

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МИКРОСТРУКТУР

*На правах рукописи*

Аладышкин Алексей Юрьевич

**ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ СМЕШАННОГО  
СОСТОЯНИЯ В ТОНКИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ  
ПЛЕНКАХ**

01.04.07 — физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико – математических наук

**Научный руководитель:**

доктор физико – математических наук  
А. С. Мельников

Нижний Новгород — 2004

# Содержание

|                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение                                                                                                            | 7         |
| <b>1 Формирование смешанного состояния в сверхпроводниках с дефектной поверхностью</b>                              | <b>19</b> |
| 1.1 Введение                                                                                                        | 19        |
| 1.1.1 Вихревая линия в массивном сверхпроводнике                                                                    | 19        |
| 1.1.2 Энергия вихревой линии                                                                                        | 21        |
| 1.1.3 Силы, действующие на вихревую линию                                                                           | 22        |
| 1.1.4 Механизмы подавления барьера Бина–Ливингстона                                                                 | 24        |
| 1.2 Поверхностный энергетический барьер Бина–Ливингстона для сверхпроводника с шероховатой поверхностью             | 28        |
| 1.2.1 Постановка задачи. Мейсснеровские токи вблизи края трещины                                                    | 28        |
| 1.2.2 Мейсснеровские токи вокруг тонкой трещины — учет экранировки                                                  | 30        |
| 1.2.3 Поле вихревой линии вблизи края трещины                                                                       | 33        |
| 1.2.4 Энергия вихревой линии вблизи края трещины. Оценка поля предельного подавления барьера Бина–Ливингстона       | 35        |
| 1.2.5 Обобщение результатов на случай анизотропных сверхпроводников                                                 | 39        |
| 1.3 Выводы к главе 1                                                                                                | 40        |
| <b>2 Вихревые структуры в тонких сверхпроводящих пленках в неоднородном магнитном поле</b>                          | <b>41</b> |
| 2.1 Введение                                                                                                        | 41        |
| 2.1.1 Структура вихревой нити в тонких сверхпроводящих пленках                                                      | 41        |
| 2.1.2 Верхнее критическое поле                                                                                      | 43        |
| 2.1.3 Верхнее критическое поле и вихревые состояния в сверхпроводниках с ограниченной геометрией                    | 44        |
| 2.1.4 Вихревое состояние в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик                                        | 46        |
| 2.2 Сверхпроводящая пленка в поле магнитного диполя вблизи линии фазового перехода сверхпроводник–нормальный металл | 49        |
| 2.2.1 Постановка задачи                                                                                             | 49        |
| 2.2.2 Структура параметра порядка в сильно неоднородном магнитном поле $B_z(r)$                                     | 50        |
| 2.2.3 Формирование сверхпроводящих зародышей в слабо неоднородном магнитном поле $B_z(r)$                           | 55        |
| 2.2.4 Формирование зародышей в поле магнитного диполя                                                               | 58        |
| 2.2.5 Квантование магнитного потока в тонкой сверхпроводящей пленке в неоднородном магнитном поле                   | 63        |

|          |                                                                                                                                          |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.2.6    | Критическая температура пленки в двумерном поле произвольной симметрии . . . . .                                                         | 66         |
| 2.3      | Сверхпроводящая пленка в поле магнитного диполя: разрушение мейсснеровского состояния . . . . .                                          | 69         |
| 2.3.1    | Структура мейсснеровских токов в тонкой сверхпроводящей пленке . . . . .                                                                 | 69         |
| 2.3.2    | Пространственная структура вихревого состояния . . . . .                                                                                 | 72         |
| 2.4      | Выводы к главе 2 . . . . .                                                                                                               | 79         |
| <b>3</b> | <b>Экспериментальное определение критических полей и токов сверхпроводящих пленок</b>                                                    | <b>81</b>  |
| 3.1      | Обзор экспериментов по исследованию подавления барьера Бина–Ливингстона поверхностными дефектами . . . . .                               | 81         |
| 3.2      | Исследование остаточной намагниченности пленок методом холловской магнитометрии . . . . .                                                | 84         |
| 3.2.1    | Методы восстановления пространственного распределения токов в тонких сверхпроводящих пленках . . . . .                                   | 84         |
| 3.2.2    | Описание экспериментальной установки и характеристики образцов . . . . .                                                                 | 89         |
| 3.2.3    | Обсуждение результатов . . . . .                                                                                                         | 89         |
| 3.3      | Измерение критической плотности тока распаривания с помощью малой ферромагнитной частицы . . . . .                                       | 97         |
| 3.3.1    | Описание методики измерения . . . . .                                                                                                    | 97         |
| 3.3.2    | Описание экспериментальной установки и характеристики образцов . . . . .                                                                 | 99         |
| 3.3.3    | Экспериментальные результаты и обсуждение . . . . .                                                                                      | 100        |
| 3.3.4    | Сравнение результатов расчета параметров вихревых структур, образующихся в пленках в поле микромагнита, с данными эксперимента . . . . . | 106        |
| 3.4      | Исследование корреляции между транспортными и нелинейными СВЧ характеристиками . . . . .                                                 | 108        |
| 3.4.1    | Обзор экспериментальных методов определения верхнего критического поля . . . . .                                                         | 108        |
| 3.4.2    | Оценка верхнего критического поля в пленках Nb на основе нелинейных СВЧ измерений . . . . .                                              | 109        |
| 3.5      | Выводы к главе 3 . . . . .                                                                                                               | 113        |
|          | <b>Заключение</b>                                                                                                                        | <b>115</b> |
|          | <b>Приложение 1: обращение сингулярных интегральных уравнений</b>                                                                        | <b>118</b> |

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Приложение 2: расчет параметров вихревой структуры в поле микромагнита | 119 |
| Список публикаций автора по теме диссертации                           | 122 |
| Список цитированной литературы                                         | 124 |



## Список основных сокращений и обозначений

- БЛ — поверхностный энергетический барьер Бина–Ливингстона;  
ВТСП — высокотемпературные сверхпроводники;  
ГЛ (GL) — феноменологическая теория Гинзбурга–Ландау;  
ПП — параметр порядка;  
СВЧ — сверхвысокие частоты;  
S/F — гибридная система "сверхпроводник–ферромагнетик";  
 $a_0$  — высота ферромагнитной частицы над поверхностью тонкой сверхпроводящей пленки;  
 $\mathbf{A}$  — векторный потенциал ( $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ );  
 $\mathbf{B}$  — полное магнитное поле;  
 $B_0$  — амплитуда неоднородного магнитного поля, для магнитного диполя  $B_0 = 2m_0/a_0^3$ ;  
 $d_s$  — толщина сверхпроводящей пленки;  
 $d_f$  — толщина ферромагнитной пленки;  
 $d_m$  — средний размер магнитной частицы;  
 $d_H$  — характерный размер чувствительной области датчика Холла;  
 $\mathbf{H}_0$  — внешнее однородное магнитное поле;  
 $H_{c1} = \Phi_0/(4\pi\lambda^2) \ln(\lambda/\xi)$  — нижнее критическое поле;  
 $H_{cm} = \Phi_0/(2\sqrt{2}\pi\lambda\xi)$  — термодинамическое критическое поле;  
 $H_{c2} = \Phi_0/(2\pi\xi^2)$  — верхнее критическое поле;  
 $H_{c3} = \gamma H_{c2}$  — критическое поле поверхностной сверхпроводимости,  $\gamma > 1$ ;  
 $H_{en}$  — критическое поле проникновения магнитного потока (entry);  
 $H_{en}^p$  — критическое поле проникновения магнитного потока в монокристаллический сверхпроводник с плоской поверхностью (plane/perfect);  
 $H_{en}^{\min}$  — наименьшее поле, при котором начинается проникновение магнитного потока в монокристаллический сверхпроводник с дефектной поверхностью;  
 $h = H_0/B_0$  — безразмерное магнитное поле;  
 $h_0$  — высота, на которой производится измерение пространственного распределения магнитного поля  $B_z(\mathbf{r})$  датчиком Холла;  
 $G(r, r')$  — плотность тока, создаваемая кольцом вихрей с плотностью  $n(r) = N\delta(r - r')/2\pi r$ , где  $r'$  — радиус кольца;  
 $j_p$  — критическая плотность тока пиннинга;  
 $j_{GL} = (\sqrt{2}/6\pi\sqrt{3})cH_{cm}/\lambda \propto c\Phi_0/\xi\lambda^2$  — критическая плотность тока распаривания Гинзбурга–Ландау для монокристаллических образцов;  
 $j_c$  — эффективная критическая плотность тока распаривания;  
 $j_{tr}$  — транспортный ток;  
 $j^v$  — компонента сверхпроводящего тока, связанная с наличием вихрей в сверхпроводящей пленке;

$j^{\text{fm}}$  — компонента сверхпроводящего тока, возникающая в пленке в поле магнитной частицы и соответствующая мейсснеровским токам;

$\mathbf{J} = d_s^{-1} \int \mathbf{j}(z) dz$  — поверхностная плотность тока (sheet current), текущего по тонкой пленке;

$L_{\text{def}}$  — глубина дефектов на поверхности сверхпроводника, для сверхпроводника со случайными дефектами — среднеквадратичное отклонение;

$(r, \varphi, z)$  — цилиндрическая система координат;

$r_0$  — точка, в которой  $z$ -компонента суммарного магнитного поля обращается в нуль,  $B_z(r_0) = 0$ ;

$\mathbf{r} = x \mathbf{x}_0 + y \mathbf{y}_0$  — двумерный радиус-вектор;

$\mathbf{R} = \mathbf{r} + z \mathbf{z}_0$  — трехмерный радиус-вектор;

$m_0$  — дипольный момент ферромагнитной частицы;

$m$  — завихренность сверхпроводящего зародыша или орбитальный момент частицы;

$N_f$  — число квантов магнитного потока через площадь, ограниченную контуром  $B_z(x, y) = 0$  при  $H_0 = 0$ ; для магнитного диполя  $N_f = 4\pi m_0 / (3\sqrt{3}a_0\Phi_0)$ ;

$n(r)$  — плотность вихрей;

$T_{c0}$  — критическая температура изолированной сверхпроводящей пленки;

$T_c$  — критическая температура сверхпроводящей пленки в гибридной S/F системе;

$\lambda$  — глубина проникновения магнитного поля;

$\xi$  — длина когерентности;

$\lambda_{ab}, \lambda_c, \xi_{ab}, \xi_c$  — глубина проникновения магнитного поля по главным кристаллографическим осям в анизотропные сверхпроводники;

$\rho = r/a_0$  или  $r/\lambda$  — безразмерная координата в цилиндрической системе координат;

$\Phi_0 = \pi\hbar c/|e| \simeq 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс}\cdot\text{см}^2$  — квант магнитного потока;

$\psi = |\psi|e^{i\theta}$  — нормированный параметр порядка,  $\theta$  — фаза параметра порядка;

$\psi_m = f_m e^{im\varphi}$  — собственная функция состояния с определенным орбитальным моментом  $m$ ;

$\theta(x)$  — функция единичного скачка (Хевисайда);

Преобразование Фурье имеет следующий вид:

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) d^n \mathbf{q}.$$

# Введение

## Актуальность темы

Одной из важнейших проблем физики сверхпроводников является создание материалов с максимальной критической температурой  $T_c$ , сохраняющих свои сверхпроводящие свойства в сильных магнитных полях и способных обеспечить бездиссипативное протекание тока большой плотности. Открытие в 1986 г. высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) с высокими значениями критической температуры в значительной степени сняло проблему их охлаждения, поскольку ряд соединений имеет  $T_c$ , превышающую температуру кипения жидкого азота (77.4 K):  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  с  $T_c = 92.5$  K и  $\text{Bi}_2\text{SrCa}_2\text{Cu}_2\text{O}_8$  с  $T_c = 120$  K. Кроме большой критической температуры, ВТСП обладают очень высокими значениями (до  $10^6$  Гс) верхнего критического поля (см., например, [1]), что открывает широкие перспективы для практического применения сверхпроводников.

Высокотемпературные сверхпроводники, как и большинство низкотемпературных металлов и сплавов, имеющих большое практическое значение, таких как Nb ( $T_c = 9.2$  K),  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  ( $T_c = 18.1$  K),  $\text{Nb}_3\text{Ge}$  ( $T_c = 23.2$  K), принадлежат к сверхпроводникам II рода. Данный класс сверхпроводников в сильном магнитном поле переходит в смешанное (вихревое) состояние, характеризующееся частичным проникновением магнитного потока в виде квантованных вихревых линий. Присутствие вихрей в сверхпроводниках создает серьезные препятствия на пути реализации сверхпроводящих устройств для промышленности (таких как сверхпроводящие магниты или линии передач), поскольку при движении вихревых линий под действием транспортного тока  $j_{\text{tr}}$  возникает конечное удельное сопротивление материала  $\rho = \rho_n H_0 / H_{c2}$  ( $\rho_n$  — удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии,  $H_0$  — внешнее магнитное поле,  $H_{c2}$  — верхнее критическое поле) [2, 3]. Переход сверхпроводника из сверхпроводящего состояния в резистивное состояние, сопровождающийся диссипацией энергии, существенно ограничивает диапазон полей и температур, при которых возможно практическое использование сверхпроводников. Движение вихрей также приводит к ухудшению СВЧ характеристик сверхпроводящих образцов. На формирование вихревых структур в реальных сверхпроводящих образцах оказывают влияние следующие факторы: анизотропия, которая особенно важна для ВТСП; дефекты и слабые связи, облегчающие проникновение магнитного потока; большой размагничивающий фактор, приводящий к значительному усилению тока в прикраевой области; неоднородность магнитного поля и др. В высокотемпературных сверхпроводниках на свойства вихревой материи также оказывает влияние сильный пространственный беспорядок в присутствии сильных термических и квантовых флуктуаций [4], в

результате чего в ВТСП материалах реализуется большое число различных вихревых состояний (вихревая решетка, вихревая жидкость, вихревое стекло и др.).

Существует несколько возможностей избежать перехода сверхпроводника в резистивное состояние:

1. Исключить появление вихрей в сверхпроводнике. Безвихревое термодинамически устойчивое состояние может существовать только в слабых магнитных полях ( $H_0 \lesssim H_{c1}$ ,  $H_{c1}$  — нижнее критическое поле <sup>†</sup>). Тем не менее, в ряде случаев данный рабочий диапазон полей может быть существенно расширен вплоть до критического поля  $H_{en}$  подавления энергетического барьера, препятствующего проникновению вихрей в сверхпроводник через поверхность,  $H_{en} > H_{c1}$ . Для идеальных ВТСП образцов поле подавления поверхностного энергетического барьера может значительно превышать нижнее критическое поле:  $H_{en}/H_{c1} \sim 20$ , поэтому путь повышения энергетических барьеров в принципе может привести к улучшению транспортных и высокочастотных характеристик сверхпроводников.

2. Исключить движение вихрей. Такой режим (пиннинг магнитного потока) возможен в неоднородных сверхпроводниках. Состояние с неподвижными вихревыми линиями реализуется только для достаточно слабых плотностей транспортного тока  $j_{tr} < j_p$ , то есть пока сила Лоренца, действующая на вихрь и стремящаяся сорвать его с центра пиннинга, будет меньше силы притяжения вихря к неоднородности;  $j_p$  — средняя критическая плотность тока пиннинга <sup>‡</sup>.

Иными словами, для сохранения бездиссипативного протекания тока необходимо создание высоких потенциальных барьеров: либо для проникновения вихрей (как в первом случае), либо для движения вихрей в сверхпроводнике (как во втором случае). Отметим, что критические поля и токи, соответствующие подавлению энергетических барьеров, в значительной мере определяются совершенством (или дефектностью) структуры сверхпроводника. Так, например, критический ток пиннинга в результате модификации структуры (добавлении включений несверхпроводящей фазы) может быть увеличен на несколько порядков. Напротив, дефекты поверхности сверхпроводника подавляют поверхностный энергетический барьер Бина–Ливингстона (БЛ), то есть уменьшают соответствующее поле входа вихрей  $H_{en}$ .

Таким образом, проблема определения критических полей и критических токов, контролирующих переходы сверхпроводника из мейсснеровского состояния

---

<sup>†</sup> Для  $YBa_2Cu_3O_7$  поле  $H_{c1}$  зависит от температуры и ориентации внешнего поля относительно кристаллографических осей образца,  $H_{c1}(T=0) \simeq 230 \div 900$  Гс [1].

<sup>‡</sup> В присутствии транспортного тока состоянию с неподвижной вихревой решеткой на фазовой диаграмме  $H_0 - T$  соответствует область, ограниченная так называемой линией необратимости  $H_{irr}(T)$ , обычно определяемой как  $j_p(H_{irr}, T) \simeq 0$  [5].

в смешанное состояние и из смешанного состояния в нормальное состояние, а также фазовые переходы между различными состояниями вихревой материи в реальных образцах представляют значительный теоретический и практический интерес. Особый интерес представляет изучение свойств вихревого состояния в тонких сверхпроводящих пленках, которые широко используются для создания микроэлектронных сверхпроводящих устройств: джозефсоновских контактов [6, 7], СКВИДов [8, 9], болометров [10, 11], резонаторов [12, 13], фильтров [14], линий передач СВЧ диапазона [15]. Далее в диссертации будем рассматривать следующие вопросы:

- Экспериментальное определение критических полей и токов сверхпроводящих образцов, в частности:  $T_c(H_0)$ ,  $H_{en}(T)$ ,  $j_p(T)$  и  $j_c(T)$ , где  $j_c(T)$  — температурная зависимость эффективного критического тока распаривания, характеризующего локальное разрушение сверхпроводящего состояния. Это необходимо для оценки параметров реальных сверхпроводящих образцов (таких как глубина проникновения магнитного поля  $\lambda$ , длина когерентности  $\xi$ , длина свободного пробега  $l$ , тип спаривания и тип межгранульных границ);
- Оценка предельных значений критических полей и токов, в частности, расчет максимально возможной критической температуры  $T_c(H_0)$  для сверхпроводников в неоднородном магнитном поле и критического поля  $H_{en}^{min}(T)$ , соответствующего предельному подавлению барьера БЛ;
- Исследование пространственных характеристик вихревых структур, формирующихся в сверхпроводящих образцах, и изучение влияния неоднородностей образцов (дефектов) и неоднородностей магнитного поля на процесс формирования и параметры вихревых структур.

Роль предварительного тестирования параметров сверхпроводящих пленок особенно важна при изготовлении сложных комбинированных структур, таких фильтры, резонаторы или гибридные S/F системы, когда требуется оценить параметры сверхпроводящей подсистемы ( $T_c$ ,  $H_{c2}$ ,  $\xi$ ,  $j_p$ ,  $j_c$ ) в процессе ее создания. Необходимым условием является сохранение качества поверхности образца в процессе диагностики, что может быть осуществимо только на основе бесконтактных неразрушающих методик. Для тестирования качества сверхпроводящих пленок и исследования локальных характеристик пленок в диссертации используются холловская магнитометрия и ближнеполюсная СВЧ микроскопия.

Как было отмечено выше, поверхностные дефекты подавляют барьер БЛ. В работе [16] было экспериментально показано, что увеличение поверхностной шероховатости может уменьшить величину  $H_{en}$  в несколько раз (в зависимости от температуры). Теоретические исследования данного вопроса были сосредоточены на определении "оптимального" типа поверхностных дефектов, которые обладали

бы максимальной способностью к понижению поля  $H_{\text{en}}$ . Для массивных сверхпроводников было показано [17], что такими дефектами являются глубокие трещины, ориентированные параллельно внешнему магнитному полю. Именно в этом случае ожидается максимальное локальное усиление плотности тока вблизи края дефекта, что должно приводить к облегчению условий для вхождения вихрей с поверхности сверхпроводника. Заметим, что влияние клинообразных дефектов на условия для рождения вихрей в потоке незаряженной сверхтекучей жидкости рассмотрено в работе [18]. До настоящего времени остается открытым вопрос о вычислении поля  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  предельного подавления барьера БЛ, для которого в работе [17] была получена оценка, справедливая только по порядку величины, в то время как для интерпретации экспериментальных данных необходимо точное решение задачи. В работе [19] необходимый численный коэффициент был получен в результате численного решения уравнений Гинзбурга–Ландау (ГЛ), однако в этом случае поверхностные дефекты имели форму, отличную от оптимальной. В настоящей диссертации будет представлено точное аналитическое решение задачи о распределении экранирующих мейсснеровских токов вблизи края клинообразного дефекта, что представляет несомненный интерес для более корректной оценки поля предельного подавления барьера БЛ в массивных сверхпроводниках. Мы полагаем, что представленное решение может играть роль грубой оценки влияния дефектов на величину поверхностного барьера в сверхпроводящих пленках промежуточной толщины ( $d_s \gtrsim \lambda$ , где  $d_s$  — толщина сверхпроводящей пленки,  $\lambda$  — лондоновская глубина проникновения магнитного поля) в параллельном магнитном поле  $\dagger$ .

Вопрос о степени подавления барьера БЛ также представляет интерес в связи с проблемой корректного экспериментального определения нижнего критического поля  $H_{\text{c1}}$  (см. обзор [22]) и его температурной зависимости в области низких температур. Ряд авторов, например [23], считает, что поверхностные дефекты настолько сильно подавляют барьер БЛ, что измеряемое значение поля, соответствующее излому на зависимости  $M(H_0)$ , можно отождествить с полем  $H_{\text{c1}}$ . Однако при таком определении  $H_{\text{c1}}$  возникает проблема объяснения завышенных значений и положительной кривизны  $H_{\text{c1}}(T)$  при низких температурах. В настоящее время экспериментально установлено, что отмеченные аномалии связаны с некорректным отождествлением нижнего критического поля с критическим полем проникновения магнитного потока [24, 25].

Для определения токонесущей способности тонкопленочных сверхпроводящих образцов (оценки критического тока пиннинга) обычно исследуются вольт–амперные характеристики мостиков, изготавливаемых из исследуемых пленок [26]. Несмотря

---

$\dagger$  В перпендикулярном магнитном поле проникновение вихрей определяется краевым (геометрическим) барьером [20], феноменологическая модель которого подробно описана в работе [21].

на то, что такой метод является прямым способом измерения  $j_p$ , к его недостаткам можно отнести необходимость травления, что неизбежно портит сверхпроводящий образец в целом и ухудшает качество прикраевой области сформированного мостика. Более перспективным и удобным способом оценки критического тока пиннинга является вычисление  $j_p$  по результатам измерения магнитного поля  $B_z$  над пленкой [27] в предположении о справедливости модели критического состояния Бина [28, 29] (ось  $z$  перпендикулярна плоскости пленки). Возникает вопрос о применимости модели Бина для описания токового состояния в реальных тонкопленочных образцах в перпендикулярном магнитном поле. Ответ на этот вопрос может быть получен в результате вычисления пространственного распределения тока  $\mathbf{J}(x, y)$  в тонкой сверхпроводящей пленке по известному профилю магнитного поля над пленкой (для толстых пленок такая задача не имеет однозначного решения). Было обнаружено [30, 31], что рассчитанная плотность тока имеет провал в центре образца, однако причины такого эффекта остаются до конца непонятными. В диссертации проведены измерения  $B_z(x, y)$ , в рамках простейшей модели рассчитаны распределения  $\mathbf{J}(x, y)$ , исследована зависимость восстанавливаемого профиля тока от геометрических размеров образца, наличия токоограничивающих дефектов (таких как бикристаллические границы и царапины). Показано, что наблюдаемое подавление тока в центре образца может быть связано с термоактивированной релаксацией (крипом) магнитного потока.

Отдельная проблема, тесно связанная с задачей оптимизации потенциала пиннинга в сверхпроводящих системах (увеличения  $j_p$  путем создания искусственных дефектов в сверхпроводниках) — практическая реализация управляемого пиннинга. Хорошо известно, что одними из наиболее эффективных центров пиннинга являются цилиндрические полости диаметром порядка длины когерентности  $\xi$ , ориентированные вдоль вихревой линии [32]. Дефекты такого типа могут быть созданы, например, путем облучения сверхпроводника потоком тяжелых ионов высоких энергий, что ведет к необратимым изменениям структуры сверхпроводника [33]. В качестве перспективной системы, допускающей контролируемое изменение силы пиннинга, в последнее время рассматриваются тонкопленочные гибридные структуры "сверхпроводник–ферромагнетик" (S/F). Такие S/F системы могут состоять из сверхпроводящей пленки, на которую через изолирующую прослойку помещается ферромагнитная подсистема — ферромагнитная пленка с доменной структурой [34] или ансамбль магнитных частиц [35, 36]. Эксперименты, проведенные на гибридных S/F системах с магнитными частицами, подтвердили резкое увеличение критического тока пиннинга при некоторых значениях внешнего магнитного поля, соответствующих целому числу квантов потока через элементарную ячейку магнитной решетки (см., например, [37]). Присутствие ферромагнитной подсистемы может приводить к нетривиальному изменению

фазовой диаграммы гибридных S/F систем, в частности, к появлению нелинейной и немонотонной зависимости  $T_c(H_0)$  при высоких температурах. Для двухслойной гибридной системы, состоящей из сверхпроводящей и ферромагнитных пленок, было отмечено уменьшение  $T_c$  и изменение  $(dH_{c2}/dT)_{T_c}$  после перемагничивания ферромагнитной пленки [34]. Осцилляции на зависимости критической температуры  $T_c(H_0)$  для сверхпроводящих пленок с ансамблем ферромагнитных частицы были обнаружены экспериментально в работах [35, 36]. Похожие осцилляции были также обнаружены для гибридной системы, состоящей из сверхпроводящего кольца, внутри которого находится магнитная частица [38].

Теоретический расчет кривой фазового перехода сверхпроводящей пленки  $T_c(H_0)$  в поле ферромагнитной пленки с изолированной доменной стенкой представлен в работе [39]. Обобщению полученного результата на случай одномерной периодической доменной структуры и корректному учету взаимодействия зародышей, локализованных на различных доменных стенках, посвящена работа [40]. Для гибридных S/F структур с магнитными частицами анализ зависимости  $T_c(H_0)$  до сих пор проведен не был. В работах [41, 42, 43, 44], посвященных теоретическому анализу термодинамических свойств S/F систем, основное внимание было уделено обсуждению характеристик вихревых структур, формирующихся в тонких сверхпроводящих пленках в неоднородном магнитном поле, а верхнее критическое поле было вычислено только для некоторых фиксированных значений температуры. Заметим, что в работах [41, 42] в качестве сверхпроводника рассматриваются мезоскопические диски (радиусом порядка  $\xi$ ), а в работах [43, 44] — сверхпроводящие пленки большого размера с внедренной в пленку магнитной частицей. В обоих случаях учитывается совместное влияние неоднородности магнитного поля и граничных эффектов, в результате чего сложно отделить влияние ферромагнетика на сверхпроводящие свойства образцов от мезоскопических эффектов. В диссертации будут представлены результаты теоретических исследований термодинамических характеристик S/F структур (сверхпроводящие пленки большого размера в поле магнитной частицы), в которых граничные эффекты отсутствуют.

Следует отметить, что использование магнитных частиц в качестве источника неоднородного магнитного поля [45, 46, 47, 48] позволяет проводить диагностику свойств тонких сверхпроводящих пленок. Несомненным достоинством такой методики, которая будет использована в диссертации для измерения зависимости  $j_c(T)$ , является возможность проведения локальных измерений на реальных тонкопленочных образцах в силу того, что магнитное поле частицы оказывается пренебрежимо малым на краях образца, и поэтому форма образца и плохо контролируемая структура края образца не оказывает влияния на измеряемые в эксперименте характеристики.



## Цель работы

Целями настоящей диссертации являются

- исследование особенностей формирования вихревых структур в толстых и тонких сверхпроводящих пленках при наличии дефектов;
- изучение параметров вихревых структур, возникающих в тонких сверхпроводящих пленках в однородных и неоднородных магнитных полях, а также исследование особенностей фазовой диаграммы  $H_0 - T$  гибридных S/F систем;
- развитие методов бесконтактной диагностики качества сверхпроводящих пленок и определения их основных параметров на основе изучения магнитных, транспортных и нелинейных свойств сверхпроводящих образцов в смешанном состоянии.

## Объект и методы исследования

Объектом исследований являются тонкие сверхпроводящие пленки, в частности,  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  и Nb.

При решении экспериментальных задач применялись следующие методики: сканирующая холловская магнитометрия, измерение локального нелинейного СВЧ отклика, резистивные транспортные измерения. При решении теоретических задач использовались методы теории функций комплексного переменного, метод Винера–Хопфа, теория интегральных преобразований Фурье, Лапласа и Ганкеля для решения интегральных и дифференциальных уравнений, численные алгоритмы нахождения собственных функций и собственных значений матричных уравнений.

## Научная новизна

1. Впервые представлено аналитическое решение задачи о распределении экранирующих токов вокруг тонкой глубокой трещины в массивном сверхпроводнике во внешнем магнитном поле, параллельном трещине. Расчет выполнен в лондоновском приближении с учетом экранировки.
2. Впервые аналитически и численно исследованы особенности полевой зависимости критической температуры  $T_c(H_0)$  тонкой сверхпроводящей пленки большого размера при наличии неоднородного аксиально симметричного магнитного поля.
3. Впервые аналитически исследована структура смешанного состояния, возникающая в тонкой сверхпроводящей пленке большого размера в поле магнитной частицы.
4. Впервые проведены систематические измерения критической плотности тока распаривания  $j_c$  в тонких пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  с помощью малой ферромагнитной частицы, позволившие установить необычную температурную зависимость  $j_c(T)$ .

5. Для тонких пленок Nb впервые экспериментально исследована корреляция между транспортными и нелинейными СВЧ характеристиками.

## Научная и практическая значимость

Результаты диссертации могут быть использованы:

- для оценки параметров реальных тонкопленочных образцов (верхнего критического поля  $H_{c2}$ , критической плотности тока распаривания  $j_c$ , критической плотности тока пиннинга  $j_p$ ) на основе бесконтактных неразрушающих методик;
- для интерпретации особенностей фазовой диаграммы на плоскости  $H_0 - T$ , наблюдаемых для гибридных S/F структур.

## Основные положения, выносимые на защиту

1. В лондоновском приближении получено аналитическое решение задачи о распределении экранирующих токов вокруг тонкой глубокой трещины в массивном сверхпроводнике в параллельном магнитном поле. Полученное решение позволило оценить критическое поле предельного подавления барьера БЛ поверхностными дефектами.
2. Показано, что максимальная температура  $T_c$ , при которой формируется сверхпроводящий зародыш в тонкой пленке, может осцилляторным образом зависеть от внешнего магнитного поля  $H_0$ . Необходимым условием для возникновения осцилляций  $T_c(H_0)$ , аналогичных осцилляциям Литтла–Паркса, является наличие неоднородного магнитного поля, имеющего замкнутые линии нулей перпендикулярной компоненты магнитного поля. Показано, что в этом случае зависимость  $T_c(H_0)$  может быть асимметричной.
3. В рамках модели Бина определены параметры вихревой структуры, возникающей в тонкой сверхпроводящей пленке, охлажденной в нулевом магнитном поле, в поле малой ферромагнитной частицы с магнитным моментом, ориентированным перпендикулярно пленке.
4. Обнаружено, что для тонких пленок  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  температурная зависимость критического тока распаривания  $j_c(T)$  существенно отличается от температурной зависимости тока распаривания Гинзбурга–Ландау  $j_{GL}$ . Это указывает на сильное подавление сверхпроводящего параметра порядка на межгранульных границах, что для наиболее вероятных границ раздела типа сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник свидетельствует в пользу анизотропного  $d$ –типа спаривания.
5. Для тонких пленок Nb экспериментально показано, что во внешнем магнитном поле критическая температура  $T_c^{\text{res}}$ , определенная на основе резистивных измерений, совпадает с критической температурой  $T_c^{\text{nl}}$  исчезновения нелинейного

СВЧ отклика. Обнаруженное соответствие предоставляет возможность исследования температурной зависимости верхнего критического поля на основе изучения локальных нелинейных СВЧ свойств образцов.

## **Личный вклад автора в получение результатов**

Диссертант принимал участие в постановке и решении экспериментальных и теоретических задач, в обсуждении полученных результатов и их интерпретации. В частности, в работах I–IV автором выполнен расчет токов и энергии вихревой линии вблизи края трещины, определено критическое поле входа  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$ , а также предложена интерпретация результатов экспериментов, опубликованных в литературе. В работах V–VII, посвященных исследованию осцилляций критической температуры в сверхпроводящих пленках в поле магнитных частиц, автором предложена постановка задачи, расчеты и интерпретация полученных результатов выполнены совместно с другими соавторами. В работах VIII–X автором выполнены все измерения, обработка экспериментальных данных и расчет характеристик вихревых структур, возникающих в сверхпроводящей пленке в поле магнитной частицы. В работе XI автором выполнены все измерения пространственных характеристик вихревых структур, обработка экспериментальных данных и их интерпретация. В работе XII автором выполнены транспортные измерения, позволившие обнаружить корреляцию между нелинейными и транспортными характеристиками тонких пленок Nb, а также проведен анализ полученных экспериментальных данных.

## **Апробация работы**

Диссертация выполнена в Институте физики микроструктур РАН в период с 1997 по 2003 год. Основные результаты диссертационной работы обсуждались на семинарах в Институте физики микроструктур РАН; в Аргоннской национальной лаборатории (Material Theory Institute, Argonne National Laboratory, USA); в Технологическом университете Хельсинки (Low Temperature Laboratory, Helsinki University of Technology, Finland).

Основные результаты были представлены на Всероссийских совещаниях по физике низких температур (Москва — 1998 г., Казань — 2000 г., Екатеринбург — 2003 г.); на нижегородских сессиях молодых ученых (Н. Новгород — 2000, 2001, 2002 гг.); на 9 международном семинаре по вихревому состоянию и динамике вихрей (Oleron, France — 2003 г.) и опубликованы в работах I–XII.

## **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 12 работ (5 статей в реферируемых журналах, 1 доклад на международной конференции, 3 доклада на всероссийских совещаниях, 3 доклада на нижегородских сессиях молодых ученых).

## Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений, списка работ автора по теме диссертации, списка цитированной литературы (157 работ). Общий объем диссертации 135 страниц, включая 36 рисунков и 1 таблицу.

Первая глава посвящена исследованию условий входа прямолинейных вихревых линий в сверхпроводник с поверхностными дефектами в параллельном магнитном поле. Основные результаты главы опубликованы в работах I–IV.

В разделе 1.1 обсуждаются основные свойства вихревого состояния в массивных сверхпроводниках, природа энергетических барьеров для проникновения магнитного потока в сверхпроводник. Представлен обзор работ по изучению различных механизмов подавления барьера БЛ, то есть уменьшения критического поля проникновения магнитного потока  $H_{\text{en}}$ .

В разделе 1.2 в лондоновском приближении исследовано пространственное распределение экранирующих мейсснеровских токов вблизи края глубокой бесконечно тонкой клиновидной трещины, ориентированной вдоль внешнего однородного магнитного поля. Вычислена зависимость энергии вихревой линии от его местоположения, определено оптимальное направление для проникновения вихря и получена оценка поля подавления барьера  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$ . Поскольку рассмотренный класс поверхностных дефектов обладает максимальной способностью к подавлению барьера БЛ, то поле  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  дает оценку предельного подавления барьера БЛ в массивных монокристаллических образцах. Полученный результат может применяться в качестве оценки степени подавления поверхностного барьера БЛ поверхностными дефектами в сверхпроводящих пленках промежуточной толщины и будет использован в разделе 3.3 для интерпретации экспериментальных данных по измерению поверхностного барьера в сверхпроводящих пленках.

Вторая глава посвящена теоретическому исследованию вопроса о формировании смешанного состояния и структуре вихревых решений в тонких изотропных сверхпроводящих пленках в неоднородном магнитном поле, обладающем аксиальной симметрией. Основные результаты главы опубликованы в работах V–IX.

В разделе 2.1 обсуждаются основные свойства вихревого состояния в сверхпроводниках с ограниченной геометрией (тонкие пленки и мезоскопические сверхпроводники). Сделан обзор особенностей термодинамических и транспортных свойств гибридных структур "сверхпроводник–ферромагнетик" (S/F), являющихся примером практической реализации сверхпроводящих систем с внутренним неоднородным мелкомасштабным магнитным полем.

В разделе 2.2 теоретически исследованы особенности полевой зависимости критической температуры  $T_c(H_0)$  тонкой сверхпроводящей пленки в неоднородном аксиально симметричном магнитном поле, в частности, в поле точечного

магнитного диполя. Для неоднородного магнитного поля, имеющего замкнутые линии нулей  $B_z(r) = 0$  предсказана немонотонная зависимость критической температуры пленки  $T_c$  от внешнего однородного магнитного поля  $H_0$  (осцилляции критической температуры), что является аналогом эффекта Литтла–Паркса. Обнаружена существенная асимметрия линии фазового перехода  $T_c(H_0) \neq T_c(-H_0)$ . Показано, что при температурах, близких к критической температуре, присутствие ферромагнитной подсистемы стимулирует появление многоквантовых вихревых состояний и делает возможным изучение мезоскопических эффектов в сверхпроводящих пленках большого размера. Предложено несколько способов экспериментально обнаружения осцилляций  $T_c(H_0)$ , в частности, по температурной зависимости нелинейного отклика  $P_{3\omega}(T)$  можно судить от локальной критической температуре образца (раздел 3.4).

В разделе 2.3 теоретически исследовано разрушение мейснеровского состояния в тонкой сверхпроводящей пленки, предварительно охлажденной в нулевом магнитном поле, в поле точечного магнитного диполя при  $H_0 = 0$ . Показано, что в этом случае стационарное распределение вихрей представляет собой два узких кольца, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Полученные результаты будут использованы в разделе 3.3 для интерпретации экспериментальных данных по измерению поверхностного барьера в сверхпроводящих пленках.

Третья глава посвящена экспериментальным исследованиям температурных зависимостей критических полей и токов сверхпроводящих пленок с помощью неразрушающих бесконтактных методик. Основные результаты данной главы опубликованы в работах IX–XII.

В разделе 3.1 представлен анализ экспериментальных данных, опубликованных в литературе, по измерению барьера БЛ в монокристаллах  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . Оценки, полученные в разделе 1.2, указывают на то, что в области высоких температур ( $T \sim T_c$ ) поверхностная шероховатость не может обеспечить наблюдаемую степень подавления барьера, поэтому полученные результаты указывают на важную роль термоактивационного механизма подавления барьера БЛ.

В разделе 3.2 представлен обзор работ по методам восстановления двумерного распределения тока в пленках по результатам измерения магнитного поля вне образца. Экспериментально исследовано пространственное распределение остаточной намагниченности  $B_z(x, y)$  в тонких пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  и вычислен профиль плотности тока  $\mathbf{J}(x, y)$ . Показано, что профиль тока в значительной мере определяется формой и размером образца, а также качеством прикраевой области. Получена температурная зависимость среднего критического тока пиннинга  $j_p(T)$ .

В разделе 3.3 экспериментально определена температурная зависимость величины локального энергетического барьера для образования смешанного состояния в тонкопленочных сверхпроводящих образцах  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  с помощью

микромагнита. Было обнаружено, что температурная зависимость соответствующего порогового тока  $j_c(T)$  существенно отличается от температурной зависимости тока распаривания  $j_{GL}(T)$ , что указывает на  $d$ -тип спаривания в гранулированных пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ .

Раздел 3.4 посвящен экспериментальному исследованию корреляции между транспортными и нелинейными СВЧ характеристиками в пленках Nb, проявляющейся в одинаковом смещении кривой резистивного перехода  $\rho(T)$  и температурной зависимости мощности третьей гармоники  $P_{3\omega}(T)$  в область низких температур при увеличении внешнего магнитного поля. Обнаруженное соответствие позволяет наиболее просто получать информацию о локальной критической температуре  $T_c$  и ее полевой зависимости в тонких сверхпроводящих пленках.

В Заключение приведены основные результаты диссертационной работы и предложены новые задачи для дальнейшего развития темы настоящего исследования. Приложение 1 содержит справочную информацию об обращении сингулярных интегральных уравнений. Приложение 2 содержит вспомогательные математические выкладки, относящиеся к расчету параметров вихревой структуры, формирующейся в тонкой пленке в поле микромагнита.

# 1. Формирование смешанного состояния в сверхпроводниках с дефектной поверхностью

## 1.1. Введение

### 1.1.1. Вихревая линия в массивном сверхпроводнике

Согласно феноменологической теории, предложенной в 1950 г. В. Л. Гинзбургом и Л. Д. Ландау [49], переход металла в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом второго рода, для которого параметром порядка (ПП) является комплексная функция  $\psi(\mathbf{r})$ , имеющая смысл локальной плотности сверхпроводящих электронов,  $|\psi|^2 \propto n_s/2$ . Пространственное распределение  $\psi(\mathbf{r})$  в анизотропном сверхпроводнике при наличии квазистационарного магнитного поля описывается следующей системой уравнений Гинзбурга–Ландау (см., например, [1])

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha}^2 \left( i \nabla_{\alpha} + \frac{2\pi i}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{c}{4\pi} \sum_{\alpha} \left( -\frac{i\Phi_0}{4\pi\lambda_{\alpha}^2} (\psi^* \nabla_{\alpha} \psi - \psi \nabla_{\alpha} \psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda_{\alpha}^2} A_{\alpha} \right) \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.1) – (1.2) введены следующие обозначения:  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  — магнитное поле,  $\Phi_0 = \pi \hbar c / |e| = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$  — квант магнитного потока;  $\alpha = \{x, y, z\}$ . Тензоры  $\lambda$  и  $\xi$  соответствующим выбором системы координат могут быть приведены к главным осям. Величины  $\lambda_{\alpha}$  и  $\xi_{\alpha}$  имеют непосредственный физический смысл:  $\lambda_{\alpha}$  является характерным масштабом затухания магнитного поля для тока, текущего в направлении  $\alpha$ ; в то время, как  $\xi_{\alpha}$  характеризуют длину когерентности волновой функции по оси  $\alpha$ .

Заметим, что уравнения ГЛ (1.1) – (1.2) для изотропного сверхпроводника ( $\lambda_{\alpha} = \lambda$ ,  $\xi_{\alpha} = \xi$ ) допускают существование вихревых решений вида  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(r)| \exp(im\varphi)$ , где  $m$  - завихренность,  $\varphi$  - азимутальный угол в цилиндрической системе координат. Вихревое (смешанное) состояние обнаружено экспериментально в 1937 г. Л. В. Шубниковым и др. [50] и исследовано теоретически в 1957 г. А. А. Абрикосовым [51]. Вихрь в изотропном сверхпроводнике устроен следующим образом: в центре находится цилиндрическая область (сердцевина вихря, core) радиусом порядка  $\xi$  с подавленной сверхпроводимостью  $|\psi|^2 \ll 1$ , которая окружена циркулирующими сверхпроводящими токами, распределение которых зависит от

геометрии образца. Учет анизотропии сверхпроводника приводит к деформации нормальной сердцевины и токового остова, однако уравнение для фазы волновой функции остается неизменным:  $\text{rot} \nabla \theta = 2\pi \delta(\mathbf{r}) \mathbf{z}_0$ , где  $\mathbf{z}_0$  — единичный вектор, выбранный вдоль оси вихря,  $\theta$  — фаза волновой функции.

В ряде случаев, например, для сверхпроводников II рода с большим параметром Гинзбурга–Ландау  $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$  (в том числе для ВТСП) в слабых полях области с подавленной сверхпроводимостью составляют малую часть общего объема сверхпроводника. В этом случае можно пренебречь пространственным изменением ПП и считать  $|\psi|^2 \simeq 1$  для всего образца за исключением некоторых точек, которые можно рассматривать как сингулярности. Такое приближение позволяет описывать сверхпроводник одним линейным уравнением Лондонов, которое для изотропного сверхпроводника имеет следующий вид

$$\lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} = \sum_i \Phi_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{z}_0, \quad (1.3)$$

где учтено, что  $\text{rot} \nabla \theta = 2\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{r}_i$  — координата  $i$ -го вихря; для описания мейсснеровского (безвихревого) состояния правую часть уравнения (1.3) следует положить равной нулю. Модель Лондонов (и ее обобщение на анизотропный случай) позволяет исследовать поведение сверхпроводников в области низких температур и слабых магнитных полей.

Пространственное распределение магнитного поля вокруг вихревой линии зависит от формы линии и параметров сверхпроводника (геометрические размеры, связность, анизотропия, слоистость). Прямолинейный вихрь в массивном однородном изотропном сверхпроводнике (вихрь Абрикосова) имеет только одну компоненту магнитного поля

$$B_z = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \begin{cases} \ln(\lambda/r) + 0.11; & \xi \ll r \ll \lambda \\ 1.25 \exp(-r/\lambda)/\sqrt{r/\lambda}; & r \gg \lambda. \end{cases} \quad (1.4)$$

Обратим внимание, что поле  $B_z$  имеет особенность при  $r = 0$ . Это связано с тем, что модель Лондонов применима только на больших расстояниях от вихря, и поэтому такая фиктивная расходимость должна устраняться введением соответствующего параметра обрезания, в качестве которого в теории Лондонов используется длина когерентности  $\xi$ . Полагая  $B_z(0) \simeq B_z(\xi)$ , получаем

$$B_z(0) \simeq \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln(\lambda/\xi), \quad r \lesssim \xi.$$

Аргументом в пользу такого устранения расходимости может служить слабая логарифмическая зависимость полученного выражения от точного значения параметра обрезания, тем более, что такой результат подтверждается численным решением полной системы уравнений ГЛ.



### 1.1.2. Энергия вихревой линии

Определим свободную энергию единицы длины абрикосовского вихря в изотропном однородном сверхпроводнике в лондоновском приближении. Свободная энергия  $\varepsilon_1$  представляет собой сумму энергии нормального ядра  $\varepsilon_{\text{core}}$  и энергии магнитного поля и энергии сверхпроводящих токов  $\varepsilon_{\text{el}}$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_{\text{core}} + \varepsilon_{\text{el}}, \\ \varepsilon_{\text{core}} &\simeq \frac{1}{8\pi} \pi \xi^2 H_{\text{cm}}^2, \\ \varepsilon_{\text{el}} &= \frac{1}{8\pi} \int_S [\mathbf{B}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2] dS = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{B}) dS + \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_S \text{div } [\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] dS = \\ &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \cdot \Phi_0 + \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint_{\partial S} ([\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}) dl,\end{aligned}\tag{1.5}$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности сверхпроводника  $\partial S$ ,  $\mathbf{r}_0$  — координата вихря,

$$H_{\text{cm}} = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda\xi}$$

— критическое термодинамическое поле. Для абрикосовского вихря, находящегося в бесконечной сверхпроводящей среде  $B_z(\infty) \rightarrow 0$ , вклад поверхностного интеграла в (1.5) равен нулю, поэтому энергия вихря не зависит от его местоположения и определяется только параметрами сверхпроводника

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left( \ln \frac{\lambda}{\xi} + 0.25 \right).\tag{1.6}$$

Легко показать, что для высокотемпературных сверхпроводников ( $\kappa \sim 10^2$ ) учет энергии сердцевинки является малой поправкой,  $\ln k \gg 0.25$ , поэтому далее мы этой малой поправкой будем пренебрегать.

Поскольку энергия вихря положительна, то в отсутствие внешнего магнитного поля основным состоянием сверхпроводника является мейсснеровское (безвихревое) состояние. Величина внешнего поля, при котором происходит разрушение мейсснеровского состояния и становится энергетически выгодным образование вихрей, называется первым критическим полем  $H_{c1}$ . Поле  $H_{c1}$  находится из условия обращения в нуль свободной энергии Гиббса

$$G = \varepsilon_1 - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_0 dS$$

Учитывая, что  $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$  и  $\int B_z dS = \Phi_0$

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}.\tag{1.7}$$

В анизотропном случае мы имеем следующие соотношения [1]

$$\begin{aligned} H_{c1}^c &= \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}^2} \ln \frac{\lambda_{ab}}{\xi_{ab}}, & H_0 \parallel c, \\ H_{c1}^{ab} &= \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}\lambda_c} \ln \frac{\sqrt{\lambda_{ab}\lambda_c}}{\sqrt{\xi_{ab}\xi_c}}, & H_0 \perp c. \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку  $\varepsilon_1 \propto \Phi_0^2$ , то очевидно, что состоянием с минимальной свободной энергией является ансамбль одноквантовых вихрей Абрикосова. Многоквантовые вихри в массивном образце обладают бóльшей энергией и должны распадаться на одноквантовые вихри, которые в случае однородного сверхпроводника формируют гексагональную вихревую решетку [51]. Очевидно, что при нарушении условия трансляционной симметрии энергия вихря будет зависеть от местоположения вихря  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}_0)$ , что должно проявляться в появлении силы  $\mathbf{f} = -\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}_0$ , действующей на вихревую линию.

### 1.1.3. Силы, действующие на вихревую линию

1. *Сила Лоренца:* в однородном сверхпроводнике сила, действующая на вихрь, возникает при наличии транспортного тока.

Действительно, подставляя в выражение (1.5) магнитное поле в следующем виде  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_c$  и предполагая, что поле вихря  $\mathbf{B}_v$  описывается уравнением (1.3), а поле транспортного тока  $\mathbf{B}_c$  удовлетворяет локальному соотношению  $\text{rot } \mathbf{B}_c = 4\pi\mathbf{j}_{\text{tr}}/c$ , для неподвижного вихря легко получить часть полной энергии системы, зависящую только от положения вихря

$$\varepsilon'(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_c(\mathbf{r}_0) \cdot \Phi_0 + \frac{\lambda^2}{4\pi} \oint_{\partial S} ([\mathbf{B}_c \times \text{rot } \mathbf{B}_v] \cdot \mathbf{n}) dl.$$

Для вихря в бесконечном сверхпроводнике или далеко от границы, когда поверхностный интеграл равен нулю, получаем

$$\mathbf{f}_L = -\frac{\partial\varepsilon'}{\partial\mathbf{r}_0} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{\text{tr}} \times \Phi_0]. \quad (1.8)$$

По аналогии с электродинамикой эта сила называется силой Лоренца, хотя ее природа является гидродинамической [52].

2. *Сила пиннинга:* в бесконечном сверхпроводнике в отсутствие транспортного тока сила, действующая на вихрь, возникает при наличии неоднородностей, иными словами, при пространственной вариации сверхпроводящих свойств.

В теории Лондонов присутствие неоднородностей может быть описано двумя способами. Во-первых, зависимость энергии сверхпроводящих токов от координаты может быть формально описана как  $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ . Если характерный масштаб неоднородностей значительно превышает  $\lambda$ , то из формулы (1.6) следует

локальное соотношение  $\varepsilon_1(\mathbf{r}) \propto \lambda^{-2}(\mathbf{r})$ . Легко видеть, что вихревой линии выгодно расположиться в области с большим значением  $\lambda$ , то есть в области с подавленными сверхпроводящими характеристиками. Явление закрепления вихрей на дефектах называется пиннингом магнитного потока. В данном случае пиннинг имеет электромагнитную природу, и сила пиннинга будет малой в силу малости пространственных градиентов  $\lambda(\mathbf{r})$ .

Значительно большей силой притяжения обладают включения нормальной фазы или полости малого размера порядка  $\xi$ . В изотропном сверхпроводнике легко оценить энергию пиннинга:  $\varepsilon_p \simeq \pi \xi^2 L H_{\text{cm}}^2 / 8\pi$  для цилиндрической полости длины  $L$  и  $\varepsilon_p \simeq \pi \xi^3 H_{\text{cm}}^2 / 8\pi$  для шаровой полости. Легко видеть, что даже для цилиндрических полостей (дефектов, обладающих наибольшей силой пиннинга)  $\varepsilon_p / \varepsilon_1 \simeq 1 / \ln \kappa \ll 1$ . Пиннинг в низкотемпературных сверхпроводниках подробно описан в монографии [26]. В высокотемпературных сверхпроводниках в силу более сложной внутренней структуры могут быть реализованы различные режимы пиннинга [4]: коллективный пиннинг, пиннинг вихревых связок и др. При пропускании транспортного тока достаточной интенсивности сила Лоренца  $f_L$  может превзойти среднюю силу пиннинга  $f_p$ , при этом вихрь может стать свободным, что приведет к переходу сверхпроводника в резистивное состояние. Таким образом, критическая плотность тока пиннинга и ее температурные и полевые зависимости является одними из важнейших характеристик сверхпроводника.

Следует заметить, что при наличии центров пиннинга, и, как следствие, при наличии локальных минимумов энергии, сверхпроводник может оказаться в метастабильном состоянии, когда выходу вихря из сверхпроводника препятствует потенциал пиннинга. Процесс разрушения такого метастабильного состояния, который сопровождается движением вихрей под действием тепловых флуктуаций, называется крипом магнитного потока [53]. Крип приводит к появлению конечного сопротивления и постепенному уменьшению захваченного потока с течением времени.

3. *Барьер БЛ*: сила, действующая на вихрь, возникает в однородном сверхпроводнике конечных размеров, когда необходимо учитывать вклад поверхностного интеграла в выражении (1.5). Легко показано, что для вихревой линии вблизи плоской поверхности массивного сверхпроводника такое дополнительное взаимодействие может быть описано как притяжение вихря к его зеркальному изображению. Такая задача впервые была рассмотрена Ч. Бином и Дж. Ливингстоном в 1964 г. [54]. В этом случае свободная энергия Гиббса единицы длины вихревой линии, расположенной на расстоянии  $x_0$  от плоской поверхности, определяется следующим выражением

$$G = \frac{\Phi_0}{4\pi} \left( H_0 e^{-x_0/\lambda} - \frac{\Phi_0}{4\pi^2 \lambda^2} K_0(2x_0/\lambda) - H_0 + H_{c1} \right), \quad (1.9)$$

где первое слагаемое определяет энергию взаимодействия вихря с меисснеровскими

экранирующими токами, второе описывает притяжение вихря к поверхности, третье и четвертое слагаемые обеспечивают условие  $G(x_0 \rightarrow \infty) = \varepsilon_1 - \Phi_0 H_0 / 4\pi$ . Учет притяжения к поверхности приводит к тому, что разрушение мейснеровского режима и формирование вихревого состояния начинается не при нижнем критическом поле  $H_{c1}$ , а при бóльшем поле  $H_{en}$ , которое необходимо для подавления потенциального барьера — так называемого поверхностного энергетического барьера Бина–Ливингстона (БЛ). Для сверхпроводника с плоской поверхностью поле  $H_{en}^p$  можно оценить из условия  $dG/dx_0 = 0$ , где в качестве параметра обрезания используется  $\xi$ :

$$H_{en}^p = \frac{H_{cm}}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 H_{cm}. \quad (1.10)$$

Иной подход к проблеме устойчивости мейснеровского состояния представлен в работе П. де Жена [55] и основан на исследовании устойчивости безвихревого решения в рамках нелинейных уравнений ГЛ. В предположении  $\kappa \gg 1$  может быть вычислен первый интеграл уравнений ГЛ, который связывает поле на границе  $H_0$  со значением модуля ПП на границе массивного сверхпроводника с плоской поверхностью:  $H_0^2 = H_{cm}^2 (1 - |\psi(0)|^4)$ . Максимально возможное поле, при котором еще существует безвихревое состояние  $|\psi(0)| \neq 0$ , равно  $H_{sh} = H_{cm}$  (superheating), которое по аналогии с теорией фазовых переходов может быть названо полем перегрева мейснеровского состояния. Заметим, что для  $\kappa \gg 1$  оба подхода дают близкие значения критического поля формирования смешанного состояния. В работе [56] подход де Жена обобщен для анализа устойчивости мейснеровского состояния в неоднородном сверхпроводящем полупространстве, и в работе [57] использован для решения аналогичной проблемы в сверхпроводниках с анизотропным  $d$ -типом спаривания.

4. *Геометрический барьер:* сила, действующая на вихрь, возникает при движении вихря в образце с переменным сечением из-за изменения длины вихревой нити (см., например, [20]). Учет влияния геометрического барьера особенно важен при анализе намагничивания тонких сверхпроводящих пленок в перпендикулярном поле [21].

#### **1.1.4. Механизмы подавления барьера Бина–Ливингстона**

Как было отмечено выше, разрушение мейснеровского состояния и проникновение вихревых линий в сверхпроводящий образец должно происходить при условии  $H_0 \geq H_{en}$ , где  $H_0$  — внешнее магнитное поле,  $H_{en}$  — поле подавления энергетического барьера для проникновения магнитного потока. Для массивного образца в параллельном магнитном поле формирование смешанного состояния и динамика вихрей определяется в основном поверхностным энергетическим барьером БЛ, для которого критическое поле подавления  $H_{en}^p \simeq 0.7 H_{cm}$ . Однако в ряде экспериментов, в частности, в высокотемпературных сверхпроводниках

$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  [16, 56, 58, 59, 60],  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  [25, 61] и  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  [61], было обнаружено, что начало проникновения магнитного потока соответствует очень слабым магнитным полям  $H_{\text{ен}} \ll H_{\text{ен}}^{\text{p}}$ , что указывает на существование аномально низкого энергетического барьера в этих сверхпроводниках. Это находится в противоречии с выводами ранних экспериментальных работах 1960-х гг. [62, 63], в которых отмечалось очень хорошее согласие измеренных значений поля перегрева мейсснеровского состояния с критическим полем проникновения, предсказываемым теорией [54].

Можно выделить несколько возможных причин, ответственных за подавление барьера в высокотемпературных сверхпроводниках:

1. При ненулевой температуре проникновение потока в сверхпроводник может начинаться при полях меньших  $H_{\text{ен}}^{\text{p}}$  из-за термоактивационного механизма преодоления барьера БЛ, при этом частота попыток определяется известным выражением  $\nu \propto \exp(-\varepsilon/kT)$ . Этот механизм должен быть особенно важен для ВТСП, поскольку они обладают большей критической температурой и меньшей энергией  $\varepsilon$  вихревой нити, чем низкотемпературные сверхпроводники. Такой механизм подавления критического поля входа  $H_{\text{ен}}$  в применении к слоистым ВТСП сверхпроводникам рассматривался в работах [64], где было показано, что

$$H_{\text{ен}} = H_{\text{см}} \exp(-T/T_0), \quad T_0 = \frac{\varepsilon_0 L}{\ln t/t_0}, \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$ ;  $L$  — длина вихревой нити, которая для ВТСП соответствует толщине сверхпроводящего слоя  $\sim 15 \div 20 \text{ \AA}$ ;  $t$  — характерные времена эксперимента,  $t_0 \sim 10^{10} \div 10^{12}$  сек,  $t$  — длительность эксперимента. Оценки показывают [64], что для ВТСП  $T_0 \ll T_c$ , что обеспечивает сильное подавление барьера в области высоких температур. Такой результат находится в согласии с экспериментальными данными работы [24], в которой показано, что в области низких температур ( $T < T_c/2$ ) поле  $H_{\text{ен}}$  экспоненциально возрастает при уменьшении температуры. Термоактивированная релаксация магнитного потока в присутствии барьера БЛ рассмотрена в работе [65].

2. Барьер может быть подавлен из-за дефектов на поверхности сверхпроводника, которые могут приводить к локальному увеличению плотности тока около дефектов и, тем самым, облегчать проникновение вихрей как при высоких ( $T \sim T_c$ ), так и при низких ( $T \ll T_c$ ) температурах. Роль качества поверхности была выяснена еще в ранних работах [63], поскольку задержка проникновения потока в увеличивающемся поле наблюдалась в специально приготовленных образцах с очень гладкой (полированной) поверхностью.

Кроме этого, в качестве других факторов, влияющих на формирование смешанного состояния, некоторые авторы рассматривали возможное влияние приповерхностного слоя [56], сверхпроводящие характеристики которого могут

отличаться от свойств объемного материала и, тем самым, облегчать проникновение вихрей; а также роль анизотропного  $d$ -типа спаривания в ВТСП [57]. Задача о проникновении вихревых полупетель в массивный сверхпроводник с плоской поверхностью рассмотрена в работе [66], где показано, что для вихревых полупетель поле подавления барьер БЛ может быть ниже, чем для прямолинейных вихрей Абрикосова.

Исследование механизма подавления барьера БЛ поверхностными дефектами представляет интерес в связи с недавними экспериментальными данными, указывающими на сильную зависимость поля входа  $H_{\text{en}}$  от ориентации поля относительно кристаллографических осей образца [60]. Подобная зависимость не может быть объяснена влиянием анизотропии сверхпроводника при наличии идеальной плоской поверхности [67]. Прямое экспериментальное подтверждение влияния дефектов поверхности представлено в работах [16, 58], в которых авторы облучали монокристаллы  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  потоком низкоэнергетичных электронов. Это приводило к заметному ухудшению поверхности без изменения объемных свойств образца, свойственных для ионной имплантации. После облучения поле  $H_{\text{en}}$  уменьшалось в несколько раз (в зависимости от температуры).

Природа подавления энергетического барьера БЛ поверхностными дефектами описана в работах [17, 18]. Величина критического поля  $H_{\text{en}}$  определяется балансом двух сил: силой притяжения к поверхности и силой Лоренца, вталкивающей вихрь вглубь сверхпроводника. Наличие поверхностных дефектов, препятствующих протеканию сверхпроводящей компоненты тока, может приводить к локальному увеличению плотности мейсснеровского тока, и следовательно, к усилению силы Лоренца. Кроме этого, необходимым условием для формирования нормальной сердцевины вихря является условие  $\max j_m \sim j_{\text{GL}}$ , где  $j_m$  — локальная плотность экранирующих токов,  $j_{\text{GL}}$  — критическая плотность тока распаривания Гинзбурга–Ландау. Такое условие, обсуждаемое, например, в работе [21], является обобщением критерия Фейнмана–Ландау образования вихрей в заряженной сверхтекучей жидкости. При наличии дефектов условие  $\max j_m \sim j_{\text{GL}}$  может быть реализовано в более слабых магнитных полях по сравнению с образцов без дефектов.

Степень усиления тока и, соответственно, степень подавления барьера определяются как параметрами сверхпроводника ( $\xi$  и  $\lambda$ ), так и характеристиками дефектов: формой, глубиной  $L_{\text{def}}$ , ориентацией относительно кристаллографических осей и материалом включений (изолятор или нормальный металл). Ранее подавление барьера в сверхпроводниках с шероховатой поверхностью анализировалось в основном для мелких дефектов  $L_{\text{def}} < \lambda$  [58, 68]. Так в работе [58] рассматривалась модельная задача о влиянии дефектов в виде гауссова колокола. В работе [68] была решена задача о распределении мейсснеровских токов в сверхпроводнике и энергии взаимодействия вихря Абрикосова с поверхностью в предположении, что

поверхность сверхпроводника вдоль одной оси является случайной функцией с малым среднеквадратичным отклонением. В обоих случаях было показано, что барьер понижается незначительно.

Очевидно, что подавление барьера БЛ будет наибольшим для поверхностных дефектов в виде глубоких трещин, ориентированных вдоль магнитного поля и, соответственно, поперек экранирующим токам. Любая другая форма или ориентация дефектов не будет обеспечивать максимально возможную концентрацию тока вблизи края дефекта. Влияние клинообразных дефектов на рождение вихрей в потоке незаряженной сверхтекучей жидкости рассмотрено в работе [18]. В ней было показано, что критическая скорость потока  $v_c$ , необходимая для рождения вихря, следующим образом зависит от характеристик препятствия:  $v_c \sim v_c^{(0)}(\xi/L_{\text{def}})^{1-\mu}$ , где  $\xi$  — длина когерентности,  $\mu = \pi/(2\pi - \varphi_0)$  и  $\varphi_0$  — угол при вершине дефекта,  $v_c^{(0)}$  — критическая скорость невозмущенного потока. Обобщение этой модели на случай заряженной сверхтекучей жидкости требует корректного учета эффекта экранировки магнитного поля, который будет существенен при  $L_{\text{def}} \gtrsim \lambda$ . Можно ожидать, что экранировка приведет к насыщению зависимости  $v_c$  от  $L_{\text{def}}$  на масштабах  $L_{\text{def}} \sim \lambda$  и, соответственно, насыщению зависимости  $H_{\text{en}}$  от  $L_{\text{def}}$ . В работе [17], в которой проведен анализ пространственной структуры магнитного поля вблизи края трещины, получена следующая оценка поля подавления барьера в изотропном сверхпроводнике:  $H_{\text{en}} \propto (\xi/\lambda)^{1-\mu} H_{\text{en}}^{\text{p}}$ . Однако этот результат справедлив только по порядку величины, поскольку безразмерный численный коэффициент, необходимый для объяснения экспериментальных данных, может быть получен только в результате решения уравнений ГЛ о распределении токов вокруг дефекта с учетом экранировки.

В работах [19, 21] задача о влиянии поверхностных дефектов на условия для входа вихрей исследовалась на основе численного решения нестационарных уравнений ГЛ. Преимущество такого подхода состоит в том, что получаемое выражение для  $H_{\text{en}}$  уже не содержит никаких неизвестных коэффициентов и может быть непосредственно использовано для интерпретации экспериментальных данных. Следует отметить, в указанных работах также рассмотрен вопрос о подавлении барьера БЛ включениями нормального металла на поверхности сверхпроводника. Определенным недостатком можно считать то обстоятельство, что все вычисления представлены для сверхпроводника с небольшим параметром ГЛ ( $\kappa = \lambda/\xi < 20$ ), что связано с значительным ростом объема вычислений, в то время как теоретические оценки [17] предсказывает наибольшее подавления барьера при  $\kappa \gg 1$ . Кроме этого, форма рассматриваемых дефектов (прямоугольные полости шириной  $w = 0.5 \div 5 \xi$  и глубиной  $l = 1 \div 20 \xi$ ), строго говоря, не соответствовала наиболее оптимальной форме. Тем не менее, полученные в работах [19, 21] результаты адекватно описывали зависимости  $H_{\text{en}}$  от параметров  $\kappa, w, l$  и находились в разумном согласии с асимптотическими оценками [17], полученными для  $\kappa \gg 1$  и  $L_{\text{def}} \gg \lambda$ .

Таким образом, вопрос о вычислении критического поля  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$ , соответствующего предельному подавлению барьера БЛ, до сих пор остается открытым. В следующем разделе будет представлено аналитическое решение задачи о распределении экранирующих мейсснеровских токов вблизи края бесконечно тонкой трещины, что представляет интерес для корректной оценки  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$ .

## 1.2. Поверхностный энергетический барьер Бина–Ливингстона для сверхпроводника с шероховатой поверхностью

### 1.2.1. Постановка задачи. Мейсснеровские токи вблизи края трещины

Для определения критического поля подавления барьера БЛ  $H_{\text{en}}$  в сверхпроводнике с дефектной поверхностью необходимо вычислить свободную энергию Гиббса вихревой линии. Как было отмечено во введении к данной главе, максимальной способностью подавить барьер для проникновения магнитного потока обладают глубокие ( $L_{\text{def}} \gg \lambda$ ) клинообразные трещины, ориентированные вдоль магнитного поля. Далее ограничимся анализом данной задачи в лондоновском приближении и будем считать, что магнитное поле внутри изотропного сверхпроводника с изолированной трещиной удовлетворяет следующему уравнению

$$\Delta B_z - \frac{1}{\lambda^2} B_z = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad B_z|_{\Gamma_S} = H_0, \quad (1.12)$$

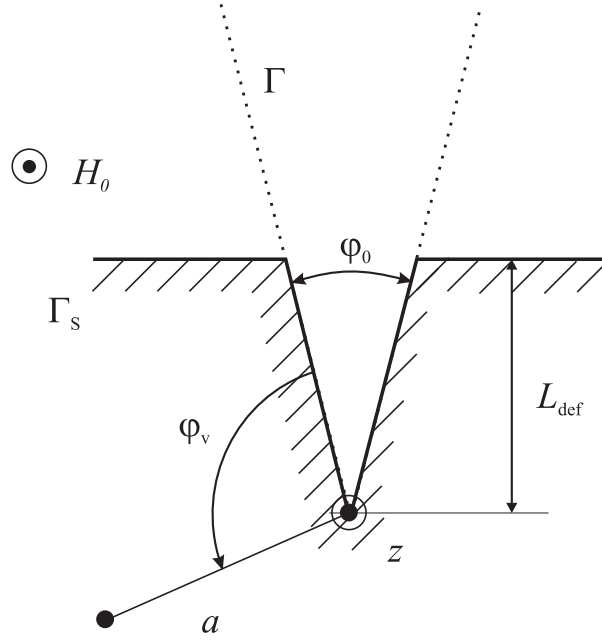
где контур  $\Gamma_S$  совпадает с поверхностью сверхпроводника (см. рис. 1); точка  $r = a \ll L_{\text{def}}$ ,  $\varphi = \varphi_v$  соответствует координате вихря в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с началом на вершине клинообразного дефекта, ось  $z$  направлена вдоль образующей клина,  $\varphi_0$  — угол при вершине клина. Поскольку нас интересуют условия формирования вихревого состояния, а вихри будут рождаться около вершины клина, далее мы будем рассматривать только область вблизи вершины,  $r \ll L_{\text{def}}$ , при этом контур  $\Gamma_S$  можно заменить на контур  $\Gamma$ , соответствующий сторонам клина ( $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ ). В силу линейности уравнения (1.12) решение можно искать в виде:

$$B_z = B_{z,m} + B_{z,v}, \quad \Delta B_{z,m} - \frac{1}{\lambda^2} B_{z,m} = 0, \quad B_{z,m}|_{\Gamma} = H_0, \quad (1.13)$$

$$\Delta B_{z,v} - \frac{1}{\lambda^2} B_{z,v} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad B_{z,v}|_{\Gamma} = 0 \quad (1.14)$$

где  $B_{z,m}$  представляет собой магнитное поле, соответствующее мейсснеровским токам, экранирующим внешнее магнитное поле  $H_0$ ;  $B_{z,v}$  — поле, созданное вихревой линией. На малых расстояниях  $r \ll \lambda$  от вершины клина экранирующие эффекты пренебрежимо малы,  $|B_z/\lambda^2| \ll |\Delta B_z|$ , поэтому в этой области можно отбросить соответствующие слагаемые в уравнениях (1.13) и (1.14).





**Рис. 1.** Массивный сверхпроводник с изолированной трещиной в виде клина во внешнем поле  $H_0$ , параллельном образующей клина; вихревая линия изображена символом  $\bullet$ .

Решением уравнения (1.13) в пределе  $r \ll \lambda$  является следующее распределение (см., например, [69])

$$B_{z,m} = H_0 \left[ 1 - \beta \left( \frac{r}{\lambda} \right)^\mu \sin(\mu\varphi) \right]. \quad (1.15)$$

где  $\mu = \pi/(2\pi - \varphi_0)$ ,  $\beta$  – неизвестный безразмерный коэффициент. Вычисляя плотность мейсснеровского тока, находим

$$\mathbf{j}_m = \frac{c}{4\pi} \text{rot}(B_{z,m} \mathbf{z}_0) = \frac{cH_0}{4\pi\lambda} \mu\beta \left( \frac{r}{\lambda} \right)^{\mu-1} [-\cos(\mu\varphi) \mathbf{r}_0 + \sin(\mu\varphi) \varphi_0].$$

Легко видеть, что модуль плотности мейсснеровского тока имеет особенность при  $r = 0$  для  $\mu < 1$ , то есть плотность тока вблизи края тем больше, чем меньше угол  $\varphi_0$ . Очевидно (см. также [17]), что поле  $H_{\text{en}}$  имеет минимальное значение для бесконечно тонких трещин, ориентированных вдоль поля. Заметим, что безразмерный коэффициент  $\beta = \beta(\varphi_0)$  не может быть определен без учета экранировки. Для идеальной плоской поверхности ( $\mu = 1$ ) коэффициент  $\beta$  равен единице. Авторы работы [17] предположили, что для всех углов  $\varphi_0$  коэффициент  $\beta$  порядка единицы, однако такое предположение ничем не подтверждено. В следующем разделе мы определим коэффициент  $\beta$  для бесконечно тонкой трещины на основе решения задачи (1.13) с учетом экранировки.

### 1.2.2. Мейсснеровские токи вокруг тонкой трещины — учет экранировки

В этом разделе мы рассмотрим задачу о пространственном распределении экранирующих мейсснеровских токов вокруг тонкой глубокой трещины ( $\varphi_0 \ll 1$ ,  $L_{\text{def}} \gg \lambda$ ). От решения дифференциального уравнения (1.13) перейдем к решению соответствующего интегрального уравнения (см. также [58]):

$$B_{z,m}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \int_{\Gamma} K_0 \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\lambda} \right) n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.16)$$

где введена неизвестная функция  $n(\mathbf{r})$ , представляющая линейную плотность фиктивных вихрей, распределенных по границе сверхпроводника (рис. 20а); при этом поле отдельного вихря описывается известным выражением (1.4) для изолированного вихря Абрикосова. Функция  $n(r)$  должна удовлетворять двум условиям: во-первых,  $B(\mathbf{r}) = H_0$  для всех точек  $\mathbf{r} \in \Gamma$ ; во-вторых, для всех точек в глубине сверхпроводника  $B(\mathbf{r})$  должно стремиться к нулю. В нашем случае бесконечно тонкой трещины границей сверхпроводника является полубесконечный разрез, соответствующий  $\varphi = 0$  (рис. 20b), поэтому плотность вихрей  $n(r)$  является решением следующего интегрального уравнения:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \int_0^\infty K_0 \left( \frac{|r - r'|}{\lambda} \right) n(r') dr' = H_0 \quad (r > 0). \quad (1.17)$$

Прежде чем перейти к аналитическому решению уравнения (1.17), сделаем важное замечание. Очевидно, что для точек, находящихся вблизи разреза и далеко от его вершины (то есть при  $r \gg \lambda$ ,  $\varphi \ll 1$ ), наличие вершины не должно оказывать влияния на локальное магнитное поле. Таким образом, на больших расстояниях  $n(r) \rightarrow n_0$ , при этом константа может быть определена из уравнения (1.17), в котором в предположении  $r \gg \lambda$  нижний предел интегрирования может быть заменен на  $-\infty$  и плотность вихрей считается постоянной и равной  $n_0$

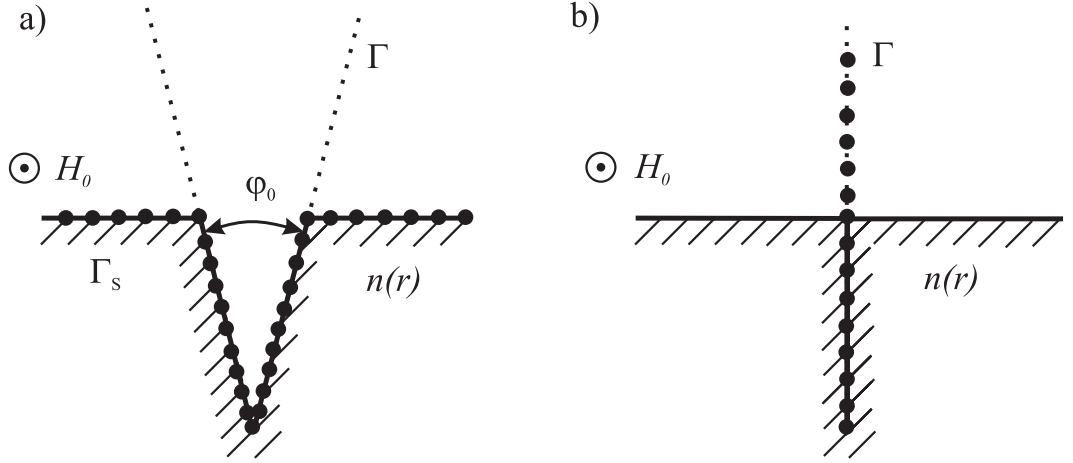
$$n_0 = \frac{2\lambda H_0}{\Phi_0}.$$

Такое значение константы  $n_0$  обеспечивает правильное экспоненциальное затухание магнитного поля вглубь сверхпроводника<sup>†</sup>.

---

<sup>†</sup> Мы используем следующий табличный интеграл [70]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos bx \, K_0 \left( c \sqrt{(x-y)^2 + z^2} \right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 + c^2}} \exp(-z \sqrt{b^2 + c^2}) \cos by.$$



**Рис. 2.** Пространственное расположение мнимых источников — фиктивных вихрей (•) для сверхпроводника с трещиной конечной глубины (а) и для сверхпроводника с глубокой бесконечно тонкой трещиной (б).

Перейдем к решению уравнения (1.17) методом Винера–Хопфа [71]. Будем искать неизвестную плотность фиктивных вихрей, распределенных вдоль бесконечного разреза, в виде

$$n_+(r) = \begin{cases} \Delta n(r) + n_0, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

Кроме этого, введем вторую неизвестную функцию

$$\phi_-(r) = \begin{cases} 0, & r \geq 0 \\ \phi(r), & r < 0 \end{cases}$$

представляющую собой магнитное поле внутри сверхпроводника на линии разреза ( $\varphi = \pi$ ). Используя функции  $n_+(r)$  и  $\phi_-(r)$ , можно записать интегральное уравнение, определенное на всей оси  $r$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0\left(\frac{|r-r'|}{\lambda}\right) n_+(r') dr' = \phi_-(r) + H_0 \theta(r), \quad (1.18)$$

где  $\theta(r)$  — функция единичного скачка (Хевисайда). Для удобства введем безразмерные переменные  $R = r/\lambda$ ,  $R' = r'/\lambda$ ,  $N_+(R) = \lambda n_+(r)$ ,  $H = 2\pi\lambda^2 H_0/\Phi_0$ ,  $\Phi_-(R) = 2\pi\lambda^2 \phi_-(r)/\Phi_0$ . Введем преобразование Фурье следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{N}_+(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} N_+(R) e^{i\alpha R} dR = \\ &= \Delta \tilde{N}_+(\alpha) + \lambda n_0 \frac{i}{(\alpha + i0)} = \Delta \tilde{N}_+(\alpha) + \frac{H}{\pi} \frac{i}{(\alpha + i0)}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

и, используя уравнение (1.18), получим соотношение между  $\Delta \tilde{N}_+(\alpha)$  и  $\tilde{\Phi}_-(\alpha)$

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}} \Delta \tilde{N}_+(\alpha) + \frac{H}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{i}{(\alpha + i0)} = \tilde{\Phi}_-(\alpha) + H \frac{i}{(\alpha + i0)}. \quad (1.20)$$

Обсудим аналитические свойства функций  $\Delta\tilde{N}_+(\alpha)$  и  $\tilde{\Phi}_-(\alpha)$  [72]. Естественно ожидать экспоненциального затухания магнитного поля в глубине сверхпроводника ( $r \rightarrow -\infty$ ):  $|\phi_-(r)| < M_1 \exp(-|r|/\lambda)$ , поэтому функция  $\tilde{\Phi}_-(\alpha)$  будет аналитической в полосе  $\text{Im } \alpha < 1/\lambda$ . Как было рассмотрено выше,  $|\Delta N_+(r)| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Предположим, что функция  $|\Delta N_+(r)| < M_2 \exp(\tau|r|)$  и  $\tau < 0$ , тогда областью аналитичности  $\Delta\tilde{N}_+(\alpha)$  является  $\text{Im } \alpha > \tau$ .

Заметим, что уравнение (1.20) содержит полюс на действительной оси комплексной плоскости  $\alpha$ . Для его устранения умножим обе части уравнения (1.20) на  $\sqrt{\alpha - i}$  и вычтем из обеих частей  $\sqrt{i}H/(\alpha + i0)$ . После простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha + i}} \Delta\tilde{N}_+(\alpha) - \frac{iH}{\sqrt{i}\sqrt{\alpha + i}(\sqrt{\alpha + i} + \sqrt{i})} = \\ = \tilde{\Phi}_-(\alpha)\sqrt{\alpha - i} + \frac{iH}{(\sqrt{\alpha - i} + \sqrt{-i})}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

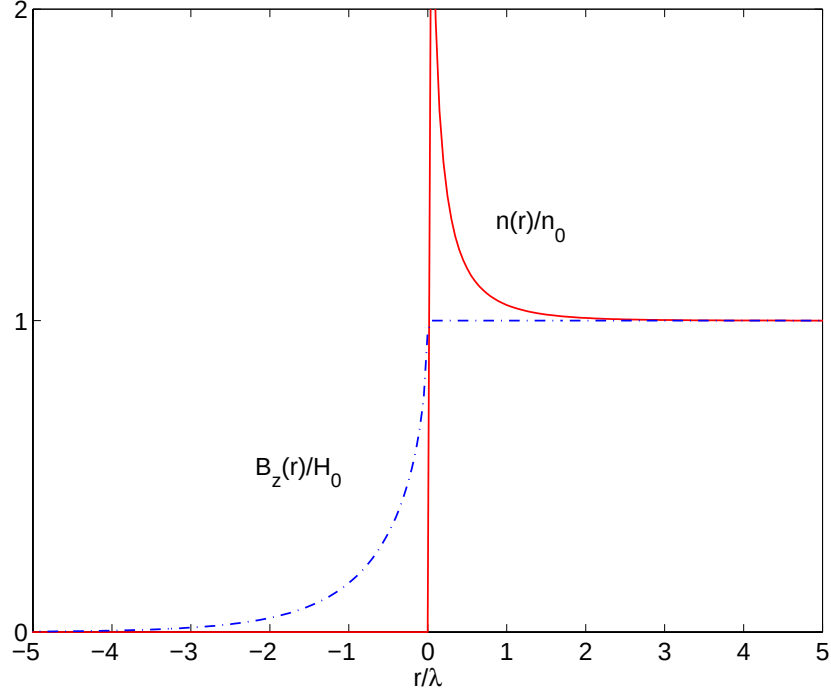
Итак, левая часть уравнения (1.21) имеет особенность при  $\alpha = -i$  и является аналитической при  $\text{Im } \alpha > \tau$ ,  $\tau < 0$ . Правая часть уравнения (1.21) имеет особенность при  $\alpha = +i$  и является аналитической при  $\text{Im } \alpha < 1/\lambda$ . Внутри области  $\tau < \text{Im } \alpha < 1/\lambda$ , в которой обе части уравнения аналитичны и в которую, в частности, входит действительная ось, не содержится полюсов и особенностей, следовательно существует единственная целая функция  $f(\alpha)$ , совпадающая с левой частью уравнения (1.21) при  $\text{Im } \alpha > \tau$  и с правой частью уравнения (1.21) при  $\text{Im } \alpha < 1/\lambda$ . Анализируя поведение  $\phi_-(r)$  вблизи вершины клина (1.15), приходим к выводу, что  $f(\alpha) \equiv 0$ , следовательно:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{N}_+(r) &= \frac{iH}{\pi\sqrt{i}(\sqrt{\alpha + i} + \sqrt{i})}, \\ \tilde{\Phi}_-(\alpha) &= -\frac{iH}{\sqrt{\alpha - i}(\sqrt{\alpha - i} + \sqrt{-i})}. \end{aligned}$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье, находим пространственные распределения  $n(r)$  и  $\phi(r)$

$$n(r) = \frac{2\lambda H_0}{\Phi_0} \left( \frac{e^{-r/\lambda}}{\sqrt{\pi r/\lambda}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{r/\lambda}} e^{-u^2} du \right). \quad (1.22)$$

$$\phi(r) = H_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{-r/\lambda}}^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (1.23)$$



**Рис. 3.** Пространственное распределение плотности фиктивных вихрей  $n(r)$  (сплошная линия) и магнитного поля  $B_z(r)$  для бесконечно тонкой трещины вдоль линии  $\varphi = \pi$  (пунктирная линия).

Таким образом, подставляя плотность фиктивных вихрей, определяемую выражением (1.22), в выражение (1.16), можно определить магнитное поле мейсснеровских токов  $B_{z,m}(r, \varphi)$  на любых расстояниях от вершины тонкой трещины. Поскольку для определения поля подавления барьера  $H_{\text{en}}$  нам достаточно знать распределение токов на малых расстояниях, исследуем асимптотики  $n(r)$  и  $\phi(r)$ :

$$n(r) = \begin{cases} (2\lambda H_0 / \Phi_0) / \sqrt{\pi r / \lambda}, & r > 0 \text{ и } r \ll \lambda \\ 2\lambda H_0 / \Phi_0, & r > 0 \text{ и } r \gg \lambda \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} H_0 - (2H_0 / \sqrt{\pi}) \sqrt{|r| / \lambda}, & r < 0 \text{ и } |r| \ll \lambda \\ H_0 \exp(-|r| / \lambda) / \sqrt{\pi |r| / \lambda}, & r < 0 \text{ и } |r| \gg \lambda \end{cases} \quad (1.25)$$

Сравним выражение (1.15) с разложением (1.25) при  $|r| \ll \lambda$ ; легко понять, что для бесконечно тонкой трещины коэффициент  $\beta(\varphi_0 = 0) \equiv \beta_0 = 2 / \sqrt{\pi} \simeq 1.13$ , что подтверждает предположение о слабой зависимости  $\beta$  от  $\varphi_0$ . Отметим также, что  $\Delta N_+(r)$  стремится к нулю быстрее, чем  $\exp(-r / \lambda)$ , что подтверждает сделанное предположение об аналитических свойствах функции  $\Delta \tilde{N}_+(\alpha)$ .

### 1.2.3. Поле вихревой линии вблизи края трещины

Рассчитаем в лондоновском приближении вторую компоненту поля  $B_{z,v}$ , определяемую уравнением (1.14) и связанную с наличием вихревой линии вблизи края дефекта. В связи с более сложной формой поверхности сверхпроводника метод

изображений, используемый в задаче о барьера БЛ в сверхпроводнике с плоской поверхностью, неприменим. Выберем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с началом координат на вершине клина (рис. 1) и предположим, что вихрь находится в точке  $(a, \varphi_v)$ . При  $a \ll \lambda$  уравнение (1.14) сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta B_{z,v} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad B_{z,v}|_{\Gamma} = 0,$$

которое может быть решено методом конформных отображений для произвольного угла  $\varphi_0$  (см., также, [17]).

Введем комплексную переменную  $z = x + iy$  и определим комплексную функцию  $f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ , действительная часть которой  $f_1$  совпадает с  $B_{z,v}(x, y)$ . Известно (см., например, [72]), что при конформном отображении  $\zeta = w(z)$  происходит переход от комплексной плоскости  $z(x, y)$  к плоскости  $\zeta = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ , при этом оператор Лапласа и  $\delta$ -функция трансформируются следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_{x,y} f(z) &\Rightarrow \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \Delta_{\xi, \eta} f(\zeta), \\ \delta(x - x_0, y - y_0) &\Rightarrow \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0), \\ \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} &= \left| \begin{matrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{matrix} \right| = \xi'^2_x + \xi'^2_y = \eta'^2_x + \eta'^2_y. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Пуассона при произвольном конформном преобразовании сохраняет свой вид. Рассмотрим преобразование  $\zeta = z^\mu$ , где  $\mu = \pi/(2\pi - \varphi_0)$ . Нетрудно заметить, что такое преобразование переводит клинообразную область на плоскости  $z$  в полупространство на плоскости  $\zeta$ .

Решением уравнения

$$\Delta_{\xi, \eta} F = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \delta(\zeta - \zeta_v), \quad F|_{\eta=0} = 0,$$

является следующая функция

$$F(\zeta) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_v|} - \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_v^*|} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{|\zeta - \zeta_v^*|}{|\zeta - \zeta_v|}, \quad (1.26)$$

которая представляет собой суперпозицию функций Грина двумерного оператора Лапласа<sup>†</sup>. Подставляя  $z = r \exp(i\varphi)$ ,  $\zeta_v = a \exp(i\varphi_v)$ , получаем распределение магнитного поля<sup>‡</sup>

$$B_{z,v}(r, \varphi) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \operatorname{Re} \ln \frac{|z^\mu - z_v^{*\mu}|}{|z^\mu - z_v^\mu|} =$$

<sup>†</sup> Фактически, выражение (1.26) соответствует магнитному полю пары вихрь-антивихрь, находящихся на малом расстоянии ( $r \ll \lambda$ ) друг от друга, при этом  $K_0(x) \simeq \ln(1/x)$ .

<sup>‡</sup> Напомним, что  $\operatorname{Re} \ln f(z) = \ln |f(z)|$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \operatorname{Re} \ln \frac{|1 - (r/a)^\mu e^{-i\mu(\varphi+\varphi_v)}|}{|1 - (r/a)^\mu e^{-i\mu(\varphi-\varphi_v)}|} = \\
&= \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{[1 - (r/a)^\mu \cos \mu(\varphi + \varphi_v) + (r/a)^{2\mu}]}{[1 - (r/a)^\mu \cos \mu(\varphi - \varphi_v) + (r/a)^{2\mu}]}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

**1.2.4. Энергия вихревой линии вблизи края трещины. Оценка поля предельного подавления барьера Бина–Ливингстона**

Вычислим в лондоновском приближении энергию Гиббса единицы длины вихревой линии вблизи края трещины:

$$G = \frac{1}{8\pi} \int_S [\mathbf{B}^2 + \lambda^2 (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2] dS - \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_0) dS.$$

Учитывая, что магнитное поле в сверхпроводнике удовлетворяет уравнению (1.12), преобразуем это выражение к следующему виду

$$G = G_1 + G_2 + G_3,$$

$$G_1 = \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}) dS = \frac{\Phi_0 B_z(\mathbf{a})}{8\pi}, \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= \frac{1}{8\pi} \int_S \lambda^2 \operatorname{div} [\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] dS = \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint_\Gamma ([\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}) dl = \\
&= \frac{\lambda^2}{4\pi} \oint_\Gamma B_z (\nabla B_z \cdot \mathbf{n}) dl = \frac{\lambda^2}{8\pi} H_0 \oint_\Gamma \frac{\partial B_z}{\partial n} dl,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
G_3 &= -\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_0) dS = -\frac{1}{4\pi} \int_S H_0 \Phi_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) dS + \\
&+ \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_S (\mathbf{H}_0 \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}) dS = -\frac{\Phi_0 H_0}{4\pi} - \frac{\lambda^2}{4\pi} H_0 \oint_\Gamma \frac{\partial B_z}{\partial n} dl,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Представим полное поле в виде  $B_z = B_{z,m} + B_{z,v}$ . Для вычисления поверхностных интегралов в (1.29) и (1.30) воспользуемся теоремой взаимности: умножим уравнения (1.13) и (1.14) скалярно на  $B_{z,v}$  и  $B_{z,m}$  соответственно, сложим их и проинтегрируем по объему сверхпроводника. В результате получим соотношение, связывающее поверхностный интеграл с магнитным полем в центре вихря:

$$\oint_\Gamma H_0 \frac{\partial B_{z,v}}{\partial n} dl = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} B_{z,m}(\mathbf{a}).$$

После подстановок и приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\Phi_0 B_{z,m}(\mathbf{a})}{8\pi} + \frac{\Phi_0 B_{z,v}(\mathbf{a})}{8\pi} - \frac{\Phi_0 H_0}{4\pi} - \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint_{\Gamma} H_0 \frac{\partial B_z}{\partial n} dl + E_{\text{meiss}} = \\
&= \frac{\Phi_0 B_{z,m}(\mathbf{a})}{4\pi} + \frac{\Phi_0 B_{z,v}(\mathbf{a})}{8\pi} - \frac{\Phi_0 H_0}{4\pi} + E_{\text{meiss}}, \quad (1.31)
\end{aligned}$$

где слагаемое  $E_{\text{meiss}}$  соответствует энергии мейсснеровских токов, которые не зависят от положения вихря. Для определения энергии вихря  $G$  необходимо вычислить магнитное поле в центре вихревой нити. Поскольку в теории Лондонов последовательное вычисление  $B_{z,v}(\mathbf{a})$  невозможно, мы устраним расходимость обрезанием  $B_{z,v}(\mathbf{a}) = B_{z,v}(\mathbf{a} + \xi)$ . Такие расчеты удобнее произвести в комплексной форме

$$\begin{aligned}
B_{z,v}(a) &= \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \operatorname{Re} \lim_{z \rightarrow z_v + \xi} \ln \frac{|z^\mu - z_v^{*\mu}|}{|z^\mu - z_v^\mu|} = \\
&= \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \operatorname{Re} \lim_{z \rightarrow z_v + \xi} \ln \frac{ae^{i\varphi_v}}{\mu\xi} (1 - e^{-2i\mu\varphi_v}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{a}{\mu\xi} |2 \sin \mu\varphi_v|. \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Подставляя в (1.31) выражения для мейсснеровских (1.15) и вихревых токов (1.32) в точке расположения вихря, получаем часть полной энергии, зависящей только от положения вихря

$$G = \frac{\Phi_0}{4\pi} \left( -\beta H_0 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^\mu \sin \mu\varphi_v + \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{a}{\mu\xi} |2 \sin \mu\varphi_v| \right), \quad (1.33)$$

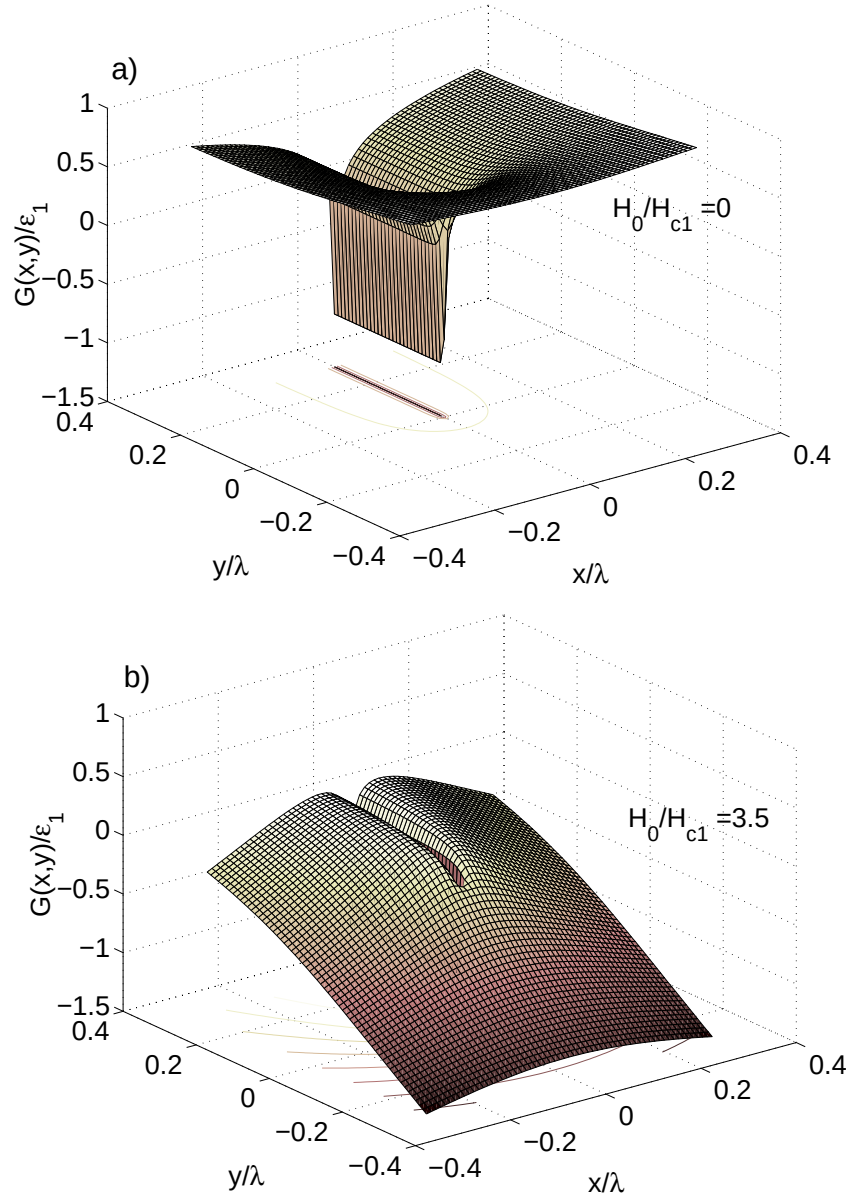
Сравним полученное выражение с выражением (1.9), описывающим энергию Гиббса вихревой линии вблизи плоской поверхности сверхпроводника. Первое слагаемое в (1.33) представляет собой энергию взаимодействия вихря в мейсснеровскими токами. Второе слагаемое в (1.33) описывает притяжение вихря к поверхности сверхпроводника. Как и следовало ожидать, в отсутствии внешнего поля энергия вихря растет с увеличением расстояния  $a$  от вершины клина по логарифмическому закону, который на больших расстояниях  $a \gg \lambda$  при корректном учете экранировки должен приводить к выходу зависимости  $G(a)$  на константу  $\Phi_0 H_{c1}/4\pi$ , соответствующую свободной энергии вихря в толще сверхпроводника.

Для получения критического поля подавления барьера исследуем зависимость  $G(a, \varphi_v)$  на экстремум:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G}{\partial a} \right|_* &= -\mu\beta \left( \frac{H_0}{H_{c1}} \right) \left( \frac{a^*}{\lambda} \right)^{\mu-1} \sin \mu\varphi_v^* + \frac{1}{\ln \kappa (a^*/\lambda)} = 0 \quad \Rightarrow \\
\left( \frac{a^*}{\lambda} \right)^\mu &= \frac{1}{\mu\beta (H_0/H) \sin \mu\varphi_v^* \ln \kappa} \quad (1.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right|_* &= -\mu\beta \left( \frac{H_0}{H} \right) \left( \frac{a^*}{\lambda} \right)^\mu \cos \mu\varphi_v^* + \frac{\mu \cos \mu\varphi_v^*}{\ln \kappa |\sin \mu\varphi_v^*|} = 0 \quad \Rightarrow \\
\begin{cases} \cos \mu\varphi_v^* = 0; \\ |\sin \mu\varphi_v^*| = 1/(\beta (H_0/H) (a^*/\lambda)^\mu \ln \kappa) \end{cases} \quad (1.35)
\end{aligned}$$





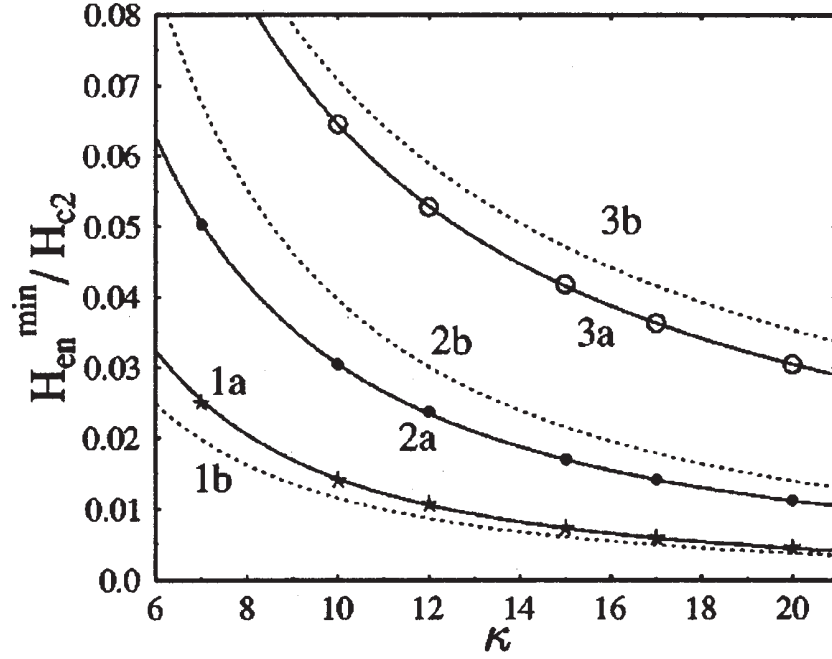
**Рис. 4.** (цветной) Пространственная зависимость энергии Гиббса вихревой линии вблизи тонкой клинообразной трещины ( $\varphi_0 = \pi/200$ ) от радиальной  $a$  и азимутальной  $\varphi$  координат в отсутствии внешнего магнитного поля (а) и наличии поля  $H_0/H_{c1} = 3.5$  (б).

Заметим, что второе условие (1.35) может быть совместно с условием (1.34) только для плоской поверхности, когда  $\mu = 1$ . Единственный экстремум функции  $G(a, \varphi)$  находится на биссектрисе внешнего угла

$$\varphi_v^* = \frac{\pi}{2\mu} = \pi - \varphi_0/2$$

$$a^* = \lambda \frac{1}{(\mu\beta \ln \kappa H_0/H_{c1})^{1/\mu}}$$

Вычисляя вторые производные, легко убедиться, что этой точке соответствует



**Рис. 5.** Зависимость критического поля проникновения магнитного потока  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  в сверхпроводник при наличии поверхностных дефектов от параметра Гинзбурга–Ландау  $\kappa = \lambda/\xi$  (из работы [19]): кривая 1a ( $\star$ ) — нижнее критическое поле  $H_{\text{c1}}$ , полученное в результате численного решения нестационарных уравнений ГЛ; кривая 1b ( $\cdots$ ) — нижнее критическое поле массивного образца  $H_{\text{c1}} = \Phi_0/(4\pi\lambda^2) \ln \kappa$ ; кривая 2a ( $\bullet$ ) — минимальное поле входа вихрей  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  для сверхпроводника с дефектами, полученное в результате численного решения нестационарных уравнений ГЛ; кривая 2b ( $\cdots$ ) — оценка минимального поля входа вихрей  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  по формуле (1.37); кривая 3a ( $\circ$ ) — поле входа в сверхпроводник с идеальной поверхностью, полученное в результате численного решения нестационарных уравнений ГЛ; кривая 3b ( $\cdots$ ) — теоретическая оценка поля подавления барьера Бина–Ливингстона по формуле (1.10).

экстремум типа седло (максимум по радиальной координате и минимум по азимутальной координате). Критическое поле подавления барьера БЛ в лондоновском приближении может быть определено из условия  $a^*(H_{\text{en}}) \simeq \xi$ :

$$H_{\text{en}}(\varphi_0) \simeq \frac{1}{\mu\beta} \left( \frac{\xi}{\lambda} \right)^{1-\mu} H_{\text{en}}^{\text{p}}. \quad (1.36)$$

Следует подчеркнуть, что во внешнем поле порядка  $H_{\text{en}}$  плотность экранирующего тока вблизи края трещины равна по порядку величины току распаривания Гинзбурга–Ландау, который необходим для формирования нормальной сердцевинки вихря.

Максимальное подавление поверхностного барьера БЛ реализуется при наличии тонких глубоких трещин ( $\varphi_0 \ll 1$ ), когда  $\mu \simeq 1/2$ ,  $\beta_0 = 2/\sqrt{\pi}$ . В этом случае проникновение вихрей начинается при полях

$$H_{\text{en}}^{\text{min}} \simeq H_{\text{en}}^{\text{p}} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} = \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\kappa}}{\ln \kappa} H_{\text{c1}}. \quad (1.37)$$

Коротко обсудим основные особенности полученного результата:

- расчет подтверждает тот факт, что влияние дефектов на критическое поле подавления барьера БЛ должно быть особенно сильным для ВТСП в силу  $\kappa \gg 1$ ;
- показано, что учет экранировки приводит к более точной оценке поля проникновения магнитного потока, величина  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  превышает оценку поля подавления барьера, полученную в работе [17], в  $(\mu\beta)^{-1} \simeq 1.7$  раза;
- поскольку параметр ГЛ  $\kappa = \lambda/\xi$  очень слабо зависит от температуры, вблизи  $T_c$  критические поля  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  и  $H_{c1}$ ,  $H_{c2}$  имеют одинаковую температурную зависимость, характерную для монокристалла:  $H_{\text{en}}^{\text{min}} \propto (T_{c0} - T)$ ;
- несмотря на то, что представленный результат справедлив только для массивных сверхпроводников, мы полагаем, что формула (1.37) также может использоваться для грубой оценки критического поля входа вихрей в сверхпроводящие пленки промежуточной толщины ( $d_s \gtrsim \lambda$ ) в параллельном магнитном поле.

#### 1.2.5. Обобщение результатов на случай анизотропных сверхпроводников

Полученная в предыдущем разделе оценка (1.37) критического поля подавления барьера справедлива только для изотропных сверхпроводников. Представляет большой интерес обобщить ее на случай анизотропных сверхпроводников (в частности, для ВТСП). Можно ожидать, что поле подавления барьера будет зависеть от ориентации кристаллографических осей сверхпроводника по отношению к внешнему магнитному полю.

Рассмотрим несколько простейших случаев. В том случае, когда ось  $c$  и внешнее магнитное поле направлены вдоль края трещины ( $H_0 \parallel c$ ), в перпендикулярной полю плоскости  $(a, b)$  мы имеем изотропный сверхпроводник, характеризующийся параметрами  $\lambda_{ab}$  и  $\xi_{ab}$ . Поле входа вихрей в данном случае

$$H_{\text{en}}^{\text{min}, c} \simeq \sqrt{\pi \xi_{ab} / \lambda_{ab}} H_{\text{en}}^{\text{P}}. \quad (1.38)$$

Рассмотрим другую ориентацию кристаллографических осей, когда край трещины параллелен любой из осей  $a$  или  $b$ , а ось  $c$  лежит в плоскости трещины. Введем прямоугольную систему координат  $(x, y, z)$ , в которой  $x \parallel c$ ,  $y \parallel a$ ,  $z \parallel b$ . В этом случае магнитное поле описывается следующим уравнением

$$\lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \lambda_c^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} - B_z = -\Phi_0 \delta(x - x_v) \delta(y - y_v),$$

После масштабного преобразования  $\tilde{x} = x$ ,  $\tilde{y} = y \sqrt{\lambda_{ab} / \lambda_c}$  получаем уравнение (1.3) для изотропного сверхпроводника

$$\lambda_{ab}^2 \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial \tilde{y}^2} \right) - B_z = -\Phi_0 \sqrt{\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_c}} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_v) \delta(\tilde{y} - \tilde{y}_v),$$

в котором  $\lambda$  должна быть заменена на  $\lambda_{ab}$ ,  $\Phi_0$  – на  $\Phi_0\sqrt{\lambda_{ab}/\lambda_c}$ . Рассуждая аналогично, можно показать, что при таком масштабном преобразовании  $\xi$  переходит в  $\xi_c$ . В данном случае поле входа вихрей (см. также [17])

$$H_{\text{en}}^{\text{min, ab}} \simeq \sqrt{\pi\xi_c/\lambda_{ab}}H_{\text{en}}^{\text{p}} = \sqrt{\pi\xi_{ab}/\lambda_c}H_{\text{en}}^{\text{p}}. \quad (1.39)$$

где поле  $H_{\text{en}}^{\text{p}} = H_{\text{cm}}/\sqrt{2}$  не зависит от ориентации кристаллографических осей. Таким образом, в ВТСП следует ожидать сильной анизотропии критического поля подавления барьера; например, для  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$   $H_{\text{en},0}^{\text{min, c}}/H_{\text{en},0}^{\text{min, ab}} = \sqrt{\xi_{ab}/\xi_c} \approx 2.3$ , поэтому ориентация магнитного поля по отношению к кристаллографическим осям крайне важна для объяснения экспериментальных данных. Анализ экспериментальных данных по исследованию поверхностного барьера в монокристаллах  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  будет представлен в разделе 1.2.

### 1.3. Выводы к главе 1

Приведем основные результаты, полученные в данной главе

- В лондоновском приближении аналитически решена задача о распределении экранирующих мейсснеровских токов вокруг бесконечно тонкой трещины, ориентированной вдоль внешнего магнитного поля. Вычислена энергия вихревой линии, находящейся вблизи края трещины, и определены условия для вхождения вихря в массивный монокристаллический сверхпроводник с тонкими глубокими клиновидными трещинами.
- В лондоновском приближении получена оценка критического поля  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$ , соответствующего подавлению барьера БЛ в сверхпроводнике с трещинами. Показано, что тонкие клиновидные трещины обладают наибольшей способностью к подавлению поверхностного энергетического барьера БЛ, то есть полученное значение  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  является наименьшим по сравнению с критическими полями проникновения вихрей через поверхность сверхпроводника с любыми другими типами поверхностных дефектов.
- Наши оценки поля  $H_{\text{en}}^{\text{min}}$  находятся в согласии с результатами недавних теоретических исследований [17, 18, 19]. Отличительной особенностью представленного нами анализа является определение неизвестного ранее коэффициента  $\beta$ , связывающего величину внешнего магнитного поля  $H_0$  с плотностью экранирующих токов вблизи края трещины, который необходим для интерпретации экспериментальных данных.

## 2. Вихревые структуры в тонких сверхпроводящих пленках в неоднородном магнитном поле

### 2.1. Введение

#### 2.1.1. Структура вихревой нити в тонких сверхпроводящих пленках

Как было отмечено во введении к главе 1, структура полей и токов вокруг вихревой линии зависит от геометрии сверхпроводника. Если в массивном сверхпроводнике поля и токи вокруг вихревой линии экспоненциально затухают на масштабах порядка  $\lambda$ ; то в тонких пленках сверхпроводящие токи простираются до бóльших расстояний, что связано с значительно более слабыми экранирующими свойствами тонких пленок. В 1965 г. в лондоновском приближении Дж. Пирл [73] исследовал поля и токи вокруг вихря в бесконечно тонкой сверхпроводящей пленке толщиной  $d_s \ll \lambda$ . В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  может быть получено следующее выражение для векторного потенциала:

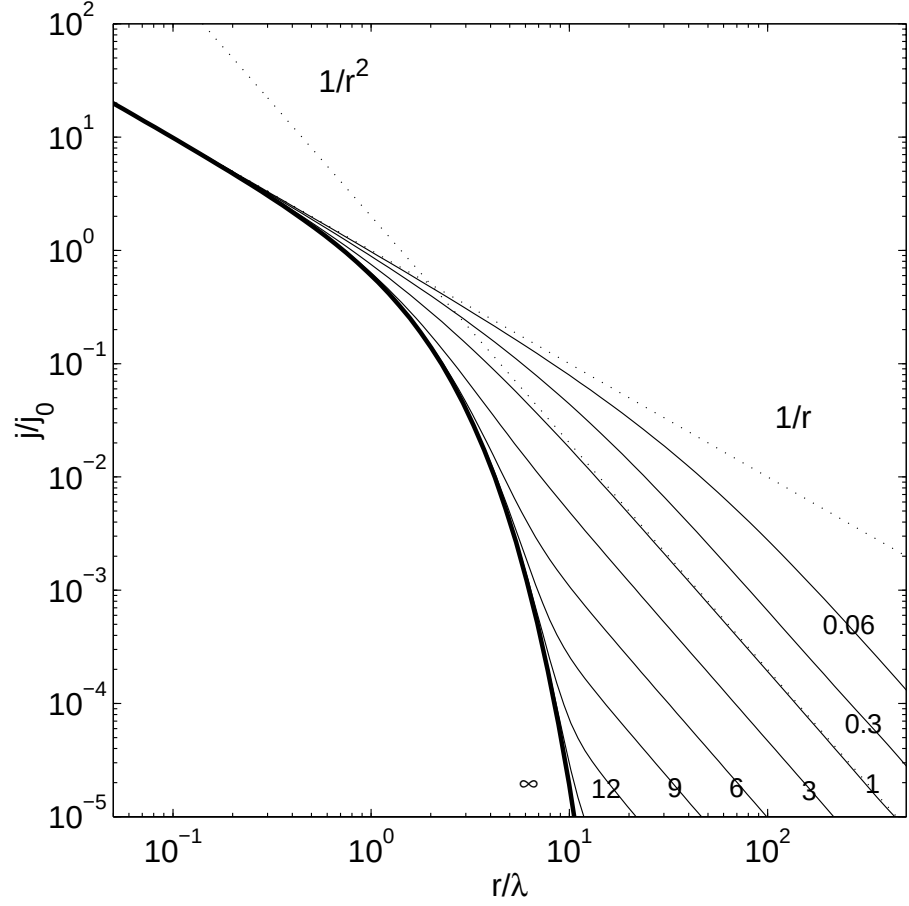
$$A_\varphi(r, z) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_1(rq) \exp(-q|z|) dq}{1 + 2q\lambda_{\text{eff}}}, \quad (2.1)$$

где начало координат выбрано центре вихревой линии, направление которой соответствует оси  $z$ , плоскость  $z = 0$  соответствует тонкой пленке. В этой задаче возникает новый характерный масштаб, определяющий магнитную структуру вихря в тонкой пленке — эффективная глубина проникновения  $\lambda_{\text{eff}} = \lambda^2/d_s \gg \lambda$ . Выражение (2.1) позволяет получить распределение сверхпроводящих токов вокруг вихря в тонкой пленке

$$j_\varphi(r) = \frac{c}{4\pi\lambda^2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi r} - A_\varphi(r, 0) \right) = \begin{cases} c\Phi_0/(8\pi^2\lambda^2 r); & r \ll \lambda_{\text{eff}} \\ c\Phi_0/(4\pi^2 d_s r^2); & r \gg \lambda_{\text{eff}} \end{cases}. \quad (2.2)$$

В тонких сверхпроводящих пленках (толщиной  $d_s \ll \lambda$ ) вихри могут рождаться не только в присутствии внешнего магнитного поля. При  $H_0 = 0$  в тонких пленках возможно спонтанное формирование пар вихрь–антивихрь под действием тепловых флуктуаций (переход Березинского–Костерлица–Таулеса) [74, 75]. Можно ввести некоторую критическую температуру

$$T_{\text{ВКТ}} = \frac{\Phi_0^2}{32\pi^2 k_B \lambda_{\text{eff}}}, \quad (2.3)$$



**Рис. 6.** Зависимость плотности тока  $|j_\varphi(r)|$  от расстояния вокруг прямолинейного вихря в пленке произвольной толщины  $d_s$  при  $z = 0$  для различных значений  $d_s/\lambda$  (указаны на графике),  $j_0 = c\Phi_0/(8\pi^2\lambda^3)$ .

характеризующую энергетическую выгодность диссоциации пар вихрь–антивихрь: при  $T < T_{\text{ВКТ}}$  вихревые пары являются связанными, при  $T > T_{\text{ВКТ}}$  вихри становятся свободными, что приводит к появлению конечного сопротивления образца и линейной вольт–амперной характеристике  $V \propto I$  (см., например, [76]).

Задача о пространственной структуре полей и токов вокруг прямолинейного вихря в сверхпроводящих пленках произвольной толщины  $0 < d_s < \infty$  рассматривалась в большом числе работ, например [77, 78, 79], в которых получены аналитические выражения для  $B_z(r)$ ,  $B_r(r)$  и  $j_\varphi(r, z)$ <sup>†</sup>. Зависимость плотности сверхпроводящего тока, индуцированного вихрем, от расстояния в центре пленки (при  $z = 0$ ) представлена на рис. 6. Отличительной особенностью зависимости  $j_\varphi(r)$

<sup>†</sup> Азимутальная компонента векторного потенциала может быть вычислена следующим образом

$$A_\varphi(r, z) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_0^\infty J_1(rq) \frac{1}{k^2 \lambda^2} \left[ 1 - \frac{q \operatorname{ch} kz}{k \operatorname{sh}(kd_s/2) + q \operatorname{ch}(kd_s/2)} \right] dq, \quad (2.4)$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого порядка,  $k^2 = q^2 + \lambda^{-2}$ .

является то, что на малых расстояниях от оси вихря распределение токов фактически описываются зависимостью  $j_\varphi \propto K_1(r/\lambda)$ , характерной для вихря Абрикосова; а на больших расстояниях плотность тока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, что характерно для пирловского вихря (2.2), где коэффициент пропорциональности между  $j_\varphi$  и  $1/r^2$  зависит от соотношения между  $d_s$  и  $\lambda$ . Отметим, что на больших расстояниях от оси вихря ( $r \gg \lambda_{\text{eff}}$ ) для сверхпроводящих пленок толщины  $d_s \lesssim \lambda$  оба выражения: точное (2.4) и приближенное (2.2) — дают одинаковое значение для плотности тока. Это обстоятельство будет использовано нами в разделе 2.3.2 для вычисления плотности тока, создаваемого кольцом вихрей на больших расстояниях от него в сверхпроводящих пленках толщины  $d_s \lesssim \lambda$ .

### 2.1.2. Верхнее критическое поле

Как известно, магнитное поле подавляет сверхпроводимость, то есть сверхпроводящее состояние в присутствии магнитного поля разрушится раньше, чем в нулевом поле; поэтому  $T_c(H_0) < T_{c0}$ , где  $T_{c0}$  — температура перехода в нулевом поле. Легко получить оценку верхнего критического поля  $H_{c2}$  (максимального поля, при котором сохраняется сверхпроводящее состояние в глубине массивного сверхпроводника) из условия равенства среднего межвихревого расстояния  $a \sim \sqrt{\Phi_0/H_0}$  длине когерентности  $\xi$ :  $H_{c2}(T) \sim \Phi_0/\xi^2$ .

Точное значение верхнего критического поля можно получить на основе уравнений ГЛ (1.1) – (1.2). Действительно, при  $T = T_c$  в нормальном металле должен существовать бесконечно малый сверхпроводящий зародыш ( $|\psi|^2 \ll 1$ ). В этом случае можно опустить слагаемое  $|\psi|^2\psi$  в уравнении (1.1). Кроме этого, замечая, что сверхпроводящая компонента тока  $j_s \propto |\psi|^2 v_s$ , то в том же порядке малости  $j_s$  следует положить равной нулю, что соответствует отсутствию экранировки. Таким образом, мы переходим к линеаризованному уравнению ГЛ для изотропного сверхпроводника, при этом магнитное поле внутри сверхпроводника можно считать равным внешнему полю:

$$-\left(\nabla - i\frac{q^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\Psi = \frac{1}{\xi^2}\Psi, \quad (2.5)$$

где  $q^*$  — заряд носителей тока,  $\text{rot } \mathbf{A} = H_0\mathbf{z}_0$ .

Поскольку длина когерентности является монотонно возрастающей функцией температуры  $\xi(T) \propto (1 - T/T_{c0})^{1/2}$ , то максимальной возможной температуре соответствует максимальная длина когерентности и, соответственно, минимальное возможное значение  $1/\xi^2$ , которое должно быть найдено из решения задачи на собственные значения (2.5). Отметим, что уравнение (2.5) совпадает с уравнением Шредингера для свободной бесспиновой частицы в магнитном поле, при этом параметр порядка  $\psi(r)$  соответствует волновой функции частицы,  $1/\xi^2$  играет роль полной энергии [80]. Таким образом, задача о вычислении критической температуры

сверхпроводника эквивалентна задаче об исследовании свойств *основного* состояния частицы в магнитном поле. Подобная задача об энергетическом спектре двумерного электронного газа, помещенного в неоднородное магнитное поле (поле магнитной антиточки), рассмотрена в работе [81].

Решение задачи о спектре энергии частицы в однородном магнитном поле хорошо известно [80]:  $E = \hbar\omega_0(2n+1)/2$ ,  $\omega_0 = |q|H_0/Mc$  - циклотронная частота. Для сверхпроводника бесконечных размеров это соответствует следующему выражению для верхнего критического поля ( $n = 0$ )

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_0^2} \left(1 - \frac{T}{T_{c0}}\right).$$

Волновые функции основного состояния зависят от выбора калибровки  $\mathbf{A}$ . Так для внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{z}_0$  в калибровке Ландау  $\mathbf{A} = -H_0y\mathbf{x}_0$  мы имеем решение  $\psi(\mathbf{r}) = f(x)\exp(ik_x y)$ , где  $k_x$  определяет одну из координат центра квазиклассической орбиты  $y_0 = \hbar ck_x/(|q^*|H_0)$ . Следует заметить, что энергия основного состояния не зависит от  $y_0$  (вырождение по центрам орбит). Для вырожденных задач волновая функция основного состояния должна быть линейной комбинацией решений с различными значениями  $k_x$  [51]. Как массивного сверхпроводника, так и для тонкой пленки в перпендикулярном поле состоянием с минимальной энергией является треугольная решетка вихрей, причем магнитный поток через элементарную ячейку равен  $\Phi_0$ .

В радиальной калибровке  $\mathbf{A} = [\mathbf{H}_0 \times \mathbf{r}]/2$  основным состоянием является состояние  $\psi_m(\mathbf{r}) = f_m(r)\exp(im\varphi)$  с определенным орбитальным моментом (завихренностью) и вместо вырождения по центрам орбит имеет место вырождение по орбитальным моментам  $m$ , то есть для положительных полей ( $H_0 > 0$ ) минимальной энергией обладают все состояния с  $m > 0$ ; для отрицательных ( $H_0 < 0$ ) — состояния с  $m < 0$ .

### ***2.1.3. Верхнее критическое поле и вихревые состояния в сверхпроводниках с ограниченной геометрией***

Как было отмечено, для массивных сверхпроводников и тонких пленок большого размера в отсутствии потенциала пиннинга вихревым состоянием с наименьшей энергией является треугольная вихревая решетка, состоящая из одноквантовых вихрей. В сверхпроводниках с внутренней структурой (например, в слоистых сверхпроводниках или в сверхпроводниках с дефектами) могут возникать более сложные вихревые структуры (вихревая жидкость, вихревое стекло, джозефсоновские вихри) и различные режимы пиннинга (коллективный пиннинг, пиннинг вихревых связок) [4].

Обсудим более подробно особенности вихревого состояния и температурные зависимости критических полей для низкотемпературных изотропных сверхпро-



водников. Многоквантовые вихревые состояния могут возникать в многосвязных сверхпроводниках. Действительно, циркуляция градиента фазы (флюксoid) по замкнутому контуру  $\Gamma$ , охватывающему несверхпроводящую область, может быть отлична от нуля из-за наличия магнитного поля внутри контура:

$$\phi = \oint_{\Gamma} \nabla \theta \, d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \frac{8\pi^2 \lambda^2}{c\Phi_0} \frac{\mathbf{j}_s}{|\psi|^2} \, d\mathbf{l} + \oint_{\Gamma} \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = 2\pi \, m,$$

где  $m$  — завихренность, которая эквивалентна орбитальному моменту куперовских пар. Заметим, что для любого замкнутого контура в односвязном сверхпроводнике  $m = 0$ . При изменении внешнего поля  $H_0$  может происходить изменение флюксoidа и, соответственно, перестройка вихревого состояния; выбор конкретного значения  $m$  определяется условием энергетической выгодности соответствующего состояния. Одно из первых экспериментальных наблюдений реализации многоквантовых состояний в тонкостенном цилиндре в параллельном поле было представлено в эксперименте Литтла–Паркса [82, 83]. Изменение  $m$  при изменении  $H_0$  приводило к модификации температурной зависимости  $H_{c2}(T)$  (или  $T_c(H_0)$ ): на этих кривых возникали изломы (скачки производных), которые отсутствовали для односвязных сверхпроводников. Позднее подобные осцилляции температуры были обнаружены для перфорированных тонких сверхпроводящих пленок [84, 85, 86] и многосвязных мезоскопических сверхпроводников [87]. Многоквантовые вихревые состояния для сверхпроводящего цилиндра с произвольными значениями  $\kappa$  рассмотрены в работах [88, 89]. Зависимость числа захваченных полостью вихрей (максимально возможная завихренность) от размера полости представлена в работе [90].

Наличие внешней границы в односвязном сверхпроводнике также способно привести к изменению верхнего критического поля и пространственной структуры вихревых состояний. Действительно, граничные условия могут снять вырождение по центрам орбит и привести к дополнительному понижению энергии локализованного состояния (с оптимальным  $k_x$ ). В этом случае сверхпроводимость в приповерхностном слое толщиной  $\sim \xi$  может сохраняться до полей  $H_{c3}$ , бóльших критического поля  $H_{c2}$  разрушения объемной сверхпроводимости. Отношение  $\gamma = H_{c3}/H_{c2}$  зависит от формы и размера сверхпроводника. Так для сверхпроводящего полупространства с плоской поверхностью  $\gamma \simeq 1.695$  [91]. Задача о критическом поле поверхностной сверхпроводимости для клинообразного сверхпроводника в магнитном поле, параллельном образующей клина, рассмотрена в работах [92, 93, 94], где показано, что для малых углов  $\alpha \ll 1$ :  $H_{c3} \propto 1/\alpha$ . Для мезоскопических сверхпроводников, поперечные размеры которых порядка нескольких длин когерентности, зависимость  $H_{c3}(T)$  (или  $T_c(H_0)$ ) может быть нелинейной и немонотонной. Экспериментальное подтверждение осцилляций  $T_c(H_0)$  получено для мезоскопического диска [95] и мезоскопического треугольника [96, 97, 98].

Задача о пространственной структуре многоквантового сверхпроводящего состояния в мезоскопических образцах сводится к вопросу о положении нулей функции  $|\psi(\mathbf{r})|$ , которая крайне чувствительна к симметрии границы и наличию дефектов поверхности [99]. Теория предсказывает следующие возможные вихревые состояния — многоквантовые вихри, имеющие одну точку  $|\psi(\mathbf{r})| = 0$ ; вихревые молекулы, имеющие несколько точек  $|\psi(\mathbf{r})| = 0$ , находящихся на малом расстоянии  $\ll \xi$  друг от друга, вихревые кольца и др. При изменении параметров  $T$  и  $H_0$  эти состояния переходят одно в другое посредством фазовых переходов первого или второго рода.

Другой особенностью вихревого состояния в мезоскопических образцах является резко выраженная осцилляторная зависимость магнитного момента от внешнего поля, при этом скачки на зависимости  $M(H_0)$  соответствуют вхождению в образец нового вихря (см., например, [95]). Также интересной особенностью намагниченности таких систем является неквантованное изменение полного магнитного потока при вхождении вихря (см., например, [100, 101]).

#### ***2.1.4. Вихревое состояние в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик***

В последнее время большое внимание уделяется изучению сверхпроводящих свойств гибридных структур "сверхпроводник–ферромагнетик" (S/F). Присутствие ферромагнитной подсистемы в S/F структурах способно кардинально изменить условия формирования вихревого состояния, структуру вихревой решетки и транспортные свойства таких систем. Практический интерес к изучению гибридных S/F систем связан с большими потенциальными возможностями их использования в различных приложениях, таких как переключатели и системы с контролируемым пиннингом. В дальнейшем мы ограничимся обзором свойств S/F систем, в которых сверхпроводящая пленка отделена от ферромагнитной подсистемы тонким слоем изолятора, так что обменным взаимодействием и эффектами близости можно пренебречь по сравнению с электромагнитным механизмом.

Экспериментально было обнаружено увеличение критического тока пиннинга  $j_p$  для таких систем, как сверхпроводящая пленка в поле малых ферромагнитных частиц [37, 102, 103, 104, 105], сверхпроводящая пленка в поле перфорированной ферромагнитной пленки (магнитные антиточки) [106], а также для двухслойной тонкопленочной S/F системы с доменной структурой в ферромагнитной пленке [107]. Немонотонная зависимость  $j_p(H_0)$ , имеющая ряд острых максимумов, обычно объясняется в терминах соизмеримости между формирующейся вихревой решеткой и решеткой магнитных частиц: критический ток пиннинга достигает максимума при целом числе квантов потока внешнего магнитного поля через элементарную ячейку магнитной решетки. Наблюдаемая асимметрия транспортных свойств гибридных S/F структур связана с особенностями пиннинга вихрей магнитными частицами, в

частности, зависимостью энергии взаимодействия вихря и магнитной частицы от взаимной ориентации между магнитным моментом частицы  $\mathbf{m}_0$  и  $\text{rot } \nabla\theta$  [108, 109].

Кроме необычных транспортных свойств, гибридные S/F структуры также могут обладать нетривиальной фазовой диаграммой  $H_0 - T$ , в частности, модифицированной зависимостью критической температуры от магнитного поля. В работе [34] было отмечено уменьшение  $T_c$  и изменение наклона температурной зависимости верхнего критического поля  $(dH_{c2}/dT)_{T_c}$  после намагничивания ферромагнитной пленки, при котором происходит изменение доменной структуры в ферромагнитной пленке и, соответственно, полей рассеяния, влияющих на термодинамические характеристики сверхпроводящей пленки. Осцилляторное поведение  $T_c(H_0)$  было обнаружено экспериментально для тонких пленок Nb в присутствии ансамбля магнитных частиц GdCo, намагниченных в плоскости пленки [35]. На температурной зависимости критической температуры сверхпроводящей пленки Pb в присутствии ансамбля магнитных частиц Co/Pd, имеющих перпендикулярную пленке намагниченность, обнаружены изломы, которые отсутствуют на зависимости  $T_c(H_0)$  для чистых пленок Pb [36]. Осцилляции критической температуры были также обнаружены для гибридной системы, состоящей из сверхпроводящего кольца Al, внутри которого находится магнитная частица, изготовленная из многослойной структуры Co/Pd, магнитный момент которой был ориентирован перпендикулярно плоскости кольца [38]. Отметим, что в указанных работах все особенности на линии фазового перехода  $T_c(H_0)$  наблюдаются при фиксированных значениях внешнего магнитного поля, удовлетворяющего условию  $H_{0,n} = n\Phi_0/S_0$ , где  $S_0$  — площадь элементарной ячейки магнитной решетки.

Большое число работ посвящено различным теоретическим аспектам изучения свойств гибридных S/F структур. Взаимодействие между сверхпроводящими и магнитными структурами в лондоновском приближении рассмотрено в работах [45],[46],[110]–[122]. В работе [39], по-видимому, впервые был представлен теоретический анализ полевой зависимости критической температуры тонкой сверхпроводящей пленки вблизи изолированной доменной стенки в ферромагнитной пленке. Авторы данной работы показали, что скачок  $z$ -компоненты магнитного поля стимулирует появление локализованного сверхпроводящего зародыша вблизи доменной стенки, что в свою очередь влияет на зависимость  $T_c(H_0)$ . Иными словами, неоднородность магнитного поля, также как и граничные условия, способна снять вырождение в квантовомеханической задаче о спектре энергии частицы в магнитном поле, что объединяет задачу о доменной сверхпроводимости в сверхпроводящих пленках большого размера с классической задачей о поверхностной сверхпроводимости в образцах с ограниченной геометрией (см. раздел 2.1.3). Обобщению результатов работы [39] на случай периодической доменной структуры и учету взаимодействия зародышей, локализованных на различных доменных стенках, посвящена работа [40].

Для гибридных S/F структур с магнитными частицами анализ зависимости

$T_c(H_0)$  до сих пор проведен не был. В работах [41, 42, 43, 44], посвященных теоретическому анализу термодинамических свойств S/F систем, основное внимание было уделено обсуждению характеристик вихревых структур, формирующихся в тонких сверхпроводящих пленках в неоднородном магнитном поле, а верхнее критическое поле было вычислено только для некоторых фиксированных значений температуры. Это связано с тем, что в этих работах рассматриваются либо мезоскопические диски радиуса  $R_d$  (при этом фиксировано отношение  $R_d/\xi$  [41, 42]), либо сверхпроводящая пленка большого размера с внедренной в нее магнитной частицей радиуса  $R$  (при этом фиксирована или температура [43], или отношение  $R/\xi$  [44]). Заметим, что во всех упомянутых работах учитывается совместное влияние как неоднородности магнитного поля, так и граничных эффектов, в результате чего сложно отделить влияние ферромагнетика на сверхпроводящие свойства образцов от мезоскопических эффектов. Было отмечено, что для рассматриваемых систем характерна реализация экзотических вихревых состояний: многоквантовых (гигантских) вихрей с  $m \neq 1$  и многовихревых состояний (линейной комбинации многоквантовых вихрей с разными  $m$ ). Было показано, что верхнее критическое поле  $H_{c3}$  таких систем превышает поле  $H_{c2}$  — подавления объемной сверхпроводимости в однородном поле. Для описания неоднородного магнитного поля, характерного для S/F систем, в работах [41, 42, 44] рассмотрено несколько модельных распределений  $B_z(r)$ , обеспечивающих нулевой полный поток: кусочно однородное распределение с двумя ступеньками, поле витка с током и поле магнитной частицы.

Наиболее близкой работой к теме данного раздела следует считать работу [123], в которой изучены особенности вихревого состояния в тонкой сверхпроводящей пленке большого размера в поле магнитного диполя, ориентированного перпендикулярно пленке. На основе численного решения полной нелинейной системы уравнений ГЛ при  $H_0 = 0$ , авторы изучили особенности фазовой диаграммы  $m_0 - R$ , где  $m_0$  — дипольный момент частицы,  $R$  — радиус частицы. Показано, что вихревые конфигурации, соответствующие основному состоянию, могут иметь следующую сложную структуру: в центре под магнитной частицей располагается многоквантовый вихрь с завихренностью  $m$ , вокруг которого располагаются  $m$  антивихрей, сгруппированных в несколько концентрических колец. Отмечено, что при  $m_0 \rightarrow 0$  основным состоянием является безвихревое (мейсснеровское) состояние с  $m = 0$ . При увеличении  $m_0$  ( $R = \text{const}$ ) смешанное состояние в пленке формируется путем рождения пары вихрь–антивихрь на краю магнитного диска и последующего их расщепления. Предположение  $H_0 = 0$  не позволило исследовать авторам данной работы исследовать полевую зависимость критической температуры.

Далее в настоящей диссертации для подобной системы (тонкая сверхпроводящая пленка в поле магнитной частицы) будет аналитически и численно исследованы характеристики вихревых структур в двух предельных случаях:

- для сильных магнитных полей, когда можно перейти к решению линеаризован-

- ного уравнения ГЛ и исследовать особенности перехода пленки из нормального состояния в смешанное состояние и получить зависимость  $T_c(H_0)$  (раздел 2.2);
- для слабых магнитных полей, когда можно перейти к решению линейных уравнений Лондонов и исследовать особенности перехода пленки из мейсснеровского состояния в смешанное состояние (раздел 2.3).

## 2.2. Сверхпроводящая пленка в поле магнитного диполя вблизи линии фазового перехода сверхпроводник–нормальный металл

### 2.2.1. Постановка задачи

Теперь перейдем к изучению особенностей линий фазового перехода  $T_c(H_0)$  в гибридных S/F структурах, состоящих из сверхпроводящей пленки и магнитной частицы, находящейся от пленки на конечном расстоянии <sup>†</sup>. Пусть переход пленки в сверхпроводящее состояние происходит при наличии неоднородного магнитного поля (field cooled process). Мы будем предполагать, что намагниченность ферромагнитной частицы не зависит ни внешнего магнитного поля <sup>‡</sup>, ни от состояния сверхпроводящей пленки. Заметим, что критическое поле разрушения сверхпроводящего состояния в тонкой пленке толщины  $d_s$  в параллельном поле  $H_{c2,\parallel} \sim \Phi_0/(d_s\xi)$  значительно превышает критическое поле разрушения сверхпроводимости в перпендикулярном поле  $H_{c2,\perp} \sim \Phi_0/\xi^2$ :  $H_{c2,\parallel}/H_{c2,\perp} \sim \xi/d_s \gg 1$  (см., например, [124]). Это условие может быть легко выполнено при высоких температурах,  $(T_{c0} - T)/T_{c0} \ll 1$ , поскольку  $\xi(T) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow T_{c0}$ . Учитывая данное обстоятельство, можно пренебречь наличием  $B_r$  и  $B_\varphi$  компонент полного магнитного поля, и рассматривать пленку в неоднородном поле  $B_z(r, \varphi)$ . Мы вводим цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с началом на поверхности пленки под магнитной частицей, ось  $z$  выбрана по нормали к пленке.

Пусть неоднородное поле обладает аксиальной симметрией, то есть  $B_z = B_z(r)$ . Выберем радиальную калибровку векторного потенциала

---

<sup>†</sup> В такой постановке задачи доминирующим механизмом является электромагнитный механизм взаимодействия (разрушение сверхпроводимости полями рассеяния ферромагнитной частицы), а эффекты близости и обменного взаимодействия не оказывают влияния на сверхпроводящие свойства пленки. Учет влияния обменного взаимодействия на критическую температуру пленки рассмотрен в работе [39].

<sup>‡</sup> Как будет показано далее, основные эффекты будут проявляться при условии  $|H_0| \lesssim B_0$ , где  $B_0$  — амплитуда неоднородной компоненты поля на поверхности пленки. Типичные значения полей коэрцитивности ферромагнетика  $B_{\text{coer}} \sim 10^3$  Гс, увеличением высоты или введением изолирующей прослойки поле  $B_0$  может быть уменьшено до  $10 \div 10^2$  Гс, поэтому условие  $B_0 \ll B_{\text{coer}}$  может быть легко выполнено.

$$A_\varphi(r) = H_0 r/2 + a_\varphi(r). \quad (2.6)$$

Будем искать решение линеаризованного уравнения ГЛ (2.5) в виде  $\psi_m(r, \varphi) = f_m(r) \exp(im\varphi)$ , при этом  $f_m(r)$  удовлетворяет следующему уравнению

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_m}{dr} \right) + \left( \frac{2\pi}{\Phi_0} A_\varphi(r) - \frac{m}{r} \right)^2 f_m = \frac{1}{\xi^2(T)} f_m, \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) имеет нетривиальные решения только для дискретного набора температур  $T_n(H_0)$ . Под критической температурой сверхпроводящей пленки в неоднородном магнитном поле  $T_c$  мы будем понимать максимальную температуру, при которой в пленке существует бесконечно малый сверхпроводящий зародыш:  $T_c(H_0) = \max\{T_n(H_0)\}$ . Наличие неоднородной компоненты поля должно приводить к снятию вырождения по орбитальным моментам  $m$ , природа которой подробно описана в разделе 2.1.3. Пересечение термов  $E_m(H_0)$  будет соответствовать изломам на полевой зависимости критической температуры пленки  $T_c(H_0)$ . Отметим, что для рассматриваемой системы состоянием с минимальной энергией может быть не треугольная решетка вихрей, а многоквантовое вихревое состояние (как в мезоскопических образцах), для которого завихренность  $m$  будет изменяться при изменении внешнего поля  $H_0$ . По сути дела описываемый эффект является аналогом эффекта Литтла–Паркса, который наблюдался ранее только для мезоскопических и многосвязных сверхпроводящих образцов (см. раздел 2.1.3).

Далее мы рассмотрим несколько модельных распределений  $B_z(r)$  (радиальная ступенька — раздел 2.2.2, произвольное плавное распределение — раздел 2.2.3, поле магнитного диполя — 2.2.4) и рассчитаем в каждом случае полевую зависимость  $T_c(H_0)$  и пространственную структуру вихревых решений.

### 2.2.2. Структура параметра порядка в сильно неоднородном магнитном поле $B_z(r)$

В качестве простейшей модельной задачи о структуре вихревого решения в неоднородном магнитном поле, допускающей аналитическое решение, рассмотрим задачу о спектре энергии частицы в кусочно однородном поле следующего вида:

$$B_z(r) = \begin{cases} B_0 + H_0; & r < R_0 \\ H_0; & r > R_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Такое распределение (рис. 7) приближенно описывает магнитное поле вблизи круглого домена (или магнитного цилиндра) радиуса  $R_0$  в толстой ферромагнитной пленке толщины  $d_f$  при условии, что  $d_f$  значительно превышает среднее расстояние между такими доменами. Если радиус локализации волновой функции вблизи

доменной стенки будет меньше, чем междоменное расстояние, тогда можно взаимодействием зародышей, локализованных на различных доменах. Подобная задача, учитывающая взаимодействие зародышей в одномерной доменной структуре, рассмотрена в работе [40].

Определим векторный потенциал следующим образом:

$$A_\varphi(r) = \begin{cases} (B_0 + H_0)r/2; & r < R_0 \\ H_0r/2 + B_0R_0^2/(2r); & r > R_0 \end{cases}$$

Будем искать решение уравнений ГЛ в виде  $\psi = f_m(\rho) \exp(im\varphi)$ , где  $\rho = r/R_0$  и

$$f_m(\rho) = \begin{cases} f_m^{(1)}(\rho); & \rho < 1 \\ f_m^{(2)}(\rho); & \rho > 1 \end{cases}$$

В каждой области решение может быть выражено через вырожденные гипергеометрические функции (функции Куммера)  $M(a, b, z)$  и  $U(a, b, z)$  <sup>†</sup>. Решения во внутренней и внешней областях имеют следующий вид

$$\begin{aligned} f_1(\rho) &= \left[ A_1 M(a_1, b_1, N_f |1 + h| \rho^2) + A_2 U(a_1, b_1, N_f |1 + h| \rho^2) \right] \times \\ &\times \left( N_f |1 + h| \rho^2 \right)^{|m|/2} \exp(-N_f |1 + h| \rho^2 / 2), \\ f_2(\rho) &= \left[ B_1 M(a_2, b_2, N_f |h| \rho^2) + B_2 U(a_1, b_1, N_f |h| \rho^2) \right] \times \\ &\times \left( N_f |h| \rho^2 \right)^{|m_2|/2} \exp(-N_f |h| \rho^2 / 2), \end{aligned}$$

где  $h = H_0/B_0$  — безразмерное магнитное поле, параметр  $N_f = \pi B_0 R_0^2 / \Phi_0$  характеризует число квантов потока через окружность радиуса  $R_0$  в отсутствие внешнего поля;  $m_2 = m - N_f$ ,  $b_1 = |m| + 1$ ,  $b_2 = |m_2| + 1$ ,

$$a_1 = -\beta_1 + \frac{|m| + 1}{2} = -\frac{\varepsilon}{4N_f |1 + h|} + \frac{|m| - m \operatorname{sgn}(1 + h) + 1}{2}, \quad (2.9)$$

$$a_2 = -\beta_2 + \frac{|m_2| + 1}{2} = -\frac{\varepsilon}{4N_f |h|} + \frac{|m_2| - m_2 \operatorname{sgn}(h) + 1}{2}, \quad (2.10)$$

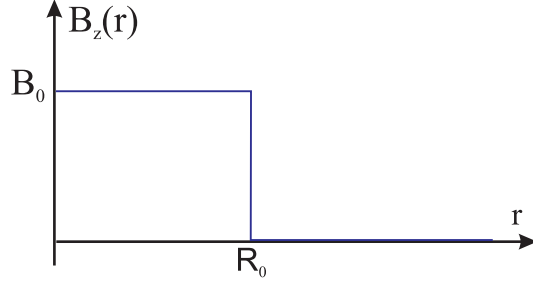
$$\varepsilon = \frac{R_0^2}{\xi_0^2} \left( 1 - \frac{T}{T_{c0}} \right). \quad (2.11)$$

Неизвестные константы  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  должны быть определены из условия непрерывности функции  $f(\rho)$  и ее первой производной при  $\rho = 1$  и из условия интегрируемости (ограниченности) волновой функции по всем пространству:

---

<sup>†</sup> Функции Куммера  $M(a, b, z)$  и  $U(a, b, z)$  [125] являются линейно независимыми решениями следующего дифференциального уравнения

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (b - z) \frac{df}{dz} - af = 0.$$



**Рис. 7.** Профиль модельного распределения неоднородного магнитного поля в виде радиальной ступеньки

$f_1(\rho \rightarrow 0) = \text{const } \rho^{|m|}$ ;  $f_2(\rho \rightarrow \infty) = 0$ . Исследуя асимптотическое поведение  $M(a, b, z)$  и  $U(a, b, z)$ :  $M(a, b, z \rightarrow 0) = 1$ ,  $M(a, b, z \rightarrow \infty) \propto e^z z^{a-b}$  и  $U(a, b, z \rightarrow 0) \propto z^{1-b}$ ,  $U(a, b, z \rightarrow \infty) \propto z^{-a}$ , приходим к выводу, что  $A_2 = 0$  и  $B_1 = 0$ . Сшивая решения  $f_1(\rho)$  и  $f_2(\rho)$  вместе с первыми производными при  $\rho = 1$  и полагая  $N_f \neq 0$ , получаем условия для определения спектра энергий:

$$\begin{aligned}
 & |h|^{m-N_f/2} \cdot |1+h|^{m/2} = 0, \\
 & M(a_1, b_1, N_f|1+h|) \cdot U(a_2, b_2, N_f|h|) \cdot \left( |1+h| - |h| + \frac{|m-N_f|}{N_f} - \frac{|m|}{N_f} \right) - \\
 & - 2a_2|h|M(a_1, b_1, N_f|1+h|) \cdot U(a_2+1, b_2+1, N_f|h|) - \\
 & - 2\frac{a_1}{b_1}|1+h|M(a_1+1, b_1+1, N_f|1+h|) \cdot U(a_2, b_2, N_f|h|) = 0. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

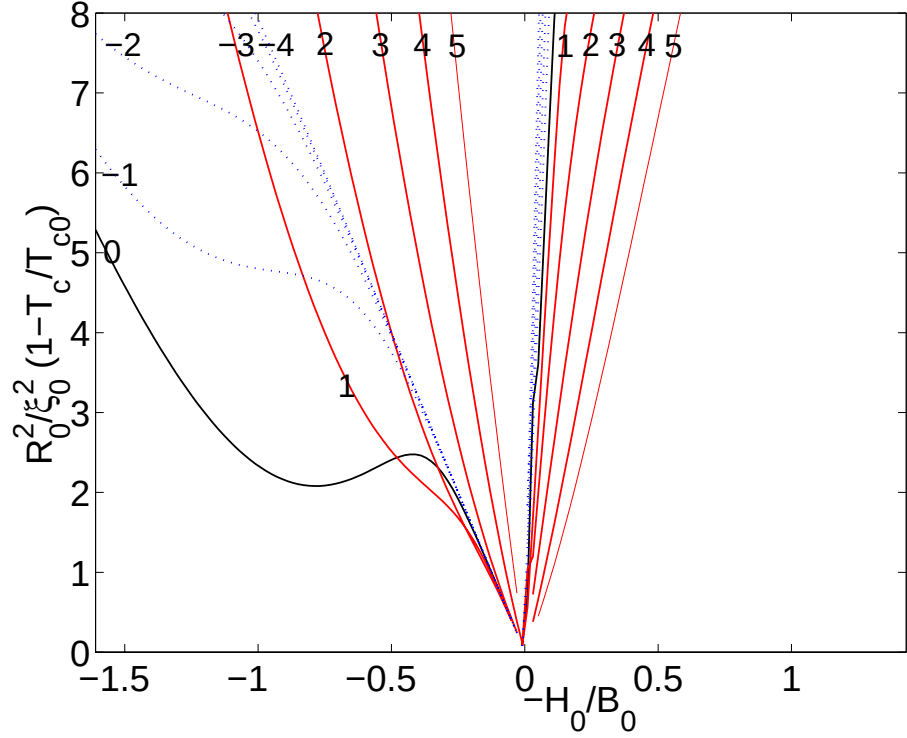
Решая уравнение (2.12), находим спектр разрешенных значений энергии  $\varepsilon(h, m)$  или линию фазового перехода  $T_c(H_0)$ . Результаты подобного расчета для  $N_f = 4$  представлены на рис. 8. Отметим, что теория предсказывает осцилляции критической температуры при изменении внешнего поля  $H_0$ , сопровождающиеся скачкообразными изменениями вихревой структуры.

Легко получить асимптотические выражения для  $T_c(H_0)$  при  $|h| = |H_0/B_0| \gg 1$ . Действительно, при этом условии отсутствуют точки, где магнитное поле обращается в нуль,  $B_z(r) \neq 0$ , поэтому локализованный сверхпроводящий зародыш с характерной шириной  $L_H \propto 1/\sqrt{H_0} \ll R_0$  будет образовываться в области с минимальным значением  $|B_z(r)|$ . Для больших отрицательных полей, то есть при  $h < 0$  и  $|h| \gg 1$ , это соответствует тому, что зародыш будет находиться в центре диска, в квазиоднородном поле  $B_{\min} = |H_0 + B_0| = B_0|h + 1|$ , при этом  $m = 0$ . Подставляя в выражение (2.9)  $m = 0$  и считая  $a_1 = 0$  (как в однородном поле), получаем  $\varepsilon = 2N_f|1+h|$ , что соответствует

$$\left(1 - \frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \frac{2\pi\xi_0^2}{\Phi_0}|H_0 + B_0|, \quad |H_0| \gg B_0, \quad H_0 < 0.$$

Для больших положительных полей зародыш будет образовываться на большом





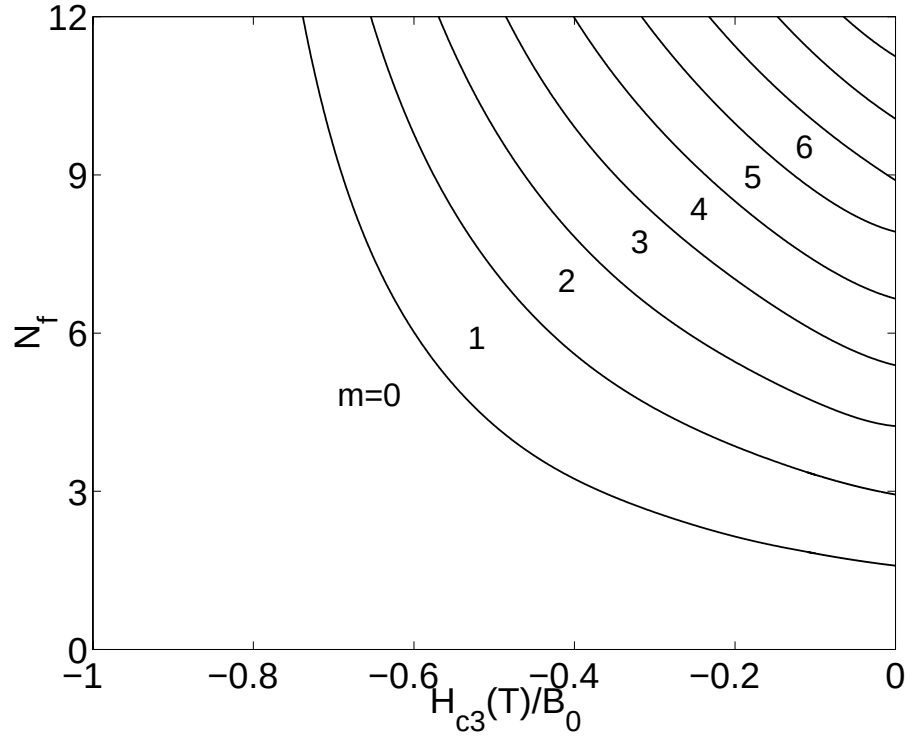
**Рис. 8.** (цветной) Зависимость критической температуры  $\varepsilon = (1 - T/T_{c0})R_0^2/\xi_0^2$  от внешнего магнитного поля  $H_0$  в присутствии неоднородного поля в виде радиальной ступеньки для  $N_f = 4$ ; получена путем решения уравнения (2.12). На кривых цифрами обозначены значения  $m$  для соответствующих многоквантовых состояний.

расстоянии от магнитного диска ( $r/R_0 \gg 1$ ), что соответствует  $m \rightarrow \infty$ . Рассуждая аналогично, из условия  $a_2 = 0$  получаем  $\varepsilon = 2N_f|h|$ , что соответствует

$$\left(1 - \frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \frac{2\pi\xi_0^2}{\Phi_0}H_0, \quad H_0 \gg B_0, \quad H_0 > 0.$$

Заметим также, что в случае  $|h| \rightarrow \infty$  должно восстанавливаться вырождение по орбитальному моменту, то есть для  $h < 0$ :  $\varepsilon(h, 0) \simeq \varepsilon(h, m < 0)$  и для  $h > 0$ :  $\varepsilon(h, 0) \simeq \varepsilon(h, m > 0)$ . Кроме этого, при  $|h| \ll 1$  также имеет место вырождение. Это значит, что при  $|H_0| \ll B_0$  и  $|H_0| \gg B_0$  для анализа пространственной структуры смешанного состояния на линии  $T_c(H_0)$  нельзя пользоваться линейной теорией и необходимо решать нелинейную задачу: минимизировать функционал свободной энергии на классе решений, представляющих собой линейную комбинацию состояний с определенными орбитальными моментами.

Следует заметить, что наиболее сильные осцилляции  $T_c(H_0)$  имеют место при  $-1 \leq h < 0$ . Однако в очень слабом поле нарушается условие сильной локализации зародыша (то есть характерный размер  $L_H \propto 1/\sqrt{H_0} \rightarrow \infty$ ), которое позволило нам использовать приближенное ступенькообразное распределение

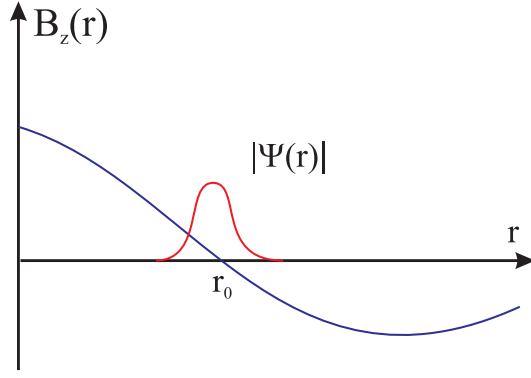


**Рис. 9.** Зависимость оптимального орбитального момента  $m$  как функция  $H_{c3}(T)$  и  $N_f$  для тонкой сверхпроводящей пленки в присутствии неоднородного поля в виде радиальной ступеньки.

неоднородной компоненты магнитного поля<sup>†</sup> и пренебречь взаимодействием зародышей, локализованных на разных доменах или магнитных частицах. Поэтому условием применимости настоящего подхода для описания полевой зависимости реальных планарных гибридных S/F систем с доменной структурой является условие  $N_f \gg 1$ . Полученное нами аналитическое решение задачи на собственные волновые функции  $\psi(\mathbf{r})$  и собственные значения  $\varepsilon(h, m)$  энергии также использовалась в качестве тестовой задачи при отладке схемы для численного решения стационарного уравнения ГЛ (раздел 2.2.4).

На рис. 9 представлена зависимость орбитального момента  $m$  от внешнего магнитного поля  $H_0$ , и от параметра магнитной частицы  $N_f$ . При этом критическая температуры рождения соответствующего зародыша может быть найдена из условия  $H_{c3}(T_c) = H_0$  согласно уравнению (2.12). Так, например, при  $N_f < 1.7$  при любых магнитных полях основным состоянием является безвихревое состояние с  $m = 0$ ; при  $N_f = 4$  возможны три типа решений:  $m = 0$ ,  $m = 1$ , и  $m = 2$ .

<sup>†</sup> В работе [42] изучалась структура вихревых решений для неоднородного магнитного поля, имеющего вид двух радиальных ступенек при  $H_0 = 0$ . Такое распределение обеспечивает нулевой магнитный поток в отсутствии внешнего поля, что гораздо адекватнее описывает реальные распределения магнитного поля. Однако основные особенности, присущие S/F системам, могут быть изучены и на более простом распределении поля, рассмотренном нами.



**Рис. 10.** Локализованный сверхпроводящий зародыш в неоднородном магнитном поле.

### 2.2.3. Формирование сверхпроводящих зародышей в слабо неоднородном магнитном поле $B_z(r)$

В этом разделе рассмотрим задачу о формировании сверхпроводящего зародыша в аксиально симметричное магнитное поле, которое предполагается достаточно плавным (критерий будет указан ниже). В силу симметрии векторного потенциала  $A_\varphi(r)$ , описываемого выражением (2.6), будем искать решение уравнений ГЛ в виде состояния с определенным орбитальным моментом  $m$ :

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \frac{g_m(r)}{\sqrt{r}} e^{im\varphi}.$$

Такая замена позволяет перейти к уравнению вида

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 g_m}{dr^2} + U(r)g_m &= \frac{1}{\xi^2} g_m, \\ U(r) &= \frac{(\Phi(r)/\Phi_0 - m)^2}{r^2} - \frac{1}{4r^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\Phi(r) = 2\pi r A_\varphi(r)$  — полный магнитный поток через окружность радиуса  $r$ . Можно ожидать, что зародыш будет локализован вблизи точки  $r_0$ , где полное поле  $B_z(r_0) = 0$ . Предполагая, что магнитное поле медленно меняется в окрестности точки  $r_0$ , разложим потенциал  $U(r)$  в ряд по степеням  $(r - r_0)$ :

$$\frac{\Phi(r)}{\Phi_0} - m \simeq \left( \frac{\Phi(r_0)}{\Phi_0} - m \right) + \frac{\pi r_0 B'_z(r_0)}{\Phi_0} (r - r_0)^2 = A + C(r - r_0)^2.$$

Такое разложение справедливо, если

$$\left| \frac{B''_z(r_0)}{B'_z(r_0)} \ell \right| \ll 1, \quad (2.14)$$

где  $\ell$  — характерный размер сверхпроводящего зародыша. Введем новую координату  $t = (r - r_0)/\ell$  и перейдем к уравнению следующего вида

$$-\frac{d^2 g_m}{dt^2} + \ell^2 U(t) g_m = \frac{\ell^2}{\xi^2} g_m. \quad (2.15)$$

Разложим потенциал  $\ell^2 U(t)$  в ряд по степеням  $t$

$$\begin{aligned} \ell^2 U(t) &\simeq a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots \\ a_0 &= \frac{1}{4} \frac{\ell^2}{r_0^2} (-1 + 4A^2), \\ a_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\ell^3}{r_0^3} (-1 + 4A^2), \\ a_2 &= \frac{1}{4} \frac{\ell^4}{r_0^4} (-3 + 12A^2 + 8ACr_0^2), \\ a_3 &= -\frac{\ell^5}{r_0^5} (-1 + 4A^2 + 4ACr_0^2), \\ a_4 &= \frac{1}{4} \frac{\ell^6}{r_0^6} (-5 + 20A^2 + 24ACr_0^2 + 4C^2 r_0^2), \\ a_5 &= -\frac{1}{2} \frac{\ell^7}{r_0^7} (-3 + 12A^2 + 16ACr_0^2 + 4C^2 r_0^2). \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты разложения попарно имеют одинаковую структуру. Учитывая, что безразмерная координата  $t$  имеет характерные значения порядка единицы, заметим, что  $|a_1/a_0| \sim \ell/r_0 \ll 1$ ,  $|a_3/a_2| \sim \ell/r_0 \ll 1$  и  $|a_5/a_4| \sim \ell/r_0 \ll 1$ , поэтому мы можем пренебречь нечетными степенями разложения по сравнению с предшествующими четными слагаемыми при условии

$$\frac{\ell}{r_0} \ll 1 \quad (2.16)$$

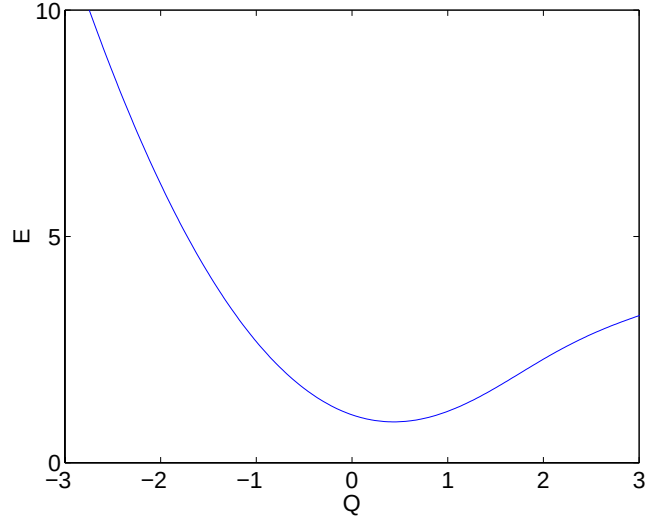
Предположим также, что справедливы следующие неравенства  $1 \ll 4A^2$  и  $|A| \ll |C|r_0^2$ ; эти условия соответствуют тому, что магнитный поток через окружность  $B_z(r_0) = 0$  значительно превосходит квант магнитного потока  $\Phi_0$  <sup>†</sup>. В указанных предположениях получаем

$$\ell^2 U(t) \simeq \frac{\ell^2}{r_0^2} A^2 + 2 \frac{\ell^4}{r_0^4} AC r_0^2 t^2 + \frac{\ell^6}{r_0^6} C^2 t^4.$$

Выберем параметр обезразмеривания  $\ell$  таким образом, чтобы коэффициент при старшей степени был равен единице:

---

<sup>†</sup> Далее (в разделе 2.2.4) будут представлены результаты численного решения уравнения (2.13) в поле магнитного диполя и будет показано, что сделанные допущения вполне оправданы, если  $N_f \gg 1$ .



**Рис. 11.** Спектр энергии модельной задачи  $E(Q)$ .

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{r_0}{|C|}} = \sqrt[3]{\frac{\Phi_0}{\pi |B'_z(r_0)|}}.$$

Легко видеть, что для такого выбора  $\ell$  уравнение (2.15) переходит в уравнение Шредингера для частицы в биквадратическом потенциале

$$-\frac{d^2 g_m}{dt^2} + (t^2 - Q)^2 g_m = E g_m, \quad (2.17)$$

где собственная энергия  $E$  зависит только от безразмерного параметра  $Q$

$$E = \frac{\ell^2}{\xi_0^2} \left(1 - \frac{T}{T_{c0}}\right), \quad Q = -\frac{A}{C\ell^2} = -\left(\frac{\Phi(r_0)}{\Phi_0} - m\right) \sqrt[3]{\frac{\Phi_0}{\pi r_0^3 B'_z(r_0)}}. \quad (2.18)$$

График зависимости  $E(Q)$  для модельного уравнения (2.17) приведен на рис. 11, для данной зависимости существует только один минимум энергии  $E = E_{\min} \simeq 0.904$  при  $Q \simeq 0.437$ .

Таким образом, можно получить общее выражение, описывающее зависимость  $T_c(H_0)$  для сверхпроводящей пленки в аксиально симметричном поле произвольного вида. Для каждого фиксированного значения  $H_0$ , и соответственно, известного значения  $r_0 = r_0(H_0)$ , критическая температура  $T_c$  может быть определена минимизацией функции  $E(Q)$  соответствующим выбором орбитального момента  $m$

$$1 - \frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{\xi_0^2}{\ell^2} \left[ \min_m E \left( -\left(\frac{\Phi(r_0)}{\Phi_0} - m\right) \sqrt[3]{\frac{\Phi_0}{\pi r_0^3 B'_z(r_0)}} \right) + O\left(\frac{\ell^2}{r_0^2}\right) \right]. \quad (2.19)$$

Если реальный профиль магнитного поля имеет несколько нулей, то необходимо сравнивать критические температуры  $T_c$ , описываемые выражением (2.19), для каждого локализованного зародыша. Решения уравнения (2.19) для сверхпроводящей пленки в поля точечного магнитного диполя представлен на рис. 12 и 13.

Легко видеть, что при увеличении параметра  $N_f$ , то есть при увеличении дипольного момента  $m_0$  или уменьшении высоты  $a_0$ , приближенный аналитический подход все точнее описывает истинную зависимость  $T_c(H_0)$ , полученную численным решением (2.7).

Основной результат данного раздела можно сформулировать следующим образом: изменяя величину внешнего магнитного поля, мы можем управлять положением сверхпроводящего канала в тонких пленках, помещенных в неоднородное магнитное поле. Действительно, при изменении внешнего поля  $H_0$  происходит смещение точки  $r_0$ , в которой полное поле обращается в нуль, поэтому происходит изменение магнитного потока через контур  $B_z(r_0) = 0$ , которое сопровождается изменением орбитального момента куперовских пар и энергии основного состояния (критической температуры пленки).

#### 2.2.4. Формирование зародышей в поле магнитного диполя

Рассмотрим случай, когда неоднородное магнитное поле создается точечным магнитным диполем с дипольным моментом  $\mathbf{m}_0 = m_0 \mathbf{z}_0$ , расположенным на высоте  $a_0$  от сверхпроводящей пленки. Такое приближение справедливо, если характерный размер магнитной частицы  $d_m$  мал по сравнению с характерными масштабами задачи,  $d_m \ll a_0$ . Магнитное поле и векторный потенциал магнитного диполя в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  могут быть записаны следующим образом

$$b_z(r) = \frac{m_0(2a_0^2 - r^2)}{(r^2 + a_0^2)^{5/2}}, \quad a_\varphi(r) = \frac{m_0 r}{(r^2 + a_0^2)^{3/2}}.$$

Запишем уравнение ГЛ в безразмерном виде

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df_m}{d\rho} \right) + \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} N_f \left( \frac{H_0}{B_0} \rho + \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^{3/2}} \right) - \frac{m}{\rho} \right]^2 f_m = \frac{a_0^2}{\xi_0^2} \left( 1 - \frac{T_c}{T_{c0}} \right) f_m, \quad (2.20)$$

где  $\rho = r/a_0$ ,  $N_f = 4\pi m_0/(3\sqrt{3}a_0\Phi_0)$  — число квантов магнитного потока через окружность  $B_z(r_0) = 0$  при  $H_0 = 0$ ,  $B_0 = 2m_0/a_0^3$  — максимум  $z$ -компоненты поля, создаваемого диполем на поверхности сверхпроводящей пленки. Далее мы будем считать, что  $H_0 \neq 0$  и, соответственно, на больших расстояниях от частицы векторный потенциал является линейно растущей функцией. В этом случае всегда существует локализованный сверхпроводящий зародыш. Для исследования вихревой структуры при  $H_0 = 0$  необходимо решать нелинейную задачу (см. [123]).

Обсудим асимптотики  $T_c(H_0)$  для данного распределения  $b_z(r)$  при  $|H_0/B_0| \gg 1$ . Для магнитного диполя максимальное поле  $B_{\max} = B_0$ ; минимальное поле

$B_{\min} = -B_0/(25\sqrt{5}) \simeq -0.018B_0$ . Рассуждая также, как в разделе 2.2.2, получаем асимптотические выражения

$$\left(1 - \frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \frac{2\pi\xi_0^2}{\Phi_0}|H_0 + B_{\max}|, \quad |H_0| \gg B_0, \quad H_0 < 0,$$

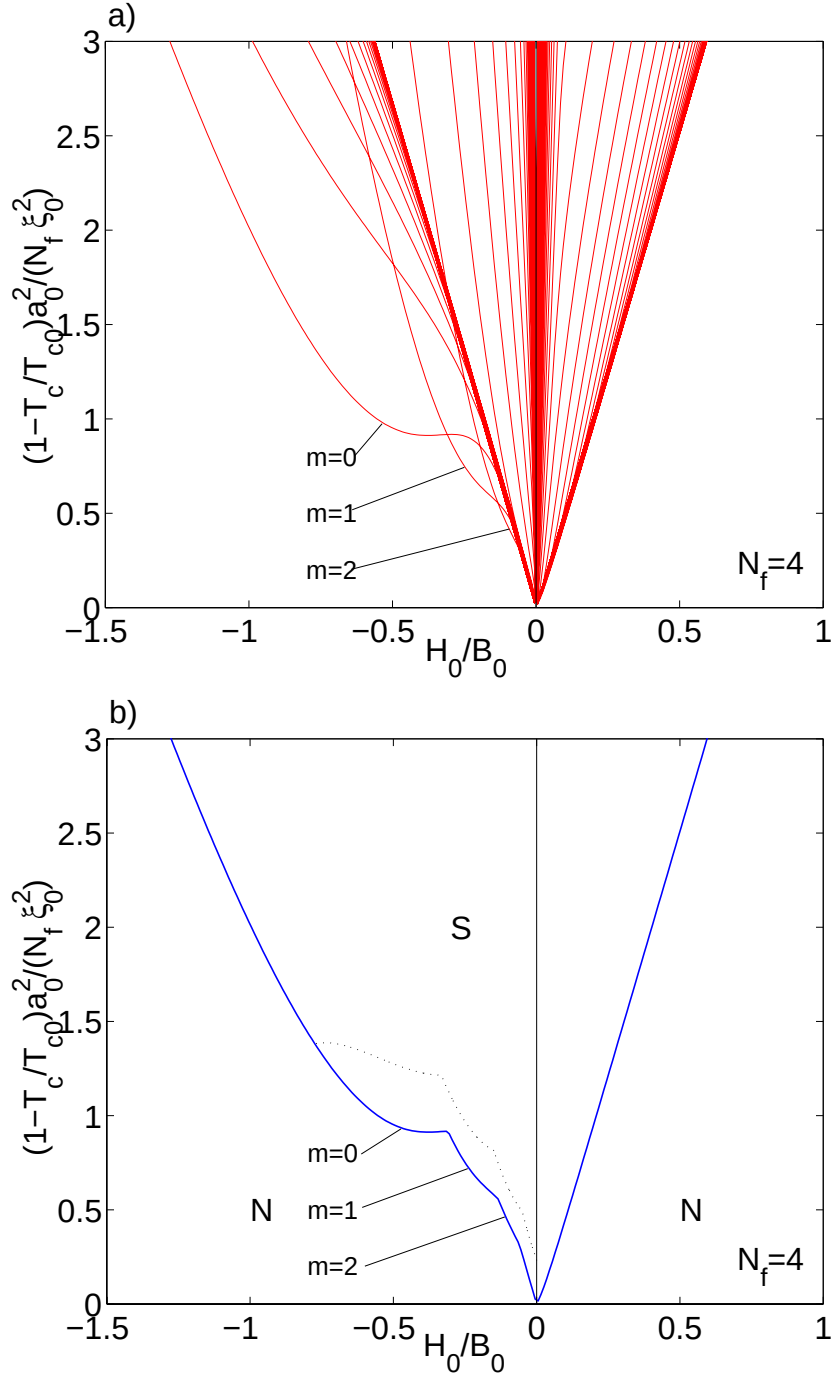
$$\left(1 - \frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \frac{2\pi\xi_0^2}{\Phi_0}|H_0 + B_{\min}|, \quad H_0 \gg B_0, \quad H_0 > 0.$$

Отметим наличие существенной асимметрии  $T_c(H_0) \neq T_c(-H_0)$  линии фазового перехода, которая связана с тем,  $|B_{\max}| \gg |B_{\min}|$ . Как следствие, осцилляции  $T_c(H_0)$  более выражены при  $H_0 < 0$ , когда внешнее поле компенсирует положительную часть поля диполя. Количество осцилляций  $T_c(H_0)$  также зависит от параметра  $N_f$ .

Для численного решения уравнения (2.20), позволяющего исследовать структуру вихревых решений  $|\psi_m(r)|$  и полевою зависимость критической температуры  $T_c(H_0)$  для фиксированного значения  $N_f$ , использовалась разностная схема с последующей диагонализацией соответствующей трехдиагональной матрицы. На рис. 12 представлена полевая зависимость критической температуры для  $N_f = 4$ , полученная как в результате численного решения уравнения (2.20) (сплошная линия) и аналитического решения уравнения (2.19) (пунктирная линия). Отметим, что характерный масштаб осцилляций по магнитному полю –  $\Delta H \sim B_0/N_f$ , по температуре –  $\Delta T_c \sim T_{c0}B_0/H_{c2}(0)$ . Предсказываемые нами осцилляции  $T_c(H_0)$  качественно отличаются от особенностей, обнаруженных на зависимости  $T_c(H_0)$  в работах [35, 36], поскольку в нашей задаче наблюдаемые особенности не связаны с квантованием магнитного потока через элементарную ячейку решетки магнитных частиц.

Оценим возможность наблюдения описанных выше осцилляций температуры в эксперименте. Возьмем характерное значение дипольного момента частицы  $m_0 \sim 3 \times 10^{-11}$  Гс·см<sup>3</sup> (размер частицы – 300 нм × 300 нм × 300 нм, намагниченность  $\sim 10^3$  Гс). Для частиц, помещенных на сверхпроводящую пленку средняя высота  $a_0 \sim 300$  нм, поэтому  $N_f \simeq 10$ ,  $B_0 \sim 10^3$  Гс и характерный масштаб осцилляций по магнитному полю  $\Delta H \sim B_0/N_f \sim 100$  Гс, по температуре  $\Delta T_c \sim 10^{-2}T_{c0} \sim 0.1$  К для Nb пленок ( $\xi_0 \sim 40$  нм и  $T_{c0} \sim 8$  К); и  $\Delta T_c \sim 1$  К для Al пленок ( $\xi_0 \sim 100$  нм и  $T_{c0} \sim 6$  К). Осцилляторное поведение  $T_c(H_0)$  может быть зарегистрировано, например, в экспериментах по измерению температурной и полевой зависимостей удельного сопротивления в гибридных S/F системах, состоящих из сверхпроводящей пленки и решетки ферромагнитных частиц.

На рис. 13 представлены полевые зависимости критической температуры для  $N_f = 10$  и  $N_f = 30$ . Отметим, что с повышением  $N_f$  асимметрия зависимости  $T_c(H_0)$  становится все сильнее, а локальное приближение, развитое в разделе 2.2.3, все точнее описывает особенности линии фазового перехода  $T_c(H_0)$ .

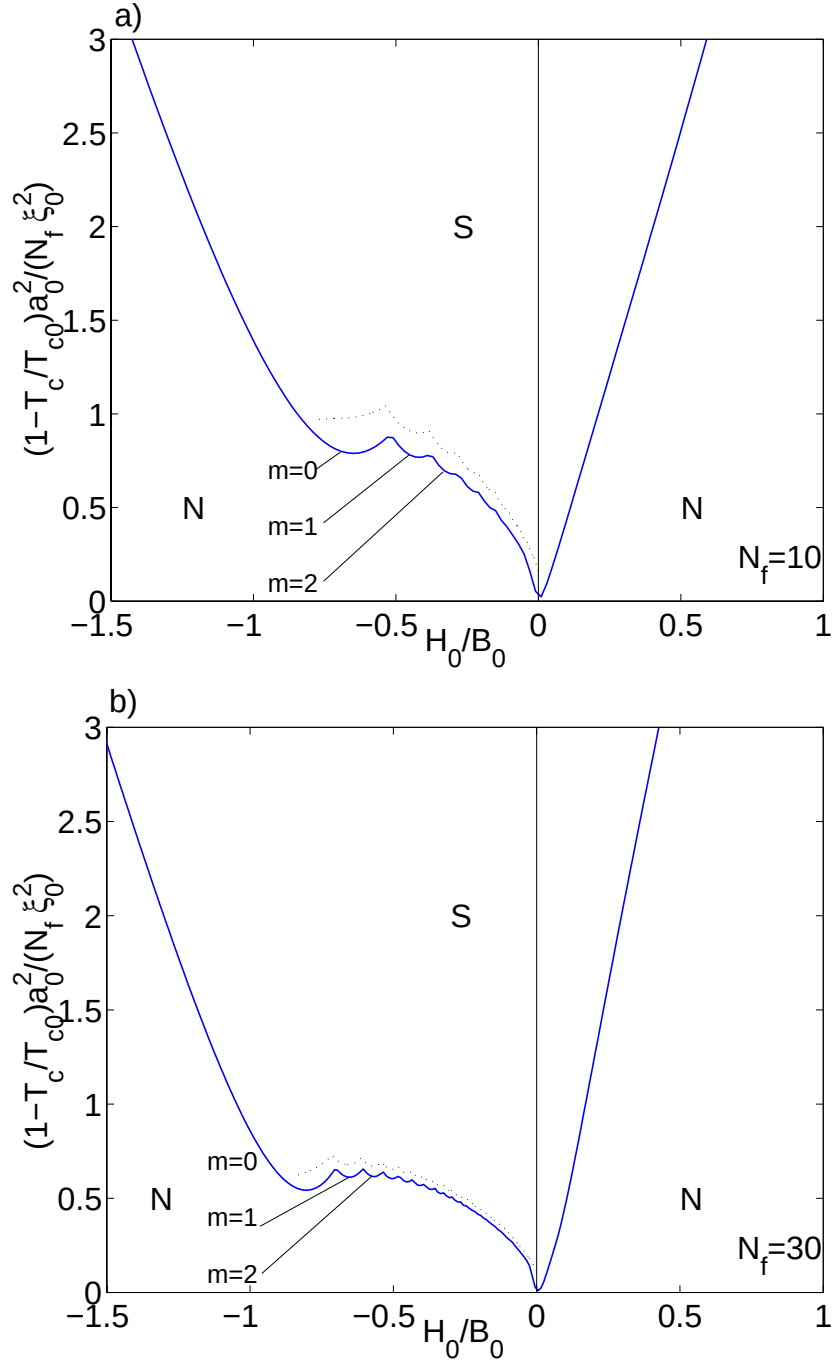


**Рис. 12.** (цветной)

(а): Зависимость собственной энергии  $E = (1 - T_c/T_{c0})a_0^2/(N_f \xi_0^2)$  от внешнего магнитного поля  $H_0$  в присутствии поля магнитного диполя,  $N_f = 4$ ; получена путем численного решения уравнения (2.20).

(б): Зависимость  $E = (1 - T_c/T_{c0})a_0^2/(N_f \xi_0^2)$  от  $H_0$  в присутствии поля магнитного диполя,  $N_f = 4$ , полученная путем численного решения уравнения (2.20) (сплошная линия) и из аналитического выражения (2.19) (пунктирная линия). На рисунке выделены области:  $N$  — нормальное состояние,  $S$  — сверхпроводящее состояние.



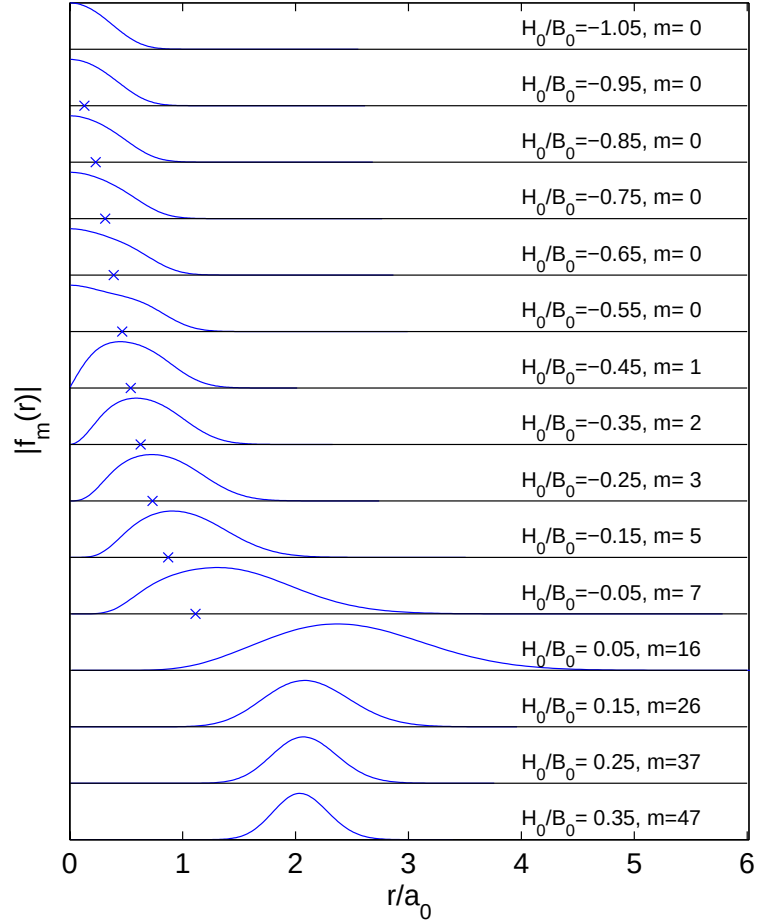


**Рис. 13.** (цветной)

(а): Полевая зависимость критической температуры  $T_c(H_0)$  в присутствии поля магнитного диполя,  $N_f = 10$ , полученная путем численного решения уравнения (2.20) (сплошная линия) и из аналитического выражения (2.19) (пунктирная линия).

(б): Полевая зависимость критической температуры  $T_c(H_0)$  в присутствии поля магнитного диполя,  $N_f = 30$ , полученная путем численного решения уравнения (2.20) (сплошная линия) и из аналитического выражения (2.19) (пунктирная линия).

На рисунках выделены области:  $N$  — нормальное состояние,  $S$  — сверхпроводящее состояние.



**Рис. 14.** Пространственное распределение модуля параметра порядка  $f_m(r)$  для многоквантовых вихревых состояний ( $N_f = 10$ ) в зависимости от величины внешнего магнитного поля  $H_0$  и в присутствии поля магнитной частицы; знаком  $\times$  отмечены точки, в которых полное магнитное поле обращается в нуль.

Обсудим подробнее трансформацию структуры сверхпроводящего зародыша при изменении внешнего магнитного поля  $H_0$ . На рис. 14 представлены профили  $f_m(r)$  для нескольких значений  $H_0$  при  $N_f = 10$ . При сильных отрицательных полях  $H_0 < -B_0$ , когда отсутствуют точки, в которых полное магнитное поле обращается в нуль, сверхпроводящий зародыш будет располагаться в области с минимальным значением  $|B_z(r)|$ , то есть непосредственно под магнитной частицей. Для того, чтобы максимальное значение ПП достигалось при  $r = 0$ , необходима реализация состояния с  $m = 0$ . По мере увеличения магнитного поля от больших отрицательных значений происходит переход от мейсснеровского состояния с  $m = 0$ , для которого максимальное значение  $f_m(r)$  достигается при  $r_{\max} = 0$ , к многоквантовому вихревому состоянию с  $m \neq 0$ , при этом координата максимума  $r_{\max}$  тем больше, чем больше  $m$  и меньше  $|H_0|$ . При  $|H_0| \rightarrow 0$ , когда отсутствует магнитное поле на больших расстояниях от частицы, сверхпроводящему зародышу выгоднее появляться в области слабого магнитного поля вдали от частицы, поэтому  $r_{\max} \rightarrow \infty$ . При

дальнейшем увеличении магнитного поля происходит перемещение зародыша из бесконечности в область с минимальным полем, то есть  $r_{\max} \sim a_0$ .

### 2.2.5. Квантование магнитного потока в тонкой сверхпроводящей пленке в неоднородном магнитном поле

Как было показано выше, в аксиально симметричном магнитном поле возможно формирование многоквантовых вихревых состояний с параметром порядка  $\psi_m = f_m(r) \exp(im\varphi)$ . Для такого сверхпроводящего состояния сверхскорость  $v_s$

$$\mathbf{v}_s = \nabla\theta - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_\varphi = \frac{m}{r} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \left( \frac{H_0 r}{2} + \frac{m_0 r}{(r^2 + a_0^2)^{3/2}} \right) \quad (2.21)$$

обращается в нуль в точках, расположенных на окружностях радиуса  $r_1$ , которые могут быть определены из следующего уравнения

$$\frac{m}{r_1} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \left( \frac{H_0 r_1}{2} + \frac{m_0 r_1}{(r_1^2 + a_0^2)^{3/2}} \right) = 0. \quad (2.22)$$

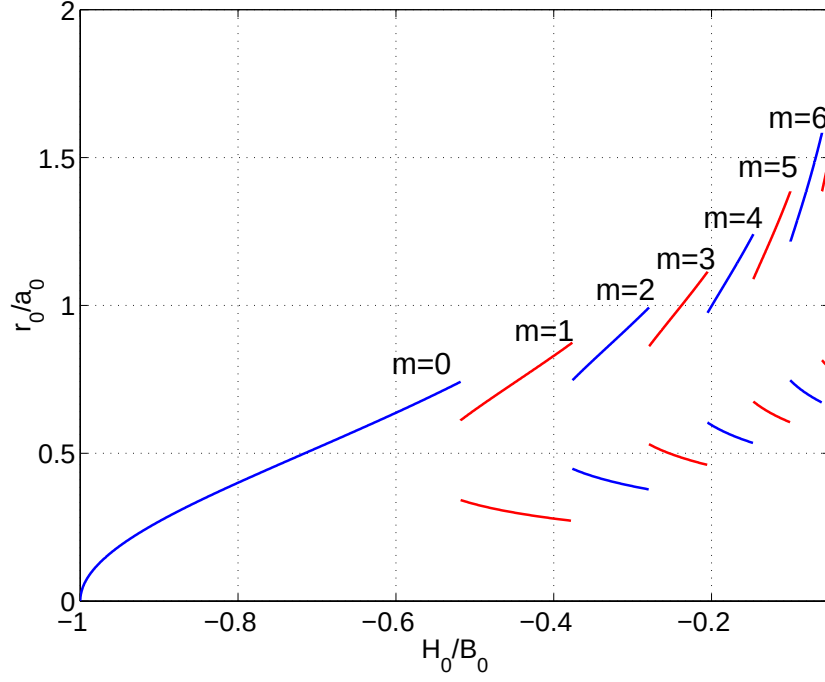
Напомним, что  $\theta = m\varphi$  — фаза волновой функции,  $m$  — орбитальный момент куперовских пар,  $m_0$  — дипольный момент частицы,  $a_0$  — высота частицы над поверхностью пленки,  $H_0$  — внешнее магнитное поле,  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрическая система координат. В зависимости от параметров  $m$  и  $H_0$  уравнение (2.22) может иметь несколько решений. На рис. 15 представлена зависимость  $r_1(H_0)$ , при этом из множества ветвей функции  $r_1(H_0, m)$  выбраны лишь те, которые соответствуют минимуму свободной энергии соответствующего многоквантового состояния.

Таким образом, внутри сверхпроводящей области существуют замкнутые контура, на которых сверхскорость  $v_s$  обращается в нуль. Это означает, что поток  $z$ -компоненты полного магнитного поля через окружность радиуса  $r_1(H_0)$  квантуется:

$$\Phi = \oint_{\mathcal{L}: v_s=0} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}: v_s=0} \nabla\theta \, d\mathbf{l} = m\Phi_0, \quad (2.23)$$

то есть  $\Phi$  может принимать дискретный ряд значений и число квантов магнитного потока равно завихренности сверхпроводящего зародыша  $m$ . В отличие от рассматриваемой задачи, в классическом эксперименте Литтла–Паркса [82] изменение завихренности сверхпроводящего зародыша не приводит к квантованию магнитного потока внутри тонкостенного сверхпроводящего цилиндра радиуса  $R$ . Дело в том, что из-за малой толщины стенок точка  $r_1$ , в которой  $v_s = 0$ , не всегда находится внутри сверхпроводника, поэтому магнитный поток через сечение цилиндра может принимать любые значения  $\Phi \neq m\Phi_0$ .

Строго говоря, на линии фазового перехода при  $H_0 = H_{c3}(T)$  мы имеем бесконечно малый зародыш ( $f_m = 0$ ), поэтому сверхпроводящий ток



**Рис. 15.** Радиус окружности  $r_1$ , на которой сверхскорость обращается в нуль, как функция внешнего магнитного поля  $H_0$ ,  $N_f = 10$ .

$j_s = f_m^2 v_s = 0$ . Однако можно ожидать, что вблизи линии  $H_0 < H_{c3}$  локализованные сверхпроводящие состояния сохранятся и будут иметь конечную амплитуду. Поставим вопрос о распределении плотности тока в таком сверхпроводящем состоянии. Пусть  $(H_{c3} - H_0)/H_{c3} \ll 1$ , тогда вклад нелинейного слагаемого в уравнении ГЛ будет малым и в качестве  $f_m$  можно брать решения линейного уравнения (2.20). На рис.16 представлены зависимости плотности тока  $j_s$  для некоторых многоквантовых состояний. Заметим, что плотность тока зависит от координаты и может менять знак.

Вычислим полный ток через сечение  $\varphi = \text{const}$  следующим образом<sup>†</sup>

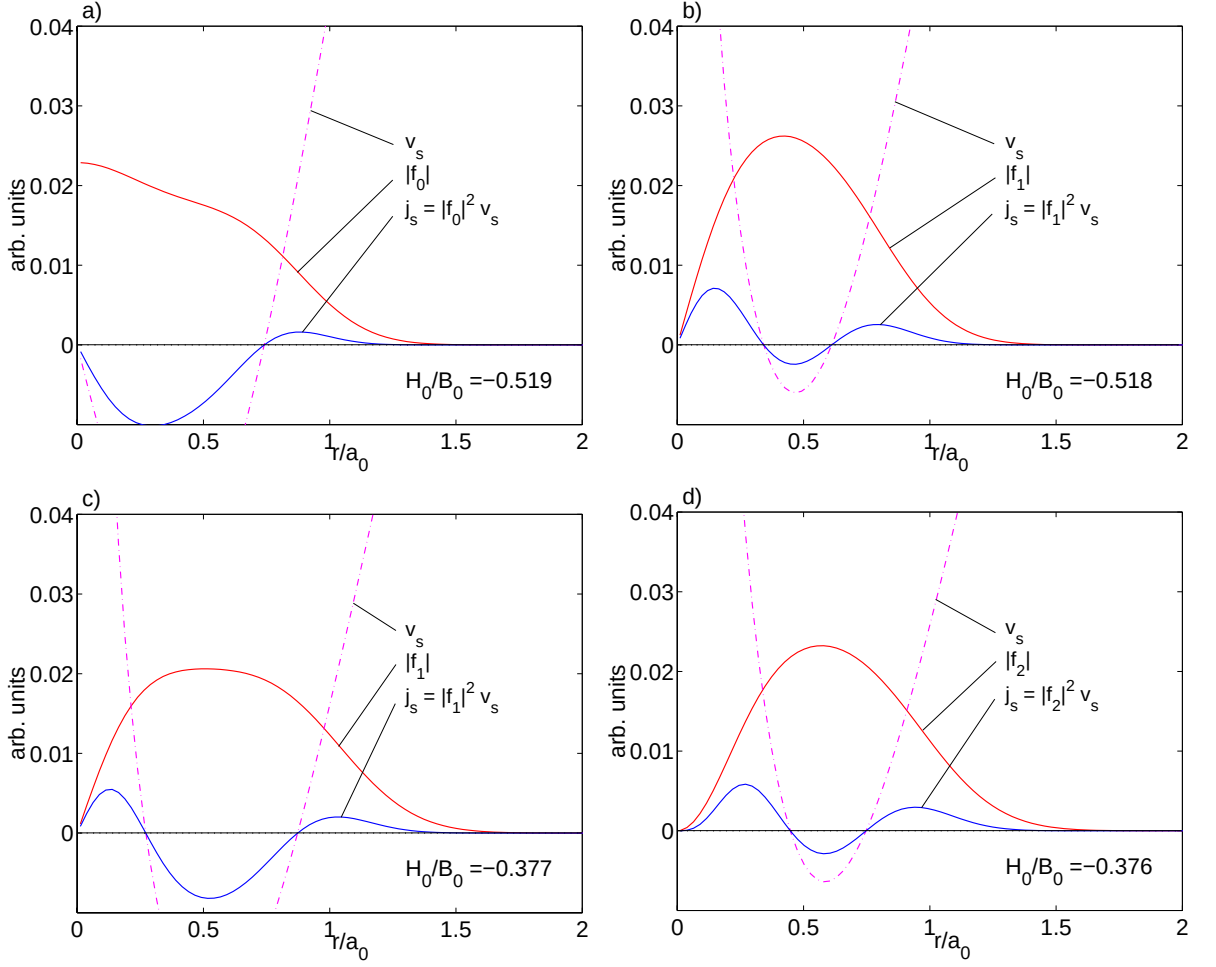
$$J = \int_0^\infty j_s dr = \int_0^\infty |f_m|^2 \left( \frac{m}{r} - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_\varphi \right) dr. \quad (2.24)$$

Было обнаружено (рис.17), что полный ток осциллирует при изменении внешнего поля и имеет характерные скачки при тех же значениях  $H^*$ , при которых возникают

<sup>†</sup> Поскольку амплитуда функции  $\psi_m$  не может быть определена из решения линейной задачи, для вычисления тока можно наложить дополнительное условие нормировки

$$\int_0^\infty 2\pi r |f_m|^2 dr = 1.$$

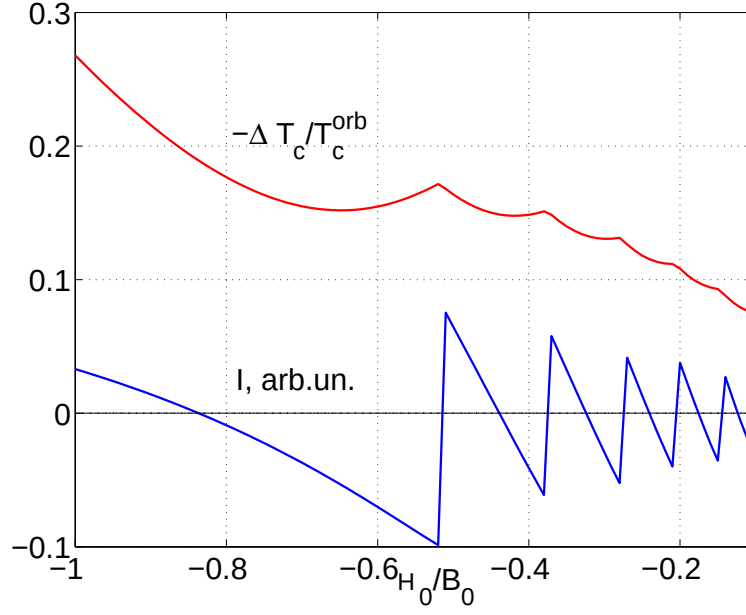
Универсальное условие такого рода позволит нам сравнивать токи, создаваемые разными вихревыми решениями.



**Рис. 16.** (цветной) Профили сверхпроводящего зародыша  $|f_m|$ , сверхскорости  $v_s$  и плотности тока  $j_s = |f_m|v_s$  (в произвольных единицах) для различных значений внешнего магнитного поля  $H_0$  для  $N_f = 10$ :

- a)  $H_0/B_0 = -0.519$  ( $m = 0$ );
- b)  $H_0/B_0 = -0.518$  ( $m = 1$ );
- c)  $H_0/B_0 = -0.377$  ( $m = 1$ );
- d)  $H_0/B_0 = -0.376$  ( $m = 2$ ).

изломы на  $T_c(H_0)$ . Нули зависимости  $J(H_0)$  примерно соответствуют минимумам на зависимости  $\Delta T_c/T_{c0}$  (то есть максимальной локальной температуре). Серия скачков полного тока в сверхпроводящем канале позволяет надеяться на возможность обнаружения многоквантовых вихревых состояний при измерениях магнитного потока, например, СКВИДом. Действительно, при плавном изменении внешнего магнитного поля при  $H_0 = H^*$  будут регистрироваться большие изменения полного потока магнитного потока, связанные со сменой направления циркулирующего сверхпроводящего тока, что приведет к особенностям на зависимости магнитной восприимчивости  $\chi = dM/dH_0$  от внешнего поля.



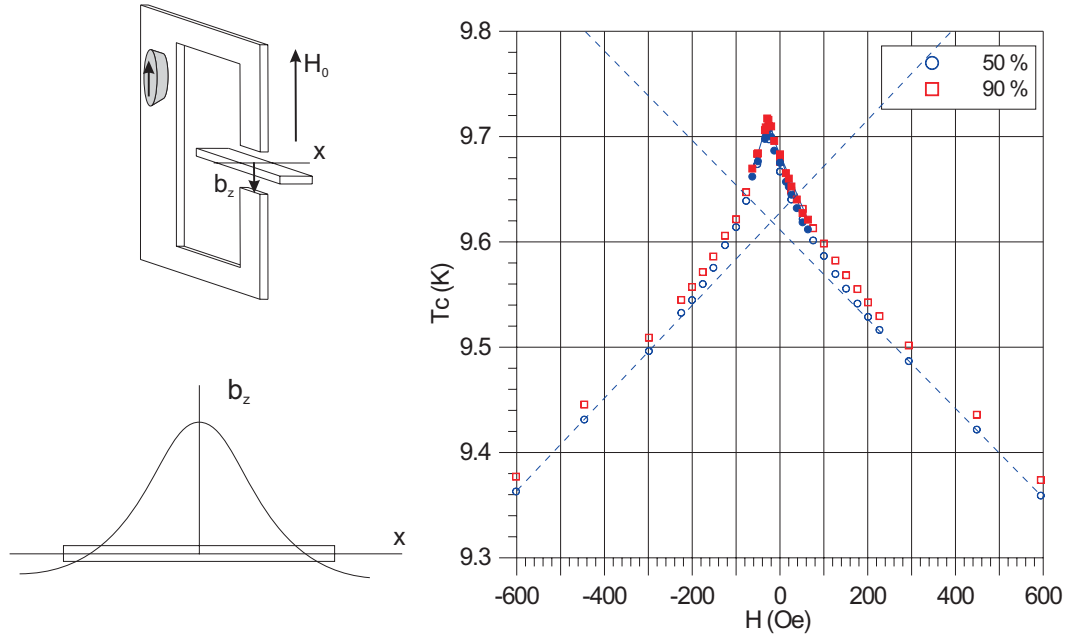
**Рис. 17.** Зависимость критической температуры  $\Delta T_c = T_{c0} - T_c$  и полного тока через сечение  $\varphi = \text{const}$  от внешнего магнитного поля  $H_0$ ;  $N_f = 10$ ,  $\Delta T_c^{\text{orb}} = T_{c0} B_0 / H_{c2}(0)$ .

### 2.2.6. Критическая температура пленки в двумерном поле произвольной симметрии

Как было отмечено выше, необходимым условием возникновения осцилляций критической температуры сверхпроводящей пленки является наличие замкнутых контуров  $B_z(x, y) = 0$ . Полученные выше решения, строго говоря, справедливы только для аксиально симметричных распределения магнитного поля, когда собственным состоянием является состояние с определенным орбитальным моментом  $m$ :  $\psi_m(\mathbf{r}) = f_m(r) \exp(im\varphi)$ . Можно ожидать, что при деформации контура  $B_z(x, y)$  волновой функцией основного состояния будет линейная комбинация состояний с определенными значениями  $m$ , то есть

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_m A_m \psi_m(\mathbf{r}), \quad (2.25)$$

где коэффициенты  $A_m$  должны быть определены из условия минимума функционала ГЛ. Иными словами, многоквантовое состояние, реализующееся в симметричном магнитном поле, должно разрушаться при нарушении симметрии (в частности, при изменении формы домена или наклоне магнитного диполя) и распадаться на ансамбль одноквантовых вихрей. При этом взаимное расположение нулей ПП и пространственная структура вихревых решений будут зависеть от формы контура. Аналогичная задача о разрушении многоквантового состояния в мезоскопическом квадратном сверхпроводнике при наличии дефектов рассмотрена в работе [99]. Тем не менее можно ожидать, что циркуляция градиента фазы волновой функции (2.25) по замкнутому контуру большого размера по-прежнему будет изменяться на  $\pm 1$



**Рис. 18.** (цветной) Схема эксперимента по измерению транспортных характеристик сверхпроводящей пленки в неоднородном магнитном поле (слева вверху).

Схематичное распределение неоднородной компоненты магнитного поля (слева внизу).

Зависимость  $T_c(H_0)$ , восстановленная по результатам измерения удельного сопротивления  $\rho(T, H_0)$  по уровням  $\rho/\rho_n = 0.5$  и  $\rho/\rho_n = 0.9$ .

при изменении внешнего поля  $H_0$ . Таким образом можно надеяться, что основные предсказываемые особенности зависимости  $T_c(H_0)$  (нелинейный и немонотонный ход) сохранятся и в присутствии неоднородного магнитного поля с произвольными замкнутыми линиями нулей магнитного поля  $B_z(x, y) = 0$ .

При охлаждении образца ниже  $T_c(H_0)$  в аксиально симметричном поле также возможно усложнение описанной выше картины: станет существенным взаимодействие угловых гармоник с разными  $m$ , что может привести к разрушению многоквантовых состояний. Вопрос о структуре смешанного состояния в неоднородном магнитном поле вдали от линии  $T_c(H_0)$  бесспорно интересен, но в настоящее время еще не изучен. В частности, не известно, какую область на фазовой диаграмме  $H_0 - T$  занимают многоквантовые состояния и как устроены линии фазовых переходов между состояниями с различными  $m$ . Возможным способом экспериментального исследования линий фазовых переходов может быть исследование магнитной восприимчивости гибридных S/F структур в магнитном поле.

В заключение раздела приведем результаты собственных экспериментальных исследований по обнаружению нелинейной зависимости  $T_c(H_0)$  при  $T \simeq T_{c0}$  в неоднородном поле. Как было неоднократно отмечено, необходимым условием для наблюдения осцилляций  $T_c(H_0)$  является наличие неоднородной компоненты магнитного поля, имеющей замкнутые линии нулей. Это может быть легко получено

для S/F систем с ансамблем магнитных частиц. В то же время  $\Delta T_c \sim T_{c0} \xi_0^2 / (N_f a^2)$ , где  $a$  — характерный период модуляции магнитного поля, поэтому для наблюдения предсказанных эффектов экспериментально необходимо изготовить ансамбль субмикронных магнитных частиц, что представляет определенные технологические сложности.

Для экспериментального подтверждения существования эффектов локализованной сверхпроводимости и связанных с этим искажений зависимости  $T_c(H_0)$  вблизи  $T_{c0}$  были проведены достаточно грубые предварительные эксперименты по исследованию транспортных характеристик сверхпроводящего мостика Nb в комбинированном магнитном поле. Однородная компонента поля создавалась соленоидом, неоднородная компонента — пермаллоевым подковообразным магнитом (рис. 18). Пермаллоевый магнитопровод шириной 4 мм и толщиной  $\sim 1$  мм транспортировал магнитное поле постоянного магнита SmCo в узкую щель между полюсами подковы, в которую помещалась сверхпроводящая пленка Nb шириной 4 мм (ширина зазора  $\sim 1$  мм). При этих условиях можно считать, что неоднородная компонента поля  $b_z$  практически однородна вдоль сверхпроводящего мостика, а по поперечной координате  $x$  локализована на меньших масштабах, чем ширина образца. Критическая температура пленки определялась по сдвигу кривой резистивного перехода  $\rho(T)$  в однородном магнитном поле. Как видно из рис. 18, максимальной критической температуре мостика соответствует поле  $\sim 40$  Гс, величина которого совпадает с характерным значением неоднородного магнитного поля в зазоре. Основной результат, на который следует обратить внимание — это нелинейный характер зависимости  $T_c(H_0)$ , который может быть интерпретирован как влияние локализованной сверхпроводимости на термодинамические характеристики пленки.

Альтернативным способом исследования полевой зависимости локальной критической температуры может служить методика, основанная на изучении нелинейного отклика тонких сверхпроводящих пленок. В разделе 3.4 мы опишем схему экспериментальной установки и обсудим основные полученные результаты.



## 2.3. Сверхпроводящая пленка в поле магнитного диполя: разрушение мейсснеровского состояния

### 2.3.1. Структура мейсснеровских токов в тонкой сверхпроводящей пленке

В предыдущем разделе была рассмотрена задача о вихревых структурах в тонкой пленке в поле магнитной частицы в пределе  $H_0 \simeq H_{c3}(T)$ , когда можно пренебречь эффектами экранировки магнитного поля сверхпроводящей пленкой. Мы показали, что в этом случае формирование смешанного состояния определяется пространственной структурой перпендикулярной компоненты магнитного поля  $B_z(r)$ . В этом разделе мы рассмотрим задачу о формировании вихревых структур в слабых магнитных полях, когда экранировка настолько сильна, что мейсснеровские токи существенно изменяют пространственную структуру магнитного поля над сверхпроводящей пленкой. Далее мы будем рассматривать состояние, формирующееся в тонкой пленке в результате ее охлаждения в нулевом магнитном поле (zero field cooled process), то есть при  $H_0 = 0$  и в отсутствие магнитного диполя.

Итак, пусть тонкая пленка, переведенная в сверхпроводящее состояние в нулевом магнитном поле, помещена в поле магнитного диполя с дипольным моментом  $\mathbf{m}_0 = m_0 \mathbf{z}_0$ , которому соответствует намагниченность  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}_0 \delta(x)\delta(y)\delta(z - a_0)$ . Будем считать, что магнитный момент диполя достаточно слабый,  $B_0 \ll H_{c3}(T)$  ( $B_0$  — максимальное поле, создаваемое диполем на поверхности пленки), что позволяет пренебречь пространственной зависимостью ПП и рассматривать задачу в лондоновском приближении. Согласно уравнению Максвелла магнитное поле определяется полной плотностью тока, которую в силу линейности уравнений Лондона–Максвелла удобно разделить на две компоненты: на сверхпроводящий ток  $-(c/4\pi\lambda^2)\mathbf{A}$  и сторонний ток  $\text{rot}\mathbf{M}$ , учитывающий наличие магнитной частицы. В этом случае имеем следующее уравнение для векторного потенциала

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{f(z)}{\lambda^2} \mathbf{A} = 4\pi \text{rot} \left( \mathbf{m}_0 \delta(z - a_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \right), \quad (2.26)$$

где  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрическая система координат с началом отсчета на поверхности пленки,  $\lambda$  — глубина проникновения для токов, параллельных плоскости  $(x, y)$ . Функция  $f(z)$  определяется следующим образом:  $f(z) = 1$  при  $-d_s \leq z \leq 0$  и  $f(z) = 0$  при  $z < 0$  и  $z > d_s$ ,  $d_s$  — толщина сверхпроводящей пленки. Выберем калибровку  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  и будем искать решение уравнения (2.26) в виде  $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{a}$ . После такой замены уравнение (2.26) приводится к следующему виду

$$\text{rot rot } \mathbf{a} + \frac{f(z)}{\lambda^2} \mathbf{a} - 4\pi \mathbf{m}_0 \delta(z - a_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r} = \nabla \phi,$$

где  $\phi$  — произвольная скалярная функция. Учитывая, что  $\text{rot rot } \mathbf{a} = \nabla \text{div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$ , выбором калибровки  $\text{div } \mathbf{a} = \phi$  можно перейти к более простому уравнению для  $a_z(r, z)$

$$\Delta a_z - \frac{f(z)}{\lambda^2} a_z = -4\pi m_0 \delta(z - a_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r},$$

остальные компоненты  $\mathbf{a}$  отсутствуют в силу симметрии задачи. Для решения полученного уравнения воспользуемся интегральным преобразованием Ганкеля нулевого порядка  $\dagger$ . Неизвестная функция  $\tilde{a}_z(q, z)$  является решением следующего дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \tilde{a}_z(q, z)}{dz^2} - \left( q^2 + \frac{f(z)}{\lambda^2} \right) \tilde{a}_z(q, z) = -2m_0 \delta(z - a_0), \quad (2.27)$$

решение которого ищем в стандартном виде

$$\begin{aligned} \tilde{a}_z^{(1)} &= \frac{m_0}{q} e^{-q|z-a_0|} + A_1 e^{-qz} & (z > 0), \\ \tilde{a}_z^{(2)} &= A_2 e^{-kz} + B_2 e^{kz} & (-d_s < z < 0), \\ \tilde{a}_z^{(3)} &= B_3 e^{qz} & (z < -d_s), \end{aligned}$$

где  $k^2 = q^2 + \lambda^{-2}$ . Сшивая значения функции  $\tilde{a}_z(q, z)$  и первых производных  $d\tilde{a}_z(q, z)/dz$  при  $z = 0$  и  $z = -d_s$  получаем (см. также [78, 79])

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 + B_2 - \frac{m_0}{q} e^{-qa_0}, \\ A_2 &= 2m_0 e^{-qa_0} \frac{(k - q) e^{-kd_s}}{(k + q)^2 e^{kd_s} - (k - q)^2 e^{-kd_s}}, \\ B_2 &= 2m_0 e^{-qa_0} \frac{(k + q) e^{kd_s}}{(k + q)^2 e^{kd_s} - (k - q)^2 e^{-kd_s}}, \\ B_3 &= 2m_0 e^{-qa_0} \frac{2k e^{qd_s}}{(k + q)^2 e^{kd_s} - (k - q)^2 e^{-kd_s}}. \end{aligned}$$

---

$\dagger$  Основные свойства преобразования Ганкеля [126]:

$$\begin{aligned} K_0[a_z(r, z)] &= \tilde{a}_z(q, z) = \int_0^\infty r J_0(rq) a_z(r, z) dr, \\ a_z(r, z) &= \int_0^\infty q J_0(rq) \tilde{a}_z(q, z) dq, \\ K_0 \left[ \frac{d^2 a_z(r, z)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da_z(r, z)}{dr} \right] &= -q^2 K_0[a_z(r, z)] = -q^2 \tilde{a}_z(q, z), \\ K_0 \left[ \frac{2m_0}{r} \delta(r) \delta(z - a_0) \right] &= 2m_0 \delta(z - a_0), \end{aligned}$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. *Пленка немагнитного несверхпроводящего металла.* В этом случае следует положить  $\lambda = \infty$ , тогда  $k = q$  и  $A_1 = A_2 = 0$ ,  $B_2 = B_3 = m_0 \exp(-qa_0)/q$ . В данном случае во всех областях решением является

$$\begin{aligned}\tilde{a}_z(q, z) &= \frac{m_0}{q} e^{-q|z-a_0|}, & a_z(r, z) &= \frac{m_0}{\sqrt{r^2 + (z - a_0)^2}}, \\ A_\varphi(r, z) &= -\frac{\partial a_z(r, z)}{\partial r} = m_0 \frac{r}{[r^2 + (z - a_0)^2]^{3/2}},\end{aligned}$$

представляющее собой известное выражение для поле точечного магнитного диполя в свободном пространстве.

2. *Сверхпроводящее полупространство.* В этом случае следует положить  $d_s = \infty$ , тогда  $A_2 = B_3 = 0$ ,  $A_1 = m_0(q - k)e^{-qa_0}/q(q + k)$ ,  $B_2 = 2m_0 \exp(-qa_0)/(k + q)$ . На больших расстояниях  $r \gg \lambda$  решением во внешнем пространстве ( $z > 0$ ) является суперпозиция полей двух диполей разного знака, расположенных в точках  $z = \pm a_0$  (в этом случае  $q\lambda \ll 1$ ,  $q \ll k$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{a}_z^{(1)}(q, z) &= \frac{m_0}{q} e^{-q|z-a_0|} - \frac{m_0}{q} e^{-q(z+a_0)}, \\ A_\varphi^{(1)}(r, z) &= -\frac{\partial a_z(r, z)}{\partial r} = \frac{m_0 r}{[r^2 + (z - a_0)^2]^{3/2}} - \frac{m_0 r}{[r^2 + (z + a_0)^2]^{3/2}}.\end{aligned}$$

Данное выражение для векторного потенциала вне пленки также может быть получено из представлений о полной экранировке магнитного поля сверхпроводником. Векторный потенциал внутри сверхпроводника ( $z < 0$ ) описывается следующим выражением <sup>†</sup>

$$\begin{aligned}A_\varphi^{(2)}(r, z) &= 2m_0 \int_0^\infty \frac{q^2 \exp(-qa_0 + kz) J_1(rq) dq}{k + q} \simeq \\ &\simeq \frac{2m_0 \lambda}{a_0^3} \frac{3 r/a_0}{[1 + r^2/a_0^2]^{5/2}} e^{-|z|/\lambda},\end{aligned}\quad (2.28)$$

которое справедливо при  $a_0 \gg \lambda$ .

---

<sup>†</sup> Для вычисления интеграла (2.28) введем новую переменную интегрирования  $w = qa_0$ . Поскольку подинтегральное выражение содержит множитель  $\exp(-w)$ , то основной вклад в интеграл будут давать малые значения  $w \leq 1$ , тогда интеграл может быть сведен к следующей специальной функции (см. [70])

$$\Gamma_\nu^\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px} J_\nu(cx) dx,$$

где в нашем случае  $p = 1$ ,  $c = r/a_0$ .

3. *Сверхпроводящая пленка произвольной толщины в поле далеко расположенного магнитного диполя.* Используя выражения для коэффициентов  $A_1, \dots, B_2$ , получаем следующее выражение для векторного потенциала внутри сверхпроводящей пленки:

$$A_{\varphi}^{(2)}(r, z) = 2m_0 \int_0^{\infty} q^2 e^{-qa_0} \frac{k \operatorname{ch}(z + d_s)/\lambda + q \operatorname{sh}(z + d_s)/\lambda}{(k^2 + q^2) \operatorname{sh} d_s/\lambda + 2kq \operatorname{ch} d_s/\lambda} \times \\ \times J_1(rq) dq,$$

которое в пределе  $a_0 \gg \max(\lambda, \lambda^2/d_s)$  может быть сведено к следующему виду

$$A_{\varphi}^{(2)}(r, z) = \frac{2m_0 \lambda}{a_0^3} \operatorname{I}_1^3 \frac{\operatorname{ch}(z + d_s)/\lambda}{\operatorname{sh} d_s/\lambda} = \\ = \frac{2m_0 \lambda}{a_0^3} \frac{3 r/a_0}{[1 + r^2/a_0^2]^{5/2}} \frac{\operatorname{ch}(z + d_s)/\lambda}{\operatorname{sh} d_s/\lambda}. \quad (2.29)$$

Используя известное соотношение  $\mathbf{j}_s = -(c/4\pi\lambda^2)\mathbf{A}$ , справедливое для безвихревого состояния, находим плотность мейсснеровского экранирующего тока, индуцированного магнитной частицей

$$j_{\varphi}^{\text{fm}}(r) = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} A_{\varphi}^{(2)} = -\frac{m_0}{2\pi\lambda} \frac{3ra_0}{[r^2 + a_0^2]^{5/2}} \frac{\operatorname{ch}(z + d_s)/\lambda}{\operatorname{sh} d_s/\lambda}. \quad (2.30)$$

Полученное выражение (2.30) будет использовано далее для расчета вихревой структуры (раздел 2.3.2) и для анализа экспериментальных данных по исследованию разрушения мейсснеровского состояния в тонкой пленке полем магнитной частицы (раздел 3.3). Легко видеть, что максимальное значение векторного потенциала и, следовательно, и плотности тока  $j^{\text{fm}}$ , достигается на верхней поверхности пленки при  $z = 0$ . Отметим, что плотность индуцированного частицей сверхпроводящего тока в пленке имеет такую же зависимость от радиальной координаты, как и плотность тока в сверхпроводящем полупространстве (2.28), однако различаются зависимости от  $z$ -координаты, что связано с более слабой экранировкой магнитного поля сверхпроводящей пленкой. Интересной особенностью является степенной закон затухания магнитного поля под пленкой в противоположность экспоненциальному затуханию в случае полупространства:

$$A_{\varphi}^{(3)}(r, z) = \frac{2m_0 \lambda}{a_0^3} \frac{1}{\operatorname{sh}(d_s/\lambda)} \frac{3 (1 + (|z| - d_s)/\lambda) r/a_0}{[(1 + (|z| - d_s)/\lambda)^2 + r^2/a_0^2]^{5/2}}.$$

### 2.3.2. Пространственная структура вихревого состояния

Рассмотрим следующий сценарий разрушения мейсснеровского состояния в сверхпроводящей пленке, находящейся в поле микромагнита, в режиме сильной экранировки. По мере уменьшения расстояния  $a_0$  между пленкой и микромагнитом

увеличивается локальная плотность мейсснеровского тока на поверхности пленки,  $j_{\max}^{\text{fm}} \propto 1/a_0^3$ . На некоторой критической высоте  $a_{\text{cr}}$  локальная плотность тока достигнет критической плотности тока распаривания  $j_c$ , соответствующего локальному разрушению мейсснеровского состояния, или, иными словами, локальному подавлению энергетического барьера для проникновения вихрей. Из-за малой толщины пленки проникшие в пленку вихревые полупетли будут расщепляться на пары вихрь–антивихрь, которые под действием экранирующего мейсснеровского тока будут двигаться в противоположные стороны, в результате чего образуется вихревая структура, состоящая из внутреннего кольца вихрей и внешнего кольца антивихрей <sup>†</sup>.

В данном разделе в лондоновском приближении мы аналитически рассчитаем параметры формирующейся вихревой структуры. Мы будем предполагать, что магнитный момент частицы достаточно большой ( $N_f \gg 1$ ), тогда при  $a_0 < a_{\text{cr}}$  в пленку проникает большое число пар вихрь–антивихрь. Это позволяет считать распределение вихрей аксиально симметричным и использовать среднюю плотность вихрей  $n(r)$  для описания вихревой структуры. Вихревая структура будет устойчивой при выполнении следующих условий (см., например, [127]). Во-первых, локальная плотность тока не должна превышать критическую плотность тока распаривания  $j_c$  (в противном случае будет происходить генерация дополнительных вихрей). Во-вторых, для того, чтобы вихревая структура была неподвижной, плотность тока в области расположения вихрей не должна быть больше плотности тока пиннинга  $j_p$ :

$$|\mathbf{j}_{\text{tot}}(\mathbf{r})| \leq j_c, \quad (2.31)$$

$$|\mathbf{j}_{\text{tot}}(\mathbf{r})| \leq j_p, \quad \text{если} \quad n(\mathbf{r}) \neq 0. \quad (2.32)$$

Полная плотность сверхпроводящего тока в пленке может быть представлена в виде суммы мейсснеровских тока, индуцированного магнитной частицей  $\mathbf{j}^{\text{fm}}(\mathbf{r})$ , и тока, создаваемого системой неподвижных (запиннированных) вихрей  $\mathbf{j}^v(\mathbf{r})$

$$\mathbf{j}_{\text{tot}}(r) = \mathbf{j}^{\text{fm}}(r) + \mathbf{j}^v(r).$$

Для тонкой сверхпроводящей пленки  $d_s \ll \lambda$  плотность мейсснеровского тока (2.30) можно считать практически однородной по толщине пленки:

$$j_{\varphi}^{\text{fm}}(r) = -\frac{3}{2\pi d_s} \frac{c m_0}{r} \frac{a_0}{(r^2 + a_0^2)^{5/2}}. \quad (2.33)$$

Вычислим вторую компоненту тока, связанную с наличием в пленке вихрей. Пусть  $\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — плотность тока в точке  $\mathbf{r}$ , создаваемая изолированным вихрем, находящимся в точке  $\mathbf{r}'$ :

---

<sup>†</sup> Позднее похожая задача о формировании вихревой структуры в тонкой сверхпроводящей пленке большого размера в поле магнитной частицы была решена численно в работе [123].

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \left[ \mathbf{z}_0 \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

Тогда выражение для плотности тока  $\mathbf{j}^v(\mathbf{r})$  создаваемого системой неподвижных вихрей, распределенных с концентрацией  $n(\mathbf{r})$ , имеет вид:

$$\mathbf{j}^v = \int n(\mathbf{r}') \mathbf{j}_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \quad (2.34)$$

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  и рассмотрим аксиально симметричное распределение вихрей,  $n(\mathbf{r}) = n(r)$ . Тогда в выражении (2.34) можно вычислить интеграл по азимутальной  $\varphi$ -координате. Легко показать, что в этом случае радиальная компонента тока отсутствует

$$j_r^v = \int_0^\infty n(r') r' dr' \int_{-\pi}^\pi j_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) r' \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (2.35)$$

поскольку подынтегральная функция является нечетной по  $\varphi$ -переменной. Азимутальная компонента плотности тока может быть приведена к следующему виду

$$j_\varphi^v = \int_0^\infty 2\pi n(r') G(r, r') r' dr', \quad (2.36)$$

$$G(r, r') = \int_{-\pi}^\pi j_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{(r - r' \cos \varphi)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}} \frac{d\varphi}{2\pi}. \quad (2.37)$$

где функция  $G(r, r')$  имеет смысл пространственного распределения плотности тока, создаваемого кольцом вихрей с плотностью  $n(r) = \delta(r - r')/2\pi r$ ,  $r'$  — радиус кольца. Если  $\min|r' - r| \gg \max(\lambda, \lambda^2/d_s)$ , то можно в качестве функции  $j_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  в выражении (2.34) можно использовать выражение для плотности тока пирловского вихря на больших расстояниях,  $r \gg \lambda^2/d_s$ :

$$j_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{c\Phi_0}{4\pi^2 d_s} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2},$$

$$G(r, r') = \frac{c\Phi_0}{8\pi^3 d_s} \int_{-\pi}^\pi \frac{(r - r' \sin \varphi)}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi. \quad (2.38)$$

Производя замену переменной  $\varphi = \pi + 2\varphi'$  в выражении (2.38), получаем<sup>†</sup>

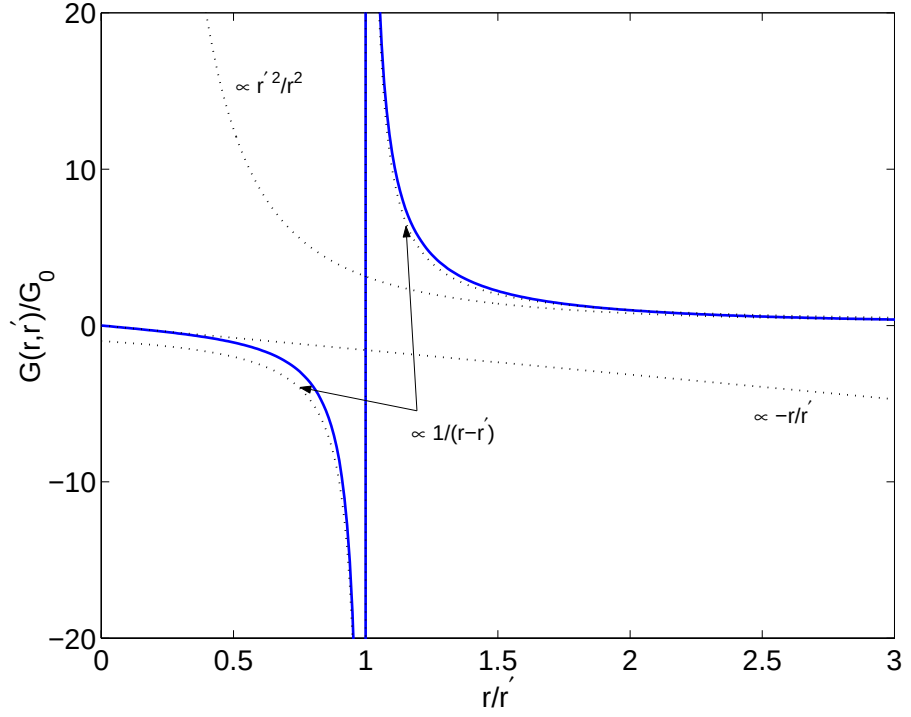
---

<sup>†</sup> Мы используем следующие табличные интегралы:

$$L_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi = k \frac{dK(k)}{dk} + K(k) = \frac{E(k)}{1 - k^2}$$

$$L_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi = \frac{1}{k} \frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{k^2(1 - k^2)} - \frac{K(k)}{k^2},$$

где  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.



**Рис. 19.** Плотность тока  $G(r, r')$ , создаваемая  $\delta$ -образным кольцом вихрей и описываемая выражением (2.39);  $r'$  — радиус кольца.

$$\begin{aligned}
 G(r, r') &= \frac{c\Phi_0}{2\pi^3 d_s} \int_0^{\pi/2} \frac{[(r + r') - 2r' \sin^2 \varphi']}{[(r^2 + r'^2 + 2rr') - 4rr' \sin^2 \varphi']^{3/2}} d\varphi' = \\
 &= \frac{c\Phi_0}{2\pi^3 d_s} \left[ \frac{L_1}{(r + r')^2} + \frac{2r' L_2}{(r + r')^2} \right] = \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s} \left[ \frac{E(k)}{r(r - r')} + \frac{K(k)}{r(r + r')} \right] \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

где  $k^2 = 4rr'/(r + r')^2$ .

Анализ вихревой структуры будем проводить на пороге генерации вихревых пар, то есть при  $(a_{\text{cr}} - a_0)/a_{\text{cr}} \ll 1$ . Предположим также, что  $j_p \ll j_c$  — это условие согласуется с экспериментальными данными при температурах близких к  $T_c$  (см. раздел 3.3). Будем предполагать, что стационарное распределение вихрей представляет собой два узких кольца, находящихся на большом расстоянии друг от друга: внутреннее кольцо вихрей радиуса  $r_1$  и полушириной  $w_1$  и внешнее кольцо антивихрей радиуса  $r_2 \gg r_1$  и полушириной  $w_2$  ( $w_{1,2} \ll r_{1,2}$ ). Представим плотность вихрей в следующем виде

$$n(r) = n_+(r) - n_-(r), \quad (2.40)$$

$$n_+(r) \neq 0 \quad r \in (r_1 - w_1, r_1 + w_1),$$

$$n_-(r) \neq 0 \quad r \in (r_2 - w_2, r_2 + w_2),$$

где  $n_+(r)$  и  $n_-(r)$  — концентрации вихрей и антивихрей, соответственно. Для такого

распределения  $n(r)$  плотность тока, создаваемую вихрями, удобно разделить на две компоненты

$$\begin{aligned} j_\varphi^v(r) &= j_+^v(r) + j_-^v(r), \\ j_+^v(r) &= \int_0^\infty 2\pi n_+(r') G(r, r') r' dr' \\ j_-^v(r) &= - \int_0^\infty 2\pi n_-(r') G(r, r') r' dr', \end{aligned} \quad (2.41)$$

где  $j_+^v(r)$  и  $j_-^v(r)$  — токи, создаваемые внутренним и внешним вихревыми кольцами, соответственно. Указанные условия малой ширины колец по сравнению с их радиусами позволяют упростить выражение для  $G(r, r')$  и, соответственно, для  $j_+^v(r)$  и  $j_-^v(r)$ . Рассмотрим несколько важных предельных случаев:

1. Вычислим плотность тока вдали от кольца вихрей,  $r \gg r'$ . Введем малый параметр  $x = r'/r \ll 1$  и разложим  $k$ ,  $E(k)$ ,  $K(k)$  по степеням  $x$

$$\begin{aligned} G_1(r, r') &= \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s r'^2} \left( \frac{x^2 E(k)}{1-x} + \frac{x^2 K(k)}{1+x} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s r'^2} \left( \pi x^2 + \frac{3}{4}\pi x^4 + \dots \right) \simeq \frac{c\Phi_0}{4\pi^2 d_s} \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} j_\pm^v(r) &= \pm \int_0^\infty 2\pi r' n_\pm(r') G_1(r, r') dr' = \\ &= \pm \frac{c\Phi_0}{4\pi^2 d} \frac{1}{r^2} \int_{r_1-w_1}^{r_1+w_1} 2\pi r' n_\pm(r') dr' = \pm \frac{c\Phi_0 N}{4\pi^2 d_s} \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где  $N$  — полное число вихрей в вихревом кольце.

2. Вычислим плотность тока внутри кольца вихрей,  $r \ll r'$ . Введем малый параметр  $x = r/r' \ll 1$  и разложим  $k$ ,  $E(k)$ ,  $K(k)$  по степеням  $x$

$$\begin{aligned} G_2(r, r') &= \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s r'^2} \left( \frac{E(k)}{x(x-1)} + \frac{K(k)}{x(x+1)} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s r'^2} \left( -\frac{\pi}{2} x - \frac{9}{16}\pi x^3 + \dots \right) \simeq -\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 d_s} \frac{r}{r'^3}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} j_\pm^v(r) &= \pm \int_0^\infty 2\pi r' n_\pm(r') G_2(r, r') dr' = \\ &= \mp \frac{c\Phi_0}{8\pi^2 d_s} \frac{r}{r_1^3} \int_{r_1-w_1}^{r_1+w_1} 2\pi r' n_+(r') dr' = \mp \frac{c\Phi_0 N}{8\pi^2 d} \frac{r}{r_1^3}. \end{aligned} \quad (2.45)$$



3. Вычислим плотность тока вблизи кольца вихрей — пусть  $\lambda_{\text{eff}} \ll |r - r'| \ll r'$ . Введем малый параметр  $|r - r'|/r' = x/r' \ll 1$  и разложим  $k$ ,  $E(k)$ ,  $K(k)$  по степеням  $x/r'$

$$k^2 \simeq 1 - \frac{1}{4} \frac{x^2}{r'^2},$$

$$G_3(r, r') = \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s r'^2} \left( \frac{E(k)}{(r/r')(r/r' - 1)} + \frac{K(k)}{(r/r')(r/r' + 1)} \right) \simeq$$

$$\simeq \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s r'^2} \left( \frac{r'}{x} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r'}{x} \right) - \dots \right) \simeq \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s} \frac{1}{r'(r - r')}. \quad (2.46)$$

Предполагая либо  $\lambda \ll |r - r_1| \ll r_1$ , либо  $\lambda \ll |r - r_2| \ll r_2$ , находим

$$j_+^v(r) = \int_0^\infty 2\pi r' n_+(r') G_3(r, r') dr' = \int_{r_1 - w_1}^{r_1 + w_1} 2\pi n_+(r') \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s} \frac{dr'}{(r - r')} \quad (2.47)$$

$$j_-^v(r) = \int_0^\infty 2\pi r' n_-(r') G_3(r, r') dr' = - \int_{r_2 - w_2}^{r_2 + w_2} 2\pi n_-(r') \frac{c\Phi_0}{4\pi^3 d_s} \frac{dr'}{(r - r')}. \quad (2.48)$$

Перейдем к непосредственному расчету характеристик вихревой структуры, возникающей в поле микромагнита. Как уже было отмечено, максимальное значение суммарной плотности тока, создаваемой микромагнитом и вихревыми кольцами, должно быть равно эффективному току распаривания  $j_c$ :

$$\max_r |j^{\text{fm}}(r) + j_+^v(r) + j_-^v(r)| = j_c. \quad (2.49)$$

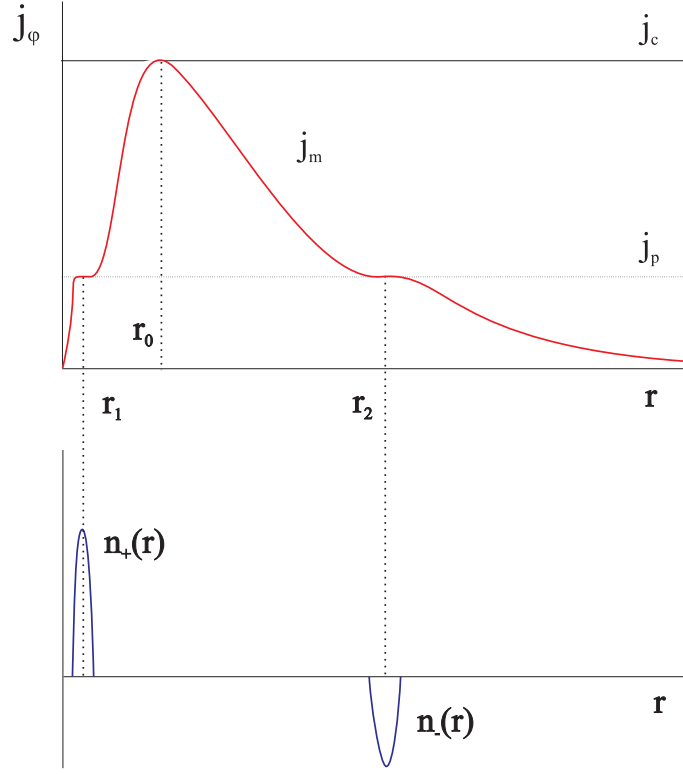
По нашему предположению плотность тока достигает максимума в точке  $r_0$ , отстоящей далеко как от кольца вихрей, так и от кольца антивихрей, то есть  $r_1 \ll r_0 \ll r_2$ . В этом случае для вычисления вклада внутреннего кольца вихрей  $j_+^v(r)$  можно использовать выражение (2.43), для вычисления вклада внешнего кольца антивихрей  $j_-^v(r)$  — выражение (2.45); плотность тока  $j^{\text{fm}}(r)$ , создаваемая микромагнитом, определяется выражением (2.33). Условие (2.49) может быть переписано следующим образом

$$-\frac{3cm_0}{2\pi d_s} \frac{r_0 a_0}{(r_0^2 + a_0^2)^{5/2}} + \frac{c\Phi_0 N}{4\pi^2 d_s} \frac{1}{r_0^2} + \frac{c\Phi_0 N}{8\pi^2 d_s} \frac{r_0}{r_2^3} = -j_c, \quad (2.50)$$

$$\left. \frac{d}{dr} j^{\text{fm}}(r) \right|_{r_0} + \left. \frac{d}{dr} j_+^v(r) \right|_{r_0} + \left. \frac{d}{dr} j_-^v(r) \right|_{r_0} =$$

$$-\frac{3cm_0}{2\pi d_s} \frac{a_0(a_0^2 - 4r_0^2)}{(r_0^2 + a_0^2)^{7/2}} - \frac{2c\Phi_0 N}{4\pi^2 d_s} \frac{1}{r_0^3} + \frac{c\Phi_0 N}{8\pi^2 d_s} \frac{1}{r_2^3} = 0. \quad (2.51)$$

Мы предполагаем, что образовавшиеся в пленке вихри перед тем, как остановиться, перемещаются из области с максимальным током ( $r \sim a_0/2$ ) в области



**Рис. 20.** Пространственное распределение плотности тока  $j_\varphi(r)$  в сверхпроводящей пленке в поле микромагнита и вихревая структура  $n(r)$ , возникающая в пленке в поле микромагнита.

со более слабым током. Можно ожидать, что для описания свойств статической вихревой структуры применима модель критического состояния Бина

$$|j^{\text{fm}}(r) + j_+^v(r) + j_-^v(r)| = j_p, \quad n(r) \neq 0. \quad (2.52)$$

В этом случае для вычисления плотности тока  $j_+^v(r)$  и  $j_-^v(r)$ , созданных кольцами вихрей на малых расстояния от них, следует использовать выражения (2.47) и (2.48). Таким образом, из условия (2.52) получаем еще два уравнения:

$$V.p. \int_{r_1-w_1}^{r_1+w_1} n_+(r') \frac{c\Phi_0}{2\pi^2 d_s} \frac{dr'}{(r-r')} - \frac{3cm_0}{2\pi d_s} \frac{r a_0}{(r_0^2 + a_0^2)^{5/2}} + \frac{c\Phi_0 N}{8\pi^2 d_s} \frac{r_1}{r_2^3} = -j_p, \quad r_1 - w_1 \leq r \leq r_1 + w_1, \quad (2.53)$$

$$-V.p. \int_{r_2-w_2}^{r_2+w_2} n_-(r') \frac{c\Phi_0}{2\pi^2 d_s} \frac{dr'}{(r-r')} - \frac{3cm_0}{2\pi d_s} \frac{r a_0}{(r_0^2 + a_0^2)^{5/2}} + \frac{c\Phi_0 N}{4\pi^2 d_s} \frac{1}{r_2^2} = -j_p, \quad r_2 - w_2 \leq r \leq r_2 + w_2, \quad (2.54)$$

где интегралы в уравнениях (2.53) и (2.54) должны быть вычислены в главном значении.

Используя подход, описанный, например, в работе [127], можно провести обращение интегральных уравнений (2.53)–(2.54) и получить характеристики образующейся вихревой структуры в приближении слабого пиннинга  $j_p/j_c \ll 1$  вблизи порога генерации вихревых пар,  $1 - a_0/a_{cr} \ll 1$ . После решения уравнений получаем следующие выражения для плотности вихрей и антивихрей (детали расчета приведены в Приложении 2):

$$\begin{aligned} n_+(r) &= \frac{3m_0}{\Phi_0 a_{cr}^4} \sqrt{w_1^2 - (r - r_1)^2}, \\ n_-(r) &= \frac{12m_0 a_{cr}}{\Phi_0 r_2^5} \sqrt{w_2^2 - (r - r_2)^2}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$r_1 = 0.286 \frac{j_p}{j_c} a_0; \quad r_1 \cdot r_2^4 = a_{cr}^5; \quad (2.56)$$

$$w_1^2 = \frac{4a_0^3}{9\pi\sqrt{3}r_1} \frac{N}{N_f}; \quad w_1 = 2w_2. \quad (2.57)$$

Полученные выражения (2.55)–(2.57) будут использованы в дальнейшем для анализа экспериментальных данных по исследованию разрушения мейсснеровского состояния в тонкой пленке полем магнитной частицы (раздел 3.3).

## 2.4. Выводы к главе 2

Приведем основные результаты, полученные в данной главе

- Для гибридных S/F систем предсказаны осцилляции критической температуры тонкой сверхпроводящей пленки  $T_c(H_0)$ . Необходимым условием является наличие неоднородного мелкомасштабного магнитного поля, имеющего замкнутые контура  $B_z(x, y) = 0$ , где  $(x, y)$  — плоскость пленки. Ранее подобные осцилляции наблюдались только для многосвязных и мезоскопических сверхпроводников (эффект Литтла–Паркса). Получены кривые фазового перехода  $T_c(H_0)$  для случая, когда неоднородное поле создано точечным магнитным диполем, ориентированным перпендикулярно пленке.
- Исследована пространственная структура многоквантовых вихревых состояний, возникающих в тонкой сверхпроводящей пленке большого размера в неоднородном аксиально симметричном магнитном поле на линии фазового перехода  $T_c(H_0)$ . При изменении внешнего магнитного поля возможны переходы между состояниями с различными орбитальными моментами куперовских пар.
- Аналитически исследована структура мейсснеровских токов в сверхпроводящей пленке произвольной толщины в поле малой ферромагнитной частицы, дипольный момент которой ориентирован перпендикулярно пленке.

- В рамках модели Бина аналитически исследована структура смешанного состояния, возникающая в тонкой сверхпроводящей пленке в поле малой ферромагнитной частицы, дипольный момент которой ориентирован перпендикулярно пленке. Показано, что на пороге рождения вихревых пар результирующее распределение вихрей имеет вид двух концентрических колец, вычислен их размер в зависимости от высоты диполя и его дипольного момента.

### 3. Экспериментальное определение критических полей и токов сверхпроводящих пленок

#### 3.1. Обзор экспериментов по исследованию подавления барьера Бина–Ливингстона поверхностными дефектами

В данном разделе будет представлен обзор экспериментов по прямому измерению критического поля подавления барьера БЛ в массивных образцах с модифицированной поверхностью †.

Выражения (1.38) и (1.39), полученные в разделе 1.2 для оценки предельного поля подавления барьера БЛ, позволяют провести анализ экспериментальных результатов. В ряде работ сообщалось о крайне низких значениях поля  $H_{\text{en}} \lesssim 100$  Гс для различных образцов  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  (монокристаллы, эпитаксиальные пленки и керамика), однако причина столь значительного подавления барьера оставалась неясной.

Работа М. Konczykowski et al. [16] посвящена изучению барьера БЛ в монокристаллах  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  при  $H_0 \parallel c$ . В этих экспериментах критическое поле входа вихрей определялось по излому на зависимости  $M(H_0)$  (рис. 21), измеренной при постоянной температуре. Критическое поле входа было измерено в двух случаях: до и после облучения образца потоком низкоэнергетичных электронов. При таком облучении поверхностные дефекты создавались без изменения объемных свойств сверхпроводника. Было обнаружено, что поле входа после облучения ( $H_{\text{en}}^{\text{after}}$ ) было в несколько раз меньше, чем поле входа в необлученном образце ( $H_{\text{en}}^{\text{before}}$ ):  $H_{\text{en}}^{\text{before}}/H_{\text{en}}^{\text{after}} \sim 2 \div 3$  при температурах  $T = 77 \div 92$  К,  $T_c = 92.5$  К (см. рис. 22). Данный результат находится в хорошем согласии с нашими теоретическими оценками предельного подавления барьера БЛ. Действительно, подставляя  $\kappa =$

---

† Поскольку расчет подавления барьера БЛ поверхностными дефектами выполнен в предположении о наличии глубоких трещин в монокристаллическом образце без слабых связей, сопоставление теории и эксперимента следует проводить только для массивных монокристаллических образцов. Автор не располагал такими образцами, поэтому он ограничился анализом экспериментальных данных, опубликованных в литературе. Эксперименты по измерению критического поля подавления барьера БЛ в эпитаксиальных пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  будут представлены в разделе 3.3.

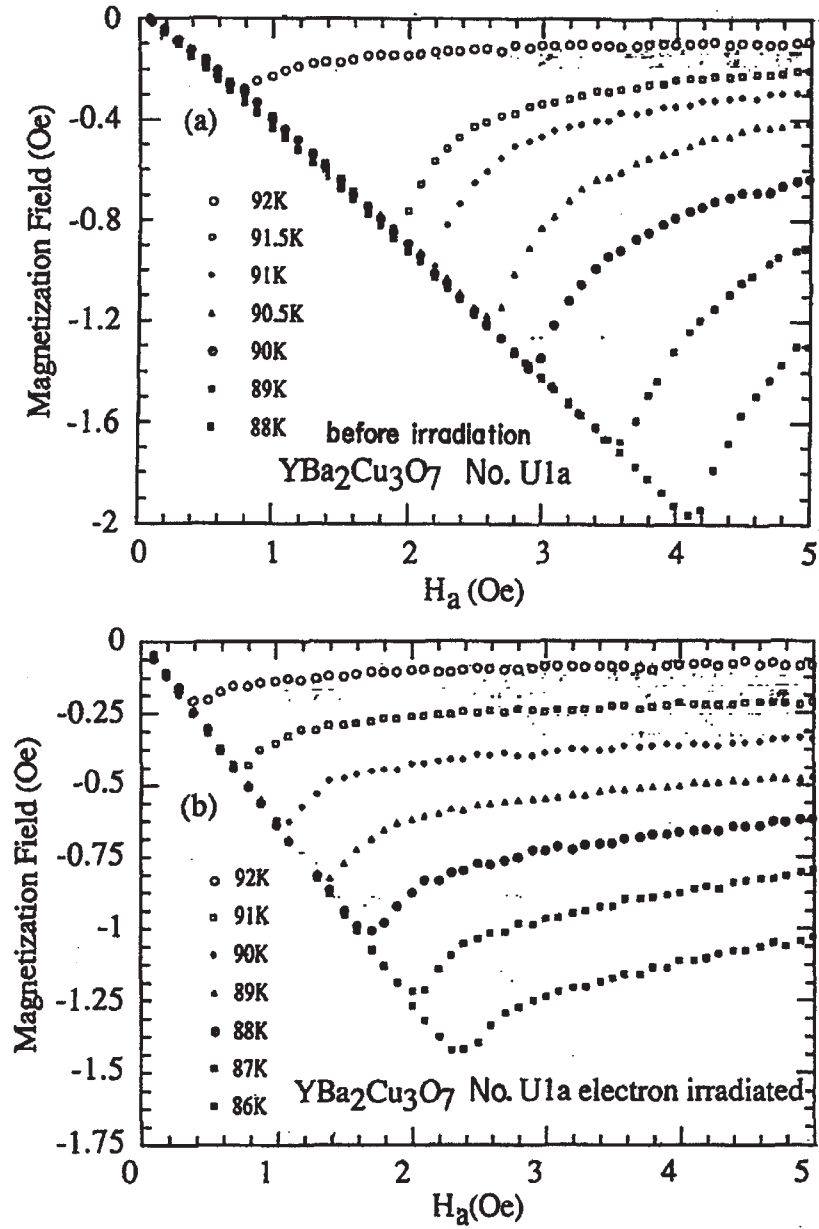
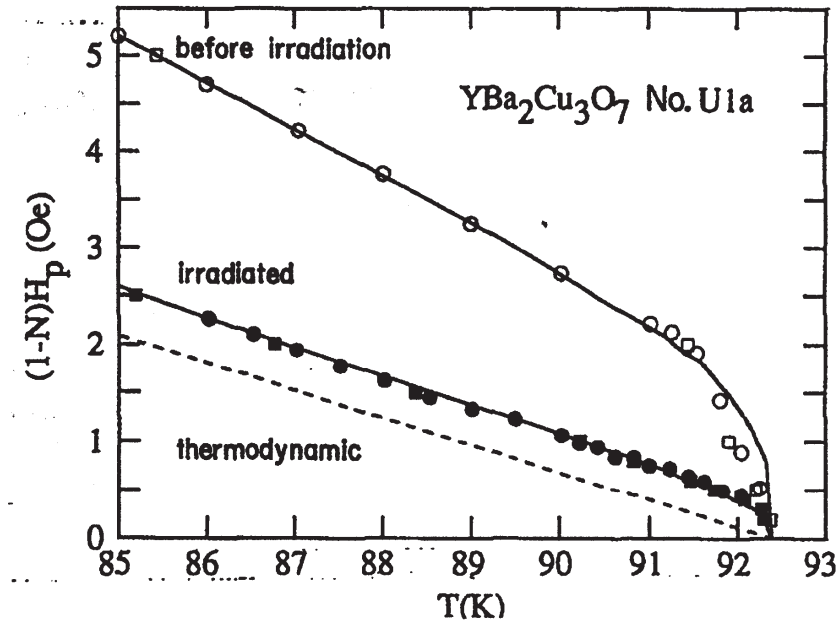


Рис. 21. Кривые намагничивания  $M(H_0)$  бездвойникового монокристалла  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , измеренные при постоянной температуре (из работы [16]):

- а) до облучения сверхпроводника электронами,
- б) после облучения электронами.

$\lambda_{ab}/\xi_{ab} \sim 10^2$  в выражение (1.38), находим, что дефекты могут подавить критическое поле входа не более, чем в 5.6 раза. В тоже время, дефекты не могут обеспечить крайне низкие значения  $H_{\text{en}}^{\text{after}}$ , поскольку отношение  $H_{\text{en}}^{\text{min } c}/H_{\text{c1}}$  должно быть более 4, однако экспериментальные значения  $H_{\text{en}}^{\text{after}}$  превышает поле  $H_{\text{c1}}$  не более, чем в 2 раза. Заметим, что вблизи  $T_c$  поверхностные дефекты не оказывают столь сильного влияния на величину критического поля  $H_{\text{en}}$ . Это может быть связано с тем, что при высоких температурах глубина проникновения магнитного поля увеличивается и становится больше характерного размера дефектов. Иными словами, при увеличении



**Рис. 22.** Температурная зависимость критического поля подавления барьера  $H_{\text{en}}$  в монокристалл  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  (из работы [16]):  $\circ$  — поле входа в необлученный образец,  $\bullet$  — поле входа в облученный образец с поверхностными дефектами, пунктирная линия соответствует зависимости  $H_{\text{c1}}(T)$ ;  $N$  — размагничивающий фактор.

температуры эффективно уменьшается степень изрезанности поверхности, и, соответственно, поверхностные дефекты в меньшей степени оказывают влияние на барьер БЛ.

В работе К. И. Кугеля и др. [56] барьер БЛ был исследован для другой геометрии ( $H \perp c$ ). Было обнаружено, что при  $T = 77$  К проникновение начинается в полях  $H_{\text{en}} = 110$  Гс; таким образом поле входа  $H_{\text{en}}$  превышает  $H_{\text{c1}}$  менее, чем в 3 раза. Мы полагаем, что в данном случае поверхностная шероховатость не может обеспечить столь сильное подавление барьера, поскольку наши оценки предсказывают следующее минимальное значение  $H_{\text{en}}^{\text{min ab}} \sim 5.8 H_{\text{c1}}^{\text{ab}}$  (мы считаем  $\lambda_c/\lambda_{\text{ab}} \sim 5$ ,  $\lambda_{\text{ab}}/\xi_{\text{ab}} \sim 10^2$ ).

В работе D.-X. Chen et al. [60] на основе исследования кривой намагничивания  $M(H_0)$  определено поле входа как в параллельной ( $H_0 \parallel c$ ), так и в перпендикулярной ориентации ( $H_0 \perp c$ ) магнитного поля. Обнаружена существенная анизотропия критического поля подавления барьера  $H_{\text{en}}^c/H_{\text{en}}^{\text{ab}} \approx 3$ , что очень близко к полученным нами оценкам  $H_{\text{en}}^c$  и  $H_{\text{en}}^{\text{ab}}$ . Это значит, что поверхностные дефекты могут обеспечить наблюдаемую анизотропию. Однако абсолютные величины  $H_{\text{en}}$  слишком малы и также не могут быть объяснены влиянием шероховатости образца.

Таким образом, мы приходим к следующим выводам: несмотря на то, что поверхностные дефекты могут значительно подавить критическое поле проникновения вихрей в однородный монокристаллический образец, тем не менее крайне сильное подавление барьера БЛ в ВТСП в области высоких температур ( $T \sim$

$T_c$ ) не может быть объяснено без учета термоактивационных процессов. Для низких температур ( $T \ll T_c$ ) поверхностная шероховатость должна быть доминирующим механизмом подавления барьера БЛ, поэтому полученные нами выражения для поля  $H_{\text{en}}$  должны соответствовать оценке снизу для реально наблюдаемым полем разрушения мейсснеровского состояния при  $T \ll T_c$ .

## 3.2. Исследование остаточной намагниченности пленок методом холловской магнитометрии

### 3.2.1. Методы восстановления пространственного распределения токов в тонких сверхпроводящих пленках

Проблема определения пространственного распределения токов  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  в двумерном токопроводящем образце по результатам измерения магнитного поля  $\mathbf{B}$  представляет значительный интерес для различных приложений: для исследования особенностей вихревого состояния в тонкой сверхпроводящей пленке [128, 129, 130, 131], для практического обнаружения дефектов в полупроводниковых пластинах, предназначенных для производства микросхем [132], для неразрушающей диагностики трещин в магнитной среде [133] и др. Стандартным методом для подобных исследований является измерение профиля  $B_z$  компоненты магнитного поля, перпендикулярной к пленке, (например, с помощью холловской микроскопии [128], магнитооптических методов [129, 130], СКВИД микроскопии [131, 132]) и последующего вычисления пространственного распределения плотности тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ . Задача получения профиля  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  по известному распределению  $B_z(\mathbf{r})$ , измеренному вне образца на высоте  $h_0$  от поверхности пленки, является примером некорректной математической задачи, особенностью которой является чрезвычайная чувствительность решения к малым изменениям параметров. Далее мы обсудим физическую причину некорректности таких задач и сделаем обзор основных методов их регуляризации.

Магнитное поле и ток связаны следующим локальным соотношением

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.1)$$

Получить  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  непосредственно из соотношения (3.1) довольно проблематично, т.к. поле измеряется вне сверхпроводника, где  $\mathbf{j} = 0$ . Для получения нелокальной связи между поверхностным током  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})d_s\delta(z)$  и магнитным полем  $B_z(\mathbf{r}, h_0)$ , воспользуемся преобразованием Фурье и запишем уравнение (3.1) для Фурье-образов  $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{q}}$  и  $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{q},k}$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{q},k} = \frac{4\pi d_s i}{c(q^2 + k^2)} [(\mathbf{q} + k\mathbf{z}_0) \times \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{q}}].$$



В данном разделе мы вводим следующие обозначения:  $\mathbf{r} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0$  — радиус-вектор на плоскости,  $\mathbf{q} = q_x\mathbf{x}_0 + q_y\mathbf{y}_0$  — двумерный волновой вектор. Умножая это уравнение векторно на  $\mathbf{q}$  и используя условие<sup>†</sup>  $\text{div}\mathbf{J} = 0$ , которое справедливо при отсутствии источников тока, получим связь между пространственным распределением двумерных токов и  $z$ -компонентой магнитного поля

$$[\mathbf{q} \times \mathbf{z}_0] (\tilde{B}_z)_{\mathbf{q},k} = -\frac{4\pi d_s}{c} \frac{i}{(q^2 + k^2)} \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{q}}. \quad (3.2)$$

Заметим, что

$$(\tilde{B}_z)_{\mathbf{q}, z=h_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{B}_z)_{\mathbf{q},k} e^{ikh_0} dk.$$

После умножения уравнения (3.2) на  $e^{ikh_0}/2\pi$  и интегрирования по  $k$  получаем

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}} \cdot (\tilde{B}_z)_{\mathbf{q}, z=h_0} \quad (3.3)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}} = \frac{c}{2\pi d_s} \frac{i}{q} [\mathbf{q} \times \mathbf{z}_0] e^{qh_0}. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.3) и (3.4) обычно используются для решения задачи о восстановлении токов в результате вычисления обратного преобразования Фурье (см., например, [135]):

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}} (\tilde{B}_z)_{\mathbf{q}, z=h_0} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^2\mathbf{q}. \quad (3.5)$$

Для  $h_0 \neq 0$  основной особенностью задачи восстановления профиля токов является наличие множителя  $\exp(qh_0)$  в функции  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$ , поэтому в этом случае не существует функции Грина уравнения Био–Савара–Лапласа<sup>‡</sup> и поэтому невозможно

<sup>†</sup> Анализ пространственного распределения токов в тонкой пленке при наличии транспортного тока (когда  $\text{div}\mathbf{J} \neq 0$ ) представлен в работах [138, 139].

<sup>‡</sup> Заметим [134], что для  $h_0 = 0$  можно получить аналитическое выражение для пространственного распределения токов, которое должно являться сверткой функции  $B_z(\mathbf{r}, z = 0)$  и оригинала функции  $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}}$ :

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^2\mathbf{q} = \frac{c}{4\pi^2 d_s} \text{rot} \left( \frac{\mathbf{z}_0}{r} \right) = \frac{c}{4\pi^2 d_s} \frac{[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}]}{r^2}$$

Функция  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$  формально совпадает с распределением тока вокруг вихря в тонкой сверхпроводящей пленке на больших расстояниях  $r \gg \lambda^2/d_s$ . Для  $h_0 = 0$  пространственное распределение токов в двумерной токопроводящей среде может быть найдено следующим образом

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi^2 d_s} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\mathbf{r}', z = 0) \frac{[\mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2\mathbf{r}'. \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) имеет простой физический смысл: ток в пленке можно представить как суперпозицию токов  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ , создаваемых изолированными вихрями, при этом распределение  $B_z(\mathbf{r}, z = 0)$  является просто плотностью источников (вихрей). Легко видеть, что функция  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$

получить аналитическое соотношение, подобное (3.6). Для  $h_0 \neq 0$  профиль токов может быть найден также из соотношения (3.5), однако обратное преобразование Фурье будет существовать только в том случае, если  $(\tilde{B}_z)_{\mathbf{q}, z=h_0}$  при  $q \gg 1$  будет стремиться к нулю быстрее, чем  $\exp(-qh_0)$ . Известно, что если функция  $f(x)$  содержит разрывы или разрывы производных, то Фурье-спектр этой функции имеет высокочастотную степенную асимптотику вида  $\tilde{f}(q) \propto q^{-n}$ . Именно такая ситуация реализуется в эксперименте, когда на гладкую регулярную составляющую  $B_z^s(\mathbf{r}, h_0)$ , которую можно отождествить с истинным распределением токов, накладывается нерегулярная (шумовая) компонента  $B_z^n(\mathbf{r}, h_0)$ , которая приводит к появлению выбросов и разрывов производных на измеряемом в эксперименте сигнале  $B_z(\mathbf{r}, h_0) = B_z^s(\mathbf{r}, h_0) + B_z^n(\mathbf{r}, h_0)$ . Таким образом, при отсутствии шума может существовать точное решение для распределения токов по результатам измерения  $z$ -компоненты поля на конечной высоте  $h_0$ . При наличии шумов появляются медленно затухающие высокочастотные компоненты спектра  $\tilde{B}_z(\mathbf{q}, h_0)$ , которые приводят к экспоненциально большому вкладу в восстанавливаемое распределение тока для больших  $q$ , и недостоверным результатам вычисления  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  на малых пространственных масштабах. Источниками шумов могут служить временная нестабильность источника тока, питающего датчик Холла; вибрации сканирующей платформы, приводящие к случайным изменениям высоты и т.п.

Для решения указанной проблемы (регуляризации ядра  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$  на высоких частотах) разработаны различные способы. Наиболее простым способом является низкочастотная фильтрация пространственных гармоник  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ , которая заключается стандартной процедуре умножения правой части уравнения (3.3) на некоторую оконную (window) функцию  $W_{\mathbf{q}}$ , которая должна обращаться в нуль при  $q \gg 1$ :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{q}} = W_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}} \cdot (\tilde{B}_z)_{\mathbf{q}, z=h_0}. \quad (3.7)$$

В ряде работ [131, 132, 135] в качестве  $W_{\mathbf{q}}$  используется прямоугольная оконная функция

$$W_{\mathbf{q}}^{(1)} = \theta(q_0 - q), \quad (3.8)$$

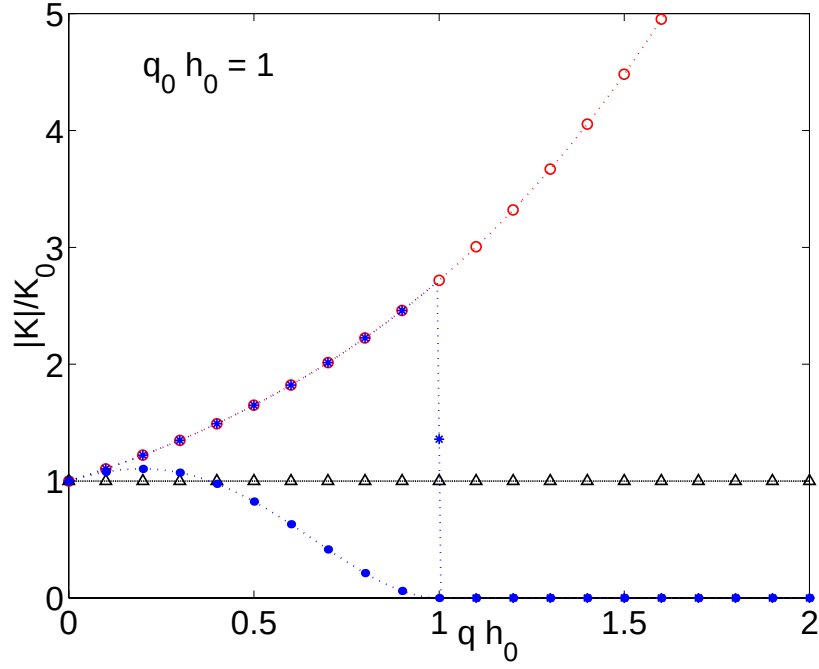
где  $\theta(q)$  — функция Хевисайда,  $q_0$  — некоторый произвольно задаваемый параметр обрезания спектра, который определяет пространственное разрешение метода, поскольку информация о структуре токов на пространственных масштабах меньших

---

является функцией Грина уравнения Био–Савара–Лапласа

$$\frac{d_s}{c} \int_S \frac{[\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2\mathbf{r}' = \delta(\mathbf{r}).$$

Действительно,  $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}}$  при  $(\tilde{B}_z)_{\mathbf{q}, z=0} = 1$ , при этом  $B_z(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ .



**Рис. 23.** Фурье-образ ядра уравнения Био–Савара  $|\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q})|/K_0$  ( $\circ$ ),  $K_0 = c/(2\pi d_s)$ , определяемого соотношением (3.4) и различные варианты регуляризации ядра для высших гармоник: ( $\star$ ) — по формуле (3.8), ( $\bullet$ ) — по формуле (3.9), ( $\triangle$ ) — по формуле (3.10).

$1/q_0$  будет потеряна. Недостаток такого метода заключается в возникновении разрыва в Фурье-образе плотности тока  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$  при  $q = q_0$ , что может привести к некорректному восстановлению  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ .

Указанных недостатков лишена оконная функция Хеннинга, которая гарантирует непрерывность  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$  вместе с двумя первыми производными:

$$W_{\mathbf{q}}^{(2)} = \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi q/q_0)) \theta(q_0 - q). \quad (3.9)$$

Однако и в этом случае остается проблема правильного выбора правильного значения  $q_0$ , которое чаще всего определяется эмпирически.

В качестве альтернативной весовой функции можно использовать экспоненциальную функцию вида

$$W_{\mathbf{q}}^{(3)} = e^{-q/q_0}, \quad (3.10)$$

где  $q_0 \leq 1/h_0$ . Замечательным свойством такой функции является эффективная фильтрация высокочастотных компонент  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$  при сохранении непрерывности всех производных.

Принципиально иной подход к решению корректной задачи о распределении токов в сверхпроводящей пленке использован в работах [30, 31, 136, 137] (метод обобщенной невязки Тихонова). Согласно методу Тихонова вместо прямого решения некорректной задачи (3.3) находится распределение  $\mathbf{J}^*(\mathbf{r})$

на классе гладких функций, которое минимизирует некоторый функционал, характеризующий интегральную меру отличия измеряемого магнитного поля  $B_z(\mathbf{r}, h_0)$  от восстанавливаемого магнитного поля  $B_z^*(\mathbf{r}, h_0)$ , соответствующего распределению  $\mathbf{J}^*(\mathbf{r})$ . Достоинствами метода Тихонова являются более корректный и последовательный учет влияния шумов на пространственное распределение тока, возможность учета аппаратной функции датчика Холла, регистрирующего локальное магнитное поле, а также аппаратной функции измерительных приборов, проявляющейся в усреднении истинных значений магнитного поля с некоторой постоянной времени  $\tau$ .

В применении к методу фильтрации пространственных гармоник обсудим критерий выбора параметра обрезания  $q_0$ . Величину  $q_0$  можно оценить как максимальную пространственную частоту, ниже которой вклад шума с учетом множителя  $\exp(qh_0)$  в спектр  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$  не превышает вклада сигнала:  $\tilde{B}_{\mathbf{q}_0}^s \gtrsim \tilde{B}_{\mathbf{q}_0}^n \cdot \exp(q_0 h_0)$ . Выражая  $q_0$ , получаем грубую оценку параметра обрезания:

$$q_0 \lesssim \frac{1}{h_0} \cdot \ln \tilde{B}_{\mathbf{q}_0}^s / \tilde{B}_{\mathbf{q}_0}^n \sim \frac{1}{h_0} \ln \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{s, \max} / \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{n, \max}, \quad (3.11)$$

Поскольку типичное отношение сигнал–шум в наших экспериментах  $\tilde{B}_{\mathbf{q}}^{s, \max} / \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{n, \max} \sim 10^2 \div 10^4$  (получено из основе Фурье–анализа экспериментальных распределений магнитного поля), поэтому  $\ln \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{s, \max} / \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{n, \max} \sim 4 \div 9$ . Мы получаем очевидный вывод, что пространственное разрешение  $R = 2\pi/q_0$  довольно слабо (логарифмически) зависит от отношения сигнал–шум и для точечного датчика магнитного поля определяется в основном высотой сканирования:  $R \sim h_0$ . Легко видеть, что при отсутствии шумов ( $\tilde{B}_{\mathbf{q}}^{n, \max} \rightarrow 0$ ) пространственное разрешение  $R \rightarrow 0$ , то есть задача о восстановлении профиля тока может быть решена точно вплоть до самых малых пространственных масштабов, определяемых шагом сканирования и размером датчика  $d_H$ .

Таким образом, в условиях реального эксперимента, когда  $d_H \ll h_0$ ,  $s \ll h_0$  ( $s$  — шаг сканирования) и при наличии сильного шума разрешающая способность определяется высотой сканирования. В этих условиях можно выбрать простейший вид регуляризирующего окна, в частности,  $W_{\mathbf{q}}^{(3)}$  при  $q_0 = 1/h_0$ . Тогда для спектра тока  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$  получим следующее выражение

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi^2 d_s} \int_{-\infty}^{\infty} B_z(\mathbf{r}', z = h_0) \frac{[\mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2 \mathbf{r}', \quad (3.12)$$

которое совпадает с выражением (3.6), в котором сделана замена  $B_z(\mathbf{r}', z = h_0)$  вместо  $B_z(\mathbf{r}', z = 0)$ . Строго говоря, интегрирование в выражении (3.12) должно проводиться по бесконечной области. Однако в реальном эксперименте, когда используются образцы конечных размеров, поля рассеяния быстро спадают и становятся пренебрежимо малыми на больших расстояниях. Поэтому для практических целей область интегрирования следует выбирать из условия  $B_z \simeq 0$ , то есть когда

сигнал не превышает уровня шумов. Достоинством предлагаемой процедуры (3.12), которая будет использована далее для практического восстановления профиля тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , является простота применения и приемлемая разрешающая способность ( $\sim h_0$ ) в условиях сильного шума. Следует заметить, что при уменьшении высоты сканирования, когда размер датчика Холла становится больше  $h_0$ , метод Тихонова представляется более адекватным для решения задачи о распределении токов, чем метод фильтрации пространственных гармоник, поскольку при этих условиях он позволяет получать более детальную пространственную структуру токов.

### **3.2.2. Описание экспериментальной установки и характеристики образцов**

Эксперименты по исследованию остаточной намагниченности сверхпроводящих пленок проводились на эпитаксиальных тонких пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , выращенных в ИФМ РАН. Пленки были изготовлены в низкотемпературном одностадийном процессе *in situ* методом обратного магнетронного распыления. Детали технологических процессов и характеристики образцов подробно описаны в работах [142, 143, 144]. Характерный размер образцов в плоскости  $(x, y)$  — 10 мм  $\times$  10 мм, толщина пленок  $d_s = 800 \div 1000$  Å. Пленки меньшей толщины менее удобны для магнитных исследований из-за малого захваченного потока, в пленках большей толщины имеет место зависимость плотности токов от  $z$  координаты. Кроме сплошных пленок  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , также были исследованы пленки с токоограничивающими дефектами типа тонких царапин (с характерной шириной  $10^2$  мкм) и бикристаллические пленки.

В наших экспериментах были изучены пространственные характеристики вихревых структур, возникающих в сверхпроводящих пленках после включения и выключения внешнего магнитного поля  $H_0$ . Максимальное значение  $H_0 \sim 600$  Гс выбиралось достаточно большим для того, чтобы гарантировать полное проникновение магнитного потока в пленку. Перпендикулярное магнитное поле создавалось соленоидом со медными обмотками. После того, как внешнее поле выключалось, подвижным датчиком Холла с размером чувствительной области 50 мкм  $\times$  100 мкм, расположенным на высоте  $h_0 = 100 \div 500$  мкм, производилось измерение профиля  $B_z(x, y)$ . Шаг сканирования составлял 0.125 мкм. Время измерения в одной точке определялась инерционностью измерительной аппаратуры и составляло 0.25  $\div$  0.5 сек. Полное время сканирования одного образца составляло от 2 до 10 часов в зависимости от скорости сканирования и размера области измерения поля. Уровень шумов измерительного тракта составлял примерно 0.1 Гс.

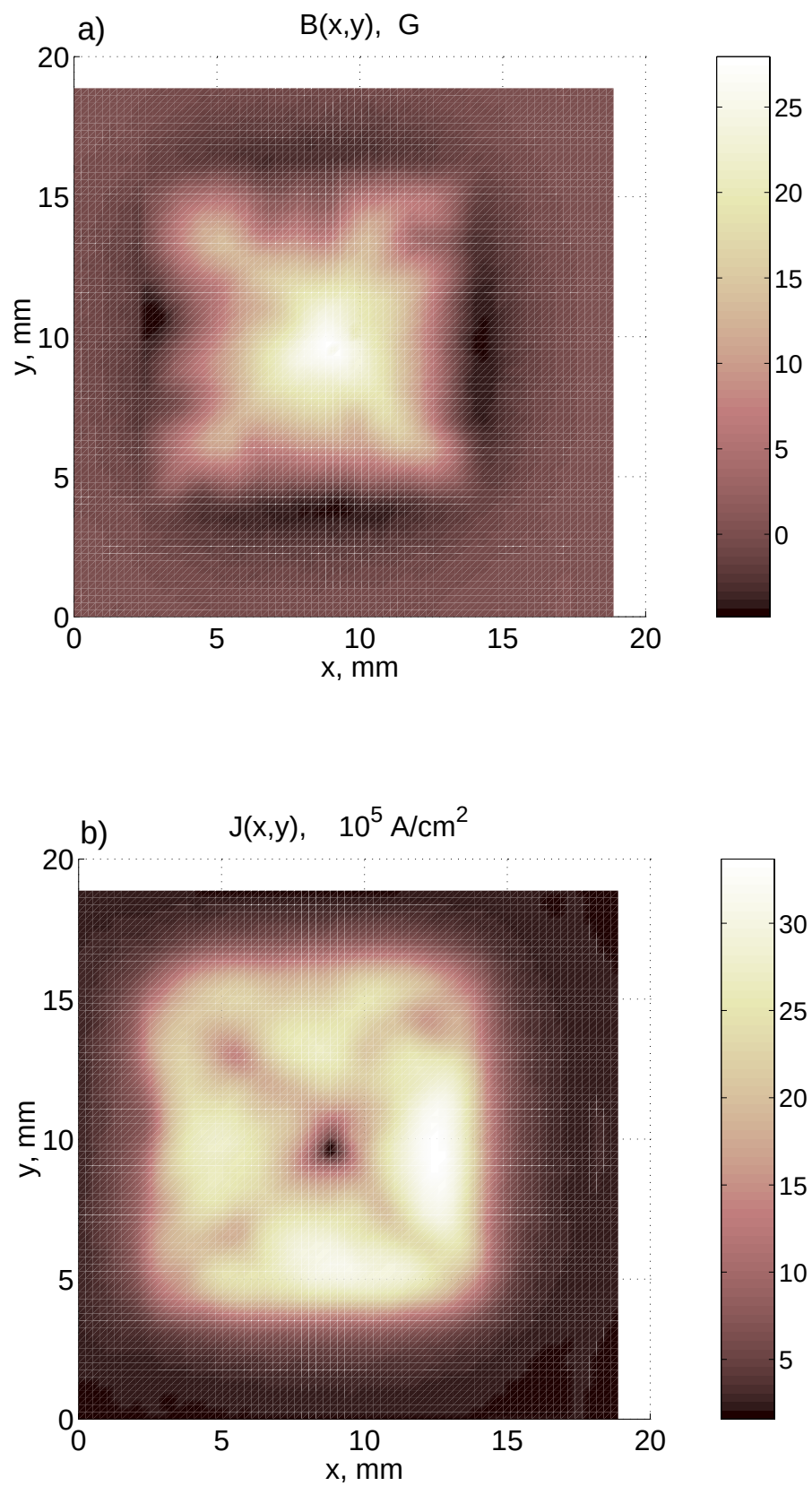
### **3.2.3. Обсуждение результатов**

Основной вопрос, которому будет уделено основное внимание в данном разделе, — это применимость модели критического состояния [29] для описания

пространственного распределения токов в реальных тонкопленочных образцах.

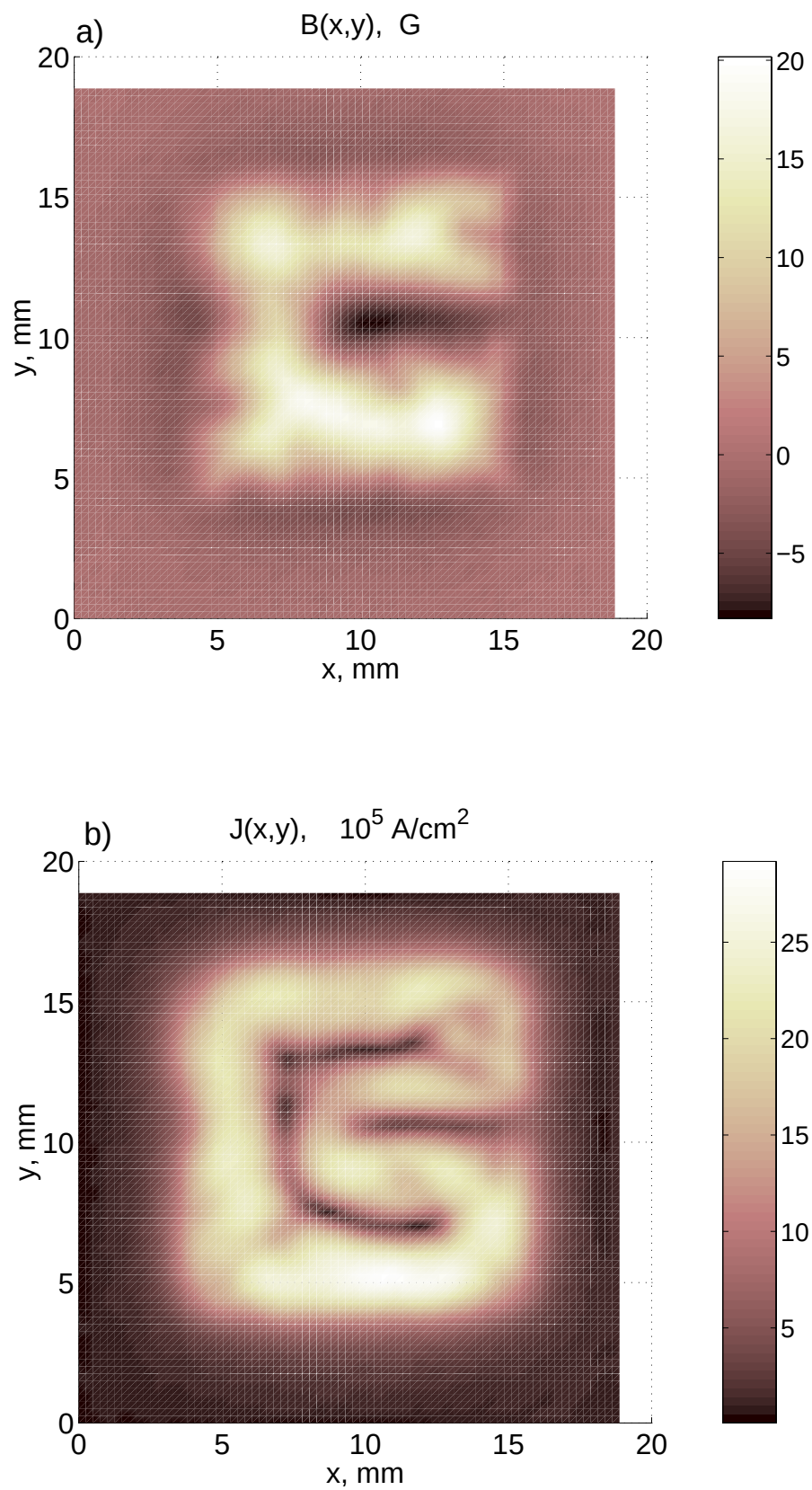
На рис. 24а представлен профиль магнитного поля  $B_z(\mathbf{r}, h_0)$ , измеренный на высоте  $h_0 = 250$  мкм от пленки после включения и выключения перпендикулярного магнитного поля при  $T = 77$  К. Нетрудно заметить, что некоторые особенности, предсказываемые теорией критического состояния Бина, такие как логарифмический рост магнитного поля в центре образца, отсутствуют в экспериментальных данных. Используя распределение  $B_z(\mathbf{r}, h_0)$ , по формуле (3.12) мы вычислили профиль тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  (рис. 24b). Главной особенностью зависимости  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  является очень неоднородное распределение плотности тока по поверхности образца, в частности, наличие в центральной области крупномасштабного провала ( $2 \div 3$  мм), где плотность тока уменьшена более чем на порядок. Для представленного образца максимальные значения захваченного поля и тока составляют соответственно  $B_{\max} = 27.9$  Гс и  $j_{\max} = 3.3 \cdot 10^6$  А/см<sup>2</sup>. Таким образом, пространственное распределение плотности тока не может быть описано в рамках стандартной модели Бина, предполагающей  $J(\mathbf{r}) = J_p$ ,  $J_p = \text{const}$ .

Можно предложить несколько объяснений наблюдаемого эффекта. Во-первых, подавление тока в центре образца в принципе может быть связано с наличием макроскопических неоднородностей, то есть  $J_p = J_p(\mathbf{r})$ . Хотя неоднородности (сверхпроводящие гранулы) в пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  действительно существуют, их характерный размер  $\sim 1$  мкм значительно меньше, чем наблюдаемый провал. Тем не менее для проверки этой гипотезы было проведено восстановление токов для той же пленки с нанесенной царапиной (разрезом), идущей от центра пленки к периферии. Размер и местоположение разреза выбраны таким образом, чтобы оказать максимальное влияние на сверхпроводящие токи, которые в неиспорченном образце должны были бы течь перпендикулярно разрезу. Ширина царапины составляла примерно  $150 \div 200$  мкм. Было обнаружено, что наличие такого дефекта приводит к кардинальным изменениям структуры захваченного потока (рис. 25а): существенно расширилась область с вихрями противоположного знака (антивихрями), которые раньше занимали периферийную область; кроме этого на треть уменьшилось максимальное поле,  $B_{\max} = 20.2$  Гс. Соответственно изменилось и стало более сложным распределение токов (рис. 25b), которые теперь вынуждены течь вдоль разреза. Однако основные особенности сохранились: плотность тока  $J(x, y)$  по-прежнему подавлена во внутренней области, которая теперь оказалась деформированной и смещенной в соответствии с новой границей образца; характерная ширина провала осталась неизменной. Заметим также, что после того, как исследуемый образец был разломлен по линии разреза (при этом его площадь уменьшилась вдвое), были получены распределения  $B_z(\mathbf{r}, h_0)$  и  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , сходные с изображенными на рис. 24а и 24b графиками. Распределение  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  для разломленного образца также имеет крупномасштабный провал в центре образца. В работах [139, 140, 141] было обнаружено, что при высоких



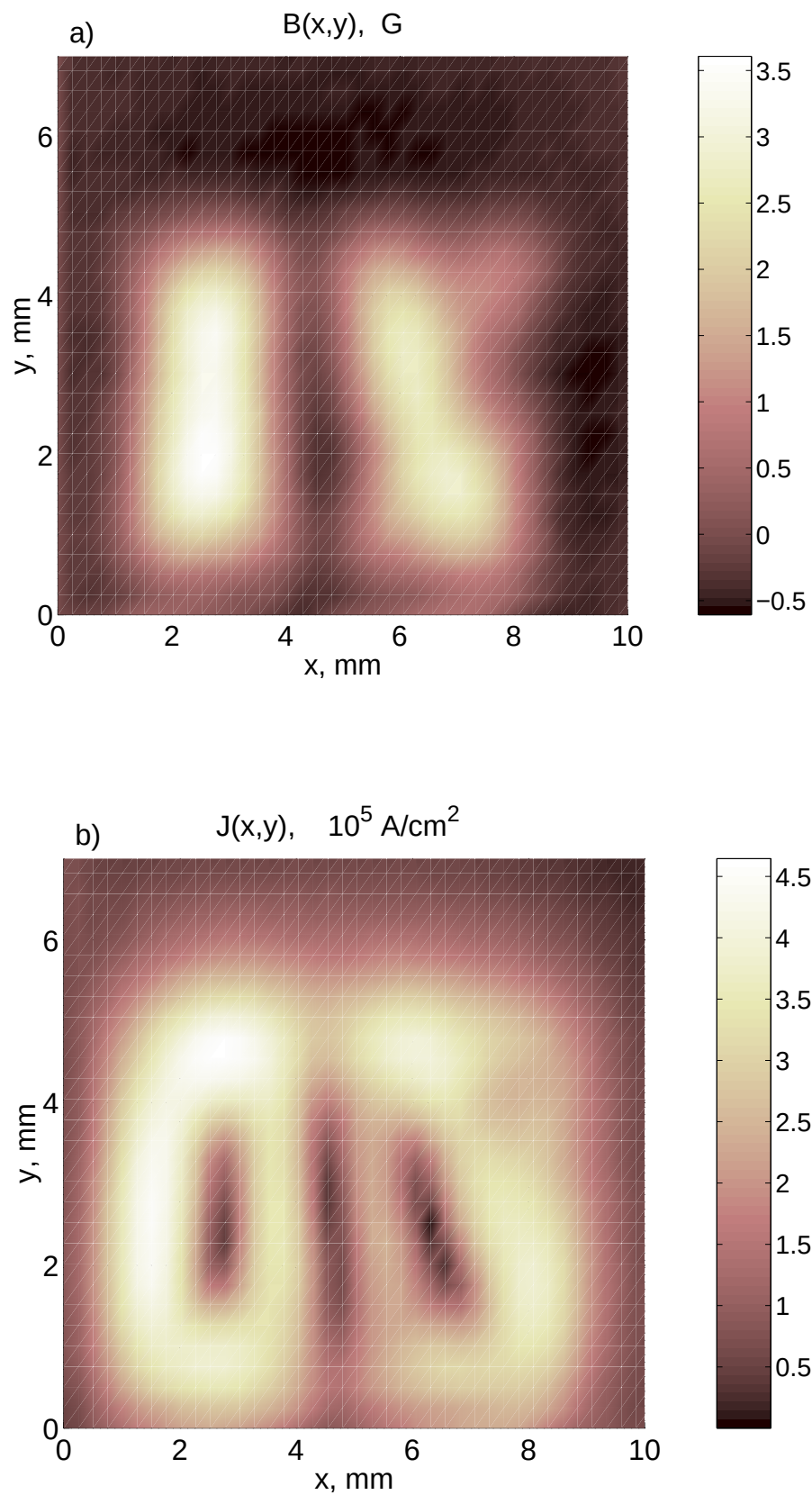
**Рис. 24.** (цветной) Пространственное распределение  $B_z(x,y)$  (a), измеренное на высоте  $h_0 = 250$  мкм от пленки  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  при  $T = 77$  K, и восстановленное распределение плотности тока  $\mathbf{J}(x,y)$  (b).



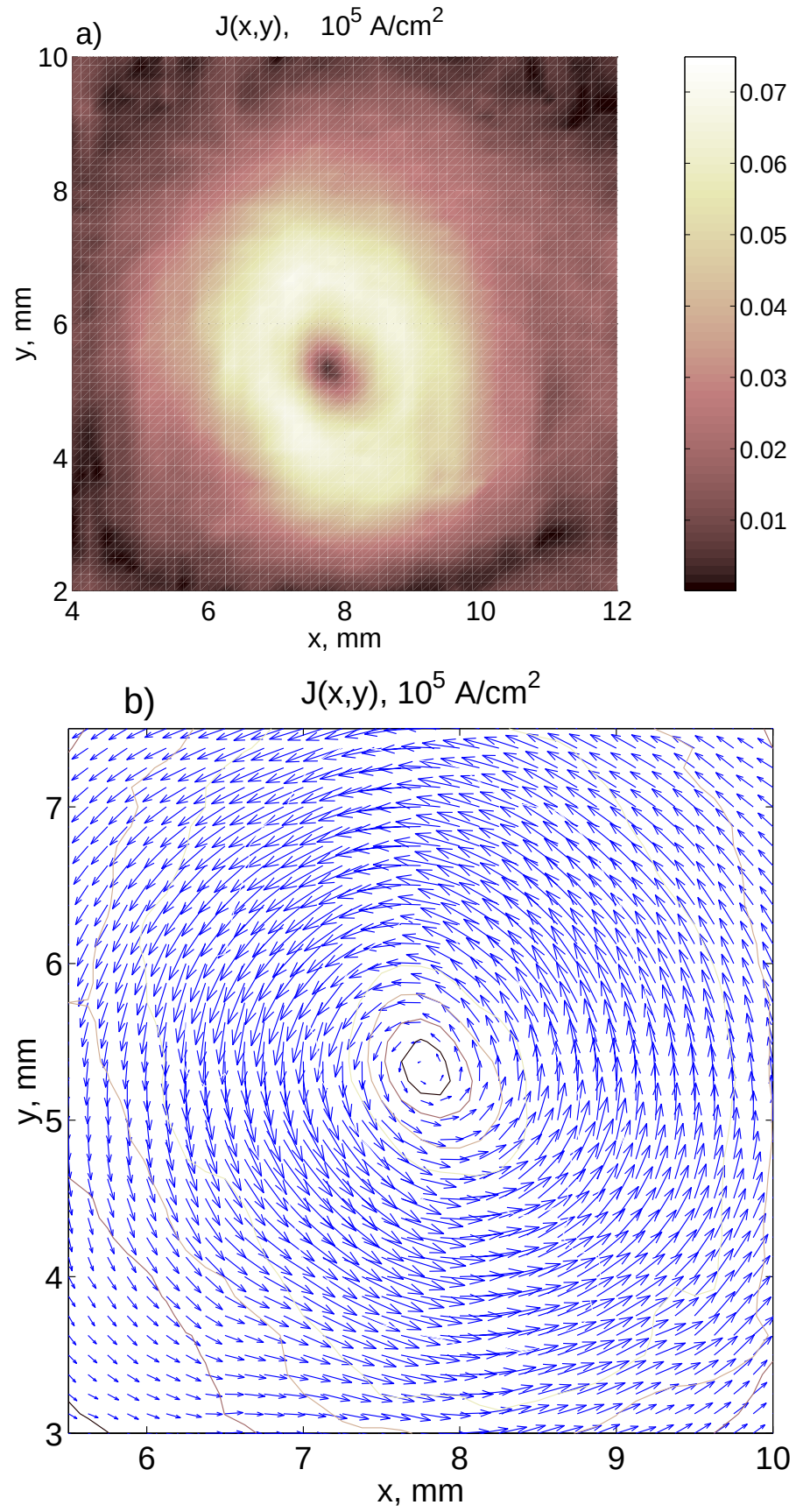


**Рис. 25.** (цветной) Пространственное распределение  $B_z(x,y)$  (а), измеренное на высоте  $h_0 = 250$  мкм от пленки  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  с царапиной при  $T = 77$  К, и восстановленное распределение плотности тока  $\mathbf{J}(x,y)$  (б).





**Рис. 26.** (цветной) Пространственное распределение  $B_z(x,y)$  (а), измеренное на высоте  $h_0 = 250$  мкм от бикристаллической пленки  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  при  $T = 77$  К, и восстановленное распределение плотности тока  $\mathbf{J}(x,y)$  (б).



**Рис. 27.** (цветной) Пространственное распределение  $B_z(x,y)$  (а), созданное микромагнитом и измеренное на высоте  $h_0 = 250 \text{ мкм}$  от пленки при  $T = 77 \text{ K}$ , и восстановленное распределение плотности тока  $\mathbf{J}(x,y)$  (б).

температурах намагниченность сверхпроводящих мостиков, в том числе и при наличии транспортного тока, также нельзя описать в рамках модели критического состояния.

В качестве дополнительной иллюстрации зависимости остаточной намагниченности и структуры токов в присутствии дефектов приведем профиль захваченного поля и рассчитанное распределение токов для бикристаллической пленки  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , которая обладает естественным препятствием для сверхпроводящих токов (рис. 26а и 26b). Легко видеть, что в каждой из частей бикристаллической пленки формируются распределения  $B_z(\mathbf{r}, h_0)$  и  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , качественно похожие на профили  $B_z(\mathbf{r}, h_0)$  и  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  для пленки без дефектов.

На основании этих данных можно сделать следующие выводы:

1. Наличие провала в плотности тока в центре образца и его характерная ширина не зависят от особенностей микроструктуры образца, а является неотъемлемым свойством критического состояния сверхпроводящих пленок.

2. Пространственная структура остаточной намагниченности очень сильно зависит от дефектов, лимитирующих протекание тока, и геометрических размеров образца.

Другим возможным объяснением подавления плотности тока в центральной области в состоянии с полностью проникшим магнитным потоком может служить зависимость плотности тока пиннинга от магнитного поля,  $J_p = J_p(B)$ . Мы провели специальные измерения профиля захваченного потока в присутствии внешнего магнитного поля  $H_0$  до 200 Гс и не обнаружили влияния  $H_0$  на профиль  $B_z(x, y)$ . Кроме этого, мы исследовали возможную корреляцию между локальной плотностью тока  $J(x, y)$  и величиной  $B_z(x, y, h_0)$ : для этого мы построили график  $J = J(B_z)$  для совпадающих значений  $(x, y)$ . В отличие от результатов работы [140] <sup>†</sup>, нам не удалось обнаружить искомую корреляцию и получить разумную зависимость  $J_p(B_z)$ .

Мы полагаем, что наиболее вероятным объяснением наблюдаемого эффекта является термоактивированная релаксация магнитного потока (крип магнитного потока). Иными словами, при  $T \neq 0$  существует конечная вероятность выхода запиннированного вихря из сверхпроводника, поскольку в отсутствие магнитного поля он обладает избыточной энергией. Поэтому даже если в начальный момент вихревое состояние в пленке соответствовало модели Бина  $J_p = \text{const}$  (за исключением малой области в центре образца шириной порядка межвихревого расстояния  $\sqrt{\Phi_0/B_{\text{max}}} < 10^{-4}$  см), то за счет выхода вихрей реальная плотность тока будет меньше. Очевидно, что влияние крипа должно сильнее всего проявляться

---

<sup>†</sup> В этой работе было экспериментально показано, что при низких температурах ( $T \ll T_c$ ) остаточную намагниченность тонкопленочных структур можно описать в рамках модели критического состояния с критическим током  $J_p$ , зависящим от "локального" значения магнитного поля  $B_z$ .

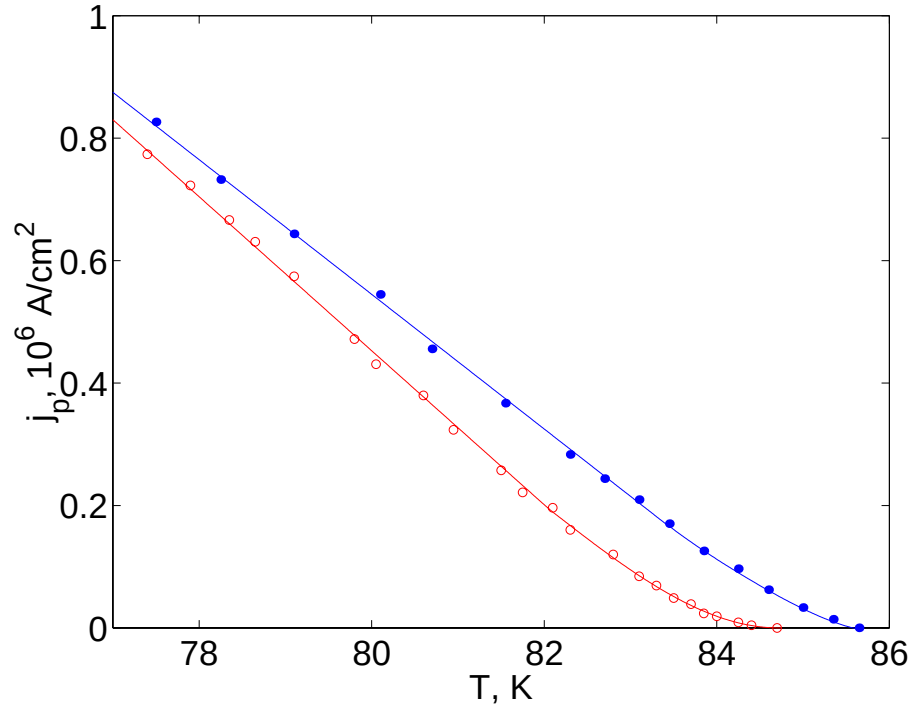
в областях с большой концентрацией вихрей, то есть в центре образца. Поскольку наши измерения пространственного распределения магнитного поля занимает довольно много времени (от 2 до 10 часов), быстрая релаксация потока может приводить к тому, что рассчитываемое распределение тока не соответствует условию  $J_p = \text{const}$ . Мы провели серию измерений интенсивности релаксации потока в исследуемых образцах, которые подтвердили существование так называемого гигантского крипа в ВТСП [53]. Действительно, наши измерения указывают на быструю релаксацию захваченного магнитного потока: при  $T = 77$  К за первые 1–2 мин полный магнитный момент уменьшается на 10 – 15% для разных образцов, что соответствует нормализованной скорости релаксации  $S = dM(t)/d(\ln t) \sim 0.05$ . При повышении температуры скорость релаксации в исследуемых образцах незначительно увеличивалась, при охлаждении скорость незначительно уменьшалась и при  $T = 4.2$  К захваченный поток уменьшался 5% за 1 мин. Столь сильный крип в области гелиевых температур может указывать на то, что крип может усиливаться за счет сильного межвихревого отталкивания, эффективно уменьшающего глубину потенциала пиннинга; а также на то, что в реальных образцах имеются центры пиннинга с различными энергиями активации.

Таким образом, мы приходим к выводу, что крип магнитного потока следует считать наиболее вероятной причиной подавления плотности тока в центре тонкопленочных образцов в области высоких температур ( $T \sim T_c$ ). Заметим, что для вихревого состояния с малой плотностью вихрей и при температурах  $T \ll T_c$ , можно ожидать, что модель критического состояния Бина будет справедлива.

В заключение обсудим применимость соотношения

$$j_p = \frac{J_p}{d_s} \simeq \frac{c \cdot \max[B_z]}{2\pi d_s \cdot \ln(L/R)}, \quad (3.13)$$

полученного для однородного сверхпроводящего диска в рамках модели критического состояния Бина [27] и часто используемого для оценки плотности тока в сверхпроводящих пленках;  $\max[B_z]$  — максимальное значение  $z$ -компоненты захваченного магнитного поля,  $d_s$  — толщина сверхпроводящей пленки,  $L$  — размер образца,  $R = \min(h_0, d_H)$  — параметр обрезания, точное значение которого слабо сказывается на оценке плотности тока. Результаты восстановления плотности тока указывают на то, что оценка средней плотности тока  $j_p$  по формуле (3.13) приводит к заниженному значению, которое примерно вдвое меньше максимальной плотности тока, возможной в данном вихревом состоянии. Тем не менее, такая оценка дает правильный по порядку величины результат, и поэтому вполне применима для быстрой диагностики токонесущей способности пленок и для оценки средней плотности тока пиннинга. Используя экспериментально полученную зависимость  $\max[B_z](T)$ , по формуле (3.13) мы вычислили зависимость средней плотности тока пиннинга  $j_p(T)$  от температуры (рис. 28). Зависимость  $j_p(T)$  близка к линейной зависимости при температурах, не слишком близких к  $T_c$ .



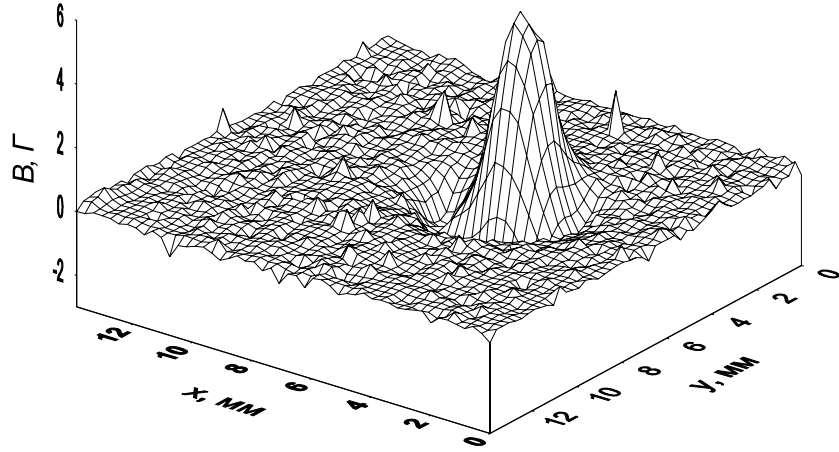
**Рис. 28.** Типичные температурные зависимости критического тока пиннинга  $j_p$  для двух образцов: M1 —  $\circ$ , M2 —  $\bullet$  (см. табл. 1).

### 3.3. Измерение критической плотности тока распаривания с помощью малой ферромагнитной частицы

#### 3.3.1. Описание методики измерения

Как было показано в разделе 3.2.1, анализ экспериментальных данных по намагничиванию тонких сверхпроводящих пленок в перпендикулярном магнитном поле представляет весьма сложную задачу. Большой размагничивающий фактор таких образцов приводит к высокой плотности экранирующего тока на краях пленки, в результате чего как форма образца, так и трудно контролируемая структура краев в значительной мере определяют экспериментально измеряемые магнитные характеристики.

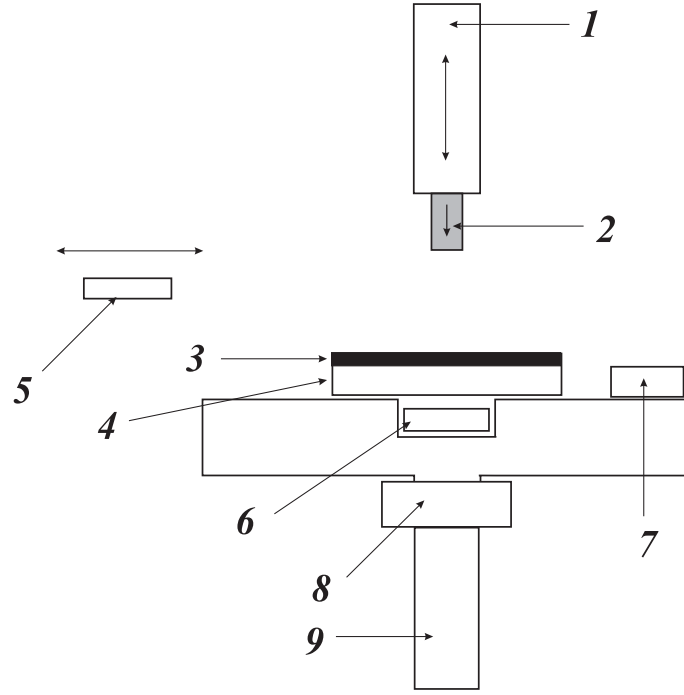
В этом разделе будут представлены результаты исследований локальных характеристик смешанного состояния, формирующегося в эпитаксиальных тонких пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  в поле ферромагнитной частицы (микромагнита). Несомненным достоинством используемой методики [48] является то обстоятельство, что плотность сверхпроводящего тока вблизи краев образца может быть пренебрежимо малой по сравнению с током распаривания и недостаточной для рождения вихря. Подтверждением того, что вихревые линии проникают через поверхность пленки, а не через края образца, является вид пространственного распределения  $B_z(x, y)$  для тонкой пленки, намагниченной в поле микромагнита (рис.29): вихри локализованы в ограниченной области в пленке под микромагнитом. Это означает, что



**Рис. 29.** Пространственное распределение остаточного магнитного поля  $B_z(x, y)$  в тонкой пленке  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , измеренное сканирующим датчиком Холла после опускания микромагнита до высоты  $a < a_{\text{сг}}$  и последующего удаления его от пленки ( $h_0 \simeq 250$  мкм,  $T = 77$  К).

использование магнитной частицы в качестве источника неоднородного магнитного поля позволяет изучать локальные характеристики сверхпроводящих образцов конечных размеров. Заметим, что системы такого типа (магнитный диполь над поверхностью сверхпроводника) активно исследуются также в приложении к проблемам магнитосиловой микроскопии и левитации [45, 46, 47]. Как правило, в таких задачах предполагается, что магнитный момент диполя достаточно мал и не оказывает существенного влияния на сверхпроводник. Мы рассматриваем иную ситуацию, когда смешанное состояние само создается полем микромагнита. Сценарий возникновения такого вихревого состояния существенно зависит от того, как происходит переход пленки в сверхпроводящее состояние: в магнитном поле микромагнита или в его отсутствие. Замораживание вихрей в поле микромагнита исследовалось экспериментально в работе [146]. Именно такой случай соответствует теоретическому анализу [111, 147, 148], основанному на сравнении свободной энергии сверхпроводника без вихрей и с одиночным вихрем. Как будет показано далее, исследование процесса формирования вихревого состояния в поле диполя в образцах, охлажденных до  $T < T_c$  в нулевом магнитном поле, также представляет большой интерес, поскольку позволяет получить важную информацию о локальных характеристиках образца.

Процесс формирования смешанного состояния описан в главе 1. По мере уменьшения расстояния  $a_0$  между пленкой и микромагнитом локальный мейсснеровский ток на поверхности пленки превышает критическую величину, что приводит к проникновению в пленку вихревых полупетель. Увеличивая свой радиус вихревые полупетли достигают противоположной поверхности пленки, где расщепляются на пару вихрь–антивихрь. Образовавшиеся вихри закрепляются на центрах пиннинга и создают остаточное поле, которое затем исследуется с помощью



**Рис. 30.** Схема экспериментальной установки ( 1 — штанга, 2 — микромагнит, 3 — пленка  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , 4 — подложка, 5 — сканирующий датчик Холла P1, 6 — неподвижный датчик Холла P2, 7 — термодатчик, 8 — нагреватель, 9 — хладопровод).

датчиков Холла. В рамках данного сценария оказывается возможным, в частности, определить критическую плотность тока распаривания  $j_c$ , соответствующую локальному подавлению энергетического барьера БЛ для вхождения вихревых линий в тонкую сверхпроводящую пленку через ее поверхность. Эта задача сводится к измерению порогового расстояния  $a_{cr}$ , начиная с которого происходит разрушение мейснеровского состояния.

### 3.3.2. Описание экспериментальной установки и характеристики образцов

Эксперименты по измерению критической плотности тока распаривания  $j_c$ , соответствующей подавлению поверхностного энергетического барьера для проникновения вихрей, проводились на тонких  $c$ -ориентированных пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , выращенных на подложках  $\text{NdGaO}_3$ . Было выбрано четыре тонкопленочных образца  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  размером  $20 \text{ мм} \times 20 \text{ мм}$  и толщиной порядка  $850 \text{ \AA}$ . Исследуемые пленки имели следующие параметры:  $T_{c0} \simeq 84 \div 86 \text{ K}$ , ширина резистивного перехода  $1 \div 2 \text{ K}$ , низкое СВЧ сопротивление  $10^{-4} \div 10^{-3} \text{ Ом}$  (на  $10 \text{ ГГц}$  при  $77 \text{ K}$ ), довольно высокая плотность тока пиннинга  $j_p(77\text{K}) = 10^5 \div 10^6 \text{ A/см}^2$ , сопротивление в нормальном состоянии  $\rho_n \sim 100 \text{ мкОм} \cdot \text{см}$  (при  $90 \text{ K}$ ).

Экспериментальная установка для изучения температурной зависимости  $j_c(T)$

представляла собой медный столик с массивным основанием, погруженным в жидкий азот (рис. 30). Исследуемая пленка помещалась на столик, под которым на стержне был помещен нагреватель. Температура образца определялась по изменению сопротивления термодатчика, который находился рядом с пленкой на поверхности столика; точность измерения температуры составляла  $10^{-2}$  К. Стабилизация заданной температуры обеспечивалась терморегулятором, который создавал баланс между подводимым и отводимым теплом, управляя током, текущим через нагреватель; точность стабилизации температуры — не хуже  $10^{-2}$  К.

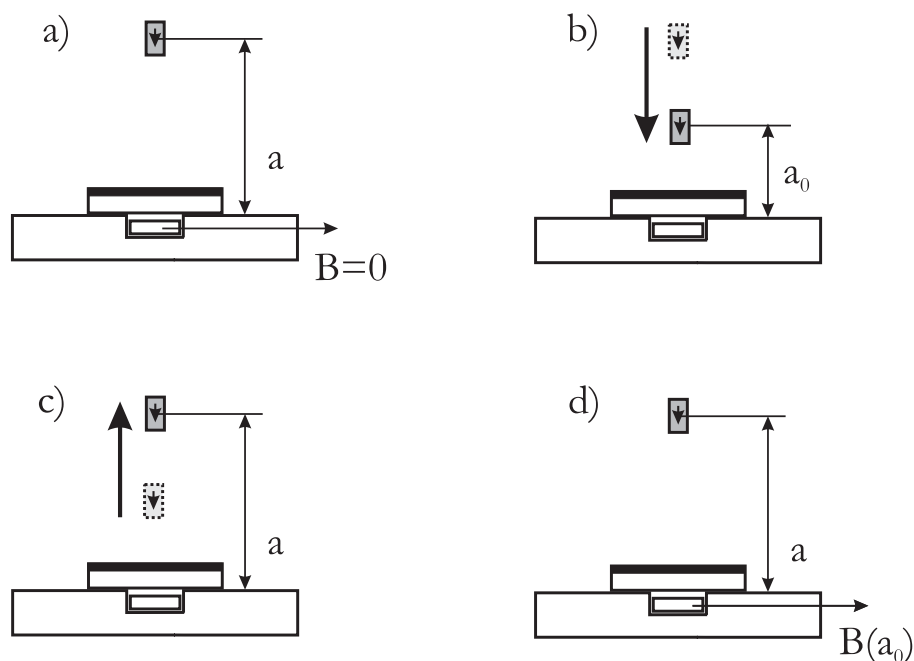
В качестве микромагнита использовалась частица  $\text{SmCo}_5$  размером  $300 \text{ мкм} \times 300 \text{ мкм} \times 500 \text{ мкм}$ . Благодаря вытянутой форме микромагнита магнитный момент частицы был ориентирован вдоль длинной оси, что также было подтверждено прямыми измерениями полей рассеяния. Магнитный момент частицы  $m_0 \sim 6.7 \cdot 10^{-3} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$  был определен по результатам измерения полей рассеяния на больших расстояниях от частицы. Характеристики вихревой структуры, образующейся в сверхпроводящей пленке в поле микромагнита, измерялись двумя одинаковыми датчиками Холла на основе пленок  $\text{InSb}$  с размером рабочей области  $50 \text{ мкм} \times 100 \text{ мкм}$ . Сканирующий датчик Р1 располагался над поверхностью пленки на расстоянии  $250 \text{ мкм}$  и использовался для измерения пространственной зависимости  $B_z(x, y)$  при  $T = 77 \text{ К}$ . Неподвижный датчик Холла Р2 находился под пленкой точно под микромагнитом и использовался для измерения остаточной намагниченности. Пространственное разрешение датчиков в плоскости  $(x, y)$  определялось расстоянием от датчиков до пленки:  $R_{H1} \simeq 100 \text{ мкм}$  и  $R_{H2} \simeq 700 \text{ мкм}$ .

### 3.3.3. Экспериментальные результаты и обсуждение

Эксперимент проводился в интервале температур от  $77 \text{ К}$  до  $T_{c0}$ , в диапазоне расстояний между центром микромагнита и поверхностью  $150 \text{ мкм} < a_0 < 4000 \text{ мкм}$  для каждого образца. Процедура измерения остаточной намагниченности, возникающей в пленке в поле микромагнита, состояла в следующем (рис. 31a). Ненамагниченная пленка охлаждалась до фиксированной температуры  $T < T_{c0}$ , которая поддерживалась с точностью до  $0.01 \text{ К}$ . Микромагнит, первоначально располагавшийся далеко от пленки, опускался до некоторой высоты  $a_0$  (рис. 31b), которая измерялась микрометром, затем вновь поднимался до первоначального уровня (рис. 31c). После этого неподвижным датчиком Холла Р2 измерялось магнитное поле, которое можно было считать собственным полем пленки (рис. 31d). Многократным повторением описанной процедуры нами были получены зависимости величины остаточной намагниченности от расстояния  $a_0$  до микромагнита для каждого образца при различных фиксированных температурах. Перечислим главные особенности наших результатов:

- вихревые линии проникают в образец через поверхность пленки, а не с краев;



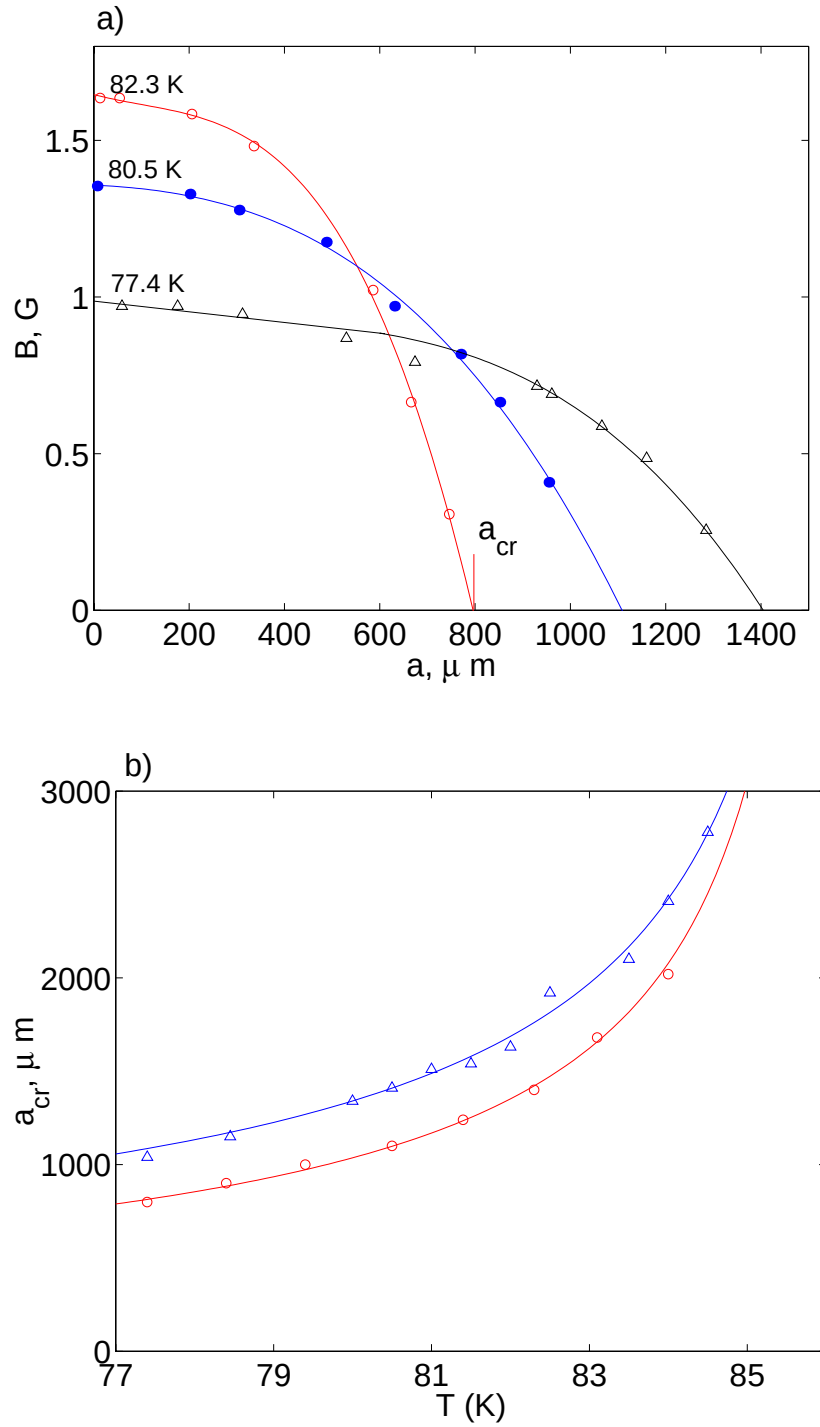


**Рис. 31.** Методика измерения энергетического барьера для проникновения вихрей при фиксированной температуре:

- a) — микромагнит расположен на достаточно большом расстоянии от пленки; в пленке реализуется мейснеровское состояние;
- b) — микромагнит опускается до некоторой высоты  $a_0$ ;
- c) — микромагнит возвращается на прежнюю высоту;
- d) — производится измерение магнитного поля, создаваемого пленкой.

- результирующее распределение вихрей имеет области с положительной и отрицательной компонентой  $B_z$ ; максимум абсолютной величины  $B_z$  возрастает с уменьшением  $a_0$ ;
- обнаружено существование критического расстояния  $a_{cr}$ , которое соответствует началу вхождения вихрей в сверхпроводник (рис.32a): при  $a_0 > a_{cr}$  остаточная намагниченность отсутствует, что соответствует мейснеровскому состоянию, вихревое состояние образуется только при  $a_0 < a_{cr}$ ;
- критическое расстояние  $a_{cr}$  увеличивается с ростом температуры  $T$  (рис.32b);
- критическая температура перехода Березинского–Костерлица–Таулеса, оцениваемая по формуле (2.3), для наших образцов лежит за пределами диапазона рабочего диапазона температур ( $T = 0.89 \div 0.98 T_{c0}$ ,  $T_{ВКТ} \geq 0.99999 T_{c0}$ ). Это указывает на то, что вихревые пары вихрь–антивихрь действительно рождаются благодаря присутствию микромагнита, а не флуктуационным образом.

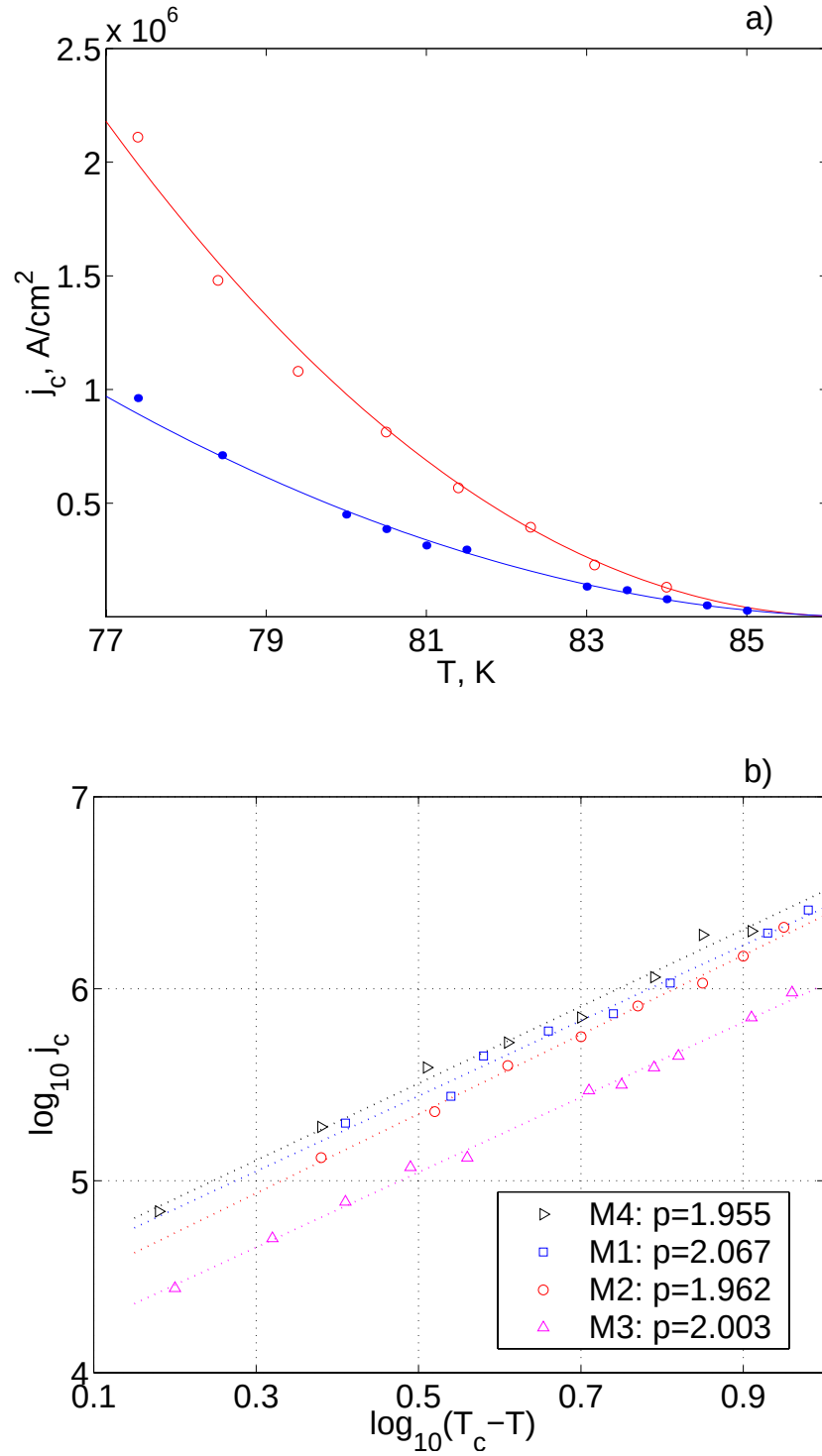
Для повышения точности измерений критического расстояния  $a_{cr}$  (в присутствии шумов, соответствующих неточности измерения магнитного поля  $\sim 0.1$  Гс), значение  $a_{cr}$  определялось экстраполяцией захваченного поля  $B$  от расстояния  $a_0$  к значению  $B = 0$  (рис. 32a). Температурные зависимости  $a_{cr}(T)$  (рис. 32b) хорошо



**Рис. 32.**

а): Зависимость остаточного поля  $B_z$  в центре пленки как функция минимального расстояния  $a_0$  между магнитной частицей и пленкой, измеренная при различных температурах:  $T = 77.4$  К ( $\circ$ ),  $T = 80.5$  К ( $\bullet$ ),  $T = 82.3$  К ( $\triangle$ ).

б): Температурная зависимость критической высоты  $a_{cr}$  для образцов М1 ( $\circ$ ) и М4 ( $\triangle$ ). Сплошные линии представляют аппроксимацию экспериментальных данных степенным законом:  $a_{cr} \propto (T_{c0} - T)^n$ , где  $T_{c0} = 86.4$  К,  $n = -0.69$  для образца М1 и  $T_{c0} = 86.6$  К,  $n = -0.64$  для образца М4.



**Рис. 33.**

а): Температурная зависимость эффективной критической плотности тока распаривания для образцов М1 (○) и М4 (●). Сплошные линии представляют аппроксимацию экспериментальных данных степенным законом:  $j_c \propto (T_{c0} - T)^p$ , где  $T_{c0} = 86.4\text{K}$ ,  $p = 2.067$  для образца М1 и  $T_{c0} = 86.6\text{K}$ ,  $p = 1.955$  для образца М4.

б): Зависимости  $j_c(T)$  в двойном логарифмическом масштабе.

аппроксимируются степенным законом  $a_{cr} \propto (T_{c0} - T)^n$ ; для всех образцов показатель степени  $n \simeq -0.6 \div 0.7$ .

Используя выражение (2.33), описывающее пространственную зависимость мейсснеровского тока в тонкой пленке ( $d_s \ll \lambda_{ab}$ ) в поле микромагнита, и экспериментальные зависимости  $a_{cr}(T)$ , мы можем оценить значение критической плотности тока распаривания

$$j_c(T) = \max |j_\varphi^{fm}(r, z)| = |j_\varphi^{fm}(a_{cr}/2, 0)| = -\frac{3 c m_0}{2\pi d_s} \frac{1}{(5/4)^{5/2} a_{cr}^3}, \quad (3.14)$$

соответствующего началу проникновения вихрей,  $\lambda_{ab}$  — эффективная глубина проникновения для рассматриваемой ориентации магнитного поля относительно кристаллографических осей пленки. На рис. 33 представлены типичные зависимости  $j_c(T)$ . Обратим внимание на некоторые важные особенности полученных результатов:

- для всего диапазона температур от 77 К до  $T_{c0}$  обнаружено, что  $j_c \ll j_{GL}$  ( $j_{GL}$  — критическая плотность тока распаривания Гинзбурга–Ландау, необходимая для подавления поверхностного барьера в идеальных образцах; при  $T = 77$  К  $j_c/j_{GL} \sim 10^{-2}$ ). Таким образом, наши результаты согласуются с данными работ [16, 48, 56, 60], где обнаружена экстремально малая величина барьера БЛ для вхождения вихревых линий в образцы  $YBa_2Cu_3O_7$ ;
- для температур, близких к  $T_{c0}$ , экспериментальные данные хорошо аппроксимируются зависимостью  $j_c \sim (T_{c0} - T)^p$ , где  $p \simeq 2$  (см. также табл. 1, где приведены основные параметры исследованных образцов).

| Номер пленки | $T_{c0}$ | $j_c(77K)$                         | $j_p(77K)$                          | $p$             |
|--------------|----------|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| М1           | 86.4K    | $2.2 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup> | $0.8 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup>  | $2.07 \pm 0.05$ |
| М2           | 86.9K    | $2.6 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup> | $0.85 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup> | $2.00 \pm 0.05$ |
| М3           | 85.5K    | $2.0 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup> | $0.95 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup> | $2.00 \pm 0.05$ |
| М4           | 86.6K    | $1.0 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup> | $0.7 \cdot 10^6$ А/см <sup>2</sup>  | $1.96 \pm 0.05$ |

**Табл.1.** Характеристики образцов

Обсудим теперь возможные причины наблюдаемого нами сильного подавления барьера БЛ. Подавление барьера безусловно может быть связано с шероховатостью и поверхностными дефектами. Такой механизм, как показано в главе 1, действительно снижает критическое поле проникновения первых вихрей:  $H_{en} \sim \gamma H_{en}^p$ , где  $\gamma < 1$ , но дефекты поверхности не могут обеспечить  $\gamma \sim 10^{-2}$ , соответствующее экспериментальным данным. Кроме этого, подавление барьера за счет шероховатостей поверхности, на наш взгляд, не может объяснить необычный вид температурной зависимости  $j_c \propto (T_{c0} - T)^2$ . Термоактивационный механизм также не может обеспечить требуемую температурную зависимость  $j_c(T)$ , поскольку

после разложения выражения (1.11) в ряд по степеням  $(T_{c0} - T)$  получаем слагаемые вида  $(T_{c0} - T)^{3/2+n}$ , где  $n$  — целое.

Низкий барьер может быть объяснен в рамках модели гранулированной джозефсоновской среды, при этом роль джозефсоновских контактов могут играть, например, границы зерен. Эффективный критический ток распаривания в такой модели по порядку величины есть джозефсоновский критический ток между гранулами, который намного меньше  $j_{GL}$ . Следуя работе [149], в которой предложена модель гранулированной джозефсоновской среды, определим эффективную глубину проникновения магнитного поля следующим образом:

$$\lambda_{ab}^2 = \frac{c\Phi_0}{16\pi^2\mu l j_c}, \quad (3.15)$$

где  $l$  — размер сверхпроводящей гранулы,  $\mu$  — эффективная магнитная проницаемость среды, связанная с отношением  $\lambda/l$  (для  $\lambda/l \sim 1$  мы имеем  $\mu < 1$ ). Учитывая, что  $\lambda(77K) \sim 2000 \text{ \AA}$ ,  $l \sim 0.5$  мкм,  $j_c = 2 \cdot 10^6 \text{ A/\AA}^2$  получаем  $\lambda_{ab} \sim l$ . Легко видеть, что при температурах  $T > 77$  К справедливо соотношение  $\lambda_{ab} > l$ , поэтому для описания пленки может быть применима простая модель [149], основанная на усредненном по масштабу  $l$  функционале свободной энергии. Заметим, что эффективная глубина проникновения  $\lambda_{ab} \sim l$  действительно превышает толщину пленки:  $d_s/\lambda_{ab} \leq 0.2$  при всех температурах от 77 К до  $T_{c0}$ , поэтому наше предположение о том, что исследуемые пленки можно считать тонкими, является справедливым.

Вид температурной зависимости  $j_c(T)$  определяется свойствами межгранульного интерфейса. Так для джозефсоновской среды, состоящей из сверхпроводящих гранул с  $s$ -типом спаривания, разделенных диэлектрическими прослойками (S/I/S контакт), джозефсоновский критический ток вблизи  $T_{c0}$  имеет следующую температурную зависимость [150]:  $j_c \sim (T_{c0} - T)$ . Отличие наблюдаемой зависимости  $j_c \sim (T_{c0} - T)^2$  от характеристики S/I/S контакта указывают на существенное подавление модуля параметра порядка на границах гранул. Этот вывод, а также наблюдаемая нелинейная зависимость  $j_c(T)$  вблизи  $T_{c0}$ , находятся в согласии с результатами работы [151], в которой оценка джозефсоновского межгранульного тока проводилась на основе измерений магнитной восприимчивости поликристаллических  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  пленок. Довольно высокое удельное сопротивление исследуемых нами пленок в нормальном состоянии  $\rho_{ab}(90K) \simeq 100$  мкОм·см, значительно превышающее удельное сопротивление хороших металлов, может служить указанием на S/I/S тип джозефсоновской среды. Поэтому если исключить возможность существования контактов сверхпроводник–нормальный металл–сверхпроводник (S/N/S контакт) в  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  пленках, то полученные нами результаты указывают на анизотропный  $d$ -тип спаривания в гранулах, возможность реализации которого в ВТСП активно обсуждается в последнее время (см., например, монографию [1] и приведенные в ней ссылки).

### 3.3.4. Сравнение результатов расчета параметров вихревых структур, образующихся в пленках в поле микромагнита, с данными эксперимента

Представляет интерес сравнить результаты расчета параметров вихревых структур, полученные в главе 2, с данными эксперимента. Напомним, что статическая вихревая структура должна иметь вид двух концентрических вихревых колец. Проблема состоит в том, что теоретический подход, в рамках которого получены характеристики вихревых колец, справедлив только на пороге генерации вихревых пар, то есть вблизи критической высоты  $a_{\text{cr}} - a_0 \ll a_{\text{cr}}$ , когда полное число вихрей слишком мало для создания приемлемого для измерения уровня магнитного поля. Нами предпринимались попытки прямого обнаружения кольцеобразной структуры, однако из-за пространственной неоднородности (гранулированности) пленки, а также из-за неточной ориентации микромагнита нам не удалось обнаружить аксиально симметричное распределение в виде двух разделенных вихревых колец.

Косвенным методом проверки может служить вычисление температурной зависимости наклона  $dB_z/da|_{T_{c0}}$  при  $a = a_{\text{cr}}$ , используя экспериментальную зависимость  $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(T)$  и представления о параметрах формирующейся вихревой структуре. В силу того, что вблизи порога генерации образуется два узких кольца вихрей ( $w_{1,2} \ll r_{1,2}$ ), для нахождения создаваемого пленкой магнитного поля концентрацию вихрей приближенно можно брать в виде

$$n(r) = \frac{N}{2\pi r} (\delta(r - r_1) - \delta(r - r_2)),$$

где  $N$  — полное число вихрей каждого знака.

Запишем выражение для  $z$ -компоненты магнитного поля, создаваемого изолированным пирловским вихрем

$$\begin{aligned} B_z^{(1)}(r, z) &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_0^\infty q J_0(rq) \frac{e^{-q|z|} dq}{1 + 2q\lambda_{\text{eff}}} = \\ &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{|z|}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\Phi_0}{\pi} \lambda_{\text{eff}} \frac{(2|z|^2 - r^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}} + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Заметим, что первое слагаемое в выражении (3.16) является доминирующим, поскольку  $|z|/\lambda_{\text{eff}} \gg 1$ . Полное магнитное поле  $B_z$ , создаваемое системой тонких колец из  $N$  вихрей, в центре колец на расстоянии  $|z|$  от поверхности пленки равно

$$B_z = \frac{N\Phi_0}{2\pi} \left\{ \frac{|z|}{(r_1^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{|z|}{(r_2^2 + z^2)^{3/2}} \right\}.$$

В эксперименте магнитное поле измеряется неподвижным датчиком Холла Р2, находящимся под пленкой на расстоянии  $|z| \sim 700$  мкм). Используя экспериментальные данные о температурных зависимостях  $a_{\text{cr}}(T)$ ,  $j_p(T)$  и  $j_c(T)$  и выражения (2.56) – (2.57), мы вычислили температурную зависимость  $B'_z(T)$

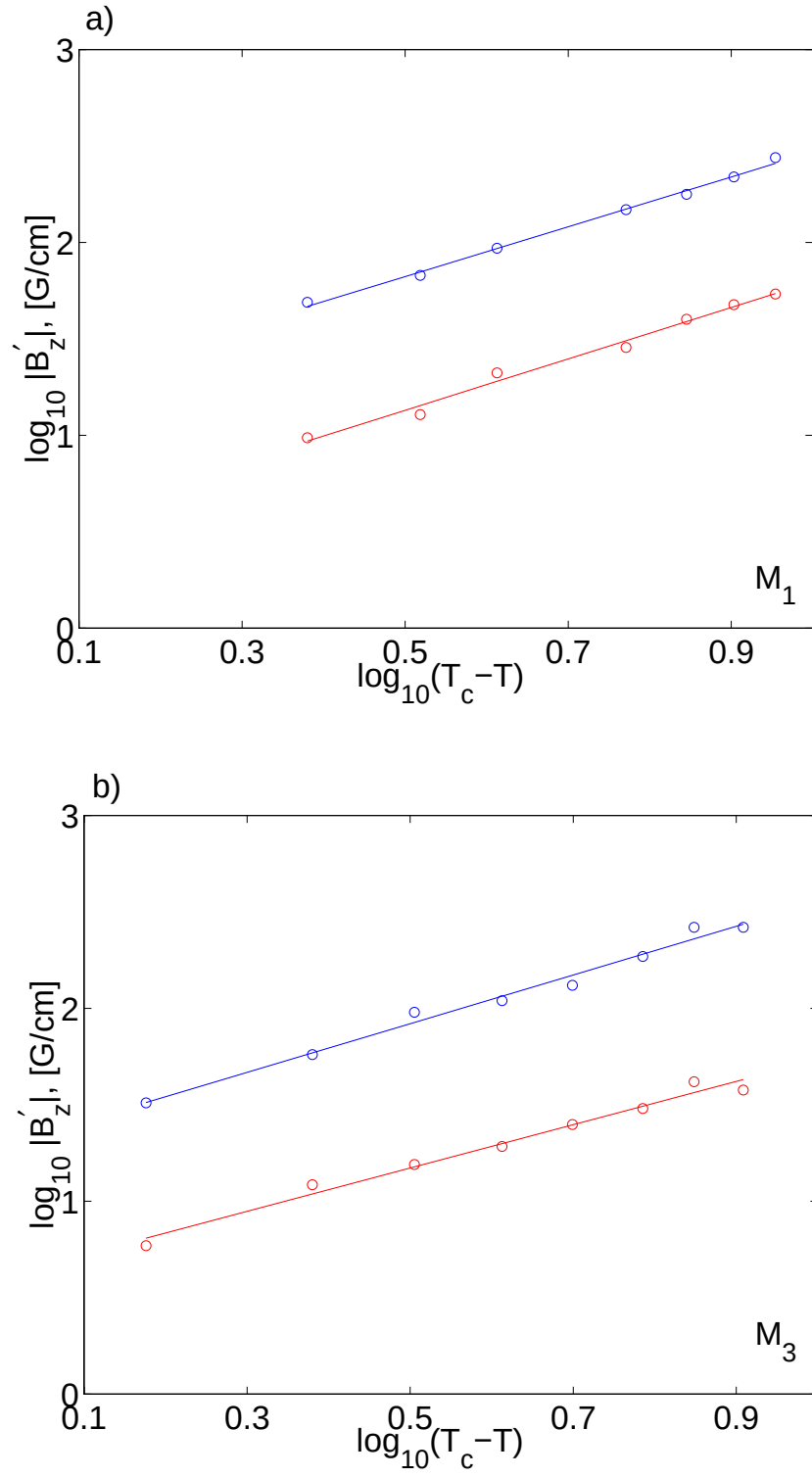


Рис. 34. Температурные зависимости  $B'_z = dB_z/da$  при  $a = a_{\text{сг}}$  для образцов М1 (а) и М3 (б) ( $\circ$  — эксперимент,  $\triangle$  — теория)

$$B'_z \equiv \left( \frac{dB_z}{da} \right) \Big|_{a=a_{cr}} = -\frac{9m_0|z|}{1.25^{5/2}8a_{cr}^2} \times \left\{ \frac{1}{(r_1^2(j_p/j_c) + |z|^2)^{3/2}} - \frac{1}{(r_2^2(j_p/j_c) + |z|^2)^{3/2}} \right\} \quad (3.17)$$

Как видно из рис. 34, температурная зависимость  $B'_z(T)$  демонстрирует хорошее согласие теоретических расчетов с экспериментальными данными. Сдвиг по оси ординат на рис. 34, не зависящий от температуры, может быть связан либо с ошибкой измерения абсолютной высоты  $|z|$  между пленкой и неподвижным датчиком Холла, либо с ошибкой определения магнитного момента частицы  $m_0$ .

### 3.4. Исследование корреляции между транспортными и нелинейными СВЧ характеристиками

#### 3.4.1. Обзор экспериментальных методов определения верхнего критического поля

Известно множество экспериментальных способов измерения верхнего критического поля  $H_{c2}$  и исследования его температурной зависимости (см. обзор [22] и приведенные в нем ссылки). Коротко обсудим принципиальные основы и возможности различных методов определения  $H_{c2}$ .

Наиболее распространенным способом является измерение сдвига температурной зависимости удельного сопротивления в область меньших температур при увеличении магнитного поля. Этот способ особенно оправдан для низкотемпературных сверхпроводников, когда сверхпроводник обладает малой шириной перехода и сдвиг кривой  $\rho(T)$  происходит параллельно без изменения формы перехода. В этих случаях величина  $dT_c/dH_0$  практически не зависит от уровня сопротивления, по которому производится измерение критической температуры. Для высокотемпературных сверхпроводников и низкотемпературных сверхпроводников плохого качества магнитное поле сильно размывает резистивный переход, делая такую простую процедуру определения критической температуры неоднозначной и зависящей от уровня измерения  $\rho/\rho_n$ . Уширение перехода в магнитном поле обычно связывают с течением магнитного потока, плавлением вихревой решетки и т.п. В настоящее время нет общепризнанных соображений, позволяющих выбирать правильный уровень сопротивления  $\rho/\rho_n$ . Считается, что более или менее правильные значения  $H_{c2}$ , согласующиеся с результатами магнитных измерений, можно получить при выборе  $\rho/\rho_n = 0.8 \div 0.9$ . Следует отметить, что для практических грубых оценок можно использовать и другие уровни сопротивления, наиболее часто используются значения  $\rho/\rho_n = 0.1, 0.5, 0.9$ . Альтернативным способом обработки данных резистивных измерений с целью получения истинной  $T_c$  в магнитном поле, лишенным указанной неоднозначности, является анализ флуктуационной проводимости при  $T > T_c$ .



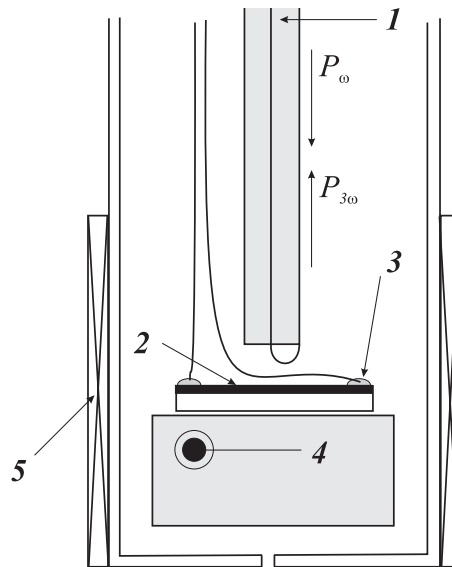
Более достоверным методом определения  $H_{c2}$  является исследование не кинетических свойств, а термодинамических характеристик сверхпроводящего состояния в магнитном поле. Метод основан на измерении обратимого магнитного момента образца и определении критических полей и температур, соответствующих состоянию  $M = 0$ . Теория ГЛ предсказывает линейную зависимость  $M$  от  $H_0$ :  $M \propto (H_0 - H_{c2})$ , однако в реальных экспериментах в непосредственной близости от  $T_{c0}$  зависимость  $M(H)$  может искажаться, что может быть вызвано сверхпроводящими флуктуациями. Несмотря на крайнюю простоту интерпретации результатов измерений, использование метода сопряжено с техническими трудностями, в частности, с необходимостью точного измерения очень малого магнитного момента. Другим вариантом исследования термодинамических характеристик сверхпроводника является измерение скачка теплоемкости при переходе образца в сверхпроводящее состояние:  $\Delta C \propto (dH_{c2}/dT)_{T_c}^2$ . Несмотря на большие принципиальные возможности, метод измерения теплоемкости требует сложной экспериментальной аппаратуры и кристаллов большого размера.

Прочими методами оценки  $H_{c2}(T)$  являются методы пиннинга (измерение полевой зависимости критического тока пиннинга  $j_p \propto (H_0/H_{c2})^p (1 - H_0/H_{c2})^q$  [26] на основе транспортных, вибрационных или магнитных измерений) и методы комбинационного рассеяния света.

### ***3.4.2. Оценка верхнего критического поля в пленках Nb на основе нелинейных СВЧ измерений***

Удобным практическим способом определения температурной зависимости верхнего критического поля в сверхпроводниках, в том числе и в неоднородном магнитном поле, может служить методика, разработанная в ИФМ РАН под руководством В. В. Курина и Ю. Н. Ноздрина [153]. Основная идея метода состоит в регистрации третьей гармоники СВЧ сигнала  $P_{3\omega}$ , возникающей при отражении электромагнитной волны от сверхпроводящей пленки, и проведении измерений  $P_{3\omega}$  как функции внешнего магнитного поля  $H_0$  и температуры  $T$  при постоянном уровне падающего излучения.

Одним из основных экспериментальных результатов исследования нелинейного отклика сверхпроводников (см. обзор [152]) является наблюдение довольно узкого пика нелинейности в температурной зависимости мощности третьей гармоники  $P_{3\omega}(T)$  в области температур близких к  $T_c$ . Для целого ряда сверхпроводников (таких как пленки, поликристаллы и монокристаллы  $YBa_2Cu_3O_7$ , пленки Nb, пленки Mo, многослойные структуры Mo/Si) было обнаружено [153, 154, 155], что при увеличении магнитного поля пик на зависимости  $P_{3\omega}(T)$  монотонно смещается в область низких температур. Такое поведение было естественно связать с подавлением критической температуры  $T_c$  внешним магнитным полем, при этом под критической температурой  $T_c^{nl}$  естественно понимать температуру исчезновения



**Рис. 35.** Схема экспериментальной установки для изучения нелинейного отклика: 1 — закороченный на краю коаксиальный кабель, 2 — пленка Nb, 3 — индиевые контакты для измерения электрического сопротивления, 4 — полупроводниковый термодатчик, 5 — соленоид со сверхпроводящими обмотками.

нелинейного отклика при увеличении температуры (то есть, уменьшения  $P_{3\omega}(T)$  до уровня нелинейности нормального металла). Конечно, точный критерий определения  $T_c^{\text{nl}}$  отсутствует, поскольку отсутствует теория нелинейного отклика, поэтому представляет интерес подтвердить эту гипотезу хотя бы экспериментально.

Экспериментальная установка (рис. 35) для проведения одновременного измерения нелинейных ( $P_{3\omega}(T)$ ) и транспортных характеристик ( $\rho(T)$ ) является модификацией установки, созданной Ю. Н. Ноздриным и Е. Е. Пестовым и описанной в работе [153]. Измерение температурной зависимости мощности третьей гармоники проведено совместно с Ю. Н. Ноздриным. В эксперименте СВЧ сигнал на частоте 472 МГц подавался в СВЧ зонд — коаксиальный кабель, закороченный на конце медной проволокой длиной 2 мм и диаметром 50 мкм, которая соединяла внешний и внутренние проводники коаксиального кабеля. При распространении СВЧ сигнала по кабелю происходило почти полное отражение от медной проволоки в силу того, что волновой импеданс коаксиального кабеля значительно превышал импеданс проволоки, при этом в медной проволоке возникал переменный ток высокой плотности. Этот высокочастотный ток создает неоднородное квазистационарное магнитное поле, локализованное на масштабах порядка размеров зонда ( $L_{\parallel} \sim 2$  мм,  $L_{\perp} \sim 0.05$  мм, где  $L_{\parallel}, L_{\perp}$  — продольные и поперечные масштабы локализации магнитного поля соответственно). При взаимодействии сильного высокочастотного поля с исследуемым образцом из-за нелинейных свойств сверхпроводника в спектре отраженного сигнала возникали высшие гармоники основной частоты, которые регистрировались тем же СВЧ зондом. Для предотвращения электрического

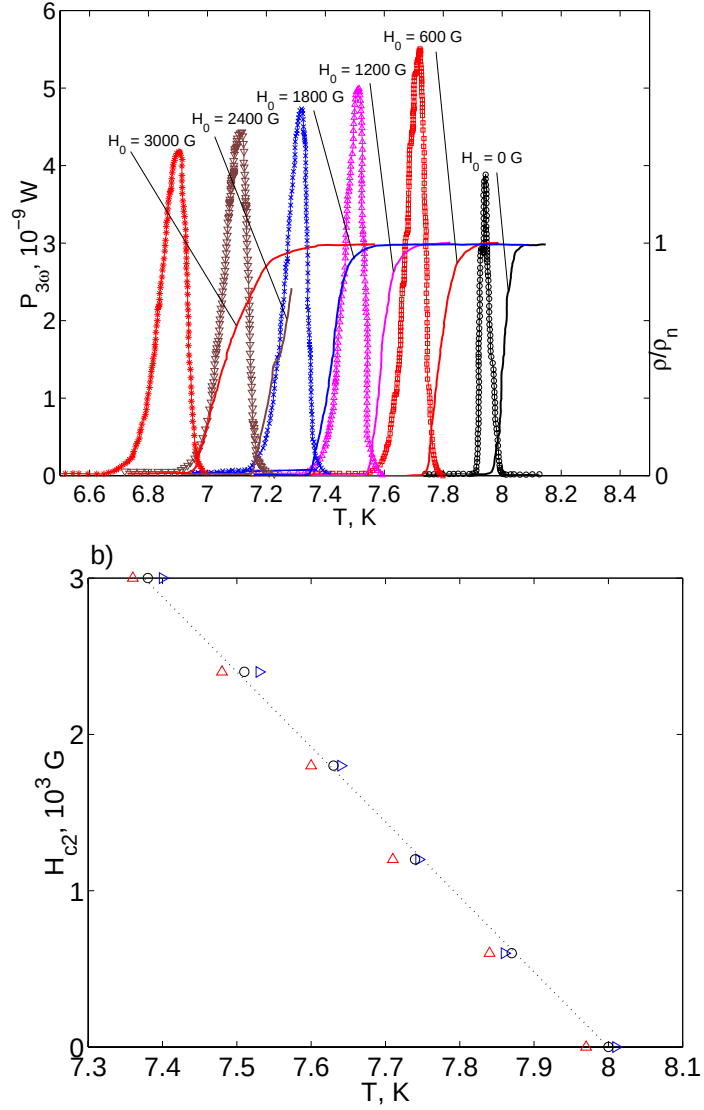
контакта зонда с исследуемым образцом, приводящего к генерации паразитного сигнала на частоте третьей гармоники, на образец помещалась изолирующая тефлоновая пленка толщиной 10 мкм. Уровень шумов (величина паразитного сигнала на третьей гармонике) составлял величину порядка  $10^{-13}$  Вт.

В качестве криостата использовался стандартный гелиевый дьюар СТГ-40, в горловину которого помещался измерительный модуль, представленный на рис. 35. Магнитное поле создавалось соленоидом со сверхпроводящими катушками (для предотвращения нагрева), коэффициент преобразования — 50 Гс/А. Измерение удельного сопротивления производилось по стандартной четырехзондовой схеме. Измерение температуры производилось полупроводниковым датчиком температуры, имеющим экспоненциальную чувствительность в области гелиевых температур и допускающим точность измерения температуры до  $10^{-4}$  К. Стабилизация температуры до  $10^{-2} \div 10^{-3}$  К и постоянная скорость развертки по температуре порядка  $10^{-3}$  К/сек при измерениях в парах гелия от 4.2 К до 10 К осуществлялась тонкой регулировкой интенсивности потоков газообразного гелия через выходные вентили.

В ходе измерений было обнаружено, что для пленок Nb температура  $T_c^{\text{nl}}$ , соответствующая исчезновению нелинейного сигнала (уменьшению  $P_{3\omega}$  до уровня шумов) действительно линейно уменьшалась при увеличении внешнего магнитного поля в области полей до 3 кГс. Следует подчеркнуть, что температура  $T_c^{\text{nl}}$  совпадает с критической температуры  $T_c^{\text{res}}$ , полученной из резистивных измерений (рис. 36). Такая корреляция сохраняется и при наличии внешнего магнитного поля:  $T_c^{\text{nl}}(H_0) \simeq T_c^{\text{res}}(H_0)$ . На основании этого можно сделать вывод, что по крайней мере для Nb образцов зависимость  $T_c^{\text{nl}}(H_0)$  дает правильное представление о полевой зависимости локальной критической температуры или, иными словами, о температурной зависимости верхнего критического поля. Используя экспериментально измеренную зависимость  $(dH_{c2}/dT)_{T_{c0}}$ , можно получить оценку верхнего критического поля  $H_{c2}(0)$  и длину когерентности  $\xi_0$  по экстраполяционной формуле Вертхамера–Гельфанда–Хоэнберга [1], полученную для модели БКШ со слабой связью:

$$H_{c2}(0) \simeq 0.7 \left( \frac{dH_{c2}}{dT} \right)_{T_{c0}} T_{c0}, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi H_{c2}(0)}}. \quad (3.18)$$

Применимость теории Вертхамера–Гельфанда–Хоэнберга (3.18) для описания верхнего критического поля в Nb подтверждена отдельной серией резистивных измерений в более сильных магнитных полях (до 20 кГс). Для образца, представленного на рис. 36, имеем:  $T_{c0} \simeq 8$  К,  $(dH_{c2}/dT)_{T_{c0}} \simeq 3$  кГс/К,  $H_{c2}(0) \simeq 16.8$  кГс,  $\xi_0 = \sqrt{\Phi_0/2\pi H_{c2}(0)} \simeq 138$  Å. Заметим, что полученная длина когерентности значительно меньше длины когерентности в чистом Nb:  $\xi_p \simeq 380$  Å, что может интерпретировано как влияние примесей. Представляет интерес получить оценку длины свободного пробега:  $l = \xi_d^2/\xi_p \simeq 51$  Å, при этом отношение  $l/\xi_p$  может служить



**Рис. 36.** (цветной)

а) Температурные зависимости мощности третьей гармоники  $P_{3\omega}(T, H_0)$  и удельного сопротивления  $\rho(T, H_0)$  для пленки Nb толщиной 1000 Å при различных значениях внешнего магнитного поля  $H_0$  (указаны на рисунке);

б) Верхнее критическое поле, полученное по данным резистивных измерений по уровням  $0.1 \rho/\rho_n$  ( $\triangle$ ) и  $0.5 \rho/\rho_n$  ( $\triangleright$ ); и по данным нелинейных измерений по уровню  $0.01 P_{3\omega}^{\max}$  ( $\circ$ ).

мерой качества сверхпроводящих образцов.

Была предпринята попытка обнаружить соответствие между  $T_c^{\text{nl}}$  и  $T_c^{\text{res}}$  для образцов  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . Однако из-за большого наклона  $(dH_{c2}/dT)_{T=T_c} \approx 10 \text{ кГс/К}$  [1, 156], сдвиг критических температур  $\Delta T_c^{\text{nl}}$  и  $\Delta T_c^{\text{res}}$  для пленок и керамических образцов в перпендикулярном магнитном поле в полях до 3 кГс должен быть меньше точности измерений температуры в соответствующей экспериментальной установке, ( $\Delta T_c < 10^{-3} \div 10^{-2} \text{ К}$ ).

Таким образом, изучение нелинейных свойств сверхпроводников является

хорошей методикой бесконтактной экспресс-диагностики качества сверхпроводящих образцов и оценки ряда важных параметров, таких как локальная критическая температура, температурная зависимость верхнего критического поля, длина когерентности, длина свободного пробега (при наличии данных о верхнем критическом поле в чистых образцах). Мы полагаем, что этот метод также пригоден для экспериментального исследования локализованной сверхпроводимости (см. раздел 2.2).

### 3.5. Выводы к главе 3

Приведем основные результаты, полученные в данной главе

- Проведенный анализ опубликованных в литературе экспериментальных данных по измерению полей проникновения магнитного потока в монокристаллы ВТСП указывает на то, что при  $T \sim T_c$  поверхностная шероховатость монокристаллов не может обеспечить крайне низкие значения критических полей входа, наблюдаемые в эксперименте.
- Получено пространственное распределение плотности сверхпроводящего тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ , возникающего в тонкой сверхпроводящей пленке после намагничивания в перпендикулярном магнитном поле. Показано, что профиль тока в значительной мере определяется формой и размером образца, а также качеством прикраевой области.
- Обнаружено сильное подавление плотности тока в центральной части образца, при этом характерные пространственные масштабы провала плотности тока не зависят ни от размера, ни от формы образца, ни от высоты, на которой производится измерение магнитного поля. Подавление плотности тока в центральной области может указывать на важную роль термоактивированной релаксации магнитного потока в ВТСП для описания токового состояния в сверхпроводящих образцах.
- На основе оригинальной методики, использующей микромагнит в качестве источника неоднородного магнитного поля, определена критическая плотность тока распаривания в пленках  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , соответствующая локальному подавлению энергетического барьера для проникновения магнитного потока. Проведенные эксперименты на эпитаксиальных  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  пленках показали, что энергетический барьер для создания вихрей (при ориентации поля параллельно плоскостям  $\text{CuO}$ ) аномально мал:  $j_c/j_{GL} \sim 10^{-2}$ ; где  $j_c$  — эффективная критическая плотность распаривания,  $j_{GL}$  — плотность тока распаривания Гинзбурга-Ландау.
- Температурная зависимость эффективного тока распаривания  $j_c(T) \propto (T_{c0} - T)^2$  существенно отличается от температурной зависимости тока распаривания ГЛ  $j_{GL}(T) \propto (T_{c0} - T)^{3/2}$ , отвечающего за преодоление барьера БЛ в идеальных

образцах. Указанные факты могут быть интерпретированы в рамках модели джозефсоновской среды, при этом  $j_c(T)$  есть плотность межгранульного критического тока. Наблюдаемая температурная зависимость  $j_c(T)$  указывает на сильное подавление сверхпроводящего параметра порядка на межгранульных границах, что для наиболее вероятных границ раздела типа сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник свидетельствует в пользу анизотропного типа спаривания.

- Для пленок Nb экспериментально подтверждена возможность оценки температурной зависимости верхнего критического поля  $H_{c2}(T)$  на основе измерения локальных нелинейных свойств образцов. Показано, что в нулевом магнитном поле критическая температура  $T_c^{\text{res}}$ , определенная на основе резистивных измерений по уровню  $0.1 \div 0.5 \rho_n$  ( $\rho_n$  — удельное сопротивление пленки при  $T > T_c$ ), совпадает с критической температурой  $T_c^{\text{nl}}$  исчезновения нелинейного СВЧ отклика на третьей гармонике; обнаруженная корреляция  $T_c^{\text{res}} \simeq T_c^{\text{nl}}$  сохраняется и при наличии внешнего магнитного поля  $H_0$ .

## Заключение

В настоящей диссертации был рассмотрен ряд задач, имеющих как фундаментальный, так и непосредственный практический интерес.

На основе решения задачи о формировании смешанного состояния в поле магнитной частицы предсказан новый физический эффект: осцилляции критической температуры  $T_c(H_0)$  сверхпроводящей пленки большого размера. Зависимость параметров многоквантового сверхпроводящего зародыша от характеристик магнитной частицы (дипольного момента  $m_0$  и высоты  $a_0$ ) и внешнего магнитного поля  $H_0$  позволяет управлять шириной и местоположением сверхпроводящего наноканала, что представляет несомненный интерес для сверхпроводящей электроники в связи с возможностью манипуляции сверхпроводящими и вихревыми структурами.

Развитые теоретические представления о сценарии разрушения мейснеровского состояния в поле магнитного диполя и параметрах формирующейся вихревой структуры позволили применить новую бесконтактную методику для измерения температурной зависимости критического тока распаривания в тонких ВТСП пленках. Достоинством данной методики является то обстоятельство, что поле магнитной частицы на краях образца оказывается пренебрежимо малым и недостаточным для рождения вихрей на краях образца, в результате чего размеры образцов и плохо контролируемая структура прикраевых областей не оказывает существенного влияния на измеряемые в эксперименте характеристики. Обнаруженная крайне малая величина критического тока распаривания  $j_c$  по сравнению током распаривания Гинзбурга–Ландау  $j_{GL}$ , а также необычная температурная зависимость  $j_c(T) \propto (T_{c0} - T)^2$  указывают на сильное подавление параметра порядка на границах сверхпроводящих гранул, что для наиболее вероятных границ раздела типа сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник свидетельствует в пользу анизотропного  $d$ –типа спаривания. После модификации данная методика может быть в принципе использована для тестирования качества и низкотемпературных сверхпроводящих пленок при гелиевых температурах. Таким образом данная простая методика может быть использована для диагностики качества поверхности сверхпроводящих образцов и в качестве теста на наличие в реальных пленках сети сверхпроводящих гранул, связанных джозефсоновскими связями.

Как было отмечено во Введении, энергетические барьеры в сверхпроводниках (как для проникновения, и для движения вихрей) в значительной мере определяются совершенством структуры сверхпроводника. В диссертации выполнены расчеты влияния шероховатости поверхности на критическое поле подавления поверхностного барьера Бина–Ливингстона и на его температурную зависимость, что позволяет

интерпретировать результаты соответствующих экспериментов. На основе экспериментальных данных о распределении магнитного поля над образцом представлены оценки плотности тока, возникающего после намагничивания тонких пленок в перпендикулярном поле, и изучено влияние дефектов пленок на структуру захваченного магнитного потока и, соответственно, на оценку критического тока пиннинга.

В процессе работы над диссертацией возникли новые задачи и проблемы, которые было бы интересно решить в рамках дальнейшего развития темы представленной диссертационной работы:

1. Теоретический анализ подавления барьера БЛ на основе полной нелинейной системы уравнений ГЛ. В диссертации мы пренебрегли пространственной зависимостью параметра порядка, связанной с его подавлением в области с сильными токами, поэтому вблизи вершины клина учет слагаемых вида  $|\psi|^2$ ,  $|\psi|^4$  и  $(\nabla|\psi|)^2$  в энергию вихревой линии должен быть существенен. Для этой задачи подход де Жена [55] неприменим, поскольку  $|\psi|$  на вершине дефекта при сколь угодно слабом внешнем поле должно равняться нулю для устранения расходимости плотности тока на малых расстояниях. Это обстоятельство существенно затрудняет анализ данной задачи, поскольку условие разрушения мейсснеровского состояния не эквивалентно условию обращения в нуль модуля ПП на поверхности сверхпроводника. Точное аналитическое решение позволило бы детально исследовать вопрос о влиянии поверхностных дефектов, в том числе и включений нормального металла, на величину критического поля подавления барьера БЛ.

2. Экспериментальное наблюдение предсказанных осцилляций  $T_c(H_0)$  для сверхпроводящих пленок большого размера в поле магнитных частиц.

3. Теоретическое исследование особенностей полевой зависимости  $T_c(H_0)$  для сверхпроводящих пленок большого размера в неоднородном магнитном поле, имеющем замкнутые линии нулей  $B_z(x, y)$  произвольной симметрии. Также представляет интерес изучить процесс распада многоквантовых вихревых состояний при разрушении аксиальной симметрии неоднородной компоненты магнитного поля.

4. Теоретический расчет нелинейного СВЧ отклика мезоскопических и гибридных S/F систем. Поскольку нелинейный СВЧ отклик имеет острый пик вблизи  $T_c$ , то исследуя полевую и температурную зависимости мощности третьей гармоники  $P_{3\omega}(T, H_0)$ , можно попытаться обнаружить экспериментально переходы между многоквантовыми состояниями в таких системах, как тонкое сверхпроводящее кольцо и тонкостенный цилиндр в параллельном магнитном поле (геометрия классического эксперимента Литтла–Паркса), а также тонкая сверхпроводящая пленка в поле магнитных частиц.

5. Исследование транспортных свойств сверхпроводящих наноканалов, формирующихся в неоднородном магнитном поле, в частности, их вольт–амперные характеристик и флуктуационной проводимости.



6. Исследование природы подавления плотности тока в центре сверхпроводящих пленок. Для решения поставленной задачи необходима возможность моментального измерения распределения магнитного поля над образцом, например, магнитооптическими методами, что лежит за пределами экспериментальных возможностей автора диссертации. Измеренные зависимости  $B_z(x, y, t)$  позволили бы изучить динамику плотности тока  $\mathbf{J}(x, y, t)$  в реальных образцах. Применение магнитооптических методов позволило бы на два порядка уменьшить высоту  $h_0$ , на которой производится измерение магнитного поля, что сразу же увеличило бы разрешающую способность и дало возможность исследовать мелкомасштабную структуру токов.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить своего научного руководителя А. С. Мельникова за внимание, терпение и поддержку на всех этапах работы над диссертацией; а также всех сотрудников ИФМ РАН, совместная работа и общение с которыми сделали возможным появление настоящей диссертации, особенно

- С. В. Гапонова — за помощь и постоянный интерес к диссертационной работе;
- А. А. Андропова, Ю. Н. Ноздрина, А. А. Фраермана, В. В. Курина, И. Д. Токмана, А. В. Окомелькова, И. А. Шерешевского, А. В. Самохвалова, А. В. Чигинева и Д. А. Рыжова — за критические замечания и ценные советы при обсуждении результатов диссертации;
- Ю. Н. Ноздрина, В. А. Маркелова и Е. Е. Пестова — за помощь в подготовке экспериментальных установок и решении экспериментальных задач;
- А. К. Воробьева и А. Ю. Климова — за предоставление образцов для экспериментальных исследований.

Автор признателен И. Л. Максиму и Д. Ю. Водолазову (Нижегородский государственный университет) за дискуссии и полезные замечания. Автор хотел бы также поблагодарить семью и близких за внимание и поддержку во время работы над диссертацией.

## Приложение 1: Обращение сингулярных интегральных уравнений

Как известно [157], сингулярные интегральные уравнения I рода с постоянными коэффициентами вида

$$\int_a^b \frac{g(t)}{t-x} dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (\text{П1.1})$$

(где  $g(t)$  - неизвестная функция, удовлетворяющая условию Гельдера) имеют как решения, ограниченные внутри отрезка  $[a, b]$ , так и сингулярные решения, при которых функция может достигать бесконечных значений на концах отрезка  $[a, b]$ . Единственное регулярное решение  $y(t)$  определяется следующим выражением

$$g(t) = -\frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}}{\pi^2} \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{(b-x)(x-a)(x-t)}} dx, \quad (\text{П1.2})$$

которое существует при условии

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} dx = 0. \quad (\text{П1.3})$$

## Приложение 2: Расчет параметров вихревой структуры в поле микромагнита

В этом приложении мы рассчитаем параметры вихревой структуры, образующейся в поле микромагнита. Введем для удобства безразмерные переменные  $\rho_i = r_i/a_0$ ,  $i = \{0, 1, 2\}$ ;  $N_f = 4\pi m_0/(3\sqrt{3}a_0\Phi_0)$  и получим систему уравнений (2.50) – (2.54) в безразмерном виде

$$-\frac{\rho_0}{(\rho_0^2 + 1)^{5/2}} + \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \left( \frac{2}{\rho_0^2} + \frac{\rho_0}{\rho_2^3} \right) = -\frac{16\sqrt{5}}{125} \left( \frac{a_0}{a_{cr}} \right)^3, \quad (\text{П2.1})$$

$$-\frac{(1 - 4\rho_0^2)}{(\rho_0^2 + 1)^{7/2}} + \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \left( \frac{1}{\rho_2^3} - \frac{4}{\rho_0^3} \right) = 0, \quad (\text{П2.2})$$

$$\begin{aligned} \int_{\rho_1 - w_1/a_0}^{\rho_1 + w_1/a_0} \frac{4a_0^2 n_+(\rho')}{9\sqrt{3}N_f} \frac{d\rho'}{(\rho - \rho')} - \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} + \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \frac{\rho_1}{\rho_2^3} = \\ = -\frac{16\sqrt{5}}{125} \left( \frac{j_p}{j_c} \right), \quad \rho \in (\rho_1 - w_1/a_0, \rho_1 + w_1/a_0), \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

$$\begin{aligned} - \int_{\rho_2 - w_2/a_0}^{\rho_2 + w_2/a_0} \frac{4a_0^2 n_-(\rho')}{9\sqrt{3}N_f} \frac{d\rho'}{(\rho - \rho')} - \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} + \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \frac{2}{\rho_2^2} = \\ = -\frac{16\sqrt{5}}{125} \left( \frac{j_p}{j_c} \right), \quad \rho \in (\rho_2 - w_2/a_0, \rho_2 + w_2/a_0). \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Приведем уравнение (П2.3) к виду (П1.1), вводя вспомогательные функции  $g(\rho)$  и  $f(\rho)$ :

$$\begin{aligned} g(\rho) &= \frac{4a_0^2 n_+(\rho)}{N_f}, \\ f(\rho) &= \frac{\rho}{(\rho^2 + 1)^{5/2}} - \frac{16\sqrt{5}}{125} \frac{j_p}{j_c} - \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \frac{\rho_1}{\rho_2^3}. \end{aligned}$$

Для существования регулярного решения необходимо выполнение условия (П1.3), которое может быть приведено к следующему виду ( $y = \rho - \rho_1$ )

$$\int_{-w_1/a_0}^{w_1/a_0} \frac{f(y)dy}{\sqrt{(w_1/a_0)^2 - y^2}} = 0,$$

что для узких вихревых колец эквивалентно требованию, чтобы разложение  $f(y)$  по степеням  $y$  не содержало членов вида  $y^0$ :

$$f(y) = \left[ \frac{\rho_1}{(\rho_1^2 + 1)^{5/2}} - \frac{16\sqrt{5}}{125} \frac{j_p}{j_c} - \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \frac{\rho_1}{\rho_2^3} \right] + \frac{(1 - 4\rho_1^2)}{(\rho_1^2 + 1)^{7/2}} y + \dots$$

Для этого необходимо, чтобы слагаемое в квадратных скобках было равно нулю.

$$\frac{\rho_1}{(\rho_1^2 + 1)^{5/2}} - \frac{16\sqrt{5}}{125} \frac{j_p}{j_c} - \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \frac{\rho_1}{\rho_2^3} = 0 \quad (\text{П2.5})$$

Согласно уравнению (П1.2) пространственное распределение вихрей во внутреннем кольце может быть вычислено последующей формуле <sup>†</sup>

$$\begin{aligned} \frac{4\pi a_0^2}{9\sqrt{3}N_f} n_+(y) &= \frac{\sqrt{(w_1/a_0)^2 - y^2}}{\pi^2} \times \\ &\times \int_{-w_1/a_0}^{w_1/a_0} \frac{(1 - 4\rho_1^2)}{(\rho_1^2 + 1)^{7/2}} \frac{t dt}{\sqrt{(w_1/a_0)^2 - t^2} (t - y)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{(w_1/a_0)^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (\text{П2.6})$$

Рассматривая таким же образом уравнение (П2.4), получаем второе необходимое условие для существования регулярного решения

$$\frac{\rho_2}{(\rho_2^2 + 1)^{5/2}} - \frac{16\sqrt{5}}{125} \frac{j_p}{j_c} - \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{N}{N_f} \frac{2}{\rho_2^2} = 0 \quad (\text{П2.7})$$

и выражение, описывающее пространственное распределение антивихрей (при вычислении интегралов использовалось условие  $\rho_2 \gg 1$ ):

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a_0^2}{9\sqrt{3}N_f} n_-(y) &= \frac{\sqrt{(w_2/a_0)^2 - y^2}}{\pi^2} \times \\ &\times \int_{-w_2/a_0}^{w_2/a_0} \frac{(1 - 4\rho_1^2)}{(\rho_2^2 + 1)^{7/2}} \frac{t dt}{\sqrt{(w_2/a_0)^2 - t^2} (t - y)} = -\frac{4}{\pi\rho_2^5} \sqrt{(w_2/a_0)^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (\text{П2.8})$$

Найдем по теории возмущений решение уравнений (2.50), (2.51), (П2.5), (П2.7) вблизи порога генерации вихревых пар, считая  $a_0/a_{\text{cr}} = 1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Подставляя предполагаемые решения в следующем виде  $\rho_0 = \rho_0^{(0)} + \rho_0^{(1)}\varepsilon$ ,  $\rho_1 = \rho_1^{(0)} + \rho_1^{(1)}\varepsilon$ ,  $\rho_2 = \rho_2^{(0)} + \rho_2^{(1)}\varepsilon$ ,  $N/N_f = \nu\varepsilon$  и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , находим (мы используем предположение  $j_p \ll j_c$ ):

---

<sup>†</sup> При вычислении интегралов было использовано условие  $j_p \ll j_c$ , что позволяет считать  $\rho_1 \ll 1$ , а также следующие табличные интегралы

$$\int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \pi, \quad \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - y)} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{N}{N_f} &= \frac{1.673}{\left[1 + 0.024 (j_p/j_c)^{3/4}\right]} \left(1 - \frac{a_0}{a_{cr}}\right), \\
\rho_0 &= 0.5 - 0.468 \frac{\left[4 - 0.049 (j_p/j_c)^{3/4}\right]}{\left[1 + 0.024 (j_p/j_c)^{3/4}\right]} \left(1 - \frac{a_0}{a_{cr}}\right), \\
\rho_1 &= 0.286 \frac{j_p}{j_c} + \frac{0.012 (j_p/j_c)^{7/4}}{\left[1 + 0.024 (j_p/j_c)^{3/4}\right]} \left(1 - \frac{a_0}{a_{cr}}\right), \\
\rho_2 &= 1.367 \left(\frac{j_p}{j_c}\right)^{-1/4} - \\
&\quad - 0.057 \frac{(j_p/j_c)^{7/4} \left[7.48 - \sqrt{j_p/j_c}\right]}{\left[1 + 0.024 (j_p/j_c)^{3/4}\right] \left[1.86 + \sqrt{j_p/j_c}\right]^{7/2}} \left(1 - \frac{a_0}{a_{cr}}\right).
\end{aligned}$$

Интегрируя выражение (П2.6), описывающее пространственное распределение вихрей, находим ширину кольца вихрей  $w_1$ :

$$\begin{aligned}
N &= \int_{r_1-w_1}^{r_1+w_1} 2\pi r' n_-(r') dr' = \frac{9\sqrt{3}N_f}{2a_0} \int_{-w_1/a_0}^{w_1/a_0} (r_1 + a_0 y) \sqrt{(w_1/a_0)^2 - y^2} dy = \\
&= 9\sqrt{3}N_f \frac{r_1}{2a_0} \cdot \frac{\pi w_1^2}{2a_0^2}, \\
w_1^2 &= \frac{4a_0^3}{9\pi\sqrt{3}r_1} \frac{N}{N_f} = \frac{4a_0^3}{9\sqrt{3}r_1^{(0)}} \nu \left(1 - \frac{a_0}{a_{cr}}\right) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, получаем ширину кольца антивихрей (мы учитываем, что  $\rho_1^{(0)} \cdot \rho_2^{(0)4} = 1$ )

$$w_2^2 = \frac{r_2^4}{9\pi\sqrt{3}a_0^2} \frac{N}{N_f} = w_1^2/4.$$

## Список публикаций автора по теме диссертации

- I. Аладышкин А. Ю. *Поверхностный энергетический барьер для проникновения магнитного потока в сверхпроводник второго рода*/ А. Ю. Аладышкин, А. С. Мельников, Ю. Н. Ноздрин, И. Д. Токман, И. А. Шерешевский // Пятая нижегородская сессии молодых ученых, Н. Новгород, сборник тезисов докладов – 2000. – С. 17–18.
- II. Аладышкин А. Ю. *О влиянии поверхностных дефектов на подавление барьера Бина–Ливингстона в сверхпроводниках второго рода*/ А. Ю. Аладышкин, А. С. Мельников, И. Д. Токман, И. А. Шерешевский // XXXII совещание по физике низких температур, Казань, сборник тезисов докладов – 2000. – С. 27–28.
- III. Аладышкин А. Ю. *Энергетический барьер Бина–Ливингстона для сверхпроводника с шероховатой поверхностью: оценка предельного подавления*/ А. Ю. Аладышкин, А. С. Мельников, И. Д. Токман, И. А. Шерешевский // Шестая нижегородская сессия молодых ученых, Н.Новгород, сборник тезисов докладов – 2001. – С. 19–20.
- IV. Aladyshkin A. Yu. *What is the best gate for vortex entry into type-II superconductor?*/ A. Yu. Aladyshkin, A. S. Mel'nikov, I. A. Shereshevsky, I. D. Tokman // Preprint cond-mat/9911430 – 1999; Physica C – 2001. – Vol. 361. – P. 67–72.
- V. Aladyshkin A. Yu. *Little-Parks effect and multiquanta vortices in a hybrid superconductor-ferromagnet system*/ A. Yu. Aladyshkin, A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov // Preprint cond-mat/0302551 – 2003; J. Phys.: Condens. Matter – 2003. – Vol. 15. – P. 6591–6597.
- VI. Аладышкин А. Ю. *Влияние периодического магнитного поля на критическую температуру тонкой сверхпроводящей пленки*/ А. Ю. Аладышкин, П. П. Вышеславцев, А. С. Мельников, И. М. Нефедов, Д. А. Рыжов, А. В. Соколов, А. А. Фраерман, И. А. Шерешевский // XXXIII совещание по физике низких температур, Екатеринбург, сборник тезисов докладов – 2003. – С. 132–133.
- VII. Mel'nikov A. S. *Domain wall superconductivity in ferromagnetic superconductors and hybrid S/F structures*/ A. S. Mel'nikov, A. Yu. Aladyshkin, A. I. Buzdin, A. A. Fraerman, D. A. Ryzhov, A. V. Sokolov // 9<sup>th</sup> Joint Vortex Dynamics and Vortex Matter Workshop, Oleron, France, book of abstract – 2003. – P. 51.
- VIII. Аладышкин А. Ю. *О генерации пар вихрь-антивихрь в тонких сверхпроводящих пленках YBaCuO в поле малой ферромагнитной частицы*/ А. Ю. Аладышкин, А. К. Воробьев, П. П. Вышеславцев, Е. Б. Ключенков, А. С. Мельников, Ю. Н. Ноздрин, И. Д. Токман // XXXI совещание по физике низких температур,

- Москва, сборник тезисов докладов – 1998. – С. 271–272.
- IX. Аладышкин А. Ю. *Структура смешанного состояния, индуцированного в тонкой YBaCuO пленке полем малой ферромагнитной частицы*/ А. Ю. Аладышкин, А. К. Воробьев, П. П. Вышеславцев, Е. Б. Ключенков, А. С. Мельников, Ю. Н. Ноздрин, И. Д. Токман // ЖЭТФ – 1999. – Т. 116. – С. 1735–1749.
- X. Nozdrin Yu. N. *Experimental Investigation of a Local Mixed State Induced by a Small Ferroparticle in YBaCuO Films*/ Yu. N. Nozdrin, A. S. Mel'nikov, I. D. Tokman, P. P. Vysheslavitsev, A. Yu. Aladyshkin, E. B. Kluevnikov, A. K. Vorobiev // IEEE Trans. on Appl. Supercond. – 1999. – Vol. 9. – P. 1602–1605.
- XI. Аладышкин А. Ю. *Экспериментальное исследование пространственного распределения токов в тонких сверхпроводящих пленках*/ А. Ю. Аладышкин, А. С. Мельников, А. В. Окомельков, Ю. Н. Ноздрин, И. Д. Токман // Седьмая нижегородская сессия молодых ученых, Н.Новгород, сборник тезисов докладов – 2002. – С. 77–78.
- XII. Аладышкин А. Ю. *Исследование нелинейного СВЧ отклика сверхпроводников с помощью локальной методики*/ А. Ю. Аладышкин, А. А. Андронов, Е. Е. Пестов, Ю. Н. Ноздрин, В. В. Курин, А. М. Куколо, Р. Монако, М. Боффа // Известия ВуЗов. Радиофизика – 2003. – Т. XLVI. – С. 123–143.

## Список цитированной литературы

- [1] Н. М. Плакида, *Высокотемпературные сверхпроводники*. – М.: Международная программа образования. – 1996. – 288 с.
- [2] Bardeen J. *Theory of the motion of vortices in superconductors* / J. Bardeen, M. J. Stephen // Phys. Rev. – Vol. 140A. – 1965. – P. 1197 – 1207.
- [3] Горьков Л. П. *Движение вихрей и электросопротивление сверхпроводников второго рода в магнитном поле* / Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин // УФН. – 1975. – Т. 116. – С. 413 – 448.
- [4] Blatter G. *Vortices in high-temperature superconductors* / G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Gershkenbein, A. I. Larkin, V. M. Vinokur // Rev. Mod. Phys. – 1994. – Vol. 66. – P. 1125 – 1388.
- [5] Frischherz M. C. *Comparative study of experimental techniques for irreversibility lines and critical current densities in high - temperatures superconductors* / M. C. Frischherz, F. M. Sauerzopf, H. W. Weber, M. Murakami, G. A. Emel'chenko // Supercond. Sci. Tech. – 1995. – Vol. 8. – P. 485 – 496.
- [6] Celaschi S. *New possibilities for niobium-based Josephson tunneling* / S. Celaschi, T. H. Geballe, and R. H. Hammond // J. Appl. Phys. – 1985. – Vol. 57 — P. 1698 – 1704.
- [7] Катков А. С. *Метрологические характеристики тонкопленочных YBaCuO джозефсоновских контактов на бикристаллических подложках* / А. С. Катков, С. В. Козырев, В. И. Кржимовский, С. И. Красnobровцев, А. Г. Маресов и О. Б. Снигирев // Письма в ЖТФ. — 1993. — Т. 19 — С. 285 – 287.
- [8] Duret D. *A uhf superconducting magnetometer utilizing a new thin film sensor* / D. Duret, P. Bernard and D. Zenatti // Rev. Sci. Instr. — 1975. — Vol. 46 — P. 474 – 480.
- [9] Koch R. H. *Quantum interference devices made from superconducting oxide thin films* / R. H. Koch, C. P. Umbach, G. J. Clark, P. Chaudhari, and R. B. Laibowitz // Appl. Phys. Lett. — 1987. — Vol. 51. — P. 200 – 202.
- [10] Clarke J. *Superconductive bolometers for submillimeter wavelengths* / J. Clarke, G. I. Hoffer, P. L. Richards and N.-H. Yeh // J. Appl. Phys. — 1977. - - Vol.48. —P. 4865 – 4879.
- [11] Kaplan R. *Microwave-detected optical response of YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub> thin films* / R. Kaplan, W. E. Carlos, and E. J. Cukauskas, J. Ryu // J. Appl. Phys. — 1990 — Vol.67. — P. 4212 – 4216.
- [12] Young K. H. *Clear correlations observed between YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub> thin-film properties and GHz microwave resonator performance* / K. H. Young, G. V. Negrete, R. B. Hammond, A. Inam, R. Ramesh, D. L. Hart, and Y. Yonezawa // Appl. Phys. Lett. — 1991. — Vol. 58 — P. 1789 – 1791.



- [13] Таланов В. В. *Исследование поверхностного импеданса эпитаксиальных пленок  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  в СВЧ диапазоне*: Дисс... канд. физ. - мат. наук: 01.04.03. – 1998. – Н. Новгород. – 109 с.
- [14] Gergis I. *S.55 GHz microstrip bandpass filter made from  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  superconductor thin film* / I. S. Gergis, J. T. Cheung, T. N. Trinh, E. A. Sovero and P. H. Kobrin // Appl. Phys. Lett. — 1992 — Vol. 60 — 2026 – 2028.
- [15] Valenzuela A. A. *High Q coplanar transmission line resonator of  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  on MgO* / A. A. Valenzuela, P. Russer // Appl. Phys. Lett. — 1989. — Vol.55. — P. 1029 – 1031
- [16] Konczykowski M. *Evidence for surface barriers and their effect on irreversibility and lower-critical field measurements on Y-Ba-Cu-O* / M. Konczykowski, L. I. Burlachkov, Y. Yeshurun, F. Holtzberg // Phys. Rev. B. – 1991. – Vol. 43. – P. 13707 – 13710.
- [17] Buzdin A. I. *Electromagnetic pinning of vortices on different types of defects* / A. I. Buzdin, M. Daumens // Physica C. – 1998. – Vol. 294. – P. 257 – 269.
- [18] Soininen P. I. *Stability of superflow* / P. I. Soininen, N. B. Kopnin // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 49. – P. 12087 – 12094.
- [19] Vodolazov D. Yu. *Effect of surface defects of the first vortex entry in type - II superconductors* // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 62. – P. 8691 – 8694.
- [20] Zeldov E. *Geometrical Barriers in high-temperature superconductors.* / E. Zeldov, A. I. Larkin, V. B. Geshkenbein, M. Konczykowski, D. Majer, B. Khaykovich, V. M. Vinokur, H. Shtrikman, // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 73. – P. 1428 – 1431.
- [21] Д. Ю. Водолазов, *Влияние краевого барьера на магнитные характеристики сверхпроводников II рода*: Дисс... канд. физ. - мат. наук: 01.04.07. – 2000. – Н. Новгород. – 103 с.
- [22] Мейлихов Е. З. *Критические поля высокотемпературных сверхпроводников* / Е. З. Мейлихов, В. Г. Шапиро // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. – 1991. – Т. 8. – С. 1437 – 1493.
- [23] Абрикосов А. А. *Основы теории металлов.* – М.: Наука. – 1987. – 520 с.
- [24] Dorosinskii L. A. *Magneto-optical measurements of the surface step of magnetic induction in  $YBa_2Cu_3O_7$  single crystals: Direct evidence of the influence of the surface barrier* / L. A. Dorosinskii, V. I. Nikitenko, A. A. Polyanskii // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 50.– P. 501 – 505.
- [25] Nideröst M. *Lower critical field  $H_{c1}$  and barriers for vortex entry in  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$*  / M. Nideröst, R. Frassanito, M. Saalfrank, A. C. Mota, G. Blatter, V. N. Zavaritsky, T. W. Lee, P. H. Kes // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – P. 3231 – 3234.
- [26] Кемпбелл А. *Критические токи в сверхпроводниках* / А. Кемпбелл, Дж. Иветс // М.: Мир. – 1975. – 332 с.

- [27] Mikheenko P. N. *Inductance measurements of HTSC films with high critical currents* / P. N. Mikheenko, Yu. E. Kuzovlev // Physica C – 1993. – Vol. 204. – P. 229 – 236.
- [28] Bean C. P. *Magnetization of High-Field Superconductors* // Rep. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36. — P. 31–39.
- [29] Brandt E. H. *The flux-line lattice in superconductors* // Rep. Prog. Phys. – 1995. – Vol. 58. – P. 1465 – 1594.
- [30] Gaikovich K. P. *Determination of sheet current patterns of HTSC films fixed in a magnetic field by measurements of magnetic field.* / K. P. Gaikovich, Yu. N. Nozdrin, A. N. Resnik, A. V. Zhilin // XII German–Russian–Ukrainian seminar on high temperature superconductivity, Kiev, Ukraine – 1999. – P. 86.
- [31] Gaikovich K. P. *Magnetic field and currents in HTSC films* / K. P. Gaikovich, Yu. N. Nozdrin, A. V. Zhilin // CEJP. – 2003. – Vol. 3 – P. 363–392.
- [32] Хюбенер Р. П. *Структуры магнитных потоков в сверхпроводниках.* – М.: Машиностроение, 1984. – 219 с.
- [33] Civale L. *Vortex confinement by columnar defects in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  crystals: Enhanced pinning at high fields and temperatures* / L. Civale, A. D. Marwick, T. K. Worthington, M. A. Kirk, J. R. Thompson, L. Krusin-Elbaum, Y. Sun, J. R. Clem, and F. Holtzberg // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 67. — P. 648 – 651.
- [34] Lange M. *Phase diagram of a superconductor / ferromagnet bilayer* / M. Lange, M. J. Van Bael, V. V. Moshchalkov // Phys. Rev. B – 2003. – Vol. 68 – 174522.
- [35] Otani Y. *Magnetostatic interaction between magnetic arrays superconducting thin films* / Y. Otani, B. Pannetier, J. P. Nozières, D. Givord // Journ. Magn. Magn. Mater. – 1993. – Vol. 126. – P. 622 – 625.
- [36] Lange M. *Nanoengineering magnetic - field - induced superconductivity* / M. Lange, M. J. Van Bael, Y. Bruynseraede, V. V. Moshchalkov // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 90 – 197006.
- [37] Morgan D. J. *Asymmetric flux pinning in a regular array of magnetic dipoles* / D. J. Morgan, J. B. Ketterson // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 80. – P. 3614 – 3617.
- [38] Golubović D. S. *Nucleation of superconductivity in Al mesoscopic disk with magnetic dot* / D. S. Golubović, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov // Preprint cond-mat/0307413 – 2003.
- [39] Buzdin A. I. *Domain wall superconductivity in ferromagnetic superconductors* / A. I. Buzdin, A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. B – Vol. 67 – 020503.
- [40] Aladyshkin A. Yu. *Domain wall superconductivity in hybrid superconductor - ferromagnetic structures* / A. Yu. Aladyshkin, A. I. Buzdin, A. A. Fraerman, A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, A. V. Sokolov // Phys. Rev. B – 2003. – Vol. 68. – 184508.
- [41] Milošević M. V. *Multi-vortex states of a thin superconducting disk in a step-like*

- external magnetic field* / M. V. Milošević, S. V. Yampolskii and F. M. Peeters // Physica C – 2002. – Vol. 369. – P. 343 – 346.
- [42] Milošević M. V. *Vortex structure of thin mesoscopic disks in the presence of an inhomogeneous magnetic field* / M. V. Milošević, S. V. Yampolskii and F. M. Peeters // Phys. Rev. B 66, 024515 (2002).
- [43] Cheng S. L. *Upper critical field  $H_{c3}$  for a thin - film superconductor with a ferromagnetic dot* / S. L. Cheng, H. A. Fertig // Phys. Rev. B – 1999. – Vol. 60. – P. 13107 – 13111.
- [44] Marmorkos I. K. *Vortex structure around a magnetic dot in planar superconductors* / I. K. Marmorkos, A. Matulis, F. M. Peeters // Phys. Rev. B – 1996. – Vol. 53. – P. 2677 – 2685.
- [45] Coffey M. W. *Magnetic levitation force of semi-infinite type-II superconductors* // Phys. Rev. B – 1995. – Vol. 52. – P. 9851 – 9854.
- [46] Coffey M. W. *Theory of inverse magnetic force microscopy of superconductors in half-space geometry* // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83. – P. 1648 – 1651 (1999).
- [47] J. H. Xu, J. H. Miller, Jr., and C. S. Ting, *Magnetic levitation force and penetration depth in type-II superconductors*. – Phys. Rev. B 51, P. 424 - 434 (1995).
- [48] Mel'nikov A. S. *Experimental investigation of a local mixed state induced by a small ferromagnetic particle in Y-Ba-Cu-O films: extremely low energy barrier for formation of vortex-antivortex pairs* / A. S. Mel'nikov, Yu. N. Nozdrin, I. D. Tokman, P. P. Vysheslavtsev // Phys.Rev. B – 1998. – Vol. 58. – P. 11672 – 11775.
- [49] Гинзбург В. Л. *К теории сверхпроводимости* / В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20.– С. 1054.
- [50] Шубников Л. В. *Магнитные свойства сверхпроводящих металлов и сплавов* / Л. В. Шубников, В. И. Хоткевич, Ю. Д. Шепелев, Ю. Н. Рябинин // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7. – С. 221 – 237.
- [51] А. А. Абрикосов, *О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы* // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 32. – С. 1442 – 1452.
- [52] Vinen W. F. *A comparison of the properties of superconductors and superfluid helium* // Superconductivity, Ed. R. D. Parks. – Marcel Dekker Inc., New York. – 1969. – P. 1168 – 1234.
- [53] Yeshurin Y. *Magnetic relaxation in high-temperature superconductors* / Y. Yeshurin, A. P. Malozemoff, A. Shaulov // Rev. Mod. Phys. – 1996. – Vol. 68. – P. 911 – 949.
- [54] Bean C. P. *Surface barrier in type-II superconductors* / C. P. Bean, J. D. Livingston // Phys. Rev. Lett. – 1964. – Vol. 12.– P. 14 – 16.
- [55] de Gennes P. G. *Vortex nucleation in type-II superconductor* // Solid State Commun. – 1965. – Vol. 3. – P. 127 – 130.

- [56] Kugel K. I. *Surface barrier and magnetic hysteresis of ac permeability of YBaCuO single crystal* / K. I. Kugel, L. G. Mamsurova, K. S. Pigalskiy, A. L. Rakhmanov // Physica C. – 1998. – Vol. 300. – P. 270 – 280.
- [57] Kugel K. I. *First integral of Ginzburg–Landau equations and stability criteria for vortex - free state in unconventional superconductors* / K. I. Kugel, W. V. Pogosov, A. L. Rakhmanov // Physica C. – 2000. – Vol. 339. – P. 10 – 16.
- [58] Burlachkov L. *Bean–Livingston barriers and first field for flux penetration in high- $T_c$  superconductors* / L. Burlachkov, M. Konczykowski, Y. Yeshurun, F. Holtzberg // J. Appl. Phys. – 1991. – Vol. 70. – P. 5759 – 5761.
- [59] Милошенко В. Е. *Поверхностный барьер входу вихрей в высокотемпературный сверхпроводник* / В. Е. Милошенко, И. М. Шушлебин // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. – 1992. – Т. 5. – С. 1447 – 1452.
- [60] Chen D. X. *Surface barrier and lower critical field in YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7- $\delta$</sub>  superconductors* / D. X. Chen, R. B. Goldfarb, R. W. Gross, A. Sanchez // Phys. Rev. B. – 1993. – Vol. 48. – P. 6426 – 6430.
- [61] Kopylov V. N. *The role of surface effects in magnetization of high -  $T_c$  superconductors* / V. N. Kopylov, A. E. Koshelev, I. F. Schegolev, T. G. Togonidze // Physica C. – 1990. – Vol. 170. – P. 291 – 297.
- [62] Joseph A. S. *Experimental evidence for delayed entry of flux into type - II superconductor* / A. S. Joseph, W. J. Tomasch // Phys. Rev. Lett. – 1964. – Vol. 12. – P. 219 – 222.
- [63] de Blois R. W. *Surface barrier in type - II superconductors* / R. W. de Blois, W. de Sorbo // Phys. Rev. Lett. – 1964. – Vol. 12. – P. 499 – 501.
- [64] Burlachkov L. *Giant vortex creep through surface barriers and the irreversibility line in high - temperature superconductors* / L. Burlachkov, V. B. Geshkenbein, A. E. Koshelev, A. I. Larkin, V. M. Vinokur // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 50. – P. 16770 – 16773.
- [65] Burlachkov L. *Magnetic relaxation over the Bean–Livingston surface barrier* // Phys. Rev. B. – 1993. – Vol. 47. – P. 8056 – 8064 (1993).
- [66] Самохвалов А.В. *Кольцевые вихри в ограниченных сверхпроводниках: Дисс...* канд. физ. - мат. наук: 05.27.01, 01.04.03. – 1998. – Н. Новгород. – 128 с.
- [67] Дамьянович В. П. *Барьер Бина - Ливингстона и проникновение вихрей в анизотропные одноосные сверхпроводники* / В. П. Дамьянович, А. Ю. Симонов // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. – 1991. – Т. 4. – С. 1512 – 1520.
- [68] Bass F. *Effect of the surface roughness on Bean–Livingston surface barrier* / F. Bass, V. D. Freilikher, B. Ya. Shapiro, M. Shvartsner // Physica C. – 1996. – Vol. 260. – P. 231 – 241.
- [69] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Электродинамика сплошных сред*. – М. – 1957. – 532 с.

- [70] Прудников А. П. *Интегралы и ряды: специальные функции* / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука. – 1983. – 752 с.
- [71] Нобл Б. *Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных*, М.: - Изд. иностр. лит-ры. – 1962. – 279 с.
- [72] Свешников А. Г. *Теория функций комплексного переменного* / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М.: Наука. – 1967. – 304 с.
- [73] Pearl J. *Current distribution in superconducting films carrying quantized fluxoids* // Appl. Phys. Lett. – 1965. – Vol. 5. – P. 64 – 65.
- [74] Kosterlitz J. M., Thouless D. J., J. Phys. – 1973. – Vol. C6. – P. 1181.
- [75] Nelson D. R. *Universal jump in the superfluid density of two-dimensional superfluids* / D. R. Nelson, J. M. Kosterlitz, // Phys. Rev. Lett. – 1977. – Vol. 39. – P. 1201 – 1205.
- [76] Resnick D. J. *Kosterlitz–Thouless transition in proximity-coupled superconducting arrays* / D. J. Resnick, J. C. Garland, J. T. Boyd, S. Shoemaker, and R. S. Newrock // Phys. Rev. Lett. – 1981. — Vol. 47. – P. 1542 – 1545.
- [77] Irz D. Yu. *Vortex-vortex interaction in a superconducting film of finite thickness* / D. Yu. Irz, V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva // Phys. Lett. A. – 1996. – Vol. 207. – P. 374 – 378.
- [78] Wei J. C. *Current distribution and vortex-vortex interaction in a superconducting film of finite thickness* / J. C. Wei, T. J. Yang // Jpn. Journ. Appl. Phys. – 1996. – Vol. 35. – P. 5696 – 5700.
- [79] Wei J. C. *Thickness dependence of magnetic force and vortex creation in type-II superconducting thin films* / J. C. Wei, J. L. Chen, L. Horng, T. J. Yang // Physica C. – 1996. – Vol. 267. – P. 345 – 354.
- [80] Ландау Л. Д. *Квантовая механика* / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // М.: Физматлит. – 5-е изд., стереот.– 2001. – 805 с.
- [81] Reijniers J. *Quantum state in a magnetic antidots* / J. Reijniers, F. M. Peeters, A. Matulis // Phys. Rev. B. – 1999. – Vol. 59. – P. 2817 – 2823.
- [82] Little W. A. *Observation of quantum periodicity in the transition temperature of a superconducting cylinder* / W. A. Little, R. D. Parks // Phys. Rev. Lett. – 1962. – Vol. 9. – P. 9 – 12.
- [83] Parks R. D. *Fluxoid quantization in a multiply-connected superconductors* / R. D. Parks, W. A. Little // Phys. Rev. – 1964. – Vol. 133. – P. 97.
- [84] Bezryadin A. *Phase transition in a superconducting thin film with a single circular hole* / A. Bezryadin, A. I. Buzdin, B. Pannetier // Phys. Lett. A – 1994. — Vol. 195. – P. 373 – 379.
- [85] Bezryadin A. *Nucleation of superconductivity in a thin film with a lattice of circular holes* / A. Bezryadin, B. Pannetier // Journ. Low. Temp. Phys. – 1995. – Vol. 98. – P. 251 – 268.

- [86] Welp U. *Superconduction transitoon and vortex pinning in Nb films patterned with nanoscale hole arrays* / U. Welp, Z. L. Xiao, J. S. Jiang, V. K. Vlasko-Vlasov, S. D. Bader, G. W. Crabtree, J. Liang, H. Chik, J.M.Xu // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 66. – 212507.
- [87] Bruyndoncx V. *Giant vortex state in perforated aluminium microsquares* / V. Bruyndoncx, J. G. Rodrigo, T. Puig, L. Van Look, V. V. Moshchalkov, R. Jonckheere // Phys. Rev. B – 1999. – Vol. 60. – P. 4285 – 4292.
- [88] Fink H. J. *Superheating of the Meissner state and the giant vortex state of a cylinder of finite extent* / H. J. Fink, A. G. Presson // Phys. Rev. – 1968. – Vol. 168. – P. 399 – 402.
- [89] Zharkov G. F. *Ginzburg–Landau calculation for a superconducting cylinder in a magnetic field* / G. F. Zharkov, V. G. Zharkov and A.Yu.Zvetkov // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 61. – P. 12293 – 12301.
- [90] Мкртчян Г. С. *Взаимодействие между полостью и вихрем в сверхпроводнике второго рода* / Г. С. Мкртчян, В. В. Шмидт // ЖЭТФ – 1971. – Т. 61. – С. 367 – 372.
- [91] Saint–James D. *Onset of superconductivity in decreasing fields* / D. Saint–James and P. G. de Gennes // Phys. Lett. – 1963. – Vol. 7. – P. 306 – 308.
- [92] Houghton A. *Nucleation of superconductivity in wedge geometry* / A. Houghton, F. B. McLean // Phys. Lett. – 1965. – Vol. 19. – P. 172 – 174.
- [93] V. M. Fomin, *Surface superconductivity in a wedge* / V. M. Fomin, J. T. Devreese and V. V. Moshchalkov // Europhys. Lett. – 1998. – Vol. 42 – P. 553 – 558.
- [94] Симонов А. Ю. *О влиянии дефектов на критическое поле образования сверхпроводящих зародышей* / А. Ю. Симонов, А. С. Мельников, С. В. Шаров // ФНТ – 1989. – Т. 15. – С. 1206 – 1209.
- [95] Buisson O. *Magnetization oscillation of a superconducting disk* / O. Buisson, P. Gandit, R. Rammal, Y. Y. Wang and B. Pannetier // Phys. Lett. A – 1990. – Vol. 150. – P. 36 – 42.
- [96] Chibotaru L. F. *Symmetry - induced formation of antivortices in mesoscopic superconductors* / L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx and V. V. Moshchalkov // Nature – 2000. - Vol. 408. – P. 833 – 835.
- [97] Chibotaru L. F. *Vortex entry and nucleation of antivortices in mesoscopic superconducting triangle* / L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx, V. V. Moshchalkov // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 86. – P. 1323 – 1326;
- [98] Chibotaru L. F. *Nucleation of superconductivity in regular polygons: superconducting vector potential gauge approach* / L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, G. Teniers and V. V. Moshchalkov // Physica C – 2002. – Vol. 369. – P. 149 – 157.
- [99] Mel’nikov A. S. *Vortex states and magnetization curve of square mesoscopic superconductors* / A. S. Mel’nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, P. P. Vysheslavtsev // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 65 – 140503.

- [100] Geim A. K. *Non-quantized penetration of magnetic field in the vortex state of superconductors: fractional and negative vortices* / A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters, V. A. Schweigert // Nature – 2000. – Vol. 407. – P. 55 – 57.
- [101] Peeters F. M. *Fractional and negative flux penetration in mesoscopic superconducting disk* / F. M. Peeters, V. A. Schweigert, B. J. Baelus // Physica C – 2002. – Vol. 369. – P. 158 – 164.
- [102] Martin J. I. *Flux pinning in a superconductors by an array of submicrometer magnetic dots* / J. I. Martin, M. Vélez, J. Nogués, I. K. Schuller // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79. – P. 1929 – 1932.
- [103] Martin J. I. *Artificially induced reconfiguration of the vortex lattice by array of magnetic dots* / J. I. Martin, M. Vélez, A. Hoffmann, I. K. Schuller, J. L. Vicent // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83. – P. 1022 – 1025.
- [104] Van Bael M. J. *Magnetic properties of submicron Co islands and their use as artificial pinning centers* / M. J. Van Bael, K. Temst, V. V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede // Phys. Rev. B – 1999. – Vol. 59. – P. 14674 – 14679.
- [105] Van Bael M. J. *Ferromagnetic pinning arrays* / M. J. Van Bael, L. Van Look, M. Lange, J. Bekaert, S. J. Bending, A. N. Grigorenko, K. Temst, V. V. Moshchalkov and Y. Bruynseraede // Physica C – 2002. – Vol. 369. – P. 97 – 105.
- [106] Van Bael M. J. *Magnetic domains and flux pinning properties of a nanostructured ferromagnet – superconductor bilayer* / M. J. Van Bael, S. Raedts, K. Temst, J. Swerts, V. V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede // J. Appl. Phys. – 2002. – Vol. 92. – P. 4531 – 4537.
- [107] Garsia–Santiago A. *Enhanced pinning in a magnetic - superconductor bilayer* / A. Garsia - Santiago, F. Sánchez, V. Varela, J. Tejada // Appl. Phys. Lett. – 2000. – Vol. 77. – P. 2900 – 2902.
- [108] Van Bael M. J. *Local Observation of Field Polarity Dependent Flux Pinning by Magnetic Dipoles* / M. J. Van Bael, J. Bekaert, K. Temst, L. Van Look, V. V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, G. D. Howells, A. N. Grigorenko, S. J. Bending, G. Borghs // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 86. – P. 155 – 158.
- [109] Lange M. *Nanostructured superconductors/ferromagnet bilayers* / M. Lange, M. J. Van Bael, L. Van Look, S. Raedts, V. V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede // Preprint cond-mat/0201302 – 2002.
- [110] Сонин Э. Б. *Подавление сверхпроводимости (слабая связь) доменной стенкой в двуслойной пленке сверхпроводник–ферромагнетик* // Письма в ЖТФ – 1988. – Т. 14. – С. 1640 – 1644.
- [111] Tokman I. D. *Pinning of a vortex lattice on magnetic inhomogeneities in a thin superconducting film (type-II superconductors)* // Phys. Lett. A – 1992. – Vol. 166. – P. 412 – 415.

- [112] Генкин Г. М. *Намагниченность структур ферромагнетик - сверхпроводник* / Г. М. Генкин, В. В. Скузоваткин, И. Д. Токман // ФТТ – 1993. – Т. 35. – С. 736 – 742.
- [113] Genkin G. M. *Magnetization of the ferromagnetic-superconductor structures* / G. M. Genkin, V. V. Skuzovatkin, I. D. Tokman // Journ. Magn. Magn Mater. – 1994. – Vol. 130. – P. 51 – 56.
- [114] Lyuksyutov I. F. *Magnetization controlled superconductivity in a film with magnetic dots* / I. F. Lyuksyutov, V. L. Pokrovsky, // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – P. 2344 – 2347.
- [115] Šášik R. *Enhanced pinning of vortices in thin film superconductors by magnetic dot arrays* / R. Šášik, T. Hwa // Preprint cond-mat/0003462 – 2000.
- [116] Беспярых Ю. И. *Возникновение спонтанной структуры вихрей в двуслойной системе ферромагнетик - сверхпроводник второго рода* / Ю. И. Беспярых, В. Василевский // ФТТ – 2001. – Т. 43. С. 215 – 221.
- [117] Беспярых Ю. И. *Закрепление вихрей на доменной структуре двуслойной системы ферромагнетик - сверхпроводник второго рода* / Ю. И. Беспярых, В. Василевский, М. Гайдек, И. П. Никитин, С. А. Никитов // ФТТ – 2001. – Т. 43. – С. 1754 – 1760.
- [118] Erdin S. *Topological structures in a ferromagnet - superconductor bilayer* / S. Erdin, I. F. Lyuksyutov, V. L. Pokrovsky, V. M. Vinokur // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88. – 017001.
- [119] Erdin S. *Interaction of mesoscopic magnetic textures with superconductor* / S. Erdin, A. F. Kayali, V. L. Pokrovsky, V. M. Vinokur // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 66 – 014414.
- [120] Helseth L. E. *Interaction between superconducting films and magnetic nanostructures* // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 66. – 104508.
- [121] Milošević M. V. *The vortex – magnetic dipole interaction in the London approximation* / M. V. Milošević, S. V. Yampolskii, F. M. Peeters // Journ. Low Temp. Phys. – 2003. – Vol. 130. – P. 321 – 331.
- [122] Laiho R. *Penetration of vortices into the ferromagnetic / type-II superconductor bilayers* / R. Laiho, E. Lähderanta, E. B. Sonin, K. B. Traito // Phys. Rev. B – 2003. – Vol. 67. – 144522.
- [123] Milošević M. V. *Superconducting Wigner vortex molecule near a magnetic disk* / M. V. Milošević, F. M. Peeters // Phys. Rev. B – 2003. – Vol. 68 – 024509.
- [124] Тинкхам М. *Введение в сверхпроводимость* - М.: Атомиздат. – 1980. – 310 с. ; Tinkham M. *Introduction to superconductivity*. – McGraw - Hill, Inc. – 2 ed. – 2000. – 454 p.
- [125] Абрамовиц М. *Справочник по специальным функциям* / М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.) – М.: Наука. – 1979. – 832 с.
- [126] Корн Г. *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)* /



- Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука. - 1974. - 832 с.
- [127] Максимов И. Л. *Краевой барьер и структура критического состояния в тонких сверхпроводящих пленках* / И. Л. Максимов, А. А. Елистратов // Письма в ЖЭТФ - 1994. - Т. 61. - С. 204 - 208.
- [128] Darhmaoui H. *Temperature dependence of the magnetic -flux penetration into disk-shaped  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  thin films* / H. Darhmaoui, J. Jung, J. Talvaccho, M. A-K. Mohamed, L. Friedrich // Phys. Rev. B - 1996. - Vol. 53. - P. 12330 - 12339.
- [129] Jooss Ch. *High-resolution magneto-optical imaging of critical currents in  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  thin films* / Ch. Jooss, R. Warthmann, A. Forkl, H. Kronmüller // Physica C - 1998. - Vol. 299. - P. 215 - 230.
- [130] Albrecht J. *Observation of microscopic currents in superconducting ceramics* / J. Albrecht, Ch. Jooss, R. Warthmann, A. Forkl, H. Kronmüller // Phys. Rev. B - 1998. - Vol. 57. - P. 10332 - 10335.
- [131] Sugimoto A. *Supercurrent distribution in high- $T_c$  superconducting  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  thin films by scanning superconducting quantum interference device microscopy* / A. Sugimoto, T. Yamaguchi, I. Iguchi // Appl. Phys. Lett. - 2000. - Vol. 77. - P. 3069 - 3071.
- [132] Chatrathorn S. *Scanning SQUID microscopy of integrated circuits* / S. Chatrathorn, E. F. Fleet, F. C. Wellstood // Appl. Phys. Lett. - 2000. - Vol. 76. - P. 2304 - 2306.
- [133] Bruno A. C. *Imaging flaws in magnetically permeable structures using the truncated generalized inverse on leakage fields* // J. Appl. Phys. - 1997. - Vol. 82. - P. 5899 - 5906.
- [134] А. С. Мельников, А. В. Окомельков, И. Д. Токман. - 2000 (неопубликовано).
- [135] Roth B. J. *Using a magnetometer to image a two-dimensional current distribution* / B. J. Roth, N. G. Sepulveda, J. P. Wiskwo, Jr. // J. Appl. Phys. - 1989. - Vol. 65. - P. 361 - 372.
- [136] Гайкович К. П. *Обратные задачи нелинейной электродинамики высокотемпературных сверхпроводников* / К. П. Гайкович, А. Н. Резник // ЖТФ - 1998. - Т. 68. - С. 78 - 86.
- [137] Жилин А. В. *Деконволюция изображений, искаженных влиянием аппаратной функции* // Дисс... канд.физ.-мат.наук: 01.04.07. - 2003. - Н. Новгород. - 103 с.
- [138] Perkins G. K. *Deconvolution of 2D transport currents from the local magnetic field distribution above flat superconducting samples* / G. K. Perkins, Yu. V. Boguslavsky, A. D. Caplin // Supercond. Sci. Tech. - 2002. - Vol. 15. - P. 1140 - 1146.
- [139] Gaevski M. E. *Magneto-optical study of magnetic-flux penetration into a current-carrying high-temperature-superconductor strip* / M. E. Gaevski, A. V. Bobyl, D.

- V. Shantsev, Y. M. Galperin, T. H. Johansen, M. Baziljevich, H. Bratsberg, S. F. Karmanenko // *Phys. Rev. B* – 1999. – Vol. 59. – P. 9655 – 9664.
- [140] Bobyl A. V. *Symmetry of the remanent-state flux distribution in superconducting thin strips: probing the critical state* / A. V. Bobyl, D. V. Shantsev, Y. M. Galperin and T. H. Johansen // *Phys. Rev. B* – 2001. – Vol. 63. – 184510.
- [141] Гаевский М. Е. *Магнитооптическое исследование релаксации пространственного распределения магнитного поля ВТСП-полоски после включения транспортного тока* / М. Е. Гаевский, Д. В. Шанцев, Ю. М. Гальперин, А. В. Бобыль, Т. Х. Йохансен, Х. Хауглин // *ФТТ* – 1999. – Т. 41. – 965 – 968.
- [142] Drozdov Yu. N. *Microstructure and electrical properties of YBCO films* / Yu. N. Drozdov, S. V. Gaponov, S. A. Gusev, E. B. Kluev, Yu. N. Nozdrin, V. V. Talanov et al. // *Supercond. Sci. Technol.* – 1996. – Vol. 9. – P. A166 – A169.
- [143] Drozdov Yu. N. *Surface morphology, microstructure and electrical properties of Y-Ba-Cu-O thin films* / Yu. N. Drozdov, S. V. Gaponov, S. A. Gusev, E. B. Kluev, Yu. N. Nozdrin, V. V. Talanov, A. K. Vorobiev // *IEEE Trans. Appl. Supercond.* – 1997. – Vol. 7. – P. 1642 – 1645.
- [144] Воробьев А. К. *Исследование особенностей получения и свойств тонких пленок высокотемпературного сверхпроводника  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$* : Дисс... канд. физ. – мат. наук: 01.04.07. – 1999. – Н. Новгород. – 134 с.
- [145] Theuss H. / H. Theuss, A. Forkl, H. Kronmüller // *Physica C* – 1992. – Vol. 190. – P. 345.
- [146] Hug H. J. / H. J. Hug, A. Moser, I. Parashikov et al. // *Physica C* – 1995. – Vol. 235-240. – P. 2695.
- [147] Wei J. C. *Magnetic force acting on a magnetic dipole over a superconducting thin film* / J. C. Wei, J. L. Chen, L. Horng, T. J. Yang // *Phys. Rev B* – 1995. – Vol. 54. – P. 15429 – 15437.
- [148] Wei J. C. *Magnetic force signal of vortex creation in type-II superconducting thin film* / J. C. Wei, L. Horng, T. J. Yang // *Physica C* – 1997. – Vol. 280. – P. 311 – 316.
- [149] Сонин Э. Б. *Теория джозефсоновской среды в ВТСП: вихри и критические магнитные поля* // *Письма в ЖЭТФ* – 1988. – Т. 47. – С. 415 – 418.
- [150] Ambegaokar V. *Tunneling between superconductors* / V. Ambegaokar, A. Baratoff // *Phys. Rev. Lett.* – 1963. – Vol. 10. – P. 486 – 489.
- [151] Widder W. *AC susceptibility and transport critical current density of polycrystalline c-axis-oriented YBaCuO films: Josephson tunneling and d-wave pairing* / W. Widder, L. Bauernfeind, H. F. Braun, H. Burkhardt, D. Rainer, M. Bauer, H. Kinder // *Phys. Rev. B* – 1997. – Vol. 55. – P. 1254 – 1261.
- [152] Samoilova T. B. *Non-linear microwave effects in thin superconducting films* // *Supercond. Sci. Tech.* – 1995. – Vol. 8. – P. 259 – 278.

- [153] Pestov E. E. *Third-order local nonlinear microwave response of  $YBa_2Cu_3O_7$  and Nb thin films* / E. E. Pestov, V. V. Kurin, Yu. N. Nozdrin // IEEE Trans. on Appl. Supercond. – 2001. – Vol. 11. – P. 131 – 134.
- [154] Aladyshkin A. Yu. *Peculiarities of the resistive state in Mo/Si superlattices in a magnetic field* / A. Yu. Aladyshkin, A. Yu. Klimov, M. A. Kucherenko, V. V. Kurin, V. L. Mironov, Yu. N. Nozdrin, E. E. Pestov // Mod. Phys. Lett. B – 2003. – Vol. 17. – P. 627 – 634.
- [155] Пестов Е. Е. *Исследование локального СВЧ отклика сверхпроводников*. – 2004 (неопубликовано).
- [156] Головашкин А. И. *Высокотемпературные сверхпроводящие керамики (обзор экспериментальных данных)* // УФН. – 1987. – Т. 152. – С. 553 – 573.
- [157] А. Д. Полянин, А. В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям*, - М.: Физматгиз. — 2003. — 567 с.