ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

XVII МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

14 – 17 октября 2014 года

Ростов-на-Дону

2014

Редакторы: Ватульян А. О., Говорухин В. Н., Еремеев В. В., Макаров С. С., Попов А. В.

Тезисы докладов XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону, 14 – 17 октября 2014 г. Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2014. 138 с.

Сборник содержит тезисы докладов XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 14 – 17 октября 2014 г.).

Конференция приурочена к 80-летию со дня рождения известного математика и механика, Заслуженного деятеля науки и техники Российской Федерации профессора В. И. Юдовича.

Основные результаты исследований посвящены моделированию течений идеальной и вязкой жидкости, проблемам устойчивости в механике, деформированию тел из физически и геометрически нелинейных материалов, разработке новых вычислительных технологий применительно к различным задачам механики деформируемого твердого тела, в частности, в механике контактных взаимодействий, теории пластин и оболочек, теории пластичности и разрушения, предварительно напряженных тел, при расчете напряженно-деформированного состояния тел со сложными физико-механическими свойствами (гетерогенных, пьезоэлектрических и функционально-градиентных материалов) и их идентификации, обсуждены проблемы био- и наномеханики.

XVII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 14 – 17 октября 2014 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 14-01-20317.

Моделирование термогидродинамических процессов в системе «пласт — горизонтальная скважина с множественными трещинами ГРП»

Абдуллин А. И.
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
adel.abdullin@gmail.com

Одним из эффективных методов интенсификации нефтедобычи является гидравлический разрыв пласта. ГРП позволяет существенно повысить продуктивность скважин, вследствие создания канала высокой проводимости, соединяющего продуктивную часть пласта со скважиной. Информация о термогидродинамических процессах, происходящих в пласте, может быть получена путем глубинных измерений температуры и давления в стволе скважины. Изменение температуры в стволе скважины является интегральным показателем термогидродинамических процессов, происходящих как в пласте, так и в самой скважине.

В данной работе на основе численного 3D-моделирования исследуются процессы неизотермической фильтрации в пористом пласте, эксплуатируемом горизонтальной скважиной, пересеченным множественными трещинами гидравлического разрыва. Строится математическая модель тепломассопереноса в системе «пласт — горизонтальная скважина — серия трещин ГРП». Математическое моделирование распределения температуры и давления флюида по стволу скважины связано с определением поля давления, скорости потока и температуры в пористом пласте. Характерные времена перераспределения давления в пластовом объекте и в стволе ГС сильно различаются. Этот факт при исследовании термогидродинамических процессов в стволе ГС позволяет перейти от нестационарной модели к квазистационарной. Поэтому для описания движения флюида в стволе ГС используются квазистационарные уравнения неразрывности и изменения количества движения, а в пластовом объекте — уравнение нестационарной фильтрации. Из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии при предположении, что ствол ГС параллелен кровле и подошве, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую процесс тепломассопереноса в системе «пласт — горизонтальная скважина».

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\frac{2\vec{w}}{r_c}\ , \quad -\frac{\partial p_1}{\partial x} = \rho\frac{\partial \vec{v}^2}{\partial x} + \frac{1}{4r_c}\psi\rho\vec{v}|\vec{v}|\ , \tag{1}$$

$$-\frac{\partial T_1}{\partial t} + \vec{v}\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial x}\right) = \frac{2(\alpha_{mp} - \vec{w}\rho C_p)}{\rho C_p r_c}\left(T_2\big|_{r=r_c} - T_1\right), \tag{2}$$

$$0 < x \leqslant L\ , \quad 0 < t \leqslant t_{exp}\ ,$$

$$\beta^*\frac{\partial p_2}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\vec{k}}{\mu}\nabla p_2\right). \tag{3}$$

Для численного решения нелинейной системы применяется метод конечных разностей. Проводится анализ влияния эффекта адиабатического расширения, дроссельного эффекта, коэффициентов проницаемости и ствола скважины на изменение температуры на забое скважины после ее пуска.

Численный анализ прочности металлопластиковых цилиндрических оболочек при взрывном нагружении

Абросимов Н. А., Новосельцева Н. А.
НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
abrosimov@mech.unn.ru, knadya2004@mail.ru

Одной из основных задач, возникающих при разработке защитных металлокомпозитных конструкций, является определение рациональной схемы армирования в зависимости от реализуемого нагружения. Для двухслойных конструкций, изготовленных намоткой однонаправленного композитного материала на металлическую оправку, важно знать насколько полно реализуется прочность силовых волокон на уровне композитного слоя и какие предельные характеристики компонентов определяют прочность конструкции.

Цель данного исследования — разработка методики численного анализа влияния схемы чередования элементарных слоев и углов армирования на предельную деформируемость и прочность двухслойных металлопластиковых цилиндрических оболочек, нагруженных однократным импульсом внутреннего давления от взрыва в центре оболочки сферического заряда взрывчатого вещества.

Полагается, что двухслойная цилиндрическая оболочка образована перекрестной намоткой композитной ленты на технологическую оправку, изготовленную из малоуглеродистой стали. При этом геометрические и физико-механические характеристики оболочки таковы, что для достоверного описания не только мембранного, но и трансверсального напряженного состояния необходимо использовать кинематическую модель деформирования, основанную на неклассической теории оболочек. Для этого компоненты вектора перемещений аппроксимируются конечными рядами по ортонормированнным полиномам Лежандра.

Построение геометрических зависимостей базируются на соотношениях простейшего квадратичного варианта нелинейной теории упругости.

Определяющие соотношения для композитного слоя оболочки устанавливаются на основе закона Гука в сочетании с теорией эффективных модулей. При этом допускается локальное разрушение элементарных слоев в пакете многослойного композита. Напряжения в металлическом слое определяются теорией течения с линейным упрочнением.

Для построения энергетически согласованной разрешающей системы уравнений движения металлокомпозитной цилиндрической оболочки используется принцип возможных перемещений.

Численная реализация сформулированной задачи основывается на явной вариационно-разностной схеме и ориентирована на использование многопроцессорных вычислительных систем.

Проводятся результаты анализа предельной деформируемости и прочности металлопластиковых цилиндрических оболочек в зависимости от углов армирования и схем чередования элементарных слоев однонаправленного композитного материала.

Распространение двумерных спиновых (магнитных) волн в составном ферромагнитном пространстве

Агаян К. Л.[1], Даноян З. Н.[1], Калинчук В. В.[2]
[1]*Ереван, Институт механики НАН Республики Армения*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
karo.aghayan@gmail.com, kalin@ssc-ras.ru

Рассматриваются задачи о распространении двумерных спиновых волн в составном недеформированном ферромагнитном пространстве, находящемся в постоянном магнитном поле без учета обменного эффекта. Предполагается, при этом, что на линиях неоднородности могут существовать полубесконечные препятствия (магнитный экран–стенка, трещина) или вакуумный слой.

Пусть пространство, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$ заполнено двумя ферромагнитными кристаллами, занимающими полупространства $y > 0$ (область Ω_1) и $y < 0$ (область Ω_2). Полупространства, имеющие различные ферромагнитные характеристики, контактируют по плоскости $y = 0$ (область Ω_0). Оси легкого намагничивания кристаллов параллельны и направлены по оси Oz. Предполагается, что кристаллы находятся во внешнем магнитном поле $\vec{H}_0$, а объемная плотность намагниченности $\vec{M}_{0j} = \rho_j \vec{\mu}_{0j}$ (ρ_j — плотность кристалла, $\vec{\mu}_{0j}$ — плотность намагниченности, отнесенной к единице массы) параллельна магнитному полю $\vec{H}_0$, причем, они направлены по оси Oz. Предполагается также, что кристаллы не деформируются, а возмущения в них характеризуются векторами $\vec{\mu}_j \left\{\mu_j(x,y,t)\,;\, \nu_j(x,y,t)\right\}$ магнитного момента (спина) и магнитостатическим потенциалом $\varphi_j(x,y,t)$, соответственно в областях Ω_j $(j = 1,2)$ ($\vec{h} = -\operatorname{grad}\varphi$ — возмущение напряженности магнитного поля).

В описанном выше составном ферромагнитном пространстве исследуется распределение магнитного волнового поля, при предположении, что в области Ω_1 из бесконечности распространяются заданные возбуждающие волны

$(\mu_{1\infty}, \nu_{1\infty}, \varphi_{1\infty}) = (A_\mu, A_\nu, A_\varphi)\, e^{ipx+iqy-i\omega t}$ где A_μ, A_ν, A_φ — амплитуды падающих волн $p = k\cos\beta,\ \ q = -k\sin\beta,\ \ k$ — волновое число, β — угол скольжения падающей волны относительно оси Ox, ω — частота колебаний, t — время.

При этих предположениях рассматриваются следующие задачи:

1) полупространства Ω_1 и Ω_2 находятся в полном контакте;

2) полупространства Ω_1 и Ω_2 разделены вакуумным слоем конечной ширины;

3) на линии контакта $y = 0$ расположены полубесконечный магнитный экран или трещина;

4) Ω_2 — вакуум, а часть границы Ω_1 покрыта полубесконечным магнитным экраном.

В последних двух случаях решение задач сводится к задаче типа Римана теории аналитических функций на действительной оси, решение которой построено методом Винера–Хопфа. Получены распределения волновых полей, которые отражают особенности волнового поля в каждом участке составного пространства.

Описание высокоэластических деформаций с помощью трехмерной механической модели

Азаров А. Д.[1], **Азаров Д. А.**[2]
[1]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
[2]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
polyani49@mail.ru

Для описания больших высокоэластических деформаций предлагается моделировать объем сплошной среды в форме элементарного куба механической системой с внутренними связями между гранями этого объема. При приложении к объему внешних сил, деформации определяются реакциями пространственных связей двух типов между противоположными и смежными гранями куба. При этом вязкоупругий характер деформаций воспроизводится за счет привлечения трехэлементной модели стандартного вязкоупругого тела для описания физических свойств связей при их растяжении-сжатии. В этом случае в каждой связи при нагружении во времени происходит переход от мгновенно-упругой реакции к равновесной.

В настоящей работе получена система нелинейных уравнений, которые, в конечном счете, моделируют связь напряжений и деформаций в условиях больших высокоэластических деформаций. В систему уравнений входят геометрические соотношения, уравнения равновесия внутренних и внешних сил, а также физические соотношения (содержащие дифференциальные уравнения) зависимостей внутренних сил от удлинений соответствующих связей. В случае бесконечно малых деформаций уравнения принимают вид определяющих соотношений линейной теории упругости. Мгновенно-упругие характеристики модели связаны с константами теории упругости.

Рассмотрен случай одноосного растяжения, при этом наглядность модели (и всего процесса деформирования) обеспечивает то, что все изменения длин связей определяются через одно продольное относительное удлинение элементарного объема.

Сформирован алгоритм для расчета по заданному продольному растяжению соответствующих удлинений и усилий, возникающих в связях, и, в конечном счете, определяющий зависимость напряжений от больших деформаций. Для практической реализации алгоритма предложена итерационная процедура численного решения системы нелинейных уравнений при изменении задаваемой функции относительного удлинения во времени. Для случая линейных характеристик связей выполнены численные расчеты, демонстрирующие аппроксимационные возможности модели, проведен анализ влияния параметров модели на конечную связь напряжений и деформаций. За счет выбора параметров воспроизводится S-образный вид диаграммы зависимости продольной силы от удлинения, что характерно для деформирования каучуков.

Настоящая модель имеет естественное направление развития. При больших деформациях в силу структурных изменений происходит изменение свойств связей, которые приводят к эффекту упрочнения. В этом случае соотношения зависимости внутренних сил от удлинений соответствующих связей необходимо выбирать нелинейными.

Внедрение параболического индентора в неоднородную полосу, лежащую на упругом основании

Айзикович С. М.[1], Ванг Ю. Ч.[2], Волков С. С.[1]
[1]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
[2]*Тайнань, Национальный университет Чэнгун*
saizikovich@gmail.com, fenix_rsu@mail.ru

Рассматривается плоская контактная задача о внедрении недеформируемого параболического индентора в функционально-градиентную полосу, лежащую на упругом однородном основании. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полосы изменяются с глубиной по произвольному закону (в частности, рассмотрены линейные, тригонометрические и др. законы изменения модуля Юнга). Под действием силы P индентор вдавливается в поверхность неоднородной полосы толщины h. Область зоны контакта x $[-a, a]$. Ось действия вдавливающей силы нормальна к поверхности неоднородной полосы. Вне штампа поверхность неоднородной полосы не загружена. Силы трения между неоднородной полосой и индентором отсутствуют.

Рассмотрены два вида граничных условий на границе сопряжения неоднородная полоса-основание: неоднородная полоса сцеплена с упругим однородным основанием; неоднородная полоса свободно лежит на однородном упругом основании. Упругие свойства неоднородной полосы и основания, в зоне их сопряжения, могут на порядок отличатся друг от друга, что позволяет моделировать мягкие (жесткие) неоднородные покрытия.

Используя интегральное преобразование Фурье, поставленная контактная задача сводится к решению парного интегрального уравнения относительно неизвестной функции, характеризующей напряжения под индентором. В общем случае неоднородности функционально-градиентной полосы, трансформанта ядра интегрального уравнения задачи строится численно с помощью модифицированного метода моделирующих функций. Для решения парного интегрального уравнения задачи использован двусторонне асимптотически точный метод, состоящий в том, что численно построенная трансформанта ядра аппроксимируется аналитическими выражениями специального вида, что позволяет построить аналитическое решение парных интегральных уравнений задачи и получить простой вид формулы для определения контактных напряжений под индентором. В отличие от ряда известных решений, построенное решение является эффективным в широком диапазоне геометрических и физических параметров задачи. Получена простая аналитическая формула для определения значений напряжений под центром индентора. Рассмотрены численные примеры влияния на распределение контактных напряжений под индентором различных случаев неоднородности полосы, а также случаи влияния на напряжения наличия существенного скачка модуля Юнга в зоне сопряжения полоса-основание.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-07-00705-а, № 14-08-92003-ННС_а.

Контактные задачи для трансверсально-изотропного полупространства с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием

Айзикович С. М.[1], Васильев А. С.[1], Волков С. С.[1], Ке Л. Л.[2]
[1]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
[2]*Пекинский университет транспорта*
saizikovich@gmail.com, andre.vasiliev@gmail.com

В работе рассматриваются контактные задачи теории упругости о вдавливании и кручении недеформируемого штампа, сцепленного с трансверсально-изотропным полупространством с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием. Ось действия вдавливающей силы (для задачи вдавливания) и крутящего момента (для задачи кручения) нормальна к поверхности полупространства. Вне штампа поверхность полупространства не загружена. Модули упругости в покрытии изменяются с глубиной по произвольным непрерывным законам (функционально-градиентное покрытие) или описываются кусочно-постоянными функциями (многослойное покрытие). Для задачи вдавливания рассматриваются штампы цилиндрической, сферической или конической формы.

В рамках линейной теории упругости сформулированы математические постановки задач. Для сведения решения задач к решению парных интегральных уравнения использована техника интегральных преобразований Ханкеля. Вычисление значения трансформант ядер интегральных уравнений сведено к решению краевой задачи, которая решается численно для произвольных законов изменения упругих свойств в покрытии и имеет аналитическое решения в некоторых частных случаях. Проанализированы свойства трансформант ядер, характерные для однородных и неоднородных покрытий.

Трансформанты ядер аппроксимируются специальными выражениями, для которых получены замкнутые аналитические решения парных интегральных уравнений. Полученные решения асимптотически точны для малых и больших значений геометрического параметра задачи (отношение толщины покрытия к радиусу зоны контакта). Также получены аналитические зависимости вдавливающей силы (крутящего момента) от размера зоны контакта.

Для построения аппроксимаций трансформант ядер используется специально разработанный итерационный алгоритм, позволяющий получить аппроксимации с относительной погрешностью, не превышающей доли процента, даже для сложных законов изменения упругих свойств в покрытии.

Решения парных интегральных уравнений дают аналитические формулы для контактных напряжений на поверхности покрытия, зная которые можно определить напряженно-деформированное состояние по глубине полупространства.

Численные примеры, иллюстрирующие качественные и количественные различия между процессом упругого деформирования материалов с однородными и неоднородными, изотропными и трансверсально-изотропными покрытиями приведены для ряда характерных законов изменения модулей упругости по глубине, различных толщин покрытий и упругих свойств подложки.

Влияние вида и скорости механического нагружения на мощность и энергоэффективность многослойных пьезогенераторов

Акопьян В. А.[1], Захаров Ю. Н.[2], Паринов И. А.[1], Рожков Е. В.[1], Чебаненко В. А.[1]

[1]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*

[2]*Ростов-на-Дону, НИИ физики ЮФУ*

vchebanenko@sfedu.ru

В настоящем докладе приведены результаты исследования выходных характеристик многослойных пьезоэлектрических генераторов (ПЭГ) осевого типа (stack) прямоугольной формы с размерами 24x16x36 мм (модель 1) и кольцевой диаметром 18x8 мм высотой 11 мм (модель 2), полученные при нагружении в квазистатическом и низкочастотном импульсном режимах. Кратко описаны измерительные стенды, программное обеспечение и методика измерений. Приведены формы механических и электрических импульсов, для различных значений сопротивления нагрузки. Определены оптимальные режимы нагрузок для обеспечения максимизации выходной мощности генератора. При испытаниях в режиме импульсного нагружения высокая степень достоверности результатов измерений амплитуд и форм сигналов, отображающих временные зависимости механических усилий и пьезоэлектрического отклика чувствительного элемента (ЧЭ) ПЭГ, была достигнута благодаря выбору оптимального значения сопротивления нагрузки, удовлетворяющего известному соотношению, обуславливающего неискаженность передачи пьезоэлектрического отклика — произведению сопротивления электрической нагрузки и электрической емкости ЧЭ ПЭГ. При выбранном оптимальном значении сопротивления нагрузки, максимумы амплитуд механического и электрического импульса достигаются одномоментно. При этом обеспечивается минимизация потерь при преобразовании механического усилия в генерируемый ЧЭ ПЭГ электрический заряд. Показано существенное влияние скорости механического нагружения на выходные характеристики ПЭГ исследованного типа. В результате обработки сопряженных временных зависимостей параметров механических и электрических импульсов установлено, что при квазистатическом режиме одноосного нагружения 1-й модели до 15,5 кН (σ = 40,3 МПа) рост скорости нагружения от 2 до 10 мм/мин приводит к увеличению пикового значения выходного напряжения на сопротивлении нагрузки R_H = 1,2 МОм от 30 до 95 В, т. е. более чем в 3 раза. В случае импульсного нагружения 2-й модели при амплитуде σ = 17,2 МПа на сопротивлении нагрузки R_H = 1,75 МОм получено выходное напряжение ПЭГ до 300 В. Это означает, что при импульсном механическом нагружении многослойных ПЭГ (близких по рабочему сечению) получено существенно большее значение выходного электрического напряжения, превосходящее его при квазистатическом режиме нагружения. Расчет выходной мощности этих моделей ПЭГ позволил установить, что их удельная выходная мощность равна 7.52 мВт/см^3 для квазистатического случая и 30,76 мВт/см^3 для импульсного нагружения, соответственно. Таким образом в последнем случае достигается более высокая энергоэффективность, сравнимая с известными данными.

О точных решениях некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом

Акопян В. Н., Даштоян Л. Л.
Ереван, Институт механики НАН Республики Армения
vhakobyan@sci.am, lilit_dashtoyan@mechins.sci.am

Рассмотрены несколько задач для ортотропной плоскости, которая на одной из главных направлений ортотропии содержит конечный разрез, на берегах которого заданы условия смешанного типа.

В первой из этих задач рассматривается плоско-деформированное состояние ортотропной плоскости, которая на интервале $(-c, b)$ одной из главных направлений ортотропии материала расслаблена разрезом и деформируется под воздействием двух одинаковых абсолютно жестких штампов с плоскими основаниями, сцепленных с берегами разреза на участках $(0, a)$ $(a < b)$ и сообщающих точкам берегов разреза постоянные вертикальные смещения $\pm\delta/2$.

Во второй задаче полагается, что ортотропная плоскость с конечным разрезом на интервале $(-c, b)$ одной из главных направлений ортотропии материала расслаблена разрезом и деформируется под воздействием абсолютно жесткого штампа с плоским основанием, вдавливаемого при помощи сосредоточенной нормальной силы P_0 в нижний берег разреза на участке $(-a, a)$ $(a < c, b)$. Считается также, что остальная часть берегов разреза свободна от напряжений, а сила P_0 приложена к такой точке x_0 штампа, которая исключает его поворот.

В третьей задаче рассмотрено напряженное состояние ортотропной плоскости с разрезом, берега которого на некотором конечном интервале соединены между собой посредством абсолютно жесткого тонкого включения. Рассмотрено также плоско-деформированное состояние ортотропной плоскости , которая по одному из главных направлений ортотропии материала на интервале $(-a, a)$ содержит абсолютно жесткое тонкое включение, верхняя и нижняя стороны которого отошли от матрицы на интервалах $(-a, 0)$ и $(0, a)$ соответственно, создавая тем самым, разрезы. Считается, что берега разрезов свободны от напряжений и плоскость деформируется под воздействием сосредоточенных сил величины P_0, действующих на включение в точках $\pm a/2$.

Все поставленные задачи, при помощи метода разрывных решений уравнений теории упругости для ортотропной плоскости сначала сведены к решению системы сингулярных интегральных уравнений, а затем к задаче Римана для двух функций и построены их замкнутые решения. Получены простые выражения для всех важных механических характеристик поставленных задач, каковыми являются контактные напряжения, действующие под штампами и включением, раскрытие разреза, а также коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разреза. Из полученных результатов, при помощи предельного перехода, получены решения аналогичных задач для ортотропной плоскости с полубесконечным разрезом. Проведены численные расчеты и изучены закономерности изменения приведенных безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений и приведенного раскрытия разреза в зависимости от физических и геометрических характеристик рассматриваемых задач.

О вдавливании двух гладких штампов в упругую полуплоскость, содержащую жесткое включение конечной длины, одна грань которого оторвана от матрицы

Акопян В. Н., Саакян А. В.
Ереван, Институт механики НАН Республики Армения
vhakobyan@sci.am, avsahakyan@gmail.com

Рассматривается напряженно-деформированное состояние однородной упругой полуплоскости, которая содержит жесткое тонкое включение конечной длины, и деформируется двумя гладкими штампами, приложенными к ее границе. Включение находится на некоторой глубине от границы полуплоскости и расположено перпендикулярно к ней. Кроме того, предполагается, что одна грань включения сцеплена с матрицей, а другая оторвана от матрицы. С целью конкретизации условий на оторванной от матрицы грани примем также, что в образованном зазоре действует внутреннее давление, исключающее какой-либо контакт этой грани с полуплоскостью, тем самым, обеспечивая наложение двух типов концентраторов напряжений — включения и трещины — на едином отрезке.

В полярной системе координат сначала строятся разрывные решения уравнений теории упругости для полуплоскости в случае, когда в перпендикулярном к ее границе направлении на интервале, где расположен зазор, заданы неизвестные функции скачков напряжений и разность смещений точек берегов зазора, а на участках границы полуплоскости, где вдавливаются жесткие штампы заданы неизвестные контактные напряжения. Затем, используя полученные решения и удовлетворив условиям на берегах зазора и условиям гладкого контакта штампов с полуплоскостью, поставленная задача математически формулируется в виде системы из четырех сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода относительно контактных нормальных напряжений, возникающих под штампами, и двух линейных комбинаций скачка комплексной комбинации контактных напряжений, возникающих под включением, и скачка производной комплексной комбинации перемещений берегов трещины. Определены показатели особенности искомых функций в концах отрезков интегрирования. Для контактных напряжений под штампами имеем обычную корневую особенность, а‘две другие функции на концах включения-трещины имеют сильную особенность порядка 0.75 и более слабую особенность порядка 0.25. Такая ситуация с поведением искомых функций, определенных на отрезке, занимаемом включением, обусловлена взаимовлиянием двух, наложенных друг на друга, различных типов концентраторов напряжений — включения и трещины.

Решение определяющей системы сингулярных интегральных уравнений при дополнительных условиях равновесия штампов и включения, а также условия непрерывности перемещений в концевых точках трещины, строится методом механических квадратур.

Проведен численный анализ и выявлены закономерности изменения важных механических характеристик, каковыми являются раскрытие трещины, распределение контактных напряжений под штампами и под включением, а также коэффициенты концентрации разрушающих напряжений в концевых точках трещины.

О разрешимости смешанной краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики

Алексеев Г. В.[1,2]**, Бризицкий Р. В.**[2,3]
[1]*Владивосток, Дальневосточный федеральный университет*
[2]*Владивосток, Институт прикладной математики ДВО РАН*
[3]*Владивосток, Дальневосточный государственный университет*
alekseev@iam.dvo.ru

При изучении течений проводящей жидкости в реальных технических устройствах часто возникает необходимость в моделировании гидродинамических процессов в областях с границами, разные части которых обладают разными свойствами электропроводности. Типичным проявлением такой ситуации является случай, когда одна часть границы технического устройства является идеальным проводником, а другая часть представляет собой диэлектрик. Рассмотрение течений проводящей жидкости в такого типа областях приводит к необходимости исследования краевых задач для уравнений магнитной гидродинамики при смешанных краевых условиях для магнитного поля. Они отвечают ситуации, когда на одной части границы задается нормальная компонента магнитного поля и тангенциальная компонента электрического поля, тогда как на второй части задается тангенциальная компонента магнитного поля. Решение соответствующих смешанных краевых задач для уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики связано с большими трудностями, особенно в тех случаях, когда участки с разными краевыми условиями имеют общую границу (или ненулевое пересечение). Именно эта задача для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости исследована в данной работе.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей Σ_τ и Σ_ν. Доказана глобальная разрешимость следующей краевой задачи:

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - æ\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f},\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_1\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{E} + æ\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j},\ \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = q,\ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = \mathbf{q},\ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{k}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$ — векторы скорости и магнитного поля, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/\rho_0$, $p = p'/\rho_0$, где $\mathbf{E}'$ — электрическое поле, p' — давление, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность жидкости, $æ = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma = æ\nu_m$, σ, μ, ν и ν_m — постоянные коэффициенты электропроводности, магнитной проницаемости, кинематической и магнитной вязкостей, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\mathbf{j}$ — плотность сторонних токов, $\mathbf{f}$ — плотность внешних сил. Все величины в (1)–(3) являются размерными и записаны в системе СИ. В случае, когда $q = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, граничные условия в (3) для $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ отвечают часто встречающейся в приложениях ситуации, когда часть Σ_τ границы $\partial\Omega$ является идеально проводящей, тогда как Σ_ν является идеальным диэлектриком.

Многосеточный метод для задач гидрогазодинамики

Андреева Е. М., Крукиер Л. А., Муратова Г. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
muratova@sfedu.ru

В данном исследовании представлены некоторые аспекты применения многосеточного метода для задач вычислительной гидро-газодинамики (англ. Computational Fluid Dynamic — CFD). Фундаментальной основой практически всех задач CFD являются уравнения Навье–Стокса, которые определяют любые однофазные (газа или жидкости) потоки. Другим наиболее распространенным уравнением в задачах вычислительной гидро-газодинамики является уравнение конвекции-диффузии. Отдельной темой исследования являются процессы с доминирующей конвекцией. При моделировании физических процессов в CFD обычно требуется решение систем линейных алгебраических уравнений большой размерности. Сложность задач постоянно возрастает, поэтому кроме использования новейших компьютерных технологий требуется разработка новых алгоритмов.

Многосеточный метод является высокоэффективным методом решения вычислительных задач. Основным преимуществом многосеточного метода является оптимальная линейной оценка числа арифметических операций O(N), пропорциональная числу неизвестных для достижения заданной точности. Основными алгоритмическими составляющими многосеточного метода являются сглаживающая процедура и грубо-сеточная коррекция. Алгоритм многосеточного метода позволяет значительно повысить эффективность базового итерационного метода, комбинируя обычный итерационный процесс с приемом, называемым грубосеточной коррекцией — последовательным использованием в вычислениях более грубых сеток.

В работе представлен гибридный алгоритм решения уравнений Навье–Стокса. Для аппроксимации производной по времени используется метод траекторий, который заключается в аппроксимации с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы. Дискретизация по пространству осуществляется методом конечных элементов. Данный способ аппроксимации предложен В. В. Шайдуровым. Для дискретизации уравнений Навье–Стокса используется смешанная формулировка, когда применяется комбинации простых конечных элементов — билинейные для скоростей и постоянные для давления. Для решения полученной системы уравнений эффективным использован многосеточный метод.

Приведены результаты численных экспериментов многосеточного метода, в качестве сглаживателя которого выбирался метод простой итерации.

Для решения уравнения конвекции–диффузии предложена модификация многосеточного метода со специальными сглаживателями, в качестве которых использованы треугольные кососимметричные методы.

Численный анализ дисперсионных уравнений в случае наследственно-упругого сплошного цилиндра

Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
anofrikovans@info.sgu.ru, knickknack@bk.ru

С целью исследования процесса распространения гармонических волн в наследственно-упругом сплошном цилиндре выведены дисперсионные уравнения для случая осесимметричного напряженно-деформированного состояния и проведен их численный анализ.

Рассмотрен бесконечный круговой наследственно-упругий цилиндр радиуса R. Свойства материала описаны уравнениями состояния, взятыми в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора выбрана дробно-экспоненциальная функция Работнова:

$$Э_{-\frac{1}{2}}(-\beta,t) = kt^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

где k, β — параметры материала, t — время, $\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1}\exp(-y)dy$ — гамма-функция.

При изучении собственных колебаний исследованы свойства тех мод, которые при использовании потенциальной формы решения изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения, уравнениям состояния, геометрическим соотношениям и однородным граничным условиям на лицевой поверхности.

Рассмотрен случай осесимметричного напряженно-деформированного состояния. Решение для перемещений $\overline{u}$ выбрано в форме

$$\bar{u} = \left(\operatorname{grad}\Phi(r) + \operatorname{rot}\overline{H}(r)\right)\exp\left(i\left(\tilde{\chi}z - \omega t\right)\right),$$

где $\Phi(r)$, $\overline{H}(r)$ — потенциальные функции, ω — частота, $\tilde{\chi}$ — волновая постоянная, r, z — цилиндрические координаты.

Предполагалось, что ω — действительная, а $\tilde{\chi}$ — комплексная величины.

Для данного случая выведены два дисперсионных уравнения, одно из которых соответствует распространению продольных волн, другое — крутильных волн в цилиндре. Произведен анализ этих уравнений.

Полученные дисперсионные уравнения были решены численно методом продолжения решения по параметру. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами других авторов для упругого и вязкоупругого случаев. Проанализировано влияние наследственных факторов на поведение дисперсионных кривых.

Кромочные волны в пластинах

Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
ardazishvili.roman@yandex.ru, mv_wilde@yandex.ru, president@sgu.ru

Целью данной работы является исследование гармонических волн, распространяющихся вдоль края пластины и затухающих при удалении от неё (кромочные волны).

Исследование существования трехмерной поверхностной волны при различных граничных условиях на поверхности полупространства показало наличие данной волны в двух случаях: поверхность свободна от напряжений либо закреплена в одном из касательных направлений. Для граничных условий свободной поверхности получено дисперсионное уравнение, совпадающее с дисперсионным уравнением поверхностной волны Рэлея. Для смешанных граничных условий получены дисперсионные уравнения, корень которых является функцией от угла распространения волны.

Анализ поверхностных волн в полупространстве представляет собой первый этап исследования кромочных волн в пластине, на торце которой ставятся смешанные граничные условия либо граничные условия свободной поверхности. На лицевых сторонах ставятся либо граничные условия жёсткого защемления, либо граничные условия свободного края. Для удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях применён метод разложения по модам. Симметричные и антисимметричные относительно срединной поверхности колебания пластины описаны на основе трёхмерных уравнений теории упругости. Для различных видов граничных условий на торце проведён асимптотический анализ кромочных волн, показывающий, что в пластине существует бесконечное счётное множество кромочных волн высшего порядка. Доказано, что в коротковолновом пределе фазовая скорость исследуемых волн стремится либо к скорости волны Рэлея, либо к скорости волны сдвига. Для подтверждения данного факта исследованы формы кромочных волн, в коротковолновом пределе приближающиеся соответственно либо к форме волны Рэлея, либо к форме толщинного резонанса. Корректность проведённого асимптотического анализа подтверждается результатами численного расчета дисперсионных кривых первых четырёх кромочных волн высшего порядка при различных граничных условиях на торце и лицевых сторонах в симметричном и антисимметричном случаях. Особую роль в случае смешанных граничных условий на торце и жестком защемлении лицевых поверхностей играют частоты запирания плоских мод. При выполнении численных расчетов было обнаружено, что эти частоты оказывают влияние на поведение дисперсионных кривых кромочных волн, приводя к появлению нерегулярностей и разрывов.

Помимо кромочных волн высшего порядка при различных граничных условиях на торце и свободных лицевых поверхностях в симметричном и антисимметричном случаях найдены фундаментальные кромочные волны. Исследовано поведение фазовых скоростей фундаментальных волн в коротковолновом пределе.

Плоские трещины в трансверсально изотропном теле

Артамонова Е. А., Пожарский Д. А.
Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет
artamonova81@inbox.ru, pozharda@rambler.ru

Исследуются пространственные задачи о полосовом разрезе в трансверсально изотропном упругом пространстве, когда плоскости изотропии перпендикулярны плоскости разреза. Упругие свойства материала существенно зависят от выбранного направления в плоскости разреза. В связи с этим рассмотрены два случая расположения полосового разреза: вдоль первой или второй оси декартовой системы координат (задачи А и Б). В предположении, что нормальная нагрузка, приложенная к берегам разреза (трещине нормального отрыва), представима рядом Фурье, получены одномерные интегральные уравнения задач А и Б, символы ядер которых не зависят от номера члена ряда Фурье. При специальной аппроксимации символа ядра выводится замкнутое решение задачи. Ясно, что замкнутое решение пригодно только в отдельных случаях значений пяти упругих параметров трансверсально изотропного тела, когда погрешность аппроксимации приемлема. Для решения интегральных уравнений также использованы регулярный и сингулярный асимптотические методы с введением безразмерного геометрического параметра, характеризующего отношение величины периода приложенной волнистой нормальной нагрузки к толщине полосы разреза. Используя три указанные способа решения интегральных уравнений, сделаны расчеты коэффициента интенсивности нормальных напряжений на границе полосы.

Получено точное решение задачи об эллиптической трещине в трансверсально изотропном пространстве, когда плоскости изотропии перпендикулярны плоскости трещины, а к берегам трещины приложена линейная нагрузка. Для случая полиномиальной нагрузки доказана теорема о структуре общего решения. Сделаны расчеты КИН для разных случаев упругого материала пространства.

Для расчетов выбраны широко востребованные в технике материалы, проявляющие трансверсально изотропные свойства: титан (судостроение), цинк, бериллий, кобальт, оксиды алюминия и цинка, графит (металлургическая и химическая промышленность, реакторостроение), древесина (строительство), бедренная кость (медицина), сапфир, керамика, карбид кремния, сульфид кадмия, сульфид галлия, селенид галлия (полупроводниковая промышленность), композит (60% волокна), углеволокно (авиастроение) и др., 5 упругих постоянных которых экспериментально установлены зарубежными исследователями в последние десятилетия. Ранее некоторые из этих материалов упрощенно считали изотропными. К трансверсально изотропным также относятся эпоксидные материалы (эпоксидное стекло, эпоксидный графит). Это связующие материалы для стекло- и углепластиков, которые применяются в строительстве (ремонт железобетонных конструкций, дорог, аэродромов, склеивание конструкций мостов, трубопроводы, емкости химических производств), судостроении (судовые гребные винты, лопатки компрессоров) и т.д. Эти материалы отличает атмосферная стойкость, химстойкость, теплостойкость, прочность (в том числе при низких температурах).

Анализ бифуркаций и колебательных режимов сильно нелинейной виброударной системы

Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г.
Киевский национальный университет строительства и архитектуры
posttan@ukr.net

Изучение динамического поведения виброударных систем (ВУС) в разных условиях функционирования, режимов колебаний и их устойчивости, механизмов возникновения хаотических колебаний, «скользящих режимов» и других специфических особенностей виброударного движения отвечает потребностям прикладной механики и техники и в силу этого вызывает значительный интерес. В последние десятилетия этим проблемам посвящается все большее количество исследований, статей, монографий, конференций и симпозиумов.

Сильная нелинейность ВУС обусловливается, в первую очередь, многократным изменением их структуры за счет повторяющихся соударений элементов.

В работе исследуется динамическое поведение двухмассовой ВУС с двумя степенями свободы под периодическим внешним воздействием. Соударения тел предполагаются упругими, низкоскоростными, коллинеарными, без трения, поверхности тел в зоне контакта криволинейные. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x_1} &= -2\xi_1\omega_1(\dot{x_1}-\dot{x_2}) - \omega_1^2(x_1-x_2-D) + \frac{1}{m_1}F_{con}(x_2-x_1), \\ \ddot{x_2} &= -2\xi_2\omega_2\dot{x_2} - \omega_2^2 x_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - \\ &\quad - \omega_1^2\chi(x_2-x_1+D) + \frac{1}{m_2}[\lambda F_0\cos(\omega t+\varphi) - F_{con}(x_2-x_1)], \end{aligned} \tag{1}$$

где $F_{con}(x_2-x_1)$ – нелинейная сила контактного взаимодействия, моделирующая удар и действующая лишь во время удара. Она описывается соотношением:

$$F_{con}(z) = K \cdot H(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_1)^{3/2} \tag{2}$$

на основе решения задачи Герца. $H(x_2-x_1)$–ступенчатая функция Хевисайда.

Точки бифуркации и зоны устойчивого и неустойчивого T-периодического движения (T–период внешней нагрузки) находим на кривых нагружения и амплитудно-частотных характеристиках, для построения которых применяется численный метод продолжения решения по параметру в совокупности с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем и с использованием схемы Ньютона–Рафсона. Анализ устойчивости полученных колебательных режимов проводится на основе теории Флоке по значениям мультипликаторов — собственных чисел матрицы монодромии. Продемонстрировано поведение мультипликаторов в окрестностях точек бифуркации удвоения периода, возникновения инвариантного тора, разрывной бифуркации. Найдены и показаны режимы колебаний, которые в действительности реализуются в зонах неустойчивости — многоударные («стук»), квазипериодические, хаотические. Для всех режимов построены сечения Пуанкаре. Таким образом, выполнен подробный анализ динамического поведения виброударной системы.

Экспериментально-теоретическое исследование процессов упруговязкопластического деформирования и разрушения металлов и сплавов на газодинамической копровой установке

Баженов В. Г., Баранова М. С., Нагорных Е. В.
НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
bazhenov@mech.unn.ru, bar18@rambler.ru, pavlyonkova@mech.unn.ru

Все известные методики испытаний на растяжение образцов колпачкового типа основываются на схеме Гопкинсона и методе Кольского (У. Линдхольм, Д. Мор, Ж. Гари, Т. Николас и др.). На этих установках при горизонтальном расположении стержней сложно реализовать скорости деформации порядка 10^2 c^{-1}. Экспериментальные исследования характеристик разрушения методом прямого удара на образцах колпачкового типа на вертикальной газодинамической копровой установке авторам неизвестны, также отсутствует анализ достоинств и недостатков использования в качестве мерного стержня сплошных или трубчатых опорных и измерительных элементов. С целью оценки скоростей и степеней деформации, реализуемых в экспериментах динамического разрушения конструкционных материалов, численно исследованы процессы упруговязкопластического растяжения образцов колпачкового типа при скоростях деформации порядка 10^2 c^{-1}. Установлено, что амплитуда осцилляций деформаций в опорной трубе значительно больше, чем в стержнях эквивалентного поперечного сечения. Подобраны наиболее подходящие размеры образцов колпачкового типа и мерного стержня сплошного сечения с использованием двух датчиков деформаций, расположенных вблизи концов стержня. Проведен анализ влияния параметров вертикальной газодинамической копровой установки: массы, длины и начальной скорости ударника, геометрии рабочей части осесимметричного образца колпачкового типа с концентратором напряжений на процесс растяжения методом прямого удара. Показано, что достижимы скорости деформации порядка $1,5 \cdot 10^2$ c^{-1} (и более) при степенях деформации, достаточных для вязкого разрушения образцов с концентраторами напряжений.

По средствам сопоставления результатов расчета процесса удара в осесимметричной и одномерной постановках показано, что погрешность восстановления усилий, скоростей перемещений и перемещений в испытуемых образцах на основе одномерной модели не превышает 5%. В связи с неоднородностью напряженно-деформированного состояния в образцах для оценки параметров деформирования в момент разрушения необходимо применять экспериментально-расчетный метод в предположении, что диаграмма вязкопластического деформирования материала определена ранее, а контактное усилие на торцах колпачка найдено из эксперимента. Тогда численное решение задачи в осесимметричной постановке позволяет оценить напряженно-деформированное состояние в момент разрушения, который фиксируется в эксперименте резким падением сжимающих усилий в мерном стержне. Приводятся примеры применения данного экспериментально-расчетного метода для исследования процессов деформирования и разрушения образцов колпачкового типа из различных металлов и сплавов.

Численное исследование сейсмических вибраций крупногабаритных сооружений с учетом контактного взаимодействия с грунтовым основанием

Баженов В. Г., Дюкина Н. С.
НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
bazhenov@mech.unn.ru, ndyukina@mail.ru

Предлагаемые строительными нормами методы оценки сейсмостойкости сооружений используют упрощенную модель грунтового основания и применимы только для малозаглубленных сооружений. Исследование сейсмостойкости заглубленных сооружений и примыкающих к ним подземных трубопроводов подразумевает включение в рассмотрение массива прилегающего к сооружению грунта, большие размеры которого позволяют минимизировать отраженные от границ грунтового массива волны вблизи сооружения. Выбор мелкой разностной сетки, необходимой для точного описания сооружения и высокочастотных сейсмических осцилляций, делает численное моделирование крупногабаритных задач сейсмики крайне трудоемким. Предлагаемый метод анализа сейсмостойкости заглубленных сооружений существенно сокращает вычислительные затраты и учитывает эффекты контактного взаимодействия стенок сооружения с грунтовым основанием.

Для описания деформирования тел в рамках гипотез механики сплошной среды используется вариационно-разностный подход. Массив грунта представляется прямоугольным параллелепипедом, размеры которого в 20 раз превосходят характерные размеры основания сооружения в плане — в совокупности со специальными мало отражающими волны граничными условиями этого достаточно для исключения влияния краевых эффектов на результаты расчета вблизи сооружения. Жесткие грунты моделируются однородной или многослойной идеально упругой средой, для мягких грунтовых оснований применяется трансверсально-изотропная модель, учитывающая изменение характеристик грунта с глубиной. Расчетная область находится в поле сил тяжести. Расчет полей перемещений и напряжений от действия сил тяжести осуществляется с применением процедуры стационирования. В зависимости от расположения гипоцентра землетрясения, к нижней или боковой границе грунта прикладывается сейсмическое воздействие в виде компонент вектора скорости v_x, v_y, v_z, вычисленных так, чтобы вблизи сооружения воспроизводилась заданная акселерограмма землетрясения. Между сооружением и грунтом моделируется контактное взаимодействие с трением. Описанные методы решения, алгоритмы моделирования контактного взаимодействия и учета поля сил тяжести реализованы в сертифицированном программном комплексе «Динамика-3». Проведены исследования поведения сооружений в зависимости от параметров сейсмического воздействия и различных геометрических и физических параметров сооружения и грунта. Разработанная вычислительная модель динамического взаимодействия сооружения с грунтом применена для оценки сейсмопрочности подземных трубопроводов, примыкающих к ответственным сооружениям АЭС Бушер (Иран), Нововоронежской АЭС-2, Калининской, Ростовской АЭС (Россия), Белорусской АЭС (Белоруссия) по заказу ОАО «НИАЭП».

Примеры нелокальных бифуркаций инвариантных торов в малокомпонентных гидродинамических моделях с малым параметром

Базаренко А. Н., Петровская Н. В., Рябов Н. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
petr@math.rsu.ru,, petr@math.rsu.ru, NVP108@gmail.com, petr@math.rsu.ru

В работе представлены результаты численного и аналитического исследования бифуркаций для двух малокомпонентных гидродинамических моделей, содержащих малый параметр. Первая является простейшей нетривиальной галеркинской аппроксимацией задачи о двумерном течении вязкой жидкости в кольцевой области, вызванном равномерным вращением внутренней границы. Интерес к этой задаче был вызван экспериментально обнаруженными В. А. Владимировым необычными режимами течений в тонком в осевом направлении кольцевом зазоре (Vladimirov V. A. Proc. of the First International Conference on Flow Interaction, Hong Kong, 1994). При быстром вращении внутреннего цилиндра наблюдались солитоноподобные, медленно прецессирующие, сильно устойчивые струи жидкости, интенсивные в радиальном направлении и локализованные в азимутальном направлении. В численных экспериментах (Жуков М. Ю., Петровская Н. В. Численное моделирование течений вязкой жидкости в кольцевой области с вращающейся внутренней границей. Известия СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 2004) с галеркинскими моделями высокой размерности наблюдались движения с аналогичными свойствами. Механизм их возникновения с ростом числа Рейнольдса Re не был исследован — они не ответвляются от основного стационарного режима движения (течения Куэтта). Кроме того, остался открытым вопрос о существовании таких движений при неограниченном росте числа Рейнольдса. Для ответа на эти вопросы в данной работе исследована модель минимальной размерности, которая допускает движения с описанными свойствами. Для всех достаточно больших чисел Рейнольдса в ее фазовом пространстве существует устойчивый двумерный инвариантный тор, возникающий с ростом Re в результате нелокальной бифуркации.

Вторая модель представляет собой обобщение известной системы Лоренца для задачи о двумерной конвекции сверхтекучей жидкости в подогреваемом снизу горизонтальном цилиндре. При ее построении использованы идеи Ф. В. Должанского (Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов Е. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981). Метод осреднения для систем, близких к интегрируемым, был применен для изучения ее периодических решений в случае слабой диссипации (Жуков М. Ю., Петровская Н. В. Асимптотический анализ шестимерной модели термогравитационной конвекции в жидком гелии. В сб.: «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, 2005). В данной работе численно изучены бифуркации равновесий и предельных циклов осредненных уравнений первого приближения (им отвечают соответственно предельные циклы и двумерные инвариантные торы в фазовом пространстве исходной модели).

Численный расчет спиральных мод в аорте

Батищев В. А., Петровская Д. С.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
batishev-v@mail.ru

Спиральные течения крови в сердце обнаружены Harvey W. еще в семнадцатом веке. Во второй половине прошлого столетия в научной литературе сообщалось об обнаружении закрученных потоков крови в аортальной системе человека и животных. Впервые длинные спиральные волны в крупных кровеносных сосудах рассчитал Ю. А. Устинов на основе линейной теории волн. Расчетные данные хорошо подтверждены результатами экспериментов. Среди причин возникновения спиральных волн в аорте можно назвать закрученную структуру стенок левого желудочка сердца, а также винтовую анизотропию упругих стенок кровеносных сосудов. Возможна неустойчивость потока крови в левом желудочке сердца, которая может приводить к спиральным течениям.

В докладе построена математическая модель коротких спиральных волн в восходящей аорте. Аорта моделируется круговым цилиндром, толщина упругой стенки которого значительно меньше его диаметра. Спиральные волны в аорте вызваны вращающимся потоком крови, поступающим на вход в аорту из левого желудочка сердца. Математическая модель основана на системе Навье–Стокса и динамических уравнений тонкой упругой оболочки. В случае изотропной оболочки рассчитаны длинные и короткие волны, а также квазистационарные моды.

Показано, что короткие спиральные волны, в отличие от длинных волн заполняют все поперечное сечение сосуда. Механизмом переноса этих волн является стационарный поток. Часть коротких спиральных волн локализована в критическом слое вблизи оси сосуда. Построена асимптотика квазистационарных мод, которые в главном приближении не изменяют направления вращения жидкости ни со временем, ни по сечению.

Проведены численные расчеты окружной компоненты скорости для различных мод в течение систолы. Показано, что возможно однонаправленное вращение жидкости. Во время систолы в фиксированном сечении цилиндра возможно одноразовое изменение направления вращения в течение небольшого промежутка времени. Этот факт подтверждается экспериментально. В начале систолы существует отрезок времени в течении которого, окружная скорость почти не изменяется. Наибольшего значения окружная скорость достигает вблизи входа в аорту во второй половине систолы. Высшие спиральные моды возбуждаются в конце систолы. При фиксированных цилиндрических координатах окружная скорость колеблется со временем. Число колебаний растет с ростом номера моды. Амплитуда колебаний растет со временем и достигает наибольшего значения к концу систолы. При удалении от входа в аорту спиральные моды затухают, причем старшие моды затухают сильнее, чем первая.

Особенности реконструкции характеристик ФГМ с локализованным градиентом свойств

Богачев И. В.[1]**, Ватульян К. А.**[1]**, Явруян О. В.**[2]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
bogachev89@yandex.ru, yavruyan@mail.ru

В настоящее время задачи идентификации свойств неоднородных материалов сложной структуры имеют важное значение в различных отраслях науки, таких как механика функционально-градиентных и композиционных материалов, геофизика, биомеханика. При решении практических задач предварительно необходимо определить количественные характеристики материала исследуемого образца, и очень важно иметь надежные, точные и вместе с тем простые схемы восстановления неоднородных механических свойств.

Одной из наиболее интенсивно развивающихся областей является механика функционально-градиентных материалов (ФГМ). Ввиду особенностей их структуры, свойства таких материалов могут значительно изменяться по пространственным координатам, что делает классические подходы к исследованию композитов, основанные либо на процедуре пространственного осреднения, либо на теории смесей, неадекватными при их моделировании в сложных условиях нагружения. Количественное определение неоднородных характеристик ФГМ позволит моделировать реальное поведение конструкций из них.

Стоит отметить, что одним из распространенных видов ФГМ, активно использующихся в промышленности, являются материалы, лицевой слой которых выполняют из твердых материалов и соединяют с внутренним слоем, имеющим реологические свойства, различными технологическими методами. Также такие материалы можно получить с помощью различных методов обработки, типа поверхностной закалки, легирования, нанесения различных покрытий и напыления. ФГМ такого рода используются при производстве рессор, пружин, различных защитных конструкций в оборонной промышленности. В связи со спецификой структуры таких материалов, их свойства могут значительно меняться на некоторых участках и такие материалы являются существенно неоднородными.

Особый интерес в плане диагностики законов изменения свойств ФГМ представляют акустические методы, позволяющие производить реконструкцию механических свойств по данным об амплитудно-частотных и амплитудно-фазовых характеристиках, измеренных на некоторых участках границы объекта.

В качестве примера в работе исследованы задачи идентификации свойств ФГМ на примере анализа установившихся колебаний упругого и вязкоупругого слоя с сильным локализованным градиентом свойств, механические свойства которых значительно меняются по толщине на некоторых участках. Представлены итерационные схемы решения таких задач, основанные на методе линеаризации и последовательном численном анализе интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го родов. В соответствии с предложенными подходами представлено большое число вычислительных экспериментов для различных видов неоднородностей, установлены диапазоны чувствительности и нечувствительности предложенной схемы.

Анализ кардиосигналов с помощью преобразования Гильберта–Хуанга

Богачева М. О.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
akimenko-85@mail.ru

Традиционные методы анализа данных предназначены, как правило, для линейных и стационарных рядов и систем, тогда как реальные данные обычно являются нелинейными и нестационарными. Нестационарность временных рядов, в частности, биологических сигналов, таких как электрокардиограмма, электроэнцефалограмма, электрогастограмма, реограмма и др. становится существенным препятствием для их анализа. В частности, при исследовании кардиосигнала отчетливые нарушения в его структуре выявляются невооруженным глазом. Но возможен целый ряд отклонений и пограничных состояний, которые не проявляются в виде контрастных признаков. В таких случаях особо важны методы, позволяющие идентифицировать даже незначительные отклонения кардиосигнала от нормы.

Одним из вариантов решения этой сложной задачи являются методы сегментирования, позволяющие выделить участки временного ряда с постоянными характеристиками.

В настоящее время одним из основных подходов для идентификации постоянных характеристик сигнала является его разложение на эмпирические моды (Empirical Mode Decomposition — EMD) с последующим спектральным анализом Гильберта (Hilbert Spectral Analysis — HSA). Этот метод носит общее название преобразования Гильберта–Хуанга (Hilbert–Huang Transform — HHT). Он представляет собой частотно-временной анализ данных и не требует априорного функционального базиса преобразования. Функции базиса получаются адаптивно непосредственно из исходных данных путем итеративного отсеивания функций эмпирических мод.

Модовая декомпозиция сигналов основывается на предположении, что любые данные состоят из различных внутренних колебаний. По сравнению с классическим анализом Фурье и вейвлет-разложением, эмпирическая модовая декомпозиция характеризуется высокой степенью адаптации к обработке различных нестационарных сигналов. С помощью эмпирической модовой декомпозиции любой сигнал может быть разложен на конечное число внутренних эмпирических мод, каждая из которых содержит информацию о начальном сигнале.

В настоящей работе с помощью преобразования Гильберта–Хуанга была детально исследована структура 4 видов кардиосигналов из базы данных биомедицинских сигналов www.physionet.org, записанных во втором стандартном отведении: кардиосигнал здорового человека, пациента с инфарктом миокарда, кардиосигнал в случае гипертрофии левого желудочка сердца и кардиосигнал пациента с блокадой ножки пучка Гиса. Все расчеты были реализованы в среде Maple. В данной работе было определено оптимальное количество итераций для отсеивания модовых функций и получено распределение количества эмпирических мод для электрокардиографических сигналов.

К устойчивости неклассического трансзвукового пограничного слоя

Богданов А. Н.[1], **Диесперов В. Н.**[2]
[1]*Москва, Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова*
[2]*Долгопрудный, Московский физико-технический институт (государственный университет)*
bogdanov@imec.msu.ru

Рассмотрены аналитические модели для исследования ряда задач нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия газовых течений в трансзвуковом диапазоне скоростей — трансзвуковых неклассических пограничных слоев (НКС). К НКС относится круг не описываемых классической теорией Прандтля случаев вязко-невязкого взаимодействия — течений с областями больших продольных градиентов параметров течения, в первую очередь, окрестностей точек отрыва пограничного слоя. Для этих задач структура модели течения оказалась более сложной, чем предложенное Прандтлем выделение всего лишь двух (вязкой и невязкой) областей. В настоящей работе авторы использовали трехпалубную структуру. Градиент давления в неклассическом пограничном слое определяется не из условий в невязкой области, а из решения задачи в целом — таким образом, пограничный слой сам оказывает влияние на определяющее его невязкое течение (пограничный слой с самоиндуцированным давлением).

В развитие ранее полученных результатов для сверхзвукового режима О. С. Рыжовым было обнаружено, что при увеличении трансзвукового параметра подобия до величины 1.560 возникает неизвестная ранее петлеобразная ветвь дисперсионной кривой, отвечающая растущим возмущениям. При дальнейшем росте трансзвукового параметра подобия петля увеличивается, и в определенный момент происходит качественное перестроение поля дисперсионных кривых. Исследование, выполненное А. Н. Богдановым, В. Н. Диесперовым, В. А. Жуком, показало, что поведение дисперсионных кривых в рассматриваемом случае, по сути, аналогично поведению гиперболической кривой относительно начала координат.

Использовавшееся ранее для моделирования невязкой области взаимодействующего трансзвукового течения (течения в верхней «палубе») уравнение Линя–Рейсснера–Цяня (ЛРЦ) не правильно описывает распространение в потоке именно нестационарных возмущений (только вверх по течению). Предложенная авторами модификация трехпалубной модели для трансзвукового диапазона взаимодействия заключается в сохранении (возникающего естественным образом) в уравнении ЛРЦ при его выводе из полных уравнений для потенциала сингулярного члена трансзвукового разложения со второй производной по времени.

При использование модифицированной трехпалубной модели вместо классической существование только одного нейтрального возмущения возможно только при одном единственном значении трансзвукового параметра. Иначе либо добавляется еще один нейтральный корень, либо нейтральных корней нет вообще.

Выбор квадратичного вида зависимости профиля невозмущенной скорости от поперечной координаты также позволяет провести аналитическое исследование устойчивости пограничного слоя в достаточно законченном виде. В частности, свидетельствует о качественной перестройке поля возмущений при отклонении профиля невозмущенной скорости пограничного слоя от линейного вида.

Исследование фокусировки обратно отраженной акустической волны от препятствий канонической формы

Боев Н. В., Андрющенко Е. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
boyev@math.rsu.ru

Методы расчета акустики помещений основаны на замене граничных поверхностей неплоских отражателей набором граней вписанного или описанного многогранника около отражающей поверхности. Такой подход, конечно, существенно упрощает численные расчеты в рамках геометрической теории дифракции (ГТД). Давление в переотраженной произвольное конечное число раз высокочастотной акустической волне определяется обратной величиной к сумме расстояний от источника волны до первой точки зеркального отражения, между последовательными точками зеркального отражения, от последней точки зеркального отражения до точки приема. Вместе с тем, при такой замене, во-первых, искажается траектория лучей, во-вторых, не учитывается явно искривленность поверхностей через локальные параметры кривизны поверхностей в точках зеркального отражения.

Проведенное исследование основано на явном выражении давления в однократно отраженной высокочастотной волне. Оно получено в рамках ГТД на основе асимптотической оценки двукратного дифракционного интеграла Кирхгофа методом двумерной стационарной фазы. При этом в качестве переменных в асимптотическом разложении фазовой функции берутся приращения дуг, отсчитываемые от точки зеркального отражения вдоль линий главных кривизн поверхности. Выражение для давления в точке приема содержит все геометрические параметры задачи: расстояния между вершинами траектории, которая представляет собой пространственную ломаную линию, направления падающих волн, главные кривизны поверхности и элементы матриц перехода от одной локальной декартовой системы координат к другой в соседних точках зеркального отражения.

Численный анализ амплитуды давления в случае обратного отражения детально проведен для рассеивателей классической формы: цилиндра, сферы, трехосного эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов, эллиптического и гиперболического параболоидов для различных значений параметров граничных поверхностей. Построены графики зависимости амплитуды давления от удаленности источника и приемника волны от поверхностей рассеивателей. Для эллиптических, гиперболических и параболических точек граничных поверхностей в зависимости от сочетаний знаков и величин главных кривизн поверхностей установлены точки фокусировки акустической волны. Для указанных канонических поверхностей проведен сравнительный анализ амплитуд отраженных от неплоских поверхностей и плоских отражателей, расположенных в касательных плоскостях точек зеркального отражения.

Моделирование гидродинамических процессов с учетом фазовых переходов

Бойко С. Б.[1], Сандраков Г. В.[2]
[1]*Мелитополь, Таврический государственный агротехнологический университет*
[2]*Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко*
sandrako@mail.ru

Исследование и оптимизация механических и физико-химических динамических процессов, происходящих в неоднородных веществах при больших скоростях, высоких давлениях и энергиях в области фазовых превращений, требуют достаточно точного определения значений давлений, энергий и скоростей, возникающих в различных точках этих веществ в соответствующие моменты времени. Определение значений таких величин возможно на основе математического и численного моделирования быстро протекающих нестационарных нелинейных гидродинамических процессов, учитывающего основные положения теории фазовых превращений. Задача о построении таких гидродинамических моделей, учитывающих основные положения теории фазовых превращений, поставлена В. И. Юдовичем в работе «Одиннадцать великих проблем математической гидродинамики» как одна из основных задач математической физики.

Один из подходов к разработке таких математических моделей предложен в работах Р. И. Нигматулина и основан на концепции многофазных сплошных сред. Однако, общие многофазные уравнения из этих работ, характеризующие многофазные сплошные среды, не являются замкнутыми, как правило, что осложняет исследование этих уравнений и соответствующих многофазных моделей. Кроме того, в таких многофазных моделях, учитывающих фазовые превращения, предполагается, что некоторые из рассматриваемых фаз первоначально имеют нулевую плотность, которая может возрастать в некоторых точках пространства при развитии динамики процесса. При использовании известных вычислительных алгоритмов для расчета уравнений таких многофазных моделей возникает необходимость деления на плотность при численном расчете значений соответствующих параметров. Таким образом, необходимость деления на малую или даже нулевую плотность может приводить к неустойчивости и возможной некорректности подходящего вычислительного алгоритма.

В докладе предполагается представить новый метод математического и численного моделирования динамики смесей и структурно-неоднородных материалов в области больших деформаций и фазовых превращений, например, типа графит-алмаз. Этот метод основан на дискретизации законов сохранения массы, моментов и энергии, представленных в интегральной и дифференциальной формах. Такая дискретизация является естественной, и численное расчеты реализуются как компьютерное моделирование динамики несущей жидкости, содержащей частицы, которые могут претерпевать фазовые превращения. При численной реализации рассматриваемого метода используется комбинирование метода частиц в ячейках Ф. Харлоу и метода крупных частиц О. М. Белоцерковского.

Управление эффектами взаимодействия геометрически нелинейных нормальных волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре с обобщенными смешанными краевыми условиями на границе

Болнокин В. Е.[1], Елагин А. В.[2], Сторожев В. И.[2]
[1]*Москва, Научно-исследовательский и экспериментальный Институт автомобильной электроники и электрооборудования*
[2]*Донецкий национальный университет*
delyagin@inbox.ru

Исследования в области нелинейной волновой механики деформируемого твердого тела, посвященные отдельным аспектам проблемы анализа эффектов нелинейного ангармонического взаимодействия нормальных упругих волн в пространственных волноводах с различной геометрией и физико-механическими свойствами, представляют сегодня значительный интерес. Указанные исследования представляют интерес для механики конструкций, ультраакустической дефектоскопии, акустоэлектроники. При этом помимо описания детерминированных нелинейных эффектов возникают вопросы о возможности управления различными характеристиками процессов ангармонического взаимодействия нормальных волн при использовании механизмов варьирования различных параметров в постановке задач.

В данном контексте представленная работа посвящена вопросам управления характеристиками нелинейного взаимодействия осесимметричных нормальных волн, распространяющихся вдоль протяженных трансверсально-изотропных цилиндров. Ее целью является анализ управляющего влияния величин коэффициентов пропорциональности граничных напряжений и перемещений в смешанных краевых условиях на внешней поверхности керамических цилиндров, вдоль которых распространяются пары осесимметричных нормальных волн кручения с различной принадлежностью модам дисперсионного спектра, различной частотой и относительной длинной.

Рассматриваемая задача решается в рамках модели малого геометрически нелинейного деформирования с использованием представлений для конечных деформаций и квадратичного упругого потенциала. Применяется подход, основанный на использовании малого параметра в виде отношения максимальной амплитуды исследуемых волн к радиусу цилиндра и сведения исходной задачи к краевым задачам первого и второго приближений по определению вторых гармоник комбинационного типа, описывающих эффекты малого нелинейного ангармонического взаимодействия. Решение задачи второго приближения получено в аналитической форме с применением специализированного алгоритма аналитических преобразований в среде компьютерной алгебры.

Показано, что в рассматриваемом случае нелинейные вторые гармоники комбинационного типа априори представляют собой осесимметричные продольно-сдвиговые волны Похгаммера-Кри с частотой, равной сумме частот взаимодействующих крутильных волн. Проведены исследования, связанные с анализом управляющего воздействия коэффициентов в обобщенных смешанных граничных условиях на кинематические и энергетические характеристики комбинационных вторых гармоник для пар взаимодействующих крутильных волн с фиксированными параметрами.

Численное решение задач рационального формообразования тонкостенных конструкций в режиме ползучести

Бормотин К. С.
Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет
cvmi@knastu.ru

В связи с внедрением новых технологических процессов, режимов, материалов при изготовлении деталей сложно-конструктивных форм с высокими требованиями к размерной точности и эксплуатационному ресурсу наиболее выгодным становится применение численного моделирования. В настоящее время наблюдается значительный интерес к процессам формообразования алюминиевых сплавов в режимах ползучести и оценке пружинения. В данной статье строятся и используются в численном решении функционалы обратных экстремальных задач теории ползучести с учетом прямых пространственных постановок задач неупругого деформирования и упругой разгрузки. Такой способ решения задач моделирования обусловлен наилучшей точностью, учетом большинства физических и геометрических свойств детали, по сравнению с осредненными свойствами пластин и оболочек, учетом осредненных оценок пружинения. Процессы формообразования деталей, в частности, тонкостенных конструкций (панелей крыла самолета) в ползучести, сопровождаются накоплением в материале поврежденности, что может привести к разрушению. В связи с этим актуальной задачей в обработке материалов давлением является задача определения рациональных путей деформирования в ползучести. В данной работе приводится обобщенная вариационная формулировка обратной квазистатической задачи пластического формообразования деталей с учетом деформаций ползучести в виде оптимального управления, учитывающей параметр повреждаемости. Параметр поврежденности дает количественную оценку накопления в материале поврежденности в процессе ползучести и остаточного прочностного ресурса.

На основе критерия минимизации поврежденности в функционалах обратных задач находятся оптимальные законы деформирования в ползучести для частных задач. Численное решение обратных задач рационального формообразования строится на основе итерационного метода с учетом непрерывной параметрической функции оптимального нагружения. Итерационный метод решения построен и доказана его сходимость на примере задач формообразования при известном пути нагружения.

Построен и численно реализован алгоритм определения параметров по заданным условиям задачи. Решение каждого шага итеративного метода выполняется методом конечных элементов в программной системе MSC.Marc. Дан сравнительный анализ результатов расчета изгиба пластинки при различных режимах нагружения.

Постановка обратных квазистатических задач теории ползучести в виде оптимального управления позволяет с помощью разработанного алгоритма находить численные рациональные решения для более сложных деталей, свободных от представлений идеальной пластинки и оболочки, в частности при формообразовании панелей крыла.

О возможности мониторинга состояния структурно-неоднородных тел

Бочарова О. В.[1], **Анджикович И. Е.**[2],
[1]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
[2]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
olga_rostov1983@mail.ru

Задачи неразрушающего контроля состояния, определения дефектов различных механических объектов всегда были и остаются актуальными. Проблема разработки методов неразрушающего контроля состояния и прочностного ресурса узлов и деталей инженерных конструкций ответственного назначения является ключевой для повышения надежности их эксплуатации и предотвращения аварийных ситуаций. Современное развитие технологий производства новых материалов, а также повышенные требования к эксплуатационным характеристикам деталей и узлов конструкций, выполненных из этих материалов и работающих в сложных условиях, приводят к необходимости создания простых и эффективных методов постоянного мониторинга состояния объекта, не наносящих при этом ему ущерба.

В настоящей работе был создан многофункциональный измерительный комплекс, позволяющий проводить исследования, сопоставлять сигналы и строить спектральные характеристики датчиками различного типа, а также создана экспериментальная установка, позволяющая в лабораторных условиях оценивать изменение поверхностного волнового поля на образцах различных технологических материалов.

При проведении экспериментов возбуждение колебаний в модели производилось двумя способами – посредством электродинамического вибратора через лёгкий штамп, приклеенный к поверхности образца акустической мастикой, либо ударным электромагнитным приспособлением (электромагнитный молоток). Тем самым моделировались гармонический и импульсный способ воздействия на объект. Использование лазерного измерителя виброскорости колебаний PDV-100 в точке расположения датчика деформации позволяло наиболее достоверно оценивать динамику работы последнего. Сигнал, снятый с датчика деформации, усиливался зарядовым усилителем и обрабатывался АЦП. Регистрация и спектральный анализ сигналов, полученных датчиками, проводились компьютерными программами, соответственно Test Xpress LMS либо Powergrapf.

Рассмотрены особенности волновых полей на поверхности структурно неоднородных тел. Численно и экспериментально проведено исследование возможности определения размера и расположения дефекта по поверхностному волновому полю. При проведении численного эксперимента для расчета волнового поля был применен пакет ANSYS с использованием командного языка APDL. Результаты моделирования показали, что наличие дефекта его размер и глубина расположения существенно влияют на характеристики волнового поля.

Аэроупругая устойчивость функционально-градиентных цилиндрических оболочек, содержащих жидкость

Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеенко В. П.
Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН
bochkarev@icmm.ru, lekomtsev@icmm.ru, mvp@icmm.ru

Работа посвящена анализу аэроупругой устойчивости цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного (ФГ) материала, которые с наружной поверхности обтекаются сверхзвуковым потоком газа, а внутри содержат неподвижную или текущую идеальную сжимаемую жидкость. Функционально-градиентные материалы — современный вид композиционных материалов, представляющие из себя смесь двух или более составляющих. В частности, в данной работе внутренняя поверхность конструкции выполнена из алюминия, а наружная — из оксида циркония. Существенным преимуществом ФГ-материалов является непрерывное и гладкое изменение механических и физических свойств по толщине оболочки в зависимости от радиальной координаты, например, по степенному закону. Аэродинамическое давление, действующее со стороны газа на упругую поверхность, вычисляется согласно квазистатической аэродинамической теории. Гидродинамическое давление определяется по формуле Бернулли, записанной относительно потенциала возмущенных скоростей. Волновое уравнение, используемое для описания движения невязкой жидкости, совместно с условием непроницаемости, определяемым на смоченной поверхности, и соответствующими граничными условиями сводится к системе уравнений с помощью метода Бубнова–Галеркина. Применение для оболочки, рассматриваемой в рамках гипотез Кирхгофа–Лява, принципа возможных перемещений, сводит решение задачи к вычислению и анализу комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Достоверность алгоритма оценена путём сравнения с известными численно-аналитическими решениями. Для пустых или содержащих жидкость круговых цилиндрических оболочек приведены результаты численных экспериментов по оценке влияния свойств ФГ-материала на границы аэроупругой устойчивости при разных комбинациях граничных условий и линейных размерах. Установлено, что форма потери аэроупругой устойчивости, как в отсутствие жидкости, так и в случае неподвижной или текущей жидкости, определяется не только геометрическими характеристиками конструкции и граничными условиями, но и заданной консистенцией ФГ-материала. Показано, что, несмотря на то, что наличие жидкости внутри оболочки оказывает существенное влияние на границы аэроупругой устойчивости, зависимость критических скоростей потока газа от свойств ФГ-материала демонстрирует схожую с другими видами нагружения тенденцию. А именно, что вне зависимости от варианта граничных условий, задаваемых на краях оболочки, их линейных размеров, а также параметров внутреннего потока жидкости, критические значения аэродинамической нагрузки, определяемые различными значениями показателя объёмной доли ФГ-материала, ограничены предельными величинами, вычисленными для чистых материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-96049).

Физико-механические свойства бетонов, содержащих техногенное сырье

Буравчук Н. И., Гурьянова О. В., Павлова Л. Н., Пак Г. Н.
Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ
burav@math.rsu.ru

Использование техногенного сырья в промышленности строительных материалов является одним из стратегических путей снижения добычи природного минерального сырья, а также решения экологической проблемы по улучшению состояния окружающей среды. В Ростовской области многотоннажным техногенным сырьем являются запасы шахтных пород и золошлаковых отходов.

Цель работы — исследовать физико-механические свойства бетонов, содержащих золошлаковые отходы или горелые шахтные породы. В составах бетона зола сухого отбора и тонкодисперсные горелые породы можно использовать как гидравлическую добавку, золошлаки, дробленые породы и отсевы дробления — в качестве крупного и мелкого заполнителя. Испытания бетонов проведены в лабораторных условиях и при выпуске изделий из экспериментального бетона в условиях производства.

По химическому составу отходы относятся к полукислому сырью, с высоким содержанием красящих оксидов. Несмотря на имеющиеся различия в составе и свойствах зол и горелых пород, в них есть много общего: они являются продуктом обжига углевмещающих пород и содержат минеральную и органическую часть. Минеральная часть представлена в основном видоизмененным в процессе обжига глинистым веществом, органическая часть — видоизмененными модификациями угля. В золе присутствуют основные группы веществ: кристаллические, стекловидные, аморфные и органические. В отличие от зол горелые породы содержат в значительном количестве глинистые, железистые и кремнеземистые гидравлические компоненты.

Бетоны, содержащие техногенное сырье (золошлаковые отходы или горелые шахтные породы), имеют высокие показатели прочности при изгибе и отличаются повышенной сульфатостойкостью. Наибольшие показатели отмечены у золобетона. Это связано с выраженным пластифицирующим эффектом золы, что способствует формированию более однородной и плотной структуры бетона. Физико-химический характер обусловлен пуццолановыми свойствами, которые способны проявлять золошлаковые отходы и горелые породы. Результатом проявления пуццолановой активности является связывание минеральными добавками свободной извести, образующейся при гидратации цемента и образованием значительного количества цементирующих веществ. Контактный слой при этом имеет более развитую и менее дефектную поверхность, более стойкую к деформационным проявлениям и воздействию агрессивных сред. Положительное влияние золошлаковых отходов и горелых пород на физико-механические свойства бетонов, а также возникающая возможность при их применении существенно сокращать расход цемента без ухудшения свойств и качества бетона, дают основание рекомендовать их для широкого использования в технологии бетона.

Силовая спектроскопия в условиях бимодальной частотной модуляции и внутреннего резонанса

Бычков А. А., Карпинский Д. Н.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
karp@math.rsu.ru

Динамическая атомно-силовая микроскопия (АСМ) используется для получения изображения поверхностей микро- и наномеханических приборов, а также измерения величины химических связей между отдельными биомолекулами или локальной жесткости биоматериалов (силовая спектроскопия). Например, силовая спектроскопия используется при исследовании наномеханических свойств клеток для анализа опухолей.

Цель любого эксперимента с помощью динамической АСМ заключается в восстановлении информации о свойствах образца, закодированной в динамике движения микроконсоли АСМ. Нелинейность в силе взаимодействия вершины зонда и образца приводят к появлению высоких гармоник в движении микроконсоли, которые содержат полезную информацию о свойствах образца. Однако, амплитуды высокочастотных компонент для консолей с высокой добротностью на два—три порядка меньше основной компоненты.

Амплитуды высших гармоник могут быть усилены путем одновременного возбуждения собственных мод микроконсоли. Многочастотные режимы возбуждения обеспечивают высокую чувствительность и разрешение, поскольку эти методы позволяют декодировать информацию, генерируемую нелинейными участками силы взаимодействия зонд — образец.

Простейший случай возбуждения первых двух собственных мод называют бимодальной частотной модуляцией. Этот метод использует две движущие силы для того, чтобы возбудить колебания консоли. Возбуждающие частоты настроены так, чтобы совместить их с двумя собственными частотами, соответствующих изгибным собственным модам (обычно первая и вторая моды). Выходной сигнал первой моды (либо амплитуда, либо сдвиг частоты) используется для изображения топографии поверхности, в то время как выходной сигнал второй моды (амплитуда и/или фазовый сдвиг) используется для измерения механических и др. свойств поверхности.

Другой метод решения задачи об усилении второй собственной моды микроконсоли АСМ связан с явлением внутреннего резонанса. Этот метод предполагает одночастотное возбуждение микроконсоли АСМ, форма которой соответствует кратности частоты второй собственной моды первой. В этом случае происходит перенос энергии колебаний от первой моды ко второй, что приводит к получению дополнительной информации о свойствах образца.

Авторами выполнены расчеты, позволяющие оценить эффективность этих и других методов с целью создания микроконсоли АСМ с наилучшими свойствами. Результаты расчетов показали, что наибольшая чувствительность и разрешающая способность микроконсоли АСМ достигается при совместном действии бимодальной частотной модуляции и выборе формы микроконсоли, соответствующей условиям внутреннего резонанса.

Установившиеся колебания пороупругих одномерных тел с учетом предварительного состояния

Ватульян А. О.[1], **Ляпин А. А.**[2]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
lyapin@sfedu.ru

Моделирование динамических процессов в грунтах, технических пористых материалах, а также биологических средах типа костной ткани является важной задачей механики сплошных сред. В случае биологических тканей и природных сред очень часто в структуре объектов присутствуют предварительные напряжения или деформации, которые играют важную роль и оказывают значительное влияние на многие прочностные и динамические характеристики тел. Описанию влияния предварительного состояния пороупругих сред уделено не так много внимания и в настоящей работе представлен подход, позволяющий формулировать уравнения для описания динамического поведения пороупругой среды с учетом предварительного состояния при помощи введения соответствующих гипотез и формулировки вариационной постановки задач на основе функционала, полученного в предыдущих работах авторов.

$$L = \int_V \left(-\frac{1}{2} C_{ijkl}\epsilon_{kl}u_{i,j} + A_{ij}pu_{i,j} + \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_i u_i + \frac{\phi^2}{R}\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2i\omega}K_{ij}p_{,i}p_{,j} \right) dV + \\ + \int_{S_\sigma} q_i u_i \, dS + \int_{S_h} \frac{1}{i\omega} hp \, dS.$$

Продемонстрированы результаты моделирования на примере задачи для одномерного пороупругого тела. Учет одновременно изгибной и продольной деформации как в начальном, так и в текущем состоянии, приводит к наличию всех компонент тензора малых деформаций, который получен после линеаризации тензора конечных деформаций с учетом начального состояния. В результате уравнения для описания продольных и изгибных колебаний в текущем состоянии с учетом начального получаются связанными и требуют совместного решения. Поскольку результирующие уравнения для текущего состояния содержат функции смещения и давления начального состояния в виде добавок к коэффициентам дифференциального оператора, не позволяет в общем случае строить аналитическое решение; численное решение построено при помощи метода стрельбы, что позволяет учитывать неоднородность среды в виде функциональной зависимости материальных характеристик. Отдельный интерес представляет собой задача определения характеристик предварительного состояния в среде по данным акустического зондирования. В работе проанализировано влияние типа начального состояния на вид амплитудно-частотной характеристики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 14-01-31453 мол_а, 13-01-00196-а).

Колебания тел при наличии неоднородных предварительно напряженных упруго-пластических зон

Ватульян А. О., Недин Р. Д.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
rdn90@bk.ru

Остаточные (или предварительные) напряжения часто возникают в механических конструкциях в результате проведения различных технологических операций, включая сварку, прокатку и термообработку, либо в результате жесткого соединения материалов с образованием пластических зон, а также существуют во многих биологических объектах. Зачастую компоненты таких напряжений в телах достигают больших величин, особенно в окрестностях полостей, трещин и концентраторов, что может представлять опасность снижения прочностных характеристик конструкции и даже стать причиной ее разрушения. В связи с этим диагностика неоднородного предварительного напряженного состояния тел является важной и актуальной задачей современной механики деформируемого твердого тела. На сегодняшний день существует множество методик определения полей предварительных напряжений; многие из них основаны на частичном или полном разрушении конструкции и поэтому не могут быть применены для диагностирования конструкций ответственного назначения. Что касается неразрушающих технологий анализа полей таких напряжений, то наиболее распространенными являются методы рентгеновской и нейтронной дифракции. Отметим, что одним из самых перспективных, экономичных и эффективных методов неразрушающей диагностики предварительного напряженного состояния является акустический метод. В настоящей работе на основе неклассической модели Тимошенко сформулирована постановка краевой задачи об установившихся колебаниях тонкой предварительно напряженной пластины; при этом рассмотрен общий случай неоднородности всех ее физических и геометрических характеристик, включая распределение предварительных напряжений по толщине. Поставлена обратная задача о реконструкции неоднородного предварительного напряженного состояния, образующегося в прямоугольной пластине с круговым отверстием. В качестве дополнительной информации в обратной задаче для нескольких частот колебаний считалось заданным перемещение в некотором наборе точек под зондирующей нагрузкой, приложенной к внешнему контуру пластины. Обратная задача сведена к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается прямая задача по определению поля перемещений с помощью метода конечных элементов и интегро-дифференциальное уравнение 1-го рода относительно поправок к функции напряжений. Для решения интегрального уравнения предложен подход, представляющий собой проекционный метод, основанный на предварительном разбиении области пластины на суперэлементы и на отыскании функции напряжений, через которую выражены поправки, в виде разложения по некоторому базису. Проведена серия вычислительных экспериментов, демонстрирующая эффективность предложенного алгоритма восстановления предварительных напряжений, изучены возможности метода реконструкции в зависимости от типа зондирующей нагрузки и частотного диапазона.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00196-а).

Накопление газогидратной пены внутри купола под водой

Гималтдинов И. К., Кильдибаева С. Р.
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
freya.13@mail.ru

Газовые гидраты рассматриваются в качестве ключевого источника добычи углеводородного сырья на основании того факта, что в одном кубическом метре газового гидрата содержится в 160 раз больше газа, чем в свободном состоянии. Согласно акустическим представлениям всплытие метановых пузырьков со дна океана при определенных термобарических условиях сопровождается образованием гидрата на поверхности пузырьков, при этом могут быть реализованы условия, когда пузырьки полностью превращаются в частицы гидрата. Существует два подхода к изучению кинетики образования гидратной частицы при всплытии со дна водоема. При первом подходе исследователи полагаю, что кинетика гидратообразования лимитируется теплоотводом, другие исследователи полагают, что кинетика гидратообразования определяется интенсивностью поступления газа через гидратную пленку, образовавшуюся на поверхности пузырька.

В работе рассматривается математическая модель купола-ловушки, предназначенного для сбора газовых гидратов на дне океана, с целью дальнейшего получения из образовавшегося гидрата газа и воды. Пусть на дне океана имеется источник газа, из которого с некоторым известным массовым расходом M_g выделяются метановые пузырьки, поступающие в холодную воду с температурой T_l , образуя при этом потоки пузырьков. Согласно предлагаемой схеме над источником газа в условиях океана устанавливается купол-ловушка в форме цилиндра, верхний торец которого закрыт, а через открытый нижний поступают газовые пузырьки. Купол сделан из полиуретана, что позволяет уменьшить тепловые потери через боковые стенки. Устройства, обеспечивающие фиксацию и установку купола на дно, не рассматриваются.

Будем полагать, что все основные параметры течения трехфазной системы, состоящей из частиц газа, воды и гидрата однородны по сечению. Дроблением и слипанием пузырьков пренебрегаем. Миграция пузырьков газа происходит в термобарических условиях, способствующих образованию гидратной оболочки. Допустим, что купол зафиксирован на таком расстоянии z* от дна, что пузырьки газа, мигрирующие внутри купола, покрываются газогидратной коркой у нижнего основания купола. В работе рассмотрен процесс всплытия пузырьков метана внутри купола и процесс их накопления внутри. В результате расчетов получена зависимость температуры воды внутри купола от времени, зависимость изменения объемного содержания систем газогидратных пузырьков и их радиусов для различных моментов времени.

Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами

Глухов И. А., Сторожев В. И.
Донецкий национальный университет
glukhov91@yandex.ru

Вопросы о спектрах, кинематических и энергетических свойствах локализованных волн деформаций в упругом слое между упругими полупространствами на данный момент частично исследованы лишь в рамках моделей, не учитывающих различные варианты анизотропии физико-механических свойств компонентов волноводов и различий в свойствах вмещающих анизотропных полупространств. Вместе с тем, анализ свойственных этим волновым процессам закономерностей связан с дальнейшим совершенствованием ряда геоакустических технологий, методов ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых.

В данном контексте, целью представляемого исследования является разработка и реализация численно-аналитической теоретической методики качественного и количественного анализа закономерностей распространения локализованных продольно-сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропного слоя, заключенного между двумя идеально контактирующими с ним трансверсально-изотропными полупространствами в случае различия физико-механическими свойств всех трех компонентов рассматриваемого волновода. Поставлена задача численно-аналитического исследования дисперсионных спектров, а также кинематических и энергетических свойств локализованных в слое волн.

Для задач о спектрах локализованных упругих волн в описанной постановке в аналитической форме получены трансцендентные дисперсионные соотношения, имеющие вид равенств нулю функциональных определителей восьмого порядка. Применительно к рассматриваемому случаю проведено качественное исследование распределений корней характеристических полиномов для систем дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитудных функций волновых перемещений в слое и полупространствах, и априори выделены области изменения параметров частоты и волнового числа, в которых возможно существование ветвей спектра исследуемых локализованных бегущих волн при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств. Описаны также области изменения частоты и волнового числа, в которых исследуемые формальные представления описывают «волны с вытеканием энергии в процессе распространения». Построена также предельная асимптотическая форма дисперсионных соотношений для симметричных и антисимметричных локализованных волн в высокочастотном коротковолновом диапазоне.

Осуществлены расчеты ряда низших ветвей спектра локализованных волн в нескольких типах рассматриваемых структур с компонентами, обладающими свойствами поперечно-анизотропных геоматериалов. Сделан ряд обобщающих выводов относительно механизмов трансформации спектров бегущих локализованных волн при разных схемах монотонного варьирования физико-механических параметров слоя и вмещающих полупространств.

Распределение энергии поверхностного источника между волнами Лэмба

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А., Фоменко С. И.
Краснодар, Институт математики, механики и информатики КубГУ
sfom@yandex.ru

Целью данной работы является анализ мощности поверхностных волн и их вклад в общую энергию упругих волн, возбуждаемых эталонными поверхностными источниками. Рассматриваются три вида источника: точечные нормальная и тангенциальная нагрузки, а также пара точечных касательных нагрузок, моделирующих действие полосового пьезоактуатора на поверхности упругой полосы. Отдельное внимание уделено волновым процессам в слоистом и функционально-градиентном полупространстве.

В упругой изотропной полосе возбуждение новых бегущих волн с ростом частоты колебаний сопровождается резким всплеском энергии, поступающей от источника, причем большую её часть переносит мода с высшим номером: наблюдается эффект эстафетной передачи энергии. Данный эффект наиболее ярко проявляется для сред с одним или несколькими внутренними мягкими каналами. Причем при размягчении материала канала эффект обмена энергией между модами сопровождается резонансными явлениями, вызванные в том числе возбуждением обратных волн. Наличие нескольких каналов приводит к группированию дисперсионных кривых бегущих волн, энергия которых распределяется по каналам. Количество волн в группе равно числу каналов. При увеличении частоты фазовые скорости волн постепенно стремятся к друг другу, однако, до момента полного слияния успевают обменяться энергией со следующей порцией каналовых волн. Таким образом, для многоканальных сред наблюдается эффект передачи волновой энергии между группами мод.

Для изучения особенностей распределения возбуждаемых мод по глубине был проведен анализ энергетических потоков на основе полученных ранее представлений для осредненного за период колебаний потока энергии, переносимого в поле гармонических колебаний через произвольную горизонтальную поверхность, боковую поверхность цилиндра и поверхность нижней полусферы. Они позволяют получать как общую мощность потока энергии, отдаваемой источником в среду, так и ее распределение между объемными, поверхностными и каналовыми волнами, а также между возбуждаемыми модами и по глубине. Анализируется распределение суммарной энергии источника между модами в зависимости от типа источника и частоты.

Работа поддержана Минообрнауки России (госзадание №1.189.2014К) и Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 13-01-96520).

Теоретические и экспериментальные методы определения дисперсионных характеристик слоистых композитных материалов

Глушков Е. В.[1], Глушкова Н. В.[1], Еремин А. А.[1], Ламмеринг Р.[2]
[1]*Краснодар, Институт математики, механики и информатики КубГУ*
[2]*Гамбург, Университет им. Гельмута Шмидта*
evg@math.kubsu.ru, eremin_a_87@mail.ru

Задача определения дисперсионных характеристик бегущих упругих волн, например, групповых скоростей или волновых чисел, представляет интерес для систем ультразвукового неразрушающего контроля и мониторинга. Так, для эффективной реализации алгоритма поиска дефектов на основе времени прихода волнового сигнала, отраженного неоднородностью, необходимо знать групповые скорости бегущих волн. Другим примером служит неразрушающая методика идентификации эффективных упругих постоянных композитного материала, основанная на минимизации невязки между расчетными и экспериментальными значениями фазовых и/или групповых скоростей, а также длин волн.

В работе обсуждаются теоретические методы расчета дисперсионных характеристик многослойных композитных материалов и экспериментальные неразрушающие способы их определения. Для вычисления волновых чисел и фазовых и групповых скоростей бегущих волн используются подходы, основанные на физически наглядных асимптотических выражениях для цилиндрических упругих волн, распространяющихся от поверхностного источника в радиальном направлении. Эти выражения получены из интегрального представления волнового поля с помощью матрицы Грина для соответствующей трехмерной краевой задачи для слоистого анизотропного материала, используя теорию вычетов и метод стационарной фазы. Их применение позволяет учесть влияние анизотропии упругих свойств композитов, проявляющееся в зависимости дисперсионных характеристик возбуждаемых в них бегущих волн как от частоты колебаний, так и от направления распространения, а также, в общем случае, в несовпадении направления вектора групповой скорости отдельной бегущей волны с направлением соответствующего волнового вектора.

В экспериментальных исследованиях для возбуждения бегущих волн применяются пленочные пьезокерамические элементы, приклеенные к поверхности композитной пластины. С использованием сканирующего лазерного виброметра измеряется вертикальная компонента скоростей точек поверхности в заданном направлении распространения. Дисперсионные кривые групповых скоростей бегущих волн вычисляются путем деления расстояния, пройденного волновым пакетом, на найденное время прихода сигнала, установленное с использованием вейвлет-преобразования. Для построения частотных зависимостей волновых чисел бегущих волн используется двукратное преобразование Фурье по горизонтальной и временной переменным, примененное к массиву сигналов, измеренных в наборе точек в заданных направлениях.

Приводятся результаты применения предлагаемых методик для определения дисперсионных характеристик волоконно-армированных однонаправленных, перекрестых и квазиизотропных композитных пластин.

Бифуркации конвективных движений жидкости в пористой среде при наличии внутренних источников тепла

Говорухин В. Н.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
vgov@math.rsu.ru

В докладе изучается фильтрационная конвекция в горизонтальном параллелепипеде при постоянно поддерживаемом линейном по вертикали профиле температуры на границах. Эта задача обладает косимметрией, что является причиной существования бесконечного множества (однопараметрического семейства) стационарных режимов. Теория косимметрии и ее разрушения, соответствующих бифуркаций была построена и развита В. И. Юдовичем. При наличии внутренних источников тепла косимметрия в этой задаче нарушается. В. И. Юдовичем доказано, что полностью устойчивое семейство стационарных режимов при существовании равномерно-распределенных источников тепла малой интенсивности внутри области течения распадается, порождая только два стационарных режима, устойчивый и неустойчивый. Как происходит распад семейства при наличии неустойчивых дуг на семействе, наличии неравномерных источников тепла, до сих пор не изучалось. Исследованию этих явлений посвящен этот доклад.

Математически задача формулируется в виде системы уравнений

$$\Delta\psi = \theta_x, \quad \theta_t + \psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y = \Delta\theta + \lambda\psi_x + \mu\, f(x, y).$$

Здесь (x, y) — декартовы координаты, t — время, ψ — функция тока, θ — отклонение температуры от равновесного профиля, λ — аналог числа Рэлея, $f(x, y)$ — функция распределения внутренних источников тепла, μ — параметр. На границах прямоугольной области течения $\psi = \theta = 0$.

Основным инструментом исследования был численный анализ. Для решения задачи использовался метод Галеркина. Для анализа бифуркации распада семейства разработан алгоритм, основанный на селективной функции Юдовича. В результате обнаружены теоретически предсказанные сценарии воздействия внутренних источников на конфекцию: распад семейства на конечное число стационарных режимов, возникновение медленных периодических движений. Кроме того, были найдены релаксационные колебательные режимы, состоящие из двух стадий: медленных движений с траекторией, лежащей на дуге распавшегося семейства, и быстрых колебаний. Такой сценарий возможен, когда при распаде семейства все сохраняющиеся стационарные режимы являются неустойчивыми.

Естественно предположить, что условия реальных физических процессов и экспериментов не полностью удовлетворяют идеальной математической постановке задачи. В результате косимметрия задачи нарушается, и реализуются условия, близкие к распаду семейства стационарных режимов, и следует ожидать медленных движений (периодических или стремления к стационарному режиму) и релаксационных колебаний. Полученные результаты позволяют предложить управление отбором стационарного режима с нужными характеристиками с помощью введения внутренних источников тепла с неоднородным распределением их плотности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 14-01-00470.

Распараллеливание метода вихрей в ячейках на GPU

Говорухин В. Н., Гуда С. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
vgovorukhin@gmail.com, gudasergey@sfedu.ru

В докладе изучаются различные варианты отображения на архитектуру графических вычислителей метода вихрей в ячейках для задачи о протекании жидкости. Доказательство существования единственного решения и итерационный алгоритм решения задачи о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область были разработаны В. И. Юдовичем (Матем. сб. 1964, №4). В дальнейшем А. Б. Моргулисом и В. И. Юдовичем была доказана асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания без точек покоя (СМЖ 2002, №4) и выдвинуто предположение о наличии других устойчивых стационарных режимов. В. Н. Говорухиным (Изв. РАН МЖГ 2012, №2) реализован метод частиц в ячейках численного расчета двумерных режимов протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал и найдены нетривиальные стационарные течения с рециркуляционными зонами и различной функциональной зависимостью от функции тока.

Распараллеливание программы на графические вычислители — трудоемкий процесс, который не обязательно приводит к успешному результату. Так, например, многомесячная работа по написанию и отладке пакета gNEMO моделирования океана привела к многократному раздуванию кода, а полученное ускорение не превысило 1.4. Пробные реализации нескольких вариантов распараллеливания в поисках наиболее производительного еще больше усложняют и продлевают работу программиста. Сократить трудозатраты позволяет оценка эффективности на основе моделирования параллельных вычислений. Для эффективного распараллеливания метода частиц в ячейках на графические вычислители применяется модель вычислений, описанная в работе Hong S. и Kim H. 2009 года.

Профилировка показала, что критическим участком кода программы является вычисление значений функции тока Ψ_k во всех частицах (x_k, y_k) области течения $D = \left\{(x,y) : -\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}\right\}$, используя рассчитанные коэффициенты Фурье $\psi_{i,j}$

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \psi_{i,j} \sin\left(\frac{i\pi}{a}\left(x_k + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{j\pi}{b}\left(y_k + \frac{b}{2}\right)\right), \quad k = 1 \ldots p.$$

Вопрос эффективного отображения данной суммы на архитектуру GPU достаточно сложен. Имеющаяся в распоряжении авторов видеокарта Tesla C2075 поддерживает операции быстрого вычисления тригонометрических функций, но они работают только с одинарной точностью. С двойной точностью синусы можно вычислить рекурсивно. Однако, в таком случае возникают проблемы с хранением вычисленных значений: памяти на кристалле недостаточно, а доступ к глобальной памяти слишком медленный. Поэтому приходится применять блочные алгоритмы, сочетающие предвычисление подмножеств синусов и их хранение в разделяемой памяти на кристалле.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 14-01-00470.

Об особенностях деформирования дуговой межфазной трещины с учетом контакта ее берегов

Годес А. Ю., Лобода В. В.
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
alinej@rambler.ru

Рассматривается изотропная линейно упругая плоскость $r > a$, характеризуемая постоянными μ_2 и κ_2, которая содержит линейно упругое изотропное включение $0 \leqslant r < a$, чьи свойства определяются постоянными μ_1 и κ_1. Включение скреплено с плоскостью по всей границе, кроме дуги $r = a$, $\theta < \beta$, где возникла трещина. Предполагается, что берега трещины могут контактировать без трения. Вне зоны контакта берега трещины свободны от напряжений, а в пределах зоны взаимодействия берегов нормальные напряжения являются непрерывными при переходе через трещину и сжимающими. Главные напряжения на бесконечности равны N_1 и N_2, причем угол между направлением N_1 и осью абсцисс равен α.

В математическом плане поставленная задача представляет собой граничную задачу для четырех комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили, аналитических в заданных областях. С учетом граничных условий на бесконечности, на границе раздела сред и на берегах трещины, а также ограниченности перемещений в начале координат эта граничная задача сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с ядром типа Коши относительно двух неизвестных функций $\tilde{b}_r(\zeta)$ и $\tilde{b}_\theta(\zeta)$, определенных на промежутке $|\zeta| < 1$. Эта система дополняется двумя условиями однозначности смещений и условиями равенства нулю раскрытия трещины в пределах зоны контакта ее берегов. В правую часть одного из сингулярных интегральных уравнений входит неизвестная функция $\tilde{N}(\zeta)$, которая определяет обезразмеренные нормальные напряжения на берегах трещины, то есть тождественно равна нулю в точках, где трещина открыта, и подлежит определению в точках, где берега трещины взаимодействуют между собой. Также неизвестными величинами, подлежащими определению, являются границы зоны контакта берегов трещины.

Для приближенного решения полученной системы интегральных уравнений используется метод коллокации в сочетании с квадратурной формулой Гаусса–Чебышева. После замены интегралов на квадратурно-интерполяционные суммы система сингулярных интегральных уравнений вместе с дополнительными условиями сводится к системе $2n + m$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ значений неизвестных функций $\tilde{b}_r(\zeta)$ и $\tilde{b}_\theta(\zeta)$ в узлах полинома Чебышева первого рода n-го порядка и m значений функции $\tilde{N}(\zeta)$ в точках, принадлежащих зоне взаимодействия берегов трещины. Неизвестные границы контактной зоны определяются с помощью итерационного алгоритма.

Установлено, что в зависимости от соотношения величин главных напряжений на бесконечности, угла, который составляет первое главное напряжение на бесконечности с осью абсцисс, и соотношения жесткостей материалов матрицы и включения макрозона контакта берегов трещины может отсутствовать, примыкать к одной из вершин трещины или не прилегать ни к одной из вершин.

Некоторые контактные задачи для составной пластины, усиленной стрингерами различных длин

Григорян Э. Х.[1]**, Оганисян Г. В.**[2]
[1]*Ереван, Институт механики НАН Республики Армения*
[2]*Ереванский государственный университет*
hovhannisyanhamlet@yandex.ru

Рассматриваются некоторые контактные задачи для упругой составной (кусочно–однородной) бесконечной пластины, состоящей из двух, сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы, полубесконечных пластин с различными упругими характеристиками. Предполагается, что кусочно–однородная бесконечная пластина на своей верхней поверхности усилена стрингерами разных длин и конфигураций. Контактирующая пара (пластина–стрингер) деформируется сосредоточенными силами, приложенными к стрингерам и одновременно горизонтальнимы растягивающими напряжениями постоянной интенсивности, приложенными на бесконечности составной (кусочно–однородной) пластины. Стрингеры расположены либо перпендикулярно, либо параллельно линии разнородности полубесконечных пластин. Некоторые из представленных задач решаются при учете материала склеивания стрингеров к пластине.

В рассматриваемых контактных задачах относительно стрингеров принимается модель одноосного напряженного состояния в сочетании с моделью контакта по линии, т.е. считается, что распределение интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средних линий контактных участков и предполагается, что стрингеры не сопротивляются изгибу. Относительно упругой составной (кусочно–однородной) бесконечной пластины считается справедливой модель обобщенного плоского напряженного состояния, вследствие чего она деформируется как плоскость. В контактных задачах, где учитывается материал склеивания, предполагается, что во время деформации она находится в состоянии чистого сдвига.

Задачи сформулированы в виде системы сингулярных интегральных уравнений, ядра которых состоят из сингулярной и регулярной частей. В случае, когда стрингер бесконечен, посредством обобщенного интегрального преобразования Фурье решение задач сводятся к системе функциональных уравнений относительно трансформантов Фурье искомых функций, а в случае, когда стрингер конечен — к квази вполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Получены замкнутые решения некоторых задач в интегральной форме. Определены тангенциальные контактные напряжения и нормальные (осевые) напряжения, возникающие в стрингерах. Получены также асимптотические формулы, описывающие поведение напряжений вблизи и вдали от точек приложения сосредоточенных сил.

Основными математическими методами решения рассматриваемых задач являются аппарат обобщенных функций и их обобщенного преобразования Фурье, метод факторизации, аппарат ортогональных многочленов Чебышева.

Биомеханическое моделирование хирургического лечения острого коронарного синдрома

Гришина О. А., Кириллова И. В.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
lelik19s@rambler.ru

Наиболее распространенной формой болезней системы кровообращения являются ишемическая болезнь сердца (ИБС), в частности — острый коронарный синдром (ОКС). Одним из исходов ОКС является инфаркт миокарда. Уровень летальности, масштабы инвалидизации и временной нетрудоспособности при ИБС, представляют не только важную медицинскую, но и серьезную социально-экономическую проблему. Действенным способом лечения ОКС является коронарное шунтирование. Ранняя тромботическая окклюзия при коронарном шунтировании в основном обусловлена кровотоком, не соответствующим норме, в области дистального анастомоза, что вызвано малым диаметром принимающей артерии, которая часто стенозирована атеросклеротическим поражением. Другие факторы, вызывающие острую окклюзию шунта включают компрессию зоны анастомоза атеросклеротической бляшкой, неоптимальный выбор места наложения анастомоза, расслоение стенки кондуита или коронарной артерии (КА) в области анастомоза, натяжение или искривление кондуита нерациональной длины для выбранного маршрута шунтирования.

Создана модель коронарных артерий сердца человека, которая позволяет разработать биомеханическое обоснование выбора методики рационального хирургического вмешательства по восстановлению миокардиального кровоснабжения. Биомеханическая модель позволяет смоделировать на предоперационной стадии коронарный кровоток до шунтирования и после его проведения, а также выбрать рациональную методику проведения коронарного шунтирования.

Модель коронарных артерий позволила определить гемодинамику с учетом напряженно-деформированного состояния стенки КА и кондуита в зависимости от степени поражения коронарного русла, локализации атеросклеротической бляшки, материала и диаметра шунта, угла и зоны вшивания шунта. В результате численного моделирования выявлено: 1) увеличение модуля упругости шунта вызывает критические напряжения в устье коронарной артерии, а также образование закрученного потока в зоне анастомоза; 2) использование шунта, с механическими свойствами близкими к соответствующим параметрам КА, обеспечивает восстановление кровотока в русле и сохранение рационального напряженно-деформированного состояния стенок шунта и коронарных артерий для дальнейшего их функционирования; 3) применение шунта диаметром превосходящим диаметр принимающей артерии в несколько раз приводит к образованию вихревого потока и возникновению критических напряжений в зоне вшивки шунта; 4) удерживание шунта под углом близким 45° к сосуду позволяет существенно уменьшить риск послеоперационных осложнений, позволяя избежать образования вихревого потока в зоне вшивки шунта.

Нагрев и охлаждение преднапряженного термоупругопластического шара

Дац Е. П.[1], Мурашкин Е. В.[2]
[1]*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*
[2]*Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*
dats@dvo.ru, evmurashkin@gmail.com

Учет упругих свойств материалов в расчетах режимов их интенсивного формоизменения при термомеханической обработке металлов диктуется потребностями современной технологической практики. Ведь именно свойство упругости и связанные с ним обратимые деформации необходимы для целей расчетного прогнозирования итоговой геометрии тел после деформации и итогового распределения в них остаточных напряжений. Поле остаточных напряжений формируется в процессе необратимого деформирования и последующей разгрузке материала. Известно, что возникновение остаточных напряжений вследствие локального теплового воздействия влияет на прочность металлических конструкций. В этом случае процесс упругопластического деформирования может инициироваться нестационарным нагревом материала в отсутствии внешних нагружающих усилий и массовых сил.

В рассматриваемом сообщении проводится анализ влияния процесса повторного нестационарного нагрева и последующего охлаждения материала на изменение полей остаточных напряжений и деформаций, накопленных в результате одного цикла нестационарного „нагрев—охлаждение“ сплошного шара конечных размеров, изготовленного из термоупругопластического материала.

При наличии остаточных деформаций выход на условие пластичности выполняется при более низком градиенте температур, по сравнению с первым циклом «нагрева—охлаждения», область пластического течения не увеличивается в размерах. По окончании второго цикла термомеханического воздействия остаточные деформации совпадут с остаточными деформациями на предыдущем цикле термомеханического воздействия. Тем самым термоупругопластический материал проявляет свойство «приспосабливаемости» к циклическим тепловым воздействиям по типу «нагрев—охлаждение».

Если максимальная температура при повторном нагреве ниже максимальной температуры, достигнутой во время первого нагревания, то будут существовать области, как со старыми накопленными деформациями, так и с новыми. В случае если максимальная температура повторного нагрева выше, то изменяются лишь размеры области с накопленными остаточными деформациями. По результатам расчетов построены поля остаточных напряжений и деформаций, вычислены размеры зон пластического и повторного пластического течения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33064-мол_а_вед «Развитие моделей и методов механики необратимого деформирования для описания процессов формоизменения материалов с нелинейными теплофизическими и реологическими свойствами»).

Химическое сродство и кинетика фронта химической реакции в деформируемом материале: одномерный случай

Демидов И. В.[1], **Фрейдин А. Б.**[1,2,3]
[1]*Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*
[2]*Санкт-Петербургский государственный университет*
[3]*Санкт-Петербургский политехнический университет*
dvsmallville@gmail.com, alexander.freidin@gmail.com

В данной работе на примере одномерной постановки изучается влияние механических напряжений на скорость химической реакции, протекающей между газовой и твердой компонентами. Реакция сосредоточена на фронте реакции, который представляет собой подвижную границу раздела между деформируемыми твердыми исходной компонентой и продуктом реакции, и поддерживается диффузией газовой компоненты через образовавшийся материал. В результате использования балансов массы, импульса и энергии и второго закона термодинамики, записанных в одномерном случае для открытой системы «деформируемое тело произвольной реологии — диффундирующий газ», получено выражение для производства энтропии на фронте реакции и затем для химического сродства, которым определяется скорость химической реакции и, следовательно, скорость фронта реакции. Показано, что учет сил инерции приводит к появлению в химическом сродстве слагаемых, отражающих зависимость химического сродства не только от напряжений и деформаций, как в квазистатическом случае, но и от скоростей твердых и газообразной компонент, а также от скорости фронта химической реакции. Сформулировано кинетическое уравнение, определяющее скорость фронта в зависимости от химического сродства. После определения равновесной концентрации газовой компоненты как концентрации, при которой химическое сродство равно нулю, кинетическое уравнение переформулировано в терминах текущей концентрации газовой компоненты на фронте реакции, которая находится и решения задачи диффузии, и зависящей от напряжения равновесной концентрации. Полученные соотношения используются при решении простейших модельных задач для случаев упругих и неупругих твердых компонент при разных видах нагружения. В частности, исследовано распространение фронта химической реакции в упругом и вязко-упругом стержнях при заданных на концах стержня напряжениях или перемещениях при стационарном и циклическом нагружении. Исследован запирающий эффект: блокирование реакции напряжениями, а также влияние знака напряжений (растяжение/сжатие) и вязкости материалов на кинетику фронта реакции. Полученные результаты позволяют понять, как вид нагружения, реология материала и деформации, порождаемые химической реакцией, влияют на протекание химической реакции, что, в свою очередь может быть учтено при постановке и решении трехмерных задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 13-08-00553) и Программ фундаментальных исследований Президиума Российской академии наук и Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.

Исследование состояния поверхности подложек из сапфира с помощью поверхностных акустических волн

Днепровский В. Г.[1], Карапетьян Г. Я.[1], Зорин Д. А.[2]
[1]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
gkarapetyan@sfedu.ru

Сапфир при комнатных температурах является одним из лучших диэлектриков. Наличие дефектов и повреждений оказывает решающее влияние на качество кристаллов, нашедших широкое применение в высокотемпературной оптике и микроэлектронике. Неразрушающие методы контроля и исследования дефектности и внутренних напряжений изделий из сапфира пока еще применяются недостаточно. Привлекательность применения ПАВ для решения задач неразрушающего контроля обусловлена следующими факторами: зарождение трещиноподобных дефектов, химическое, коррозионное и абразивное разрушение происходит чаще всего в поверхностных и приповерхностных слоях объектов; распространение ПАВ в поверхностном слое толщиной несколько миллиметров позволяет выявлять подповерхностные дефекты порядка микрометров. Научная новизна поставленной задачи заключается в способе опроса преобразователей излучающих и принимающих ПАВ с помощью измерения частотной характеристики параметра S11 с дальнейшим Фурье преобразованием этой зависимости для получения временных зависимостей, а также в способе возбуждения ПАВ в исследуемом образце с помощью пьезоэлектрического звукопровода со встречно-штыревым преобразователем (ВШП) через тонкий слой жидкости между пьезоподложкой и поверхностью исследуемого образца. Были проведены исследования шлифованного кристалла сапфира диаметром 60 мм и толщиной 5 мм, а также полированного кристалла сапфира прямоугольной формы размерами $3{\times}12$ см. ПАВ возбуждались с помощью клинообразных преобразователе на низких частотах (1,8–2 МГц). Причем для кристалла сапфира угол клина равнялся 30°. В качестве измерителя частотных характеристик использовался прибор «Обзор-103». Зондирующий электромагнитный импульс с линейной частотной модуляцией от этого прибора подается на клиновидный преобразователь, возбуждающий ПАВ в алюминиевом профиле толщиной 3мм и шириной 15 см, на котором имеются дефекты, отражающие ПАВ. Измерения производится в диапазоне частот 1,8–2,3 МГц. В кристаллах сапфира дефектов в этом диапазоне частот выявлено не было, что говорит о хорошей обработке кристаллов в процессе их шлифовки и полировки. В диапазоне частот 90–93 МГц поиск дефектов на поверхности кристалла производилось при возбуждении ПАВ с помощью однонаправленного ВШП с внутренними отражателями, расположенного на пьезоподложке из ниобата лития YX/128° среза через тонкий слой жидкости (спирт, вода). Это позволяет возбуждать ПАВ с длиной 10–12 мкм для выявления мелких дефектов в исследуемом образце.

Вычисление бифуркационных кривых для стационарной задачи конвекции Рэлея–Бенара–Кармана

Долгих Т. Ф.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
doltaf12@gmail.com

Исследования стационарных режимов течения вязкой жидкости в различных областях при наличии дополнительных факторов, таких как вращение и подогрев, имеет важное значение как в теории (разнообразные бифуркации течения, пересечение нейтральных кривых и т.д.), так и на практике (например, при проектирование различных устройств, содержащих вращающиеся полости, заполненные жидкостью, при наличии температурных воздействий). Поэтому создание новых математических моделей и эффективных методов расчётов позволят получить дополнительную информацию, без которой невозможно развивать методики экспериментов и технологии улучшения современных приборов.

Задача исследования вращательных режимов движения жидкости между дисками известна как *задача Кармана*, а задача о тепловой гравитационной конвекции в цилиндрической области — как *задача Рэлея–Бенара–Тейлора*. Совокупность же этих двух задач (вращение и дополнительный подогрев цилиндрической области), которую называют *задачей Рэлея–Бенара–Кармана*, — практически не изучена. Модели для такой задачи не построены, а численные исследования подобных задач являются крайне ограниченными. По отдельности вращение и подогрев приводит к возникновению сложных пространственно–временных структур течений жидкости. Изучение совместного действия вращения и подогрева позволят получить крайне важную информацию о сложных течениях жидкости.

В работе (Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Расчет стационарных режимов конвекции Рэлея–Бенара–Кармана // Труды XVI Международной конференции «Современные проблемы МСС», Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2012. С. 99–103) был проведён расчёт для задачи о конвекции в цилиндре с непроницаемыми границами, вращающимися в противоположные стороны и с заданной на них разностью температур. При этом отношение высоты цилиндра к радиусу его основания полагалось равным единице. Использовался непосредственный метод расчёта — метод конечных элементов в сочетании с методом Ньютона. Такой способ решения позволил определить устойчивые и неустойчивые стационарные режимы течения жидкости для поставленной задачи. Решение осуществлялось с помощью пакета конечных элементов FreeFem++: после приведения исходной задачи к вариационной форме, на квадратной сетке 30×30 скорость и температура аппроксимировались квадратичными конечными элементами, а давление — линейными, при относительной погрешности вычислений равной 10^{-9}.

В данной работе рассмотрена аналогичная задача и использован модифицированный алгоритм решения. При заданных числах Рэлея исследовано качественное изменением режимов течения жидкости при конвекции Рэлея–Бенара–Кармана в случае, когда для аппроксимации давления, скорости и температуры использовались различные конечные элементы и различные размеры сетки при относительной погрешности вычислений не превышающей 10^{-9}.

Вывод пружинных граничных условий для неидеального контакта разнородных изотропных упругих материалов (трёхмерный случай)

Дорошенко О. В., Голуб М. В.
Краснодар, Институт математики, механики и информатики КубГУ
m_golub@inbox.ru, oldorosh@mail.ru

Композитные материалы в настоящий момент широко используются в самых разных отраслях вследствие лучших по сравнению однородными материалами свойств, что достигается комбинацией различных материалов. При неразрушающем контроле конструкций нередко используют упругие волны, по амплитудам которых получают информацию о состоянии структуры. Наличие интерфейсов не только усложняет волновую картину, но и увеличивает риск образования внутренних дефектов. Соответственно, для идентификации дефектов с приемлемой точностью методами неразрушающего контроля и мониторинга структур необходимы эффективные математические и компьютерные модели, описывающие колебания повреждённых конструкций при распространении волн. Начиная со второй половины XX века теоретически и экспериментально стали активно исследоваться задачи распространения упругих волн через интерфейсы с повреждениями, были рассмотрены различные варианты распределения и ориентации микротрещин. Несколько позднее были созданы модели для описания повреждённых или неидеальных интерфейсов, которые во многом опираются на подходы, разработанные для случая идеального контакта: пружинные граничные условия (ПГУ) или замена повреждённой зоны вязкоупругим тонким слоем со свойствами, определяемыми микроструктурой зоны неидеального контакта. Такого рода повреждения моделируются как набор трещин или как распределение пятен контакта между свободными от напряжений поверхностями. Выведенные ранее ПГУ с явно выраженными константами позволяют эффективно и просто описывать широкий класс повреждений по степени повреждённости и упругим свойствам окружающих материалов в плоском случае. В трёхмерном случае значения для ПГУ были получены только для случая контакта одинаковых материалов, настоящая работа расширяет границы применимости на случай различных изотропных материалов, используя подход Бострёма–Викхема.

При выводе значений для матрицы жесткости в ПГУ используется решение задачи о рассеянии плоских упругих волн на круглой интерфейсной трещине. Плотность распределения трещин задаётся как отношение повреждённой части или суммарной площади зон неидеального контакта к общей рассматриваемой площади. При относительно малых размерах трещин или низких частотах строится асимптотическое решение, дающее простой вид матрицы жесткости. Взаимодействием трещин можно пренебречь, полное рассеянное волновое поле описывается путём усреднения по ансамблю. Приравнивая коэффициенты прохождения для распределения трещин и для ПГУ определяются диагональные элементы квадратной матрицы жесткости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-33011).

Об определении внутреннего предварительного напряженного состояния в цилиндре при наличии и отсутствии пластической зоны

Дударев В. В.[1,2]**, Мнухин Р. М.**[1]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
dudarev_vv@mail.ru

В настоящее время тонкостенные трубы продолжают широко применяться при проектировании магистральных трубопроводов. При этом важным аспектом во время эксплуатации таких сооружений является осуществление оперативного мониторинга напряженно-деформированного состояния как всего объекта, так и его отдельных элементов. Определяющую роль в распределении напряженного состояния играет внутренне давление, создаваемое для транспортировки газа или жидкости. В силу специфики режимов эксплуатации магистральных трубопроводов наиболее эффективным и безопасным способом диагностики внутреннего давления является неразрушающий метод акустического зондирования. При реализации такого подхода предлагается по данным об изменениях значений акустических характеристик объекта восстанавливать закон изменения исследуемой величины. В рамках описанной проблемы рассматривается задача об определении внутреннего давления по данным об изменении амплитудно-частотных характеристик трубы, находящейся в режиме радиальных колебаний.

Напряженное состояние, создаваемое внутренним давлением, описывается с помощью тензора предварительного напряженного состояния (ПНС) в рамках модели Е. Треффтца. Колебания трубы вызываются периодической нагрузкой, приложенной на внешней границе. На внутренней границе действует недоступное для наблюдения внутреннее давление. В рамках плоской постановки в полярной системе координат выписаны уравнения колебаний, полученные с учетом выполнения условия равновесия для компонент тензора ПНС. В зависимости от уровня внутреннего давления рассмотрено два случая напряженного состояния: при наличии и отсутствии зоны пластичности. Определение значения внутреннего давления, при котором происходит возникновение пластической зоны, получено из решения известного трансцендентного уравнения теории пластичности. Также для упрощения расчетов выведено аналитическое приближенное уравнение для малых зон пластичности. Проведенный сравнительный анализ показал приемлемую точность полученных значений. Выявлена зависимость значений первых двух резонансных частот колебаний от величины внутреннего давления. Этот факт положен в основу реконструкции ПНС. При этом стоит отметить, что увеличение значения внутреннего давления соответствует увеличению значения первой резонансной частоты и наоборот уменьшению значения второй частоты. На основе анализа форм колебаний трубы при наличии и отсутствии ПНС выведены формулы для определения уровня давления по изменению значений собственной частоты. Проведена серия вычислительных экспериментов, обсуждены полученные результаты.

Авторы благодарят Ватульяна А. О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00196, 14-01-31393).

Исследование математической модели разделения смеси веществ методом капиллярного зонального электрофореза

Елаева М. С.
Москва, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
mselaeva@mail.ru

Рассматривается математическая модель разделения смеси веществ методом капиллярного зонального электрофореза. Процесс, протекающий в капилляре, моделируется пространственно одномерной бездиффузионной моделью, которая представляет собой систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка с начальными данными при $t = 0$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_k u_k}{1+s}\right) = 0, \quad s = \sum_{i=1}^{n} u_i, \quad u_i\big|_{t=0} = u_i^0 \mathcal{H}(x), \quad \mathcal{H}(x) = \frac{1+\operatorname{th}\beta x}{2}.$$

Задача приводится к инвариантам Римана

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + R_i R_1 R_2 \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0, \quad R_i\big|_{t=0} = \mathcal{R}_i(x), \quad i = 1, 2,$$

где $\mathcal{R}_1(x)$, $\mathcal{R}_2(x)$ — гладкие функции, определяемые корнями уравнения,

$$(1 + s_0\mathcal{H}(x))\mathcal{R}^2 - (r_0\mathcal{H}(x) + (\mu_1 + \mu_2))\mathcal{R} + \mu_1\mu_2 = 0,$$

$$s_0 = u_1^0 + u_2^0, \quad r_0 = u_1^0\mu_2 + u_2^0\mu_1.$$

С помощью обобщенного метода годографа получено точное решение задачи в форме нелинейной системы алгебраических уравнений

$$x - \lambda_i t = \lambda_i \frac{\partial H}{\partial R_i}, \quad \lambda_i = R_i R_1 R_2, \quad H(R_1, R_2) = \frac{A(R_1) - A(R_2)}{R_2 - R_1},$$

$$A(R) = \frac{s_0 R - r_0}{2\beta\mu_1\mu_2}\left\{\mathcal{H}(R)\ln\mathcal{H}(R) + (1 - \mathcal{H}(R))\ln(1 - \mathcal{H}(R))\right\}.$$

Одной из важных особенностей исходной системы квазилинейных уравнений является то, что она в зависимости от решения, в частности, от начальных данных, может иметь как гиперболический тип, так и эллиптический.

Значительное внимание в работе уделяется исследованию начальных данных $(u_1^0, u_2^0) = ((\mu_1 - \mu_2)/\mu_2, (\mu_2 - \mu_1)/\mu_1)$, при которых тип системы — эллиптический. Для инвариантов Римана вводится замена переменных $R_{1,2} = c(x,t) \mp \sqrt{\theta(x,t)}$, позволяющая следить за изменением типа системы в процессе эволюции решения. При $\theta > 0$ имеем систему гиперболическоого типа и вещественные инварианты Римана, а при $\theta < 0$ система имеет эллиптический тип и комплексно сопряженные инварианты Римана. Алгебраические соотношения метода годографа преобразуются к виду

$$H_c + 2cH_\theta = -2t, \; -x = (c^2 - \theta)^2 H_\theta, \; H = \frac{A(c - \sqrt{\theta}) - A(c + \sqrt{\theta})}{2\sqrt{\theta}},$$

позволяющему реализовать достаточно эффективный численный способ решения. Приведены результаты вычислительного эксперимента, которые, в частности, показывают, что в некоторый момент времени происходит «опрокидывание» профиля движущейся волны.

Выпучивание двухслойной круглой плиты с предварительно напряженным слоем

Еремеев В. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
er.vadim@gmail.com

Теория устойчивости упругих систем является одной из важнейших проблем механики деформируемого твердого тела. Первой решенной задачей из этой области является знаменитая эластика Эйлера — задача о потере устойчивости прямолинейного упругого стержня, сжатого продольной силой. Эта задача решена Леонардом Эйлером в 1774 году. Многочисленные исследования устойчивости упругих систем в основном проводятся в рамках одномерных и двумерных теорий стержней, балок, пластин и оболочек. Вместе с тем в ряде случаев анализ потери устойчивости с использованием этих теорий невозможен или существенно затруднен. В этих случаях необходимо привлекать методы пространственной нелинейной теории упругости. К числу таких случаев можно отнести, например, следующие:

- Потеря устойчивости эластомерных (резиноподобных) элементов конструкций, для которых существенны большие деформации, а также физическая нелинейность.
- Потеря устойчивости при растяжении, часто связанная с образованием шейки у цилиндрических образцов.
- Потеря устойчивости при наличии внутренних начальных (предварительных) напряжений, существующих при отсутствии внешних нагрузок и многие другие.

Интерес к учету начальных напряжений в многослойных пластинках связан с существованием технологических начальных напряжений, которые возникают при изготовлении таких конструкций.

В данной работе в рамках нелинейной теории упругости рассмотрена задача о потере устойчивости равномерно сжатой двухслойной круглой пластинки, нижний слой которой предварительно сжат или растянут. В качестве уравнения состояния использована модель несжимаемого неогукова материала (модель Трелоара). Предполагается, что нижний слой подвернут радиальному растяжению или сжатию, так что в нем существуют начальные деформации и напряжения. Далее двухслойная пластинка подвергается равномерному сжатию. Устойчивость пластинки изучается на основе нелинейной трехмерной теории упругости статическим методом Эйлера, состоящим в определении параметров деформации, при которых линеаризованная краевая задача допускает нетривиальные решения. Составлены трехмерные линеаризованные уравнения равновесия для каждого слоя. Методом разделения переменных построены решения этих уравнений. Получено уравнение для определения критических деформаций. Построен график зависимости критического усилия от начальной деформации. Проведен анализ зависимости критического усилия от различной жесткости предварительно напряженного слоя.

Информативные параметры для идентификации напряженных состояний сложных конструкций

Есипов Ю. В.[1], **Саулина Е. В.**[2], **Черпаков А. В.**[3]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
[2]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
[3]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
alex837@yandex.ru

В рамках решения проблемы неразрушающего контроля «конструкций в целом» разработан метод тестового анализа и различения степени напряженности состояния конструкции по серийным деформационным откликам, как прототип способа ранней диагностики. В результате апробации этого метода были получены информативные параметры для идентификации напряженных состояний, как сварных периодических макетов, так и их составных рамных элементов. При этом экспериментально установлено, что результаты серийного деформационного тестирования состояний вида «исходное созданное напряженное состояние – термически разгруженное состояние» цельно вырезанных и сварных рамных элементов удовлетворительно совпали с результатами идентификации аналогичных состояний, которые были получены с помощью измерительных средств метода «магнитной памяти металла».

Для решения поставленной проблемы были разработаны метод тестового анализа целостной конструкции и экспериментальные способы построения диагностических признаков. Метод тестового анализа напряженности макетов целостных конструкций включает ударное, сдвиговое или гармоническое возбуждение объекта и регистрацию динамических деформационных откликов конструкции на естественные и тестовые воздействия с помощью тонкопленочных сегнетоэлектрических датчиков. Экспериментальные способы получения диагностических признаков основаны на изучении и выявлении свойств линейных и нелинейных областей Фурье образов деформационных откликов с целью идентификации и различения таких состояний макетов конструкции как «напряженное — ненапряженное» и «неповрежденное — не упруго поврежденное».

Путем применения и апробации, как метода, так и экспериментальных способов были получены следующие новые теоретические и практические результаты. Разработаны и апробированы: а) методика тестирования при линейном увеличении параметров воздействия; б) алгоритм обработки временных форм деформации с получением Фурье образов деформационных откликов и в) информационно-измерительный тракт регистрации и обработки деформационных откликов макетов и элементов конструкции. Впервые изучены как условия появления, так и параметры линейных и нелинейных областей Фурье образов деформационных откликов макета сложной конструкции.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 14–08–00546-а).

Метод конечных элементов в динамических задачах микрополярных упругих тонких балок

Жамакочян К. А.[1]**, Саркисян С. О.**[1,2]
[1]*Гюмрийский государственный педогогический институт*
[2]*Ереван, НАН Армении*
knarikzhamakochyan@mail.ru, s_sargsyan@yahoo.com

Метод конечных элементов (МКЭ) является в настоящее время наиболее универсальным и практически используемым методом решения различных трудных прикладных граничных задач, в частности, для динамических задач упругих тонких балок, пластин и оболочек в классической подстановке. Разработка и применение МКЭ для решения различных статических и динамических задач микрполярных упругих тонких балок, пластин и оболочек является актуальной задачей. В данной работе рассматривается задачу о свободных изгибных колебаниях микрополярной упругой тонкой балки, когда на концах ее задаются различные граничные условия. Будем использовать основные динамические уравнения и вариационный принцип для прикладной теории микрополярных упругих тонких балок. Рассматриваемая колебательная система, имеющая бесконечное число степеней свободы и собственных частот, заменяется при использовании метода конечного элемента на эквивалентную модель, имеющую массы сосредоточенные в узлах, и, таким образом, обладающую теперь конечным числом степеней свободы и собственных частот. Вычисляются виртуальная работа распределённых сил и моментов инерции (по длине конечного элемента) и виртуальная работа эквивалентных сил и моментов инерции для сосредоточенных масс в узлах конечного элемента. В результате определяется матрица масс конечного элемента. Используя указанный вариационный принцип, приходим к уравнению определяющей частоты собственных колебаний. Апробация разработанного конечно-элементного алгоритма проводилась на примере микрополярной балки, когда на ее концах имеем шарнирное опирание (это задача имеет аналитическое решение). Численные эксперименты показали эффективность разработанного конечного-элементного алгоритма. Разработанный алгоритм был использован для решения и анализа задач собственных колебаний микрополярных упругих тонких балок с различными граничными условиями, определение аналитических решений которых (в конечном виде) не представляются возможным. Определены собственные частоты и формы собственных колебаний микрополярных упругих тонких балок: а) когда один конец балки жёстко закреплён, а другой конец свободный, б) когда концы обе, жёстко защемлены. Полученные численные результаты анализируются и с точки зрения выявления микрополярных свойств материала балки на частоты собственных колебаний. В частности, показана, что среди частот собственных колебаний имеется собственная частота балки, которая не зависит от геометрических размеров балки, а зависит только от физических и инерционных свойств микрополярного материала балки.

Идентификация свойств слоистых сред с использованием нейросетевых технологий

Жигульская Ю. И., Ляпин А. А.
Ростовский государственный строительный университет
lyapin.rnd@yandex.ru

Рассматривается проблема идентификации механических свойств слоистых сред на примере конструкций нежестких дорожных одежд на основе экспериментальных данных во временной и частотной областях. Основным вариантом является определение модулей упругости слоев и основания при заданных толщинах. Актуальность задачи связана с потребностями оценки состояния дорожных покрытий как на стадии производства работ и в входе их эксплуатации, так и при прогнозировании эксплуатационной надежности. Источником информации служит отклик слоистой конструкции на эталонное ударное воздействие типа «падающий груз». Регистрация нестационарных сигналов осуществляется системой поверхностных акселерометров в составе 12-канального виброизмерительного комплекса. Расстановка датчиков определяется их оптимальным положением по чувствительности регистрируемой характеристики к изменению свойств отдельных компонентов слоистой структуры. Данный анализ является предварительным и осуществляется на основе математической модели многослойного полупространства. Преобразование экспериментальных данных во временной и частотной областях проводится с применением алгоритмов быстрого преобразования Фурье и механизмов сглаживания и фильтрации. Для решения задачи идентификации используется трехслойная нейронная сеть с обучением по алгоритму обратного распространения. Входной слой нейронов соответствует показаниям датчиков, выходной слой оценивает механические свойства слоев среды. При анализе сигналов во временной области в качестве входного сигнала используется максимальное значение амплитуды перемещений точки поверхности конструкции на заданном промежутке времени (максимальный динамический прогиб). При обучении сети применяется решение пространственной задачи динамической теории упругости на основе интегральных преобразований. Базовой выбрана задача о возбуждении осесимметричных установившихся колебаний в многослойном полупространстве. Решение соответствующих уравнений движения в перемещениях в локальной системе координат в пределах каждого слоя разыскивается в виде двух составляющих, соответствующих решениям уравнений для полупространств с едиными физическими параметрами, пересечение которых определяет требуемый слой. Данный подход позволяет выделить при анализе волновых полей отдельные составляющие, соответствующие отраженным от границ слоя волнам и правильно идентифицировать механические характеристики смежных слоев. Переход от стационарного режима к нестационарному осуществляется одним из вариантов дискретного гармонического анализа. В отдельных случаях используются асимптотические методы вычисления интегральных представлений волновых полей.

Редуцированные 3D модели протяженных безнапорных русловых потоков

Жиляев И. В.[1], **Надолин К. А.**[2]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
zhilyaev@mail.com, nadolin@math.sfedu.ru

Для расчетов гидрологических характеристик водотоков применяются математические модели разных типов. Наиболее точными являются трехмерные модели, основанные на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений. Однако на практике получить высокую точность моделирования, которую могут обеспечить такие модели, не удается, поскольку данные реальных гидрологических измерений не имеют требуемой точности задания гидрофизических параметров, а также начальных и граничных условий для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе трехмерных математических моделей усугубляется геометрией расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении. Вышесказанное объясняет интерес к двумерным и редуцированным трехмерным математическим моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных.

В докладе обсуждается подход, позволяющий конструировать математические модели русловых потоков пониженной размерности. В его основу положен тот факт, что русловые потоки характеризуются относительно малой глубиной течения по сравнению с его шириной, а также значительной протяженностью. Поэтому в основу упрощения модели и понижения ее размерности могут быть положены геометрические параметры области течения. Например, отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла, которое колеблется в пределах от 0.1 до 0.005, может рассматриваться как малый параметр.

Другой важной особенностью всех естественных водотоков является турбулентность. Поэтому любая, даже самая упрощенная математическая модель должна учитывать турбулентность течения. В докладе предлагается, в силу ряда причин (низкая точность измерений, многообразие влияющих факторов, недостаточность экспериментальных данных и т. п.), ограничиться простейшим способом учета турбулентности потока путем замыкания уравнений Рейнольдса для несжимаемой жидкости на основе гипотезы Буссинеска.

Заметим, что получаемые модельные уравнения описывают безнапорное течение в русловых потоках как пространственно трехмерный процесс, при этом они существенно проще полных трехмерных уравнений, а в некоторых случаях — и двумерных. В отличие от распространенных осредненных моделей, предлагаемые модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности течения.

Метод годографа для решения задачи о движении двухкомпонентной смеси под действием электрического поля

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
zhuk@math.sfedu.ru, shir@math.sfedu.ru

Исследовано решение системы двух квазилинейных гиперболических уравнений, описывающих движение веществ с концентрациями u^i и подвижностями μ^i под действием электрического поля $E = E(u^1, u^2)$

$$u_t^1 + \mu^1\mu^2 \left(\mu^1 u^1 E\right)_x = 0, \quad u_t^2 + \mu^1\mu^2 \left(\mu^2 u^2 E\right)_x = 0, \quad E = (1 + u^1 + u^2)^{-1}.$$

Уравнения приводятся к системе в инвариантах Римана $R^i = R^i(u^1, u^2)$

$$R_t^1 + R^1(R^1R^2)R_x^1 = 0, \quad R_t^2 + R^2(R^1R^2)R_x^2 = 0,$$

для которой рассматривается задача с начальными данными $R^i(x, 0) = R_0^i(x)$.

Решение строится одним из вариантов метода годографа, основанного на том, что исходные уравнения для концентраций имеют форму законов сохранения. Метод годографа — замена роли зависимых и независимых переменных, позволяет искать решение в виде функций $x = x(R^1, R^2)$, $t = t(R^1, R^2)$, которые определяются линейными гиперболическими уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами, т. е. зависящими от R^1, R^2. Строится функция Римана, позволяющая записать решение, зависящее от параметров a и b, которое, например, для величины t имеет вид

$$t(a, b) = \frac{2(b - a)}{(r^1 - r^2)^3} - \frac{r^1 + r^2}{(r^1 - r^2)^3} \int\limits_a^b \frac{R_0^1 + R_0^2}{R_0^1 R_0^2}\, d\tau + \frac{2r^1r^2}{(r^1 - r^2)^3} \int\limits_a^b \frac{1}{R_0^1 R_0^2}\, d\tau,$$

где $r^2 = R_0^2(a)$, $r^1 = R_0^1(b)$. Отметим, что функция $x(a, b)$, в частности, строится и с учетом инвариантности уравнений относительно замен $x \leftrightarrow t$, $R^k \leftrightarrow 1/R^k$.

В простейших случаях для монотонных начальных данных удается получить соотношения $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ и, в конечном итоге, записать решение в форме $R^1 = R_0^1(b(x, t))$, $R^2 = R_0^2(a(x, t))$. Для произвольных начальных данных зависимости вида $a(x, t)$, $b(x, t)$ неоднозначны по пространственной переменной x. В этом случае для получения решений, в том числе и неоднозначных, используются численные методы, позволяющие на плоскости (a, b) построить линии уровня функции $t(a, b)$ (изохроны) и тем самым проследить за поведением начального распределения во времени.

Исследован большой набор различных начальных профилей концентрации — сглаженные кусочно-постоянные, гауссовские, периодические, типа волнового пакета и др. Проведенные вычисления показали, что практически для всех начальных данных с течением времени профили концентраций опрокидываются и возникают ударные волны. Кроме этого, исследована некоторая упрощенная модель, описывающая движение многокомпонентной смеси в случае, когда одна из концентрациий компонент намного превосходит другие.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

Численное исследование нестационарной задачи о поведении многокомпонентных смесей под действием электрического поля

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
zhuk@math.sfedu.ru, shir@math.sfedu.ru

Рассмотрена задача о формировании с течением времени под действием внешнего электрического поля пространственно неоднородной структуры в многокомпонентной химически активной жидкой смеси. Методом конечных элементов в двумерной области решается начально-краевая задача для уравнений

$$\partial_t a_k + \operatorname{div} \boldsymbol{i}_k = 0, \quad \boldsymbol{i}_k = -\varepsilon\mu_k \nabla a_k + \mu_k\theta_k(\psi)a_k\boldsymbol{E}, \quad \sum_{k=1}^{n}\theta_k(\psi)a_k = 0,$$
$$\boldsymbol{j} = \sum_{k=1}^{n}\bigl(-\varepsilon\mu_k\nabla(\theta_k(\psi)a_k) + \mu_k\sigma_k(\psi)a_k\boldsymbol{E}\bigr), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi,$$

где a_k — концентрации компонент, $\boldsymbol{i}_k$ — потоки концентрации, $\boldsymbol{E}$, φ — напряженность и потенциал электрического поля, $\boldsymbol{j}$ — плотность электрического тока, ψ — функция кислотности (связана с концентрацией ионов водорода), $\mu_k > 0$ — подвижности компонент, ε — коэффициент диффузии.

Определяющие соотношения для кинетических коэффициентов переноса, задаваемые протекающими в смеси мгновенными химическими реакциями, имеют вид $\theta_k(\psi) = \varphi'_k(\psi)/\varphi_k(\psi)$, $\sigma_k(\psi) = \varphi''_k(\psi)/\varphi_k(\psi)$, $\varphi_k(\psi) = \delta_k + \cosh(\psi - \psi_k)$, где ψ_k — значения функции ψ, при которых подвижность обращается в ноль, δ_k — отношение констант диссоциации веществ.

Вычислительный эксперимент показал, что для краевых условий, соответствующих непроницаемой для концентраций области, часть границы которой изолирована, а на оставшейся части задан электрический потенциал, из однородного начального распределения концентраций формируется распределение, сильно стратифицированное по пространству. Основное внимание уделяется моделированию процесса разделения смеси на отдельные компоненты для ситуации, когда часть компонент смеси с большой концентрацией создают некоторую фоновую среду, в которой происходит разделение оставшихся компонент с малой концентрацией. Такой процесс известен, как метод изоэлектрофокусирования в естественном pH-градиенте. Приведены результаты для пяти- и десятикомпонентных смесей, рассмотрены два режима процесса — режим с постоянным током и режим с постоянным напряжением.

Выбранные определяющие соотношения для функций $\theta_k(\psi)$, $\sigma_k(\psi)$ соответствуют классическим смесям аминокислот с одной аминогруппой NH_3^+ и одной карбоксильной группой COOH^-. Помимо таких смесей исследовано поведение смесей аминокислот с большим количеством заряженных групп. Показано, что начиная с некоторых моментов времени и до стационарного состояния качественное различие в поведении такой и классической смесей практически отсутствует, хотя на начальных этапах эволюции поведение смесей существенно различается.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

Влияние локальных нарушений условия электронейтральности на динамику формирования pH-градиента в растворе

Жукова Н. М.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
zhuk_nata@mail.ru

Для многокомпонентной смеси амфолитов — веществ, имеющих как основные, так и кислотные свойства, численными методами исследована задача о формировании с течением времени pH-градиента под действием внешнего электрического поля. В простейшем варианте задача сводится к решению уравнений диффузии-переноса совместно с алгебраическим уравнением электронейтральности, определяющим pH раствора (концентрацию ионов водорода). Подвижности компонент в электрическом поле задаются протекающими химическими реакциями и зависят от pH раствора.

В работе основное внимание уделяется более сложным по сравнению с простейшим вариантом и более реальным моделям процесса, когда приходится учитывать дополнительные эффекты: различие между изоэлектрическими и изоионными точками (в таких точках, соответственно, подвижность компоненты и заряд компоненты равен нулю), отсутствие электронейтральности, вклад в проводимость ионов воды. Результаты вычислительных экспериментов показали, что на заключительных этапах процесса, близких к стационарному состоянию, при формировании pH-градиента происходит сильная пространственная стратификация концентраций компонент. Каждая компонента сосредотачивается в своей пространственной области (зоне), в которой имеет концентрацию, близкую к постоянной. На границах зон происходит почти скачкообразное изменение напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$, что в силу уравнения Пуассона-Больцмана $\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E} = q$ приводит к возникновению достаточно значительной плотности объемного заряда q, даже при малой диэлектрической проводимости ε. Таким образом, в окрестности границ зон отсутствует кулоновское экранирование заряда, происходит локальное нарушение стандартных для растворов условия электронейтральности $q = 0$ и уравнения неразрывности плотности электрического тока $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$, взамен которых в модели приходится использовать полную форму закона сохранения: $q_t + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$.

Для вычислений использован метод конечных элементов и свободно распространяемый пакет FreeFem. Представлены результаты расчетов, описывающие динамику процесса формирования распределения компонент, изменения pH-градиента, распределения напряженности электрического поля. Проведен сравнительный анализ результатов для математических моделей различного уровня сложности. Попутно исследовано поведение наиболее типичных характеристик процесса, в частности, функции Кольрауша (некоторого закона сохранения), важных для практического использования изоэлектрофокусирования — метода разделения многокомпонентных смесей на индивидуальные компоненты.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

Численное исследование аналитического решения задачи о действии сосредоточенной силы на изотропное полупространство с упруго закрепленной границей

Залетов В. В.[1], **Залетов С. В.**[2], **Илюхин А. А.**[2]
[1]*Донецк, Институт прикладной математики и механики НАН Украины*
[2]*Таганрогский государственный педагогический институт им. А. П. Чехова*
tanais13@gmail.com, hapines.nelly@gmail.com, aleilyukhin@yandex.ru

Задача Буссинеска о распределении напряжений и перемещений в изотропном полупространстве, к границе которого приложена сосредоточенная сила, является базовой моделью при исследовании прикладных проблем в различных областях науки: в строительной и геотехнической механике, машиноведении, биофизике, инженерной медицине. Этим объясняется регулярное появление в печати научных работ, посвященных тем или иным обобщениям задачи Буссинеска путем усложнения граничных условий, дифференциальных уравнений, упругих свойств материала полупространства и т. д. В докладе исследуется аналог задачи Буссинеска при замене условия, согласно которому граничная плоскость свободна от внешних усилий, условием пропорциональности нормальных напряжений и перемещений в точках поверхности, ограничивающей полупространство. Остальные граничные условия задачи Буссинеска, а именно: на границе полупространства приложена сосредоточенная сила и касательные напряжения на всей граничной плоскости отсутствуют, сохраняются. Таким образом, рассматривается смешанная задача теории упругости для полупространства с упруго закрепленной границей.

В точном аналитическом решении этой смешанной задачи формулы для компонент тензора напряжений, кроме слагаемых, соответствующих решению Буссинеска, содержат несобственные интегралы, зависящие от параметра χ, характеризующего механические свойства полупространства и упругое закрепление его границы. Из формул следует, что подынтегральные функции в несобственных интегралах являются произведениями трёх сомножителей: показательной функции, функции Бесселя первого рода и дробной рациональной функции. При разработке алгоритма численного исследования решения несобственные интегралы, содержащие предварительно выделенную целую часть дробной функции, вычислены и их выражения записаны в виде комбинаций специальных и элементарных функций. Установлена быстрая сходимость входящих в аналитическое решение несобственных интегралов, содержащих остаток дробной функции. Уменьшение времени компьютерных расчетов несобственных интегралов позволило осуществить численные исследования в объёме, достаточном для обоснования закономерностей о распределении напряжений в изотропном полупространстве не только вблизи точки приложения сосредоточенной силы, но и на значительном удалении от неё. Отмечено также, что предложенные алгоритмы позволяют численно изучить влияние параметра χ на напряженно-деформированное состояние упругого полупространства в полном диапазоне изменения параметра от нуля до бесконечности.

Дислокации Сомильяны в нелинейной теории упругости

Зеленина А. А.[1], **Зубов Л. М.**[2]
[1]*Ростовский государственный университет путей сообщения*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
a.zelenina@gmail.com

Дислокациями Сомильяны в теории упругости называют такие состояния тела, которые характеризуются наличием поверхностей разрыва напряжений и деформаций. Примером дислокаций Сомильяны может служить включение в упругой среде, претерпевающее собственную деформацию в результате фазового превращения, термического расширения или других необратимых процессов. Дислокации Сомильяны возникают также при соединении элементов конструкций с натягом, напылении поверхностного слоя и в других технологических процессах. Цель работы состоит в построении ряда точных решений о больших деформациях упругих тел с дислокациями Сомильяны. Для иллюстрации предлагаемого подхода к решению задач о дислокациях Сомильяны рассмотрим известную подстановку, позволяющую свести задачу кручения и растяжения-сжатия полого кругового цилиндра к одномерной краевой задаче

$$R = f(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \lambda z.$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты точек тела в отсчетной конфигурации, R, Φ, Z — цилиндрические координаты в деформированной конфигурации, ψ, λ — постоянные параметры, имеющие смысл угла закручивания и кратности осевого удлинения. Дислокацию Сомильяны получим, если величины ψ и λ будем считать заданными кусочно-постоянными функциями радиальной координаты r. Случай, когда функции $\psi(r)$ и $\lambda(r)$ одновременно претерпевают скачок на цилиндрической поверхности радиуса r_*, можно интерпретировать как задачу кручения и растяжения-сжатия составного цилиндрического стержня, содержащего предварительно растянутое и скрученное центральное цилиндрическое включение. Для изотропного несжимаемого материала общего вида найдено точное решение нелинейной задачи о кручении и растяжении-сжатии упругого цилиндра с дислокацией Сомильяны. Это решение характеризуется тем, что радиальное нормальное напряжение непрерывно во всем теле, в то время как остальные напряжения имеют разрыв на тех поверхностях $r = const$, на которых скачком меняются параметры λ и ψ. Разрывными являются также компоненты тензора деформации и инварианты деформации. С использованием других известных полуобратных решений нелинейной теории упругости и с заменой содержащихся в них постоянных параметров на кусочно-постоянные функции построены точные решения, описывающие сильный изгиб прямоугольного и кривого брусьев с разрывными полями деформаций и напряжений, а также сферически симметричные разрывные решения нелинейной теории упругости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

Квазитвердые состояния микрополярных упругих тел с распределенными дислокациями

Зеленина А. А.[1], **Зубов Л. М.**[2]
[1]*Ростовский государственный университет путей сообщения*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
a.zelenina@gmail.com

Система уравнений статики линейно упругого изотропного микрополярного тела состоит из уравнений равновесия для напряжений

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{M} + \mathbf{T}_\times = 0, \tag{1}$$

определяющих соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \lambda\mathbf{E}\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon} + (\mu+\beta)\boldsymbol{\epsilon} + (\mu-\beta)\boldsymbol{\epsilon}^T, \\ \mathbf{M} &= \nu\mathbf{E}\mathrm{tr}\boldsymbol{\varkappa} + (\gamma+\eta)\boldsymbol{\varkappa} + (\gamma-\eta)\boldsymbol{\varkappa}^T \end{aligned} \tag{2}$$

и геометрических соотношений

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \mathrm{grad}\boldsymbol{\theta}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор силовых напряжений, $\mathbf{M}$ — тензор моментных напряжений, $\boldsymbol{\epsilon}$ — несимметричный тензор метрических деформаций, $\boldsymbol{\varkappa}$ — тензор изгибных деформаций, $\boldsymbol{\theta}$ — векторное поле мироповоротов, $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор плотности дислокаций, $\mathbf{E}$ — единичный тензор; λ, μ, β, ν, γ, η — материальные постоянные.

В докладе изучаются такие состояния микрополярного тела, в которых существуют только моментные напряжения, а силовые напряжения тождественно равны нулю. Эти состояния называются квазитвердыми, поскольку в них согласно (2) отсутствуют метрические деформации, т. е. удлинения и сдвиги материальных волокон. Последнее означает, что каждый элементарный объем среды перемещается как абсолютно твердое тело, причем поле поворотов неоднородно.

Установлено, что квазитвердые состояния невозможны при отсутствии распределенных дислокаций, т. е. при $\boldsymbol{\alpha} \equiv 0$.

Доказано существование тензорного поля дислокаций, обеспечивающего реализацию квазитвердого состояния.

Сформулирована краевая задача определения поля моментных напряжений в квазитвердых состояниях.

Найдены тензорные поля плотности дислокаций, обеспечивающие квазитвердые состояния при изгибе и кручении призматических стержней произвольного поперечного сечения.

Исследована задача о плоской деформации микрополярного тела в условиях квазитвердого состояния.

Решена задача о квазитвердом состоянии полого упругого шара, нагруженного по внешней и внутренней поверхностям равномерно распределенной моментной нагрузкой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00038).

Расчеты сложного упругопластического деформирования металлов по модифицированной модели теории процессов

Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А.
Тверской государственный технический университет
alexeew@bk.ru, vgz@rambler.ru

Проведено численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования металлов по плоским прямолинейным и криволинейным траекториям в векторном пространстве А. А. Ильюшина с использованием определяющих соотношений теории процессов упругопластического деформирования

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = M_1\frac{d\bar{Э}}{d\tau} + M\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\frac{ds}{d\tau}, \quad \frac{d\vartheta_1}{d\tau} = -\frac{ds}{d\tau}\Big(\frac{M_1}{\sigma}\sin\vartheta_1 + \kappa_1\Big).$$

В этих уравнениях за параметр обобщенного времени τ может быть принято естественное время t, длина дуги траектории деформирования s или, например, полярный угол φ точек криволинейных траекторий деформирования. Для конкретизации функционалов пластичности M_1, M использованы универсальные аппроксимации В. Г. Зубчанинова. В качестве закона упрочнения при простом нагружении принимается универсальная диаграмма Одквиста-Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$. При сложном нагружении для описания нырка модуля вектора напряжений σ на диаграмме $\sigma = \sigma(s)$ после излома траектории на угол $\vartheta_1^0 \geqslant 90^\circ$ использованы аппроксимации функционала прослеживания процесса, предложенные В. Г. Зубчаниновым, с экспериментально подбираемыми для них параметрами по соответствующей методике. Также предложен вариант учета кривизны κ_1 траектории в аппроксимации диаграммы прослеживания процесса деформирования на участках постоянной кривизны, то есть $\sigma = \sigma(s, \kappa_1)$.

При заданных начальных условиях и известных значениях компонент $Э_k$ (k=1, 3) вектора деформаций $\bar{Э}$ математически задача сведена к задаче Коши, для численного интегрирования основных уравнений которой и определения компонент $S_k (k = 1, 3)$ вектора напряжений $\bar{\sigma}$ и угла его сближения ϑ_1 с касательной к траектории деформирования использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности в приложении MathWorks Matlab.

Для оценки достоверности расчетов проведено сопоставление численных решений с результатами экспериментальных исследований, проведенных на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ имени А. А. Ильюшина в лаборатории механических испытаний ТвГТУ. Программы испытаний реализововывались при постоянной скорости деформирования в векторном пространстве деформаций $Э_1 - Э_3$ на цилиндрических тонкостенных оболочках из стали 45 с площадкой текучести. Материал образцов в достаточной степени был начально изотропен, что подтверждено базовыми испытаниями при простых пропорциональных нагружениях на траекториях типа «центральный веер».

Проведенные исследования показали, что для рассмотренных классов траекторий деформирования модифицированная математическая модель теории процессов при описании скалярных и векторных свойств материалов дает хорошие результаты, соответствующие экспериментальным данным.

Неустойчивость закрученных течений в зазоре между проницаемыми цилиндрами

Ильин К. И.[1], Моргулис А. Б.[2,3]
[1]*Университет Йорка*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[3]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
morgulisandrey@gmail.com

Говоря об идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости, мы привычно представляем себе консервативную систему, при движении которой сохраняются полная энергия и циркуляции поля скорости вокруг замкнутых материальных контуров. Однако, это верно лишь до тех пор, пока жидкость заключена в непроницаемые для нее границы, или поставлены условия пространственной периодичности. Например, законы сохранения нарушаются, если течение *открыто*, то есть, определенные части границы представляют собой вход и выход потока. В таком случае материальные частицы, входящие в область течения, вносят в нее энергию и вихрь, а уходящие — уносят. В результате включается и накачка, и диссипация энергии, причем механизм последней совершенно отличен от вязкого случая. Таким образом, открытое течение — неконсервативная система (даже при нулевой вязкости), и потому следует ожидать динамических явлений общего положения, таких, например, как установление определенного режима течения со временем, причём предельный режим может быть стационарным или периодическим, или более сложным. Все эти возможности реализуются в динамике течений в прямолинейном канале при весьма простых граничных условиях (Govorukhin, Morgulis, Vladimirov, 2010). В настоящем сообщении область течения представляет собой кольцо. Постановка краевых условий такова: на всей границе задаётся нормальная скорость, дополнительно, на входе потока задается касательная скорость, при этом нормальная скорость задана так, что одна компонента границы представляет вход, а другая — выход потока. При таких условиях всегда существует двухпараметрическое семейство течений, создаваемых точечным вихреисточником, помещённым внутрь S^+. Параметры семейства — поток жидкости сквозь S^+ и циркуляция потока вокруг S^+. В сообщении обсуждаются спектры краевых задач, возникающих при линеаризации уравнений гидродинамики на течении указанного семейства, и приводятся примеры критических значений параметров, при которых имеются ненулевые точки спектра на мнимой оси. Особое внимание к таким критическим значениям обусловлено их связью с возбуждением нелинейных периодических автоколебаний вблизи основного режима (бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа). Обсуждается также поведение асимптотики малого расхода, малой вязкости и некоторые обобщения. Оказывается, уменьшение расхода всегда дестабилизирует. Кроме того, неустойчивость вихреисточника описывает невязкий предел мод неустойчивости для широкого класса закрученных плоских течений.

Бифуркационное поведение решений системы Рэлея с диффузией в случае одной пространственной переменной

Казарников А. В.[1], **Ревина С. В.**[2]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
kazarnikov@gmail.com, revina@math.rsu.ru

Рассматривается система уравнений Рэлея с диффузией:

$$\begin{cases} v_t = \nu v_{xx} + w \\ w_t = \nu w_{xx} - v + \mu w - w^3 \end{cases} \tag{1}$$

где $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$, $x \in [0,1]$, $t > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ — управляющий параметр, $\nu > 0$ — фиксированный параметр, отвечающий за вязкость. Будем предполагать, что на концах отрезка заданы однородные краевые условия первого, второго или третьего рода, а также условия второго рода при дополнительном предположении нулевого среднего.

Данная система является бесконечномерным аналогом (при $\nu = 0$) классического уравнения Рэлея. Она является также частным случаем системы Фитцхью–Нагумо, которая широко известна в качестве примера модели возбудимой среды.

В работе исследуется бифуркационное поведение вторичных периодических по времени решений, ответвляющихся от нулевого равновесия при изменении управляющего параметра μ при различных типах краевых условий.

Найдены критические значения параметра, отвечающие колебательной и монотонной потере устойчивости. Для колебательной потери устойчивости показано, что происходит мягкая потеря устойчивости.

Построены первые члены асимптотики и выведены формулы для общего члена разложения автоколебаний. Для построения вторичного решения применен метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича.

Тригонометрический полином будем называть нечетным (четным), если он содержит лишь нечетные (четные) гармоники, т. е. гармоники вида $e^{(2n+1)i\tau}$ ($e^{2ni\tau}$).

Установлено, что для всех рассматриваемых краевых условий общий член асимптотики представляет собой нечетный тригонометрический полином по времени.

Показано, что в случае, когда на концах отрезка заданы краевые условия Дирихле либо условия Неймана на подпространстве функций с нулевым средним, в выражение для n-го члена асимптотики входят лишь конечные линейные комбинации базисных функций с нечетными индексами не выше n.

Если на концах отрезка заданы смешанные краевые условия, то в выражения n-го члена асимптотики входят лишь конечные линейные комбинации базисных функций с индексами не выше $\dfrac{n+1}{2}$.

Получены явные аналитические представления первых членов асимптотики при различных краевых условиях. При помощи пакета MATLAB проведено численное исследование системы при малых и больших надкритичностях. Результаты проведенных численных экспериментов полностью согласуются с результатами аналитического исследования.

Влияние значений пьезомодулей материала на пьезоэффект в однородных и кусочно-однородных пластинках

Калоеров С. А., Самодуров А. А.
Донецкий национальный университет
andrey-samodurov@yandex.ru

Несмотря на большую практическую потребность исследований влияния «степени пьезоэффекта» на значения напряжений и других характеристик электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) в элементах конструкций с отверстиями и трещинами, до сих пор таких исследований выполнено недостаточно. В различных работах предложены общие подходы решения задач электромагнитоупругости. Разработаны методы решения задач для многосвязных пластинок с отверстиями, трещинами, решены различные частные задачи, проведены численные исследования по выявлению влияния геометрических характеристик сред и физико-механических свойств материалов для случаев, когда учитывается или пренебрегается пьезоэффект. Влияние же значений пьезомодулей на значения основных характеристик до сих пор не исследовано.

В данной статье для многосвязной пластинки изучено влияние значений пьезомодулей ее материала на значения основных характеристик ЭМУС, установлено, при каких значениях этих модулей пьезоэффектом можно пренебречь и когда его необходимо учитывать.

С использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости решен ряд задач для пластинки с конечным числом эллиптических отверстий, трещин или включений. При этом для построения комплексных потенциалов используются конформные отображения, разложения функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера; граничные условия удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов, что приводит к пере-определенной системе линейных алгебраический уравнений. Решение последней системы находится с применением сингулярного разложения. Для задач о пластинке с одним или двумя эллиптическим отверстием или трещинами со свободными или жестко подкрепленными контурами, а также с одним или двумя упругими включениями проведены численные исследования распределения напряжений и других характеристик ЭМУС, с помощью которых установлен ряд закономерностей. При проведении расчетов количество членов в искомых рядах и «коллокакционных точек», в которых удовлетворяются граничные условия, увеличивалось до тех пор, пока граничные условия не удовлетворялись с высокой степенью точности. С помощью численных исследований выявлено, при каких значениях пьезомодулей пьезоэффект значителен и когда им можно пренебречь, как влияет «степень анизотропии» материала пластинки на значения основных характеристик ЭМУС, при каких значениях пьезомодулей включений, пьезосвойствами этих включений можно пренебречь, как влияет расстояние между отверстиями, трещинами и включениями на значения основных характеристик ЭМУС.

Математическое моделирование аэродинамики уличных каньонов, расположенных на склоне холма, с использованием OpenFoam

Каменецкий Е. С., Волик М. В., Орлова Н. С.
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
volikmv@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию влияния ширины уличных каньонов, расположенных на склоне холма, на картину течения в них. Расчеты проводились в двумерном приближении с использованием свободно распространяемого пакета OpenFoam и при поддержке программы «Университетский кластер» с удаленным доступом к консоли на управляющем узле вычислительного кластера BL2×220 (https://unihub.ru/tools/bl2x220cc).

Компьютерный эксперимент проводился для двух параллельных уличных каньонов, расположенных на вершине холма и трех вариантов их ширины (0.5, 1 или 1.5 высоты домов). Расчеты проводились с использованием решателя pimpleFoam, $K - \varepsilon$ модели турбулентности и пристеночных функций. Расчетное время составляло 400 секунд.

Результаты расчетов для уличных каньонов шириной, равной 0.5 высоты дома на подветренной стороне, показали, что внутри уличных каньонов образуются два вихря, расположенные друг над другом. В нижнем вихре воздух перемещается против часовой стрелки, а в верхнем вихре — по часовой стрелке. Скорость течения воздуха в уличном каньоне, расположенном вторым по течению, ниже, т. е. рассеивание загрязняющих веществ, выбрасываемых автотранспортом, будет хуже, чем в уличном каньоне, расположенном первым по течению. Кроме того, верхние вихри затекают на крыши домов на наветренной стороне на 5 м и 3 м соответственно, а значит можно предположить, что загрязняющие вещества из первого уличного каньона могут переноситься во второй и накапливаться в нем в случае их переноса из нижнего вихря.

В уличном каньоне шириной, равной одной высоте домов на подветренной стороне, расположенном первым по течению воздуха, в результате расчетов получен основной вихрь в центре, а также вторичный вихрь размером 5 м × 5 м вблизи дна около дома на наветренной стороне. Скопление загрязняющих веществ, выбрасываемых автомобилями может наблюдаться в области вторичного вихря. В уличном каньоне, расположенном вторым по течению образуется только один вихрь в центре.

В случае, когда ширина уличных каньонов принималась равной 1.5 высоты домов на подветренной стороне, получено, что внутри каждого уличного каньона образуется один вихрь. Скорости возвратного течения выше в уличном каньоне, расположенном первым по течению, значит загрязняющие вещества от автомобилей будут рассеиваться интенсивнее.

Таким образом, можно предположить, что загрязняющие вещества, выбрасываемые автомобилями быстрее всего будут рассеиваться в более широких уличных каньонах и хуже всего в уличных каньонах шириной, равной 0.5 от высоты домов на наветренной стороне. Пакет OpenFoam предоставляет возможность добавления уравнения для расчета концентрации загрязняющих веществ, что позволит проверить сделанные предположения.

Моделирование кипящего гранулированного слоя с использованием пакета OpenFoam

Каменецкий Е. С., Орлова Н. С., Волик М. В., Минасян Д. Г.
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
norlova.umi.vnc@gmail.com

Кипящий (псевдоожиженный) и виброкипящий слои гранулированных материалов очень часто используются при очистке газов, сушке и сепарировании зернового материала, а также в химической технологии, так как за счет увеличения площади контакта между газовой и твердой фазами значительно ускоряются процессы тепло- и массопереноса между газом и частицами. Площадь контакта, в основном, характеризуется порозностью (объемной долей газа), то есть отношением объёма газа между частицами к общему объёму смеси газа с частицами. Следует отметить, что при совмещении процессов кипения и виброкипения гранулированных слоев (когда слой частиц продувают потоком газа и воздействуют на слой внешними колебаниями полки, на которой располагаются частицы) площадь контакта фаз значительно больше, чем в случае процесса кипения.

Исследуется кипящий слой гранулированного материала. Теоретическое исследования процесса кипения (псевдоожижения) осуществлялось с использованием свободно распространяемого пакета для решения прикладных задач гидро и аэромеханики OpenFoam. Использовался солвер twoPhaseEulerFoam, в котором движение слоя гранулированного материала рассматривается как движение двух взаимодействующих континуумов, связанных с газом и частицами. Для обеих фаз решались уравнения неразрывности и количества движения. Для определения свойств твердой фазы использовались формулы из кинетической теории гранулярных потоков (KTGF).

Задача решалась в двумерном приближении. Использовались следующие размеры расчетной области: высота 4 м, ширина 0.45 м, толщина 0.01 м. Шаг по времени равен 0.00001 с, шаг расчетной сетки по высоте — 0.005 м, по ширине — 0.015 м. Расчеты проводились для слоев с различной начальной высотой (0.1–0.5 м) при различных значениях начальной скорости газа 0.1–1 м/с. Использовались слои мелких частиц (размером 0.3 мм) и более крупных частиц (размером 1.75 мм).

Результаты расчетов показали, что на распределение частиц в кипящем слое влияет начальное значение скорости газа. При малых скоростях газа (0.1–0.3 м/с), близких к минимальному значению скорости псевдоожижения, слой разрыхляется достаточно плохо. При скоростях из среднего диапазона (0.4–0.6 м/с) слой разрыхляется лучше, начинают образовываться газовые пузыри внутри слоя, слой визуально расширяется. При больших скоростях слой начинает терять устойчивость и наблюдаются большие газовые пузыри, больше похожие на газовые каналы.

О нелинейных эффектах при кручении сплошного цилиндра с начально круговым поперечным сечением

Келлер И. Э.
Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН
kie@icmm.ru

Определенный научный и практический интерес для изучения больших пластических деформаций металлов, в особенности при высокой температуре, вызывает эксперимент на кручение сплошных цилиндрических образцов с начально-круговым поперечным сечением. Данное испытание представляет собой простейший эксперимент с неоднородным полем напряжений, интересный с точки зрения изучения механических свойств деформируемых твердых тел, свойства которых существенно зависят от градиента напряжений. Определенные преимущества это испытание имеет для изучения больших пластических деформаций металлических сплавов, которые располагаются в поверхностном слое цилиндра. В отличие от экспериментальных схем, в которых реализуются большие пластические деформации металлов и где образец материала находится в стесненных условиях, в обсуждаемом опыте отсутствует трение на каких-либо поверхностях, которое поэтому не вносит свой вклад в регистрируемое поведение образца. Для идентификации материальных свойств цилиндра с использованием опыта на кручение важно, что последний не сопровождаются возникновением неоднородности распределения полярного момента инерции вдоль цилиндра и поэтому такой эксперимент лишен известных методических недостатков опыта на одноосное растяжение, связанных с локализацией деформации. Еще одним преимуществом перед экспериментом на одноосное растяжение оказывается сохранение исходных размеров испытуемого образца, что позволяет без особых ухищрений разместить его в печи для исследования высокотемпературной деформации металлических сплавов, в том числе находящихся в состоянии сверхпластичности, когда удлинения могут достигать рекордных величин.

Использование данного испытания с неоднородным полем напряжений для идентификации материальных свойств цилиндра сопряжено с необходимостью решения обратной задачи. С этой целью изучаются возможности точного решения прямой задачи для некоторых классов материалов. Для вязкопластических сред с существенной зависимостью напряжения течения от интенсивности скорости деформации и пренебрежимо малым деформационным упрочнением обнаружено два класса вязкопластических сред, обеспечивающих существование инвариантно-групповых решений уравнений течения. В частности, для материала со степенным законом вязкости выписаны формы решений со спирально-винтовыми распределениями полей с линейной и логарифмической зависимостью от осевой и радиальной координат, наблюдаемые экспериментально.

В докладе формулируются открытые вопросы, связанные с нелинейными эффектами в задаче кручения. В частности, обсуждается природа образования спирального рельефа на поверхности закручиваемого сплошного цилиндра с начально круговым поперечным сечением и геометрия искривления радиальных отрезков цилиндра при его кручении.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00365.

Течения крови в сосудистых руслах со сложной геометрией: новые подходы к расчетам в реальном времени

Кизилова Н. Н.
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
kizilova@univer.kharkov.ua

Кровеносные русла представляют собой весьма сложные совокупности сосудов с разными длинами, диаметрами и свойствами стенок, геометрия которых имеет существенные индивидуальные различия, поэтому проведение расчетов в реальном времени на полных моделях, включающих $> 10^3$ сосудов, в настоящее время невозможно. Расчеты давлений и скоростей кровотока чаще всего основаны на упрощенных моделях, представленных одной трубкой (питающей артерий органа или мышцы) с терминальным элементом, определяющим проводимость Y_t и условие отражения волн на конце трубки, или самоподобных (фрактальных) моделях бинарных деревьев. Модель с одним терминальным элементом задает место отражения пульсовой волны, в то время как результат наложения волн, отраженных на распределенной системе бифуркаций, может быть представлен как одна волна, отраженная от некоторой виртуальной бифуркации, расстояние до которой зависит от частоты волны и свойств терминального русла. В данной работе предлагается модель, представленная основными крупными ветвями исходного сосудистого русла с распределенной системой терминальных элементов, которая позволяет проводить численные расчеты в реальном времени на основе нелинейной квазиодномерной модели

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (AU)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -4\mu\sqrt{\frac{\pi}{A}}U, \tag{1}$$

$$P = P_{ext} + \beta\left(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}\right), \quad \beta = \frac{Eh\sqrt{\pi}}{(1-\nu^2)\,A_0}, \tag{2}$$

где A, P, U — площадь сечения сосуда и средние по сечению давление и скорость, h, E, ν — толщина, модуль упругости и коэффициент Пуассона стенки, P_{ext} — давление в окружающих тканях, A_0 — значение площади, при котором $P = P_{ext}$, ρ, μ — плотность и вязкость крови, а также на основе линеаризованной двумерной модели, описывающей колебания давления и скорости как суперпозицию бегущих волн малой амплитуды

$$\begin{aligned} P(t,x) &= P_0 e^{i\omega_j t}\left(e^{-i\omega_j x/c_j} + \Gamma_j e^{i\omega_j (x-2L)/c_j}\right), \\ U(t,x) &= P_0 e^{i\omega_j t}\left(e^{-i\omega_j x/c_j} - \Gamma_j e^{i\omega_j (x-2L)/c_j}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где ω_j, c_j — частота и скорость j-й гармоники, P_0 — амплитуда давления на входе в трубку, Γ_j — коэффициент отражения на выходе из нее.

Детальные численные расчеты выполнены с использованием данных коронарного русла человека. Решения выписаны для каждой из трубок системы с учетом непрерывности давления ирасхода на бифуркациях. Проведено сравнение результатов расчетов на моделях (1)–(2) и (3) с результатами регистрации кривых $P(t)$ в коронарном русле человека прямыми методами.

Прикладная теория устойчивости ортотропной колонны переменного сечения при учете поперечного сдвига и собственного веса

Киракосян Р. М.[1]**, Степанян С. П.**[2]
[1]*Ереван, Институт механики НАН Республики Армения*
[2]*Ереванский государственный университет*
mechins@sci.am, seyranstep@yahoo.com

Рассматривается ортотропная колонна малой сдвиговой жесткости с переменным прямоугольным сечением. Колонна находится под действием вертикальной осевой силы и собственного веса. Применяется система прямоугольных декартовых координатах x, y, z, оси которых параллельны главным направлениям анизотропии материала. Ось x направляется по центральной оси колоны, а оси y и z в плоскости поперечного сечения так, чтобы образовалась правая система координат.

Строится прикладная теория устойчивости, способная учитывать влияние поперечного сдвига и собственного веса колонны переменного сечения. Влиянием напряжения σ_z и деформации ε_z пренебрегаем.

Применяется метод представления решений в виде степенных многочленов по поперечной координате z. Имея в виду дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды, для соблюдения одинакового порядка в выражении касательного напряжения τ_{xz} удерживается на один член больше, чем в выражении нормального напряжения σ_x. Для построения самой простой теории необходимо в выражении σ_x удерживать лишь первые два члена, то есть для него принимать линейный закон распределения по толщине колонны. На основе вышесказанного, в выражении τ_{xz} следует удерживать три члена. Итак, принимается $\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3$, где φ_i, $i = 1, 2, 3,$ — неизвестные функции только координаты x. Пользуясь обобщенным законом Гука и геометрическими соотношениями, из поверхностных условий колонны функции φ_2 и φ_3 выражаются через φ_1 и прогиб w. С использованием этих выражений получается однородная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Это и есть система устойчивости колонны. Она имеет четвертый порядок. Получено также выражение наиболее часто встречающихся краевых условий.

Критическое значение сжимающей силы можно получить как наименьшее собственное число системы устойчивости колонны при данных краевых условиях.

Пользуясь современными численными методами, в рамках построенной теории можно решить как обычную задачу устойчивости колонны заданного переменного сечения, так и оптимизационную задачу, то есть определить то переменное сечение, которому соответствует наибольшая критическая сила при заданном весе и заданной высоте колонны.

Краевая изгибная волна в тонкой изотропной круглой пластинке: асимптотический подход

Кириллова И. В., Коссович Е. Л., Коссович Л. Ю., Украинский Д. В.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
kossovichel@info.sgu.ru

Исследование закономерностей распространения локализованных волн связано с получением уравнений, решением которых будет служить скорость волны. Их построение является сложной задачей, так как скорость локализованных волн не входит явно в общую постановку задачи о деформации исследуемых тел.

В середине XX века были открыты локализованные волны, распространяющиеся вдоль свободного края тонкой пластинки и затухающие в ортогональном направлении. Эти волны являются подвидом изгибных волн. Особенностями краевой изгибной волны является ее дисперсность, то есть зависимость частоты от волнового вектора, и зависимость скорости и амплитуды от толщины пластинки.

Вплоть до настоящего времени краевая изгибная волна остается малоизученной. Изгибные краевые волны возникают не только в изотропных тонких пластинках, но и при ортотропии и общей анизотропии пластин, а также на стыке двух пластин, изготовленных из разных материалов. Для случая круговых пластин точное дисперсионное уравнение, выраженное в терминах функций Бесселя, было получено Destrade и Fu.

Целью данной работы является применение асимптотических методов для построения дисперсионного уравнения, описывающего скорость краевой изгибной волны в тонкой круглой пластине. Асимптотические методы позволят получать сколь угодно близкие поправки на кривизну края пластинки.

Рассматривалась тонкая упругая изотропная круглая пластинка толщиной $2h$ и радиуса R, при этом предполагалось, что $R \gg h$. На основе данного предположения был введен малый параметр кривизны края пластинки $\varepsilon = (nR)^{-1}$, где n — волновое число. Дисперсионное уравнение для постоянного коэффициента скорости краевой изгибной волны в асимптотическом разложении до первого порядка малых $O(\varepsilon^1)$ тогда имеет вид:

$$\left(\left(1-\nu-c^2\right)^2\sqrt{1+c^2}-\left(1-\nu+c^2\right)^2\sqrt{1-c^2}\right)+ \tag{1}$$

$$+\varepsilon\left(2c^2(1-\nu)\sqrt{1-c^4}+2c^2(1-\nu)-\frac{\left(1-\nu-c^2\right)^2c^2}{2\left(1+c^2\right)}-\frac{\left(1-\nu+c^2\right)^2c^2}{2\left(1-c^2\right)}\right)=0,$$

где ν — коэффициент Пуассона материала, c — параметр, соответствующий постоянному коэффициенту скорости волны (волнового числа).

Следует отметить, что асимптотическое разложение точного уравнения для скорости краевой изгибной волны Коненкова в круглой пластинке, полученное Destrade и Fu, в первом приближении имеет аналогичный вид.

Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных течений, близких к параллельным

Кириченко О. В.[1], **Ревина С. В.**[1,2]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
revina@math.rsu.ru

Рассматривается двумерное $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla P + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

где ν — безразмерная вязкость. Поле скорости $\boldsymbol{v}$ периодично по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1, L_2.

Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$ стремится к бесконечности, когда волновое число $\alpha \to 0$.

Средняя по прямоугольнику пространственных периодов скорость считается заданной

$$\langle\!\langle \boldsymbol{v} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{q}.$$

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу течений, близких к параллельным

$$\boldsymbol{V} = (\alpha V_1(x_2), V_2(x_1)),$$

обобщающих классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости

$$\boldsymbol{V} = (0, \gamma \sin x_1).$$

Рассматриваются два случая: когда среднее скорости основного течения вдоль длинного периода отлично от нуля $\langle V_2 \rangle \neq 0$ и когда оно равно нулю $\langle V_2 \rangle = 0$.

В работе исследуется задача устойчивости. Получены условия, при которых происходит колебательная потеря устойчивости основного течения. Собственные значения, собственные функции, критическое значение вязкости разыскиваются в виде рядов по степеням параметра α. Для всех течений, принадлежащих указанным классам, найдены первые члены асимптотики. Коэффициенты асимптотических разложений явно выражаются через некоторые вронскианы, применяются также интегральные операторы типа Вольтерра на подпространстве функций с нулевым средним.

Проведено сравнение со случаем сдвиговых течений, рассмотренным ранее.

Полученные общие формулы применяются для расчета коэффициентов асимптотики конкретных течений. С помощью уравнений движения пассивной примеси дана предварительная визуализация ответвляющихся автоколебаний.

О теоретико-полевых объективных определяющих уравнениях связанной микрополярной термоупругости

Ковалев В. А.[1], Радаев Ю. Н.[2]
[1]*Московский городской университет управления Правительства Москвы*
[2]*Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*
radayev@ipmnet.ru

Поиск объективных нелинейных представлений для полевых лагранжианов и соответствующих определяющих уравнений для континуумов с микроструктурой выступает в настоящее время как одна из актуальных задач теории и механики сплошных сред. Указанный поиск в значительной степени сопряжен с построением объективных векторных и тензорных мер экстра-деформации континуума, пригодных в самом общем случае конечных деформаций, экстра-деформаций и поворотов.

В работе рассматривается теоретико-полевая модель нелинейного микрополярного термоупругого континуума с «нежесткими» реперами полярных векторов (d-векторов), ассоциированных с микроэлементами, составляющими континуум. Построение модели осуществляется на основе и в терминах 4-ковариантного полевого лагранжева формализма, характерного для физических теорий поля. d-векторы вводятся в теоретико-полевую схему как экстра-полевые переменные. При этом микроструктурные векторные экстра-полевые переменные дополнительно могут быть подчинены «конечным» уравнениям связей (кинематическим ограничениям). Приводится «естественная» плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. Выполнен учет инерционности микроструктурной «составляющей» поля. Получены ковариантные уравнения термоупругого поля в микрополярном континууме в канонической форме Эйлера–Лагранжа. Кинематические ограничения учитываются с помощью правила множителей Лагранжа.

Исследуются вопросы, касающиеся инвариантности интегрального функционала действия относительно трехмерных вращений эйлеровой координатной системы. Выбор эйлеровых координат произволен и не должен никак сказываться на физических следствиях теорий поля. Поэтому действие и лагранжиан обязаны обладать определенными свойствами инвариантности по отношению к выбору эйлеровой координатной системы, т.е. по отношению к так называемым «движениям» эйлерова пространства. Существуют два принципиально различных вида «движений»: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в эйлеровом пространстве. Спинорные «движения» определяются заданием тензорных функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три (тензоры поворота). В работе получены функциональные условия ротационной инвариантности действия и плотности действия, независимые ротационно-инвариантные аргументы лагранжиана и соответствующие удовлетворяющие принципу объективности определяющие уравнения.

Равновесие цилиндрической мембраны, одетой на абсолютно твёрдый цилиндр

Колесников А. М., Серова М. Ю.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Alexey.M.Kolesnikov@gmail.com

Рассмотрим длинную тонкостенную трубку из высокоэластичного материала. Пусть она одним концом надета на абсолютно твёрдый цилиндр так, что охватывает только один его край на некоторую глубину. Из опыта или из уравнений равновесия можно показать, что оболочка будет пытаться соскользнуть с цилиндра. Если нет никаких внешних воздействий на систему трубка–цилиндр, то равновесие возможно только за счёт сил трения, возникающих между трубкой и цилиндром. Поставим задачу, для заданных диаметров трубки ицилиндра, коэффициента трения, определить необходимую глубину одевания, для того чтобы трубка не соскользнула с цилиндра.

Будем полагать в силу малой толщины стенок трубки, что их изгибная жёсткость мала. Материал трубки считаем нелинейно-упругим. В качестве модели материала используем несжимаемую модель Бартенева–Хазановича. Задачу будем решать в рамках нелинейной теории высокоэластичных безмоментных оболочек типа Кирхгофа–Лява. Силу трения принимаем как Кулоновскую, то есть пропорциональную нормальной реакции. Деформацией цилиндра будем пренебрегать.

Решение задачи будем искать в классе осесимметричных деформаций. Можно показать из уравнений равновесия, что в рамках безмоментной теории 1) трубка будет облегать жёсткий цилиндр по боковой поверхности без отрыва; 2) часть оболочки останется не деформированной; 3) область перехода от части трубки, облегающей по боковой поверхности цилиндр, к недеформированной части трубки будет являться плоским кольцом. Отметим, что в рамках рассматриваемой безмоментной теории допускаются не гладкие решения с изломами. В рассматриваемой задаче изломы происходят на краях рассматриваемых областей. Для тонкостенных оболочек это является допустимым приближением. Так как отличие получаемого решения от равновесной конфигурации реальной тонкостенной трубки будет локализовано в малых окрестностях около граничных точек.

Основываясь на таком полуобратном представлении, задача о равновесия трубки, одетой на жёсткий цилиндр, сводится к краевой задаче для двух обыкновенных дифференциальных уравнений на различных частях трубки. Для модели Бартенева–Хазановича несжимаемого материала удалось получить аналитическое решение задачи. В работе проанализировано влияние коэффициента трения и радиуса трубки на необходимую для равновесия глубину одевания.

Данное исследование частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант 12-01-00038).

Конечно-элементное моделирование нестационарного контактного взаимодействия в подшипниках скольжения сложной структуры с учётом трения и тепловыделения от трения

Колосова Е. М.[1]**, Ляпин А. А.**[1]**, Пешков С. В.**[2]**, Чебаков М. И.**[1]
[1]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
ekolosova@sfedu.ru

В настоящее время современные подшипники скольжения все чаще выполняются из комбинированных или композиционных материалов, что позволяет достаточно успешно сочетать в едином триботехническом узле жесткость и прочность формообразующей основы с низким трением и высокой износостойкостью полимерного композиционного материала. Важнейшим этапом при проектировании и расчете подшипника является изучение влияния динамических нестационарных процессов с учетом трения и тепловыделения от трения на прочность и жесткость его конструкции.

В качестве расчетных моделей для подшипника скольжения рассматриваются динамические контактные задачи термоупругости о взаимодействии упругого цилиндра (вала) с внутренней поверхностью цилиндрического основания в пространственной постановке. Цилиндрическое основание может быть однослойным, двухслойным или содержать полимерные вставки различной конфигурации. Цилиндрическое основание жестко закреплено. Цилиндр имеет степень свободы только по вертикали. Вращение цилиндра происходит равномерно. На поверхностях цилиндра и основания, которые граничат с окружающей средой, заданы условия конвективного теплообмена.

Задача решалась с помощью метода конечного элемента, с использованием специально разработанных программ для конечно-элементного пакета Abaqus 6.12-3. CAD геометрия подшипника с полимерными вставками создавалась в программном комплексе SolidWorks Premium 2013. Решение задачи осуществлялось в два этапа. На первом шаге на цилиндр действует вертикальная нагрузка, на втором шаге задается вращение цилиндра и решается связанная задача термоупругости. С каждым оборотом цилиндра температура в зоне контакта растет и распространяется по цилиндрическому основанию и цилиндру в результате перераспределения температур с учетом потери тепла в результате конвекции.

Изучено влияние различных значений коэффициента трения, скорости вращения цилиндра и значений нагрузки на значения контактных и эффективных напряжений, распределёние температуры в цилиндрическом основании и цилиндре. Построены графики, иллюстрирующие изменение температуры во времени для двух точек – цилиндрического основания и цилиндра в случае совершения цилиндром пятидесяти оборотов. Приведены результаты распределения контактных и эффективных напряжений, а также температуры в рассмотренных подшипниках скольжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-31663 мол_а).

Влияние условий на контактных поверхностях на характер разрушения сжимаемых образцов и параметры их предельного состояния

Костандов Ю. А.

Симферополь, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

ipgd@yandex.ru

Проведено экспериментальное исследование предельных напряжений сжатия, модулей упругости и характера разрушения образцов, изготовленных из горных пород (габбро и гранит) и искусственного песчано-цементного материала (ПЦМ) в виде прямоугольных параллелепипедов с размерами $a \times h \times b$, где a, h и b — соответственно их ширина, высота и толщина. Образцы сжимались между плитами пресса вдоль ширины при различных условиях трения на контактных поверхностях. Было проведены три серии экспериментов: 1) – при непосредственном контакте нагружаемых граней образца со стальными плитами пресса; 2) — при размещении между нагружаемыми гранями образца и плитами пресса тонких фторопластовых пластин, что снижало контактное трение между ними практически до нуля, и 3) — при приклеивании цианакрилатным клеем нагружаемых граней образца к стальным пластинам, жестко закрепленных на плитах пресса. Значения статических коэффициентов контактного трения для рассмотренных контактирующих пар материалов при этом определялись по экспериментальным зависимостям сдвигающего усилия от нормальной сжимающей нагрузки. Анализ картин разрушения, а также образовавшихся в разрушенных образцах трещин и отдельностей позволяет сделать вывод о преобладании продольного характера разрушения, когда образование и развитие трещин происходит преимущественно в направлении действия нагрузки, и значительном влиянии на него величины контактного трения. При нагружении образцов из габбро с размерами 20,5×53×25 мм изменение контактных условий от практически проскальзывания к полному сцеплению происходила трансформация столбчатого разрушения, которое соответствует форме III (по Л. И. Барону), в пирамидальное, соответствующее форме I. При нагружении образцов из гранита 20×58,3×23 мм такое же изменение контактных условий приводило к трансформации характера разрушения от продольного (форма III) к диагональному (форма II) и, затем, к пирамидальному (форма I). При нагружении образцов из ПЦМ с размерами 55×55×20 мм изменение контактных условий от практически проскальзывания к полному контакту (сцеплению) происходила трансформация их формы разрушения от комбинации форм I и II к форме II. Установлено, что увеличение значений коэффициентов контактного трения при сжатии образцов из габбро и ПЦМ приводит к росту значений предельных напряжений образцов и их модулей упругости по экспоненциальным зависимостям. Необходимо отметить, что возрастание величин предельных напряжений сжатия образцов и их модулей упругости при увеличении коэффициента контактного трения можно объяснить только тем, что в случае приклеивания нагружаемых граней образца к стальным плитам пресса на контактных поверхностях существует только одна зона полного контакта, а при непосредственном контакте нагружаемых граней образца со стальными плитами пресса без приклеивания контактных поверхностей образуются две зоны: 1) – полного контакта и 2) – проскальзывания. Это представляется важным выводом, имеющим большое значение при рассмотрении контактных задач.

Специальные итерационные методы решения стационарной задачи конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией

Крукиер Б. Л., Крукиер Л. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
krukier@sfedu.ru

Для решения стационарной задачи конвекции диффузии в несжимаемой среде с краевыми условиями Дирихле предлагается новый класс итерационных методов, использующих симметричное-кососимметричное разложение матрицы исходной системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводится с помощью центрально-разностной схемы исходная краевая задача.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = f \tag{1}$$

и итерационный метод ее решения

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = f, \tag{2}$$

где A, B — невырожденные матрицы размера $n \times n$ в H, x, y_k, y_0 — векторы точного, приближенного и начального решения задачи (1) размера $1 \times n$, f — вектор правой части (1) размера $1 \times n$, k — номер итерации, τ — действительный числовой итерационный параметр, H — конечномерное евклидовое пространство.

Рассмотрим класс кососимметрических итерационных методов которые строятся следующим образом: разложим матрицу A из (1) в сумму симметичной и кососимметричной матриц

$$A = A_0 + A_1, \quad A_0 = A_0^T, \quad A_1 = -A_1^T, \quad A_1 = K_H + K_B, \tag{3}$$

где матрица A_1 расскладывается в сумму строго нижне и верхне треугольных матриц K_H и K_B.

Класс треугольных (ТКМ) и попеременно-треугольных (ПТКМ) кососимметричных итерационных методов, определяемых матрицей итерационного метода B из (2), имеет следующий вид:

$$B = B_c + 2\omega K_H, \quad B = (B_c + \omega K_H)\, B_c^{-1}\, (B_c + \omega K_B)\,. \tag{4}$$

В равенствах (4) матрица B_c симметричная, ω — некоторый действительный числовой параметр.

Даны теоремы сходимости этого класса методов, показано сравнение этих методов с классическими методами SOR и SSOR, а также показано, как предлагаемые методы работают в качестве переобуславливатей для методов подпространства Крылова — GMRES (m) и BiCG.

Об устойчивости правильной системы точечных вихрей вне круга

Куракин Л. Г.[1,2]**, Мелехов А. П.**[1]**, Островская И. В.**[1]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
melekhov@math.sfedu.ru

Работа посвящена проблеме устойчивости системы N точечных вихрей, расположенных равномерно на окружности вне круга. Дан обзор достигнутых в настоящее время результатов, полученных в том числе и авторами. Теоретические результаты подтверждены численными расчетами.

Рассматривается задача устойчивости стационарного вращения томсоновского вихревого многоугольника — системы N одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного N-угольника радиуса R_0 вне круговой области радиуса R с общим центром симметрии.

Хавелоком (1931) было показано, что при $N \geqslant 7$ имеет место неустойчивость томсоновского вихревого многоугольника. Экспоненциальная неустойчивость имеет место и при $N < 7$, но при значениях параметра $q > q_{*N}$. Здесь параметр $q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R^2}{R_0^2}$, а критическое значение q_{*N} зависит от N.

Таким образом, после работы Хавелока открытые вопросы остались лишь в случаях $N = 2, \ldots, 6$, когда собственные значения матрицы линеаризации лежат на мнимой оси. Ответы на них были получены в работах Л. Г. Куракина и И. В. Островской. Четный случай $N = 2$, 4, 6 удалось исследовать в рамках единого подхода. Каждый из случаев $N = 3$, 5 распался на серию задач, потребовавших индивидуального подхода, в частности, применения КАМ теории и нелинейного анализа всех резонансов до четвертого порядка включительно, встречающихся в задаче. Полученные в итоге критерии устойчивости стационарного вращения томсоновских конфигураций вне круга для всех значений парамера приведены в данном обзоре.

Нелинейный анализ аналитическими методами резонансных случаев задачи показал, что два из них приводят к неустойчивости при $N = 3$ и $N = 5$. В случае $N = 3$ при $q = q_{03} \approx 0.26254$ в задаче устойчивости имеет место критический случай двукратного нулевого собственного значения (диагонализируемый случай). Неустойчивость в этом случае была доказана с использованием результатов А. Г. Сокольского. В случае $N = 5$ при $q = q^* \approx 0.33337$ имеет место критический случай резонанса $1 : 2$. Неустойчивость в этом случае доказана применением теоремы А. П. Маркеева.

В данной работе теоретические результаты о неустойчивости томсоновского вихревого многоугольника в случае указанных двух резонансов были проверены прямым численным расчетом движения вихрей.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Южному федеральному университету (№ 213.01-11/2014-1).

Об устойчивости по Раусу и экспоненциальной неустойчивости вихревого триполя в двухслойной жидкости

Куракин Л. Г.[1,2], Островская И. В.[1], Соколовский М. А.[3]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
[3]*Москва, Институт водных проблем РАН*
kurakin@math.rsu.ru, ostrov@math.rsu.ru

Рассматривается система трех точечных вихрей в двухслойной жидкости. В одном слое находятся два точечных вихря, имеющих одинаковую интенсивность, а в другом — один точечный вихрь произвольной интенсивности. Движение такой вихревой конфигурации описывается гамильтоновой системой. У нее есть решение: два одинаковых вихря вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг третьего, находящегося неподвижно посередине между ними. Такое решение принято называть «каруселью». Это движение стационарное, в том смысле, что осуществляется под действием однопараметрической группы симметрии уравнения движения (в данном случае — группы вращений).

Предварительный численный анализ устойчивости рассматриваемой вихревой карусели проведен М. А. Соколовским. Наиболее полные результаты в этом направлении получены З. Кизнером. В данной работе уточняются и дополняются результаты этих авторов в рамках более общего подхода, развитого В. И. Юдовичем для задачи устойчивости стационарных движений динамических систем, обладающих группой симметрии.

Устойчивость здесь понимается в самом сильном возможном смысле как устойчивость по Раусу. Это означает, что после достаточно малого возмущения начальных данных все расстояния между вихрями карусели остаются почти теми же и центральный вихрь находится почти там же вечно. Такое возможно, несмотря на то, что стационарное вращение карусели неустойчиво по Ляпунову относительно угловой переменной.

Неустойчивость, грубо говоря, означает, что можно указать сколь угодно малое возмущение карусели так, что расстояние между вихрями во время движения изменится существенно, будет отличаться от начального на величину порядка 1.

В работе исследована квадратичная часть приведенного гамильтониана и собственные значения соответствующей матрицы линеаризации. Показано, что все пространство параметров задачи разбивается на три части: область устойчивости по Раусу в точной нелинейной постановке, область экспоненциальной неустойчивости и область в которой требуется нелинейный анализ. Результаты анализа подтверждаются численным расчетом траекторий вихрей.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (Задание №1.1398.2014/K).

RANS моделирование течений окружающей среды при устойчивой стратификации

Курбацкий А. Ф.[1], Курбацкая Л. И.[2]
[1]*Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН*
[2]*Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*
kurbat@itam.nsc.ru

Трехпараметрический RANS-метод моделирования турбулентности, включающий эффект внутренних гравитационных волн, применен для анализа структуры течения и статистики турбулентности течений окружающей среды при устойчивой стратификации. Акцент делается на анализе возможности RANS метода в описании особенностей вихревого перемешивания импульса и тепла при исследовании следующих проблем.

1. Эффективность вихревого перемешивания и энергетика турбулентности в устойчиво стратифицированных течениях окружающей среды. В условиях устойчивой термической стратификации вертикальный перенос импульса и тепла турбулентными вихрями в пограничном слое существенно ослабляется стратификацией. Возрастающая при этом активность внутренних гравитационных волн способствует поддержанию импульса течения, но не тепла. Включение в разработанную трехпараметрическую RANS схему стратифицированной турбулентности эффекта воздействия внутренних волн на перенос импульса и тепла позволяет корректно, в согласии с данными измерений, воспроизвести поведение вихревых коэффициентов диффузии импульса и тепла в зависимости от устойчивости течения (градиентного числа Ричардсона).

2. Глобальная перемежаемость турбулентности в устойчивом планетарном пограничном слое. Отличительная особенность устойчиво стратифицированных планетарных пограничных слоев связана с перемежающейся турбулентностью, которая характеризуется короткими периодами турбулентного состояния (bursts) среды и промежуточными периодами относительно слабых или не измеримых флуктуаций. Результаты вычислительного эксперимента чувствительности трехпараметрической RANS схемы турбулентности к воспроизведению перемежающейся турбулентности как вблизи твердой поверхности, так и «поднятой» турбулентности, генерируемой струйным течением вблизи верхней границы пограничного слоя позволили выявить существенную роль процессов турбулентной диффузии (моментов третьего порядка) в уравнениях переноса кинетической энергии и ее спектрального расходования (диссипации) в воспроизведении перемежаемости.

3. Особенности вихревого перемешивания импульса и тепла в свободной атмосфере (верхней тропосфере и нижней стратосфере). В верхней тропосфере и нижней стратосфере воздух обычно устойчиво стратифицирован. Вертикальные профили вихревого коэффициента диффузии импульса, вычисленные по трехпараметрической RANS схеме турбулентности, лучше согласуются с данными измерений, в то время как двухпараметрические схемы турбулентности приводят к результатам, заметно отличающимся от данных измерений.

Плоская задача множественного контакта для вязкоупругих тел с неоднородными покрытиями

Курдина С. П.

Московский государственный университет приборостроения и информатики
Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
svetlana-ka@yandex.ru

Исследуется плоское контактное взаимодействие системы жестких штампов и вязкоупругого основания с тонким упругим поверхностно неоднородным покрытием, то есть покрытием, свойства которого меняются от точки к точке его поверхности, но постоянны по глубине. Поверхностная неоднородность покрытия обычно возникает вследствие особенностей нанесения этого покрытия на основной слой, а также при поверхностной обработке уже нанесенных покрытий (лазерная обработка, ионная имплантация и т. д.). Поверхностная неоднородность может быть вызвана также использованием различных материалов при изготовлении покрытий. Для указанной задачи выведена разрешающая система смешанных интегральных уравнений, которая в функциональном векторном пространстве приведена к единому операторному уравнению с тензорным ядром и к векторным дополнительным условиям:

$$c(t)m(x)\mathbf{q}(x,t) - (\mathcal{I} - \mathcal{V})\boldsymbol{\mathcal{G}}\mathbf{q}(x,t) = \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)x - \mathbf{g}(x),$$

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi = \mathbf{P}(t), \int_{-1}^{1} \mathbf{q}(\xi,t)\xi\,d\xi = \mathbf{M}(t),$$

где $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{M}(t)$, $c(t)$ — заданные вектор-функции и скалярная функция времени, $m(x)$ — заданная быстро осциллирующая функция, $\mathbf{g}(x)$ — заданная вектор-функция координаты; $\mathbf{q}(x,t)$, $\boldsymbol{\delta}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ — вектор-функции, подлежащие определению; $\mathcal{I}$ — тождественный оператор; $\mathcal{V}$ — оператор Вольтерра по времени с известным ядром, $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ — оператор Фредгольма по координате с известным матричным ядром.

Показано, что существует 15 различных вариантов постановки задачи. Для различных вариантов постановки задачи на основании обобщенного проекционного метода получены аналитические решения. В уравнениях для контактных давлений в явном виде выделены функции, которые описывают жесткость покрытия, то есть удалось найти тонкую структуру решения. Это позволяет эффективно учитывать его сложную структуру, когда жесткость задана быстро осциллирующей и даже разрывной функциями. Проведены численные расчеты, сделаны качественные выводы.

Автор благодарен А. В. Манжирову за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00991).

Нелинейные вторые гармоники симметричных нормальных волн сдвига в слое кубической системы с обобщенными смешанными краевыми условиями на гранях

Кусливая А. А.[1]**, Шпак В. А.**[2]
[1]*Донецкий национальный университет*
[2]*Донецкий НИИ черной металлургии*
vashpak@mail.ru

Проблемы анализа нелинейных ангармонических эффектов при распространении нормальных упругих в пространственных волноводах в виде монокристаллического упругого слоя кубической системы представляют значительный интерес как в фундаментально-теоретическом, так и прикладном отношении. Наряду с вкладом в базу фундаментальных знаний для соответствующей предметной области, результаты этих исследований имеют приложения в механике конструкций, ультраакустической дефектоскопии, акустоэлектронике. Вместе с тем, рассматриваемая проблема имеет ряд открытых для исследования аспектов, связанных с характером краевых условий, задаваемых на граничных плоскостях слоя. В частности, представляет интерес анализ характеристик нелинейных ангармонических возмущений в случае задания на гранях слоя обобщенных смешанных краевых условий пропорциональности граничных напряжений и перемещений.

В данном контексте представленная работа посвящена решению задачи о генерировании нелинейных вторых гармоник при распространении симметричных и антисимметричных монохроматических нормальных волн сдвига с различной принадлежностью модам дисперсионного спектра, различной частотой и относительной длиной вдоль монокристаллического слоя кубической системы с однотипными обобщенными смешанными краевыми условиями на противоположных плоских гранях.

Рассматриваемая задача решается в рамках модели малого геометрически и физически нелинейного деформирования с использованием представлений для конечных деформаций и представления упругого потенциала с квадратичными и кубическими членами по деформациям и коэффициентами в виде упругих постоянных второго и третьего порядка. Применяется подход, основанный на использовании малого параметра в виде отношения максимальной амплитуды исследуемых волн к параметру толщины слоя с сведением исходной задачи к краевой задаче первого линейного приближения и задаче второго приближения по определению вторых нелинейных гармоник для нормальных волн сдвига. Решение задачи второго приближения получено в аналитической форме на основе применения разработанного специализированного алгоритма аналитических преобразований в среде программных приложений, поддерживающих алгоритмы компьютерной алгебры.

Показано, что в рассматриваемом случае нелинейные вторые гармоники априори представляют собой упругие волны продольно-сдвигового типа с частотой, равной удвоенной частоте монохроматической нормальной сдвиговой волны.

Предельный переход в обобщённой задаче конвекции

Левенштам В. Б.[1,2], **Ивлева Н. С.**[1]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А*
ivleva.n.s@yandex.ru, vleven@math.rsu.ru

В пионерской работе И. Б. Симоненко (Матем. сб., 1972) обоснована применимость метода усреднения к задаче о тепловой конвекции жидкости в сосуде (коротко: «к задаче конвекции»), подверженном вертикальным вибрациям с частотой $\omega \gg 1$. К специфике этой задачи относится наличие в описывающей ее системе (конкретнее: в уравнениях Навье–Стокса для скорости жидкости v) высокочастотного слагаемого $ja\omega\cos\omega t T$, где j — единичный вектор, направленный против силы тяжести, $a = \mathrm{const} > 0$, t — время, T — температура. В работах В. Б. Левенштама (Сиб. мат. журн., 1993, 1996) этот метод обоснован для задачи конвекции при вертикальных и наклонных вибрациях существенно более общего вида. В этом случае описывающая задачу система содержит высокочастотные слагаемые вида $\omega P(x, \sin\omega t, \cos\omega t)T$, где $P(x, t_1, t_2)$ — трехмерный вектор, компонентами которого являются полиномы от t_1, t_2, коэффициенты которых зависят от пространственной переменной x, причем среднее

$$\overline{P}(x) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} P(x, \sin\tau, \cos\tau)d\tau = 0.$$

Спецификой рассматриваемой в данном докладе задачи является наличие, дополнительно по отношению к отмеченным выше работам И. Б. Симоненко, В. Б. Левенштама, в уравнениях Навье–Стокса и теплопроводности сильно нелинейных слагаемых вида $g_i(x, v, \partial v/\partial x, T, \partial T/\partial x, \omega t)$, $i = 1, 2$, принадлежащих широкому естественному классу. Здесь, как и в упоминавшихся работах, рассматривается $2\pi/\omega$-периодическое по времени решение.

Для этой задачи выведена предельная (усредненная) задача, обоснован предельный переход, а также при естественных дополнительных условиях гладкости исходных данных разработан и обоснован эффективный алгоритм построения полной асимптотики исследуемого режима.

Работа состоит из трех частей. В первой части сделан краткий обзор работ В. И. Юдовича, посвященных развитию теории метода усреднения Крылова–Боголюбова, во второй части обсуждены результаты И. Б. Симоненко в задаче конвекции при высокочастотных вертикальных вибрациях, в третьей части рассмотрена исследуемая обобщенная задача конвекции.

Влияние механических и тепловых условий на динамику неоднородных предварительно напряженных термоупругих тел

Леви Г. Ю.[1,2]**, Федоренко А. Г.**[2]
[1]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
galias@yandex.ru, afedorenko@mail.ru

В рамках линеаризованной теории распространения термоупругих волн рассматриваются динамические связанные задачи о возбуждении гармонических колебаний на поверхности термоупругого слоя, лежащего на термоупругом полупространстве. Слой и полупространство находятся в условиях предварительного нагрева и под воздействием начальных напряжений. Колебания осуществляются под действием распределенной в ограниченной области на поверхности среды осциллирующей механической или тепловой нагрузки. Вне этой области поверхность тела предполагается свободной от механических напряжений и теплоизолированной. На границе контакта слоя с полупространством рассматриваются следующие режимы граничных условий: 1) полное сцепление и идеальный тепловой контакт; 2) полное сцепление и теплоизоляция; 3) проскальзывание слоя и идеальный тепловой контакт. На бесконечности выполняется условие излучения. Краевая задача описывается: линеаризованными уравнениями движения термоупругой среды

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta}^{(n)} = \rho_0^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \theta_{ij}^{(n)} = c_{ijkl}^{(n)*} u_{k,l}^{(n)} - \beta_{ij}^{(n)*} u_4^{(n)}, \tag{1}$$

линеаризованным уравнением теплопроводности

$$\lambda_{ik}^{(n)} u_{4,ik}^{(n)} = \kappa^{(n)} \frac{\partial u_4^{(n)}}{\partial t} + \theta_1^{(n)} \beta_{ik}^{(n)*} \frac{\partial u_{k,i}^{(n)}}{\partial t}, \kappa^{(n)} = \frac{c_\varepsilon^{(n)} \rho_0^{(n)} \theta_1^{(n)}}{\theta_0} \tag{2}$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь $n = 0$ обозначены параметры полупространства, $n = 1$ — параметры слоя. Участвующие в уравнениях (1), (2) коэффициенты при однородной начальной деформации и предварительном нагреве определяются выражениями

$$c_{ijkl}^{(n)*} = \tfrac{\delta_{kj}}{2} \left(\textstyle\sum_{m=1}^{3} c_{ilmm}^{(n)} \left(\nu_m^{(n)2} - 1 \right) - \left(\theta_1^{(n)} - \theta_0 \right) \beta_{ij}^{(n)} \right) + c_{ijkl}^{(n)} \nu_j^{(n)} \nu_k^{(n)}, \tag{3}$$

$$\beta_{ij}^{(n)*} = \nu_j^{(n)} \beta_{ij}^{(n)}. \tag{4}$$

Построены функции Грина, соответствующие задачам о колебаниях предварительно напряженной неоднородной термоупругой среды при различных граничных условиях, аналитически и численно исследованы их свойства. Построены распределения теплового и волнового полей на поверхности среды, изучено их изменение в зависимости от условий на границе контакта сред.

Динамика электромагнитоупругого слоистого полупространства

Леви М. О.[1,2], Леви Г. Ю.[1,2], Богомолов А. С.[1], Агаян К. Л.[3]
[1]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
[3]*Ереван, Институт механики НАН Республики Армения*
galias@yandex.ru, moderx@mail.ru

Изучается динамическая связанная задача о гармонических колебаниях электромагнитоупругого слоистого полупространства $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$, $u_2 = 0$, $u_n = u_n(x_1, x_3)$, $n = 3, 4, 5$; под действием осциллирующей электрической нагрузки при различных электрических и магнитных условиях на его поверхности и внутренних границах.

Полупространство представляет собой полуограниченную среду $|x_1| \leqslant \infty$; $x_3 \leqslant h_2$ на поверхности которой расположены два слоя $0 < x_3 \leqslant h_1$ и $h_1 < x_3 \leqslant h_2$ соответственно.

Материалы имеют класс осевой симметрии 2mm. Колебания в полупространстве инициируются осциллирующей нагрузкой $q(x_1, t) = q_0(x_1)e^{-i\omega t}$ распределенной в области $|x_1| \leqslant a$. ($q = \{q_3, q_4, q_5\}$, здесь q_3 — компонента вектора механической нагрузки, q_4 — электрическая нагрузка, q_5 — магнитная нагрузка). Вне области $|x_1| \leqslant a$ поверхность свободна от механических напряжений. Колебания электромагнитоупругой среды описываются соответствующими уравнениями движения и квазистатическими уравнениями Максвелла: $\nabla \cdot T^{(p)} = \rho \frac{\partial^2 u^{(p)}}{\partial t^2}$, $\nabla \cdot B^{(p)} = 0$, $\nabla \cdot D^{(p)} = 0$, $p = 0, 1, 2$;. Здесь $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{H}$ — вектор напряжения магнитного поля. Граничные условия на поверхности записываются в виде: $T_{31}^{(2)} = 0; T_{33}^{(2)} = 0$. Электро-открытый случай: $D_3^{(2)} = e_{31}^{(2)} U_{1,1}^{(2)} + e_{33}^{(2)} U_{3,3}^{(2)} - \varepsilon_{33}^{(2)} U_{4,1}^{(2)} - g_{33}^{(2)} U_{5,3}^{(2)} = 0$; Электро-закрытый случай: $U_4^{(2)} = 0$; Магнито-открытый случай: $B_3^{(2)} = f_{31}^{(2)} U_{1,1}^{(2)} + f_{33}^{(2)} U_{3,3}^{(2)} - g_{33}^{(2)} U_{4,1}^{(2)} - \mu_{33}^{(2)} U_{5,3}^{(2)} = 0$; Магнито-закрытый случай: $U_5^{(2)} = 0$;

На границах раздела задаются условия полной механической стыковки материалов

$T_{31}^{(p)} = T_{31}^{(m)}; T_{31}^{(p)} = T_{31}^{(m)}$; $U_3^{(p)} = U_3^{(m)}$; $U_1^{(p)} = U_1^{(m)}$; $p = 1, 2$; $m = p - 1$. Электрические и магнитные условия могут быть как непрерывными, так и иметь металлизацию(экранизацию). В электро-открытом случае $D_3^{(p)} = D_3^{(m)}$; $U_4^{(p)} = U_4^{(m)}$; и магнито-открытом случае $B_3^{(p)} = B_3^{(m)}$; $U_5^{(p)} = U_5^{(m)}$; Для металлизированных (экранизированных) границ условия примут вид: в электро-закрытом случае $U_4^{(p)} = 0$; $U_4^{(m)} = 0$; и магнито-закрытом случае $U_5^{(p)} = 0$; $U_5^{(m)} = 0$.

Построена функция Грина среды. Описано решение краевой задачи. Рассматривается влияние структуры слоистого полупространства с различным порядком расположения электроупругих, магнитоупругих и упругих материалов на фазовые скорости поверхностных волн. Изученно влияние различных электрических и магнитных граничных условий на динамику слоистого электромагнитоупргого полупространства.

Устойчивость некруговых цилиндрических оболочек с жидкостью под действием механических и температурных нагрузок

Лекомцев С. В., Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П.
Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН
bochkarev@icmm.ru, lekomtsev@icmm.ru, mvp@icmm.ru

В данной работе представлено решение трёхмерных задач о собственных колебаниях и устойчивости нагруженных оболочек с эллиптическим поперечным сечением, содержащих сжимаемую идеальную жидкость. Решение задачи осуществляется с использованием метода конечных элементов. Потенциальное движение жидкой среды описывается волновым уравнением, которое совместно с условием непроницаемости и соответствующими граничными условиями с помощью метода Бубнова–Галёркина сводится к системе уравнений. Деформации упругой конструкции определяются с помощью теории тонких оболочек на основе гипотез Кирхгофа–Лява. При моделировании геометрии оболочек произвольного поперечного сечения предполагается, что криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских четырехугольных элементов. Для математической постановки задачи динамики тонкостенной конструкции используется вариационный принцип возможных перемещений, учитывающий работу сил инерции, гидродинамическое давление, действующее на смоченной поверхности, и предварительное напряженное недеформированное состояние, вызванное влиянием различных силовых факторов, действующих на оболочку. Решение задачи сводится к вычислению собственных значений связанной системы уравнений. Достоверность полученных результатов подтверждена численными экспериментами по оценке сходимости конечно-элементного алгоритма, сопоставлением с существующими решениями других авторов и сравнением отдельных результатов с экспериментальными данными. В численных примерах выполнено исследование влияния линейных размеров, уровня заполнения и граничных условий на собственные частоты, формы колебаний и устойчивость тонкостенных эллиптических цилиндрических оболочек, взаимодействующих с неподвижным или текущим потоком жидкости, и находящихся под действием статической механической и температурной нагрузок. Показано, что уровень заполнения жидкостью может не оказывать воздействия на величину критической нагрузки, приводящей к потери устойчивости оболочки, но существенно влияет на динамические свойства рассматриваемой системы. Установлено, что нагрев внешней стороны боковой поверхности оболочки, взаимодействующей с внутренним потоком жидкости, так же, как и увеличение приложенного внешнего давления, приводят к значительному снижению критических скоростей потери устойчивости. Продемонстрировано, что в результате изменения параметра эллиптичности конструкций, содержащих неподвижную и текущую жидкость, происходит смена форм колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00323-а и 13-01-96049) и гранта президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ НШ-2590.2014.1.

Расчет предельного состояния образца горной породы при сжатии жесткими штампами с учетом внешнего и внутреннего трения

Локшина Л. Я., Костандов Ю. А.
Симферополь, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
ipgd@yandex.ru

Одним из основных параметров оценки безопасного состояния подземных сооружений и возможности разрушения горных массивов исполнительными органами горных машин является предел прочности образцов горной породы при одноосном сжатии. Горные породы находятся в сложном напряженном состоянии, из чего следует необходимость установления его влияния на параметры предельного состояния. В данной работе проведено исследование напряженно-деформированного состояния образца горной породы при его одноосном сжатии между жесткими штампами с учетом внутреннего трения материала и контактного трения на поверхности приложения нагрузки.

Рассматривался образец горной породы в виде прямоугольной пластины. Материал образца представляет собой однородную изотропную среду, деформирующуюся по упругому закону, характеризующуюся упругими константами и коэффициентом внутреннего трения, в данном случае отличном от нуля. Нормальное напряжение, действующее на контактирующих со штампами поверхностях образца, рассматривается как результат воздействия на них штампами и потому зависит от координаты. Касательное контактное напряжение при этом определяется контактным трением на поверхности приложения нагрузки. Полагаем, что разрушение материала начинается при его деформировании за пределом упругости в некоторой локальной области. Дальнейшее нагружение приводит к тому, что в одних областях происходит разрушение материала, в то время как в других он продолжает находиться в не разрушенном упругом состоянии. Формирование очагов разрушения происходит в локальных областях на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН). Под эффективным касательным напряжением понимается активное касательное напряжение за вычетом фрикционной составляющей, зависящей от коэффициента внутреннего трения материала. Считается, что материал подчиняется закону Гука вплоть до момента разрушения. В качестве критерия разрушения материала использовался критерий Кулона.

Для образца горной породы при его одноосном сжатии между жесткими штампами с учетом внутреннего трения материала образца, контактного трения на поверхности приложения нагрузки и неоднородности напряжений сжатия под штампом показана возможность расчета разрушающего сжимающего напряжения и установлено влияние приложенной нагрузки и контактного трения на размер откалывающихся фрагментов образца. В случае сжатия между штампами образца из песчано-цементного материала выполнены расчеты зависимости разрушающего напряжения от касательного напряжения и положения ТМЭКН в зависимости от приложенной нагрузки. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Управление напряжениями и деформациями в биомеханике

Лохов В. А.
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
valeriy.lokhov@yandex.ru

Известно, что в органах и тканях живого организма постоянно происходят процессы, приводящие к развитию напряжений, например, это относится к процессам филогенеза, онтогенеза, резорбции, перестройки, различным оперативным вмешательствам. Важную роль играют также температурные напряжения, вызванные нагревом или охлаждением органов и тканей или их искусственных заменителей. Во многих работах обсуждается роль ростовых деформаций, возникающих в живых системах, начиная с самого начала их развития (например, для человека напряжения возникают уже в период внутриутробного развития).

Для анализа и управления напряжениями в живых системах удобно ввести подход, предложенный Рейсснером, 1931, основанный на понятии «собственная деформация».

Под термином «собственная деформация» (eigenstrain) понимается неупругая деформация любой природы: температурная деформация, пьезоэлектрическая деформация, деформация фазовых переходов, деформация роста и перестройки живых тканей и др. Предполагается, что собственная деформация может быть вычислена независимо и в уравнениях краевой задачи считается известной (например, можно независимо найти температурные деформации, пьезоэлектрические деформации, деформации фазовых переходов, и т. д.).

Использование данного понятия позволяет разработать единый подход к решению двух классов задач, имеющих большое значение при проектировании и разработке интеллектуальных систем: создание в теле заданного поля напряжений, сохраняя поле деформаций, и создание заданной формы системы, не меняя напряженного состояния системы.

Решение этих задач основано на теореме, согласно которой любое распределение собственной деформации, существующее в теле, может быть единственным образом разложено на две части: первая часть — stress-free eigenstrain — не вызывает напряжений в системе, вторая часть — deformation-free eigenstrain — не вызывает деформаций в системе. Разработанный подход является развитием работ Пермской школы, проводимых под руководством А. А. Поздеева в области управления остаточными напряжениями в процессах обработки металлов давлением.

Показано, что указанные виды собственной деформации образуют подпространства в энергетическом функциональном пространстве собственных деформаций. Для построения данных подпространств разработаны алгоритмы построения систем базисных функций.

В докладе будут представлены алгоритмы решения обозначенных классов задач, учитывающие особенности создания в теле собственных деформаций (температурных, пьезоэлектрических, деформаций фазовых переходов и т. д.). В качестве примеров будут рассмотрены задачи об управлении напряжениями и деформациями в биомеханике.

Развитие биомеханической модели «Виртуальный физиологический человек»

Лохов В. А., Няшин Ю. И.
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
valeriy.lokhov@yandex.ru, nyashin@inbox.ru

Концепция «Виртуальный физиологический человек» начала развиваться сначала в США, а затем в странах Западной Европы с конца XX столетия (VirtualPhysiologicalHuman, VPH). Согласно этой концепции организм человека рассматривается как сложная многоблочная биомеханическая система. В состав этой системы входят все подсистемы организма человека (сердечнососудистая система, система дыхания, нервная система, зубочелюстная система, билиарная система, опорно-двигательный аппарат и др.). Каждая из указанных подсистем состоит из ряда других подсистем различного уровня сложности (от макроуровня до наноуровня). Цель развития концепции «Виртуальный физиологический человек» состоит в детальном исследовании всех подсистем организма человека и установлении количественных и качественных связей между ними. Развитие данной концепции позволит значительно ускорить и улучшить диагностику, а также найти оптимальный метод лечения каждого индивидуального пациента, включая проведение виртуальной операции.

В предлагаемом исследовании особое внимание уделяется анализу структуры и физиологических особенностей зубочелюстной системы человека в динамике ее развития, начиная от рождения, и далее в течение всей жизни человека. Анализируется влияние биомеханического давления на процессы филогенеза и онтогенеза в зубочелюстной системе, в частности, показано развитие различных элементов системы в норме и при различных патологиях. Особенно важным элементом исследования в рамках поставленной проблемы является анализ связи патологических изменений в зубочелюстной системе и в других системах организма. Показывается связь неправильной окклюзии (неправильного прикуса) с нарушениями шейного отдела позвоночника и нарушениями в системе кровообращения.

Очень важным и интересным объектом исследования с точки зрения биомеханики и связей с другими системами организма является парный височно-нижнечелюстной сустав. Диски суставов являются аваскулярными (лишенными кровеносных сосудов) и питание их производится не за счет кровеносных капилляров, а за счет втекающей и вытекающей внутритканевой жидкости.

В заключение, наиболее подробно анализируются связанные патологии в зубочелюстной системе, нарушения усилий в мышцах лицевой области, патологические деформации и смещения в дисках суставов, деформации и нарушения проводимости внутренней сонной артерии, нарушения внутримозгового кровообращения, включая инсульт сосудов головного мозга.

Применение метода Флоке–Ляпунова к исследованию устойчивости гофрированных оболочек

Макаров С. С., Устинов Ю. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
makarov-sergey-rostov@mail.ru

Данная работа посвящена исследованиям устойчивости оболочек вращения с периодической геометрической структурой срединной поверхности. Для этих целей был разработан новый в рассматриваемом классе задача алгоритм, который опирается на теорию Флоке–Ляпунова. Исследования проводились на основе новых (по форме) нелинейных уравнений равновесия, которые были получены в рамках гипотез Киргоффа–Лява.

Исследование устойчивости несимметричного напряженно-деформированного состояния реализовывалось методами теории возмущений в классе периодических по окружной координате гармонических функций.

Разработанный алгоритм, основанный на теории Флоке–Ляпунова, состоял из следующий этапов:

- На основе решений восьми задач Коши для линеаризованной системы, строился матрициант $\mathbf{A}$, компоненты которого являются функциями продольной безразмерной координаты x и параметра «нагрузки»(q).
- Далее формировалась матрица монодромии $\mathbf{M} = \mathbf{A}(T, q)$, где T — длина периода.
- Следующим шагом было построение матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{M}^n$, где n — число периодов оболочки.
- Последним этапом был выбор минора матрицы $\mathbf{B}$ на основе граничных условий на торцах оболочки.

Критическое значение «нагрузки» определяется из условия обращения в ноль выбранного минора.

Задача определения точек бифуркации равновесия была решена для двух типов гофрированных оболочек, находящихся под действием внешнего гидростатического давления. На торцах оболочек были заданы граничные условия типа шарнирного опирания.

Были построены формы потери устойчивости во всех исследуемых случаях.

Сравнительный анализ эффективности предлагаемого метода с методом начальных параметров показал, что метод, основанный на теории Флоке–Ляпунова значительно эффективней с точки зрения временных затрат, особенно при исследовании устойчивости достаточно длинных оболочек.

Предложенный метод позволил оценить влияние краевого эффекта на значения критической нагрузки. Было проведено исследования влияния краевого эффекта при изменении толщины оболочки.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания №9.665.2014.K в сфере научной деятельности.

Износ основания с поверхностно неоднородным покрытием произвольной системой штампов

Манжиров А. В.
Московский государственный университет приборостроения и информатики
Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
manzh@inbox.ru

Исследуется износ упругого основания с поверхностно неоднородным покрытием произвольной системой жестких штампов с плоскими основаниями. Покрытие считается мягким и относительно тонким, причем его свойства меняются по продольной координате (от точки к точке поверхности основания). Предполагается, что на штампы действуют вдавливающие силы, приложенные с некоторым эксцентриситетом (т.е. еще и моменты). Задача приводится к следующей системе смешанных интегральных уравнений:

$$m^i(x)\left[q^i(x,t)-V\int_1^t q^i(x,\tau)\,d\tau\right]+\sum_{j=1}^n\int_{a_j}^{b_j}k(x,\xi)q^j(\xi,t)\,d\xi=\delta^i(t)+\alpha^i(t)\,x, \qquad (1)$$

$$\int_{a_i}^{b_i}q^i(\xi,t)\,d\xi=P^i(t), \quad \int_{a_i}^{b_i}q^i(\xi,t)\xi\,d\xi=M^i(t), \quad x\in[a_i,b_i], \qquad (2)$$

где $q^i(x,t)$, $\delta^i(t)$, $\alpha^i(t)$ — искомые функции; $P^i(t)$, $M^i(t)$, $m^i(x)$, $k(x,\xi)$ и a_i, b_i и V — известные функции и параметры.

Систему уравнений (1) с дополнительными условиями (2) можно привести к одному смешанному интегральному уравнению с тензорным (матричным) ядром и тензорным (матричным) коэффициентом при внеинтегральном члене с двумя дополнительными векторными условиями:

$$\mathbf{D}(x)\cdot\left[\mathbf{q}(x,t)-V\int_1^t\mathbf{q}(x,\tau)\,d\tau\right]+\int_{-1}^1\mathbf{k}(x,\xi)\cdot\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\,x, \qquad (3)$$

$$\int_{-1}^1\mathbf{E}\cdot\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\mathbf{P}(t), \quad \int_{-1}^1\xi\mathbf{E}\cdot\mathbf{q}(\xi,t)\,d\xi=\mathbf{M}(t), \quad x\in[-1,1], \qquad (4)$$

где $\mathbf{D}(x)=m^i(x)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^i$, $\mathbf{q}(x,t)=q^i(x,t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\delta}(t)=\delta^i(t)\mathbf{i}^i$, $\boldsymbol{\alpha}(t)=\alpha^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{P}(t)=P^i(t)\mathbf{i}^i$, $\mathbf{k}(x,\xi)=k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j$.

Для решения смешанного интегрального уравнения (3) с дополнительными условиями (4) развивается проекционный метод, позволяющий получить аналитическое решение поставленной задачи в рядах. Наряду с аналитическим решением строится асимптотическое решение задачи при больших значениях времени. Формулируются выводы качественного характера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00991-а и 13-01-92693-ИНД_а), Программы ОЭММПУ №12 и Гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-2611.2014.1.

Интегральное уравнение для расчета свойств ветротурбины в цилиндре постоянного диаметра

Мещеряков К. И.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
m.keyran@gmail.com

В трехмерной постановке рассматривается задача обтекания лопасти ветроустановки в туннеле постоянного диаметра. Лопасть представляет собой тонкую закрученную пластину с переменой хордой. На лопасть набегает однородный поток воздуха, направленный вдоль оси туннеля. Лопасть при этом вращается относительно этой оси. Таким образом, угол атаки зависит как от угла установки, так и от угла, определяемого скоростью набегающего потока и угловой скоростью вращения лопасти. Среда, в которой находится лопасть, считается идеальной несжимаемой жидкостью. При этом предполагается, что сносимые потоком с концов лопасти вихри образуют цилиндрическую поверхность, совпадающую с поверхностью туннеля, что упрощает удовлетворение граничных условий. Целью работы является определение крутящего момента.

Классическим подходом к решению подобных задач является применение гипотезы плоских сечений, т.е. рассмотрение обтекания отдельных сечений лопасти. Этот подход, однако, не учитывает влияния этих сечений друг на друга. Другим подходом является численное решение обтекания лопасти с помощью методов конечных элементов и подобных им. Эти методы хорошо зарекомендовали себя и используются в промышленных расчетах. К их недостаткам можно отнести вычислительную сложность, поскольку при их использовании необходимо рассматривать весь объем жидкости, окружающей лопасть.

В работе предложен метод расчета лопасти, сводящийся к решению граничного интегрального уравнения на ее поверхности. Лопасть при таком подходе рассматривается в целом, что позволяет учесть эффекты влияния различных сечений друг на друга.

Так как рассматривается идеальная несжимаемая жидкость, то ее течение потенциально. Потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа. Удобно рассматривать это уравнение в цилиндрической системе координат (x, r, θ), где x — осевая координата, направленная вдоль оси вращения, r — радиальная компонента и θ — тангенциальная. После применения преобразования Фурье по координате x, разложению в ряд Фурье по θ, уравнение Лапласа сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. К решению полученной краевой задачи с граничными условиями непроницания на стенке туннеля и ограниченности возмущения на оси применяются обратные преобразования. В результате получается граничное интегральное уравнение относительно производной потенциала. Это уравнение является сингулярным, и для его решения используется численный метод, предложенный Белоцерковским С. М. и Лифановым И. К. После численного определения значений основной неизвестной функции для возмущенного потенциала в узловых точках на поверхности лопасти, при помощи интеграла Бернулли находится разность давлений на поверхностях лопасти, что позволяет определить ее крутящий момент.

Наращивание вязкоупругой пластины, ослабленной отверстием в форме укороченной гипотрохоиды

Михин М. Н.
Московский государственный университет приборостроения и информатики
mmikhin@inbox.ru

Исследуется напряженно-деформируемое состояние вязкоупругой однородной пластины, ослабленной отверстием в форме укороченной гипотрохоиды. Пусть контур отверстия свободен от внешних напряжений и пусть напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение величины P в направлении, параллельном оси Ox.

В момент времени $\tau_1 \geqslant \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом новые приращиваемые элементы не напряжены. Наращивание происходит таким образом, что отверстие уменьшается по закону подобия, т. е. граница роста $L(t)$ в каждый момент времени имеет форму укороченной гипотрохоиды. Считаем, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$. В момент $\tau_2 \geqslant \tau_1$ наращивание тела прекращается.

Исследуются три основных этапа деформирования тела: до начала наращивания, в процессе и после остановки роста. Краевая задача для нерастущего вязкоупругого стареющего тела до момента времени τ_1 представляет собой традиционную задачу теории вязкоупругости. Начально-краевая задача для наращиваемой области обладает рядом особенностей: нарушение условий совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин; зависимость определяющих соотношений от функции $\tau_0(x, y)$, которая может иметь разрывы первого рода. Основные соотношения задачи после остановки наращивания аналогичны соотношениям начально-краевой задачи для наращиваемой области, где отсутствует условие на границе роста.

Предложены методы решения таких задач, основанные на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с некоторым параметром, использовании методов конформного отображения для решения последних и восстановлении истинных характеристик напряженно-деформированного состояния тел при помощи полученных формул расшифровки.

Основной вывод состоит в том, что если в готовом теле без учета наращивания максимум интенсивности касательных напряжений достигается на границе тела, то при наращивании максимум интенсивности касательных напряжений может достигаться: на границе раздела основного и дополнительного тел, на границе готового тела и в произвольной точке дополнительного тела.

Твердотельные эффекты запаздывания деформирования, порождаемые большим числом находящихся в твердом теле газонаполненных трещин и трещиновидных площадок вязкого скольжения

Мищенко А. А.[1], Салганик Р. Л.[2], Устинов К. Б.[2], Федотов А. А.[3]
[1]*Москва, МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского*
[2]*Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*
[3]*Москва, ОАО «Корпорация „Иркут“»*
ustinov@ipmnet.ru

Указанные в заголовке эффекты рассматриваются в предположении о циклическом (осцилляционном) характере нагружения, при котором изменение температуры газа в газонаполненных трещинах, происходящее вследствие его сжатия–разрежения, сопровождается существенным теплообменом между газом в трещинах и вмещающим их материалом, что приводит к существенной диссипации механической энергии и, соответствующим изменениям температуры материала с такими трещинами и, как следствие, — к значимым эффектам термоупругости во вмещающем упомянутые трещины материале. С другой стороны, такого рода эффекты могут порождаться тепловыделением, происходящим вследствие диссипации энергии упругого деформирования на площадках вязкого скольжения. Оба вида эффектов рассматриваются ниже для модельной прямолинейно слоистой структуры чередующихся слоёв: (а) стали, в которых преобладает охарактеризованный выше эффект, порождаемый газонаполненными трещинами, образовавшимися на межзёренных границах по механизму водородного растрескивания, и (б) алюминия, в которых преобладает охарактеризованный выше эффект, порождаемый площадками вязкого скольжения, представляющими собой межзёренные границы. При этом предполагается, что среда, действие которой приводит к водородному (преимущественно зернограничному) растрескиванию в стали, проникает в рассматриваемую слоистую структуру по межслойным границам. Рассматриваются механические эффекты (как квазистатические так и динамические), которые могут возникать в охарактеризованной выше структуре. Обсуждаются перспективы возможных приложений, выходящих за рамки охарактеризованной выше модельной структуры. Указывается возможное геомеханическое приложение: песчаник с газонаполненными трещинами и трещиновидными битуминозными включениями, особенно при повышенной температуре.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, 14-01-00855а.

Получение дисперсионных соотношений для пьезокристаллических цилиндров с гладким криволинейным сечением: метод рядов по экспоненциальным базисным решениям волновых уравнений

Моисеенко И. А., Приходько Н. В.
Донецкий национальный университет
nina_prikhodko@i.ua

Проблема описания полных дисперсионных спектров нормальных электроупругих волн в протяженных пьезокристаллических цилиндрах с гладкими криволинейными поперечными сечениями, ограниченными эллиптическими кривыми либо кривыми, задающими очертания правильных многоугольников с закругленными углами, решаемая на основе применения численно-аналитических методов, представляет интерес как открытая проблема, определяемая логикой внутреннего фундаментального развития волновой механики пьезоактивных сред, так и как проблема поддержки соответствующих прикладных инженерных расчетов в области ультраакустической диагностики и акустоэлектроники. В этой связи в представляемой работе для описанного класса волноводов изложена методология получения основных дисперсионных соотношений в аналитической форме равенства нулю определителя функциональной матрицы бесконечного порядка с элементами, зависящими от параметров частоты и волнового числа нормальных электроупругих волн.

Методология базируется на получении представлений для поля динамических упругих перемещений и связанного квазистатического электрического поля в исследуемых нормальных волнах разложениями в ряды по множеству базисных частных решений системы дифференциальных уравнений динамического электроупругого деформирования для анизотропных пьезокристаллических сред гексагональной системы либо отдельных классов орторомбической системы. Для указанных представлений на основе применения обобщенной формулы Якоби–Ангера записываются ортогональные контурные разложения на границах двумерных областей сечений цилиндров с гладкими криволинейными контурами, внешности которых конформно отображаются на внешность единичного контура с использованием двухчленной степенной отображающей функции. На последнем этапе формирования дисперсионных соотношений функциональные краевые условия на поверхности цилиндра путем алгебраизации с использованием метода ортогональных рядов сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов в рядах по базисным экспоненциальным решениям волновых уравнений, а искомое уравнение записывается как условие равенства нулю указанного функционального определителя.

Представлены примеры реализации описанной методики для пьезоактивных цилиндрических волноводов гексагональной системы со свободной электродированной боковой поверхностью, имеющих эллиптическое поперечное сечение.

Исследованы вопросы определения порядка редукции для бесконечных функциональных дисперсионных определителей в процессе численной реализации предлагаемой методики. Описаны распределения низших ветвей бегущих нормальных электроупругих волн в нескольких типах цилиндров из продольно поляризованной пьезокерамики и гексагональных пьезокристаллов с варьируемыми эксцентриситетами эллиптических поперечных сечений.

О движении тонкого слоя жидкости на внешней поверхности цилиндра

Морад А. М.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Университет Минуфии
moradscience@gmail.com

Основная цель работы — исследование поведения тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости на внешней поверхности бесконечного длинного цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью. При помощи метода осреднения по толщине слоя и метода многомасштабных асимптотических разложений построены уравнения модели мелкой воды, точнее, некоторый аналог уравнений Буссинеска. При этом сила тяжести, играющая ключевую роль при построении модели стандартной мелкой воды, заменяется центробежной силой. В бездисперсионном приближении система уравнений представляет собой два квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, которая в зависимости от параметров, в частности, толщины пленки, может иметь как гиперболический тип, так и эллиптический.

Для решения бездисперсионных уравнений используется один из вариантов обобщённого метода годографа, позволяющий свести уравнения, имеющие вид законов сохранения, к некоторым линейным уравнениям с переменными коэффициентами, для которых роль независимых переменных играют инварианты Римана. В случае, когда система имеет эллиптический тип, показано, что формально система приводится к уравнениям стационарной газовой динамики: $\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$, $\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$. Однако, в отличие от уравнений газовой динамики плотность ρ зависит не от скорости $\boldsymbol{v}$, а от координат (инвариантов Римана).

В случае, когда уравнения имеют гиперболический тип, дополнительные упрощающие предположения о порядках параметров задачи позволяют сконструировать функцию Римана–Грина и построить решение в неявной форме. Для построения решения в исходных переменных используются различные численные методы. Результаты представлены в виде зависимостей от времени функций распределения поля скорости и переменной толщины слоя жидкости со свободной границей по пространственной координате. Показано, что при некоторых начальных данных на свободной поверхности слоя жидкости возможно опрокидывание профиля и возникновение ударных волн.

Для учета влияния дисперсионных эффектов на поведение слоя жидкости построена некоторая редуцированная модель — амплитудное уравнение в окрестности характеристик бездисперсионных гиперболических уравнений. Амплитудное уравнение после некоторых замен переменных приводится к уравнению Кортевега-де-Вриза и, в частности, имеет хорошо известные решение типа периодических кноидальных волн, описываемых эллиптическими функциями Якоби. Это хорошо согласуется с феноменологическими предположениями о характере поведения слоя жидкости на выпуклой поверхности вращающегося цилиндра.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства Египта.

Функции Римана–Грина для уравнений мелкой воды на поверхности неподвижного цилиндра

Морад А. М.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Университет Минуфии
moradscience@gmail.com

Работа посвящена исследованию поведения тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости на внешней поверхности неподвижного бесконечного цилиндра. С математической точки зрения, задача сводится к построению решений бездисперсионного приближения некоторого аналога уравнений мелкой воды — системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Движение слоя жидкости на внешности покоящегося цилиндра обусловлено возмущениями свободной поверхности слоя, некоторым начальным полем скорости, и существенно зависит от возникающей при движении центробежной силы. Структура уравнений модели в зависимости от параметров задачи допускает как гиперболический тип уравнений, так и эллиптический. Для исследования использованы различные подходы — обобщенный и классический метод годографа, построение функции Римана–Грина для гиперболического и функции Грина для эллиптического случая.

Обощенный метод годографа позволяет получить решение системы гидродинамического типа для неизвестных функции $u^k(x,t)$: $u^i_t = \sum_j A^i_j(u)u^j_x$ в случае, когда она приводится к инвариантам Римана $r^k(x,t)$: $r^k_t + \lambda^k(r)r^k_x = 0$, где $\lambda^k(r)$ — собственные значения матрицы $A^i_j(u)$, и удовлетворяет условиям полугамильтоновости, в форме нелинейных алгебраических уравнений: $x - \lambda^i(r)t = w^i(r)$, где $w^i(r)$ — коммутирующие потоки, определяемые решением линейных уравнений в частных производных.

Классический метод годографа, применимый к системе лишь двух уравнений, сводит исходную задачу к решению уравнения для функции $t(r^1,r^2)$ (и аналогичного для функции $x(r^1,r^2)$)

$$Lt(r^1,r^2) \equiv t_{r^1r^2} + a(r^1,r^2)t_{r^1} + b(r^1,r^2)t_{r^2} = 0,$$

где коэффициенты $a(r^1,r^2)$, $b(r^1,r^2)$ определяются исходными уравнениями.

Сочетание обобщенного и классического метода годографа позволило для рассматриваемых уравнений мелкой воды, то есть для конкретных коэффициентов $a(r^1,r^2)$, $b(r^1,r^2)$, при некоторых предположениях о порядках инвариантов r^k, построить функцию Римана–Грина уравнения $Lt = 0$ и функцию Грина для уравнений эллиптического типа, когда инварианты r^1, r^2 — комплексно сопряженные. Указанные функции представимы в виде некоторых гипергеометрических функций, что потребовало при анализе решений использования численных методов. В частности, в работе представлены результаты вычислений, описывающие поведение поля скорости и свободной поверхности слоя жидкости для некоторых типов начальных возмущений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства Египта.

О трудах В. И. Юдовича по математической гидродинамике

Моргулис А. Б., Сазонов Л. И.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
morgulisandrey@gmail.com

В докладе представлен обзор результатов В. И. Юдовича в области математической гидродинамики и их последующего развития как в созданной им школе, так и за её пределами. Именно, будут обсуждаться (а) проблема существования, единственности и регулярности решений начально–краевых задач гидродинамики; (б) проблема исследования устойчивости движений жидкости, в частности, развитие прямого метода в теории устойчивости, и обоснование метода линеаризации.

Кратко поясним существо указанных проблем. Как известно, эволюция полей скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ и давления $p = p(x,t)$ вязкой несжимаемой и однородной жидкости описывается системой Навье–Стокса

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}; \quad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{v} = 0 \text{ на } S = \partial D, \tag{1}$$

где ν — заданный числовой коэффициент (вязкость), D — жидкая область с неподвижной твёрдой границей. Пусть в начальный момент времени скорость жидкости — произвольное гладкое поле. Хорошо известно, что получившаяся таким образом начально-краевая задача в общем случае имеет ровно одно решение на некотром интервале $(0,T)$, $T > 0$, и неизвестно, продолжаемо ли это решение на любой временной интервал. Известно однако, что на произвольном интервале $(0,T)$, $T > 0$ определено обобщённое решение, но неизвестно единственно ли оно и будет ли оно классическим при должной гладкости данных задачи. Ещё более загадочно обстоит дело в случае уравнений Эйлера идеальной жидкости (формально получаются из (1) при нулевой вязкости). В этом случае мы, вообще говоря, вовсе не располагаем каким-либо глобальным решением, пусть даже как угодно обобщённым. Локальное гладкое решение существует. Примеры коллапса таких решений неизвестны. Классический результат В. И. Юдовича — доказательство неограниченной продолжаемости сильных решений двумерных уравнений Эйлера, и описание широкого класса единственности таких решений. В докладе освещается нынешнее положение дел в этой области.

Линеаризация — важнейший инструмент исследования устойчивости, и вопрос обоснование этой процедуры в случае систем с бесконечным числом степеней свободы нетривиален. Для систем типа (1) в ограниченной области такое обоснование было дано В. И. Юдовичем. Эти результаты применимы и для неограниченных областей, но лишь к тем возмущениям, у которых длины волн ограничены сверху. Выделить нужные классы возмущений можно, например, в случае труб, наложением условий периодичности. Однако, при рассмотрении задач обтекания, подобные ограничения неестественны, и встаёт вопрос об их снятии. В докладе представлены последние продвижения в решении этого вопроса.

Периодические конвективные течения в вертикальном слое бинарной смеси при наличии термодиффузии

Моршнева И. В., Петрова Е. И.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
morsh@math.sfedu.ru, morsh4@yandex.ru

Рассматривается задача о возникновении конвекции в бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии, находящейся между двумя твердыми изотермическими вертикальными границами. Эффект диффузионной теплопроводности не учитывается. Возникающие в слое бинарной смеси движения описываются уравнениями конвекции в приближении Обербека–Буссинеска. Уравнения движения имеют стационарное (основное) плоскопараллельное решение с кубическим профилем скорости, линейным распределением температуры, концентрации и постоянным давлением. Линейная устойчивость этого решения изучалась Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицким и Л. Е. Сорокиным.

Данная работа посвящена исследованию ветвления периодических по времени режимов конвекции при колебательной потере устойчивости основного стационарного режима относительно плоских возмущений, периодических по вертикальной переменной. Уравнения возмущений инвариантны относительно круговой симметрии O(2), и применима теория бифуркации рождения циклов в системах с такой симметрией, развитая в работах В. И. Юдовича и И. В. Моршневой. В этих работах показано, что в случае общего положения при переходе параметра через критическое значение от равновесия ответвляется три типа автоколебаний: две бегущие навстречу друг другу волны, связанные инверсионной симметрией, и нелинейная смесь пары бегущих волн. Для определения характера ветвления и устойчивости бегущих волн и нелинейной смеси волн необходимо вычислить коэффициенты уравнений разветвления Ляпунова–Шмидта при различных значениях параметров. Дело сводится к решению ряда однородных и неоднородных краевых задач и задач Коши. Проведенные вычисления показали, что и бегущие волны, и их нелинейная смесь могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Обнаружено, что возможны следующие пять типов ветвления:

1. бегущие волны ответвляются в свехкритическую область и устойчивы, нелинейная смесь волн ответвляется в свехкритическую область и неустойчива;
2. бегущие волны ответвляются в свехкритическую область и неустойчивы, нелинейная смесь волн ответвляется в свехкритическую область и устойчива;
3. бегущие волны ответвляются в свехкритическую область, нелинейная смесь волн ответвляется в докритическую область, все режимы неустойчивы;
4. бегущие волны ответвляются в докритическую область, нелинейная смесь волн ответвляется в свехкритическую область, все режимы неустойчивы;
5. все режимы ответвляются в докритическую область и неустойчивы.

Принцип наименьшего действия и уравнения совместности разрывов на волновых поверхностях в задачах механики континуума

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.
Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
murashkin@ipmnet.ru, radayev@ipmnet.ru

В представляемой работе исследуется проблема постановки граничных условий на волновых поверхностях сильных разрывов, распространяющихся в сплошных средах (в частности, в микрополярных термоупругих континуумах). Для решения обозначенной проблемы используется теоретико-полевой подход к моделям механики и физики континуума. В этом случае с целью полевой формулировки теории необходимо указать естественную плотность термоупругого действия и соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. Действие в вариационной формулировке принципа представляет собой интегральный функционал, варьирование которого осуществляется по физическим полевым переменным при фиксированных пространственно-временных координатах. Однако в некоторых задачах механики континуума область интегрирования изменяется, что приводит к необходимости варьирования пространственно-временных координат. В частности, такое положение дел характерно при выводе «естественных» граничных условий на неизвестных поверхностях сильных разрывов полевых переменных, границах раздела фаз в многофазных средах и иных заведомо неизвестных поверхностях, варьирование которых допускается принципом наименьшего действия.

С точки зрения теплопроводности приоритет отдается гиперболической теории термоупругости второго типа (GNII). Репер локальных поворотов, ассоциированный с элементом микрополярного континуума, предполагается «нежестким». Приводится вывод ковариантных уравнений термоупругого поля. Привлекая аппарат теории однопараметрических групп преобразований, получены различные формы первой вариации действия при совместном варьировании физических полей и пространственно-временных координат. При этом дополнительно могут учитываться «навязанные» граничные условия на поверхности, ограничивающей варьируюмую область, либо на варьируемой границе раздела. Специальная форма первой вариации интегрального функционала действия применяется для определения 4-ковариантных условий совместности сильных разрывов деформаций, экстра-деформаций и температурного смещения при переходе через волновую поверхность. Указанные условия содержат канонические 4-тензоры Пиола—Кирхгофа и энергии—импульса. Трехмерные условия на поверхности сильного разрыва, общепринятые в механике континуума, получаются затем из 4-ковариантных форм.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

Краевые резонансы на изгибных волнах у контактной поверхности в составном анизотропном слое

Мысовский Ю. В., Носок В. И., Сторожев В. И.
Донецкий национальный университет
nvi@donnu.edu.ua

Исследования краевого резонанса при распространении нормальных упругих волн в объекте в виде составного упругого слоя, образованного двумя разнородными контактирующими полуслоями одинаковой толщины, предполагают выявление частотного эффекта выраженной локализации зоны повышенной интенсивности упругих волновых перемещений у границы контакта полуслоев. В данной работе анализируются открытые варианты задачи о проявлениях краевого резонанса у плоскости идеального механического контакта двух разнородных ортотропных полуслоев с абсолютно гибкими нерастяжимыми безинерционными покрытиями плоских граней при нормальном падении на плоскость контакта антисимметричных нормальных упругих волн из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра. Полагается, что плоскость контакта полуслоев произвольно ориентирована по отношению к упруго-эквивалентным направлениям материалов полуслоев, параллельным их плоским граням.

Частотные эффекты выраженной локализации волнового поля у поверхности контакта полуслоев анализируются на основе расчета амплитудных характеристик динамического напряженно-деформированного состояния в приграничной зоне с использованием их явных представлений, полученных в рядах по базисным множествам бегущих и стоячих краевых нормальных волн. Волновые числа базисных нормальных волн в указанных представлениях определяются из бикубических либо биквадратных алгебраических дисперсионных уравнений для компонентов рассматриваемого волновода, а коэффициенты рядов в общем случае определяются на основе алгебраизации функциональных краевых условий идеального контакта плолуслоев из последовательности систем линейных алгебраических уравнений четвертого или шестого порядка.

Представлены результаты численных исследований эффекта краевого резонанса в рассматриваемых составных структурах из ряда керамических и монокристаллических материалов для частотного диапазона, ограниченного сверху максимальной частотой запирания второй моды бегущих антисимметричных нормальных волн в контактирующих телах.

При исследовании краевого резонанса для контактирующих полуслоев из керамических материалов описана связь его выраженности со значениями специальных обобщенных показателей волноводной анизотропии материалов составных частей.

Рассмотрен вопрос о возможности индикативного определения частоты краевого резонанса на основе анализа взаимного расположения ветвей полных дисперсионных спектров для антисимметричных краевых стоячих волн в составных элементах рассматриваемых волноводов и частотных зависимостей для параметров глубинного затухания интенсивности обобщенной поверхностной волны Стоунли вдоль поверхности контакта анизотропных полуслоев.

Конечно-элементный анализ эффективности фокусирующих ультразвуковых излучателей из пористой пьезокерамики с многоэлектродными покрытиями

Наседкин А. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
nasedkin@math.sfedu.ru

В работе исследуются фокусирующие пьезоизлучатели в форме сферических сегментов с технологическим отверстием в центре, предназначенные для генерирования ультразвуковых полей высокой интенсивности с управляемыми характеристиками фокального пятна во внешней акустической среде.

Для повышения эффективности возбуждения акустических волн в качестве активного материала излучателя предлагается использовать пористую пьезокерамику. Как известно, лучшее согласование импедансов пористой пьезокерамики и акустической среды позволяет обойтись без использования набора согласующих слоев, которые для сферических преобразователей существенно усложняют их изготовление и сборку. Частичное управление характеристиками фокального пятна в акустической среде может быть осуществлено за счет нанесения на один и на оба торца излучателя системы разрезных электродов с пропилами и подачей разных значений потенциалов на отдельные электроды этой системы.

Моделирование работы пьезоизлучателей осуществлялось с использованием многомасштабных конечно-элементных технологий. На микроуровне исследовались пористые пьезокерамические материалы. Здесь на основе комплексного подхода, включающего методы эффективных модулей и конечных элементов, перколяционные модели представительных объемов и алгоритмы расчета полей неоднородной поляризации, определялись осредненные свойства пористых пьезокерамик заданных составов и пористости. В дальнейшем пористая пьезокерамика рассматривалась как макрооднородная пьезоэлектрическая среда с эффективными характеристиками.

Далее строились твердотельные и конечно-элементные модели сферических пьезоизлучателей с толщинной поляризацией, многоэлектродном покрытием и пропилами между электродами. Для построенных моделей излучателей проводились расчеты на определение частот электрических резонансов и антирезонансов и импедансных частотных характеристик. На следующем этапе исследовались модели пьезоизлучателей, погруженных в вязкие акустические или жидкие среды. Здесь также строились твердотельные и конечно-элементные модели всей системы и проводились расчеты характеристик пьезоизлучателя, фокальной зоны в акустической среде и диссипативного разогрева для режима установившихся колебаний и для нестационарных процессов.

Все описанные выше модели и методы решения связанных задач электроупругости, акустики и теплопроводности, в том числе с учетом внешних электрических цепей, были реализованы в вычислительном комплексе ANSYS с использованием командного макроязыка APDL, а также с использованием связанных технологий ANSYS Multi-field Analysis и CFX. Разработанные программы позволили провести серии оптимизационных расчетов и определить диапазоны входных данных, обеспечивающие требуемую эффективность пьезоизлучателей.

Модели активных материалов и устройств в программном комплексе ACELAN V14

Наседкин А. В.[1]**, Скалиух А. С.**[1]**, Соловьев А. Н.**[1,2]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
nasedkin@math.sfedu.ru, soloviev@math.sfedu.ru

В докладе представлены математические модели вычислительного конечно-элементного программного комплекса ACELAN V14. Новый релиз ACELAN ориентирован не только на составные упругие, пьезоэлектрические и акустические среды, но и дополнен более общими средами со связанностью механических, электрических, магнитных и тепловых полей.

Модели термоэлектромагнитоупругости в частных случаях позволяют исследовать упругие, термоупругие, пьезоэлектрические, пьезомагнитные, пироэлектрические и магнитоэлектрические среды любого типа анизотропии, в том числе нагруженные на внешние акустические среды. Как и в более ранних версиях, в модели включены возможности учета различных механизмов демпфирования (затухания), как для механических, так и для электрических и магнитных полей. В связанных моделях используются также уравнения теории акустики для вязких сред. В частных случаях эти модели допускают применение метода разложения по модам колебаний с полным разделением систем на независимые уравнения для мод для нестационарных задач и для задач об установившихся колебаниях.

Основные граничные условия дополнены возможностями учета поверхностных эффектов, что позволяет исследовать также наноразмерные активные материалы в рамках популярных в настоящее время теорий сплошных сред с поверхностными напряжениями и их обобщений. Для двумерных по пространственным переменным задач предусмотрен выбор моделей с плоской деформацией и с плоским напряженным состоянием по механических полям, а также выбор осесимметричных моделей.

Для всех задач реализуются технологии метода конечных элементов на основе обобщенных или вариационных постановок. При этом используются различные численные алгоритмы, позволяющие сохранять симметричную структуру конечно-элементных квазиопределенных матриц (структуру матриц для задач с седловой точкой), а также алгоритмы метода разложении по модам. Для повышения точности расчетов, особенно для наноразмерных и нелинейных задач, предусмотрены возможности автоматического (по желанию пользователя) перехода к безразмерным постановкам. Важными особенностями пакета являются также заложенные в нем оригинальные модели необратимых процессов поляризации и переполяризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов и модели композитных материалов.

Анализ известных конечно-элементных программных комплексов показывает, что принятые в пакете ACELAN V14 модели и технологии существенно повышают возможности анализа сложных активных материалов и дают способы решения новых задач со связанностью физико-механических полей, в том числе для наноразмерных и композитных тел.

Фильтрационная конвекция в параллелепипеде и разрушение косимметричного семейства стационарных движений

Немцев А. Д., Цибулин В. Г.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
vtsybulin04@gmail.com

Для исследования конвективных режимов многокомпонентной жидкости в пористом параллелепипеде с краевыми условиями, допускающими формирование семейства косимметричных стационарных движений, авторами был развит метод расчета (Вестник ЮЦ РАН, 2009; J. Comp. Phys., 2012), основанный на схеме смещенных сеток. При дискретизации задачи используются узлы пяти типов: для давления, трех компонент вектора скорости и общие узлы для температуры и примесей. С помощью разностных отношений первого порядка и операторов вычисления среднего построена аппроксимация уравнений, сохраняющая свойство сильной неединственности решений системы.

Развитый метод был применен для исследования конвективных движений двухкомпонентной жидкости в пористом параллелепипеде. На двух боковых гранях $\partial_1 D = \{y=0\} \bigcup \{y=L_y\}$ ставились условия отсутствия теплового и концентрационных потоков, а на остальных гранях поддерживались равновесные распределения температуры (подогрев снизу) и примесей. В численном эксперименте установлено, что в зависимости от глубины области L_y могут формироваться трехмерные или плоские движения.

Ответвление стационарных режимов изучалось для параллелепипедов длины $L_x = 2$ и высоты $L_z = 1$, заполненных теплопроводной жидкостью с примесью. Анализировалось влияние глубины $L_y \in [0.5, 1]$ и чисел Рэлея λ_1, λ_2 при фиксированных значениях коэффициентов теплопроводности ($\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0.2$) и кинетических коэффициентов ($\beta_1 = \beta_2 = 1$). Представлены результаты, полученные при расчетах на сетке из $40 \times 20 \times 20$ узлов,. При глубине области $L_y = 1$ и параметрах $\lambda_1 = 120$, $\lambda_2 = 10$ все движения являются стационарными и существенно трехмерными.

При малом расстоянии между теплоизолированными гранями ($L_y < 1$) получаются устойчивые плоские стационарные движения жидкости в плоскостях $y = const$, т.е. решения с полем скорости $(v^1, 0, v^3)$. Эти движения образуют непрерывное семейство стационарных режимов, что соответствует сильной неединственности решений. Численно проанализирована устойчивость режимов из семейства к трехмерным возмущениям для теплопроводной жидкости без примесей ($S = 0$) и областей глубины $0.5 < L_y < 0.6$. Эксперимент состоял в том, что начальное распределение температуры задавалось в виде $\Theta = \Theta_s + \Theta_p$, где Θ_s — температура, соответствующая стационарному режиму, а $\Theta_p = d \sin \frac{k\pi y}{L_y}$ — возмущение. Скорости и давление брались такими же, как и для стационарного режима. При возмущениях $\Theta_p = d \sin \frac{\pi y}{L_y}$ и $\Theta_p = d \sin \frac{3\pi y}{L_y}$ в результате установления получались плоские режимы. При возмущении $\Theta_p = d \sin \frac{2\pi y}{L_y}$, в зависимости от глубины области L_y и исходного стационарного движения жидкости могут устанавливаться плоские или трехмерные режимы.

Работа поддержана РФФИ (код проекта 14-01-00470).

Диагностика термомеханических свойств предварительно напряженного термоупругого слоя

Нестеров С. А., Дударев В. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
1079@list.ru

В настоящее время исследования в области функционально-градиентных материалов привлекают большое внимание ученых. Как известно, эти материалы являются неоднородными по своему строению и могут находиться в преднапряженном состоянии. Поэтому учет неоднородности и предварительных напряжений важен для адекватного описания их термомеханического поведения. В этой связи для идентификации характеристик термоупругих функционально-градиентных материалов необходимо решать коэффициентные обратные задачи термоупругости, которые мало исследованы. В работе предложен подход по восстановлению усредненных характеристик неоднородного предварительно напряженного трансверсально-изотропного термоупругого слоя по анализу его толщинных колебаний. Прямая задача о толщинных колебаниях неоднородного преднапряженного термоупругого слоя после обезразмеривания и применения преобразований Лапласа и Фурье (параметр преобразования Фурье полагался равным нулю) сводилась к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах и обращении полученных решений на основе теории вычетов. Для решения обратной задачи на основе обобщенного соотношения взаимности для предварительно напряженных термоупругих тел получены операторные соотношения, устанавливающие взаимосвязь между искомыми и измеряемыми характеристиками. Усредненные термомеханические характеристики слоя восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение характеристик в классе положительных ограниченных линейных функций методом минимизации функционала невязки. На втором этапе определялись поправки реконструируемых функций путем решения соответствующих интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. После нахождения поправок строилось новое приближение, и осуществлялся итерационный процесс уточнения восстанавливаемых характеристик. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении некоторого порогового значения функционала невязки. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении некоторого порогового значения функционала невязки. В работе исследовалось влияние зашумления входной информации, вида нагрузки, монотонности функций на результат реконструкции. Выяснены значения предварительных напряжений, которые оказывают значительное влияние на физические поля термоупругого слоя и на результаты реконструкции его неоднородных характеристик. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что предложенный метод решения коэффициентных обратных задач термоупругости для преднапряженных тел эффективен для реконструкции широкого класса неоднородностей.

Автор благодарит Ватульяна А. О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00196-а).

Разгон и торможение эллиптического цилиндра в возмущенной жидкости с учетом отрыва частиц жидкости от его поверхности

Норкин М. В., Яковенко А. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
norkin@math.rsu.ru

Задачи о неустановившемся движении твердых тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости представляют большой интерес с точки зрения приложений в морской гидродинамике. В последние годы большую актуальность приобрели задачи, в которых необходимо учитывать отрыв частиц жидкости от поверхности плавающего тела. Это явление оказывает существенное влияние на реакцию жидкости на тело, а также на картину течения жидкости вблизи зон отрыва. Анализ опубликованных работ показывает, что в настоящее время достаточно хорошо изучены задачи об ударе с отрывом в постановке Л. И. Седова (где рассматривается момент, непосредственно следующий после удара). Проведенные в этой области исследования позволяют сделать вывод о том, что отрыв жидкости от тела при ударе происходит в подавляющем большинстве случаев. В гораздо меньшей степени изучены нестационарные нелинейные задачи о начальном этапе движения твердых тел в жидкости с учетом отрыва. Сложность этих задач обусловлена нелинейностью краевых условий на свободных границах жидкости и неизвестностью самих границ, на которых эти условия заданы.

В настоящей работе рассматривается задача об отрывном разгоне или отрывном торможении эллиптического цилиндра в возмущенной идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Предполагается, что возмущение жидкости вызвано безотрывным разгоном цилиндра на малых временах. Особенностью данной задачи является то, что в результате отрыва вблизи поверхности тела образуются каверны и появляются новые внутренние свободные границы. Исследование поставленной задачи состоит из двух основных этапов. Вначале строится решение задачи о безотрывном разгоне эллиптического цилиндра на малых временах. Затем, после смены режима движения, рассматривается задача об отрывном разгоне или отрывном торможении тела в жидкости. Изучение отрыва сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. Последняя задача решается при помощи специального итерационного метода, в котором последовательно уточняются неизвестные заранее зоны отрыва и контакта.

Основное внимание в работе уделяется исследованию влияния скачка ускорения цилиндра на связность зоны отрыва, а также на форму внутренней свободной границы жидкости на малых временах. Показано, что если быстрый разгон тела начинается не из состояния покоя, а из состояния волнения, то отрыв может произойти сразу по двум различным участкам поверхности тела. При плавном увеличении ускорения тела эти зоны смыкаются, образуя большую каверну за телом. Аналогичная картина наблюдается при быстром торможении, когда жидкость срывается с поверхности тела в его передней части. При повторном скачке ускорения цилиндра количество зон отрыва может увеличиться. Среди других факторов, оказывающих существенное влияние на связность зоны отрыва, отметим вращение цилиндра, а также наличие в жидкости других плавающих тел.

Резонансные режимы в задаче Куэтта–Тейлора с неподвижным внешним цилиндром

Овчинникова С. Н.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
ovch.09@mail.ru

На примере задачи Куэтта–Тейлора рассматриваются динамические системы с симметрией, зависящие от нескольких параметров. В пространстве параметров у этой задачи, обладающей группой симметрии $G = SO(2) \times O(2)$, существуют точки бифуркаций высоких коразмерностей — значения параметров, которым отвечает несколько независимых ненулевых решений (нейтральных мод) линеаризованной на течении Куэтта системы Навье–Стокса. Взаимодействие нейтральных мод в малой окрестности каждой такой точки описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии. Исследование амплитудных систем позволяет наблюдать появление вторичных, третичных и следующих за ними течений жидкости между вращающимися цилиндрами. Для невращательно симметричных течений у задачи Куэтта–Тейлора имеется семь видов точек бифуркации коразмерности 2 (резонансы Res 0 — Res 6), которым соответствуют амплитудные системы, различающиеся дополнительными резонансными слагаемыми.

Существование различных точек бифуркации коразмерности 2 зависит от направления вращения цилиндров. Если R_{1*} — критическое число Рейнольдса, при котором происходит первая потеря устойчивости течения Куэтта, то для случая неподвижного внешнего цилиндра на отрезке $[R_{1*}, 10R_{1*}]$ найдены лишь точки резонансов Res 0, Res 1 с двумя парами квантовых азимутальных и осевых чисел (m, k) и (n, l). В малой окрестности этих точек у амплитудных систем, помимо течения Куэтта, могут существовать другие предельные решения: две пары инверсионно связанных спиральных m- и n- волн, две азимутальные m- и n- волны, две пары инверсионно связанных двойных спиральных волн первого и второго семейства и суперпозиция азимутальных m- и n- волн. Таким стационарным решениям амплитудных систем на инвариантных подпространствах, порождаемым различными однопараметрическими подгруппами группы симметрии $\mathcal{G}$, соответствуют стационарные режимы системы Навье – Стокса. Кроме того, амплитудные системы обладают дополнительной симметрией, поэтому могут существовать стационарные решения, которым отвечают нестационарные решения полной системы Навье–Стокса.

Условия существования и устойчивости всех перечисленных резонансных режимов зависят от коэффициентов и констант надкритичности. В случае резонанса Res 0 для условий устойчивости получаются аналитические выражения. Их численный анализ сводится к решению систем линейных неравенств. Условия устойчивости двойных спиральных волн и суперпозиции азимутальных m- и n- волн в точках Res 1 требует дополнительных громоздких расчетов. Для найденных точек Res 0 и Res 1 вычислены коэффициенты амплитудных уравнений и проведен численный анализ условий существования и устойчивости резонансных режимов. Найдены области на плоскости надкритичности, где устойчивы некоторые из этих режимов.

Решения нелинейной задачи вибрационной конвекции

Овчинникова С. Н., Прозоров О. А.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
ovch.09@mail.ru, oaprozorov@gmail.com

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей плоский горизонтальный слой, подогреваемый снизу или сверху. Слой как единое целое совершает гармонические колебания с амплитудой a вдоль вектора $\mathbf{s} = (cos\varphi, sin\varphi)$, угол φ отсчитывается от оси z. Предполагается, что частота колебаний ω велика, а амплитуда скорости a/ω конечна, период колебаний много меньше остальных гидродинамических масштабов времени. При этих предположениях к уравнениям конвекции в приближении Обербека–Буссинеска при помощи метода осреднения выведена система для плавных компонент неизвестных; по решению этой системы можно судить об устойчивости решения полной системы.

В данной задаче в качестве управляющего параметра можно выбрать механический параметр, например, амплитуду, скорость вибрации или градиент температуры. В работе управляющим параметром выбран градиент температуры. Основное внимание уделено возникновению вторичных режимов при потери устойчивости равновесия осредненной системы (квазиравновесия), когда число Рэлея превышает критическое значение, определяемое из линейной задачи. Нелинейная задача для возмущений решается методом Ляпунова–Шмидта. Исследуются случаи пониженной гравитации и невесомости. При значениях физических параметров, отвечающих реальным жидкостям, приводятся значения критического чисел Рэлея, а также порядки амплитуд возникающих за порогом устойчивости вторичных решений. В целях контроля точности линейные краевые задачи в методе Ляпунова–Шмидта решаются как численно, так и аналитически.

Рассчитаны коэффициенты амплитудного уравнения, проанализированы области жесткой и мягкой потери устойчивости квазиравновесия. Полученные результаты дают возможность исследовать периодические решения полной неосредненной системы вблизи потери устойчивости квазиравновесия. Полная (неосредненная) задача решается методом конечных элементов, реализованных в пакете FreeFem++. Рассматривается плоская задача с условиями периодичности по одной пространственной переменной. Показано, что найденные методом Ляпунова–Шмидта решения осредненной задачи, а также посчитанные по ним пульсационные добавки, дают хорошее приближение к решению нестационарной задачи. При исследуемых параметрах решение задачи выходит на периодическое решение, осреднение по его периоду показывает наличие стационарной ячейки, на которую накладываются высокочастотные добавки. Показано, что масштабы скорости, давления и температуры задач для плавных и быстрых компонент хорошо согласуются с теми, значениями, что даются теоретическими оценками метода осреднения.

Упругие волны в поперечно-анизотропном слое с локальным участком выгиба

Пачева М. Н.
Донецкий национальный университет
marinapacheva@mail.ru

Исследование закономерностей распространения упругих волн вдоль поперечно-анизотропного упругого слоя с локальными особенностями геометрического строения в виде выгибов различной формы помимо фундаментального интереса ориентировано на целый ряд важных приложений, прежде всего в геоакустической диагностике и акустоэлектронике. В частности, наличие выгибов дугообразного либо ломано-прямолинейного очертания моделирует одну из характерных особенностей строения пластов полезных ископаемых, прикладные задачи акустической диагностики которых непосредственно связаны с изучением специфики прохождения волн деформаций различного типа по участку плоско-параллельного упругого волновода, содержащему зону выгиба. При высокой степени актуальности данной проблематики, полноценные результаты ее теоретических исследований отсутствуют.

В этой связи целью представляемого исследования является разработка теоретической численно-аналитической методики решения задач о прохождении нормальных упругих волн продольного сдвига по трансверсально-изотропному деформируемому слою с жестко закрепленными границами, содержащему локальный участок выгиба дугообразного кругового или треугольного ломаного профиля.

Решение рассматриваемых задач базируется на концепции метода частичных областей, в рамках которой выделяются участки волновода с канонической геометрией и представления волновых полей для выделяемых фрагментов описываются рядами по специальным базисным однородным решениям соответствующих краевых задач стационарного динамического деформирования. На следующем этапе построения решения осуществляется сшивание волновых полей, порождающее бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов по однородным решениям. Получаемые системы в процессе реализации численных исследований редуцируются до порядков, обеспечивающих требуемый уровень погрешности в условиях идеального механического контакта стыкуемых фрагментов.

В качестве промежуточного результата исследования получено и проанализировано дисперсионное соотношение для упругих нормальных волн продольного сдвига, распространяющихся вдоль окружного направления трансверсально-изотропного волновода концентрического кругового сечения.

Представлены отдельные примеры реализации описанной методики, в которых для алгебраизации граничных условий контакта выделенных составных частей волновода используется метод ортогональных рядов. Приведены результаты анализа ряда кинематических и энергетических характеристик исследуемых волновых движений. В частности, получен ряд оценок влияния характеристик участка выгиба на уровни интенсивности, формы и потоки мощности в волнах, отражающихся от рассматриваемого дефекта, а также на уровни интенсивности, формы и потоки мощности для волнового поля за участком дефекта.

Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде

Перепечко Ю. В.[1], Сорокин К. Э.[1], Имомназаров Х. Х.[2]
[1]*Новосибирск, Институт геологии и минералогии СО РАН*
[2]*Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*
imom@omzg.sscc.ru, perep@sibmail.ru, konst_sorokin_85@ngs.ru

Задача о распространении акустических волн на фоне гидродинамического движения гетерогенных сплошных сред возникает при анализе многих технологических и природных систем. В частности, моделирование эволюции флюидных систем земной коры и литосферы при внешнем импульсном воздействии требуют использования нелинейных, согласованных моделей, способных описывать динамику тепломассопереноса в гетерофазных многокомпонентных средах в широком диапазоне пространственных и временных масштабов. В настоящей работе нелинейные уравнения движения двухжидкостной среды получены в рамках метода законов сохранения. Метод, требующий выполнение таких физических принципов, как законы сохранения, начала термодинамики и групповая инвариантность уравнений движения, обеспечивает термодинамическую согласованность уравнений двухскоростной модели. Модель построена в однотемпературном приближении в предположении больших времен релаксации давления между фазами. Для численного анализа использовался метод контрольного объема, который, при использовании полностью неявной разностной схемы, также обеспечивает физическую корректность результатов моделирования динамики двухскоростной среды. Наличие дополнительного давления в такой гетерофазной среде потребовало модификации процедуры SIMPLE. Сложно структурированная СЛАУ, составленная уравнениями на поправки к давлениям, решалась адаптированным методом переменных направлений, который обеспечил сходимость итерационной процедуры для частых сеток. Анализ сходимости численного алгоритма показал необходимость учета сжимаемости фаз при построении алгоритма SIMPLE, что существенно повышает устойчивость разностной схемы.

В настоящей работе проведено исследование акустического воздействия на конвективное течение гетерофазной среды, составленной сжимаемыми вязкими жидкостями, для различных значений параметров среды, параметров источника и типов граничных условий. Результаты численных расчетов показали заметное влияние акустического воздействия на интенсивность конвекции двухжидкостной среды, особенно при низких числах Рэлея. При вариации интенсивности точечного источника акустических колебаний и увеличении чисел Рэлея одновихревой режим течения сменяется двухвихревым. Вариация расположения акустического источника приводит к изменению интенсивности конвективного теплопереноса на 10-20%. Результаты расчетов показали эффективность модели, как для исследования гидродинамического течения гетерофазной среды, так и распространения в ней акустических колебаний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 13-01-00689а, 12-05-00625а).

Вынужденные колебания в системе анизотропные полоса – полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред. Сравнительная характеристика свойств энергетических полей

Ремизов М. Ю.
Ростовский государственный строительный университет
Remizov72@mail.ru

Влияние различных накладок, расположенных вдоль границы полубесконечной среды, рассматривалось неоднократно. Для анизотропных моделей полубесконечных подложек подробно исследовано влияние свойств приграничных неоднородностей на дисперсионную зависимость и на поверхностные волны.

Однако, анализу энергии, переносимой средой с накладкой, посвящено меньше публикаций. Проведены исследования энергетики изотропной полосы и полуплоскости, соединенных между собой, где для полуплоскости бралась изотропная модель, стратифицированная по глубине: $(\lambda(z),\ \mu(z),\ \rho(z))$. Среди исследований задач с неоднородным пакетом следует отметить, что в рамках интегрального подхода изучаются энергетические поля, возбуждаемые при динамическом воздействии на композиционные материалы с произвольной анизотропией упругих свойств их слоев, построенные в виде свертки матрицы Грина с вектором напряжений заданной нагрузки. При этом описаны свойства электроупругих волн, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником в пьезоэлектрической полуограниченной среде.

В данной работе впервые рассмотрена задача о вынужденных колебаниях полосы, соединенной с полуплоскостью, где для обеих областей предполагалась анизотропия, класс которой может распространяться вплоть до орторомбической сингонии включительно для жесткого и скользящего соединения полосы с полуплоскостью. Получив на основе интегрального преобразования Фурье представления полей перемещения, применяется метод контурного интегрирования, после определения области аналитичности подинтегральных функций. Исследовав перемещения для каждой из областей, рассматриваются вопросы, связанные с переносом потоков энергии и с зависимостью этой характеристики от геометрических параметров гармонической поверхностной нагрузки.

Проведенное исследование впервые показало соотношение между величинами потоков энергии, переносимыми каждой из сред в отдельности, по отношению к общему потоку, подводимому к бесконечному слою на полуплоскости через площадку нагружения различной длины. В рамках такой схемы исследования возникающего энергетического баланса проведен сравнительный анализ полученных свойств потоков энергии при жестком и скользящем соединении сред.

Для численного исследования были использованы следующие анизотропные материалы полосы и полуплоскости соответственно: титанат бария и бериллий.

Периодические решения ОДУ в банаховом пространстве с высокочастотными слагаемыми

Сазонов Л. И.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
lsznv.46@mail.ru

В классической теории метода усреднения Боголюбова-–Крылова—Митропольского в невырожденном случае полностью исследован вопрос о построении и обосновании полной асимптотики периодического решения нелинейной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Некоторые случаи вырождения исследовались в работах В. Б. Левенштама и его соавторов для линейной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и для линейных параболических задач второго порядка с высокочастотными коэффициентами и граничными условиями Дирихле.

В данной работе для ОДУ в комплексном банаховом пространстве X

$$\frac{du}{dt} + A(\omega, t)u = f(\omega, t)$$

рассматривается вопрос о существовании $2\pi/\omega$–периодического решения при достаточно больших ω. Предполагаются выполненными следующие предположения:

$A(\omega, t)$ — оператор-функция со значениями в пространстве $L(X)$ всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, представимая в виде ряда

$$A(\omega, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{k,n} \omega^{-k} e^{in\omega t},$$

где $A_{k,n} : X \to X$ – ограниченные операторы, причем выполнены условия $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \|A_{k,n}\| |\omega_0^{-k}| (1 + |n|)^s < \infty$, при некотором $\omega_0 > 0$ и всех $s = 0, 1, ...$;

$f(\omega, t)$ — вектор–функция со значениями в X, представимая в виде ряда $f(\omega, t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_{k,n} \omega^{-k} e^{in\omega t}$, причем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \|f_{k,n}\| |\omega_0^{-k}| (1 + |n|)^\sigma < \infty$, при некотором $\sigma \geq 0$.

Найдены достаточные условия, при которых при достаточно больших ω существует $2\pi/\omega$–периодическое решение $u(\omega, t)$, определяемое сходящимся рядом $u(\omega, t) = \sum\limits_{k=-m}^{\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} u_{k,n} \omega^{-k} e^{in\omega t}$. В невырожденном случае, т.е. при обратимости оператора $A_{00} : X \to X$, разложение $u(\omega, t)$ ведется по неположительным степеням ω. Рассмотрен также вырожденный случай, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A_{00}, причем отвечающее ему корневое подпространство конечномерно. Определены дополнительные условия, гарантирующие существование периодического решения с указанным разложением.

Осреднение некоторых уравнений гидродинамики с малой вязкостью

Сандраков Г. В.
Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко
sandrako@mail.ru

Предполагается рассмотреть начально-краевые задачи для нестационарных уравнений Стокса и Навье-Стокса с периодическими быстро осциллирующими по пространственным переменным данными, имеющими нулевое среднее. Эти задачи формулируются в ограниченных областях, например, трехмерных. Период осцилляций данных определяется малым положительным параметром ε и коэффициент вязкости ν в уравнениях этих задач также может рассматриваться как положительный параметр. Будут приведены оценки решений таких задач, которые зависят от отношений некоторых степеней параметров ε и ν. В общем случае, эти оценки для вектора скорости являются актуальными, когда коэффициент вязкости ν не является слишком малым в сравнении с ε^2. При выполнении этого условия соответствующие решения являются асимптотически малыми в энергетической норме, что характеризует свойство сглаживания решений. В случае, когда коэффициент вязкости имеет порядок ε^2, подходящие оценки получены в предположении «малости», нелинейности в уравнениях рассматриваемых задач. При выполнении этих условий асимптотика для вектора скоростей может содержать быстро осциллирующие слагаемые.

Для точной формулировки конкретного утверждения приведем постановку задачи. Пусть заданы ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ с гладкой границей, положительное число T, гладкая и финитная вектор-функция $f \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)^3$. Определим вектор-функцию u и функцию p как «слабое», решение начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса:

$$
\begin{gathered}
u_t' - \nu\,\Delta\, u + \sigma\, u \cdot \nabla u + \nabla p = m_\varepsilon\, f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \\
\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \\
u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где действительные параметры ε, ν и σ удовлетворяют неравенствам ограниченности $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 < \nu \leqslant \nu_0$ и $|\sigma| \leqslant \sigma_0$ для фиксированных ε_0, ν_0 и σ_0. Кроме того, матричнозначная функция m_ε в (1) является ε-периодической и имеет вид $m_\varepsilon = m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где компоненты матричнозначной функции $m(y)$ являются гладкими 1-периодическими (периодическими с периодом 1) функциями.

Теорема. *Пусть u является решением задачи (1). Тогда*

$$
\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \nu\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{3\times3})} \leqslant C(\varepsilon^2 + \varepsilon^2\,\nu^{-1}),
$$

где постоянная C не зависит от ε, ν и σ.

Оценка этой теоремы является актуальной при малых ε, если коэффициент вязкости не является слишком малым в сравнении с ε^2. В случае, когда коэффициент вязкости имеет порядок ε^2, подходящие оценки формулируются сложнее и асимптотика для вектора скоростей может содержать быстро осциллирующие слагаемые. Для доказательства таких утверждений используются асимптотические методы и методы теории осреднения.

Математическая модель геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин

Саркисян А. А.[1], **Саркисян С. О.**[1,2]
[1]*Гюмрийский государственный педогогический институт*
[2]*Ереван, НАН Армении*
armenuhis@mail.ru

Как в постановке классической теории упругости построение математической модели и изучение поведения геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин (и оболочек) имеет определённый теоретический интерес, а также, важное значение для приложений.

В работе рассматриваются микрополярные тонкие пластинки, упругие прогибы которых сравнимы с их толщиной и вместе с тем малы по отношению к основным размерам, одновременно малы как углы поворота нормалей к срединной плоскости до деформации, так и их свободные повороты. Основные трёхмерные уравнения изучаемой задачи являются уравнения равновесия (или движения) и соотношения упругости микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

При построении математической модели геометрически нелинейных микрополярных тонких пластин сначала изучается геометрическая сторона проблемы. Принимая, что срединная плоскость пластинки получает большие прогибы, вычисляются длины элементов (параллельных до деформации координатным осям) и угол между ними после деформации с учётом независимо от перемещений свободного поворота. В результате определяются компоненты деформации $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}$ срединной плоскости, в выражениях которых кроме линейных членов присутствуют также нелинейные члены. Принимая в основу обобщенную на микрополярный случай кинематических гипотез Тимошенко выведены формулы для деформаций, изгибов-кручений для любого слоя пластинки отстоящей от срединной поверхности на расстояние z. На основании соответствующих статических гипотез, получены формулы для основных силовых и моментных напряжений в зависимости от координаты z. В частности получены соответствующие выражения для силовых и моментных напряжений в срединной плоскости (z=0).

Внутренние усилия и моменты (как силового, так и моментного происхождения) в пластинке определяются по соответствующим формулам. Составляются уравнения равновесия (или движения) с учётом больших перемещений срединной плоскости пластинки. Выводятся также формулы типа соотношения упругости (т.е. для удельных усилий растяжения-сжатия и сдвига, удельных изгибающих и крутящих моментов, как силового, так и моментного происхождения) для микрополярных упругих тонких пластин.

В результате получены основные уравнения геометрически нелинейной прикладной теории микрополярных упругих тонких пластин, (это уравнения равновесия или движения, соотношения упругости и геометрические соотношения), к которым присоединены соответствующие граничные и начальные условия. Полученная система уравнений приведена к уравнениям перемещений и свободных поворотов в области срединной плоскости пластинки.

О влиянии структурных параметров и граничных условий на звукоизлучение цилиндрической оболочки из волокнистого композита с полимерной матрицей

Сафроненко В. Г.[1], **Шутько В. М.**[2]
[1]*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ*
[2]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
safron@math.sfedu.ru

Развиты математическая и компьютерная модели виброакустики многослойных композитных оболочек вращения из волокнистого композита с полимерной матрицей при воздействии вибрационных нагрузок. Используется модель типа Тимошенко, учитывающая деформации поперечного сдвига и инерции поворотов. По внешней поверхности оболочки могут контактировать с линейной акустической средой. Для определения дальнего поля излучения применяется метод моделирования локального импеданса, при котором априорно задается связь меду динамическим давлением и скорости или амплитуд смещения на поверхности контакта. При этом используются точные решения модельных задач. Поле акустического давления в окружающей оболочку сжимаемую среду определяется с помощью Гельмгольца. Модели направлены на анализ модовой структуры формирования вибрационных и акустических полей в аспекте проблемы демпфирования колебаний. Исследовались амплитудно-частотные характеристики, рассчитанные для максимальных уровней акустического давления зависимости от структурных параметров оболочки в условиях жесткого защемления и шарнирного опирания торцов круговой цилиндрической оболочки. При этом использовались определяющие соотношения для полимерного связующего, которые учитывают нелинейный и немонотонный характер зависимостей физико-механических характеристик от частоты нагружения и температуры. Анализировалось излучение акустической энергии во внешнюю среду при учете внутренних потерь механической энергии в теле оболочки. Численные эксперименты выполнялись на круговой цилиндрической оболочке. При этом искомые функции решения представлялись комплекснозначными рядами Фурье по окружной координате с последующим формированием разрешающей системы уравнений нормального типа 10 порядка. Полученные квазиодномерные системы, содержащие номер окружной гармоники, решались методом перехода к задачам Коши. При этом использовался метод ортогональной прогонки, обеспечивающий устойчивый счет при интегрировании по образующей оболочки. В качестве основных структурных параметров волокнистого композита рассмотрены углы армирования и объемное содержание волокна в композите. Проведен сравнительный численный помодовый и общий анализ максимальных значений акустического давления в дальнем поле при варьировании указанных параметров для жесткого защемления и шарнирного опирания торцов.

Математическое моделирование изоэлектрического фокусирования в «аномальных» режимах для бесконечномерных смесей

Сахарова Л. В.
Ростовский институт кооперации
L_Sakharova@mail.ru

Построена одномерная математическая модель изоэлектрического фокусирования (ИЭФ) для случая бесконечномерной смеси разделяемых амфотерных компонент. Для описания электрохимической системы использована функция аналитической концентрации компонент смеси $\xi(k,x)$, где k — параметр сорта компоненты (например, произведение констант диссоциации сорта). Предполагается, что подвижности $\mu(k)$ и исходные количества $m(k)$ компонент также являются функциями параметра k. Для связи неизвестной функции $\xi(k,x)$ с кислотностью раствора $\psi = \ln(H/k_w)$ (где H — концентрация ионов водорода, k_w — константа диссоциации воды) использованы: следствие закона сохранения массы (дифференциальное уравнение), обобщенный закон Ома и условие электронейтральности (алгебраические уравнения). Вместо краевого условия использовано интегральное условие, являющееся следствием закона сохранения массы в отсутствии массопереноса через торцевые границы камеры. Модель получена обобщением соответствующей конечномерной модели, заключающемся в замене суммирования по индексу, соответствующему номеру компоненты, на интегрирование по параметру сорта.

Исследуемая задача может быть представлена в виде:

$$\frac{d\xi(k,x)}{dx}\frac{1}{\xi(k,x)} = \frac{\lambda J}{\sigma(x)}\theta(k,\psi)F(k,\psi) \tag{1}$$

$$F(k,\psi) = \left(\int_{k_1}^{k_2} \xi(k,x)\frac{d\theta(k,\psi)}{d\psi}dk\right)\left(\int_{k_1}^{k_2} \xi(k,x)\left(\theta^2(k,\psi) + \frac{d\theta(k,\psi)}{d\psi}\right)dk\right)^{-1}, \tag{2}$$

$$\theta(k,\psi) = \frac{\operatorname{sh}(\psi - \psi(k))}{\delta(k) + \operatorname{ch}(\psi - \psi(k))}, \qquad \sigma(x) = \int_{k_1}^{k_2} \mu(k)\xi(k,x)\,\frac{d\theta(k,\psi)}{d\psi}\,dk, \tag{3}$$

$$\int_{k_1}^{k_2} \xi(k,x)\theta(k,\psi)\,dk = 0, \qquad \int_0^l \xi(k,x)\,dx = m(k), \tag{4}$$

где λ — стандартный электрохимический параметр; J — плотность электрического тока; l — длина камеры; $\sigma(x)$ — проводимость электрофоретической камеры; $\theta(k,\psi)$ и $F(k,\psi)$ — вспомогательные функции; k_1 и k_2 — пределы изменения параметра k; $\delta(k)$ — электрохимический параметр системы.

Получено асимптотическое решение задачи (1) – (4) в «аномальных» режимах, соответствующих появлению «плато» на вершине профиля концентрации $\xi(k,x)$ при фиксированном k. При решении задачи использован построенный ранее метод экспоненциальных асимптотик, заключающийся в представлении решения $\xi(k,x)$ в виде экспоненциальной функции и применении к ней асимптотических формул Лапласа в окрестности изоэлектрической точки x_kI (т.е. точки, в которой $\psi = \sqrt{k}$). Полученное асимптотическое решение имеет вид показательной функции, зависящей от параметра k и прочих электрохимических и геометрических параметров системы ИЭФ.

Влияние ультразвукового воздействия на собственные частоты полиэлектролитных микрокапсул с частицами оксида цинка: численное моделирование

Слепченков М. М., Гришина О. А., Глухова О. Е.
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
slepchenkovm@mail.ru

В настоящее время одной из актуальных задач трансляционной медицины целевая доставка и контролируемое высвобождение биорегуляторов (ферментов, гормонов, витаминов, активаторов и ингибиторов различной природы). В качестве перспективных форм направленной доставки различных веществ к тканям и органам могут использоваться липосомы, векторы, наночастицы, микрокапсулы. Именно с микрокапсулами связан новый виток развития исследований в данной области. Однако, нерешенной остается проблема контролируемого высвобождения содержимого микрокапсулы вблизи заранее определенной области. Один из возможных эффективных путей решения данной проблемы – использование внешнего воздействия различного рода в строго определенный момент времени. Как известно, изменение таких параметров внешней среды, как температура и кислотность можно осуществлять с помощью таких внешних воздействий, как лазерное, микроволновое излучение, переменное магнитное поле и другое. Однако применение подобных воздействий в живых организмах чрезвычайно трудно. Данные, полученные с помощью современных экспериментальных методов исследования, а именно конфокальной микроскопии, просвечивающей электронной микроскопии, сканирующей электронной микроскопии и атомно-силовой микроскопии, показали наличие высокой чувствительности подобных структур к ультразвуковому воздействию.

Другим решением сформулированной проблемы является соответствующая модификация химического состава композитной оболочки микрокапсулы. В данной работе изучены свойства нанокомпозитной полиэлектролитной микрокапсулы со встроенными частицами оксида цинка в оболочке и её поведение при воздействии ультразвуком. В результате численного эксперимента впервые были рассчитаны собственные частоты и определена форма колебаний для пяти моделей оболочки микрокапсулы: 1) чистый полиэлектролит; 2) полиэлектролит с одним слоем частиц оксида цинка; 3) полиэлектролит с двумя слоями частиц оксида цинка; 4) полиэлектролит с тремя слоями частиц оксида цинка; 5) полиэлектролит с четырьмя слоями частиц оксида цинка. Установлено, что чувствительность оболочки к ультразвуковому воздействию возрастает с увеличением числа частиц ZnO в оболочке микрокапсулы. Этот эффект может быть обусловлен механическими свойствами оболочки микрокапсулы, поскольку нами установлено, что целостность и проницаемость оболочки зависит от длительности и мощности ультразвукового воздействия, а также от толщины и состава оболочки.

Идентификация множественных дефектов в стержнях

Соловьев А. Н.[1,2,3], Черпаков А. В.[1]
[1]*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*
[2]*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*
[3]*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*
alex837@yandex.ru

Рассмотрена задача идентификации множественных дефектов в стержневой конструкции. Применяется метод многопараметрической идентификации, основанный на анализе частот и параметров форм собственных колебаний конструкции. Идентификации подлежат местоположение и степень поврежденности дефектов в стержне при различных граничных условиях.

Рассматриваются стержневые конструкции с несколькими дефектами. Моделирование колебаний производится в конечно элементном комплексе ANSYS. Создается 3D конечно-элементная модель конструкции с дефектами, локализованными в определенном ранее месте и имеющими симметричное расположение относительно нейтральной оси стержня. Дефект представляет собой трещину с невзаимодействующими берегами.

Метод диагностики состоит из трех этапов. На первом этапе диагностирования происходит сбор информации о собственных частотах и соответствующих им формах колебаний стержневой конструкции. Информация представляет собой амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) конструкции в некоторых точках по ее длине. На втором этапе производится сбор информации о формах собственных колебаний на выделенных резонансных частотах. Производится расчет углов между касательными и кривизны в соответствующих точках сбора амплитуд форм резонансных колебаний. Определяется предполагаемое местоположение дефектов на основе анализа параметров форм колебаний. На последнем этапе решается задача об определении величины дефекта.

Проанализированы частотные зависимости для некоторых собственных мод колебаний от расположения и величины дефектов. Анализ показал следующее. Исследованные собственные частоты колебаний сложным образом зависят от местоположения дефекта и его величины. В частности, в одних интервалах местоположения дефекта значения собственных частот резко падают при увеличении его величины. В ряде других точек местоположения дефекта его величина не влияет на значения собственных частот. Данный признак указывает на необходимость использования набора собственных частот при идентификации множественных дефектов. Применение изложенной методики многопараметрической идентификации дефектов в стержневых конструкциях может быть использовано для более сложных конструкций на примере связанных стержневых систем.

Работа частично поддержана РФФИ (проект № 14–08–00546-а).

Численный метод на основе специальной функции Грина для турбулентного потока в двумерном канале

Сумбатян М. А., Абрамов В. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
abram5189@yandex.ru, sumbat@math.sfedu.ru

В двумерной постановке рассматривается классическая задача об однородном турбулентном потоке несжимаемой вязкой жидкости в канале постоянной ширины. Уравнения движения Навье-Стокса записываются в терминах завихренность — функция тока. Заданным считается расход жидкости через нормальное сечение канала, который не зависит от времени и продольной координаты.

К данной задаче применялись различные численные методы, эффективность которых заметно снижается при переходе от ламинарного к турбулентному потоку. На практике, в турбулентной области течения численные расчеты требуют довольно большого вычислительного времени даже на современных компьютерах, поскольку для сильно-осциллирующего в пространстве и во времени турбулентного поля скоростей для корректного счета необходимо выбирать очень плотную сетку узлов. Для преодоления данной трудности применялись различные «быстрые» методы вычислений. В данной работе развивается итерационный по времени процесс с некоторыми начальными условиями для скоростей. Обычно в развитом турбулентном потоке такие условия редко бывают заданы заранее, однако численные эксперименты показывают, что выбор тех или иных начальных условий не меняет качественного характера течения. Для построения итерационного процесса используется конечно-разностная аппроксимация «назад» для производной по времени. В результате на каждом шаге итераций для функций тока и завихренности получаются эллиптические краевые задачи. При этом основной сложностью, как известно, является то, что все четыре краевые условия на стенках канала заданы для функции тока.

Для решения возникающих эллиптических задач строятся специальные функции Грина, автоматически удовлетворяющие однородным краевым условиям на стенках канала и явно выражающиеся в виде тригонометрических рядов по поперечной координате канала. При этом удовлетворение граничных условий приводит к системе двух интегральных уравнений с разностным ядром для функции завихренности на стенках канала. Данная система решается «быстрым» методом с использованием БПФ.

В качестве тестовых примеров сначала рассматривалось течение Пуазейля в ламинарной области. При этом задание произвольного начального распределения скоростей в канале, даже самой замысловатой сильно-осциллирующей формы, за 3–4 итерации приводит к параболе Пуазейля. В турбулентном течении сходимость оказывается более медленной, и решение сходится к некоторой осциллирующей эпюре. Например, для поперечной эпюры продольной скорости с течением времени наблюдается сходимость к некоторой функции, которая почти периодически колеблется вокруг некоторой стационарной функции, имеющей известное из натурных экспериментов Никурадзе распределение с почти постоянным значением в средней части потока.

Волновые поля в полупериодических цилиндрических структурах

Тавадьян В. С.[1], **Фоменко С. И.**[1,2]
[1]*Краснодар, Кубанский государственный университет*
[2]*Краснодар, Институт математики, механики и информатики КубГУ*
sfom@yandex.ru

Перспективным направлением современного материаловедения является разработка и исследование композиционных материалов, состоящих из некоторого множества специально сопряженных друг с другом однородных упругих включений и несущей матрицы. Большой практический интерес представляют материалы с искусственно созданной внутренней полупериодической или периодической структурой, характерным примером которых служат фотонные кристаллы, разработанные в оптике и микроэлектронике. В упругих и акустических средах, в которых имеется периодическая система неоднородностей, обусловленная контрастностью физико-механических свойств составных материалов, волновые явления схожи с наблюдаемыми в фотонных кристаллах: имеют место запрещенные и разрешенные зоны. Рассматриваемые материалы имеют практическую значимость в задачах виброгашения и виброфокусировки, увеличения прочности конструкций, при создании актуаторов и фильтров, а также в других приложениях.

В подавляющем большинстве исследований, посвященных волновым процессам в периодических и квазипериодических упругих структурах, рассматриваются задачи в плоскопараллельной постановке для структуры «полупространство – периодический волновод – полупространство». В настоящей работе исследуются колебания слоистых сред с полупериодической цилиндрической структурой.

Рассматривается неограниченная упругая среда с внутренней периодической неоднородностью (фононный кристалл), состоящей из упругих однородных цилиндрических слоев. Колебания генерируются внутренним источником. Для вычисления гармонического волнового поля применяется интегральный подход. Символы Фурье поля смещений и напряжений строятся с помощью метода Т-матриц. Явное выделение сингулярных составляющих, возникающих при увеличении числа ячеек кристалла и определяемые собственными значениями Т-матрицы, позволяет получить надежный алгоритм построения волновых полей, а также эффективный метод анализа запрещенных зон в рассматриваемой структуре. Анализ волновых полей осуществляется с помощью коэффициентов локализации, а также энергетических коэффициентов прохождения.

На основе разработанных алгоритмов проводится параметрический анализ фильтрационных свойств периодических включений. Установлено, что относительная толщина и а также контрастность свойств материалов, образующих периодическую структуру, существенно влияет на запрещенные зоны в частотной области: они могут сдвигаться, расширяться или сужаться при увеличении относительной толщины. Приводятся диаграммы запрещенных зон в зависимости от свойств слоев, количества ячеек, типа волн и режимов колебаний.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 14-01-31236).

Прямая и обратная задачи о колебаниях предварительно напряженного слоя

Углич П. С.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
Владикавказ, Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
puglich@inbox.ru

Предварительными (или остаточными) напряжениями называются напряжения, которые существуют в теле при отсутствии внешних нагрузок. Подобные напряжения часто возникают в ходе различных технологических процессов (литья, прокатки, штамповки, закаливания и т. п.) либо при продолжительных эксплуатационных процессах. В силу своей природы, остаточные напряжения явным образом не проявляют себя, однако при наложении дополнительных нагрузок приводят к разрушениям.

В настоящей работе рассматриваются прямая и обратная задачи о плоских колебаниях упругого слоя с предварительными напряжениями. Считается, что одной из поверхностей слоя действует нормальная нагрузка, а вторая поверхность свободна от напряжений, а из всех компонент предварительных напряжений отличны от нуля только нормальные напряжения, направленные вдоль поверхностей слоя. При этом предварительное напряжение зависит только от поперечной координаты. Подобные предварительные напряжения возникают в листах стекла при их остывании.

Для решения прямой задачи использовано интегральное преобразование Фурье по продольной координате. Исходные уравнения колебаний вместе с определяющими соотношениями сводятся к канонической системе четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестными в системе являются компоненты вектора перемещений и две компоненты тензора напряжений Пиолы. Краевая задача решается методом пристрелки, при этом для решения вспомогательных задач Коши используются вложенные формулы Рунге–Кутты порядка 4(5). После решения краевой задачи в трансформантах для отыскания волновых полей следует произвести обращение преобразования Фурье. Предложены два метода обращения. Первый основан на непосредственном численном отыскании интеграла Фурье, второй — на использовании теории вычетов. При использовании теории вычетов следует знать расположение полюсов подынтегральной функции, в настоящей работе для отыскания нулей знаменателя подынтергальной функции использован метод Ньютона. Произведено сравнение работы двух методов. Приведены результаты расчётов волновых полей на поверхности слоя, а также дисперсионные кривые для различных частот колебаний и законов распределения предварительных напряжений.

Затем рассмотрена обратная задача о восстановлении предварительных напряжений по информации о перемещениях на конечном участке верхней поверхности слоя. Эта задача сведена к решению последовательности интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладким ядром. Приведены численные результаты решения обратной задачи.

Работа поддержана РФФИ, грант №13-01-00196 А

Некоторые задачи об отслоении покрытий: влияние податливости основания

Устинов К. Б.
Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
ustinov@ipmnet.ru

Рассмотрен ряд краевых задач о полубесконечной трещине, проходящей вдоль интерфейса, отделяющего тонкую упругую полосу от упругой полуплоскости из материала с отличающимися свойствами. Получено и исследовано однородное решение задачи о полубесконечной трещине, проходящей вдоль интерфейса, отделяющего тонкий упругий слой от упругой полуплоскости из материала с отличающимися свойствами. Путем применения двухстороннего преобразования Лапласа задача сведена к матричной задаче Римана с ненулевым индексом. Выделен класс сочетаний упругих постоянный материалов, для которых возможно осуществить факторизацию матричного коэффициента. Данная факторизация проведена, что привело к обобщению решения задачи Златина–Храпкова на случай различных упругих постоянных слоя и полуплоскости (хотя и подчиняющихся дополнительному условию). Получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее вершины. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины соответствуют смещением балки (пластины) при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, т.е пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главных вектора и момента нагрузки. Получены выражения для компонент матрицы коэффициентов упругой заделки. В предположении пренебрежимости влияния нормальных напряжений на тангенциальные смещения путем отбрасывания перекрестных членов задача сведена к двум однородным задачам Римана — для сдвига и нормального отрыва. Даны решения указанных задач. Путем факторизации получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее вершины. Полученные результаты хорошо согласуются с известными численными результатами. Получена асимптотика поля напряжений вблизи вершины трещины, имеющего корневую особенность при отсутствии осциллирующих членов (коэффициент интенсивности напряжений). Отсутствие осциллирующих членов следует непосредственно из постановки задачи — пренебрежении перекрестным влиянием нормальных и касательных напряжений и смещений на продолжении трещины.

Для скалярной задачи о сдвиге также получено решение с использованием дополнительного упрощения, состоящего в замене отслаиваемой полосы стержнем (стрингером), все сечения которого остаются прямолинейными и нормальными к горизонтальной поверхности раздела. Показано, что как коэффициенты интенсивности напряжений, так и эффективные условия упругой заделки, рассчитанные согласно такой модели существенно отличаются от более точных результатов, рассчитанных на основе рассмотренной матричной модели. Для скалярной задачи о нормальном отрыве решение, полученное с использованием аналогичного упрощения, состоящего в замене отслаиваемой полосы балкой, описываемой линейной теорией изгиба, весьма близки к более точным результатам, рассчитанным на основе матричной модели.

Стационарные и волновые процессы в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого биоактивного материала

Филиппова Е. Н., Кизилова Н. Н.
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
kizilova@univer.kharkov.ua, helenfilippova@yahoo.co.uk

Стенки артерий содержат средний мышечный слой и внутренний эпителиальный слой, обладающий механочувствительностью, поэтому артерии способны изменять свой просвет в зависимости от условий кровотока за счет сокращения гладкомышечных клеток среднего слоя. При этом, соответственно, увеличиваются толщина и окружная жесткость стенки. Сократительная активность сосудов может быть стационарной и ритмической (вазомоции), что также влияет на течение крови и распространение пульсовых волн. Кроме этого, процессы саморегуляции в системе микроциркуляции приводят к изменению числа функционирующих капилляров, их емкостных и резистивных свойств. Для понимания процессов регуляции кровотока и их влияния на гемодинамические параметры необходима разработка соответствующих моделей активных биологических сплошных сред.

Ранее были предложены модели активных материалов для скелетных мышц и миокарда, квазиодномерные модели активной трубки для стационарных и волновых течений жидкости. В данной работе представлен краткий обзор имеющихся математических моделей и рассмотрена задача о распространении волн в трубке из активного материала, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho_f}\nabla P + \nu\Delta\vec{v}, \quad \rho_s\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = -\nabla p_s + \operatorname{div}\hat{\sigma} \qquad (1)$$

где $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$, P, ρ_f и ν — скорость, гидростатическое давление, плотность и кинематическая вязкость жидкости, $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$, ρ_s и p_s — вектор перемещения, плотность и давление в стенке.

Для тензора напряжений $\hat{\sigma}$ принята обобщенная модель Пойнтинга–Томсона в виде

$$\left(\hat{\sigma} + \lambda_1\frac{\delta\hat{\sigma}}{\delta t}\right) = \Phi(P,R,\gamma) + 2G(P,R,\gamma)\left(\hat{e} + \lambda_2\frac{\delta\hat{e}}{\delta t}\right), \qquad (2)$$

где $\hat{e}$ — тензор скоростей деформаций, G — мгновенный модуль сдвига, γ — концентрация активатора (ионов Ca^{++}) в мышечных клетках, Φ — квазистатическая зависимость $c\,(p)$ при $\partial/\partial t = 0$, $\lambda_{1,2}$ — времена релаксации.

На конце трубки расположен элемент с переменной проводимостью $Y_t(t, P, \xi)$, где ξ — скорость сдвига. На модели (1)–(2) исследовано распространение волн малой амплитуды, получены дисперсионные соотношения, проведены расчеты параметров течения. Путем осреднения по периоду сердечного цикла получены соотношения квазистационарной модели.

Напряженно-деформированное состояние массива, лежащего на упругом основании с вертикальной трещиной

Хапилова Н. С.[1]**, Залетов В. В.**[1]**, Зенченков А. В.**[1]**, Камышан В. В.**[2]
[1]*Донецк, Институт прикладной математики и механики НАН Украины*
[2]*Донецк, ООО «Экометан»*
tanais13@gmail.com, azenchenkov@mail.ru, kamyshan@ecomethan.dn.ua, hapines.nelly@gmail.com

Гидроразрыв углепородного массива часто применяется на практике для увеличения дебита газодобывающих скважин, пробуренных с дневной поверхности. Рассматривается вертикальная трещина гидроразрыва, образованная путем нагнетания жидкости в скважину. Горизонтальная линия вершин трещины расположена на контактной поверхности породного массива с угольным пластом. Как правило, протяженность трещины гидроразрыва на несколько порядков больше её высоты и ширины (величины «раскрытия» трещины). Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния массива на достаточно большом удалении от скважины может быть осуществлено на основе решения плоской задачи теории упругости. Начальное напряженное состояние породного массива обусловлено весом горных пород и их боковым сжатием. Дополнительные напряжения, появление которых связано с образованием трещины, определены из решения задачи теории упругости о действии сосредоточенной силы интенсивности $\rho g H$ на полуплоскость, лежащую на упругом основании. Здесь ρ — средняя плотность пород, g — ускорение силы тяжести, H — глубина залегания угольного пласта, который рассматривается как упругое основание для лежащего на нем породного массива. В результате решения задачи получены аналитические формулы для компонент тензора напряжений. Изложенная постановка задачи, в отличие от задачи об определении коэффициента интенсивности напряжений, позволяет найти компоненты тензора напряжений в произвольной точке массива. При известных напряжениях из закона Гука определены компоненты тензора деформаций. Наличие трещины приводит к изменению исходного напряженного состояния массива. Перераспределение напряжений, в свою очередь, влияет на изменение природной проницаемости среды. Оценка влияния напряженно-деформированного состояния массива на изменение его фильтрационных свойств выполнена на основе принятой в механике горных пород модели, устанавливающей линейную зависимость между компонентами тензора деформаций и коэффициентом сопротивления пористой среды, который является обратной величиной проницаемости. Из расчетов следует, что проницаемость пород изменяется в области, соизмеримой с удвоенной высотой трещины. Показано, что при удалении от вершины трещины в глубь массива проницаемость приближается к значению природной проницаемости. Численно проанализировано влияние параметра, характеризующего упругие свойства горных пород и коэффициент «постели» винклеровского основания, на проницаемость породного массива. Изучен случай, когда трещина образована в однородном массиве, при этом для определения компонент тензора напряжений использованы формулы Колосова–Мусхелишвили. Дана численная оценка увеличения проницаемости однородного породного массива вблизи стенок трещины и её уменьшения в областях над и под трещиной.

К теории расчета сферического подшипника скольжения с трехслойным антифрикционным покрытием

Чебаков М. И., Абрамович М. В., Колосова Е. М.
Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ
a_lena_che@mail.ru, chebakov@math.sfedu.ru

Рассматривается осесимметричная контактная задачи теории упругости о взаимодействии абсолютно жесткого шара (штампа) с внутренней поверхностью трехслойного сферического основания, состоящая из трех сферических слоев с различными упругими постоянными на основе аналитического подхода. Внешняя поверхность основания закреплена, слои между собой жестко соединены, в зоне контакта отсутствуют силы трения. На штамп действует сила направленная вдоль вертикальной оси. Данная задача также может рассматриваться как математическая модель сустава или сферического подшипника с антифрикционным покрытием.

Для поставленной задачи с помощью программ аналитических вычислений впервые получено точное интегральное уравнение первого рода с ядром, представленным в явном виде. Изучены основные свойства ядра интегральных уравнений, в том числе показано, что числитель и знаменатель интегрального ядра могут быть представлены в виде многочлена по произведениям степеней модулей сдвига слоев. Изложены схемы решения интегрального уравнения асимптотическим методом и прямым методом коллокаций, которые позволяют получать решения задачи практически при любых значениях исходных параметров. Метод коллокаций позволяет свести задачу к линейной системе алгебраических уравнений, отличительной особенностью которой является то, что она имеет диагональную структуру. Показано, что между коэффициентами системы существует такая связь, которая позволяет ограничиваться вычислением только коэффициентов первой строки, а все остальные элементы системы будут выражаться через них, что значительно сокращает время вычислений всех коэффициентов матрицы системы. Для относительно малых толщин слоев решение поставленной задачи получено с использованием асимптотического метода, основанного на сведении парного ряда-уравнения, к которому сводится задача, к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с сингулярной матрицей коэффициентов после специальной аппроксимации символа ядра парного уравнения.

Рассчитаны распределения контактных напряжений, размеры области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующей на него силы в зависимости от геометрических и механических параметров слоев. Проведены сравнения результатов расчета, полученных асимптотическим методом и методом коллокаций. В случае относительно тонких слоев наблюдается хорошее совпадение числовых результатов. В частных случаях также проведено сравнение результатов с ранее известными решениями, здесь также отмечается совпадение результатов с высокой точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 213.01-11/2014-28 Минобрнауки РФ.

Критерий разрушения в модели упругопластической среды

Швед О. Л.
Минск, Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
swed@newman.bas-net.by

Рассматривается вопрос об условиях возникновения макротрещины в конкретной феноменологической модели упругопластической среды. Будем считать, что поверхность текучести в пространстве напряжений при векторной интерпретации тензора является конической поверхностью в шестимерном векторном пространстве. Она создастся замкнутыми поверхностями своих девиаторных сечений с учетом экспериментальных данных. Естественное ограничение на девиаторное сечение состоит в том, что на всей замкнутой поверхности имеет смысл критерий текучести, но проверять все сечения не надо. Из требования потенциальности определяющих уравнений в напряжениях и их скоростях находится девиаторное сечение, которое образуется соединением в сингулярных точках частей двух регулярных вогнутых поверхностей. Векторы нормалей к ним выбираются из двух собственных векторов критериального девиатор-оператора. В условиях роста анизотропии выбор не всегда возможен, что позволяет связать его с началом разрушения. Предполагаем, что разрушение может начаться, только когда точка процесса в пространстве напряжений находится на поверхности текучести. Содержащее ее девиаторное сечение назовем текущим. Точку на текущем девиаторном сечении назовем критической, если в ней становится кратным собственное значение оператора, по которому должен определяться собственный вектор, являющийся вектором нормали в регулярной точке сечения или один из векторов нормалей в сингулярной точке. В этой точке однозначный и обоснованный выбор вектора нормали из несчетного числа собственных векторов становится невозможным. Согласно указанному ограничению ее появление трактуется как возникновение макротрещины. Разрушение происходит в двух случаях: критической точки на текущем девиаторном сечении нет, но затем в процессе течения она появляется, либо там уже существует критическая точка, причем точка процесса может совпадать с любой точкой поверхности сечения. Критерий разрушения, вследствие роста упругой анизотропии при пластической деформации, дополняется предельным случаем. В вершине поверхности текучести девиаторное сечение вырождается в точку. Поэтому формулировка критерия в вершине состоит в отсутствии физически правильного решения при обращении уравнения состояния относительно меры упругих искажений при фиксированном тензоре упругого поворота. В остальных точках поверхности текучести такое обращение всегда возможно. Для изотропного материала на любом девиаторном сечении поверхности текучести, исключая предельный случай, критическая точка отсутствует. Разрушение происходит, в частности, при всестороннем равномерном растяжении. Вычисляется теоретически, не определяемая экспериментально, «критическая» величина среднего напряжения.

Определяющие соотношения моноклинного упругопластического материала

Швед О. Л.
Минск, Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
swed@newman.bas-net.by

Ранее предложены общие определяющие соотношения нелинейной упругопластичности полученные в результате обобщения определяющих соотношений нелинейной упругости для материала Мурнагана. Изучены частные случаи трансверсально-изотропного и ортотропного материала. Теперь рассматривается моноклинный упругопластический материал. Использование этого материала позволит в дальнейшем исследовать в рамках двумерных краевых задач обработки металлов давлением важные проблемные течения, которые не описываются существующими моделями материалов. Такими являются: необычное с точки зрения механики материалов явление «запирания» области высокого давления и опыты Треска по экструзии свинца, где застойные зоны отсутствовали в отличие от численных экспериментов. Конкретизированы критерий текучести и уравнения для удельной потенциальной энергии упругой деформации, тензора напряжений Коши, параметров упругой анизотропии, число которых, подлежащих вычислению, составляет 32 параметра. В том числе для трех важных параметров, неопределяемых по основному уравнению, с использованием собственных векторов тензора напряжений Коши вместо векторов, задающих главные оси анизотропии в случае ортотропного материала, введены дополнительные определяющие уравнения. Менее важными при учете роста анизотропии, аналогичными 13-ю параметрами пренебрегаем. Для устранения влияния тензора упругого поворота используется двойственное представление процесса в двух пространствах напряжений: тензора Коши и тензора, полученного его ортогональным преобразованием. Проверка критерия разрушения существенно усложняется по сравнению с ортотропным материалом. Поиск критической точки, в которой собственное значение критериального оператора, соответствующее вектору нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести становится кратным, производится на всей замкнутой поверхности сечения, расположенной в трехмерном векторном подпространстве. Ее поиск сводится к определению нулей знакопеременной функции для анизотропного материала, заданной на рассматриваемой поверхности. Затем на регулярных участках поверхности путем сравнения с данной функцией вычисленной для изотропного материала, устанавливается возможный переход нуля функции на соседний участок. В этом случае появляется критическая точка и возникает макротрещина. Рассмотрена модельная задача о простом сдвиге для сплава D54S. В базовых численных экспериментах определены необходимые функции и параметры определяющих уравнений. Приведены результаты расчетов процесса, проведенного до момента разрушения первоначально изотропного материала.

Движение пассивных примесей, индуцированных ЭГД течением в микроканале

Ширяева И. В.
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет
ivshiryayeva@gmail.com

Численно при помощи метода конечных элементов исследована задача о переносе пассивных примесей электрогидродинамическим (ЭГД) течением в плоских микроканалах и тонких подвешенных плёнках в случаях, когда структура течения формируется при помощи внешнего электрического поля и его пространственной модуляции на границах области.

Для проведения вычислений использована асимптотическая модель, полученная методом осреднения по толщине, и описывающая квазидвумерное ЭГД течение как в подвешенных тонких жидких плёнках, так и в плоских микроканалах. Математически задача сводится к решению уравнений Навье–Стокса для скорости $\boldsymbol{u}$, давления p, уравнения для потенциала электрического поля φ и уравнений движения примесей c_k:

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0,$$

$$\partial_t c_k + \boldsymbol{u} \cdot \nabla c_k = D_k \Delta c_k, \quad \Delta \varphi = 0,$$

с нелинейными граничными условиями, в частности, связывающих касательные компоненты скорости $\boldsymbol{u}$ и электрического поля $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathcal{R}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор, касательный к границе, $\mathcal{R}$ — коэффициент, определяемый интенсивностью средних напряжений Рейнольдса, толщиной двойного электрического слоя на границе, и нелинейно зависящий от напряженности электрического поля. Более того, $\mathcal{R}$ может быть пространственно модулирован вдоль границы и зависеть от времени. Пространственная модуляция позволяет, в частности, управлять структурой ЭГД течения, создавать в области вращательные вихревые структуры с различным количеством вихрей.

На практике такие ЭГД течения используются для интенсивного перемешивания примесей, в частности, капель чернил в струйных принтерах. Информация о поведении примесей может быть также использована для визуализации сложных течений в микроканалах и плёнках.

Расчеты выполнены при помощи свободно распространяемого пакета FreeFem для прямоугольных плоских микроканалов и тонких подвешенных жидких пленок. Представлены результаты расчетов функции тока, поля скорости ЭГД течений и распределений концентраций для случаев внешних электрических полей с кусочно-постоянной и гладкой, в частности, периодической, пространственной модуляцией. Наибольшее внимание уделяется исследованию вращательных течений с заданным количеством вихрей.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части тех. задания 213.01-11/2014-1 Мин. Обр. Науки РФ, Южный федеральный университет.

Зависимость прочности и ресурса ёмкостей от формы напряжённых оболочечных элементов

Юдин А. С.
Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича ЮФУ
yudin@math.sfedu.ru

Представлены компьютерные модели и расчёты напряженно-деформированного состояния ёмкостей для перевозки жидкостей. Даны анализ и сравнения некоторых вариантов конструкций по критериям прочности и ресурса условиях статики и динамики при транспортировке. Актуальность исследований в рассматриваемой области определяется тем, что в ёмкостях перемещаются большие объёмы жидких грузов. Среди них велика доля экологически опасных и вредных для человека веществ. Это связано со свойствами перевозимых грузов, которые могут иметь низкую температуру кипения, склонность к разогреву при соединении с воздухом с последующим возгоранием или взрывом, быть ядовитыми при вдыхании и попадании на живые ткани и т. д. При транспортировке жидких материалов корпус тонкостенного резервуара испытывает динамические нагрузки, обусловленные колебаниями транспортного средства в процессе перевозки. Многократные переменные нагрузки приводят к возникновению усталостных трещин и нарушению герметичности. Целесообразен анализ причин разрушения широко применяемых на практике емкостей, оценка недостатков некоторых конструкций, поиск технологии их устранения, сравнение альтернативных вариантов. При математическом моделировании из особенностей работы резервуара следует учитывать, что оболочка ёмкости статически нагружена давлением внутренней среды, которое создаёт поле напряженно-деформированного состояния. При транспортировке возникают малые динамические колебания в окрестности этого статического состояния. Для моделирования задачи статики подбирались расчётные схемы и подходящие уравнения, которые учитывают нелинейность задачи. Для надежного контроля результатов применялись два варианта теорий. Первый вариант — квадратично-нелинейная теория типа В. В. Новожилова на основе гипотез Кирхгофа–Лява. Второй вариант — уравнения типа Э. Рейсснера, учитывающие большие углы поворота и поперечный сдвиг. Рассматривались также линеаризованные аналоги этих уравнений. С учетом геометрических и конструктивных особенностей определялось напряженно-деформированное состояние оболочек резервуаров под действием давления внутренней среды в поле сил тяжести. Выявлялись зоны концентрации напряжений и их интенсивность по критерию статической прочности. Решение динамической задачи выполнялось в линейной постановке с учетом статических напряжений и динамической реакции внутренней среды. На основе анализа суммарной интенсивности напряжений оценивался коэффициент запаса ресурса по критерию многоцикловой усталости. Рассмотрены варианты конструкций емкостей и дан их сравнительный анализ.

Vortex dynamics of oscillating flows

Vladimirov V. A.
University of York
vv500@york.ac.uk

The theory of oscillating in time flows is developed. The flows are inviscid and incompressible, the flow oscillations are introduced by the oscillating boundary conditions. We use the two-timing method, where the small parameter is the ratio of the 'slow' and 'fast' time-scales, where the 'fast' time-scale is prescribed by the boundary oscillations. Our attention is focused on the derivation of the averaged equations of motion. The results are:

1. Analysis of the distinguished limits for the Euler's equations shows the existence of only two asymptotic models for the averaged flows: (VD) — the standard vortex dynamics, and (CLE) — the generalized Craik–Leibovich equations. V. I. Yudovich considered only the VD, hence he concluded that the oscillating inviscid flows are 'not interesting'. However the CLE (based on a longer 'slow' time-scale) was overlooked by him. The CLE states that the averaged vorticity is 'frozen' into the averaged velocity$+V$, where the drift velocity V is expressed universally as the time-average of a quadratic in oscillations expression.

2. Our derivation of the CLE is much simpler technically than in all the previous derivations. We deliberately formulate the problem in its natural generality. It shows that the area of applicability of the CLE is much broader than it has been targeted before. In particular, our flow domain is three-dimensional and arbitrary; the oscillations are time-periodic, but their spatial structure is arbitrary. The involved slow time-scale involved is not universal, it is uniquely linked to the order of magnitude of the prescribed velocity field at the boundary. We also have derived the averaged boundary conditions related to the oscillating solid/deformed walls and/or to free boundaries.

3. The averaged equations and boundary conditions lead to the energy-type integral, which allows us to consider all the 'energy-type' results, including the Arnold's stability. We have derived a number of results such as the energy-type variational principle, the second variation of the energy, and several (nonlinear and linear) stability criteria for averaged flows.

4. In both VD and CLE the next-order approximation (after the main ones) represent the linearized equations with an additional 'force', which can produce additional instabilities.

5. We show how the CLE can be generalised for stratified flows and for viscous flows. For stratified fluid it leads to the additional buoyancy force while for the viscous flows the answer depends on the order of magnitude for the dimensionless viscosity. In the simplest case the viscous term appears in the standard form.

6. The relation of the obtained results to the Langmuir circulations is discussed.

Содержание