \tag{7}$$

В этом случае, для начальных условий при $t = t_0$ зависимость $t(a, b)$ имеет вид

$$t(a, b) = t_0 + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \varphi^t(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau)|r^1(b), r^2(a))\, d\tau. \tag{8}$$

Для определения функции $x(a, b)$ уравнения (6) решаются с условиями

$$\big(\psi - \lambda^1\varphi\big)\big|_{R^1=r^1} = \lambda^1\big|_{R^1=r^1}, \quad \big(\psi - \lambda^2\varphi\big)\big|_{R^2=r^2} = -\lambda^2\big|_{R^2=r^2}. \tag{9}$$

Тогда

$$x(a, b) = \frac{a + b}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \varphi^x(R^1_0(\tau), R^2_0(\tau)|r^1(b), r^2(a))\, d\tau. \tag{10}$$

Подчеркнем, что функции φ в формуле (8) и в формуле (10) определяются из одних и тех же уравнений (6), но с разными условиями (7) и (9). Именно поэтому для них использованы обозначения φ^t, φ^x.

Если функции $t(a, b)$ и $x(a, b)$ известны и, более того, удается найти обратные функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, то решение исходной задачи (5) записывается в виде

$$R^1(x, t) = R^1_0(b(x, t)) = r^1, \quad R^2(x, t) = R^2_0(a(x, t)) = r^2.$$

Более детальное изложение для начальных данных на произвольной кривой приведено в [4], где также для ряда уравнений получены плотности φ, ψ.

3. Алгоритм построения решения. Приведем модифицированный и более простой, по сравнению с [4], способ решения задачи (5), который, по крайней мере, делает излишним решение уравнений (6) с условием (9), и позволяет избежать построения функции φ^x для определения $x(a, b)$ по формуле (10).

Пусть известна функция Римана–Грина $\Phi(R^1, R^2|r^1, r^2)$, которая по переменным R^1, R^2 удовлетворяет первому из уравнений (6), а по переменным r^1, r^2 является решением сопряженной задачи

$$\Phi_{r^1r^2} - (A(r^1, r^2)\Phi)_{r^1} - (B(r^1, r^2)\Phi)_{r^2} = 0, \quad A = \frac{\lambda^1_{R^2}}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad B = -\frac{\lambda^2_{R^1}}{\lambda^1 - \lambda^2},$$

$$(\Phi_{r^2} - A\Phi)\big|_{r^1=R^1} = 0, \quad (\Phi_{r^1} - B\Phi)\big|_{r^2=R^2} = 0, \quad \Phi\big|_{r^1=R^1, r^2=R^2} = 1.$$

Нетрудно проверить, что

$$\varphi^t(R^1, R^2) = \varphi^t(R^1, R^2|r^1, r^2) = \frac{2\Phi(R^1, R^2|r^1, r^2)}{\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2)}$$

будет функцией, необходимой для определения $t(a, b)$ по формуле (8).

При известной функции $\varphi^t(R^1, R^2|r^1, r^2)$ легко вычислить

$$t(a, b) = \int\limits_a^b \varphi(\tau|a, b)\, d\tau, \quad \varphi(\tau|a, b) = \frac{1}{2}\varphi^t(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau)|r^1(b), r^2(a)),$$

$$t_a(a, b) = -\varphi(a|a, b) + \int\limits_a^b \varphi_a(\tau|a, b)\, d\tau, \quad t_b(a, b) = \varphi(b|a, b) + \int\limits_a^b \varphi_b(\tau|a, b)\, d\tau,$$

$$\varphi_a(\tau|a, b) = \frac{1}{2}\varphi^t_{r^2}(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau)|r^1(b), r^2(a))r_a^2(a), \quad r^1(b) = R_0^1(b),$$

$$\varphi_b(\tau|a, b) = \frac{1}{2}\varphi^t_{r^1}(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau)|r^1(b), r^2(a))r_b^1(b), \quad r^2(a) = R_0^2(a).$$

Выберем значения параметров a_*, b_*, определяющих некоторую изохрону $t = t_*$

$$t_* = t(a_*, b_*). \tag{11}$$

На практике a_*, b_* можно выбирать, предварительно построив линии уровня функции $t(a, b)$ для некоторой области изменения параметров a, b.

Координату $X_* = x(a_*, b_*)$, соответствующую на изохроне (11) значению параметра $\tau = 0$, находим простым интегрированием

$$X_* = x(a_*, b_*) = a_* + \int\limits_{a_*}^{b_*} \lambda^2(r^1(b), r^2(a_*))t_b(a_*, b)\, db.$$

Для определения на изохроне значений параметров $a(\tau)$, $b(\tau)$ и пространственной координаты $x = X(\tau)$ решаем задачу Коши

$$\frac{da}{d\tau} = -t_b(a, b), \quad \frac{db}{d\tau} = t_a(a, b), \quad \frac{dX}{d\tau} = (\Lambda^2(a, b) - \Lambda^1(a, b))t_a(a, b)t_b(a, b),$$

$$a\big|_{\tau=0} = a_*, \quad b\big|_{\tau=0} = b_*, \quad X\big|_{\tau=0} = X_*, \quad \Lambda^k(a, b) = \lambda^k(r^1(b), r^2(a)).$$

Окончательно, для каждого значения параметра τ на изохроне имеем решение

$$R^1(x, t_*) = R_0^1(b(\tau)), \quad R^2(x, t_*) = R_0^2(a(\tau)), \quad x = X(\tau).$$

Двигаясь по изохроне, то есть изменяя параметр τ, получим решение для требуемых значений x при фиксированном значении $t = t_*$.

4. Перенос массы электрическим полем. Движение под действием электрического поля $E = E(u^1, u^2)$ веществ с концентрациями u^i и подвижностями μ^i в двухкомпонентной смеси описывается системой двух уравнений [5]

$$u^1_t + \mu^1\mu^2 \left(\mu^1 u^1 E\right)_x = 0, \quad u^2_t + \mu^1\mu^2 \left(\mu^2 u^2 E\right)_x = 0, \quad E = (1 + u^1 + u^2)^{-1}.$$

Квазилинейные гиперболические уравнения приводятся к системе (5) в инвариантах Римана $R^k = R^k(u^1, u^2)$. Связь между переменными дается соотношениями

$$A = 1 + u^1 + u^2, \quad B = \mu^1 + \mu^2 + u^1\mu^2 + u^2\mu^1, \quad C = \mu^1\mu^2, \quad D = B^2 - 4AC,$$

$$R^k = \frac{B \mp \sqrt{D}}{2A}, \quad u^1 = \frac{\mu^2(R^1 - \mu^1)(R^2 - \mu^1)}{R^1R^2(\mu^1 - \mu^2)}, \quad u^2 = \frac{\mu^1(R^1 - \mu^2)(R^2 - \mu^2)}{R^1R^2(\mu^2 - \mu^1)}.$$

Начальные данные при $t = 0$ задаем в виде

$$u^1\big|_{t=0} = u^1_0(x), \quad u^2\big|_{t=0} = u^2_0(x),$$

где $u^1_0(x)$, $u^2_0(x)$ — известные функции.

Опуская утомительные преобразования по построению функции Римана–Грина, запишем лишь окончательное выражение

$$\varphi^t(R^1, R^2|r^1, r^2) = \frac{4R^1R^2 - 2(r^1 + r^2)(R^1 + R^2) + 4r^1r^2}{(r^1 - r^2)^3R^1R^2}.$$

Приведем результаты расчетов по алгоритму п. 3 для начальных данных, соответствующих гауссовскому распределению возмущений постоянных концентраций

$$u^1_0(x) = 1 + 2e^{-0.3(x-5)^2}, \quad u^2_0(x) = 4 + 3e^{-0.3x^2}, \quad \mu^1 = 1, \quad \mu^2 = 3.$$

Скорости переноса μ^k компонент электрическим полем различны и возмущение второй компоненты догонят возмущение первой. Сильное искажение профиля объясняется тем, что электрическое поле зависит от концентрации. На рисунке 1 показано распределение концентраций в моменты $t = 1.122$, 6.358, 10.192 и видно, что в результате движения происходит образование ударной волны при $t \approx 6.358$. Начиная с этого момента, происходит опрокидывание профиля, решение становится неоднозначным и его физическая интерпретация затруднительна. Рисунок при $t = 10.192$ приведен для демонстрации возможностей предлагаемого метода, позволяющего строить многозначные решения.

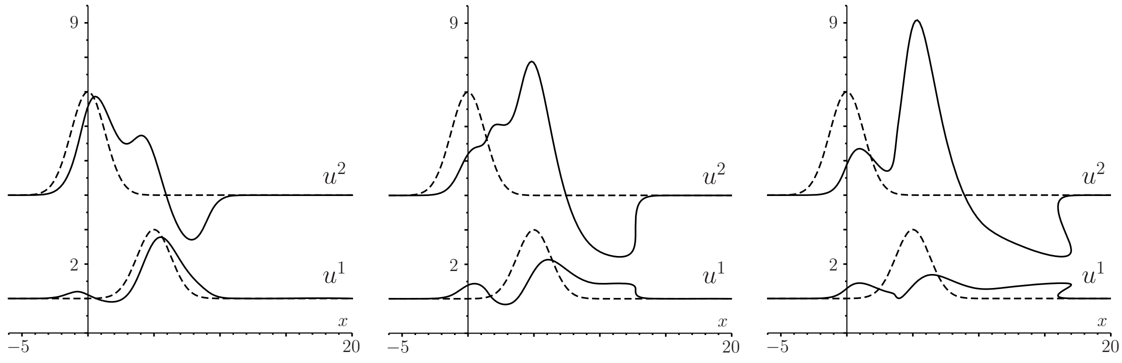


Рисунок 1 – $u^1(x,t)$, $u^2(x,t)$ при $t = 1.122$, 6.358, 10.192. Пунктирная линия соответствует начальному распределению

Как уже указывалось, построенное решение можно использовать и в случае, когда начальное распределение имеет разрывы. На рисунке 2 приведены результаты расчетов для кусочно постоянного начального распределения концентраций

$$u_0^1 = 3 + 0.4(h(\tau - 2) - h(\tau - 6)), \quad u_0^2 = 4 + 0.4(h(\tau) - h(\tau + 4)),$$

где $h(\tau)$ — функция Хевисайда.

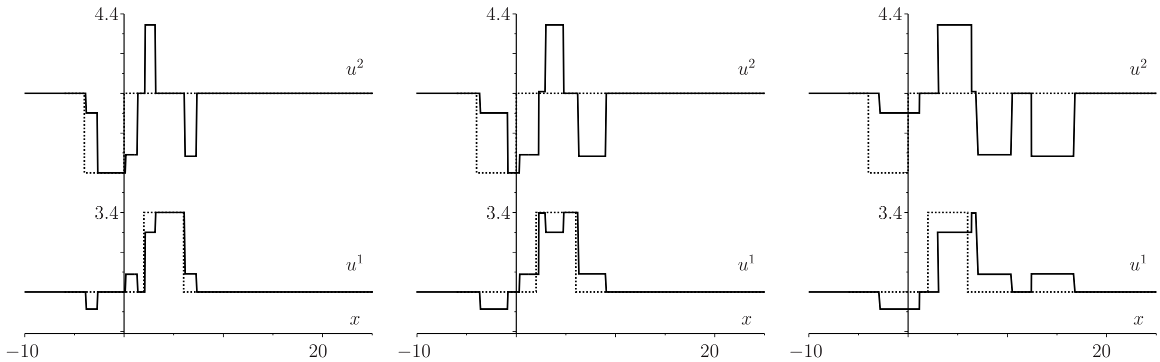


Рисунок 2 – $u^1(x,t)$, $u^2(x,t)$ при $t = 1.708$, 3.965, 14.894. Пунктирная линия соответствует начальному распределению

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР, сер. Мат. 1990. Т. 54, № 5. С. 1048–1067.

[2] *Ферапонтов Е. В., Царев С. П.* Системы гидродинамического типа, возникающие в газовой хроматографии. Инварианты Римана и точные решения // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 2. С. 82–91.

[3] *Павлов М. В.* Интегрируемые системы уравнений гидродинамического типа: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / РАН Инст. им. П. Н. Лебедева. М., 1992. 100 с.

[4] *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA. 2012. Vol. 8, 071. 16 p.

[5] *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 2005. 215 с.

Zhukov M.Yu., Shiryaeva E. V. *Hodograph method for solving the problem on the motion of a binary mixture under action of an electric field.* We propose combination of analytical and numerical method for solution of two hyperbolic quasilinear equations. This method allow effectively to solve the Cauchy problem with smooth and discontinuous initial data. Also this method allow to construct multivalued and self-similar solutions. As an example, the problem of a binary mixture transport under action of an electric field is studied in detail.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ПОВЕДЕНИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена задача о формировании с течением времени под действием внешнего электрического поля пространственно неоднородной структуры в многокомпонентной химически активной жидкой смеси. Задача решается численно методом конечных элементов. Приведены результаты расчетов для пятикомпонентной смеси, рассмотрены два режима процесса — режим с постоянным током и режим с постоянным напряжением.

1. Введение. При описании процесса изоэлектрофокусирования (ИЭФ) — метода разделения смесей на индивидуальные компоненты при помощи электрического поля, в основном используют стационарную модель. Это связано с тем, что модель состоит из большого количества уравнений переноса для компонент, содержащих малый параметр (коэффициент диффузии) перед старшими производными, и наличием, помимо эволюционных уравнений, алгебраического уравнения (уравнение электронейтральности). В работе рассмотрен эффективный способ решения нестационарной пространственно одномерной задачи при помощи метода конечных элементов. Преимущество такого метода, по сравнению, например, с обычными конечно-разностными, заключается в том, что он без труда переносится на случай двумерных и трехмерных задач, и позволяет проводить вычисления в случае, когда смесь сильно стратифицируется по концентрациям и решение близко к кусочно-постоянному.

1. Нестационарная пространственно одномерная задача ИЭФ. В пространственно одномерном случае нестационарная задача ИЭФ в безразмерных переменных записываются в форме (см. [1, 2]):

$$\partial_t a_k + \partial_x i_k = 0, \quad i_k = -\varepsilon\mu_k\partial_x a_k + \mu_k\theta_k(\psi)a_k E, \quad k = 1,\dots,n, \tag{1}$$

$$j = \sum_{k=1}^{n}\left(-\varepsilon\mu_k\partial_x(\theta_k(\psi)a_k) + \mu_k\sigma_k(\psi)a_k E\right), \quad \partial_x j = 0, \quad E = -\partial_x\varphi, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_k(\psi)a_k = 0, \quad \theta_k(\psi) = \frac{\sinh(\psi-\psi_k)}{\cosh(\psi-\psi_k)+\delta_k}, \quad \sigma_k(\psi) = \frac{\cosh(\psi-\psi_k)}{\cosh(\psi-\psi_k)+\delta_k}. \tag{3}$$

Для режима с постоянным напряжением и непроницаемых для компонент смеси границ краевые и начальные условия имеют вид

$$i_k\,|_{x=0} = i_k\,|_{x=1} = 0, \quad k = 1,\dots,n, \quad \varphi\,|_{x=0} = \varphi_0 \quad \varphi\,|_{x=1} = 0, \tag{4}$$

$$a_k\,|_{t=0} = a_k^0(x), \quad k = 1,\dots,n. \tag{5}$$

Здесь a_k, i_k — концентрация и плотность потока компоненты, φ, E — потенциал и напряженность электрического поля, j — плотность электрического тока, ψ — функция кислотности смеси, $\mu_k\theta_k(\psi)$, $\mu_k\sigma_k(\psi)$, $\mu_k > 0$, $\varepsilon\mu_k$ — электрофоретическая подвижность, удельная проводимость, характерная подвижность и коэффициент диффузии компонент, φ_0 — электрический потенциал (напряжение) на границе, a_k^0 — начальное распределение на интервале $[0,1]$, $\delta_k > 0$ — параметр, связанный с константами диссоциации веществ, ψ_k — изоэлектрическая точка ($\theta_k(\psi_k) = 0$).

2. Особенности численной реализации решения. Задача (1)–(5) решается методом конечных элементов с использованием неявной схемы для временной аппроксимации [3]. В частности, уравнение (1) в момент $t = m\tau$ аппроксимируется выражением

$$\frac{a_k^{(m+1)} - a_k^{(m)}}{\tau} + \partial_x i_k^{(m+1)} = 0,$$

где τ — шаг по времени, а верхний индекс — номер временного слоя.

Остальные уравнения (2), (3) рассматриваются на $(m+1)$-временном слое. Основную трудность при реализации численного алгоритма представляет наличие в эволюционных уравнениях (1) функции ψ, которую приходится определять на каждом временном шаге, решая алгебраическое уравнение электронейтральности $\sum \theta_k(\psi)a_k = 0$. В случае определяющих соотношений (3), удается построить итерационный алгоритм, представив уравнение электронейтральности в виде

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\ln\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i e^{\psi_i}}{\varphi_i(\psi)} - \ln\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i e^{-\psi_i}}{\varphi_i(\psi)}\right) \equiv G(\psi; a_1, \ldots, a_n), \quad \varphi_i(\psi) = \cosh(\psi - \psi_i) + \delta_i.$$

С учетом неравенств $\theta_i(\psi) < 1$, $a_i \geqslant 0$, $\sum a_k^2 > 0$ показано, что $|G'_\psi| < 1$ и для определения функции $\psi^{(m)}(x)$ использован итерационный метод

$$\psi^{(m),s+1} = |G(\psi^{(m),s}; a_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)})| < 1, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad \psi^{(m),0} = \psi^{(m-1)}.$$

3. Вычислительный эксперимент. Все результаты расчетов представлены для реальных аминокислот и параметров процесса ИЭФ, проводимого в капилляре радиуса 0.0018 м и длиной 0.1 м. Параметры аминокислот ψ_i, δ_i, μ_i, расчитанные по реальным значениям констант диссоциации pKa_i, pKb_i [4], представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры аминокислот [4]

		pKb_i	pKa_i	pI_i	ψ_i	δ_i	μ_i	$a_i^0 = \mathrm{const}$
His-His	(a_1)	6.80	7.80	7.300	−0.691	1.58	1.49	0.5
His-Gly	(a_2)	6.27	8.57	7.420	−0.967	7.06	2.40	0.05
His	(a_3)	6.00	9.17	7.585	−1.347	19.23	2.85	0.5
β-Ala-His	(a_4)	6.83	9.51	8.170	−2.694	10.94	2.30	0.05
Tyr-Arg	(a_5)	7.55	9.80	8.675	−3.857	6.67	1.58	0.5

Безразмерная разность потенциалов $\varphi_0 = 2.808$. Безразмерные и размерные значения электрофоретической подвижности и количества вещества связаны соотношениями $\mu_i^* = \mu_i \cdot 10^{-8}$ м^2/(В $\cdot$ с), $a_i^* = a_i^0 \cdot 0.1$ моль/литр. Результаты приведены для значения параметра $\lambda = 1500$, который характеризует отношение интенсивностей процессов переноса под действием электрического поля и за счет процессов диффузии. Для рассматриваемого капилляра параметр λ связан с отстальными размерными и безразмерными параметрами: с размерной разностью потенциалов $U_* \approx 0.025\,\lambda$ (В), с параметром диффузии $\varepsilon = \lambda^{-1}$, с размерной плотностью тока $j_* \approx 0.025\,\lambda$ (А $\cdot$ м$^{-2}$), с характерным временем $t_* \approx 3.96 \cdot 10^7 \lambda^{-1}$ (с), $\varphi_0^* = \varphi_0 U_* \approx 105$ В (подробнее см. в [2]).

На рисунке 1 показан процесс формирования pH-градиента, близкого к кусочно-постоянному, а на рисунке 2 — соответствующая стратификация смеси на интервале от $t = 0$ до $t = 17000\tau$ при $\lambda = 1500$. Расчеты проводились при помощи пакета FreeFem++ [3], на отрезке $[0, 1]$ выбиралось 200 кусочно-квадратичных конечных элементов и шаг временной аппроксимации $\tau = 0.005$ (≈ 132 с).

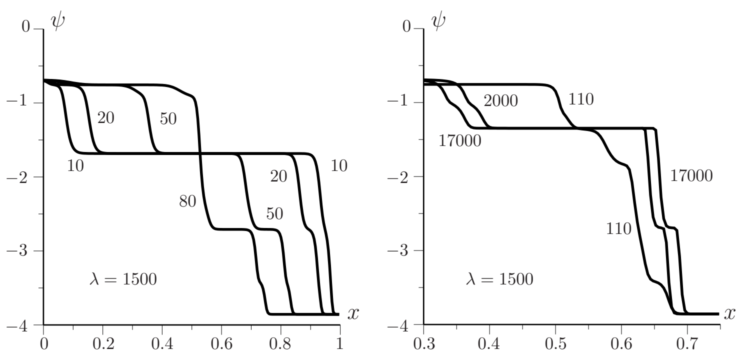


Рисунок 1 – Функция кислотности $\psi(x)$ (pH(x)) при $\lambda = 1500$, $t = m\tau$, $\tau = 0.005$

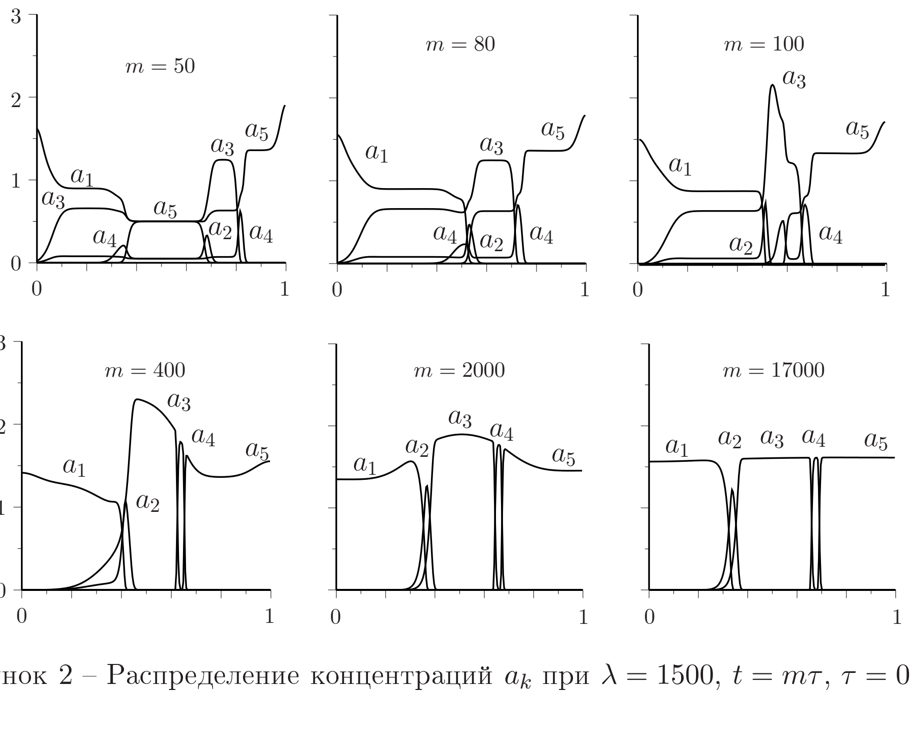


Рисунок 2 – Распределение концентраций a_k при $\lambda = 1500$, $t = m\tau$, $\tau = 0.005$

Величины концентраций a_2, a_4 малы по сравнению с a_1, a_3, a_5 и на начальных стадиях ($t \lesssim 110\tau$) их влияние на формирование pH-градиента незначительно. Наиболее гладкий pH-градиент наблюдается при $t = 110\tau$. Начиная с $t \approx 300\tau$, концентрации a_2, a_4 играют существенную роль, формируя дополнительные «ступенки» на pH-градиенте. Процесс становится почти стационарным при $t = 17000\tau$ (632 часа!), что конечно, трудно достижимо в реальном эксперименте.

Заметим, что процесс формирования pH-градиента можно интерпретировать как фракционирование смеси на индивидуальные компоненты — каждой компоненте смеси соответствует некоторый пологий участок pH-градиента. На границе между двумя концентрациями pH-градиент изменяется «скачком». При фракционировании смеси отдельные компоненты можно наблюдать как «пики» концентраций. Обратим внимание на возможную неправильную интерпретацию эксперимента. Например, вещество с концентрацией a_4 на интервале от $t = 50\tau$ до $t = 100\tau$ имеет *два* заметных пика, которые можно ошибочно принять за *два различных* вещества. На самом деле, дальнейшее наблюдение показывает, что один из двух пиков вещества a_4 исчезает уже при $t = 400\tau$ (см. рисунок 2).

4. Процесс ИЭФ при стабилизации плотности тока. Краевые условия (4) для электрического потенциала соответствуют режиму с постоянным напряжением. В этом случае плотность электрического тока зависит от времени: $j = j(t)$. Такой режим наиболее часто используется при проведении ИЭФ. Напротив, при теоретическом исследовании задачи (1)–(3) проще исследовать режим с постоянный плотностью тока. Дело в том, что из уравнения неразрывности электрического тока в пространственно одномерном случае $\partial_x j = 0$, следует $j = j(t)$. При выполнении условия $j = j_0 = \text{const}$ из закона Ома (2) определяется напряженность электрического поля E и краевых условий (4) для потенциала φ не требуется. Величина E исключается из уравнений (1) и, формально, задача упрощается.

Зависимость разности потенциалов от времени в режиме с постоянной плотностью тока и аналогичная зависимость плотности тока от времени в режиме с постоянным напряжением показана на рисунке 3.

При вычислениях режим с постоянной плотностью тока легко реализуется, с сохранением прежнего алгоритма решения задачи, путем коррекции на каждом

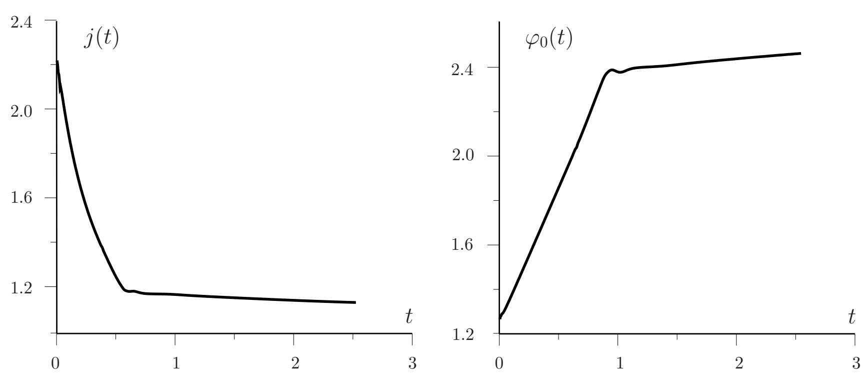


Рисунок 3 – Постоянное напряжение ($\varphi_0 = 2.808$, слева) и постоянная плотность тока ($j = 1.0$, справа) при $\lambda = 1500$

временном шаге значения потенциала φ при $x = 0$, то есть величины φ_0 в условии (4), при помощи соотношения $\varphi_0(t+\tau) = \varphi_0(t)(j_0/j(t))$. Качественно картины процесса формирования pH-градиента и фракционирования смеси будут прежними и при $t \to \infty$, естественно, будут совпадать. Однако, на промежуточных стадиях процесса разница между режимами достаточно заметна, что и показывает рисунок 4.

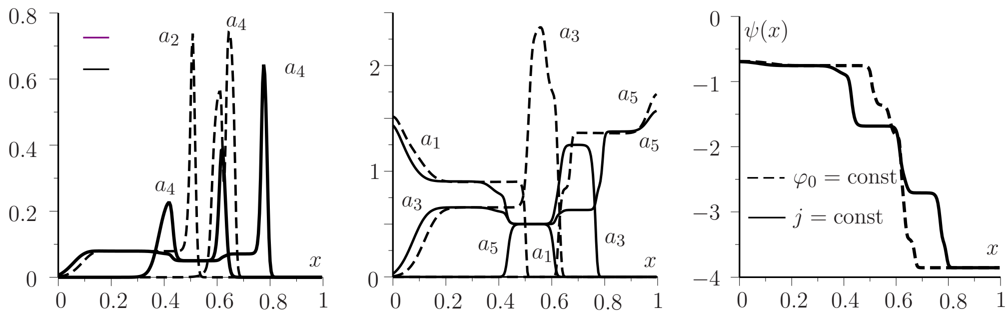


Рисунок 4 – Различие между режимами с постоянной плотностью тока и постоянным напряжением при $\lambda = 1500$, $t = 110\tau$, $\tau = 0.005$

Анализ результатов показывает, что в режиме с постоянный плотностью тока формирование pH-градиента и фракционирование смеси происходит быстрее, чем а режиме с постоянным напряжением.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 2005. 215 с.

[2] *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu., Zhukova N. M.* Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part III: Numerical Solution of the Non-stationary Problem // arXiv:1311.5363. 2013. 23 p.

[3] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

[4] *Righetti P. G.* Isoelectric focusing: Theory, Methodology and Application. NY–Oxford: Elsevier, 1983. 386 p.

Zhukov M.Yu., Shiryaeva E. V. *Numerical study of a nonstationary problem for the multicomponent mixtures under the action of an electric field*. The problem of the formation spatially inhomogeneous structure of multicomponent active mixture under the action of an external electric field is investigated. The problem is solved numerically by the finite element method. The results of calculations for five-components mixture are presented. We are considered two process: with constant current density and with constant voltage.

ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НАРУШЕНИЙ УСЛОВИЯ ЭЛЕКТРОНЕЙТРАЛЬНОСТИ НА ДИНАМИКУ ФОРМИРОВАНИЯ pH-ГРАДИЕНТА В РАСТВОРЕ

Жукова Н. М.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Численно исследованы более общие, по сравнению с классической, модели изоэлектрофокусирования (ИЭФ). Приведены результаты вычислений, выполненные при помощи метода конечных элементов. Обсуждается необходимость использования уравнения Пуассона–Больцмана взамен классического уравнения электронейтральности.

Введение. В работе основное внимание уделяется более сложным по сравнению с простейшим вариантом моделям процесса изоэлектрофокусирования (ИЭФ), в которых учитываются дополнительные эффекты: различие между изоэлектрическими и изоионными точками (в таких точках, соответственно, подвижность компоненты и заряд компоненты равны нулю), вклад в проводимость ионов воды. Результаты вычислительных экспериментов показали, что на заключительных этапах процесса, близких к стационарному состоянию, при формировании pH-градиента происходит сильная пространственная стратификация концентраций компонент. Каждая компонента сосредотачивается в своей пространственной области (зоне), в которой имеет концентрацию, близкую к постоянной. На границах зон происходит почти скачкообразное изменение напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$, что, в силу уравнения Пуассона–Больцмана $\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E} = q$, приводит к возникновению достаточно значительной плотности объемного заряда $\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E}$, даже при малой диэлектрической проводимости ε. Таким образом, в окрестности границ зон происходит локальное нарушение условия электронейтральности раствора $q = 0$, что приводит к необходимости рассмотрения более общего уравнения $q_t + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$ взамен $q = 0$, $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$.

1. Основные уравнения ИЭФ. Для исследования процесса ИЭФ использованы достаточно общие уравнения, которые учитывают различие между изоэлектрическими и изоионными точками, и вклад в проводимость ионов воды [1–4]

$$\partial_t a_k + \operatorname{div} \boldsymbol{i}_k = 0, \quad \boldsymbol{i}_k = -\mu_k \nabla(\overline{\varepsilon}(\psi) a_k) + \mu_k \Theta_k(\psi) a_k \boldsymbol{E}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_k(\psi) a_k + 2k_w \sinh \psi = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla \varphi,$$

$$\boldsymbol{j}_k = \left(-\varepsilon \mu_k \nabla(\Theta_k(\psi) a_k) + \mu_k \overline{\sigma}_k(\psi) a_k \boldsymbol{E}\right),$$

$$\boldsymbol{j} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{j}_k + 2k_w \mu_0 \left(-\varepsilon \nabla(\sinh(\psi - \psi_0)) + \cosh(\psi - \psi_0) \boldsymbol{E}\right),$$

$$\theta_k(\psi) = \frac{\sinh(\psi - \psi_k)}{\cosh(\psi - \psi_k) + \delta_k}, \quad \Theta_k(\psi) = \frac{\sinh(\psi - \Psi_k)}{\cosh(\psi - \psi_k) + \delta_k},$$

$$\overline{\sigma}_k(\psi) = \frac{\cosh(\psi - \Psi_k)}{\cosh(\psi - \psi_k) + \delta_k}, \quad \mu_k\overline{\varepsilon}(\psi) = \varepsilon\mu_k\Theta_k(\psi) - \varepsilon\mu_k^0\theta_k(\psi) + \varepsilon\mu_k^0.$$

Здесь a_k, $\boldsymbol{i}_k$ — концентрации и плотности потока компонент; φ, $\boldsymbol{E}$ — потенциал и напряженность электрического поля; ψ — функция кислотности; $\boldsymbol{j}_k$, $\boldsymbol{j}$ — плотность электрического тока для компоненты и смеси; ψ_k, Ψ_k — изоэлектрическая и изоионная точки; $\mu_k\Theta_k(\psi)$, $\theta_k(\psi)$, $\overline{\sigma}_k(\psi)$, $\mu_k\overline{\varepsilon}(\psi)$, $\varepsilon\mu_k^0$ — электрофоретическая подвижность, заряд, проводимость, коэффициент диффузии, коэффициент диффузии цвиттерионов; δ_k — коэффициент, связанный с константами диссоциации; k_w, μ_0, ψ_0 — константа диссоциации, эффективная подвижность и параметр, характеризующий различие подвижностей ионов воды.

Ограничимся рассмотрением пространственно одномерного случая и режимом с постоянной плотностью тока $j = j_0 = \mathrm{const}$, который наиболее часто рассматривается при решении задач ИЭФ. В этом случае напряженность электрического поля E определяется из уравнений явным образом и нет необходимости решать краевую задачу для нахождения электрического потенциала φ [3, 4]. Система дополняется краевыми и начальными условиями

$$i_k\,|_{x=0} = i_k\,|_{x=1} = 0, \quad a_k\,|_{t=0} = a_k^0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

В более простых моделях пренебрегают вкладом ионов воды ($k_w = 0$) и считают отсутствующей разницу между изоэлектрической ψ_k и изоионной Ψ_k точками ($\Psi_k = \psi_k$). Одна из целей работы — демонстрация различия результатов для простейших моделей и модели (1).

2. Вычислительный эксперимент. Для решения задачи (1), (2) в пространственно одномерном случае использован метод конечных элементов и алгоритм, подробно изложенный в [3]. На отрезке $[0, 1]$ выбиралось 200 кусочно-квадратичных конечных элементов и шаг по времени $\tau = 0.005$. Расчеты представлены для некоторых гипотетических параметров пятикомпонентной смеси

$$\mu_k = \mu_k^0 = 1.0, \quad \delta_k = 15, \quad \psi_k = 6 - k, \quad k = 1, \ldots, 5, \quad \mu_0 = 27.28, \quad \psi_0 = -0.29,$$

$$a_1^0 = a_5^0 = 0.125, \quad a_2^0 = a_3^0 = a_4^0 = 0.25, \quad \varepsilon = \lambda^{-1}, \quad \lambda = 500, \quad k_w = 10^{-6}.$$

2.1. Различие между изоэлектрическими и изоионными точками. Зададим разности между ψ_k и Ψ_k

$$\Delta_k = \Psi_k - \psi_k, \quad \Delta_1 = -0.02, \quad \Delta_2 = 0.01, \quad \Delta_3 = 0.02, \quad \Delta_4 = 0.01, \quad \Delta_5 = -0.01.$$

Результаты расчетов представлены на рисунке 1. Несмотря на то, что разности Δ_k малы, различие между распределениями концентраций для модели при $\Delta_k \neq 0$ и $\Delta_k = 0$ достаточно значительны. Для обеих моделей pH-градиент (функция ψ) является в стационарной стадии процесса почти кусочно-постоянным, но сдвинутым относительно друг друга, и различается размерами пологих участков.

Наблюдаемый эффект объясняется сравнительно просто. Для достаточно большого момента времени t каждая концентрация пытается локализоваться в области, в которой подвижность обращается в нуль, то есть $\mu_k\Theta(\psi_k) = 0$. Однако, в случае $\Delta_k \neq 0$, молярный заряд $\theta_k(\psi_k) \neq 0$. Это означает, что распределение концентраций будет в основном определяться уравнением электронейтральности, например, для a_i имеем: $0 = \left(\sum \theta_k(\psi)a_k + 2k_w \sinh\psi\right)_{\psi\approx\psi_i} \approx \theta_i(\psi_i)a_i + 2k_w \sinh\psi_i$. Заметим, что при $\Delta_k \neq 0$ стационарное состояние процесса не реализуется.

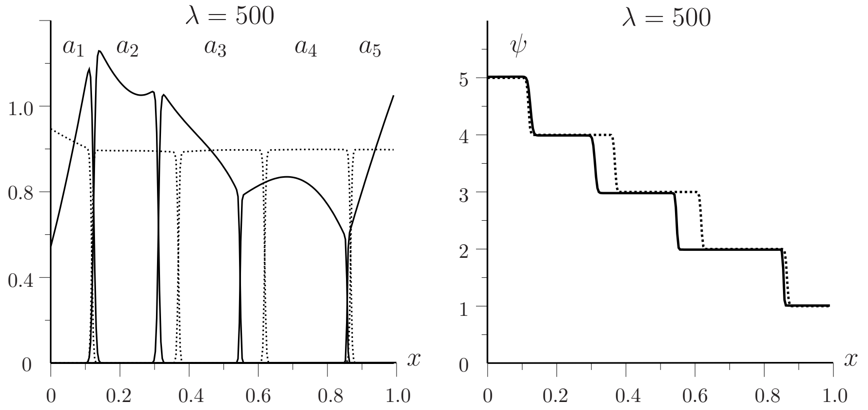


Рисунок 1 – Распределение концентраций $a_k(x)$ и функции $\psi(x)$ при $\Delta_k = 0$ (пунктир) и $\Delta_k \neq 0$ (непрерывная линия), $k_w \neq 0$, $\lambda = 500$, $t = 500\tau$, $\tau = 0.005$

2.2. Влияние вклада ионов воды. На рисунке 2 приведены результаты расчетов для случаев $k_w \neq 0$ и $k_w = 0$ ($\psi_k = \Psi_k$) в почти стационарной стадии процесса. Видно, что учет влияния ионов воды практически не сказывается на распределении концентраций, однако, существенно влияет на среднюю проводимость смеси.

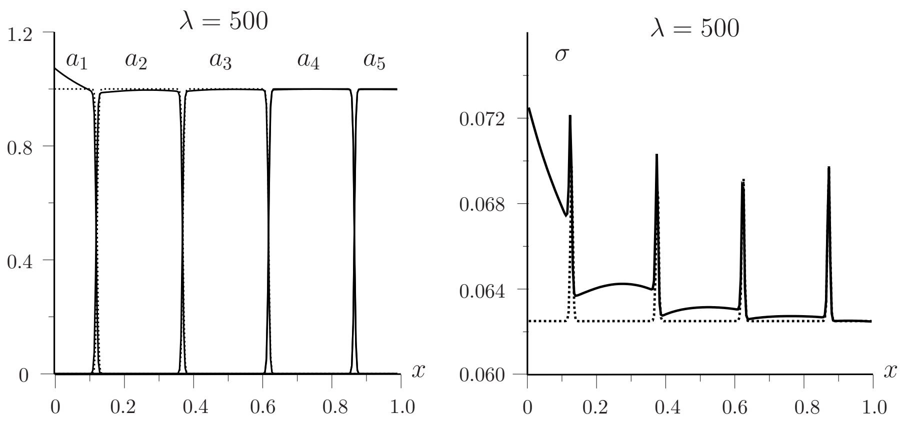


Рисунок 2 – Распределение концентраций и средней проводимости смеси σ, $k_w = 0$ (пунктир), $k_w \neq 0$ (непрерывная линия), $\psi_k = \Psi_k$, $t = 500\tau$, $\tau = 0.005$

3. Функция Кольрауша. При проведении расчетов для проверки правильности работы алгоритма удобно использовать аналог функции Кольрауша $R(x,t)$, которую нетрудно получить из исходных уравнений. В пространственно одномерном случае при $k_w = 0$, $\psi_k = \Psi_k$ выводим

$$R_t - \varepsilon S_{xx} = 0, \quad R = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\mu_k}, \quad S = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Например, в случае, когда $\mu_k = \mu$, $k = 0, \ldots, n$, имеем $S = \mu R$ и, с учетом начальных условий (2), функция $R(x,t) = \mu^{-1} \sum M_k = \text{const}$ является интегралом системы (1) (подробнее см. [3, 4]). Наличие интеграла позволяет проверить эффективность итерационного алгортима, используемого для определения функции $\psi(x)$ из уравнения электронейтральности $\sum \theta_k(\psi) a_k = 0$ при фиксированных $a_k(x)$. На рисунке 3 показана функция Кольрауша в зависимости от количества итераций алгоритма.

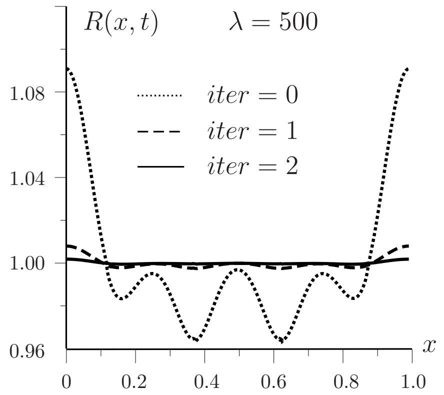


Рисунок 3 – Функция $R(x)$. Количество итераций $iter = 0, 1, 2$, $\lambda = 500$, $t = 300\tau$, $\tau = 0.005$. Теоретическое значение $R(x,t) = 1$

4. Об использовании уравнения Пуассона–Больцмана. Практически во всех моделях ИЭФ используется условие электронейтральности для заряда q и уравнение неразрывности для плотности электрического тока $\boldsymbol{j}$

$$q \equiv \sum \theta_k a_k + 2k_w \sinh \psi = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{3}$$

Интересно оценить насколько правомерно такое приближение для моделей ИЭФ и ответить на вопрос: не следует ли взамен (3) использовать закон сохранения заряда и уравнение Пуассона–Больцмана

$$\partial_t q + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \quad \varepsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = q, \tag{4}$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость воды ($\varepsilon_0^* \approx 80 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

Если $\varepsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E}$ достаточно мало по сравнению с q, то, очевидно, из (4) следует (3). При достижении процессом ИЭФ почти стационарных стадий, распределение концентраций сильно стратифицировано и функция ψ близка к кусочно-постоянной, например, см. рис. 1. Это означает, что на границах между веществами имеются скачки напряженности электрического поля и производная $E_x = -\varphi_{xx}$ может быть достаточно большой. Проведенные расчеты, показанные на рис. 4, подтверждают сказанное.

Оценка плотности заряда воды ($[\mathrm{H}^+] - [\mathrm{OH}^-]$) и заряда $\varepsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E}$ в одномерном случае дает соотношения, например, при $\lambda = 500$ и $\psi = 1$, $\varphi_{xx} \approx 200$ (см. рис. 4)

$$(\varepsilon_0 \varphi_{xx})_* \approx 0.0028 \text{ (Кул/м}^3), \quad ([\mathrm{H}^+] - [\mathrm{OH}^-])_* \approx 0.023 \text{ (Кул/м}^3).$$

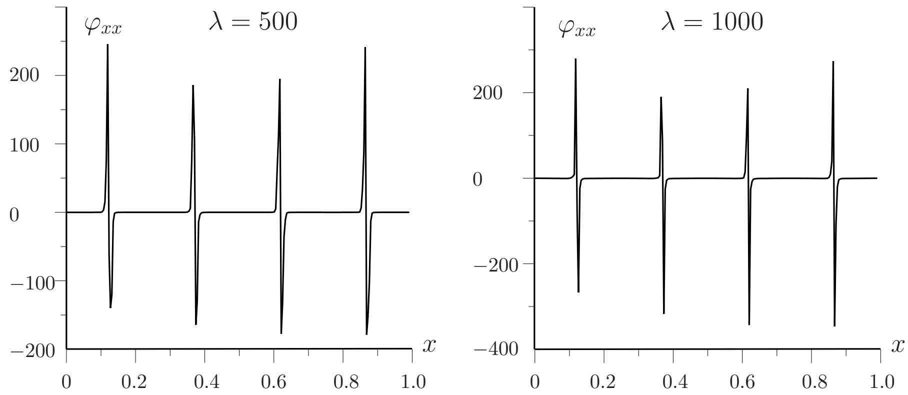


Рисунок 4 – Распределение $\varphi_{xx}(x)$, $k_w \neq 0$, $\psi_k = \Psi_k$, $t = 2.5$

В частности, это означает, что использование уравнений (3) вместо более общих уравнений (4), может привести к значительным расхождениям решений модели с данными экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Юдович В. И.* Математическая теория электрофореза. Киев: Наукова думка, 1983. 202 с.

[2] *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 2005. 216 с.

[3] *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu., Zhukova N. M.* Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part III: Numerical Solution of the Non-stationary Problem // arXiv:1311.5363. 2013. 23 p.

[4] *Shiryaeva E. V., Zhukov M. Yu., Zhukova N. M.* Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part IV. Theory // arXiv:1311.5907. 2013. 15 p.

[5] *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2008. 256 с.

Zhukova N. M. *The influence of local disturbances of electroneutrality condition on dynamics of the pH-gradient formation in mixture*. The general model of isoelectrofocusing is investigated numerically. The results of calculations using the finite element method are presented. The need to use the Poisson–Boltzmann equation instead of the classical equation of electroneutrality is discussed.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Залётов В. В.[1], **Залётов С. В.**[2], **Илюхин А. А.**[2]

[1] *Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк*

[2] *Таганрогский государственный педагогический институт имени А.П. Чехова*

Исследовано аналитическое решение осесимметричной смешанной задачи теории упругости о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство в случае, когда в точках граничной поверхности нормальные напряжения и перемещения пропорциональны, касательные напряжения отсутствуют, на бесконечности напряжения обращаются в нуль. Установлено, что в результате аналитического преобразования несобственных интегралов, содержащихся в решении задачи, время компьютерного расчета компонент тензора напряжений в упругом полупространстве существенно уменьшается. Численно проанализировано влияние параметра, характеризующего упругое закрепление граничной плоскости, на распределение напряжений в изотропном полупространстве.

Введение. В работах [1,2] приведено аналитическое решение осесимметричной задачи о действии распределенной по кругу нормальной нагрузки на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей вне области приложения внешних усилий. Если в этом решении устремить радиус круговой области к нулю, считая интенсивность нагрузки постоянной, то получим аналитическое решение задачи о сосредоточенной силе, действующей на полупространство с упруго закрепленной граничной поверхностью. Другой способ решения задачи о сосредоточенной силе при упругом закреплении границы полупространства предложен в работе [3]. В ней построенное решение задачи представлено в виде суммы решения Буссинеска [4] и слагаемых, зависящих от параметра, характеризующего упругое закрепление поверхности полупространства и его механические свойства.

Расчеты показали, что вычисление вторых слагаемых, которые содержат несобственные интегралы от знакопеременных функций, требует больших затрат компьютерного времени. Ниже предложен алгоритм аналитического преобразования несобственных интегралов, применение которого существенно уменьшает время их вычисления. Это позволяет осуществить численные исследования задачи в объеме, достаточном для обоснования закономерностей о распределении напряжений в изотропном полупространстве не только вблизи точки приложения сосредоточенной силы, но и на значительном удалении от нее, при любых реальных значениях параметров, содержащихся в решении. В данной статье на основе преобразованного решения задачи изучено влияние упругого закрепления граничной плоскости на напряженно-деформированное состояние упругого полупространства при действии на него сосредоточенной силы.

1. Постановка задачи. Граничные условия.

Для исследования осесимметричной деформации изотропного полупространства введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, начало которой поместим в точке приложения сосредоточенной силы. Система уравнений линейной теории упругости включает уравнения равновесия, соотношения Коши, закон Гука и условия совместности деформаций [5]. Сформулируем математическую постановку задачи. В области $\{0 \leqslant r < \infty, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant z < \infty\}$ найти неизвестные компоненты тензора напряжений $\sigma_r\,(r,z), \sigma_\theta\,(r,z), \sigma_z\,(r,z), \tau_{rz}(r,z)$ и вектора перемещений $u(r,z), w(r,z)$, удовлетворяющие основным уравнениям теории упругости и следующим смешанным условиям на границе полупространства:

$$\begin{gathered}\sigma_z(r,0) = -P, r = 0;\\ \sigma_z(r,0) = kw(r,0), r > 0;\\ \tau_{rz}(r,0) = 0, 0 < r < \infty.\end{gathered} \tag{1}$$

В формулах (1) введены обозначения: P — сосредоточенная сила, k — постоянный коэффициент пропорциональности напряжений и перемещений.

2. Аналитические формулы для компонент тензора напряжений в упругом полупространстве.

Согласно [3] решение задачи о симметричной деформации изотропного полупространства при граничных условиях (1) имеет вид

$$\sigma_r = \sigma_r^\beta + \sigma_r^\chi, .., \tau_{rz} = \tau_{rz}^\beta + \tau_{rz}^\chi, \tag{2}$$

где $\sigma_r^\beta, .., \tau_{rz}^\beta$ определяются формулами Буссинеска [6]

$$\begin{gathered}\sigma_z^\beta(r,z) = -\frac{3Pz^3}{2\pi\rho^5},\\ \sigma_r^\beta(r,z) = -\frac{P}{2\pi}[\frac{(1-2\nu)}{r^2}(1-\frac{z}{\rho}) - \frac{3zr^2}{\rho^5}]\\ \sigma_\theta^\beta(r,z) = \frac{P}{2\pi}(1-2\nu)[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} - \frac{z}{\rho^3}],\\ \tau_{rz}^\beta(r,z) = -\frac{3Prz^2}{2\pi\rho^5}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона,$\rho = \sqrt{r^2+z^2}$. Компоненты напряжений $\sigma_r^\chi, .., \tau_{rz}^\chi$, входящие в формулы (2), запишем в виде [3]

$$\sigma_z^\chi(r,z) = -\frac{P\chi}{2\pi}\int_0^\infty t(1+zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{dt}{t+\chi},$$

$$\sigma_r^\chi(r,z) = \frac{P\chi}{2\pi}\int_0^\infty t(1-zt)e^{-tz}J_0(rt)\frac{dt}{t+\chi} - \frac{P\chi}{2\pi r}\int_0^\infty (1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi} \tag{4}$$

$$\sigma_\theta^\chi(r,z) = \frac{\nu P\chi}{2\pi}\int_0^\infty te^{-tz}J_0(rt)\frac{dt}{t+\chi} - \frac{P\chi}{2\pi r}\int_0^\infty (1-2\nu-zt)e^{-tz}J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi}$$

$$\tau_{rz}^{\chi}(r,z) = -\frac{P\chi z}{2\pi}\int_0^\infty t^2 e^{-tz} J_1(rt)\frac{dt}{t+\chi},$$

где $J_0(rt), J_1(rt)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, параметр χ определяется равенством

$$\chi = \frac{2k(1-\nu^2)}{E}. \tag{5}$$

Введем обозначения для сходящихся несобственных интегралов

$$R_m(r,z,\chi) = \int_0^\infty e^{-tz} J_m(rt)\frac{dt}{t+\chi}, m = 0,1. \tag{6}$$

Вычислим интегралы [7]

$$\int_0^\infty e^{-tz} J_0(rt)dt = \frac{1}{\rho}$$

$$\int_0^\infty te^{-tz} J_0(rt)dt = \frac{z}{\rho^3} \tag{7}$$

$$\int_0^\infty t^2 e^{-tz} J_0(rt)dt = -\frac{1}{\rho^3} + \frac{3z^2}{\rho^5}$$

Учитывая формулы (6),(7), преобразуем первое равенство в соотношениях (4) к виду

$$\sigma_z^{\chi}(r,z) = \frac{P\chi}{2\pi}[\frac{1}{\rho^3}(\rho^2 + z^2 - z\chi\rho^2) + \chi(z\chi - 1)R_0(r,z)] \tag{8}$$

Сложим левые и правые части равенства (8) и первого соотношения (3), получим формулу для нормального напряжения σ_z в произвольной точке упругого полупространства

$$\sigma_z(r,z) = -\frac{P}{2\pi\rho^3}[\frac{3z^3}{\rho^2} - \chi(z^2 + \rho^2(1 - z\chi)(1 - \chi\rho R_0(r,z)))] \tag{9}$$

Аналогично преобразуются формулы для остальных компонент тензора напряжений.

3. Результаты численных исследований.

На рисунках 1, 2, 3 представлены графики распределения нормальных напряжений σ_z в плоскостях, параллельных граничной поверхности полупространства. Расчеты выполнены по формуле (9) для значений параметра χ, равных $0; 0.1; 1; 10(\text{м}^{-1})$ в плоскостях $z = 0.1; 1; 2$ при $P = 1\,MH$.

Графики показывают, что максимальные сжимающие напряжения в исследуемых плоскостях достигаются в точках, принадлежащих оси z (при $r = 0$). При увеличении r монотонно убывающие кривые $\sigma_z = \sigma_z(r)$ пересекают ось r и напряжения становятся растягивающими. Из рисунков видно, что при приближении плоскости $z = const$ к границе полупространства координаты точек пересечения

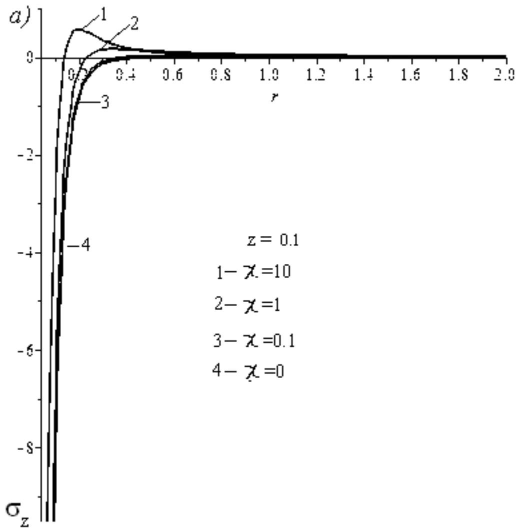


Рисунок 1

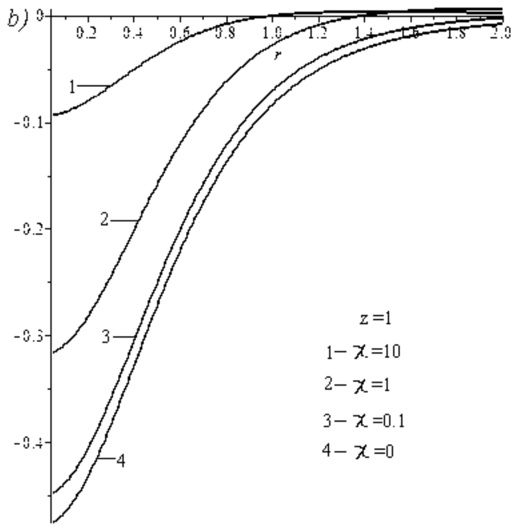


Рисунок 2

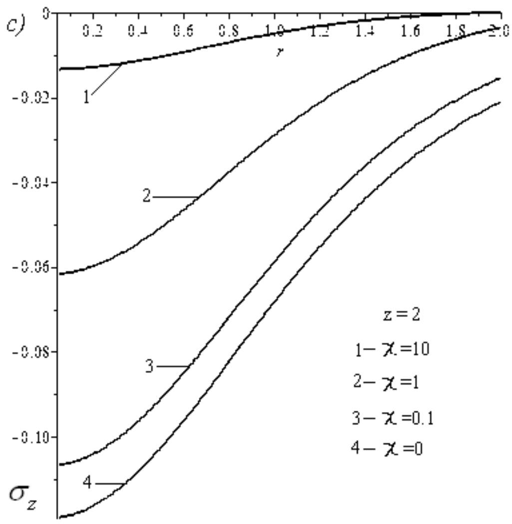


Рисунок 3 – *Распределение нормального напряжения σ_z в упругом полупространстве.*

уменьшаются, а максимум растягивающих напряжений увеличивается, перемещаясь к оси z . Численные исследования показали, что вблизи оси z доминирующее влияние на распределение напряжения σ_z оказывает сосредоточенная сила, а с ростом r усиливается влияние параметра χ, характеризующего упругое закрепление границы. Из анализа рисунков следует, что с ростом χ область сжимающих напряжений σ_z, а также их величины уменьшаются, область растягивающих напряжений в полупространстве увеличивается. Из графиков видно, что при удалении от плоскости $z = 0$ в глубь полупространства напряжения σ_z достаточно быстро уменьшаются. Так, в плоскости $z = 1$ напряжения на порядок меньше, чем в плоскости $z = 0.1$. Из сравнения рисунков 2 , 3 следует, что при переходе от плоскости

$z = 1$ к плоскости $z = 2$ интенсивность затухания напряжений уменьшается. Приведенные рисунки позволяют получить количественную оценку изменения напряжения σ_z при удалении от границы полупространства.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Хапилова Н. С., Залётов С. В.* Осесимметричная деформация изотропного полупространства при упругом закреплении границы вне области приложения нормальной нагрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XV Международной конференции. Ростов-на-Дону. 4–7 декабря 2011г., 2011. Т. 2, С. 246–250.

[2] *Хапилова Н. С., Залётов В. В., Залётов С. В.* Осесимметричная задача о действии распределенной нагрузки на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей //Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Т. 25. С. 251–259.

[3] *Залётов В. В.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного полупространства, лежащего на упргом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2004. Т. 9, С. 61–67.

[4] *Boussinesq J.* Application eles Potentiels a l'Etude l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Gauther – Villars, Paris. 1885.721 p.

[5] *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М.:Высшая школа, 1971. 287с.

[6] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

[7] *Градштейн И. С., Рыжик Н. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1974. 1108 с.

Zaletov V. V., Zaletov S. V., Ilyukhin A. A. *Numerical investigation of analytical solution of the problem about the action of concentrated force to the isotropic half-space with elastic fixing boundary.* Investigated the analytical solution of the axisymmetric mixed problem of elasticity theory about the action of a concentrated force to an isotropic half-space in the case when in the points of the boundary surface normal stresses and displacements are proportional, the shear stresses are absent, at infinity the stresses vanish. Analytical method is proposed for the conversion of improper integrals, which contained in the solution of the task. Found that after the conversion of improper integrals time to calculate the stress tensor components in an elastic half-space is significantly reduced. Numerically analyzed the influence of the parameter characterizing the elastic fixing boundary plane on the stress distribution in an isotropic half-space.

КВАЗИТВЕРДЫЕ СОСТОЯНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Зеленина А. А.[1], **Зубов Л. М.**[2]

[1]*Ростовский государственный университет путей сообщения*

[2]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Изучаются такие состояния линейно упругого микрополярного тела, в которых существуют только моментные напряжения, а силовые напряжения тождественно равны нулю. Эти состояния называются квазитвердыми, поскольку в них отсутствуют метрические деформации, т. е. удлинения и сдвиги материальных волокон. Каждый элементарный объем среды перемещается как абсолютно твердое тело, причем поле поворотов неоднородно. Доказано, что квазитвердые состояния трехмерной среды возможны только при наличии распределенных дислокаций. Сформулирована краевая задача определения поля моментных напряжений в квазитвердых состояниях. Найдены тензорные поля плотности дислокаций, обеспечивающие квазитвердые состояния при изгибе и кручении призматических стержней произвольного поперечного сечения. Исследована плоская задача для микрополярного тела в условиях квазитвердого состояния.

1. Система уравнений статики линейно упругого изотропного микрополярного тела при отсутствии массовых сил и моментов состоит [1] из уравнений равновесия для напряжений

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times = 0, \tag{1}$$

определяющих соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \lambda \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + (\mu+\beta)\boldsymbol{\varepsilon} + (\mu-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}^T \\ \mathbf{M} &= \nu \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varkappa} + (\gamma+\eta)\boldsymbol{\varkappa} + (\gamma-\eta)\boldsymbol{\varkappa}^T \end{aligned} \tag{2}$$

и геометрических соотношений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \operatorname{grad} \boldsymbol{\theta} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор силовых напряжений, $\mathbf{M}$ — тензор моментных напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — несимметричный тензор метрических деформаций, $\boldsymbol{\varkappa}$ — тензор изгибных деформаций, $\boldsymbol{\theta}$ — векторное поле мироповоротов, $\mathbf{u}$ — поле смещений упругой среды, $\mathbf{E}$ — единичный тензор; λ, μ, β, ν, γ, η — материальные постоянные, grad — оператор градиента, $\mathbf{T}_\times$ — векторный инвариант тензора $\mathbf{T}$.

Если в теле распределены дислокации с тензорной плотностью $\boldsymbol{\alpha}$, то поле перемещений не существует, а первое соотношение в (3) заменяется уравнением несовместности [2], [3]

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\alpha} \tag{4}$$

где rot — операция ротора.

Будем разыскивать такие состояния микрополярного тела, в которых тензор метрических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ равен нулю тождественно, т. е. в каждой точке тела, но тензор $\boldsymbol{\varkappa}$ не равен нулю тождественно. Это возможно только при наличии непрерывно распределенных дислокаций. В самом деле, из (4) при $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ и $\boldsymbol{\alpha} = 0$ вытекает следующее уравнение для векторного поля микроповоротов

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\theta} = (\operatorname{div}\boldsymbol{\theta})\mathbf{E} \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет только постоянные решения $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{const}$, для которых $\varkappa \equiv 0$. Следовательно, при отсутствии распределенных дислокаций случай, когда $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv 0$, $\varkappa \neq 0$, невозможен. Симметричный тензор деформаций $\mathbf{e} = 1/2(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T)$, который используется в классической теории упругости и компоненты которого представляют собой удлинения и сдвиги материальных волокон, при $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ также равен нулю. Состояния тел с нулевыми метрическими деформациями будем называть квазитвердыми, поскольку в этих состояниях каждый элементарный объем среды перемещается как абсолютно твердое тело, а поле вращений неоднородно. Согласно (2) тензор силовых напряжений $\mathbf{T}$ в квазитвердых состояниях равен нулю и первое уравнение равновесия в (1) удовлетворяется тождественно. Таким образом, квазитвердое состояние микрополярного тела можно назвать также чисто моментным напряженным состоянием.

Определение квазитвердого состояния микрополярного тела согласно (1)–(3) сводится к решению следующей краевой задачи для векторного поля вращений $\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{M} = \nu\mathbf{E}\operatorname{div}\boldsymbol{\theta} + (\gamma+\eta)\operatorname{grad}\boldsymbol{\theta} + (\gamma-\eta)(\operatorname{grad}\boldsymbol{\theta})^T \\ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_*, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{M} = \mathbf{m}_*\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности тела, σ_1 — часть поверхности тела, на которой задано поле вращений. На остальной части границы тела σ_2 задана распределенная моментная нагрузка. Последние условия в (6) выполняются на σ_1 и σ_2 соответственно.

После решения краевой задачи (6) тензорное поле плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$, реализующее квазитвердое состояние, в силу (5) выражается через найденное поле вращений по формуле

$$\boldsymbol{\alpha} = -(\operatorname{grad}\boldsymbol{\theta})^T + \mathbf{E}\operatorname{div}\boldsymbol{\theta} \tag{7}$$

2. Рассмотрим задачи о квазитвердых состояниях, возникающих при кручении и изгибе призматических стержней с распределенными дислокациями. Пусть x_1, x_2 — декартовы координаты, отсчитываемые в плоскости поперечного сечения, которое может иметь произвольную форму. Координата x_3 отсчитывается по оси стержня. Координатные орты обозначим $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузки.

Поле вращений в задаче кручения стержня при чисто моментном состоянии будем искать в виде (ψ, ω — постоянные)

$$\boldsymbol{\theta}(x_1, x_2, x_3) = \psi x_3\mathbf{i}_3 + \omega(x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2) \tag{8}$$

где ψ — угол закручивания.

При помощи (2), (3), (8) определим тензоры изгибных деформаций и моментных напряжений

$$\begin{gathered}\varkappa = \omega(\mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2) + \psi\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3 \\ \mathbf{M} = [\nu(\psi+2\omega) + 2\gamma\omega]\,(\mathbf{i}_1\otimes\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2) + [\nu(\psi+2\omega) + 2\gamma\psi]\,\mathbf{i}_3\otimes\mathbf{i}_3\end{gathered} \tag{9}$$

Условие отсутствия моментной нагрузки на боковой поверхности стержня согласно (9) приводит к соотношению $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{i}_2 = 0$, из которого постоянная ω выражается через угол закручивания

$$\omega = -\frac{\nu\psi}{2(\nu+\gamma)} \tag{10}$$

Тензор плотности распределенных дислокаций, обеспечивающих свойство квазитвердости скручиваемого стержня, на основании (7), (8), (10) имеет вид

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\psi}{\gamma+\nu}\left[\left(\gamma+\frac{\nu}{2}\right)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2) - \nu \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3\right] \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что для микрополярной среды, у которой $\nu = 0$, плотность дислокаций не зависит от упругих постоянных материала:

$$\boldsymbol{\alpha} = \psi(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2) \tag{12}$$

Моментное напряжение, действующее на торцах цилиндра, в силу (9), (10) равно

$$\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{i}_3 = \frac{\gamma(3\nu+2\gamma)}{\nu+\gamma}\psi \tag{13}$$

Для определения результирующего крутящего момента, обусловливающего кручение бруса, достаточно умножить выражение (13) на площадь поперечного сечения стержня.

Чтобы решить задачу изгиба призматического стержня в условиях квазитвердого состояния, поле поворотов зададим в следующей форме

$$\boldsymbol{\theta} = \tau_1 x_3 \mathbf{i}_1 + \tau_2 x_3 \mathbf{i}_2 + (\chi_1 x_1 + \chi_2 x_2)\mathbf{i}_3, \quad \tau_1,\ \tau_2,\ \chi_1,\ \chi_2 = \mathrm{const} \tag{14}$$

Здесь $x_3\tau_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ — углы поворота сечения $x_3 = \mathrm{const}$ вокруг орта $\mathbf{i}_\alpha$. Тензоры изгибных деформаций и моментных напряжений на основании (14) будут такими

$$\begin{gathered} \varkappa = \mathbf{i}_3 \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\chi} \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{M} = (\gamma+\eta)(\mathbf{i}_3 \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\chi} \otimes \mathbf{i}_3) + (\gamma-\eta)(\boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \boldsymbol{\chi}) \\ \boldsymbol{\tau} = \tau_\alpha \mathbf{i}_\alpha; \quad \boldsymbol{\chi} = \chi_\alpha \mathbf{i}_\alpha \end{gathered} \tag{15}$$

Требование незагруженности боковой поверхности призматического тела дает соотношение

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{\eta-\gamma}{\eta+\gamma}\boldsymbol{\tau} \tag{16}$$

В соответствии с (7), (14), (16) находим тензор плотности дислокаций, осуществляющий чисто моментное состояние изгиба

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\gamma-\eta}{\gamma+\eta}\mathbf{i}_3 \otimes \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{i}_3 \tag{17}$$

Вектор изгибающих моментов, действующих на концах бруса, согласно (15) выражается формулой

$$\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{M} = \frac{4\gamma\eta}{\gamma+\eta}\boldsymbol{\tau} \tag{18}$$

3. Найденные выше чисто моментные состояния изгиба и кручения призматических стержней характеризуются равномерным распределением дислокаций и однородными полями моментных напряжений и изгибных деформаций. Рассмотрим общий случай однородных квазитвердых состояний микрополярного тела. Имеем

$$\varkappa = \varkappa_0 = \mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 = \mathrm{const}$$

В квазитвердом состоянии согласно (7) постоянные тензоры $\varkappa_0$ и $\boldsymbol{\alpha}_0$ связаны соотношением

$$\varkappa_0 = -\boldsymbol{\alpha}_0^T + \frac{1}{2}\mathbf{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\alpha}_0 \tag{19}$$

Поле вращений в однородном квазитвердом состоянии находится из (3) и (19):

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\alpha}_0 - \boldsymbol{\alpha}_0^T\right) + \boldsymbol{\theta}_0 \tag{20}$$

Здесь $\boldsymbol{\theta}_0$ — произвольный постоянный вектор, а $\mathbf{r} = x_k\mathbf{i}_k$ — радиус-вектор точки тела. В силу (2) тензор моментных напряжений постоянен и уравнения равновесия (6) тождественно удовлетворяются.

Отметим один интересный частный случай однородного чисто моментного состояния, когда тензор плотности дислокаций шаровой: $\boldsymbol{\alpha}_0 = a_0\mathbf{E}$. Тогда при помощи (20) находим

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}a_0\mathbf{r} + \boldsymbol{\theta}_0 \tag{21}$$

Согласно (21) при $\boldsymbol{\theta}_0 = 0$ каждый элементарный объем среды вращается вокруг радиус-вектора, причем угол поворота при удалении от начала координат возрастает пропорционально расстоянию. Поскольку тензор моментных напряжений для состояния (21) также шаровой, реализация такого состояния для тела произвольной формы требует приложения к поверхности тела σ равномерно распределенной крутящей (сверлящей) моментной нагрузки: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\,|_\sigma = m_0\mathbf{n}$, $m_0 = \mathrm{const}$.

4. Плоским квазитвердым состоянием будем называть такое, при котором все частицы тела испытывают вращение только вокруг орта $\mathbf{i}_3$, а угол поворота не зависит от координаты x_3:

$$\boldsymbol{\theta} = \omega(x_1, x_2)\mathbf{i}_3 \tag{22}$$

На основании (2), (3), (7), (22) получаем

$$\begin{gathered} \varkappa = \mathrm{grad}\,\omega \otimes \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{i}_3 \otimes \mathrm{grad}\,\omega \\ \mathbf{M} = (\gamma+\eta)\,\mathrm{grad}\,\omega \otimes \mathbf{i}_3 + (\gamma-\eta)\mathbf{i}_3 \otimes \mathrm{grad}\,\omega \end{gathered} \tag{23}$$

Уравнение равновесия моментных напряжений (6) приводит к двумерному уравнения Лапласа для функции ω: $\Delta\omega = 0$. Если на границе плоской области

v, занятой телом, задана моментная распределенная нагрузка $\mathbf{m}_* = h\,\mathbf{i}_3$, то граничное условие на ∂v имеет вид

$$(\gamma + \eta)\frac{\partial \omega}{\partial n} = h \tag{24}$$

Нетривиальное чисто моментное состояние может возникнуть даже при отсутствии внешней моментной нагрузки ($h = 0$ в (24)), если в теле имеются изолированные или распределенные дисклинации. В качестве примера плоского квазитвердого состояния рассмотрим задачу об изолированной дисклинации в круговом кольце. Введем в плоскости полярные координаты r, φ, а гармоническую функцию ω примем в виде $\omega = K\varphi$, $K = \text{const}$. Такое поле поворотов описывает образование клиновой дисклинации в круговом кольце с вектором Франка $2\pi K\mathbf{i}_3$. Тензорное поле плотности дислокаций, обеспечивающее свойство квазитвердости, согласно (7) имеет вид

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{K}{r}\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1 \sin\varphi + \mathbf{i}_2 \cos\varphi \tag{25}$$

а тензор моментных напряжений будет таким

$$\mathbf{M} = (\gamma + \eta)Kr^{-1}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_3 + (\gamma - \eta)Kr^{-1}\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_\Phi \tag{26}$$

Из (26) следует, что моментная нагрузка отсутствует на границах кругового кольца при любых значениях внутреннего и внешнего радиусов. Итак, изолированная дисклинация и распределенные с плотностью (25) краевые дислокации создают в круговом кольце, свободном от внешних нагрузок, чисто моментное напряженное состояние (26).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[2] *Вит Р. де.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.

[3] *Зубов Л. М.* Континуальная теория дислокаций и дисклинаций в нелинейно упругих микрополярных средах // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 3. С. 18–28.

Zelenina A. A., Zubov L. M. *Quasi-solid state of micropolar elastic bodies with distributed dislocations.* The state of linear elastic micropolar body, in which there are only a couple stresses, and power tension identically zero are studied.

РАСЧЕТЫ СЛОЖНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ ПО МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПРОЦЕССОВ

Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А.
Тверской государственный технический университет

Проведено численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования металлов по плоским прямолинейным и криволинейным траекториям в векторном пространстве А.А. Ильюшина. Расчетные результаты сравниваются с данными физических экспериментов, проведенных на автоматизированном экспериментальном комплексе СН-ЭВМ.

Определяющие соотношения между напряжениями и деформациями при сложном нагружении в модифицированной модели теории процессов упрогопластического деформирования приводятся к системе уравнений задачи Коши, которая для плоских траекторий имеет вид [1]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = M_1\frac{d\bar{Э}}{d\tau} + M\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\frac{ds}{d\tau},\ \frac{d\vartheta_1}{d\tau} = -\frac{ds}{d\tau}\Big(\frac{M_1}{\sigma}\sin\vartheta_1 + \kappa_1\Big), \tag{1}$$

где

$$\bar{\sigma} = S_k\widehat{i}_k,\ \bar{Э} = Э_k\widehat{i}_k,\ (k = 1, 2, 3)$$

— векторы напряжений и деформаций формоизменения в линейном девиаторном пространстве А.А. Ильюшина с ортонормированным базисом $\{\widehat{i}_k\}$;

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,S_{11},\ S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}),\ S_3 = \sqrt{2}\,S_{12},$$

$$Э_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,Э_{11},\ Э_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Э_{22} - Э_{33}),\ Э_3 = \sqrt{2}\,Э_{12},$$

— компоненты векторов напряжений и деформаций;

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0,\ Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0,\ (i, j = 1, 2, 3)$$

— компоненты девиаторов напряжений и деформаций; $\sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\,\sigma_{ij}\delta_{ij},\ \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ij}\delta_{ij},\ \sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{S_kS_k},\ Э = \sqrt{Э_{ij}Э_{ij}} = \sqrt{Э_kЭ_k}$$

— модули шаровых тензоров напряжений и деформаций (первые инварианты) и модули девиаторов (вторые инварианты), которые равны модулям векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{Э}$ соответственно; κ_1 — кривизна траектории деформирования; ϑ_1 — угол сближения вектора напряжений $\bar{\sigma}$ с касательной к траектории деформирования; τ — параметр обобщенного времени, за который для прямолинейных траекторий деформирования принимается длина дуги траектории s, а для криволинейных - полярный угол φ ее точек. Для функционалов пластичности использованы аппроксимации, предложенные В.Г. Зубчаниновым [1, 2]

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0)f^q,\ f = \frac{1-\cos\vartheta_1}{2},\ M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1\cos\vartheta_1, \tag{2}$$

где f — функция сложного нагружения; $2G$, $2G_p$ — удвоенные упругий и пластический модули сдвига, индекс «нолик» относится к величинам в точках излома траектории деформирования.

При простом пропорциональном нагружении в условиях сложного НДС используется закон единой универсальной кривой упрочнения Роша и Эйхингера $\sigma = \Phi(\text{Э})$, получаемый из опыта на простое растяжение. При сложных нагружениях по траекториям малой и средней кривизны, достаточно близких к простому нагружению, используется закон упрочнения Одквиста–Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$, описывающий скалярные свойства материалов, при этом всегда $s > \text{Э}$. В качестве его аппроксимации используются выражения

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \dfrac{2G}{\alpha}(1-e^{-\alpha s}), & \text{если } 0 < s < s^{\text{т}}, \\ \sigma^{\text{т}} + 2G_*(s - s^{\text{т}}) + \sigma_*(1 - e^{-\beta(s-s^{\text{т}})}), & \text{если } s \geqslant s^{\text{т}}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = 2G_* + \sigma_*\beta e^{-\beta(s-s^{\text{т}})},\ \text{при } s \geqslant s^{\text{т}},$$

где $\sigma^{\text{т}} = \sqrt{2/3}\,\sigma_{\text{т}}$; $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести при растяжении; α, β, $2G_*$, σ_* — материальные константы, определяемые по соответствующей методике [1]. Этот закон не отражает влияние векторных свойств материалов, которое характеризуется углом сближения $\vartheta_1(s,\kappa_1)$ вектора напряжений $\bar{\sigma}$ с касательной к траектории деформирования в текущей ее точке. Он не достоверен для траекторий большой кривизны и траекторий с большими изломами [3]. В связи с этим для описания сложной разгрузки материала при изломе траектории в некоторой точке К и последующего участка активного деформирования предлагаются аппроксимации [1]

$$\sigma(s,\kappa_1) = \Phi(s) + A\Omega(s)f_0^p + \omega(s,\kappa_1),\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} + A\frac{d\Omega}{ds}f_0^p + \frac{d\omega}{ds}, \tag{4}$$

где

$$\Omega(s) = -\Big(\gamma\Delta s e^{-\gamma\Delta s} + b(1-e^{-\gamma\Delta s})\Big),\ \frac{d\Omega}{ds} = -\gamma e^{-\gamma\Delta s}(1 + b - \gamma\Delta s); \tag{5}$$

— функция, описывающая временное понижение типа «нырка» модуля вектора напряжений и ее производная по длине дуги s; $\Delta s = s - s_{\text{к}}^{\text{т}}$ — приращение длины дуги траектории после ее излома в точке К на угол ϑ_1^0;

$$A = \frac{1}{\gamma(1+b)}\Big(\frac{d\Phi_0}{ds} + 2G\Big),\ \frac{d\Phi_0}{ds} = 2G_* + \sigma_*\beta e^{-\beta(s_{\text{к}}^{\text{т}} - s^{\text{т}})},\ f_0 = \frac{1-\cos\vartheta_1^0}{2};$$

$$\omega(s,\kappa_1) = -a\kappa_1\Delta s,\ \frac{d\omega}{ds} = -a\kappa_1 \tag{6}$$

— функция, учитывающая кривизну траектории деформирования и ее производная. Параметры γ, b, p, q, a универсальных аппроксимаций (2), (4)–(6) определяются по разработанной методике [1].

Для оценки достоверности математической модели и используемых аппроксимаций на партии из 20 тонкостенных стальных цилиндрических образцов были проведены экспериментальные исследования в пространстве деформаций $Э_1$–$Э_3$ (жесткое нагружение) на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ имени А. А. Ильюшина. На рисунке 1 представлена программа испытания в виде двузвенной ломаной траектории [4]. На ее первом участке проводилось кручение образца до значения компоненты $Э_3 = 2{,}5$ %, после чего производился излом траектории на угол 135° и на втором участке реализовывалось совместное растяжение с кручением до значений компонент $Э_1 = 2{,}5$ %, $Э_3 = 0$. Во втором опыте, по траектории на рисунке 2, на первом прямолинейном участке осуществлялось растяжение до значения компоненты $Э_1 = 1$ %, на втором участке после излома траектории на угол 90° реализовывалась центральная окружность радиуса $R = Э = 1$ % и кривизной $\kappa_1 = 100$. Данную траекторию можно отнести к траектории средней кривизны [3].

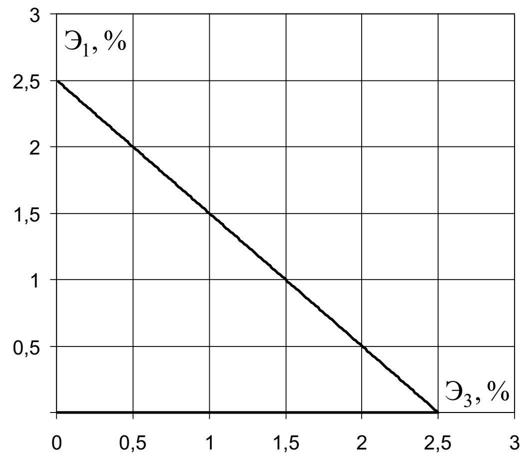


Рисунок 1 – Траектория № 1

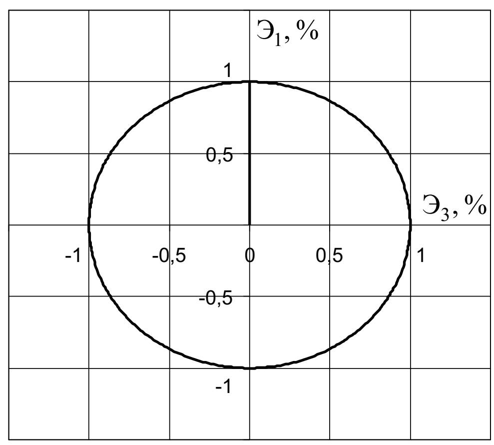


Рисунок 2 – Траектория № 2

На рисунке 3 представлены опытные диаграммы прослеживания процесса деформирования и аппроксимации $\sigma(s)$ для двузвенной ломаной и $\sigma(s, \kappa_1)$ для криволинейной траектории по (4), которые описывают скалярные свойства материала в реализованных процессах. После излома траектории деформирования они значительно отличаются от диаграммы $\sigma = \Phi(s)$, применяемой обычно для описания скалярных свойств в процессах по траекториям малой и средней кривизны.

При заданных начальных условиях и компонентах $Э_k$ $(k = 1, 3)$ вектора деформаций $\bar{Э}$ математически задача сведена к задаче Коши по определению компонент S_k $(k = 1, 3)$ вектора напряжений $\bar{\sigma}$ и угла его сближения ϑ_1 с касательной к траектории деформирования при известных аппроксимациях функционалов (2), (4)–(6). Для численного решения системы уравнений (1) использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности в приложении MathWorks Matlab. На рисунках 4, 5 приведены отклики в пространстве напряжений S_1–S_3 для рассмотренных выше траекторий, а на рисунке 6 диаграммы зависимости угла сближения ϑ_1 от приращения длины дуги траектории деформирования Δs после их излома, характеризующие векторные свойства материала. Как видно, стабилизация ϑ_1 на участке постоянной кривизны происходила примерно при достижении значения угла в 30°.

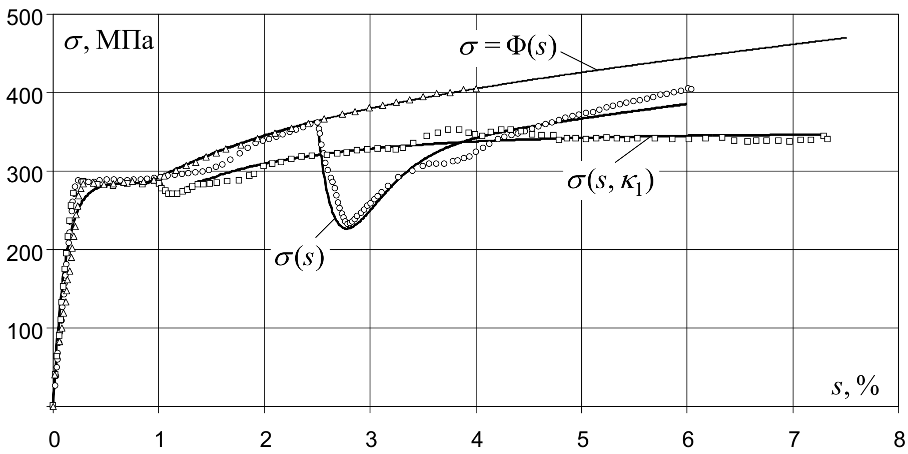


Рисунок 3 – Диаграммы $\sigma - s$

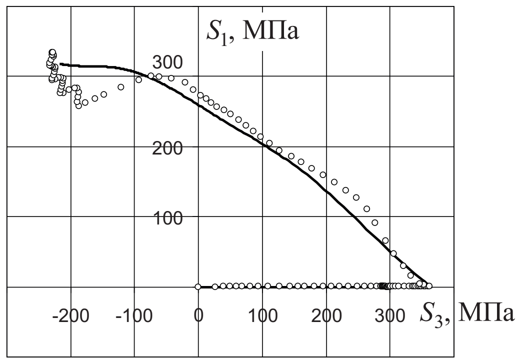


Рисунок 4 – Отклик на траекторию № 1

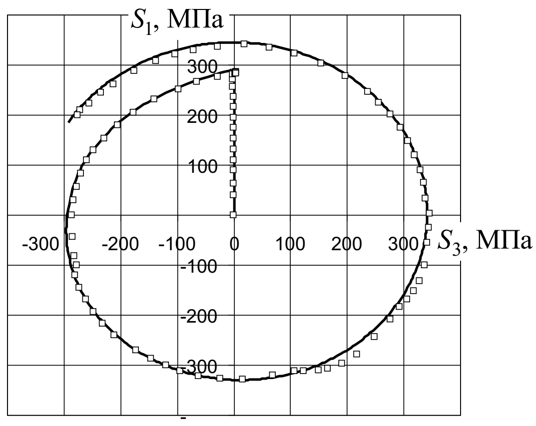


Рисунок 5 – Отклик на траекторию № 2

Для проведения численных расчетов по определяющим соотношениям (1) компоненты вектора деформаций $Э_k$ $(k = 1, 3)$ задавались в параметрическом виде. Для прямолинейных участков траектории деформирования с параметром прослеживания $\tau = s$ использовались выражения

$$Э_1 = Э_1^* + \Delta s \sin\varphi_0, \quad Э_3 = Э_3^* + \Delta s \cos\varphi_0, \quad \frac{dЭ_1}{ds} = \sin\varphi_0, \quad \frac{dЭ_3}{ds} = \cos\varphi_0,$$

где $Э_1^*$, $Э_3^*$ — координаты начальной точки участка; φ_0 — фиксированный угол, отсчитываемый от оси $Э_3$. Плоские криволинейные траектории постоянной кри-

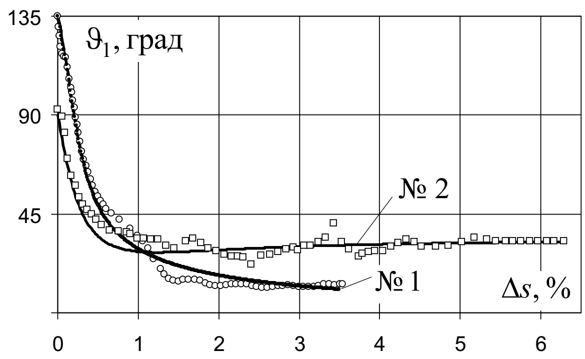


Рисунок 6 – Диаграммы $\vartheta_1 - \Delta s$

визны с параметром прослеживания $\tau = \varphi$ задавались в виде

$$Э_1 = Э_1^0 + \rho \sin\varphi,\ Э_3 = Э_3^0 + \rho\cos\varphi,\ \frac{dЭ_1}{d\varphi} = \rho\cos\varphi,\ \frac{dЭ_3}{d\varphi} = -\rho\sin\varphi,\ \frac{ds}{d\varphi} = \rho,$$

где $Э_1^0$, $Э_3^0$ — координаты полюса траектории; $\rho = R = \mathrm{const}$ — ее радиус; φ — полярный угол точки следа траектории, отсчитываемый от оси $Э_3$.

Приведенные результаты вычислений показали, что для рассмотренных классов траекторий деформирования модифицированная математическая модель теории процессов при описании скалярных и векторных свойств материалов при сложном нагружении дает достоверные результаты, соответствующие экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зубчанинов В. Г.* Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.

[2] *Зубчанинов В. Г.* Устойчивость и пластичность. Том 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2007. 336 с.

[3] *Зубчанинов В. Г., Алексеева Е. Г.* О влиянии кривизны траекторий деформирования на классификацию и запаздывание свойств материалов при сложном нагружении // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 1(19). С. 78–87.

[4] *Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультяев В. И.* Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двузвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76. № 1. С. 18–25.

Zubchaninov V. G., Alekseev A. A. *Calculations of complex elastoplastic deformation of metals on the modified model of the theory of processes.* Numerical modeling of processes of complex elastic-plastic deformation of metals on flat rectilinear and curvilinear paths in A. A. Ilyushin's vector space is carried out. The calculated results are compared with the data of physical experiments conducted in an automatized experimental installation SN-EVM.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Ильин К. И.[1], **Моргулис А. Б.**[2,3]
[1]*Университет Йорка*
[2]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*
[3]*Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства РСО–Алания*

Рассматриваются плоские течения вязкой жидкости в зазоре между двумя проницаемыми пористыми цилиндрами. Основное течение представляет собой наложение течения Куэтта на радиальный поток. Исследована устойчивость таких течений, в зависимости от соотношения между расходом и циркуляцией потока.

1.Основное течение. Рассмотрим течения вязкой несжимаемой и однородной жидкости в зазоре между двумя соосными проницаемыми пористыми цилиндрами. Предположим, что жидкость вдувается через один из цилиндров и отсасывается через другой, при этом цилиндры вращаются с угловыми скоростями Ω_i, $i = 1, 2$, и расход жидкости на единицу длины каждого из циилндров равен $2\pi Q$. За уравнения движения жидкости примем систему Навье–Стокса. Граничные условия (в безразмерной форме) запишем в виде

$$u\big|_{r=1}= \beta, \quad u\big|_{r=a}= \beta/a, \quad v\big|_{r=1}= \gamma_1, \quad v\big|_{r=a}= \gamma_2/a, \quad w\big|_{r=1,a}= 0, \qquad (1)$$

где u, v и w — радиальная, азимутальная и осевая скорости, $a = r_2/r_1 > 1$, r_1, r_2 — радиусы цилиндров, $\gamma_i = \Omega_i r_i^2/|Q|$, $i = 1, 2$, $\beta = \pm 1$ — ориентация потока. Если жидкость вдувается через внутренний цилиндр и отсасывается через внешний, то $\beta = +1$ и поток называется *расходящимся*, в противном случае $\beta = -1$ и поток называется *сходящимся*. Введем радиальное число Рейнольдса $R = Q/\nu$. Граничные условия (1) определяют семейство плоских вращательно-симметричных стационарных течений $U = \beta/r$, $V = Ar^{\beta R+1} + B/r$, $A = A(\gamma_1, \gamma_2, a, \beta, R)$, $B = B(\gamma_1, \gamma_2, a, \beta, R)$. При $R \gg 1$, в указанном течении возникает погранслой у выхода потока из зазора, вне погранслоя течение становится безвихревым, но остаётся циркуляционным ввиду вращения, создаваемого на входе, именно, пусть $\beta = 1$, $\eta = R(1 - r/a)$, тогда

$$V = \gamma_1 r^{-1} + (\gamma_2 - \gamma_1)a^{-1}e^{-\eta}\left[1 - \left(\eta + \eta^2/2\right)R^{-1} + O\left(R^{-2}\right)\right], \quad R \to \infty, \qquad (2)$$

Чтобы перейти к случаю $\beta = -1$, в (2) следует положить $\eta = R(r - 1)$, и поменять местами γ_2 и γ_1.

2. Линейная устойчивость при больших R. Рассмотрим плоские малые нормальные возмущения $(\hat{u}(r), \hat{v}(r), \hat{p}(r))e^{\sigma t + in\theta}$. Введём функцию тока, полагая $\hat{u}(r) = inr^{-1}\hat{\psi}(r)$, $\hat{v} = -\hat{\psi}'(r)$, и исключим давление $\hat{p}$ стандартным образом. Получим краевую задачу

$$\left(\sigma + r^{-1}inV\right)L\hat{\psi} + \beta r^{-1}\left(L\hat{\psi}\right)' - inr^{-1}\,\Omega'\,\hat{\psi} = R^{-1}L^2\hat{\psi}, \qquad (3)$$

$$\hat{\psi}(1) = 0, \quad \hat{\psi}'(1) = 0, \quad \hat{\psi}(a) = 0, \quad \hat{\psi}'(a) = 0, \qquad (4)$$

где $L\hat{\psi} = \hat{\psi}'' + r^{-1}\hat{\psi}' - n^2r^{-2}\hat{\psi}$, $V = V(r,\beta,\gamma_1,\gamma_2,R)$ и $\Omega = V' + r^{-1}V$ — азимутальная скорость и завихренность основного течения (см. (2)). Ввиду вещественности задачи и симметрии относительно преобразования $(n,V) \mapsto (-n,-V)$, можно считать, что $V \geqslant 0$, и $n > 0$[9]. Неустойчивые собственные значения σ обнаружены в статье [1], где изучались только сходящиеся течения при покоящемся выходном цилиндре, и узком зазоре, в частности, рассматривались пределы $R \to \infty$, $a = 1 + O(\sqrt{R})$, $\gamma_2 \sim R^p$, $p = 1, 2$. Здесь мы обойдёмся без этих ограничений.

Асимптотика собственных значений задачи (3–4) при больших числах Рейнольдса ($R \to \infty$) строится методом Вишика-Люстерника. Решения $\hat{\psi}, \sigma$ разыскиваются в виде рядов по положительным степеням R^{-1}. В главном приближении

$$\hat{\psi} = \psi_0(r) + R^{-1}(\phi_0(\eta) + \psi_1(r)) + O(R^{-2}),\ \sigma = \sigma_0 + O(R^{-1}),\ R \to \infty \qquad (5)$$

где $\phi_0(\eta) = o(\eta^{-s})$ при $\eta \to \infty$ для любого $s > 0$, и η — погранслойная переменная, равная нулю на выходе потока.

В случае расходящегося потока ($\beta = +1$), $\eta = R(1 - r/a)$, и главное приближение ψ_0, ϕ_0, σ_0 определяется краевой задачей

$$\left(\sigma_0 + in\gamma_1 r^{-2} + r^{-1}\,\partial_r\right) L\psi_0 = 0, \quad \psi_0(1) = \psi_0'(1) = \psi_0(a) = 0, \qquad (6)$$

$$\partial_\eta^3\left(\phi_0 + \partial_\eta\phi_0\right) = 0, \quad \partial_\eta\big|_{\eta=0}\phi_0 = \psi_0'(a),\ \phi_0(\eta) = o(\eta^{-s}),\ \eta \to \infty,\ \forall\, s > 0. \qquad (7)$$

Задача (6–7) получается подстановкой (2) и (5) в (3–4). При этом задача (6) отделяется и может быть решена независимо от задачи (7). Последняя имеет единственное решение ϕ_0 при любом граничном данном.

Таким образом, пределы мод нормальных возмущений вязких стационарных течений (U,V) при $R \to \infty$ определяются задачей (6), а она не зависит от γ_2. Отсюда, в частности, следует, что устойчивость плоского вращательно-симметричного течения при больших R слабо зависит от вращения выхода, то есть, того цилиндра, сквозь который жидкость выводится. Дальнейший анализ показывает, что от вращения выхода не зависит не только σ_0, но и следующий по порядку малости член асимптотики $R \to \infty$.

Предельный переход вдоль самого семейства стационарных течений (U,V) даёт радиальную скорость $U_0 = U = r^{-1}$, и азимутальную скорость $V_0 = \gamma_1 r^{-1}$. В точности такое течение *идеальной* несжимаемой жидкости создается прямолинейной нитью вихреисточников интенсивности $1 + i\gamma_1$, совмещённой с общей осью цилиндров. Однако, более естественным оказывается рассмотрение предельного потока как стационарного решения задачи о протекании идеальной жидкости через симметричное кольцо, где на всей границе задаётся нормальная скорость потока, и на его входе в область дополнительно задается касательная скорость[10]. Рассмотрение плоских нормальных возмущений стационарного режима (U_0,V_0) при таких граничных условиях приводит в точности к задаче (6). В этом контексте задача (6) изучалась в [2], где установлено существование критических значений $\gamma_1 = \gamma_1^*(a,n)$, , $a > 1$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\mathrm{Re}(\sigma_0) < 0$ при $\gamma_1 < \gamma_1^*(a,n)$ для всех нормальных мод с азимутальным квантовым числом n, и $\mathrm{Re}(\sigma_0) > 0$ при

[9] Можно показать, что при $n = 0$ возможно лишь $\mathrm{Re}\,\sigma < 0$.

[10] Корректность этой задачи установил А.В. Кажихов (1980), см. ссылки в [2].

$\gamma_1 > \gamma_1^*(a,n)$ для хотя бы одной такой моды. При этом неустойчивая мода — всегда колебательная, так что $\operatorname{Im}\sigma_0 \neq 0$.

Всё сказанное о поведении расходящегося вращательно-симметричного течения и его нормальных возмущений при $R \to \infty$ переносится на случай сходящегося течения без существенных изменений, но циркуляция предельного потока определяется параметром γ_2. В частности, определены критические значения $\gamma_2 = \gamma_2^*(a,n)$, $a > 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

Подробности о функциях $\gamma_{1,2}^*$ см. в [2, 3].

3. Критические числа Рейнольдса. Пусть $\gamma_{in} = \gamma_1$ и $\gamma_{out} = \gamma_2$ в случае расходящегося потока, и $\gamma_{in} = \gamma_2$ и $\gamma_{out} = \gamma_1$ в случае сходящегося потока.

Критические значения неустойчивости $R = R_c^{\pm}(\gamma_{in}, \gamma_{out}, a, n)$ (где верхний индекс соответствует знаку β) вычислялись в диапазоне азимутальных волновых чисел $n = 1..20$. При $R < R_c(\cdot, n)$ нормальная мода с волновым числом n затухает, при $R > R_c(\cdot, n)$ — возрастает, причём неустойчивость — колебательная.

Результаты вычислений представлены на рисунках 1 и 2. Видно, что область

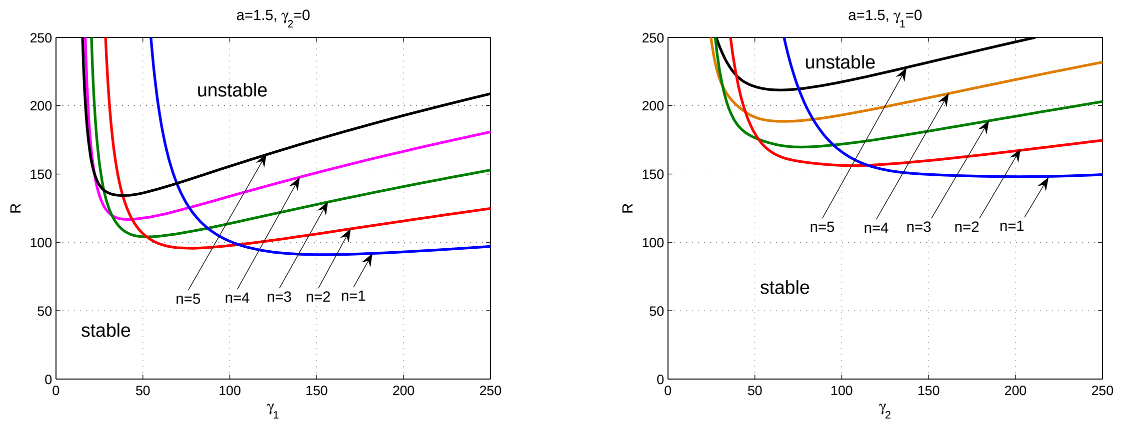


Рисунок 1 – Критические кривые неустойчивости; $a = 1.5$ и $n = 1..5$. Слева — кривая $R = R_c^+(\gamma_{in}, \cdot)$ (расходящийся поток), справа — $R = R_c^-(\gamma_{in}, \cdot)$ (сходящийся поток)

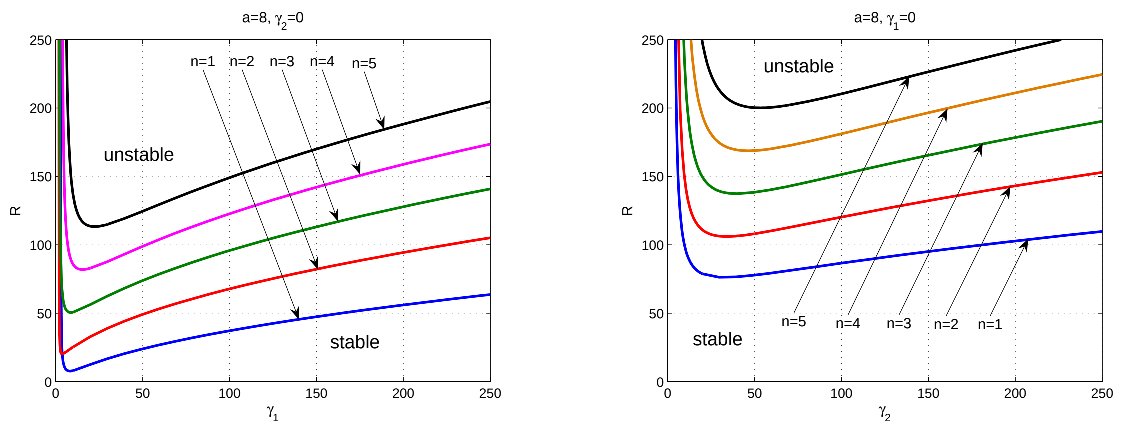


Рисунок 2 – Критические кривые неустойчивости; $a = 8$ и $n = 1..5$. Слева — кривая $R = R_c^+(\gamma_{in}, \cdot)$ (расходящийся поток, $\gamma_2 = 0$), справа — $R = R_c^-(\gamma_{in}, \cdot)$ (сходящийся поток, $\gamma_1 = 0$)

устойчивости расходящегося (сходящегося) течения на плоскости (γ_{in}, R) всегда включает вертикальную полосу $0 < \gamma_{in} < \gamma_{in}^*(a, n)$, причем граничные прямые $\gamma_{in} = \gamma_{in}^*$ оказываются вертикальными асимптотами сразу для всех критических кривых $R = R_c^{\pm}(\gamma_{in}, \cdot)$. В частности, все моды устойчивы, если на входе потока задана нулевая азимутальная скорость, каковы бы ни были при этом значения прочих параметров. В случае узкого зазора существование указанных асимптот было обнаружено в [1], но не получило, на наш взгляд, должного объяснения, поскольку предельная задача для идеальной жидкости не рассматривалась.

Влияние вращения выхода на устойчивость оказывается очень слабым не только в пределе $R \to \infty$, но и при конечных R, см. правую панель на рисунке 4. Таким образом, влияние входа доминирует во всём кольце, в отличии от течений в трубах, где «память» о входе слабеет вниз по потоку.

Области устойчивости расходящегося (сходящегося) потока включают также горизонтальные полоски $0 < R < \min_{\gamma_{in}} R_*^{\pm}$, где $R_*^{\pm}(a, \gamma_{in}, \gamma_{out}) = \min_n R_c^{\pm}$. Заметим, что с ростом ширины зазора a значения $R_*^{\pm}(a, \cdot)$ убывают.

Горизонтальные прямые лежащие выше $R_*^{\pm}(\cdot, n)$ пересекают критическую кривую $R = R_c(\cdot, n)$ не менее, чем в двух точках. Обозначим их абсциссы $\gamma_{in}^-(R, n, a)$, $\gamma_{in}^+(R, a, n)$. Таким образом, мода с волновым числом n устойчива при $\gamma_{in} < \gamma_{in}^-(\cdot, n)$, неустойчива при $\gamma_{in}^-(\cdot, n) < \gamma_{in} < \gamma_{in}^+(\cdot, n)$, и снова устойчива при $\gamma_{in} > \gamma_{in}^+(\cdot, n)$. С ростом R интервал $(\gamma_{in}^-(R, \cdot), \gamma_{in}^+(R, \cdot)$ растягивается (видимо, неограниченно), причем его нижняя граница стремится к $\gamma_{in}^*(\cdot)$.

Азимутальное волновое число n, минимизирующее $R_c^{\pm}$, обозначается $n_*^{\pm}$, а соответствующая мода называется наиболее неустойчивой. Зависимости $n_*^{\pm}(\gamma_{in}, \cdot)$ показаны на рисунках 3 и 4. Штрихованные прямые проектируются в точку γ_{in}^*. Скачкам $n_*^{\pm}(\gamma_{in}, \cdot)$ соответствуют точки пересечения критических кривых $R = R_c^{\pm}$. Числа $n_*^{\pm}$ убывают с увеличением γ_{in}, и возрастают при $\gamma_{in} \to \gamma_{in}^*$. С ростом ширины зазора расширяются интервалы оси γ_{in}, на которых принимаются меньшие значения $n_*^{\pm}$; при этом рост $n_*^{\pm}$ сосредоточивается в правой полуокрестности γ_{in}^*.

Таким образом, вращательно-симметричный режим течения при малой циркуляции $(\gamma_{in} < \gamma_{in}^*)$ устойчив при любом расходе. При достаточно большой циркуля-

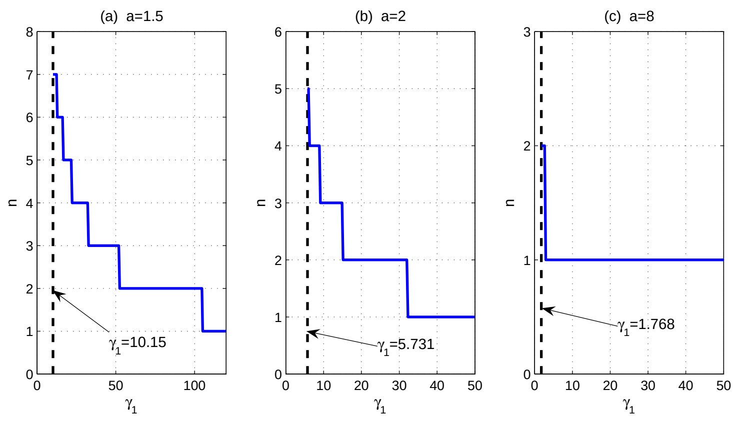


Рисунок 3 – Расходящееся течение. Азимутальное волновое число $n_*^+ = n_*^+(\gamma_{in}, \cdot)$ при $\gamma_{out} = 0$, $a = 1.5$ слева, $a = 2$ посередине, $a = 8$ справа.

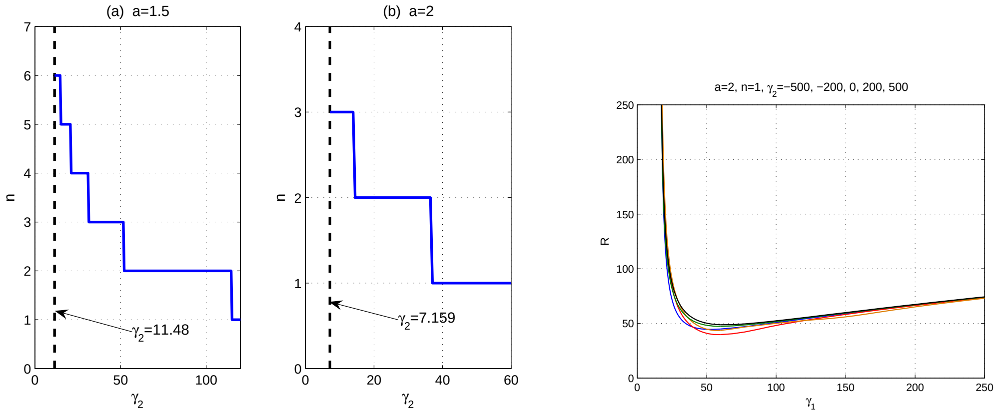


Рисунок 4 – На левой и средней панели показано азимутальное волновое число $n_*^- = n_*^-(\gamma_{in}, \cdot)$ наиболее неустойчивой моды сходящегося течения при $\gamma_{out} = 0$, $a = 1.5$ слева, $a = 2$ посередине. На правой панели показано поведение критических кривых $R = R^+(\gamma_{in}, \cdot)$ при изменении γ_{out} (расходящееся течение, $n = 1$, $a = 2$, $\gamma_{out} = \pm 500, \pm 200, 0.$)

ции ($\gamma_{in} > \gamma_{in}^*$) увеличение расхода всегда влечёт неустойчивость, причём волновое число неустойчивой моды существенно зависит от γ_{in}. Вместе с тем, можно стабилизировать вращательно-симметричный поток, зафиксировав расход и увеличив циркуляцию.

Более подробное изложение см. в [4].

Работа А. Моргулиса, представленная в данной публикации, выполнялась в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание № 1.1398.2014/К).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Gallet, B., Doering, C. R., Spiegel, E. A.* Destabilizing TaylorCouette flow with suction // Phys. Fluids. 2010. V. 22(3), 034105.

[2] *Ilin K. I., Morgulis A. B.* Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // J. Fluid Mech. 2013. V. 730. P. 364–378.

[3] *K. Ilin, A. Morgulis.* Instability of diverging and converging flows in an annulus // arXiv preprint, 2012. arXiv:1211.5710

[4] *K. Ilin, A. Morgulis.* Instability of a viscous flow between rotating porous cylinders with radial flow // arXiv preprint, 2013. arXiv:1312.2594

Ilin K. I., Morgulis A. B., *Instability of the rotating flows confined between permeable cylinders*. We consider the planar incompressible flows in a gap between porous cylinders. The base flow represents a superposition of the Couette flow and the radial flow. For such flows, we study the stability properties depending on the ratio of total flux to the circulation.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЗОК

Лекомцев С. В., Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П.
Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

В работе представлены трёхмерная постановка спектральной задачи и конечно-элементный алгоритм её численной реализации, предназначенные для исследования собственных колебаний и устойчивости тонкостенных оболочек произвольного поперечного сечения, содержащих неподвижную или текущую идеальную сжимаемою жидкость и находящихся под действием статической механической и температурной нагрузок. На численных примерах оценено влияние гидростатического давления и температуры нагрева боковой поверхности на динамические характеристики цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением, выполнено исследование влияния линейных размеров, уровня заполнения и граничных условий на собственные частоты, формы колебаний и границу гидроупругой устойчивости.

1. Введение. Технологические требования, предъявляемые к промышленным конструкциям, которые должны воспринимать широкий спектр эксплуатационных нагрузок, часто приводят к необходимости рассматривать конфигурации оболочек отличных от круговых. Одним из таких вариантов является цилиндрическая оболочка с эллиптическим поперечным сечением (ЦОЭПС). Исследованию собственных колебаний и устойчивости пустых ЦОЭПС посвящено значительное количество работ, тогда как анализ нагруженных оболочек, содержащих неподвижную или, тем более, текущую жидкость, в литературе не представлен. Механическая или температурная нагрузки, как и течение жидкости, приводят к потере устойчивости тонкостенного тела. В случае оболочек произвольного поперечного сечения их совместное влияние на характер динамического поведения остаётся неизученным. В настоящей работе в рамках трёхмерной конечно-элементной реализации представлены некоторые результаты исследований влияния гидростатического давления и температуры нагрева боковой поверхности на собственные частоты, формы колебаний и границу гидроупругой устойчивости ЦОЭПС при различных линейных размерах, уровнях заполнения оболочки жидкостью и граничных условиях.

2. Разрешающие соотношения и численная реализация. Рассматривается тонкостенная изотропная цилиндрическая оболочка длиной L с эллиптическим поперечным сечением, которая взаимодействует с установившимся внутренним потоком идеальной сжимаемой жидкости и находится под действием статической механической и температурной нагрузок. Деформации, возникающие в оболочке в результате гидродинамического воздействия, являются малыми. Влияние пограничного слоя и динамические явления на свободной поверхности в случае оболочек, частично заполненных жидкостью, не учитываются, т. е. полагается, что объём жидкой среды ограничен сверху невесомой жёсткой мембраной. В случае, когда конструкция находится в высокотемпературной среде, распределение температуры T по толщине оболочки h принимается в виде линейной зависимости, а свойства материала (модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν, плотность ρ_s, коэффициент температурного расширения α) определяются с помощью выражения [1]

$$MP(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3), \tag{1}$$

где P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3 некоторые коэффициенты, зависящие от температуры $T(K)$.

Потенциальное движение сжимаемой невязкой жидкой среды описывается волновым уравнением, которое совместно с условием непроницаемости и соответствующими граничными условиями преобразуются с помощью метода Бубнова–Галёркина [2]. При моделировании оболочек произвольного поперечного сечения предполагается, что криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских элементов. Деформации определяются с помощью известных соотношений теории тонких оболочек на основе гипотез Кирхгофа–Лява. Для математической постановки задачи динамики оболочки используется вариационный принцип возможных перемещений, учитывающий работу сил инерции, гидродинамическое давление, действующее на смоченной поверхности, и предварительное напряжённое недеформированное состояние, вызванное влиянием различных силовых факторов, действующих на конструкцию

$$\int\limits_{S_s} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}dS + \int\limits_{V_s} \rho_s\delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{d}}dV - \int\limits_{S_\sigma} \delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}dS + \int\limits_{S_s} \delta\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_0\boldsymbol{e}dS = 0, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{P} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad p = p_0 - \rho_f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \quad S_\sigma = S_f \cap S_s.$$

Здесь: S_f — поверхность, ограничивающая объём жидкости V_f; S_s — поверхность оболочки; $p_0 = p_f + p_s$ — статическая нагрузка; p_s — статическое давление; $p_f = \rho_f g y$ — давление, вызванное массовыми силами жидкости; U — скорость течения жидкости; $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{P}$ — вектора обобщенных перемещений, деформаций и нагрузки на смоченной поверхности S_σ; ρ_s и ρ_f — удельная плотность материала оболочки и жидкости; $\mathbf{D}$ — матрица упругих констант; (x, y, z) — декартова система координат; φ — потенциал возмущения скорости. Элементы матрицы $\boldsymbol{\sigma}_0$ находятся из условия $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ и $\mathbf{E}$ — вектор и матрица линейных множителей, а вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ определяется из решения статической задачи.

Выполнение стандартных процедур МКЭ сводит задачу исследования динамики поведения нагруженных оболочек, содержащих неподвижную или текущую жидкость, к решению связанной системы двух уравнений с учётом предварительного напряженно-деформированного состояния, обусловленного влиянием статических силовых факторов, действующих на оболочку

$$\mathbf{K}\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{\varphi} \end{matrix}\right\}^{\mathrm{T}} + \mathbf{M}\left\{\begin{matrix} \ddot{\boldsymbol{d}} & \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{matrix}\right\}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}\left\{\begin{matrix} \dot{\boldsymbol{d}} & \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{matrix}\right\}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{\varphi} \end{matrix}\right\}^{\mathrm{T}} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{K} = \mathrm{diag}\left\{\begin{matrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g & \mathbf{K}_f \end{matrix}\right\}, \\ \mathbf{M} = \mathrm{diag}\left\{\begin{matrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_f \end{matrix}\right\}, \end{matrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_f\mathbf{C}_s \\ -\mathbf{C}_f & -\mathbf{C}_f^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_f\mathbf{A}_s \\ -\mathbf{A}_f & \mathbf{A}_f^c \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ — матрицы жёсткости, масс, демпфирования и гидродинамической жёсткости, соответственно. Усилия и моменты, вызванные приложенной механической или температурной нагрузками $\boldsymbol{P}_0$, используемые при формировании матрицы геометрической жёсткости $\mathbf{K}_g$, определяются из решения статической задачи $\mathbf{K}_s\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{P}_0$. Более подробные выражения для матриц приведены в [2].

С помощью алгебраических преобразований система (3) может быть приведена к стандартной задаче на собственные значения

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}+\mathbf{A}) & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \omega \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = \left\{ \boldsymbol{q}, \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{f}} \right\}^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Здесь: $\mathbf{I}$ — единичная матрица, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{f}$ — некоторые функции координат, $\omega = \lambda_R + i\lambda_{im}$ — характеристический показатель.

3. Численные примеры. На основе разработанного конечно-элементного алгоритма проведена серия численных экспериментов, направленных на оценку влияния уровня заполнения, отношения полуосей эллиптического сечения $\beta = R_z/R_y$, толщины оболочки и граничных условий на собственные частоты и формы колебаний ЦОЭПС, взаимодействующих с неподвижной и текущей жидкостью и нагруженных различными силовыми факторами. В качестве объекта исследований рассмотрим систему «оболочка-жидкость» со следующими параметрами: $E = 2.05 \times 10^{11}$ Н/м^2; $\nu = 0.3$; $\rho_s = 7800$ кг/м^3; $R_y = 0.07725$ м; $h = 1.5 \times 10^{-3}$ м; $L/R_y = 2.99$, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $c = 1500$ м/с. При этом анализе размер вертикальной полуоси R_y остаётся постоянным. В этом случае изменение параметра эллиптичности β связано с монотонным изменением площади поперечного сечения оболочки. На рисунке 1 продемонстрировано, что увеличение уровня жидкости и величины внешнего давления приводят к снижению минимальной собственной частоты колебаний нагруженных оболочек ($p_s < 0$ соответствует внешнему давлению, а $p_s > 0$ — внутреннему). Причём при достижении нагрузки значения P_{cr}, она обращается в ноль, что указывает на наступление неустойчивости дивергентного типа (выпучивание). Из представленных данных видно, что уровень жидкости не оказывает никакого воздействия на величину критической нагрузки, а влияет только на колебательные свойства систем. Независимо от граничных условий кривые, соответствующие различным значениям уровня заполнения, сходятся в одной точке. Это можно объяснить тем, что для рассмотренных конфигураций дополнительный вклад от массовых сил, обусловленных давлением слоя жидкости, мал в сравнении с величиной критической нагрузки. Отметим, что кривые, соответствующие консольно закреплённым оболочкам (рисунок 1,*б*), имеют некоторые изломы. Они обусловлены тем, что при увеличении внешнего давления происходит смена формы колебаний, которой сопоставляется минимальная собственная частота.

В следующих примерах рассматриваются оболочки, взаимодействующие с внутренним потоком жидкости и нагруженные различными силовыми факторами. На рисунке 2,*а* приведены критические скорости дивергентной потери устойчивости конструкций под действием гидростатического давления. Более «растянутые» относительно кругового профиля оболочки, например, $\beta = 1.5$, обладают меньшей несущей способностью, поэтому увеличение внешнего давления приводит к значительному снижению критических скоростей потери устойчивости таких конструкций в сравнении с круговой конфигурацией.

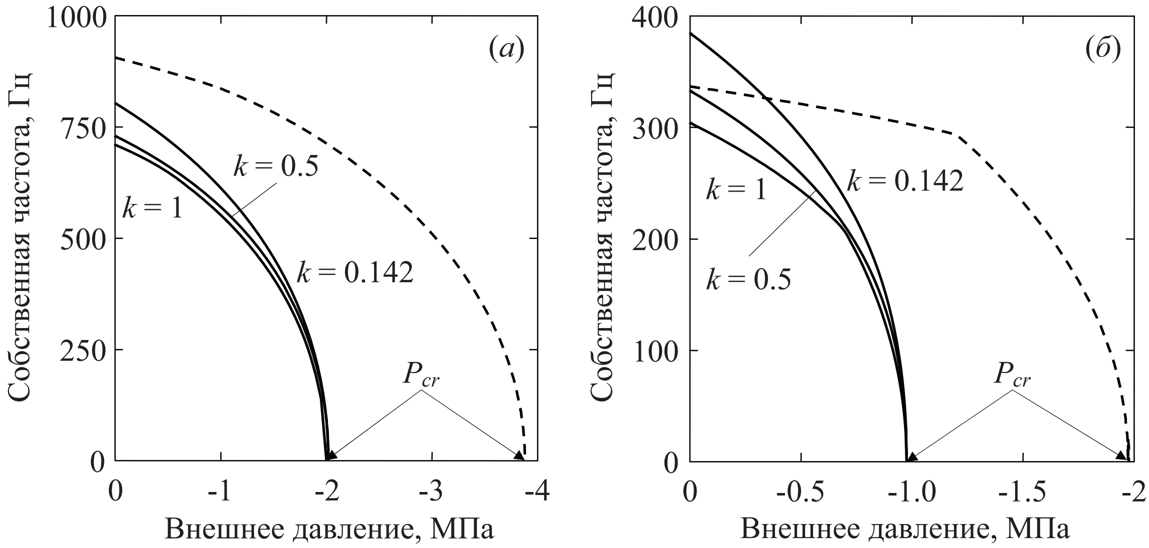


Рисунок 1 – Минимальные собственные частоты колебаний жёстко закреплённых на обоих краях (*а*) и консольных (*б*) горизонтальных эллиптических цилиндрических оболочек при разных уровнях жидкости и величине внешнего давления: пунктирная линия — $\beta = 0.65$, сплошные линии — $\beta = 1.5$

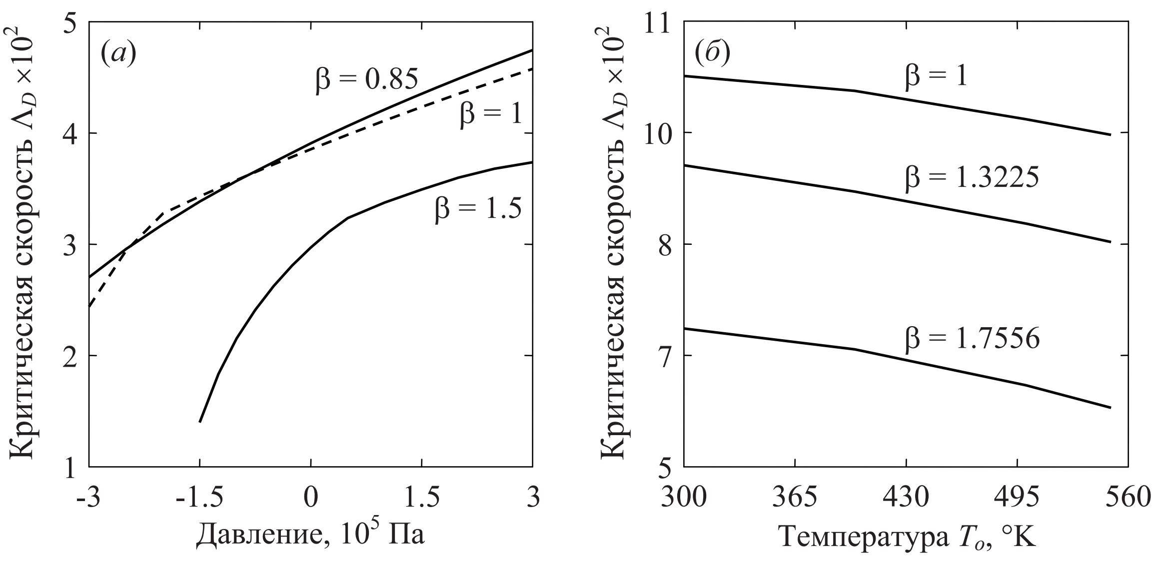


Рисунок 2 – Безразмерные критические скорости дивергенции Λ_D эллиптических цилиндрических оболочек в зависимости от: (*а*) — давления p_s; (*б*) — температуры нагрева внешней части боковой поверхности

В практических приложениях оболочечные конструкции находятся под воздействием не только механических, но и температурных нагрузок. Совместное влияние этих двух факторов может существенно менять динамические характеристики системы. В отличие от представленных выше численных экспериментов, здесь рассмотрены эллиптические цилиндрические оболочки, которые имеют площадь поперечного сечения равную аналогичной круговой конфигурации. Внешняя поверхность конструкции равномерно нагрета по всей длине, а внутренняя имеет температуру $T_i = 300$ °K. Результаты расчётов приведены на рисунке 2,*б*. Нагрев внешней части боковой поверхности оболочки приводит к снижению критических скоростей потери устойчивости круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей жидкостью. Отметим, что для разных значений параметра эллиптичности β соответствующие кривые качественно одинаковы и отличаются лишь начальной величиной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№12-01-00323-а и 13-01-96049) и гранта президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ НШ-2590.2014.1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Reddy J. N., Chin C. D.* Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Therm. Stresses. 1998. № 6. P. 593–626.

[2] *Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П.* Анализ устойчивости нагруженных коаксиальных цилиндрических оболочек с внутренним течением жидкости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 6. С. 29–45.

Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. *Stability of noncircular cylindrical shells containing fluid under the action of mechanical and thermal loads.* This paper presents a 3D formulation of the spectral problem and finite element algorithm its numerical implementation, designed to investigation of the natural vibrations and stability of shells with arbitrary cross-section interacting with a quiescent or flowing compressible non-viscous fluid and being under the influence of static mechanical and thermal loads. Several numerical experiments have been carried out to analyze the influence of the fluid levels, the ratio of ellipse semi-axes, linear dimensions, hydrostatic pressure and heating of the lateral surface of the shell on the natural frequencies, mode shapes and critical velocities of instability.