

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт физики микроструктур Российской академии наук

На правах рукописи

Беспалов Антон Андреевич

**Вихревые конфигурации и подвижность вихревых линий в
анизотропных и магнитных сверхпроводниках**

01.04.07 – Физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Мельников Александр Сергеевич

Содержание

Введение	5
Глава 1. Пиннинг абрикосовского вихря на малой цилиндрической полости	16
1.1. Введение	16
1.2. Пиннинг вихря в приближении теории Гинзбурга-Ландау	19
1.2.1. Общий вид потенциала пиннинга	19
1.2.2. Дефект в форме кругового цилиндра	24
1.2.3. Дефект в форме эллиптического цилиндра	26
1.3. Пиннинг вихря в приближении теории Лондонов	26
1.4. Выводы	29
Глава 2. Вязкость абрикосовского вихря в анизотропном сверхпроводнике второго рода	30
2.1. Введение	30
2.2. Исходные уравнения	31
2.3. Предел большой длины когерентности по сравнению с длиной экранирования электрического поля	34
2.4. Предел сильного несоответствия анизотропий нормальной проводимости и массы куперовской пары ($s \gg u \gg 1$)	36
2.5. Вариационный принцип	37
2.6. Зависимость анизотропии вязкости от температуры	40
2.7. Выводы	42
Глава 3. Магноны в ферромагнитных сверхпроводниках и сверхрешётках сверхпроводник-ферромагнетик	44
3.1. Введение	44
3.2. Параметры ферромагнитных сверхпроводников и основные уравнения	47
3.3. Зонный спектр магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике в вихревом состоянии	50
3.3.1. Уравнения на гармоники намагниченности	50
3.3.2. Расчёты спектра магнонов	53
3.3.3. Спектр магнонов в точках высокой симметрии: пересечение зон	57

3.3.4.	Учёт диссипации	60
3.3.5.	Коэффициент отражения электромагнитной волны от ферромагнитного сверхпроводника в параллельной геометрии	62
3.4.	Излучение магнонов движущимися вихрями в структурах сверхпроводник-ферро- ромагнетик	66
3.4.1.	Общие соотношения для силы, действующей на вихри	66
3.4.2.	Движение вихрей под действием постоянного тока	70
3.4.3.	Движение вихрей под действием переменного тока	79
3.4.4.	Поверхностным импеданс ферромагнитного сверхпроводника в перпен- дикулярной геометрии	84
3.4.5.	Обобщение результатов на случай сверхрешёток сверхпроводник-ферро- магнетик	87
3.5.	Выводы	88
Глава 4. Нелокальная электродинамика и притяжение вихрей в гибридных системах сверхпроводник-ферромагнетик		90
4.1.	Введение	90
4.2.	Поле вихря в SF системах с сильной пространственной дисперсией магнитной восприимчивости	91
4.3.	Вихревое состояние	96
4.4.	Выводы и предложения для экспериментов	100
Заключение		101
Приложение А.		103
Приложение Б.		104
Приложение В.		107
Приложение Г.		109
Приложение Д.		112
Приложение Е.		113
Приложение Ж.		114

Список публикаций автора по теме диссертации	115
Литература	117

Введение

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Явление сверхпроводимости включает в себе два основных эффекта: падение электро-сопротивления до нуля, обнаруженное в 1911 году Хейке Камерлинг-Оннесом, и вытеснение магнитного поля – так называемый эффект Мейснера-Оксенфельда [1] (или просто Мейснера). После экспериментального обнаружения этих двух явлений долгое время их происхождение было непонятно. Микроскопическая теория сверхпроводимости была создана Бардином, Купером и Шриффером (БКШ) лишь в 1957 году. Согласно этой теории, сверхпроводимость металлов связана с возникновением притяжения между электронами в результате обмена виртуальными фононами. При достаточно низких температурах электроны с противоположными спинами и импульсами образуют так называемые куперовские пары, размер которых равен длине когерентности ξ . Отметим, что при этом суммарный спин пары равен нулю (пары спин-синглетные). Для разрушения куперовской пары требуется конечная энергия, и по этой причине квазичастичный спектр сверхпроводника имеет щель. Согласно критерию Ландау [2], система электронов с такой щелью в спектре должна обладать свойством сверхтекучести, что и объясняет отсутствие электро-сопротивления у сверхпроводника.

До появления теории БКШ было предложено несколько феноменологических построений для описания сверхпроводимости. Среди них наиболее широко известны теории Лондонов [3] и Гинзбурга-Ландау [4], которые не только адекватно описывали идеальную проводимость и эффект Мейснера, но и давали ряд нетривиальных предсказаний, которые были впоследствии подтверждены экспериментально. В частности, из теории Лондонов следует, что внешнее магнитное поле экспоненциально спадает вглубь сверхпроводника на некоторой длине λ , называемой лондоновской длиной. Согласно теории Гинзбурга-Ландау, все сверхпроводники могут быть разделены на два класса в соответствии со значением параметра Гинзбурга-Ландау $\kappa = \lambda/\xi$. У материалов с $\kappa < 1/\sqrt{2}$ граница раздела сверхпроводящей и нормальной фазы имеет положительную свободную энергию. Эти так называемые сверхпроводники первого рода имеют довольно простую фазовую диаграмму в плоскости температура (T) - магнитное поле (H): при $T < T_c$, где T_c – критическая температура, когда $H < H_c(T)$ образец находится в сверхпроводящем мейснеровском состоянии (с нулевой внутренней магнитной индукцией). При $H > H_c(T)$ образец находится в нормальном состоянии. Для поля $H_c(T)$, называемого термодинамическим критическим полем, теория Гинзбурга-Ландау даёт значение [5]

$$H_c = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2}\lambda(T)\xi(T)}, \quad (1)$$

где $\Phi_0 = \pi \hbar c / e \approx 2.06 \times 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ — квант магнитного потока, c — скорость света, а $e > 0$ — элементарный заряд. Уравнение (1) справедливо в области температур $T_c - T \ll T_c$, где применима теория Гинзбурга-Ландау.

В соединениях с $\kappa > 1/\sqrt{2}$ — сверхпроводниках второго рода — энергия границы между нормальной и сверхпроводящей фазами отрицательна. Алексею Алесеевичу Абрикосову впервые удалось объяснить, каким образом в материалах с $\kappa > 1/\sqrt{2}$ нормальная и сверхпроводящая фаза могут сосуществовать. В своей работе [6] он предположил, что сверхпроводник второго рода может находиться в смешанном состоянии. В этой необычной фазе магнитное поле проникает в образец в виде вихревых линий, известных как абрикосовские вихри, несущих один квант магнитного потока Φ_0 . Вихри имеют нормальную сердцевину (кор), которая отделяется от остальной части сверхпроводника циркулирующим сверхтоком. Таким образом, в вихревом состоянии граница между нормальной и сверхпроводящей фазой оказывается сильно растянутой, что позволяет получить выигрыш в поверхностной энергии. В однородном сверхпроводнике вихри должны образовывать идеальную двумерную решётку. Профили поля и параметра порядка в вихре изображены на рис. 1b, а фазовая диаграмма сверхпроводника второго рода показана на рис. 1с. Вихревое состояние (или фаза Шубникова) существует в диапазоне полей $H_{c1}(T) < H < H_{c2}(T)$, где H_{c1} и H_{c2} — нижнее и верхнее критическое поле, соответственно. Лондоновская теория в пределе $\kappa \gg 1$ даёт для H_{c1} значение

$$H_{c1} \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}. \quad (2)$$

Верхнее критическое поле, согласно теории Гинзбурга-Ландау [5], равно

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2}. \quad (3)$$

Следует отметить, что в сверхпроводниках второго рода $H_{c2} > H_c$, а в сверхпроводниках первого рода $H_{c2} < H_c$, по этой причине вихревое состояние в них нестабильно.

Предсказание Абрикосова было подтверждено экспериментально в 1964, когда решётку вихрей удалось наблюдать с помощью дифракции нейтронов [8]. Позднее техника декорирования ферромагнитными частицами позволила увидеть отдельные вихри [9].

Одно из фундаментальных явлений, связанных с существованием абрикосовских вихрей, заключается в том, что сверхпроводник в вихревом состоянии обладает конечным электросопротивлением. Этот эффект объясняется тем, что транспортный ток действует на вихри с силой [5]

$$\mathbf{F}_L = \frac{\Phi_0}{cB_0} \mathbf{j}_{\text{tr}} \times \mathbf{B}_0, \quad (4)$$

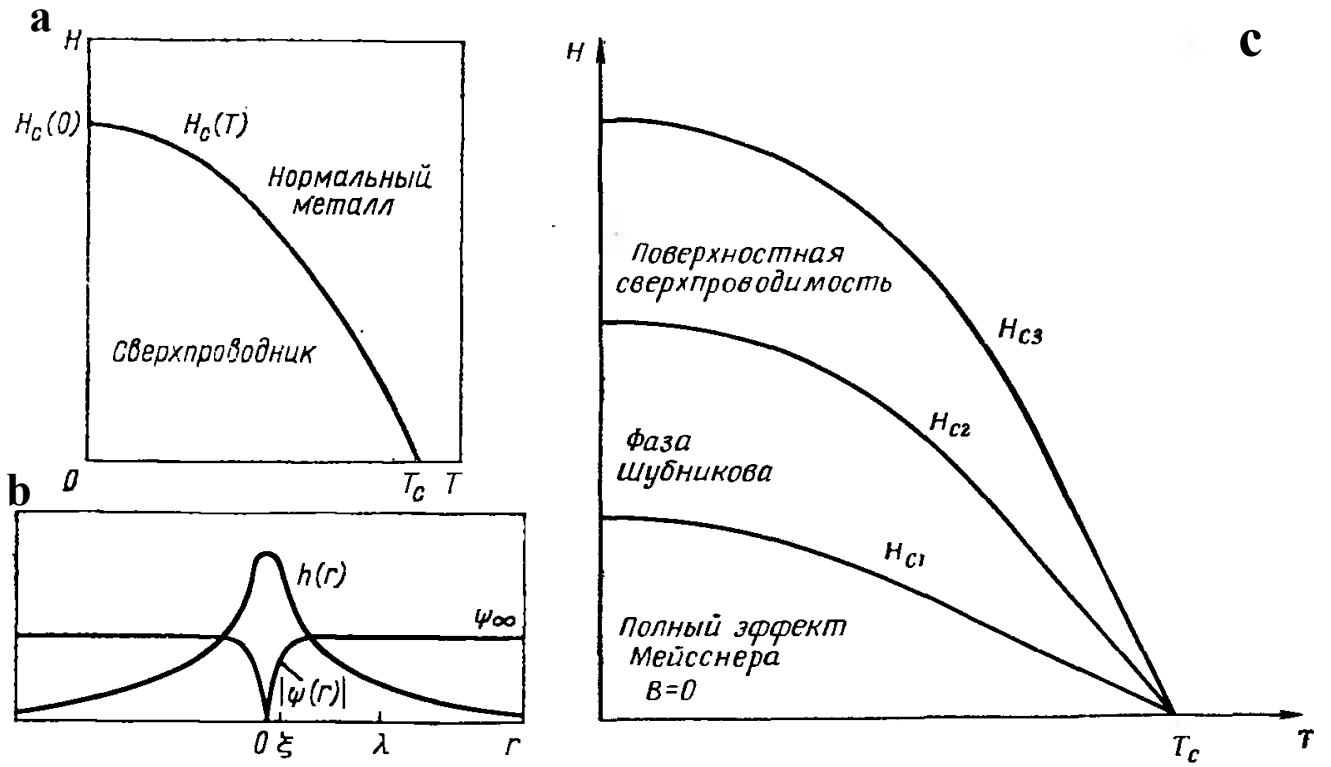


Рис. 1. (а) Фазовая диаграмма сверхпроводника первого рода [5]. (б) Профиль магнитного поля ($h(r)$) и модуля параметра порядка ($|\psi(r)|$) в изолированном абрикосовском вихре [5]. (с) Фазовая диаграмма сверхпроводника второго рода [7]. Третье критическое поле, H_{c3} , и поверхностная сверхпроводимость здесь не рассматриваются.

приводящей их в движение. Здесь $\mathbf{B}_0$ — среднее магнитное поле в сверхпроводнике, а $\mathbf{j}_{tr}$ — плотность транспортного тока. Величина $\mathbf{F}_L$ называется силой Лоренца. В сверхпроводнике без дефектов в режиме стационарного движения вихрей сила Лоренца скомпенсирована силой вязкого трения:

$$\mathbf{F}_L - \eta \mathbf{V}_L = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{V}_L$ — скорость вихрей, а η — коэффициент вязкости. Из закона Фарадея следует, что движущийся магнитный поток наводит в сверхпроводнике среднее электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{V}_L. \quad (6)$$

Из уравнений (4) - (6) мы можем получить закон Ома: $\mathbf{j}_{tr} = \sigma \mathbf{E}$, где проводимость равна

$$\sigma = \frac{c^2 \eta}{B_0 \Phi_0}. \quad (7)$$

В анизотропных сверхпроводниках σ и η являются тензорами. Тогда уравнение (7) обобщается следующим образом:

$$\hat{\sigma} = \frac{c^2}{B_0 \Phi_0} \begin{pmatrix} \eta_{yy} & -\eta_{yx} \\ -\eta_{xy} & \eta_{xx} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где ось z направлена вдоль магнитного поля. Необычное расположение компонент тензора вязкости в уравнении (8) объясняется тем, что x -проекция электрического поля зависит от y -компоненты скорости вихрей, и наоборот.

На практике оказывается, что вольт-амперная характеристика сверхпроводника второго рода не описывается простым законом Ома. По сверхпроводнику может без диссипации протекать ток с плотностью, не превосходящей некоторое критическое значение j_{cr} [10]. Причина этого явления заключается в том, что в реальном сверхпроводнике имеются дефекты, способные притягивать вихри. Такие дефекты называются центрами пиннинга. Вихри, захваченные дефектами, остаются неподвижными при протекании малого тока по сверхпроводнику и, следовательно, не дают вклада в диссипацию. Имплантация искусственных протяжённых центров пиннинга в сверхпроводник может привести к очень сильному увеличению критического тока, если вихри ориентированы вдоль дефектов (см. [11–16] и ссылки в этих работах). Существуют различные техники, позволяющие создавать в сверхпроводниках как хаотично расположенные центры пиннинга [11, 12], так и упорядоченные решётки дефектов [17–19].

Если приложенный ток достаточно велик ($j_{tr} > j_{cr}$), то сила Лоренца сорвёт вихри с центров пиннинга. Будет происходить вязкое течение вихрей, которое описывается уравнением (5), если силой взаимодействия вихрей с дефектами можно пренебречь. Таким образом, для количественной интерпретации экспериментальных данных по электросопротивлению сверхпроводников второго рода требуются теоретические оценки силы пиннинга и вязкости η .

Теоретическое исследование пиннинга системы из многих взаимодействующих вихрей представляет собой довольно сложную задачу. Обзор существующих теорий коллективного пиннинга приведён в статье [10]. Существенно, что в качестве входных данных эти теории требуют знания потенциала взаимодействия одного вихря с дефектом. Известно, что способность системы дефектов пинниговать вихри определяется не только глубиной потенциала пиннинга вихря, но и формой этого потенциала в целом [20]. Таким образом, исследование взаимодействия одного вихря с одним дефектом является весьма важной задачей. Потенциал пиннинга вихря на изоляторных цилиндрических дефектах с разной формой поперечного сечения был вычислен в лондоновском приближении в ряде работ [21–26]. Данный подход позволяет рассматривать дефекты с достаточно большим размером поперечного сечения D : $D \gg \xi$. При $D \lesssim \xi$ задача может быть решена с использованием теории Гинзбурга-Ландау [27–30]. Вследствие нелинейности этого уравнения его решение довольно сложно, особенно когда система не обладает вращательной симметрией. По этой причине ранее данное уравнение преимущественно решалось численно. Точные выражения для потенциала пиннинга и тока депиннинга в случае $D \lesssim \xi$ до сих пор отсутствовали.

Для вычисления вязкости η было предложено два теоретических подхода. Первый метод, описанный Бардином и Стефеном [31], основан на использовании теории Лондонов и модельного ступенькообразного профиля параметра порядка в вихре. Как правило, данный метод даёт верную оценку для η по порядку величины. Второй, более строгий подход к вычислению вязкости основан на нестационарном уравнении Гинзбурга-Ландау [32–34]. С использованием этого подхода вязкость вихря в изотропном сверхпроводнике вычислялась в работах [35–37].

Открытие слоистых высокотемпературных сверхпроводников [38] стимулировало исследование динамики вихрей в анизотропных средах. В работах [39, 40] теоретически исследовалась вязкость вихря в анизотропном случае. Было показано, что процедура вычисления η значительно упрощается в грязных одноосных сверхпроводниках, в которых отношение $s_0 \equiv m_c \sigma_c / m_{ab} \sigma_{ab}$ равно единице. Здесь σ_c , σ_{ab} и m_c , m_{ab} — нормальные проводимости и массы куперовской пары в направлении оси анизотропии c и в перпендикулярной плоскости ab , соответственно. Условие $s_0 = 1$ позволяет свести анизотропную задачу к изотропной путём масштабного преобразования [40]. Такое упрощение невозможно в случае $s_0 \neq 1$, когда имеется несоответствие анизотропий нормальной проводимости и массы куперовской пары. Ситуация, когда $s_0 \neq 1$, теоретически возможна в чистом пределе [34], и, по-видимому, наблюдалась экспериментально в сверхпроводниках на основе пниктидов железа [41]. Для оценки параметра s_0 можно воспользоваться соотношением

$$s_0 = \gamma_H^2 / \gamma_\sigma,$$

справедливым вблизи критической температуры. Здесь

$$\gamma_H = H_{c2,ab} / H_{c2,c}, \quad \gamma_\sigma = \sigma_{ab} / \sigma_c,$$

а $H_{c2,c}$ и $H_{c2,ab}$ — верхние критические поля в направлениях вдоль и поперёк оси анизотропии c . В литературе можно найти значения $\gamma_H = 1.15$ и $\gamma_\sigma = 3.3$ для LiFeAs [42], $\gamma_H = 5$ и $\gamma_\sigma = 30 - 45$ для $\text{Ti}_{0.58}\text{Rb}_{0.42}\text{Fe}_{1.72}\text{Se}_2$ [43], и $\gamma_H = 2$ и $\gamma_\sigma = 21$ для $\text{Sr}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{Fe}_2\text{As}_2$ [44]. Для BaFe_2As_2 [45] и $\text{PrFeAsO}_{0.7}$ [46] приводятся очень большие значения анизотропии проводимости — $\gamma_\sigma > 100$. При этом анизотропия верхнего критического поля в сверхпроводниках на основе железа достаточно мала [41]: $\gamma_H \sim 1$. Следует отметить, что экспериментальные данные по пниктидах довольно противоречивы: в статьях [47] и [48] приводятся довольно малые значения γ_σ в BaFe_2As_2 и $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x)_2\text{As}_2$: $\gamma_\sigma \lesssim 10$.

В предшествующих работах [39] и [49] были проведены расчёты тензора вязкости $\hat{\eta}$ в сверхпроводнике с параметром $s_0 \neq 1$, однако в этих расчётах так или иначе использовался модельный ступенькообразный профиль параметра порядка в вихре. Для количественного срав-

нения теоретических предсказаний с экспериментом, безусловно, требуется провести соответствующие вычисления на основе более реалистичной модели вихря.

Представляет интерес также анализ статических и динамических свойств вихрей в более сложных структурах, таких как гибридные системы сверхпроводник-ферромагнетик. Несмотря на то, что подобные системы исследуются уже на протяжении нескольких десятилетий, в них по-прежнему обнаруживаются новые и необычные явления. Как известно, сверхпроводимость и магнетизм являются конкурирующими феноменами: магнитные моменты разрушают куперовские пары посредством двух механизмов [50]. Во-первых, магнитная индукция $\mathbf{B}$ влияет на орбитальное движение электронов, стремясь разорвать куперовские пары. Этот так называемый электромагнитный механизм полностью подавляет сверхпроводимость, когда индукция превосходит верхнее критическое поле H_{c2} . Во-вторых, обменное поле магнетика стремится развернуть спины всех электронов в одном направлении, что препятствует образованию спин-синглетных куперовских пар. Из-за этого так называемого парамагнитного эффекта в ферромагнетиках с температурой Кюри Θ , меньшей чем T_c , спин-синглетная сверхпроводимость при $T < \Theta$ выживает лишь в очень небольшом температурном окне [50]. В случае $T_c \lesssim \Theta$ может наблюдаться неоднородная сверхпроводящая фаза Фульде-Феррела-Ларкина-Овчинникова [51, 52].

За последние 14 лет было открыто несколько удивительных материалов, в которых сверхпроводимость и ферромагнетизм сосуществуют в объёме образца (см. обзор [53]): UGe_2 [54] ($T_c = 0.7$ K), URhGe [55] ($T_c = 0.25$ K), UCoGe [56, 57] ($T_c = 0.8$ K) и допированный EuFe_2As_2 [58] ($T_c = 25$ K). Любопытно, что у большей части данных соединений $T_c \ll \Theta$. Считается, что сверхпроводимость в этих материалах выживает благодаря тому, что куперовские пары образуются из электронов с параллельными спинами (пары спин-триплетные). За счёт этого сильное обменное поле не разрушает куперовские пары. Другое интересное свойство ферромагнитных сверхпроводников заключается в неполном вытеснении слабого переменного магнитного поля [55, 56, 58], что можно объяснить тем, что материал находится в спонтанном вихревом состоянии даже в отсутствии внешних полей.

В магнитных материалах существует особый тип коллективных возбуждений — так называемые спиновые волны [59]. Эти волны представляют собой колебания намагниченности, и по этой причине часто называются магнонами. Как правило, частота спиновой волны $\omega(\mathbf{q})$ в ферромагнетиках и антиферромагнетиках зависит от модуля волнового вектора $|\mathbf{q}|$ монотонным образом. В гибридных системах магнетик-сверхпроводник спектр $\omega(\mathbf{q})$ может существенно меняться при переходе в сверхпроводящее состояние. Было показано, что в антиферромагнитных [60] и ферромагнитных сверхпроводниках [61, 62] спектр магнонов в мейснеровском состоянии становится немонотонным. В случае ферромагнитного сверхпроводника реалистичная модель

должна учитывать, что образец находится не в мейснеровском, а в спонтанном вихревом состоянии. Спектр магнонов в присутствии вихрей исследовался в работе [61] в длинноволновом пределе: $\lambda_w \gg a_v$, где λ_w — длина волны, а a_v — межвихревое расстояние. Зависимость $\omega(\mathbf{q})$ была определена в приближении сплошной среды. Противоположный предельный случай, $\lambda_w \lesssim a_v$, ранее не рассматривался.

Влияние магнетизма на динамику вихрей в магнитных сверхпроводниках анализировалось в работах [63–70]. Было показано, что в таких сверхпроводниках имеется дополнительный вклад в вязкость η , связанный с излучением магнонов движущимися вихрями [65, 68, 70]. Увеличение вязкости отражается на вольт-амперной характеристике образца, что позволяет извлекать информацию о спектре спиновых волн из этой характеристики [63, 67]. В статье [68] было предсказано возникновение притяжения между вихря и формирование вихревых кластеров в материалах с достаточно большой магнитной восприимчивостью. При этом, однако, не было исследовано влияние пространственной дисперсии магнитной восприимчивости на взаимодействие между вихрями. Можно ожидать, что эффекты, связанные с пространственной дисперсией, будут сильны в системах, в которых характерная магнитная длина (толщина доменной стенки — см. главу 4) порядка лондоновской длины.

Следует также отметить, что в работах [63, 64, 67] рассматривались антиферромагнитные материалы. Вопрос о том, как излучение спиновых волн вихрями в ферромагнитных сверхпроводниках отразится на измеряемых характеристиках, остаётся открытым.

Цель и задачи работы

Настоящая диссертация посвящена исследованию статических и динамических характеристик абрикосовских вихрей в анизотропных сверхпроводниках и структурах сверхпроводник-ферромагнетик. Для заполнения описанных выше пробелов в теории были решены следующие задачи:

- расчёт потенциала пиннинга вихря на цилиндрическом дефекте с размером сечения, много меньшим длины когерентности;
- расчёт тензора вязкости $\hat{\eta}$ в анизотропном сверхпроводнике с использованием реалистичной модели вихря;
- определение спектра магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике с длиной волны порядка расстояния между вихрями;
- исследование влияния магнитной подсистемы на динамику вихрей, вольт-амперную характеристику и поверхностный импеданс ферромагнитного сверхпроводника и сверхрешётки

сверхпроводник-ферромагнетик;

- исследование взаимодействия вихрей в ферромагнитных сверхпроводниках и сверхрешётках сверхпроводник-ферромагнетик с сильной пространственной дисперсией магнитной восприимчивости.

Научная новизна работы

Научная новизна работы определяется оригинальностью полученных результатов и заключается в следующем:

- предложен новый метод расчёта потенциала пиннинга вихря на малом цилиндрическом изоляторном дефекте (полости) с произвольным поперечным сечением в приближении теории Гинзбурга-Ландау. Впервые получены асимптотически точные выражения (в пределе малого дефекта) в приближении теории Гинзбурга-Ландау для потенциала пиннинга в случае полости с эллиптическим сечением и для тока депиннинга в случае полости в форме кругового цилиндра;
- в приближении нестационарной теории Гинзбурга-Ландау получен ряд новых асимптотически точных выражений для тензора вязкости вихря $\hat{\eta}$ в анизотропном сверхпроводнике с несоответствием анизотропий нормальной проводимости и массы куперовской пары ($m_{ab}\sigma_{ab}/m_c\sigma_c \neq 1$). Впервые показано, что в чистом сверхпроводнике, когда внутреннее магнитное поле много меньше верхнего критического поля, анизотропия вязкости может существенно зависеть от температуры даже в небольшом температурном окне вблизи T_c , где применима нестационарная теория Гинзбурга-Ландау;
- предсказано, что в ферромагнитном сверхпроводнике с решёткой вихрей спектр магнонов будет иметь зонную структуру. Впервые произведён расчёт зонного спектра магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике;
- вычислена сила, действующая со стороны магнитных моментов на движущиеся абрикосовские вихри в ферромагнитных сверхпроводниках и сверхрешётках ферромагнетик-сверхпроводник (FS) в случаях, когда по образцу протекает постоянный или слабый переменный ток. Показано, что в ситуации, когда вихри излучают спиновые волны, на вольт-амперной характеристике ферромагнитного сверхпроводника и на зависимостях поверхностного импеданса от частоты и магнитного поля должны появиться наблюдаемые резонансные особенности. В предшествующих работах подобные детальные расчёты производились лишь для случая антиферромагнитного сверхпроводника;

- впервые показано, что в гибридной структуре сверхпроводник-ферромагнетик (SF сверхрешётке или ферромагнитном сверхпроводнике) с большим параметром Гинзбурга-Ландау ($\kappa \gg 1$) сильная пространственная дисперсия магнитной восприимчивости может привести к появлению пространственных осцилляций магнитного поля вихря и к притяжению вихрей на некоторых расстояниях. Исследована фазовая диаграмма таких систем. В предыдущих работах отсутствовал корректный расчёт потенциала взаимодействия между вихрями в SF системах с учётом пространственной дисперсии магнитной восприимчивости.

Теоретическая и практическая значимость работы

Знание потенциала взаимодействия одного вихря с дефектом необходимо для расчёта силы пиннинга и критического тока в системе, содержащей большое количество вихрей и дефектов [20]. Кроме того, расчёты потенциала пиннинга в случае малого дефекта будут полезны при моделировании систем, в которых имеет место так называемый рэтчет-эффект [71–76], заключающийся в несимметричном движении вихрей в анизотропном потенциале под действием переменного тока.

Расчёт тензора вязкости $\hat{\eta}$ будет полезен для интерпретации экспериментальных данных по электросопротивлению анизотропных сверхпроводников.

Результаты расчёта спектра спиновых волн в ферромагнитном сверхпроводнике в смешанном состоянии могут быть использованы для интерпретации экспериментальных данных по коэффициенту отражения микроволнового излучения от образца и интенсивности рассеяния нейтронов.

Результаты расчёта силы, действующей со стороны магнитных моментов на движущиеся вихри в SF системах, могут быть применены для извлечения информации о спектре магнонов в системе из вольт-амперной характеристики образца и из данных по поверхностному импедансу.

Результаты расчёта силы взаимодействия между вихрями в средах с сильной пространственной дисперсией магнитной восприимчивости представляют фундаментальный интерес и, кроме того, могут быть использованы для создания искусственных SF систем с управляемыми магнитными свойствами.

Методология и методы исследования

В работе использовались такие феноменологические подходы, как обычная и нестационарная теория Гинзбурга-Ландау, теория Лондонов, а также уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта. Все эти подходы имеют микроскопическое обоснование. Вычисления проведены преимущественно аналитически, с привлечением численного счёта при необходимости.

Положения, выносимые на защиту

- 1) В рамках теории Гинзбурга-Ландау расчёт потенциала взаимодействия абрикосовского вихря с цилиндрическим изоляторным дефектом, характерный размер сечения которого много меньше длины когерентности, может быть выполнен по теории возмущений и сводится к решению внешней краевой задачи для уравнения Лапласа.
- 2) Анизотропия сопротивления чистого анизотропного сверхпроводника с критической температурой T_c в вихревом состоянии может существенно зависеть от температуры T даже в небольшом температурном окне $T_c - T \ll T_c$.
- 3) Спектр спиновых волн в ферромагнитном сверхпроводнике с идеальной решёткой вихрей имеет зонную структуру. Щели между соседними зонами спектра магнонов должны проявлять себя в виде максимумов на зависимости микроволнового коэффициента отражения от частоты.
- 4) На вольтамперных характеристиках гибридных систем сверхпроводник-ферромагнетик и на зависимостях поверхностного импеданса от частоты и магнитного поля должны наблюдаться резонансные особенности, связанные с черенковской генерацией магнонов движущимися абрикосовскими вихрями.
- 5) В сверхрешётках, составленных из сверхпроводящих слоёв с большим параметром Гинзбурга-Ландау и ферромагнитных слоёв с сильной пространственной дисперсией магнитной восприимчивости, сверхпроводящая электродинамика может стать сильно нелокальной. В таких системах поле абрикосовских вихрей может испытывать пространственные осцилляции, при этом фазовый переход из мейснеровского в вихревое состояние будет фазовым переходом первого рода. Если образец имеет форму пластины, в нём должно наблюдаться промежуточное вихревое состояние.

Вклад автора в полученные результаты

Соискатель принимал активное участие в постановке задач и интерпретации результатов. Вклад автора в решение поставленных задач является определяющим.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов работы обеспечена выбором адекватных моделей, отражающих основные особенности исследуемых систем. Кроме того, частные следствия из полученных результатов согласуются с выводами, приведёнными в предшествующих работах.

Результаты работы докладывались на семинарах Института Физики Микроструктур РАН (Нижний Новгород) и Университета Бордо 1 (Бордо, Франция), а также на международных конференциях: “Нанопизика и наноэлектроника” (2011-2014 гг., Нижний Новгород), “Dubna-Nano2012” (2012 г., Дубна), “Vortex VIII” (2013 г., Родос, Греция), “Condensed Matter in Paris 2014” (2014 г., Париж, Франция).

Результаты диссертации опубликованы в 12 работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4, A5] и 7 работ в сборниках тезисов докладов и трудов конференций [A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций автора, шести приложений и библиографии. Общий объем диссертации — 131 страницы, включая 20 рисунков и 5 таблиц. Библиография включает 168 наименований на 15 страницах.

Во введении описывается состояние исследований по теме диссертации на момент её написания, обосновывается актуальность выбранной темы, раскрывается новизна и значимость работы, приводятся выносимые на защиту положения и план диссертации. В первой главе в приближении теории Гинзбурга-Ландау рассматривается задача о пиннинге вихря на малой цилиндрической полости или изоляторной области. Во второй главе в приближении нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау вычисляется тензор вязкости $\hat{\eta}$ в анизотропном сверхпроводнике. В третьей главе с использованием уравнений Лондонов и Ландау-Лифшица-Гильберта анализируется спектр спиновых волн в ферромагнитном сверхпроводнике в смешанном состоянии; затем вычисляется сила, действующая со стороны магнитных моментов на движущиеся вихри в ферромагнитных сверхпроводниках и SF сверхрешётках. В четвёртой главе в лондоновском приближении рассматривается взаимодействие вихрей в гибридных SF системах с сильной пространственной дисперсией магнитной восприимчивости. Выводится условие притяжения вихрей и анализируется фазовая диаграмма образца, в котором такое притяжение имеет место. В начале каждой главы даётся более подробное описание предшествующих работ, имеющих отношение к решаемой задаче, а также детальный план главы. В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Пиннинг абрикосовского вихря на малой цилиндрической полости

1.1. Введение

Задача о пиннинге абрикосовского вихря обычно ставится следующим образом: рассматривается бесконечное сверхпроводящее пространство, содержащее цилиндрический дефект и абрикосовский вихрь, ориентированный параллельно дефекту — см. Рис. 1.1. Требуется определить потенциал взаимодействия вихря с дефектом (потенциал пиннинга) и ток депиннинга. Впервые в такой постановке задача была решена в классической работе Мкртчяна и Шмидта [21], где был определён потенциал взаимодействия вихря с полостью в форме кругового цилиндра в лондоновском приближении (Рис.1.1а). В рамках этого приближения поле вихря в сверхпроводнике определяется из уравнения Лондонов [77]

$$-\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \mathbf{z}_0 \delta^{(2)}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_0) \quad (1.1)$$

с граничным условием $\mathbf{B} = \text{const}$ на границе сверхпроводника. Здесь $\mathbf{z}_0$ — орт оси z , а вектор $\mathbf{R}_0$ задаёт положение вихря в плоскости xy . Уравнение (1.1) описывает поле вихря в пределе $\kappa \gg 1$ и может быть использовано для определения потенциала пиннинга в ситуации, изображённой на Рис. 1.1а: необходимо, чтобы размер поперечного сечения дефекта D и расстояние от вихря до дефекта w были много больше длины когерентности.

В упомянутой работе [21] задача была решена для относительно небольших дефектов с радиусом a , много меньшим лондоновской длины. Потенциал пиннинга был детально проанализирован в двух предельных случаях: $w \ll \lambda$ и $w \gg \lambda$. Позднее анализ был распространён на случай промежуточных значений w [22] ($w \sim \lambda$) и на случай больших дефектов [26] ($a \gtrsim \lambda$). В работе [23] было отмечено, что для дефекта произвольной формы можно пренебречь лондоновской экранировкой (членом $\mathbf{B}/\lambda^2$ в уравнении (1.1)), если выполнены условия $w \ll \lambda$ и $D \ll \lambda$. Тогда уравнение (1.1) становится уравнением Пуассона, и потенциал пиннинга вихря на круглой полости можно определить методом электростатического изображения. С использованием метода конформных преобразований было рассмотрено взаимодействие вихря с дефектами более сложной формы [24, 25]. Отметим, что в работах [24, 25] была допущена ошибка при применении данного метода: не было учтено то, что при преобразовании системы координат следует трансформировать не только поле изображений, но и собственное поле вихря (подробнее об

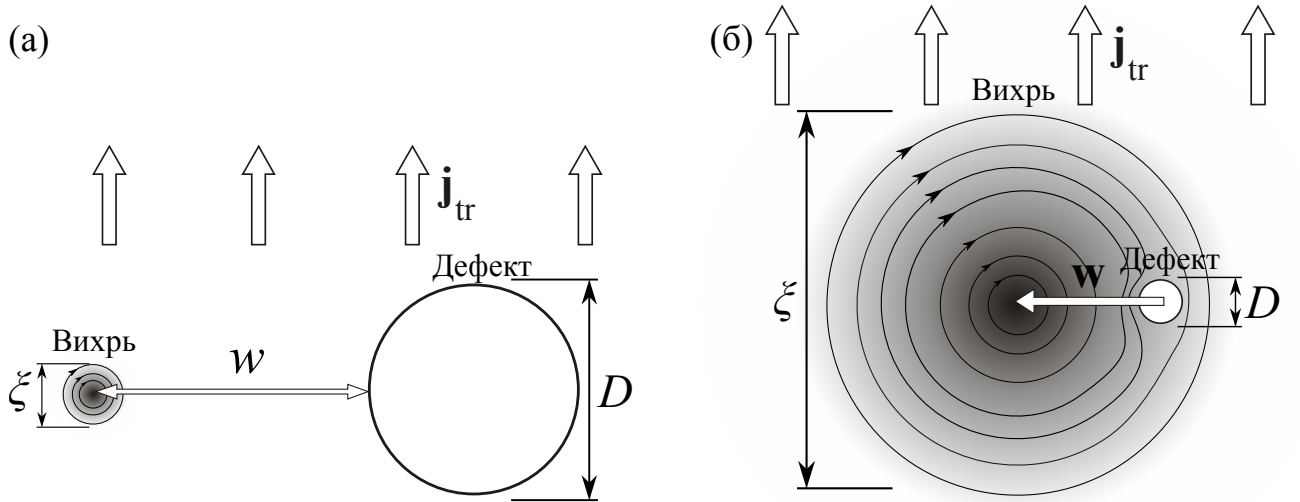


Рис. 1.1. Сверхпроводящее пространство с абрикосовским вихрём и полостью. Показано сечение системы плоскостью, перпендикулярной к оси вихря. Изображение (а) соответствует случаю, когда применима теория Лондонов: $\xi \ll D, w$, где D — размер поперечного сечения дефекта, а w — расстояние от вихря до дефекта. (б) Ситуация, рассмотренная в настоящей работе: дефект мал ($D \ll \xi$) и может быть расположен внутри кора вихря. $\mathbf{j}_{tr}$ — плотность транспортного тока.

этом — в разделе 1.3). Это привело к неверному виду потенциала пиннинга. Данная ошибка была исправлена в работе [A1].

Теория Лондонов не применима для рассмотрения дефектов с размером меньше или порядка длины когерентности. В небольшом диапазоне температур вблизи температуры сверхпроводящего перехода взаимодействие вихря с таким дефектом может быть описано в рамках теории Гинзбурга-Ландау. Данная теория основывается на общей теории фазовых переходов Ландау. Так, свободная энергия сверхпроводника в приближении Гинзбурга-Ландау имеет вид [77]

$$F = \frac{H_c^2}{4\pi n_0} \int \left(\xi^2 \left| \left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 - |\psi|^2 + n_0^{-1} \frac{|\psi|^4}{2} \right) d^3 \mathbf{r} + \int \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r}. \quad (1.2)$$

Здесь n_0 — концентрация куперовских пар в толще сверхпроводника (вдали от вихря), $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, а ψ — комплексный сверхпроводящий параметр порядка. В равновесии функции $\psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ определяются из условия минимальности свободной энергии. Это приводит к следующим двум уравнениям:

$$-\xi^2 \left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + n_0^{-1} |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{j}_s$ — плотность сверхтока:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \frac{|\psi|^2}{n_0} \left(\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta_s \right). \quad (1.5)$$

Здесь θ_s — фаза функции ψ , а лондоновская длина λ равна $\Phi_0/(2\sqrt{2}\pi H_c \xi)$ (ср. с уравнением (1)). В равновесии, помимо уравнений (1.3) и (1.4), должно выполняться следующее условие на границе с вакуумом:

$$\mathbf{n} \left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi = 0, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе сверхпроводника.

Пиннинг вихря на цилиндрическом дефекте в приближении теории Гинзбурга-Ландау рассматривался в ряде работ [10, 27–30]. В обзоре [10] приводится оценка потенциала пиннинга для случая малого дефекта ($D \ll \xi$), основанная на прямом вариационном принципе. Суть этой оценки состоит в том, что свободная энергия (1.2) вычисляется в предположении, что вне дефекта функция $\psi(\mathbf{r})$ совпадает с параметром порядка невозмущённого вихря, а внутри дефекта $\psi = 0$. Данный подход не учитывает искажения вихря в окрестности дефекта, связанного с граничным условием (1.6). В последующих работах задача о пиннинге вихря решалась преимущественно с использованием численных методов [27–30]. В работе [27] произведён расчёт энергии вихря, расположенного точно по центру металлического или изоляторного дефекта (цилиндрически симметричная задача). В статье [28] рассчитан ток депиннинга для изоляторного дефекта с радиусом 0.25ξ и более. В работе [29] рассчитан потенциал взаимодействия вихря с полостью, имеющей квадратное поперечное сечение со стороной 5ξ . Авторы работы [30] исследовали пиннинг решётки абрикосовских вихрей на решётке дефектов, представляющих собой области с пониженной температурой сверхпроводящего перехода.

Из микроскопического рассмотрения следует, что область применимости теории Гинзбурга-Ландау ограничена случаем, когда размер дефекта не слишком мал [7]. Так, размер сечения D должен быть много больше длины когерентности при нулевой температуре ξ_0 . Взаимодействие вихрей с дефектами меньшего размера может быть описано на основе микроскопических теорий — см., например, работы [78–80].

В данной главе диссертации приведены результаты соискателя по задаче о пиннинге вихря на малой цилиндрической полости, или изоляторной области. Раздел (1.3) посвящён приближению теории Гинзбурга-Ландау, которое применяется для аналитического расчёта потенциала пиннинга вихря на полости с характерным размером поперечного сечения $D \ll \xi$. В подразделе 1.2.1 выводится общий вид энергии взаимодействия вихря с полостью. Далее, в подразделах 1.2.2 и 1.2.3 этот результат используется для вычисления точного потенциала пиннинга вихря на полости в форме эллиптического цилиндра. В подразделе 1.2.2 для дефекта с круговым

поперечным сечением определён ток депиннинга. В разделе 1.3 энергия взаимодействия вихря с полостью в форме эллиптического цилиндра вычисляется в лондоновском приближении. В разделе 1.4 приводятся выводы.

1.2. Пиннинг вихря в приближении теории Гинзбурга-Ландау

1.2.1. Общий вид потенциала пиннинга

Мы ограничимся рассмотрением сверхпроводников с большим параметром Гинзбурга-Ландау: $\kappa \gg 1$. В этом случае исходные уравнения (1.3) – (1.5) можно существенно упростить: в этих соотношениях можно пренебречь векторным потенциалом на расстояниях от центра вихря, много меньших лондоновской длины (см. [81]). Чтобы убедиться в этом, сделаем простую оценку. Магнитное поле вихря (в отсутствие дефекта) даётся формулой [77]

$$\mathbf{B} = \mathbf{z}_0 \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda), \quad (r \gg \xi) \quad (1.7)$$

где K_0 — функция Макдональда, а r — расстояние от оси вихря. Здесь и далее в этой главе ось z предполагается параллельной вихрю. Выберем калибровку, в которой фаза параметра порядка совпадает с полярным углом φ ($\psi \propto e^{i\varphi}$), а векторный потенциал в центре вихря равен нулю. В этой калибровке векторный потенциал имеет только компоненту A_φ , которая равна

$$A_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\rho < r} B_z d^2\rho \approx \frac{\Phi_0 r}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{r} \quad (1.8)$$

при $r \ll \lambda$. Здесь использовалось то, что $K_0(x) \approx -\ln x$ при $x \ll 1$. При $r \gg \xi$ параметр порядка ψ приближённо равен $\sqrt{n_0} e^{i\varphi}$, и $|\nabla\psi| \approx |\psi|/\rho$. Тогда нетрудно видеть, что при $r \ll \lambda$

$$|\nabla\psi| \gg \left| \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}\psi \right|. \quad (1.9)$$

В настоящем разделе рассматриваются дефекты с характерным размером $D \ll \xi$. Такие дефекты слабо возмущают параметр порядка, а значит оценка (1.9) остаётся в силе также в присутствии дефекта. Таким образом, в дальнейшем мы будем решать уравнение

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi - \psi + n_0^{-1} |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.10)$$

с граничным условием

$$\mathbf{n} \nabla \psi \Big|_{\partial S} = 0 \quad (1.11)$$

на границе полости, где S — поперечное сечение полости, а ∂S обозначает границу S (под $\mathbf{n}$ будем понимать внешнюю нормаль к ∂S). Мы поместим начало координат внутрь полости.

Пусть в области нахождения дефекта протекает транспортный сверхток с плотностью $\mathbf{j}_{\text{тр}}$. Учтём наличие тока, наложив следующее граничное условие на бесконечности:

$$-\frac{c\Phi_0 |\psi|^2 \nabla \theta_S}{8\pi^2 \lambda^2 n_0} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = \mathbf{j}_{\text{тр}}. \quad (1.12)$$

Если система содержит ровно один одноквантовый вихрь, должно иметь место равенство

$$\oint \nabla \theta_S d\mathbf{l} = 2\pi, \quad (1.13)$$

где интегрирование идёт по достаточно широкому контуру, охватывающему дефект.

Разумно предположить, что система (1.10) – (1.13) имеет решение, когда плотность тока $j_{\text{тр}}$ не превышает некоторую величину j_d , и система неразрешима при $j_{\text{тр}} > j_d$ (вообще говоря, для дефекта с некруговым поперечным сечением j_d может зависеть от направления $\mathbf{j}_{\text{тр}}$). Тогда величину j_d естественно считать током депиннинга.

Решим уравнения (1.10) – (1.13), предполагая, что $j_{\text{тр}} < j_d$. Если транспортный ток много меньше тока распаривания, асимптотика параметра порядка при больших ρ имеет вид

$$\psi \approx \sqrt{n_0} e^{i\varphi' + i\mathbf{q}\rho}, \quad (1.14)$$

где φ' — полярный угол, отсчитываемый от оси, проходящей через центр вихря (см. уравнение (1.15)), а $\mathbf{q} = -8\pi^2 \lambda^2 \mathbf{j}_{\text{тр}} / c\Phi_0$. Формула (1.14) может быть получена из уравнения (1.10), если разложить ψ по степеням ρ и пренебречь членами, пропорциональными $j_{\text{тр}}^2$.

Теперь мы сделаем два предположения, касающихся поведения параметра порядка вблизи дефекта:

- (A) Фаза параметра порядка выходит на свою асимптотику на достаточно малом расстоянии от начала координат: $\theta_S \approx \varphi + \mathbf{q}\rho$ при $\rho \geq R$, где R — некоторый радиус в пределах $\xi \ll R \ll q^{-1}, \lambda$.
- (B) Вихрь слабо искажается малым транспортным током и дефектом. Формально это означает, что решение уравнений (1.10) – (1.13) может быть представлено в виде $\psi = \psi_0 + \psi_1$, где функция ψ_0 соответствует неискажённому вихрю, смещённому относительно начала координат на некоторый вектор $\mathbf{w}$ (см. Рис. 1.1b), а ψ_1 — малое возмущение: $|\psi_1(\rho)| \ll \sqrt{n_0}$ при $\rho < R$.

Предположение (B) оправдано тем, что невозмущённый вихрь соответствует локальному минимуму свободной энергии (в отсутствие дефекта). Следовательно, сильное искажение вихря энергетически невыгодно. Угол φ' , введённый выше, формально определяется из соотношения

$$\tan \varphi' = \frac{y - w_y}{x - w_x} \quad (1.15)$$

Уравнения на функцию ψ_1 получается путём линеаризации уравнения (1.10):

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi_1 - \psi_1 + 2n_0^{-1} |\psi_0|^2 \psi_1 + n_0^{-1} \psi_0^2 \psi_1^* = 0. \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.10) также следует, что на больших расстояниях от центра вихря, где характерный масштаб изменения функции ψ много больше ξ , справедливо соотношение

$$\psi \approx \sqrt{n_0} \left(1 - \frac{\xi^2}{2} (\nabla \theta_s)^2 \right) e^{i\theta_s}.$$

Тогда, согласно предположению (A),

$$\psi_1(\rho) = \psi(\rho) - \psi_0(\rho) = \sqrt{n_0} i e^{i\varphi'}(\mathbf{q}\rho) + O\left(\frac{\sqrt{n_0} \xi^2 q}{\rho}\right) \quad (1.17)$$

при $\rho \sim R$. Наконец, граничное условие на границе дефекта получается из соотношения (1.11):

$$(\nabla \psi_1 + \nabla \psi_0) \mathbf{n} \Big|_{\partial S} = 0. \quad (1.18)$$

Для вывода условия разрешимости уравнений (1.16) и (1.18) с учётом (1.17) мы применим метод, аналогичный приёму, использованному в статье [81] для определения силы вязкого трения, действующей на движущийся вихрь. Введём вспомогательную функцию $\psi_d = (\mathbf{d}\nabla)\psi_0$, где $\mathbf{d}$ — единичный вектор, лежащий в плоскости xu . Функция ψ_d удовлетворяет уравнению

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi_d - \psi_d + 2n_0^{-1} |\psi_0|^2 \psi_d + n_0^{-1} \psi_0^2 \psi_d^* = 0. \quad (1.19)$$

Умножим уравнение (1.16) на ψ_d и вычтем из него уравнение (1.19), умноженное на ψ_1^* . Сложив полученное соотношение с комплексно сопряжённым, получаем

$$\operatorname{div} (-\psi_d^* \nabla \psi_1 + \psi_1 \nabla \psi_d^* - \psi_d \nabla \psi_1^* + \psi_1^* \nabla \psi_d) = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение по области $\rho \notin S$, $|\rho - \mathbf{w}| < R$ и применив теорему Гаусса, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{|\rho - \mathbf{w}|=R} (-\psi_d^* \nabla \psi_1 + \psi_1 \nabla \psi_d^* - \psi_d \nabla \psi_1^* + \psi_1^* \nabla \psi_d) \mathbf{n}_1 d\ell \\ & - \int_{\partial S} (-\psi_d^* \nabla \psi_1 + \psi_1 \nabla \psi_d^* - \psi_d \nabla \psi_1^* + \psi_1^* \nabla \psi_d) \mathbf{n} d\ell = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $\mathbf{n}_1$ — внешняя нормаль к окружности $|\rho - \mathbf{w}| = R$. Первый интеграл в уравнении (1.20) легко вычисляется с использованием соотношения (1.17):

$$\int_{|\rho - \mathbf{w}|=R} (-\psi_d^* \nabla \psi_1 + \psi_1 \nabla \psi_d^* - \psi_d \nabla \psi_1^* + \psi_1^* \nabla \psi_d) \mathbf{n} d\ell \approx \frac{32\pi^3 \lambda^2 n_0}{c\Phi_0} \mathbf{d} \cdot [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{j}_{\text{tr}}]. \quad (1.21)$$

Здесь мы пренебрегли членами, пропорциональными ξ^2/R^2 , возникающими за счёт непостоянства модуля параметра порядка. Отметим, что ось z направлена против магнитного поля. Для

преобразования второго интеграла в уравнении (1.20) воспользуемся соотношением (1.18) и теоремой Гаусса:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} \left(-\psi_d^* \nabla \psi_1 - \psi_d \nabla \psi_1^* + \psi_1 \nabla \psi_d^* + \psi_1^* \nabla \psi_d \right) \mathbf{n} d\ell \\ & \approx S \cdot \operatorname{div} \left(\psi_d^* \nabla \psi_0 + \psi_d \nabla \psi_0^* \right) \Big|_{\rho=0} + \int_{\partial S} \left(\psi_1 \nabla \psi_d^*(0) + \psi_1^* \nabla \psi_d(0) \right) \mathbf{n} d\ell. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь и далее мы пренебрегаем членами, много меньшими $\sqrt{n_0} D^2 / \xi^3$. Для дальнейшего преобразования последнего интеграла в соотношении (1.22) нам нужно определить значение функции ψ_1 на границе полости. Заметим, что вблизи полости характерный масштаб изменения функции ψ_1 много меньше длины когерентности (так как $D \ll \xi$), значит, при $\rho \ll \xi$ в уравнении (1.16) главными являются члены, содержащие производные от ψ . Таким образом, вблизи полости уравнение (1.16) сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi_1 = 0. \quad (1.23)$$

Так как поправки порядка $\sqrt{n_0} D^2 / \xi^2$ к ψ_1 несущественны, граничное условие (1.18) также может быть упрощено:

$$\nabla \psi_1 \mathbf{n} \Big|_{\partial S} = -\nabla \psi_0(0) \mathbf{n}. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.23) и (1.24) эквивалентны электростатической задаче, в которой функция ψ_1 играет роль потенциала заряженного цилиндра¹. Соотношение

$$\oint_{\partial S} \nabla \psi_1 \mathbf{n} d\ell = 0$$

Означает, что полный “заряд” цилиндра равен нулю. Тогда существует решение уравнений (1.23) и (1.24), спадающее на бесконечности не медленнее, чем ρ^{-1} . Мы обозначим это решение за $\psi_1^{(d)}$.

Также мы введём функцию

$$\psi_1^{(i)} = \psi_1 - \psi_1^{(d)}. \quad (1.25)$$

Эта функция, вообще говоря, возрастает при удалении от дефекта, но только при $\rho \ll \xi$. В Приложении А показано, что вкладом от этой функции в интеграл в формуле (1.22) можно пренебречь. Тогда, используя уравнения (1.20) - (1.22) и то, что функция ψ_0 удовлетворяет уравнению (1.10), получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{4\pi n_0 \Phi_0}{H_c^2 c} \mathbf{d} \cdot [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{j}_{\text{tr}}] + S (\mathbf{d} \nabla) \left(\xi^2 |\nabla \psi_0|^2 - |\psi_0|^2 + \frac{|\psi_0|^4}{2n_0} \right) \Big|_{\rho=0} \\ & + \xi^2 \int_{\partial S} \left(\psi_1^{(d)} \nabla \psi_d^*(0) + \psi_1^{(d)*} \nabla \psi_d(0) \right) \mathbf{n} d\ell \approx 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

¹ Важно понимать, что уравнения (1.23) и (1.24) не могут быть выведены из электростатического приближения для теории Лондонов [23–25]. Так, в лондоновском приближении концентрация куперовских пар в сверхпроводнике предполагается постоянной, тогда как подход, применяемый в настоящей главе, позволяет учитывать изменение модуля параметра порядка в коре вихря.

В силу линейности уравнений (1.23) и (1.24), их решение можно представить в виде

$$\psi_1^{(d)} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla \psi_0(0), \quad (1.27)$$

где $\mathbf{g}$ – действительное векторное поле, которое определяется из соотношений

$$\nabla^2 \mathbf{g} = 0, \quad (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{g} \Big|_{\partial S} = -\mathbf{n}, \quad \mathbf{g} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.28)$$

Тогда

$$\int_{\partial S} \left(\psi_1^{(d)} \nabla \psi_d^*(0) + \psi_1^{(d)*} \nabla \psi_d(0) \right) \mathbf{n} d\ell = (\mathbf{d} \nabla) \left(\nabla \psi_0 \hat{G} \nabla \psi_0^* \right) \Big|_{\rho=0},$$

где $\hat{G}$ – действительная симметричная матрица с компонентами

$$G_{ij} = \int_{\partial S} g_i n_j d\ell = \int_{\rho \notin S} \nabla g_i \nabla g_j d^2 \rho. \quad (1.29)$$

Уравнение (1.26) приводится к виду

$$\frac{\Phi_0}{c} \mathbf{d} \cdot [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{j}_{\text{tr}}] - (\mathbf{d} \nabla_{\mathbf{w}}) U_p = 0. \quad (1.30)$$

Здесь $\nabla_{\mathbf{w}}$ – градиент по смещению вихря относительно начала координат $\mathbf{w}$, а

$$U_p = -S \frac{H_c^2}{4\pi n_0} \left(\xi^2 |\nabla \psi_0|^2 - |\psi_0|^2 + \frac{|\psi_0|^4}{2n_0} \right) \Big|_{\rho=0} - \xi^2 \frac{H_c^2}{4\pi n_0} \nabla \psi_0(0) \hat{G} \nabla \psi_0^*(0). \quad (1.31)$$

Так как вектор $\mathbf{d}$ – произвольный, то в уравнении (1.30) его можно опустить, что приводит нас к уравнению баланса сил

$$\frac{\Phi_0}{c} \mathbf{z}_0 \times \mathbf{j}_{\text{tr}} - \nabla_{\mathbf{w}} U_p(\mathbf{w}) = 0. \quad (1.32)$$

Здесь первый член представляет собой силу Лоренца (ср. с (4)), а второй член является силой взаимодействия вихря с дефектом $\mathbf{F}_p = -\nabla_{\mathbf{w}} U_p(\mathbf{w})$. Отсюда можно заключить, что функция $U_p(\mathbf{w})$ является потенциалом пиннинга. Данный потенциал имеет две составляющих. Первая компонента,

$$-S \frac{H_c^2}{4\pi n_0} \left(\xi^2 |\nabla \psi_0|^2 - |\psi_0|^2 + \frac{|\psi_0|^4}{2n_0} \right) \Big|_{\rho=0}, \quad (1.33)$$

связана с тем, что параметр порядка внутри полости подавлен ($\psi = 0$). Отметим, что именно выражение (1.33) приводится в качестве оценки потенциала пиннинга в обзоре [10]. Вторая компонента,

$$- \xi^2 \frac{H_c^2}{4\pi n_0} \nabla \psi_0(0) \hat{G} \nabla \psi_0^*(0), \quad (1.34)$$

связана с искажением вихря вблизи полости. Вклады (1.33) и (1.34), вообще говоря, одного порядка величины.

Прежде чем перейти к вычислению потенциала пиннинга в явном виде, отметим, что приведённые здесь соображения обобщаются также на случай анизотропного сверхпроводника. Действительно, с учётом анизотропии в пределе $\kappa \gg 1$ свободная энергия Гинзбурга-Ландау равна

$$F = \frac{H_c^2}{4\pi n_0} \int \left(\xi_x^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \xi_y^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|^2 + \xi_z^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 - |\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2n_0} \right) d^3 \mathbf{r}, \quad (1.35)$$

где ξ_x , ξ_y и ξ_z — длины когерентности для различных направлений. Масштабное преобразование $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y\xi_x/\xi_y$ и $\tilde{z} = z\xi_x/\xi_z$ приводит свободную энергию (1.35) к изотропному виду. Таким образом, в координатах $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ мы получим уравнения (1.10) и (1.11).

Теперь рассмотрим подробнее два типа полостей.

1.2.2. Дефект в форме кругового цилиндра

В случае, когда дефект является круговым цилиндром с радиусом a , и начало координат находится на его оси, решение уравнений (1.23) и (1.24) имеет вид

$$\psi_1^{(d)} = \frac{a^2 (\nabla \psi_0 \cdot \boldsymbol{\rho})}{\rho^2}, \quad (1.36)$$

и потенциал пиннинга равен

$$U_p(\mathbf{w}) = -\frac{H_c^2 a^2}{4n_0} \left(2\xi^2 |\nabla \psi_0|^2 - |\psi_0|^2 + \frac{|\psi_0|^4}{2n_0} \right) \Big|_{\rho=0}. \quad (1.37)$$

Функция ψ_0 может быть определена численно из уравнения (1.10) с использованием стандартных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробности этих несложных вычислений здесь для краткости опущены. Ранее детальный численный анализ функции $f(\rho)$ был проведён в работе [36].

Соотношение (1.37) позволяет определить максимальную энергию пиннинга E_p :

$$E_p = U_p(\infty) - U_p(0) = 0.47 H_c^2 a^2.$$

Данный ответ совпадает с численным результатом из статьи [27] с точностью до множителя порядка единицы.

Профили потенциала и силы пиннинга изображены на Рис. 1.2. Сила пиннинга имеет максимум, когда смещение вихря равно $w_{\text{cr}} = 0.84\xi$, где $F_p = F_{\text{cr}} = 0.252 H_c^2 a^2 / \xi$. При $j_{\text{tr}} > c F_{\text{cr}} / \Phi_0$ уравнение баланса сил (1.32) не имеет решения, следовательно, величина

$$j_d = c F_{\text{cr}} / \Phi_0 = 0.252 \frac{H_c^2 a^2 e}{\pi \hbar \xi} \quad (1.38)$$

является плотностью тока депиннинга. Отметим, что в нашем случае j_d много меньше плотности тока распаривания

$$J_c = \frac{2|e|\xi H_c^2}{3\sqrt{3}\pi\hbar},$$

тогда как для дефектов с размером $D \gg \xi$ величины j_d и J_c одного порядка [21].

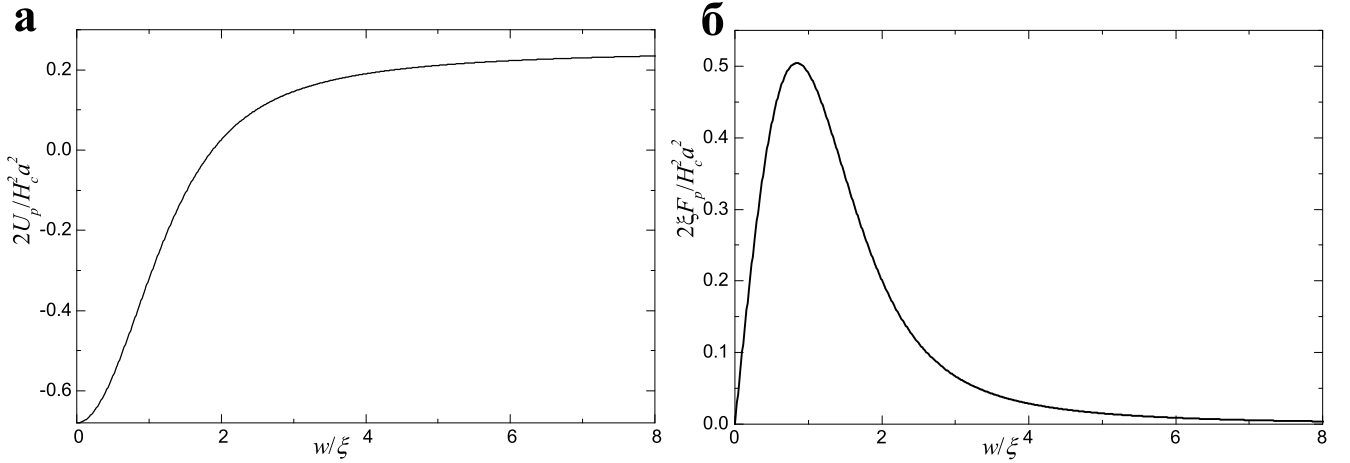


Рис. 1.2. Профили потенциала (а) и силы пиннинга (б) для цилиндрической полости с радиусом a .

При $j < j_d$ уравнение (1.32) имеет два решения из-за немонотонности функции $F_p(w)$, но решение, отвечающее большему смещению вихря, термодинамически неустойчиво. Действительно, нетрудно показать, что оно соответствует седловой точке поправки ΔF к свободной энергии вихря, связанной с наличием как дефекта, так и тока:

$$\Delta F = U_p - \frac{\Phi_0}{c} [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{j}_w] \mathbf{w}.$$

Согласно уравнению (1.38), ток депиннинга растёт пропорционально a^2 при увеличении размера дефекта. Очевидно, рост тока депиннинга должен замедлиться, когда размер дефекта станет порядка длины когерентности (в противном случае при $a \gtrsim \xi$ ток депиннинга станет больше J_c). Значит, можно ожидать, что при $a \sim \xi$ уравнение (1.38) будет давать оценку сверху для j_d . В работе [28] приводится численное значение

$$j_d = 0.01 \frac{H_c^2 \xi e}{\pi \hbar}, \quad (1.39)$$

для дефекта с радиусом 0.25ξ , что действительно меньше ответа, следующего из формулы (1.38).

Любопытным следствием уравнения баланса сил (1.32) является существование устойчивого связанного состояния, в котором центр вихря находится вне дефекта (то есть, $w > a$, и даже $w \gg a$). Данное состояние должно наблюдаться при достаточно малом транспортном токе. Однако, в работе [28] связанное состояние не было обнаружено численно. Это может быть связано с тем, что рассматривались достаточно большие дефекты ($a \geq 0.25\xi \sim w_{cr}$), а также с сильным влиянием на j_d внешней границы ячейки, внутри которой численно решалось уравнение Гинзбурга-Ландау.

1.2.3. Дефект в форме эллиптического цилиндра

Теперь мы рассмотрим полость в форме эллиптического цилиндра. Пусть границей сечения дефекта плоскостью xu является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

при этом $a > b$. Для определения векторного поля $\mathbf{g}$ удобно перейти к эллиптическим координатам (ζ, ϑ) :

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} \cosh \zeta \cos \vartheta, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2} \sinh \zeta \sin \vartheta.$$

На границе дефекта $\zeta = \zeta_0$, где

$$\sinh \zeta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \cosh \zeta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Уравнения (1.28) в новых переменных принимают вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad \mathbf{g} \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial g_x}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = -b \cos \vartheta, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = -a \sin \vartheta. \quad (1.40)$$

Несложно найти решение этих уравнений:

$$g_x = b e^{\zeta_0 - \zeta} \cos \vartheta, \quad g_y = a e^{\zeta_0 - \zeta} \sin \vartheta. \quad (1.41)$$

Произведя интегрирование в уравнении (1.29), получаем

$$G_{xx} = \pi b^2, \quad G_{yy} = \pi a^2, \quad G_{xy} = G_{yx} = 0. \quad (1.42)$$

Согласно уравнению (1.31), потенциал пиннинга равен

$$U_p = -\frac{H_c^2}{4n_0} \left[ab \left(\xi^2 |\nabla \psi_0|^2 - |\psi_0|^2 + \frac{|\psi_0|^4}{2n_0} \right) + \xi^2 b^2 \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right|^2 + \xi^2 a^2 \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right|^2 \right] \Big|_{\rho=0}. \quad (1.43)$$

Как можно было ожидать, данный потенциал анизотропен. Как следствие, смещение вихря w будет зависеть не только от модуля, но и от направления транспортного тока.

1.3. Пиннинг вихря в приближении теории Лондонов

Результаты из раздела 1.2, формально выведенные в пределе $D \ll \xi$, в некоторых случаях могут быть применены к дефектам большего размера. Действительно, предположим, что выполнены следующие два условия:

- (i) Искривление вихря, вносимое дефектом, мало, что формально означает $|\psi_1| \ll \sqrt{n_0}$ (ср. с предположением (B) из раздела 1.2.1).

(ii) Внутри дефекта изменение величины $\nabla\psi_0(\rho)$ много меньше её абсолютного значения.

Тогда, как нетрудно видеть, для расчёта потенциала пиннинга мы можем по-прежнему применять метод, основанный на уравнениях (1.28), (1.29) и (1.31). Очевидно, условия (i) и (ii) выполнены, если дефект находится достаточно далеко от центра вихря: $w \gg D, \xi$. При этом допустима ситуация, когда размер дефекта много больше длины когерентности. Отметим, что область параметров $w \gg D \gg \xi$ перекрывается с областью применимости теории Лондонов. Таким образом, мы имеем возможность сравнить потенциалы пиннинга (1.37) и (1.43) с аналогичными потенциалами, вычисленными в лондоновском приближении в предшествующих работах [23–25].

Для дефекта в форме кругового цилиндра, согласно уравнению (1.37), при $w \gg \xi$ получаем

$$U_p \approx -\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{a^2}{w^2} + \text{const.} \quad (1.44)$$

Данный ответ хорошо согласуется с результатом Буздина и Дауменса — см. формулу (5) в работе [24]. Для эллиптического эффекта при $w \gg a$ формула (1.43) даёт

$$U_p \approx -\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{w^2} + \frac{b^2 w_y^2}{w^4} + \frac{a^2 w_x^2}{w^4} \right) + \text{const}, \quad (1.45)$$

тогда как в работе [24] приводится соотношение

$$U_p = -\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{w^2}, \quad (1.46)$$

что, очевидно, не совпадает с (1.45). Причина этого расхождения будет разобрана ниже.

В лондоновском приближении энергия взаимодействия вихря с цилиндрическим дефектом в расчёте на единицу длины вихря даётся формулой

$$U_p = \frac{\Phi_0 B_{im}(\mathbf{w})}{8\pi}, \quad (1.47)$$

где B_{im} — z -проекция поля вихрей-изображений, расположенных внутри дефекта. Если все характерные масштабы системы (в данном случае, D и w) много меньше лондоновской длины, можно применить электростатическое приближение [23] и пренебречь в уравнении (1.1) членом $\mathbf{B}/\lambda^2$, ответственным за экранировку:

$$\nabla^2 B_z = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{w}). \quad (1.48)$$

Тогда поле изображений формально определяется как

$$B_{im} = B_z - \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \left| \frac{\lambda}{\zeta - \zeta_0} \right|, \quad (1.49)$$

где $\zeta = x + iy$, $\zeta_0 = w_x + iw_y$. Второй член в этой формуле представляет собой собственное поле вихря, взятое с обратным знаком. Вихри-изображения располагаются таким образом, чтобы

на границе полости компонента B_z была постоянной, и суммарная завихренность полости была нулевой (это соответствует ситуации, когда внутри самого дефекта нет запиннигованных вихрей). Если полость является круговым цилиндром с радиусом a_0 , поле изображений в центре реального вихря равно [23]

$$B_{im}^c(\zeta_0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \left(1 - \frac{a_0^2}{|\zeta_0|^2} \right). \quad (1.50)$$

Для определения магнитного поля в случае дефекта с некруговым поперечным сечением можно воспользоваться методом конформных отображений. Произведём преобразование комплексной плоскости ζ посредством аналитической функции $W(\zeta) = x'(\zeta) + iy'(\zeta)$. Уравнение Пуассона (1.48) сохраняет свой вид при переходе к переменным x' и y' , поэтому магнитное поле в плоскости (x', y') даётся формулой

$$B_z(W) = B_z^c(\zeta(W)),$$

где $B_z^c(\zeta)$ соответствует решению уравнения (1.48) с дефектом, являющимся круговым цилиндром. Пользуясь определением (1.49), находим поле изображений в центре вихря:

$$B_{im}(W_0) = B_{im}^c(\zeta(W_0)) + \left[\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \left| \frac{\lambda}{\zeta(W) - \zeta_0} \right| - \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \left| \frac{\lambda}{W - W_0} \right| \right] \Big|_{W=W_0}, \quad (1.51)$$

где комплексная величина $W_0 = W(\zeta_0)$ задаёт положение вихря в плоскости (x', y') . Из уравнений (1.47) и (1.51) следует, что потенциал пиннинга равен

$$U_p = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left[\ln \left(1 - \frac{a_0^2}{|\zeta(W_0)|^2} \right) - \ln \left| \frac{d\zeta}{dW}(W_0) \right| \right]. \quad (1.52)$$

Здесь первый логарифмический член представляет собой преобразованное поле изображений $B_{im}^c(\zeta)$. Второй член возникает в результате преобразования собственного поля вихря, что эффективно приводит к появлению новых изображений. В работе [24] этот член не был учтён, что привело неверному виду потенциала пиннинга (1.46). Пользуясь формулой (1.52), мы можем исправить этот результат. Применив преобразование Жуковского

$$W(\zeta) = \frac{a+b}{2} \frac{\zeta}{a_0} + \frac{a-b}{2} \frac{a_0}{\zeta}, \quad (1.53)$$

мы получаем потенциал пиннинга для эллиптического дефекта с полуосями a и b :

$$U_p = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left[\ln \left(1 - \left| \frac{a+b}{W_0 + \sqrt{W_0^2 - a^2 + b^2}} \right|^2 \right) - \ln \left| 1 + \frac{W_0}{\sqrt{W_0^2 - a^2 + b^2}} \right| \right] + \text{const.} \quad (1.54)$$

При $|W_0| \gg a$ эта формула согласуется с соотношением (1.45).

1.4. Выводы

Центральными результатами данной главы являются уравнения (1.28), (1.29) и (1.31), определяющие потенциал взаимодействия вихря с малой ($D \ll \xi$) цилиндрической полостью или изоляторной областью с поперечным сечением произвольной формы. Из этих уравнений следует, что для расчёта потенциала пиннинга достаточно решить граничную задачу Неймана для уравнения Пуассона. Данная задача довольно хорошо исследована [82], и её решение существенно проще решения нелинейного уравнения Гинзбурга-Ландау. Важно отметить, что метод, развитый здесь, применим не только к объёмным сверхпроводникам, но и к тонким сверхпроводящим плёнкам, если вихри ориентированы перпендикулярно к плёнке.

На основе соотношений (1.28), (1.29) и (1.31) рассчитан потенциал взаимодействия вихря с полостью в форме эллиптического цилиндра (см. формулу (1.43)). Благодаря тому, что характерная ширина потенциала пиннинга порядка длины когерентности, что много больше размера дефекта, при прикладывании малого транспортного тока возможно формирование метастабильного связанного состояния, подобного изображённому на Рис. 1.1а. Смещение вихря относительно дефекта может быть обнаружено экспериментально с использованием сканирующего туннельного микроскопа или нано-сквида [83].

Взаимодействие вихря с цилиндрической полостью рассмотрено также в лондоновском приближении. Выведено соотношение (1.52), позволяющее непосредственно вычислять потенциал пиннинга на полости сложной формы, если известно конформное преобразование, переводящее область $\rho > a_0$ в область $\rho \notin S$, где S — поперечное сечение дефекта. Результаты, полученные в рамках теорий Гинзбурга-Ландау и Лондонов (уравнения (1.45) и (1.54)) хорошо согласуются между собой.

Вязкость абрикосовского вихря в анизотропном сверхпроводнике второго рода

2.1. Введение

В предыдущей главе был рассмотрен случай малой плотности тока, когда вихри захвачены дефектами. В противоположном случае, если плотность тока много больше критической, сила пиннинга становится несущественной по сравнению с силой Лоренца, и происходит стационарное течение вихрей. В этом режиме сопротивление сверхпроводника определяется вязкостью η (см. формулы (7) и (8)). В работах [31, 84] было показано, что в сверхпроводнике имеется два основных механизма диссипации, дающих сопоставимый вклад в вязкость вихря. Первый механизм связан с генерацией неравновесных квазичастиц в процессе релаксации параметра порядка [84]. Второй вклад в вязкость происходит от омических потерь за счёт нормальных токов, протекающими через кор движущегося вихря [31].

Строгий подход к расчёту величины η был предложен Шмидом [32], а затем развит Горьковым и Копниным [33] (см. также обзор [81]). Этот подход основан на нестационарном уравнении Гинзбурга-Ландау

$$\Gamma \left(\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - 2ie\Phi\psi \right) = -\frac{\delta F}{\delta \psi^*}, \quad (2.1)$$

справедливым для бесщелевых сверхпроводников. Здесь Γ — константа релаксации, Φ — электрический потенциал, а F — свободная энергия. С использованием метода Горькова и Копнина вязкость изолированного вихря в изотропном сверхпроводнике вычислялась в работах [35–37]. Отметим, что приближение изолированного вихря применимо, если магнитное поле в сверхпроводнике много меньше верхнего критического поля H_{c2} . Разбор случая, когда поле близко к H_{c2} , можно найти, например, в книге [34].

В приближении нестационарной теории Гинзбурга-Ландау вязкость вихря в анизотропном сверхпроводнике вычислялась в работах [39, 40]. В статье [40] было показано, что для одноосного сверхпроводника с параметром $\kappa \gg 1$ задача сводится к изотропной, если отношение $s_0 = m_c \sigma_c / m_{ab} \sigma_{ab}$ равно единице. Более сложный случай $s_0 \neq 1$ (который может реализоваться в относительно чистом сверхпроводнике, см. [34]) ранее рассматривался на основе довольно сильного упрощающего предположения о ступенькообразном профиле параметра порядка ψ в вихре [39] (в действительности же $\psi(\mathbf{r})$ является плавной функцией — см. рис. 1b). В работе соискателя

[A2] был произведён расчёт вязкости с использованием реалистичного профиля функции $\psi(\mathbf{r})$.

Данная глава диссертации посвящена анализу тензора вязкости изолированного вихря в анизотропных сверхпроводниках с произвольным параметром s_0 . В разделе 2.2 приводятся исходные уравнения и некоторые общие соотношения для тензора $\hat{\eta}$. В разделах 2.3 и 2.4 выводятся асимптотически точные выражения для вязкости вихря в двух предельных случаях. В разделе 2.5 получен вариационный принцип, на основе которого приближённо вычислена вязкость вихря при произвольных параметрах задачи. В разделе 2.6 на основе обобщённого нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау показано, что анизотропия сопротивления сверхпроводника в вихревом состоянии при $s_0 \neq 1$ должна зависеть от температуры. В разделе 2.7 перечислены основные результаты данной главы.

2.2. Исходные уравнения

В приближении теории Гинзбурга-Ландау свободная энергия F одноосного сверхпроводника равна

$$F = \int \left[\left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi^* \frac{\hat{m}^{-1}}{2} \left(-i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi + a_{GL} |\psi|^2 + \frac{1}{2} b_{GL} |\psi|^4 \right] d^3\mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Здесь a_{GL} и b_{GL} — параметры, не зависящие от координат, а $\hat{m}$ — тензор массы куперовской пары, компоненты которого равны $m_{ij} = m_{ab}(\delta_{ij} + \mu e_i e_j)$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, параллельный оси анизотропии, а $\mu = m_c/m_{ab} - 1$.

В нестационарном случае плотность тока даётся формулой

$$\mathbf{j} = -2e |\psi|^2 \hat{m}^{-1} \left(\hbar\nabla\theta_s + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) - \hat{\sigma}_n \left(\nabla\tilde{\Phi} + \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad (2.3)$$

где $\hat{\sigma}_n$ — тензор нормальной проводимости с компонентами $\sigma_{nij} = \sigma_{ab}\delta_{ij} + (\sigma_c - \sigma_{ab})e_i e_j$, а $\tilde{\Phi}$ — электрохимический потенциал. Плотность тока должна удовлетворять закону сохранения заряда:

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \text{div}\mathbf{j} = 0, \quad (2.4)$$

где ρ_e — плотность электрического заряда.

В случае, когда длина экранирования Томаса-Ферми много меньше всех характерных масштабов задачи, разницей между $\nabla\Phi$ и $\nabla\tilde{\Phi}$ можно пренебречь [35, 81]. В типичных ситуациях длина Томаса-Ферми порядка межатомного расстояния, поэтому мы будем в дальнейшем считать, что $\nabla\Phi \approx \nabla\tilde{\Phi}$. Кроме того, мы ограничимся рассмотрением сверхпроводников с большим параметром Гинзбурга-Ландау: $\kappa \gg 1$. Тогда в уравнении (2.1) и в выражении для сверхтока можно пренебречь векторным потенциалом [81] (доказательство этого утверждения основано на

рассуждениях, аналогичных приведённым в главе 1). Кроме того, в уравнении (2.3) можно пренебречь членом $c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$ по сравнению с $\nabla\Phi$, если длина экранирования электрического поля l_E (см. уравнение (2.10)) много меньше лондоновской длины.

Пусть ось вихря составляет угол φ_0 с осью анизотропии c . Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль оси вихря, а ось c лежала в плоскости xz — см. рис. 2.1. В этой системе координат функции ψ и Φ не зависят от z , а тензор $\hat{\eta}$ диагонален.

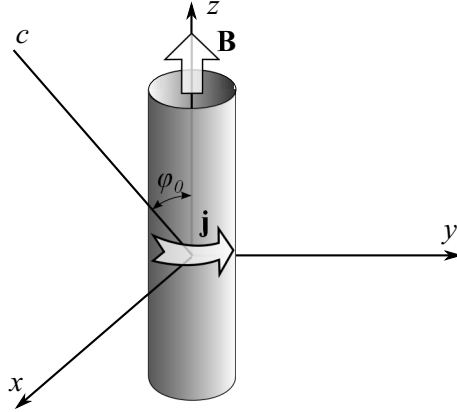


Рис. 2.1. Система координат.

Вывод уравнения баланса сил (5), а также выражения для тензора вязкости можно найти в работах [81], [39], а также [A2], однако для удобства читателя эти выводы воспроизведены в Приложении Б.

Полная вязкость $\hat{\eta}$ представима в виде суммы релаксационной и омической компоненты: $\hat{\eta} = \hat{\eta}_{p0} + \hat{\eta}_{oh}$. В работах [39] и [40] было показано, что релаксационный вклад в вязкость, $\hat{\eta}_{p0}$, определяется соотношениями

$$(\eta_{p0})_{xx} = 2\pi\hbar\Gamma n_0\alpha_1 \left(\frac{m(\varphi_0)}{m_{ab}} \right)^{1/2}, \quad (\eta_{p0})_{yy} = 2\pi\hbar\Gamma n_0\alpha_1 \left(\frac{m_{ab}}{m(\varphi_0)} \right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

где $n_0 = |a_{GL}|/b_{GL}$,

$$m(\varphi_0) = \frac{m_{ab}(1 + \mu)}{1 + \mu \cos^2 \varphi_0}, \quad (2.6)$$

а константа α_1 даётся соотношением (Б.20).

Вклад Бардина-Стефена, $\hat{\eta}_{oh}$, даётся уравнениями

$$\eta_x \equiv [m_{ab}/m(\varphi_0)]^{1/2}(\eta_{oh})_{xx} = -2n_0\Gamma\hbar \int f^2(\rho_1) \frac{y_1}{\rho_1^2} \left(u^2\Phi_x - \frac{y_1}{\rho_1^2} \right) dx_1 dy_1, \quad (2.7)$$

$$\eta_y \equiv [m(\varphi_0)/m_{ab}]^{1/2}(\eta_{oh})_{yy} = -2n_0\Gamma\hbar \int f^2(\rho_1) \frac{x_1}{\rho_1^2} \left(u^2\Phi_y - \frac{x_1}{\rho_1^2} \right) dx_1 dy_1. \quad (2.8)$$

где $u = \xi_{ab}/l_{Eab}$,

$$(x_1, y_1) = \xi_{ab}^{-1} \left(\sqrt{\frac{m(\varphi_0)}{m_{ab}}} x, y \right), \quad \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad (2.9)$$

а ξ_{ab} и l_{Eab} — длина когерентности и глубина проникновения электрического поля в плоскости ab , соответственно:

$$\xi_{ab} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_{ab}|a_{GL}|}}, \quad l_{Eab} = [\hbar\sigma_{ab}/(8e^2\Gamma n_0)]^{1/2}. \quad (2.10)$$

Функция $f(\rho)$, входящая в соотношения (2.7) и (2.8), является безразмерным профилем параметра порядка вихря. Она определяется уравнением

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df}{d\rho} \right) - \frac{f}{\rho^2} + f - f^3 = 0 \quad (2.11)$$

с граничными условиями $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$.

Функции Φ_x и Φ_y в формулах (2.7) и (2.8) удовлетворяют уравнениям

$$s \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y_1^2} = \left(u^2 \Phi_x - \frac{y_1}{\rho_1^2} \right) f^2(\rho_1), \quad (2.12)$$

$$s \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y_1^2} = \left(u^2 \Phi_y - \frac{x_1}{\rho_1^2} \right) f^2(\rho_1), \quad (2.13)$$

где

$$s(\varphi_0) = 1 + \left(\frac{m_c \sigma_c}{m_{ab} \sigma_{ab}} - 1 \right) \frac{\sin^2 \varphi_0}{1 + \mu \cos^2 \varphi_0} > 0. \quad (2.14)$$

Электрический потенциал выражается через функции Φ_x и Φ_y следующим образом:

$$\Phi = \left(\Phi_y V_{Ly} - \Phi_x \sqrt{\frac{m(\varphi_0)}{m_{ab}}} V_{Lx} \right) \frac{4\Gamma e \hbar}{b_{GL} \sigma_{ab}} \sqrt{\frac{|a_{GL}|}{2m_{ab}}}. \quad (2.15)$$

Отметим, что функции $\eta_x(s, u)$ и $\eta_y(s, u)$ связаны следующим простым соотношением:

$$\eta_y(s, u) = \eta_x\left(\frac{1}{s}, \frac{u}{\sqrt{s}}\right). \quad (2.16)$$

Существует альтернативный способ вывода уравнений для тензора вязкости $\hat{\eta}$, основанный на использовании диссипативной функции $W_d[\psi, \Phi]$ [81]:

$$W_d[\psi, \Phi] = \nabla \Phi \hat{\sigma}_n \nabla \Phi + \frac{2\Gamma}{\hbar} \left| \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - 2ie\Phi \psi \right|^2. \quad (2.17)$$

Данная функция задаёт мощность диссипации в единице объёма. Тензор $\hat{\eta}$ может быть определён из условия симметричности и соотношения

$$\mathbf{V}_L \hat{\eta} \mathbf{V}_L = \int_{z=0} W_d[\psi, \Phi] d^2 \rho. \quad (2.18)$$

В диссипативной функции можно выделить две части, соответствующие вкладам $\hat{\eta}_{p0}$ и $\hat{\eta}_{oh}$:

$$\mathbf{V}_L \hat{\eta}_{p0} \mathbf{V}_L = 2\Gamma\hbar \int_{z=0} \left(\frac{\partial |\psi|}{\partial t} \right)^2 d^2\rho, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{V}_L \hat{\eta}_{oh} \mathbf{V}_L = \int_{z=0} \left[\nabla\Phi \hat{\sigma}_n \nabla\Phi + \frac{2\Gamma}{\hbar} |\psi|^2 \left(\hbar \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - 2e\Phi \right)^2 \right] d^2\rho. \quad (2.20)$$

Из уравнения (2.20) следует, что компонента $\hat{\eta}_{oh}$, помимо омических потерь (член $\nabla\Phi \hat{\sigma}_n \nabla\Phi$), учитывает также частично потери за счёт релаксации параметра порядка. Тем не менее, следуя терминологии, введённой в работах [34, 39, 81], мы будем называть вклад $\hat{\eta}_{oh}$ омической вязкостью вихря.

2.3. Предел большой длины когерентности по сравнению с длиной экранирования электрического поля

В настоящем разделе будет проанализировано поведение омической вязкости вихря в пределе

$$l_{Eab} \ll \xi_{ab}, \quad l_{Ec} \ll \xi_c. \quad (2.21)$$

Здесь величины l_{Ec} и ξ_c , относящиеся к оси анизотропии c , определяются по аналогии с величинами l_{Eab} и ξ_{ab} — см. уравнение (2.10). Случай (2.21) реализуется, в частности, в изотропных сверхпроводниках с большой концентрацией парамагнитных примесей: согласно микроскопической теории, в таких сверхпроводниках $u = \xi/l_E = \sqrt{12}$ [34]. В терминах безразмерных параметров u и s условия (2.21) принимают вид $u \gg 1$, $s \ll u^2$. Мы получим разложение тензора вязкости по степеням u^{-1} до членов порядка u^{-2} в области параметров $s \lesssim 1$, $u \gg 1$. Случай $1 \ll s \ll u^2$ может быть рассмотрен аналогичным образом: для этого достаточно разделить уравнения (2.12) и (2.13) на s .

Приближение, используемое в настоящей главе, основано на том факте, что характерный масштаб изменения функций Φ_x и Φ_y много меньше длины когерентности (ниже показано, что этот масштаб порядка $\sqrt{\xi_{ab} l_{Eab}}$). Иначе говоря, эти функции выходят на свою асимптотику уже при $\rho_1 \ll 1$. В этой области профиль параметра порядка $f(\rho_1)$ хорошо аппроксимируется несколькими первыми членами своего ряда Тейлора:

$$f^2(\rho_1) \approx f_2 \rho_1^2 + f_4 \rho_1^4 + f_6 \rho_1^6.$$

Подставим это разложение в уравнения (2.12) и введём для удобства следующие переменные:

$$\tilde{\rho} = \rho_1 \sqrt{u}, \quad \tilde{\Phi}_x = \Phi_x u^{3/2}:$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_x}{\partial \tilde{y}^2} + s \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_x}{\partial \tilde{x}^2} = \left(f_2 \tilde{\rho}^2 + f_4 \frac{\tilde{\rho}^4}{u} + \dots \right) \left(\tilde{\Phi}_x - \frac{\tilde{y}}{\tilde{\rho}^2} \right). \quad (2.22)$$

Далее волна над переменными x и y будет опущена. Решение уравнения (2.22) может быть разложено по степеням u^{-1} :

$$\tilde{\Phi}_x = \Phi_x^{(0)} + u^{-1}\Phi_x^{(1)} + R_x, \quad (2.23)$$

где $\Phi_x^{(0)}$ и $\Phi_x^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^{(0)}}{\partial y^2} + s \frac{\partial^2 \Phi_x^{(0)}}{\partial x^2} = f_2 \rho^2 \Phi_x^{(0)} - f_2 y, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^{(1)}}{\partial y^2} + s \frac{\partial^2 \Phi_x^{(1)}}{\partial x^2} = f_2 \rho^2 \Phi_x^{(1)} + f_4 \rho^4 \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right), \quad (2.25)$$

а R_x — остаточный член. В Приложении В показано, что компонента вязкости η_x , которая даётся соотношением (2.7), также может быть разложена по степеням u :

$$\eta_x = -2n_0 \Gamma \hbar \left[\frac{I_{1x}(s)}{u} + \frac{I_{2x}(s)}{u^2} + o(u^{-2}) \right], \quad (2.26)$$

где

$$I_{1x}(s) = \int f_2 y \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right) dx dy, \quad (2.27)$$

$$I_{2x}(s) = \int \frac{y}{\rho^2} \left[f_4 \rho^4 \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right) + f_2 \rho^2 \Phi_x^{(1)} \right] dx dy. \quad (2.28)$$

Компонента η_y вычисляется аналогичным образом:

$$\eta_y = -2n_0 \Gamma \hbar \left[\frac{I_{1y}(s)}{u} + \frac{I_{2y}(s)}{u^2} + o(u^{-2}) \right]. \quad (2.29)$$

Соотношение (2.16) приводит к связям

$$I_{1y}(s) = I_{1x}(s^{-1}) \sqrt{s}, \quad I_{2y}(s) = I_{2x}(s^{-1}) s. \quad (2.30)$$

Точные значения функций $I_{1x}(s)$ и $I_{2x}(s)$ могут быть определены численно, однако в разделе 2.5 будут приведены приближённые выражения для этих функций, полученные аналитически.

В работе [39] случай $u \gg 1$ был исследован с использованием модельного профиля параметра порядка вихря в виде ступеньки. Отметим, что такой подход не позволяет получить в разложении (2.26) член порядка u^{-1} .

Случай $s = 1$ рассматривался в работах [32, 35–37]. Параметр s равен единице в изотропных сверхпроводниках, а также в анизотропных сверхпроводниках, у которых нет несоответствия анизотропий нормальной проводимости и массы куперовской пары, то есть, выполняется равенство $(m_c \sigma_c)/(m_{ab} \sigma_{ab}) = 1$. При $s = 1$ уравнения (2.24) и (2.25) могут быть решены точно:

$$\Phi_x^{(0)} = \frac{1 - \exp(-\sqrt{f_2} \rho^2 / 2)}{\rho^2} y,$$

$$\Phi_x^{(1)} = \frac{f_4 y}{u f_2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{f_2} \rho^2}{8} \right) \exp(-\sqrt{f_2} \rho^2 / 2).$$

После интегрирования в формулах (2.27) и (2.28) мы получаем следующие соотношения для коэффициентов вязкости:

$$\eta_x = \eta_y = 2\pi n_0 \Gamma \hbar \alpha_2(u), \quad (2.31)$$

$$\alpha_2(u) \approx \frac{\sqrt{f_2}}{u} + \frac{f_4}{2f_2 u^2} = \frac{0.583}{u} - \frac{1}{8u^2}. \quad (2.32)$$

Здесь численное значение $\sqrt{f_2} = 0.583$ взято из статьи [36], а соотношение $f_4 = -f_2/4$ следует из уравнения (2.11). Уместно привести здесь приближённый результат, полученный Ну [36]:

$$\alpha_2 = \frac{K_0(\delta u)}{\delta u \cdot K_1(\delta u)}, \quad (2.33)$$

где K_0 и K_1 – функции Макдональда, а δ – подгоночный параметр. Соотношение (2.33) получается из точного решения уравнения (Б.12) с приближённым профилем параметра порядка:

$$f(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{\delta^2 + \rho^2}}. \quad (2.34)$$

Согласно Шмиду [32] и Ну, оптимальное значение δ равно $\sqrt{2}$, что следует из вариационного принципа. Сравним значения $\alpha_2(u)$, полученные разными способами. При $u = \sqrt{12}$ уравнение (2.33) даёт $\alpha_2 = 0.186$, соотношение (2.32) даёт $\alpha_2 = 0.158$, тогда как численное значение α_2 равно 0.159 [37]. Таким образом, погрешность формулы (2.32) оказывается меньше 1%. Если в этой формуле оставить только член порядка u^{-1} , погрешность составит 6%.

2.4. Предел сильного несоответствия анизотропий нормальной проводимости и массы куперовской пары ($s \gg u \gg 1$)

Рассмотрим область параметров $s \gg u^2$, $u \gtrsim 1$. В терминах величин l_E , ξ и φ_0 эти условия принимают вид

$$l_{Ec} \gg \xi_c, \quad l_{Eab} \lesssim \xi_{ab}, \quad \cos^2 \varphi_0 \ll \frac{\sigma_c l_{Eab}^2}{\sigma_{ab} \xi_{ab}^2}.$$

Таким образом, для реализации этого предельного случая, помимо сильной анизотропии, нужно, чтобы магнитное поле составляло достаточно малый угол с плоскостью ab .

При $s \gg u^2$ член $u^2 \Phi_x$ в уравнении (2.12) пренебрежим по сравнению с y_1/ρ_1^2 при $\rho \ll \sqrt{s}/u$, так что из уравнения (2.7) сразу получается

$$\eta_x \sim \ln s/u^2.$$

Детальный расчёт, приведённый в Приложении Г, даёт

$$\eta_x = 2\pi\hbar\Gamma n_0 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{u} - 1.475 \right), \quad (2.35)$$

$$\eta_y = 2\pi\hbar\Gamma n_0 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{u} - 0.475 \right). \quad (2.36)$$

В работе [39] в пределе $u \ll 1$ были получены похожие выражения, содержащие $\ln u^{-1}$. Такое совпадение не является случайностью: наличие логарифма $\ln(l_E/\xi)$ характерно для предельного случая $l_E \gg \xi$.

2.5. Вариационный принцип

В данном разделе мы вычислим приближённо омическую вязкость вихря при произвольных параметрах задачи с использованием вариационного принципа.

Уравнение (Б.12) формально может быть получено, если приравнять к нулю вариационную производную по Φ от функционала

$$\int_{z=0} W_d[\Phi] d^2\rho, \quad (2.37)$$

где диссипативная функция $W_d[\Phi]$ даётся уравнением (2.17). Условие минимальности функционала (2.37), по-видимому, является следствием общего принципа минимума производства энтропии в стационарных процессах [85].

Так как имеет место соотношение (2.18), а функционал (2.37) заведомо ограничен снизу, то мы получаем следующий вариационный принцип для тензора вязкости $\hat{\eta}$:

$$\mathbf{V}_L \hat{\eta} \mathbf{V}_L = \min_{\Phi} \int_{z=0} W_d[\Phi] d^2\rho. \quad (2.38)$$

Выделим в диссипативной функции вклад Бардина-Стефена (см. уравнение (2.20)) и запишем вариационный принцип в координатах, подвергнутых масштабному преобразованию (см. уравнение (2.9)):

$$\eta_x = \tilde{\eta}(s, 1, u), \quad \eta_y = \tilde{\eta}(1, s, u), \quad (2.39)$$

где

$$\tilde{\eta}(s_x, s_y, u) = 2n_0\Gamma\hbar u^2 \cdot \min_{\phi} \int \left[s_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + s_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{f^2(\rho)}{u^2} \left(u^2 \phi - \frac{y}{\rho^2} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2.40)$$

Уравнения (2.39) - (2.40) имеют два важных следствия. Во-первых, тензор вязкости положительно определён при $\sigma_{ab} > 0$ и $\sigma_c > 0$. Во-вторых, компоненты вклада $\hat{\eta}_{\text{oh}}$ увеличиваются при увеличении нормальной проводимости:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \sigma_{ab}} > 0, \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial \sigma_c} > 0, \quad i = x, y.$$

Оценка сверху для $\tilde{\eta}$ может быть получена, если подставить пробную функцию в уравнение (2.40). Чтобы найти хорошую пробную функцию, рассмотрим точное уравнение на ϕ :

$$s_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + s_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left(u^2 \phi - \frac{y}{\rho^2} \right) f^2(\rho). \quad (2.41)$$

Решение этого уравнения является функцией, чётной по x и нечётной по y , так что её разложение в ряд Фурье имеет следующий вид:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{2n+1}(\rho) \sin(2n+1)\varphi, \quad (2.42)$$

где φ — полярный угол в плоскости xu . При достаточно больших ρ $\phi \approx y/(u^2 \rho^2)$, таким образом, в ряду (2.42) все члены пренебрежимо малы по сравнению с первым (но только при $\rho \rightarrow \infty$).

Значит, пробная функция

$$\phi_t = \frac{4\tilde{\phi}(\rho)}{s_x + 3s_y} \sin \varphi \quad (2.43)$$

имеет правильную чётность и асимптотику. Подставим эту функцию в уравнение (2.40):

$$\tilde{\eta} \approx 2n_0 \Gamma \hbar \pi \tilde{u}^2 \min_{\tilde{\phi}} \int_0^{\infty} \rho \left[\left(\frac{d\tilde{\phi}}{d\rho} \right)^2 + \frac{\tilde{\phi}^2}{\rho^2} + \frac{f^2(\rho)}{\tilde{u}^2} \left(\tilde{u}^2 \tilde{\phi} - \frac{1}{\rho} \right)^2 \right] d\rho, \quad (2.44)$$

где

$$\tilde{u} = u \left(\frac{s_x}{4} + \frac{3s_y}{4} \right)^{-1/2}.$$

Дифференциальное уравнение на $\tilde{\phi}$ имеет вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\tilde{\phi}}{d\rho} \right) + \frac{\tilde{\phi}}{\rho^2} + f^2(\rho) \left(\tilde{u}^2 \tilde{\phi} - \frac{1}{\rho} \right) = 0. \quad (2.45)$$

Заметим, что в точности такое же соотношение получается при подстановке $\Phi_x = \tilde{\phi}(\rho) \sin \varphi$ в уравнение (2.12) при $s = 1$ и $u = \tilde{u}$. Это означает, что пробная функция (2.43) сводит задачу к изотропной. К сожалению, точное аналитическое решение уравнения (2.45) неизвестно, однако Шмид [32] нашёл решение с приближённым профилем параметра порядка (см. соотношение (2.34)):

$$\tilde{\phi} = \frac{K_1(\tilde{u}\delta)\delta - \sqrt{\delta^2 + \rho^2} K_1(\tilde{u} \sqrt{\delta^2 + \rho^2})}{\delta K_1(\tilde{u}\delta) \tilde{u}^2 \rho}.$$

Используя эту функцию и выражение (2.34) для f , мы можем вычислить правую часть соотношения (2.44):

$$\tilde{\eta} \approx 2n_0 \Gamma \hbar \pi \frac{K_0(\delta \tilde{u})}{\delta \tilde{u} K_1(\delta \tilde{u})}. \quad (2.46)$$

Положим $\delta = f'(0)^{-1} = f_2^{-1/2}$, чтобы получить правильную асимптотику при $u \rightarrow \infty$, $s = 1$ (эта асимптотика определяется производной $f'(0)$, см. раздел 2.3). Комбинируя (2.39) и (2.46), мы получаем

$$\eta_x \approx 2\pi n_0 \Gamma \hbar \frac{f'(0)}{2u} \sqrt{s+3} \frac{K_0\left(\frac{2u}{f'(0)\sqrt{s+3}}\right)}{K_1\left(\frac{2u}{f'(0)\sqrt{s+3}}\right)}, \quad (2.47)$$

$$\eta_y \approx 2\pi n_0 \Gamma \hbar \frac{f'(0)}{2u} \sqrt{3s+1} \frac{K_0\left(\frac{2u}{f'(0)\sqrt{3s+1}}\right)}{K_1\left(\frac{2u}{f'(0)\sqrt{3s+1}}\right)}. \quad (2.48)$$

Параметры s и u здесь могут быть произвольными.

Проверим, согласуются ли данные формулы с результатами разделов 2.3 и 2.4. Раскладывая η_x в форме (2.47) по степеням u^{-1} при $u \gg 1$ и $s \lesssim 1$, мы получаем следующие соотношения для коэффициентов I_{1x} и I_{2x} , введённых в разделе 2.3 (см. уравнение (2.26)):

$$I_{1x}(s) = -\frac{\pi \sqrt{f_2} \sqrt{s+3}}{2}, \quad I_{2x}(s) = \frac{\pi f_2(s+3)}{8}. \quad (2.49)$$

При $s = 1$

$$\eta_x = \eta_y = 2\pi n_0 \Gamma \hbar \frac{f'(0)}{u} + O(u^{-2}),$$

что идеально согласуется с уравнением (2.32).

При $s = 0$ уравнения (2.49) и (2.30) дают

$$\begin{aligned} \eta_x &= 2n_0 \Gamma \hbar \frac{1.59}{u} + O(u^{-2}), \\ \eta_y &= 2n_0 \Gamma \hbar \frac{0.92}{u} + O(u^{-2}), \end{aligned}$$

что хорошо согласуется с асимптотиками, полученными путём численного решения уравнения (2.24) с последующим интегрированием в формуле (2.27) (численный метод описан ниже):

$$\begin{aligned} \eta_x &= 2n_0 \Gamma \hbar \frac{1.58}{u} + O(u^{-2}), \\ \eta_y &= 2n_0 \Gamma \hbar \frac{0.86}{u} + O(u^{-2}). \end{aligned}$$

При $s \gg u^2$ из уравнений (2.47) и (2.48) получаем

$$\eta_x \approx \eta_y \approx 2\pi \hbar \Gamma n_0 \ln \frac{\sqrt{s}}{u}.$$

Таким образом, главный логарифмический член в формулах (2.35) и (2.36) может быть найден с помощью вариационного метода.

Чтобы проверить, описывают ли формулы (2.47) и (2.48) адекватно поведение вязкости при промежуточных значениях параметров, уравнение (2.41) было решено численно путём минимизации функционала (2.37) в области $x > 0$, $y > 0$ с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \phi \right|_{y=0} = 0,$$

следующими из соображений симметрии. При дискретизации использовалась достаточно большая сетка размером 450×450 узлов с размером элементарной ячейки 0.03×0.03 . После определения функции $\phi(\rho)$ производилось численное интегрирование в формуле (2.40). Рисунок 2.2

позволяет сравнить численные зависимости вязкости от угла φ_0 с приближёнными аналитическими зависимостями, полученными из соотношений (2.47) и (2.48).

При всех рассмотренных в настоящем разделе значениях параметров s и u наблюдается хорошее количественное согласие точных значений компонент тензора $\hat{\eta}$ с приближёнными, полученными с помощью вариационного принципа. Таким образом, формулы (2.47) и (2.48) для вязкости Бардина-Стефена, совместно с полученными в предшествующих работах соотношениями (2.5) для релаксационного вклада в вязкость, могут быть использованы для количественной интерпретации экспериментальных данных по электросопротивлению анизотропных сверхпроводников в вихревом состоянии.

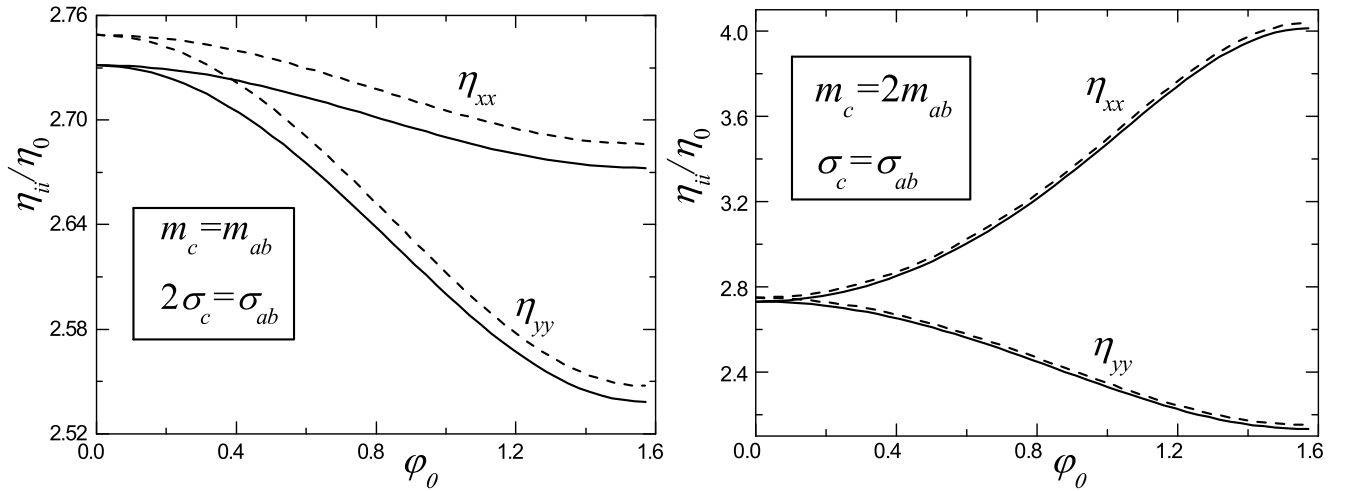


Рис. 2.2. Зависимости компонент тензора полной вязкости ($\hat{\eta}_{oh} + \hat{\eta}_{p0}$) от угла φ_0 . Сплошные линии получены с использованием вариационного принципа (уравнения (2.47) и (2.48)), пунктирные линии соответствуют результатам численного счёта. η_{xx} и η_{yy} нормированы на величину $\eta_0 = \hbar \Gamma n_0$. $\xi_{ab}/l_{Eab} = u = \sqrt{12}$.

2.6. Зависимость анизотропии вязкости от температуры

Вопрос об анизотропии вязкости выше рассматривался в приближении нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау (2.1) [39, 40], а также в лондоновском приближении [49]. В рамках этих подходов при $T_c - T \ll T_c$ отношение η_{xx}/η_{yy} не зависит от температуры. Отметим, что уравнение (2.1) имеет довольно ограниченную область применимости: оно справедливо для бесщелевых сверхпроводников. В настоящем разделе мы рассмотрим анизотропию вязкости вихря в сверхпроводнике с конечной щелью, используя более общий подход, развитый в работе [86] (см. также книгу [34]). В данной работе было показано, что параметр порядка сверхпроводника с щелью удовлетворяет следующим нестационарным уравнениям:

$$2\hbar\Gamma \sqrt{1 + q_{ph} |\psi|^2 / n_0} \frac{\partial |\psi|}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta |\psi|}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\Gamma |\psi|^2}{\sqrt{1 + q_{\text{ph}} |\psi|^2 / n_0}} \left(\hbar \frac{\partial \theta_S}{\partial t} - 2e\Phi \right) = \frac{\hbar^2}{2} \nabla \left(|\psi|^2 \hat{m}^{-1} \nabla \theta_S \right), \quad (2.51)$$

$$q_{\text{ph}} = \frac{32\pi^2 \tau_{\text{ph}}^2 T_c (T_c - T)}{7\zeta(3) \hbar^2},$$

где τ_{ph} — время свободного пробега относительно рассеяния на фононах. В изотропном случае уравнения (2.50) и (2.51) строго выведены для грязного сверхпроводника при температуре, достаточно близкой к T_c . При этом параметр порядка должен достаточно медленно меняться в пространстве и во времени [34].

Основные соотношения для тензора $\hat{\eta}$ могут быть снова выведены с использованием методов, описанных в разделе 2.2 и Приложении Б. Вязкость по-прежнему содержит релаксационный и омический вклад, но выражения для этих вкладов несколько изменяются. В частности, вместо уравнения (2.5) мы имеем

$$(\eta'_{p0})_{ij} = 2\pi \hbar \Gamma n_0 \delta_{ij} \int_0^\infty \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 \rho \sqrt{1 + q_{\text{ph}} f^2(\rho)} d\rho. \quad (2.52)$$

Чтобы получить аналоги соотношений (2.7), (2.8), (2.12) и (2.13), в них следует сделать ряд замен:

$$\begin{aligned} u^2 &\rightarrow \frac{u^2}{\sqrt{1 + q_{\text{ph}}}}, \\ f^2 &\rightarrow \frac{\sqrt{1 + q_{\text{ph}}} f^2}{\sqrt{1 + q_{\text{ph}} f^2}}, \\ \eta_i &\rightarrow \eta_i \sqrt{1 + q_{\text{ph}}}, \quad i = x, y. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Можно видеть, что глубина проникновения электрического поля увеличена в $(1 + q_{\text{ph}})^{1/4}$ по сравнению с соотношением (2.10). Может показаться, при достаточно низких температурах может быть достигнут предел $l_E \gg \xi$, рассмотренный в работе [39], однако это не совсем так. Простое нестационарное уравнение Гинзбурга-Ландау (2.1) приводит к одинаковым по порядку величины вкладам η_{p0} и η_{oh} в пределе $l_E \gg \xi$. Напротив, в приближении уравнений (2.50) и (2.50) оказывается, что при низких температурах релаксационный вклад η_{p0} будет доминирующим (см. ниже).

Рассмотрим температурную зависимость тензора вязкости. Величина q_{ph} возрастает при уменьшении температуры, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{(\eta_{p0})_{xx}}{\eta_0} = \frac{\partial}{\partial T} \frac{(\eta_{p0})_{yy}}{\eta_0} < 0,$$

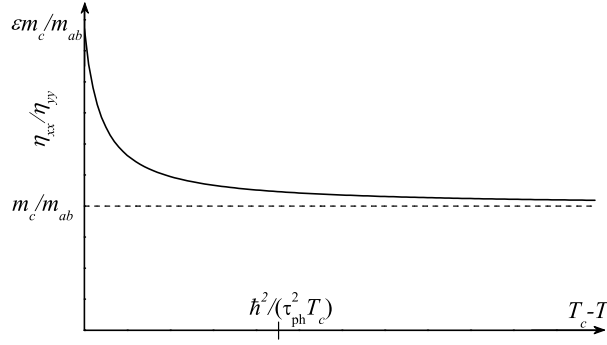


Рис. 2.3. Схематическая зависимость анизотропии вязкости вихря от температуры при $\varphi_0 = \pi/2$. Величина ϵ здесь порядка единицы.

где $\eta_0 = \hbar \Gamma n_0$. С другой стороны, уравнение (2.40), модифицированное для случая сверхпроводника с щелью, принимает вид

$$\tilde{\eta}(s_x, s_y, u) = 2n_0 \Gamma \hbar u^2 \min_{\phi} \int \left[s_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + s_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{f^2(\rho)}{u^2 \sqrt{1 + q_{ph} f^2(\rho)}} \left(u^2 \phi - \frac{y}{\rho^2} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.54)$$

при этом соотношения (2.39) следует оставить неизменными. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{(\eta_{oh})_{xx}}{\eta_0} > 0, \quad \frac{\partial}{\partial T} \frac{(\eta_{oh})_{yy}}{\eta_0} > 0.$$

При $s \lesssim 1$ и $u \sim 1$, если температура достаточно низкая, так что $q_{ph} \gg 1$, будут выполняться неравенства

$$(\eta_{p0})_{xx} \gg (\eta_{oh})_{xx}, \quad (\eta_{p0})_{yy} \gg (\eta_{oh})_{yy}.$$

Тогда анизотропия вязкости полностью определяется релаксационным вкладом:

$$\frac{\eta_{xx}}{\eta_{yy}} \approx \frac{(\eta_{p0})_{xx}}{(\eta_{p0})_{yy}} = \frac{1 + \mu}{1 + \mu \cos^2 \varphi_0}.$$

С другой стороны, когда $q_{ph} \lesssim 1$ (высокая температура), при $s \neq 1$ $\eta_x \neq \eta_y$, так что

$$\frac{\eta_{xx}}{\eta_{yy}} \neq \frac{1 + \mu}{1 + \mu \cos^2 \varphi}$$

Таким образом, в приближении уравнений (2.50) и (2.51) анизотропия вязкости вихря, а значит, и анизотропия тензора проводимости сверхпроводника существенно зависят от температуры даже в области $T_c - T \ll T_c$. Схематично зависимость отношения η_{xx}/η_{yy} от T показана на рис. 2.3.

2.7. Выводы

В настоящей главе был проведён анализ тензора вязкости вихря $\hat{\eta}$ в анизотропном сверхпроводнике в приближении нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау (2.1). Омическая компонента вязкости $\hat{\eta}_{oh}$ вычислена в двух предельных случаях: (i) $l_E \ll \xi$ и (ii) $l_{Ec} \gg \xi_c$, $l_{Eab} \lesssim \xi_{ab}$.

Найден вариационный принцип, с помощью которого получены приближённые выражения (2.47) и (2.48) для $\hat{\eta}_{\text{oh}}$, применимые при произвольных параметрах задачи. Данные приближённые соотношения дают довольно хорошее согласие с численными результатами, полученными путём решения точных уравнений для омической вязкости.

Стационарное течение вихрей также было рассмотрено в приближении обобщённых уравнений (2.50) и (2.51). Было показано, что анизотропия вязкости вихря может существенно зависеть от температуры даже вблизи T_c . Таким образом, изменяя температуру, можно регулировать величину анизотропии сопротивления сверхпроводника.

Магноны в ферромагнитных сверхпроводниках и сверхрешётках сверхпроводник-ферромагнетик

3.1. Введение

При анализе динамики намагниченности в ферромагнетиках и антиферромагнетиках часто довольно эффективным оказывается подход, основанный на феноменологическом уравнении Ландау-Лифшица [2], или его обобщении, учитывающим диссипацию — уравнении Ландау-Лифшица-Гильберта [87]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \left(\mathbf{M} \times \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \right) + \frac{\nu}{M^2} \left(\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right). \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{M}$ — локальная намагниченность ферромагнетика (либо, в случае антиферромагнетика, намагниченность подрешётки), γ — гиромагнитное отношение, а ν — константа диссипации, имеющая размерность намагниченности. С помощью уравнения (3.1) нетрудно получить классический спектр длинноволновых мгнонов (с длиной волны λ_w , много большей межатомного расстояния) ферромагнетика с лёгкой осью [2],

$$\omega(q) = \omega_F (1 + L^2 q^2), \quad (3.2)$$

а также спектр антиферромагнетика [2]

$$\omega(q) = \sqrt{\omega_{AF}^2 + s_{AF}^2 q^2}. \quad (3.3)$$

Здесь ω_F — частота ферромагнитного резонанса, L — длина порядка толщины блоховской доменной стенки, ω_{AF} — частота антиферромагнитного резонанса, а s_{AF} — скорость магнонов с большими волновыми числами: $q \gg \omega_{AF}/s_{AF}$. Спектры (3.2) и (3.3) получены без учёта магнитостатического взаимодействия и диссипации. Если учесть магнитостатическое взаимодействие, спектры несколько усложняются. Так, в случае ферромагнетика [2]

$$\omega^2(q) = \omega_F^2 \left(1 + L^2 q^2 + \frac{B_0 - 4\pi M}{H_{an}} \right) \left(1 + L^2 q^2 + \frac{B_0 - 4\pi M}{H_{an}} + 4\pi - 4\pi \frac{(\mathbf{q}\mathbf{e})^2}{q^2} \right), \quad (3.4)$$

где B_0 — индукция внутреннего магнитного поля, которое предполагается направленным вдоль оси лёгкого намагничивания $\mathbf{e}$, а H_{an} — поле магнитокристаллической анизотропии, которое определяет частоту ω_F : $\omega_F = \gamma H_{an}$.

В магнитных сверхпроводниках спиновые волны взаимодействуют со сверхпроводящей подсистемой через обменное и магнитное поля, что приводит к дальнейшей модификации спек-

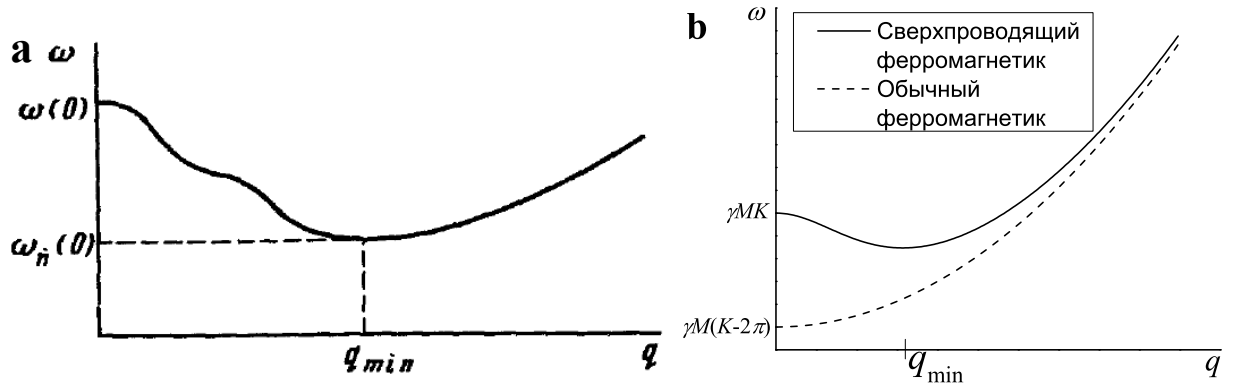


Рис. 3.1. (a) Спектр магнонов в антиферромагнитном сверхпроводнике при некотором фиксированном направлении волнового вектора [60]. (b) Спектры магнонов, распространяющихся перпендикулярно к оси лёгкого намагничивания в нормальном и сверхпроводящем ферромагнетике. Все графики соответствуют нулевому внутреннему полю B_0 .

тра магнонов. Буздин [60] показал, что в лондоновском приближении спектр антиферромагнитного сверхпроводника становится немонотонным — рис. 3.1a. Аналогичный спектр был получен позднее также для ферромагнитного сверхпроводника в мейснеровском состоянии [61, 62] — см. рис. 3.1b. Немонотонность спектра $\omega(q)$ объясняется возрастанием кинетической энергии сверхпроводящего конденсата под действием магнитного поля спиновой волны, при этом спиновые волны большим волновым числом (и меньшим масштабом изменения магнитного поля) слабее воздействуют на конденсат. Наличие минимума у функции $\omega(q)$ при ненулевом q тесно связано с возникновением спирального магнитного порядка в некоторых магнитных сверхпроводниках — см. обзор [50].

В более поздних работах был более детально исследован микроволновый поверхностный импеданс ферромагнитного сверхпроводника [88], а также были определены спектры двумерных магнонов на доменных стенках [89] и на поверхности ферромагнитного сверхпроводника [90]. Следует отметить, что в работах [62, 88–90] предполагалось, что сверхпроводник находится в мейснеровском состоянии. Экспериментальные данные по восприимчивости переменному магнитному полю [54–56], а также оценки поля, индуцированного магнитными моментами [58], указывают на то, что в ферромагнитных сверхпроводниках реализуется спонтанное вихревое состояние. Магноны в смешанном состоянии анализировались ранее только в работе Ng и Varma [61], где рассматривалась совместная динамика намагниченности и абрикосовских вихрей в приближении сплошной среды, которое применимо в пределе длинных волн: $\lambda_w \gg a_v$, где a_v — межвихревое расстояние. Был определён спектр магнонов в случае магнитной анизотропии типа лёгкая плоскость и было показано, что магноны, распространяющиеся вдоль вихрей испытывают сильное затухание, связанное с вязким движением вихрей.

В работах [63, 64, 67, 68] исследовалось влияние магнонов на динамику вихрей в магнитных сверхпроводниках и гибридных системах магнетик-сверхпроводник. Булаевский, Hruška и Maley показали [63], что движение вихрей сопровождается черенковской генерацией магнонов. Таким образом, возникает дополнительный механизм диссипации, приводящий к увеличению тормозящей силы, действующей на вихри. Была вычислена мощность генерации магнонов джозефсоновскими (для слоистого материала) и абрикосовскими вихрями в антиферромагнитном сверхпроводнике с анизотропией типа лёгкая ось. В статье [64] определена магнитная добавка к вязкости вихря в сверхпроводящих борокарбидах и проведено сравнение этой добавки с основным вкладом в вязкость, связанным с нормальным кором (см. главу 2). Впоследствии было предложено возбуждать магноны вихрями, движущимися под действием суперпозиции постоянного и переменного тока [67]. Нелинейная динамика намагниченности (соответствующая магнонам большой амплитуды) была рассмотрена в работе [68]. Авторы продемонстрировали численно, что вихри в магнитном сверхпроводнике могут образовывать кластеры; кроме того, движущиеся вихри могут создавать доменные стенки, если константа диссипации ν в уравнении (3.1) достаточно мала.

Наконец, следует отметить ряд работ [65, 66, 69, 70], в которых рассматривалось движение вихрей в FS системах с чисто релаксационной динамикой намагниченности:

$$\tau_M \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}}, \quad (3.5)$$

где τ_M — время релаксации. Очевидно, в подобных системах нет осциллирующих магнонных мод. В работе [65] для объяснения некоторых экспериментальных явлений, наблюдающихся в борокарбидах, предлагается новый, “поляронный” механизм пиннинга, основанный на притяжении вихря к магнитным моментам, поляризованным полем самого же вихря. Данный эффект увеличивает вязкость вихря и приводит к гистерезисной вольт-амперной характеристике [65], а также к необычному негармоническому отклику вихрей на переменный ток [66]. В статье [69] предлагается улучшать транспортные характеристики сверхпроводников с малой лондоновской длиной путём создания многослойных систем ферромагнетик-сверхпроводник (FS), в которых реализуется поларонный механизм пиннинга.

Настоящая глава диссертации посвящена ряду эффектов, возникающих в ферромагнитных сверхпроводниках и многослойных FS системах при взаимодействии длинноволновых магнонов с решёткой абрикосовских вихрей. Результаты данной главы опубликованы в работах [A3, A4, A5]. В разделе 3.2 приведены некоторые важные характеристики ферромагнитных сверхпроводников и основные уравнения. В разделе 3.3 проанализирован зонный спектр магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике с идеальной решёткой вихрей. В разделе 3.4 вычислена

тормозящая сила, действующая со стороны магнитных моментов на вихри, движущиеся под действием постоянного и переменного тока в ферромагнитном сверхпроводнике, или многослойной FS системе. В подразделах 3.3.5 и 3.4.4 вычисляется поверхностный импеданс ферромагнитного сверхпроводника в случаях, когда вихри ориентированы параллельно и перпендикулярно к поверхности образца. В разделе 3.5 собраны основные результаты главы.

3.2. Параметры ферромагнитных сверхпроводников и основные уравнения

В лондоновском приближении свободная энергия ферромагнитного сверхпроводника может быть взята в виде

$$F = \int \left[\frac{1}{8\pi\lambda^2} \left(\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta_s \right)^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A} - 4\pi \mathbf{M})^2}{8\pi} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) + \frac{K \mathbf{M}_\perp^2}{2} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}_e}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r}, \quad (3.6)$$

где α — обменная константа, K — константа анизотропии, $\mathbf{M}_\perp = \mathbf{M} - (\mathbf{M} \mathbf{e}) \mathbf{e}$, $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси лёгкого намагничивания, а $\mathbf{H}_e$ — внешнее магнитное поле. Все члены в уравнении (3.6) интегрируются по всему пространству, кроме первого члена, который интегрируется по объёму образца. Снаружи образца мы полагаем $\mathbf{M} = 0$, а внутри образца $|\mathbf{M}| = \text{const}$.

Сначала определим состояние равновесия системы в присутствии внешнего поля. Для этого минимизируем F относительно $\mathbf{M}$, а затем — относительно $\mathbf{A}$ и θ_s . Заметим, что поле анизотропии $H_{\text{an}} = KM$ урановых ферромагнитных сверхпроводников очень велико (см. таблицу 3.1): оно больше или порядка верхнего критического поля. Таким образом, во всей области применимости теории Лондонов $B \ll H_{\text{an}}$, где B — внутреннее поле. Поперечная намагниченность может быть оценена как $M_\perp \lesssim B/K \ll M$. Так как $K \gg 1$, в нулевом приближении по K^{-1} мы можем пренебречь поперечной намагниченностью в статическом случае везде, даже в энергии анизотропии, которая оказывается порядка K^{-1} . Тогда

$$F(\mathbf{A}, \theta_s) \approx \int \left[\frac{1}{8\pi\lambda^2} \left(\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta_s \right)^2 + \frac{B^2}{8\pi} - \mathbf{B} \mathbf{M}_0 - \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}_e}{4\pi} + 2\pi M^2 \right] d^3 \mathbf{r}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{M}_0 = M \mathbf{e}$. Для образца произвольной формы дальнейшая минимизация не может быть произведена аналитически. Здесь мы предположим, что ферромагнитный сверхпроводник имеет форму эллипсоида. Результаты, полученные ниже, справедливы также в предельных случаях тонкой пластины и длинного цилиндра. Разумно предположить, что среднее внутреннее поле $\mathbf{B}_0$ в эллипсоидальном образце будет однородным (ср. с диэлектрическим цилиндром в однородном электрическом поле — см. [94]). Обозначив объём сверхпроводника за V , мы можем переписать

Соединение	UGe ₂	UCoGe	URhGe
T_c , К	0.7	0.8	0.25
Θ , К	50	3	9.5
λ , нм	1000	1200	900
H_{an} , Т	~ 100	~ 10	~ 10
M , Гс	150	9	70
μ_U	$1,4\mu_B$	$0,07\mu_B$	$0,3\mu_B$
ω_F , Гц	$\sim 10^{13}$	$\sim 10^{10}$	$\sim 10^{11}$
V_{th} , см/с	$\sim 10^7$	$\sim 10^5$	$\sim 10^7$
$K = H_{\text{an}}/M$	$\sim 10^4$	$\sim 10^4$	$\sim 10^3 - 10^4$

Таблица 3.1. Параметры урановых ферромагнитных сверхпроводников. Θ — температура Кюри, H_{an} — поле магнитокристаллографической анизотропии, μ_U — магнитный момент в расчёте на атом урана, μ_B — магнетон Бора, ω_F — частота ферромагнитного резонанса (здесь используется оценка $\omega_F \sim 2\mu_U H_{\text{an}}/\hbar$ для этой величины), а V_{th} — скорость вихря, отвечающая порогу генерации магнонов (см. раздел 3.4.2). Данные взяты из работ [54, 91–93].

свободную энергию в виде

$$F = V \left(f_S(B_0) - \mathbf{M}_0 \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{H}_e}{4\pi} \right) + \int_{\mathbf{r} \notin V} \left[\frac{B^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}_e}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r} + \text{const}, \quad (3.8)$$

где константа не зависит от поля $\mathbf{B}$, а f_S — плотность свободной энергии вихревой решётки:

$$f_S(B_0) = \left\langle \frac{1}{8\pi\lambda^2} \left(\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta_S \right)^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right\rangle. \quad (3.9)$$

Усреднение здесь производится по объёму с размером, много большим межвихревого расстояния. Функция $f_S(B_0)$ может быть определена явно путём решения уравнения Лондонов (3.14) (при $\mathbf{m} = 0$) с заданной концентрацией вихрей, соответствующей среднему полю B_0 . Для преобразования интеграла в уравнении (3.8) введём несколько вспомогательных величин: собственное поле образца $\mathbf{B}_S = \mathbf{B} - \mathbf{H}_e$, намагниченность $\mathbf{M}_S$, связанную со сверхтоком, эффективную полную намагниченность $\mathbf{M}_{\text{eff}} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_S$, и эффективную напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{B}_S - 4\pi\mathbf{M}_{\text{eff}}$. Тогда интеграл в уравнении (3.8) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r} \notin V} \left[\frac{B^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}_e}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r} \notin V} \frac{B_S^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r} - \int_{\mathbf{r} \notin V} \frac{H_e^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r} \\ &= \int \frac{H_{\text{eff}}^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r} - \int_{\mathbf{r} \in V} \frac{H_{\text{eff}}^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r} + \text{const} = \frac{V}{2} \mathbf{M}_{\text{eff}} \left(\hat{N} - \frac{\hat{N}^2}{4\pi} \right) \mathbf{M}_{\text{eff}} + \text{const}. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{N}$ — тензор размагничивающих коэффициентов, связывающий эффективную намагниченность с эффективным полем в образце: $\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\hat{N}\mathbf{M}_{\text{eff}}$. Аналитические и численные значения

тензора $\hat{N}$ для эллипсоидальных образцов приведены в работе [95]. Наконец, исключив величину $\mathbf{M}_{\text{eff}}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{M}_{\text{eff}} = (4\pi - \hat{N})^{-1}(\mathbf{B}_0 - \mathbf{H}_e),$$

получаем

$$\frac{F}{V} = f_S(B_0) - \mathbf{M}_0 \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{H}_e}{4\pi} + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{B}_0 - \mathbf{H}_e) \hat{N} (4\pi - \hat{N})^{-1}(\mathbf{B}_0 - \mathbf{H}_e) + \text{const.} \quad (3.10)$$

Здесь единственной переменной является поле $\mathbf{B}_0$, которое определяется из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}_0} = 0. \quad (3.11)$$

Соотношения (3.10) и (3.11) полностью определяют равновесное состояние ферромагнитного сверхпроводника.

Теперь перейдём к динамике вихрей и намагниченности. Уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта с учётом соотношения (3.6) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma (\alpha \nabla^2 \mathbf{M} - K \mathbf{M}_\perp + \mathbf{B}) \times \mathbf{M} + \frac{\nu}{M^2} \left(\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right). \quad (3.12)$$

Учитывая сильную магнитную анизотропию ферромагнитных сверхпроводников, мы, как и ранее, будем предполагать отклонение намагниченности от лёгкой оси $\mathbf{M}_\perp \equiv \mathbf{m}$ малым: $|\mathbf{m}| \ll M$. Тогда уравнение (3.12) можно линеаризовать относительно $\mathbf{m}$:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma (\alpha \nabla^2 \mathbf{m} - K \mathbf{m} + \mathbf{B}) \times \mathbf{M}_0 + \gamma \mathbf{B} \times \mathbf{m} + \frac{\nu}{M^2} \mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнению Лондонов, в котором мы учтём наличие нормального тока (см. [A4]):

$$\text{rot rot } \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} = \frac{\kappa}{\lambda^2} + 4\pi \text{rot rot } \mathbf{m} - \frac{4\pi\sigma_n}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.14)$$

где σ_n — проводимость квазичастиц вне кора вихря, а κ — завихренность:

$$\kappa = -\frac{\Phi_0}{2\pi} \text{rot } \nabla \theta_S = \Phi_0 \sum_i \left(\mathbf{z}_0 + \frac{d\mathbf{R}_i}{dz} \right) \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_i(z)). \quad (3.15)$$

Здесь ось z направлена вдоль среднего поля $\mathbf{B}_0$, и каждая функция $\mathbf{R}_i(z)$ задаёт форму i -го вихря. Вектора $\mathbf{R}_i$ и $\boldsymbol{\rho}$ лежат в плоскости xu . Движение вихрей мы будем описывать в приближении уравнения релаксации [61]

$$\eta \frac{d\mathbf{R}_i(z)}{dt} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{R}_i}, \quad (3.16)$$

где η — коэффициент вязкости, связанный с диссипативными процессами в коре вихря — см. главу 2. Уравнения (3.13) - (3.16) составляют основу для дальнейшего анализа.

3.3. Зонный спектр магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике в вихревом состоянии

3.3.1. Уравнения на гармоники намагниченности

В данном разделе будет определён спектр магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике в присутствии идеальной вихревой решётки.

Для простоты пренебрежём последним членом в уравнении (3.14). Такое приближение заведомо оправдано, если удовлетворяется неравенство

$$\lambda^{-2} \gg \frac{4\pi}{c} \sigma_n \omega.$$

Данное условие выполняется при не слишком больших частотах магнонов ω , либо при достаточно низких температурах, когда проводимость σ_n мала.

Для начала получим спектр магнонов в мейснеровском состоянии. Подставим $\kappa = 0$ в уравнение (3.14) и положим

$$\mathbf{B}, \mathbf{m} \sim e^{-i\omega t + ik_z z + i\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{q} = (q_x, q_y, 0)$. В уравнении (3.13) пренебрежём нелинейным членом, содержащим произведение $\mathbf{B} \times \mathbf{m}$. Из условия разрешимости линейной системы (3.13) и (3.14) получаем спектр

$$\omega = \omega_0(q) \equiv \gamma M \sqrt{K_1 K_2}, \quad (3.17)$$

$$K_1(q, k_z) = \tilde{K} + \alpha q^2 - \frac{4\pi k_z^2}{\lambda^{-2} + k_z^2 + q^2}, \quad (3.18)$$

$$K_2(q, k_z) = \tilde{K} + \alpha q^2 - \frac{4\pi(k_z^2 + q^2)}{\lambda^{-2} + k_z^2 + q^2}, \quad (3.19)$$

где $\tilde{K} = K + \alpha k_z^2$. Так как $|K_1 - K_2| \ll K_1, K_2$, то с хорошей точностью выполнено приближённое равенство

$$\sqrt{K_1 K_2} \approx \frac{K_1 + K_2}{2},$$

что позволяет несколько упростить спектр (3.17):

$$\omega_0(q, k_z) \approx \gamma M \left[\tilde{K} + \alpha q^2 - \frac{2\pi(2k_z^2 + q^2)}{\lambda^{-2} + k_z^2 + q^2} \right]. \quad (3.20)$$

С использованием этой формулы нетрудно определить положение минимума на спектре, показанном на рис. 3.1б. При $k_z = 0$ имеем:

$$q_{\min} = \sqrt{\sqrt{2\pi \frac{\lambda^{-2}}{\alpha}} - \lambda^{-2}}. \quad (3.21)$$

Теперь рассмотрим ферромагнитный сверхпроводник в смешанном состоянии. Пусть внешнее поле отсутствует или направлено вдоль оси анизотропии. Тогда в равновесии вихревая

решётка ориентирована параллельно вектору намагниченности. В рамках нашей модели вихревая решётка будет треугольной, как в обычном изотропном сверхпроводнике. Вектора трансляции решётки равны

$$\mathbf{R}_{i0} = a_v \mathbf{y}_0 p + a_v \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{y}_0 \right) n, \quad (3.22)$$

где p и n — целые числа. Равновесные завихренность и магнитное поле равны

$$\kappa_0 = \Phi_0 \mathbf{z}_0 \sum_i \delta^{(2)}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_{i0}), \quad (3.23)$$

$$\mathbf{B}_v = \mathbf{z}_0 \sum_{G < \xi^{-1}} B_v(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}}, \quad B_v(\mathbf{G}) = \frac{\Phi_0}{1 + G^2 \lambda^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} a_v^2}, \quad (3.24)$$

где $\mathbf{G}$ — вектора обратной решётки:

$$\mathbf{G} = p \mathbf{G}_1 + n \mathbf{G}_2, \quad \mathbf{G}_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3} a_v} \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{G}_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3} a_v} \mathbf{x}_0 + \frac{2\pi}{a_v} \mathbf{y}_0. \quad (3.25)$$

Линеаризованные уравнения (3.13) и (3.14) принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma M \left[\alpha \nabla^2 \mathbf{m} - \left(K + \frac{B_v(\mathbf{r})}{M} \right) \mathbf{m} + \mathbf{b} \right] \times \mathbf{z}_0 + \frac{\nu}{M} \mathbf{z}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}, \quad (3.26)$$

$$- \nabla^2 \mathbf{b} + \frac{\mathbf{b}}{\lambda^2} = 4\pi \text{rot rot } \mathbf{m} + \frac{1}{\lambda^2} \kappa_1, \quad (3.27)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_v$ и $\kappa_1 = \kappa - \kappa_0$. В уравнении (3.26) мы пока пренебрежём последним членом, ответственным за диссипацию. Линейная поправка к завихренности равна

$$\kappa_1 = \Phi_0 \sum_i \left\{ \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_{i0}) \frac{d\Delta \mathbf{R}_i}{dz} - \mathbf{z}_0 [\Delta \mathbf{R}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_i)] \right\}, \quad (3.28)$$

где $\Delta \mathbf{R}_i(z)$ — локальное смещение вихря относительно состояния равновесия $\mathbf{R}_{i0}$. Уравнение (3.16) после вычисления вариационной производной принимает вид

$$- \eta \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{R}_i(z) = \frac{\Phi_0}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k < \xi^{-1}} \frac{-ik_z(\kappa_{1k} - 4\pi \mathbf{m}_k) + i\mathbf{k}(\mathbf{z}_0 \kappa_{1k})}{4\pi(\lambda^2 k^2 + 1)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_i + ik_z z) d^3 \mathbf{k} - \sum_{G < \xi^{-1}} \frac{B_0 \Phi_0 (\mathbf{G} \Delta \mathbf{R}_i) \mathbf{G}}{4\pi(\lambda^2 G^2 + 1)}, \quad (3.29)$$

где X_k для всякой функции $X(\mathbf{r})$ обозначает её Фурье-образ:

$$X_k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int X(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}.$$

Нетрудно переписать уравнения (3.26), (3.27) и (3.29) в Фурье-представлении. Если это сделать, можно увидеть, что эти уравнения связывают Фурье-компоненты функций $\mathbf{m}$, $\mathbf{b}$ и κ с волновыми векторами, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{k} = \mathbf{G} + \mathbf{k}_0, \quad (3.30)$$

где $\mathbf{k}_0$ — произвольный фиксированный вектор, а вектор $\mathbf{G}$ пробегает всю обратную решётку (3.25). Следовательно, общее решение системы (3.26), (3.27) и (3.29) представимо в виде суммы частных решений в форме

$$\mathbf{m} = e^{-i\omega t + ik_z z + i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{m}(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{b} = e^{-i\omega t + ik_z z + i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{b}(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}}, \quad (3.32)$$

$$\kappa_1 = e^{-i\omega t + ik_z z + i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} \kappa_1(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{r}}, \quad (3.33)$$

где $\mathbf{q}$ — квазиволновой вектор в плоскости xy . Данное утверждение, по сути, представляет собой теорему Блоха, записанную для нашей конкретной системы. Условие (3.33) эквивалентно следующему:

$$\Delta \mathbf{R}_i(z) = \Delta \mathbf{R} e^{-i\omega t + ik_z z + i\mathbf{q}\mathbf{R}_i}. \quad (3.34)$$

Подставив (3.31), (3.32) и (3.34) в уравнения (3.26), (3.27) и (3.29), получаем систему

$$\frac{i\omega\eta}{\Phi_0} \Delta \mathbf{R} = \sum_{G_i < \xi^{-1}} \frac{4\pi i k_z \mathbf{m}(\mathbf{G}_i) + B_0 k_z^2 \Delta \mathbf{R}}{4\pi [1 + \lambda^2(k_z^2 + q_i^2)]} + \sum_{G_i < \xi^{-1}} \frac{B_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{q}_i(\mathbf{q}_i \Delta \mathbf{R})}{1 + \lambda^2(q_i^2 + k_z^2)} - \frac{\mathbf{G}_i(\mathbf{G}_i \Delta \mathbf{R})}{1 + \lambda^2 G_i^2} \right], \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{\gamma M} \mathbf{m}(\mathbf{G}_i) = & \left[-(\tilde{K} + \alpha q_i^2) \mathbf{m}(\mathbf{G}_i) + \frac{4\pi(k_z^2 + q_i^2) \mathbf{m}(\mathbf{G}_i) - 4\pi \mathbf{q}_i(\mathbf{q}_i \mathbf{m}(\mathbf{G}_i)) + B_0 \lambda^{-2} i k_z \Delta \mathbf{R}}{k_z^2 + q_i^2 + \lambda^{-2}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{M} \sum_{\mathbf{G}' \neq 0} \mathbf{m}(\mathbf{G}') B_v(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}') \right] \times \mathbf{z}_0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где $\mathbf{q}_i = \mathbf{q} + \mathbf{G}_i$, а

$$\tilde{K} = K + B_0/M + \alpha k_z^2. \quad (3.37)$$

Закон дисперсии магнонов может быть найден путём решения уравнений (3.35) и (3.36).

При $k_z = 0$ уравнения (3.35) и (3.36) расцепляются. Это означает, что магноны могут распространяться поперёк вихрей без диссипации. Подобный результат был получен ранее в статье [61]. При $k_z \neq 0$ имеет место диссипативное движение вихрей, однако в данном разделе мы рассмотрим предел $\eta \rightarrow \infty$, когда смещения вихрей пренебрежимо малы. Случай конечной вязкости разобран в подразделе 3.3.4.

Как было сказано выше, урановые сверхпроводники обладают сильной магнитной анизотропией. Эта особенность позволяет сделать приближение, значительно упрощающее вычисление спектра магнонов. Пусть вектора $\mathbf{q}_i$ имеют компоненты $(q_i \cos \alpha_i, q_i \sin \alpha_i)$. При $q_i = 0$ угол α_i произволен. Введём новые переменные

$$\begin{aligned} m'_{ix} &= [\cos \alpha_i m_x(\mathbf{G}_i) + \sin \alpha_i m_y(\mathbf{G}_i)] \sqrt[4]{\frac{K_1(q_i)}{K_2(q_i)}}, \\ m'_{iy} &= [\cos \alpha_i m_y(\mathbf{G}_i) - \sin \alpha_i m_x(\mathbf{G}_i)] \sqrt[4]{\frac{K_2(q_i)}{K_1(q_i)}}, \end{aligned}$$

где K_1 и K_2 даются соотношениями (3.18) и (3.19), в которых $\tilde{K}$ определяется согласно уравнению (3.37). Здесь и далее для краткости мы опустим k_z в списке аргументов K_1 , K_2 и ω_0 . Величины m'_{ix} и m'_{iy} удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{i\omega}{\gamma M}m'_{ix} = -\frac{\omega_0(q_i)}{\gamma M}m'_{iy} - \sum_{\mathbf{G}_j \neq 0} b_{ij} \left[m'_{jy} \sqrt[4]{\frac{K_1(q_i)K_1(q_j)}{K_2(q_i)K_2(q_j)}} \cos(\alpha_i - \alpha_j) - m'_{jx} \sqrt[4]{\frac{K_1(q_i)K_2(q_j)}{K_2(q_i)K_1(q_j)}} \sin(\alpha_i - \alpha_j) \right], \quad (3.38)$$

$$-\frac{i\omega}{\gamma M}m'_{iy} = \frac{\omega_0(q_i)}{\gamma M}m'_{ix} + \sum_{\mathbf{G}_j \neq 0} b_{ij} \left[m'_{jx} \sqrt[4]{\frac{K_2(q_i)K_2(q_j)}{K_1(q_i)K_1(q_j)}} \cos(\alpha_i - \alpha_j) + m'_{jy} \sqrt[4]{\frac{K_2(q_i)K_1(q_j)}{K_1(q_i)K_2(q_j)}} \sin(\alpha_i - \alpha_j) \right], \quad (3.39)$$

где $b_{ij} = B_v(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j)/M$, и

$$\frac{\omega_0(q)}{\gamma M} \approx K + \alpha(q^2 + k_z^2) + \frac{B_0}{M} - \frac{2\pi(2k_z^2 + q^2)}{\lambda^{-2} + k_z^2 + q^2}. \quad (3.40)$$

Наше основное приближение заключается в том, что все корни четвёртой степени в уравнениях (3.38) и (3.39) мы будем считать равными единице в силу соотношения

$$\sqrt[4]{\frac{K_1(q_i)K_1(q_j)}{K_2(q_i)K_2(q_j)}} - 1 \approx \frac{1}{4} \left[\frac{K_1(q_i) - K_2(q_i)}{K_2(q_i)} + \frac{K_1(q_j) - K_2(q_j)}{K_2(q_j)} \right] \ll 1.$$

Теперь удобно перейти к переменным $m_i^+ = (m'_{ix} - im'_{iy})e^{-i\alpha_i}$ и $m_i^- = (m'_{ix} + im'_{iy})e^{i\alpha_i}$. Уравнения (3.38) и (3.39) дают

$$\frac{\omega}{\gamma M}m_i^+ = \frac{\omega_0(q_i)}{\gamma M}m_i^+ + \sum_{\mathbf{G}_j \neq 0} b_{ij}m_j^+, \quad (3.41)$$

$$-\frac{\omega}{\gamma M}m_i^- = \frac{\omega_0(q_i)}{\gamma M}m_i^- + \sum_{\mathbf{G}_j \neq 0} b_{ij}m_j^-. \quad (3.42)$$

Уравнения на m_i^+ и m_i^- отличаются только знаком при частоте ω . Систему уравнений (3.41) можно рассматривать как задачу на собственные значения для действительной симметричной матрицы. Для решения подобной задачи существуют эффективные аналитические и численные методы.

Уравнение (3.41) может быть также получено, если допустить, что обменное взаимодействие и лондоновская длина обладают одноосной анизотропией (с осью анизотропии z). В этом случае частоты $\omega_0(q)$ и Фурье-компоненты поля вихрей будут определяться соотношениями

$$B_v(\mathbf{G}) = \frac{\Phi_0}{1 + G^2\lambda_\perp^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}a^2}, \quad (3.43)$$

$$\frac{\omega_0(q)}{\gamma M} = K + \alpha_\parallel k_z^2 + \alpha_\perp q^2 + \frac{B_0(0)}{M} - \frac{2\pi k_z^2 \lambda_\perp^2}{1 + \lambda_\perp^2(k_z^2 + q^2)} - \frac{2\pi(k_z^2 \lambda_\perp^2 + q^2 \lambda_\parallel^2)}{1 + k_z^2 \lambda_\perp^2 + q^2 \lambda_\parallel^2}. \quad (3.44)$$

Здесь величины $\alpha_\parallel$, $\lambda_\parallel$ относятся к оси z , а $\alpha_\perp$, $\lambda_\perp$ — к плоскости xy .

3.3.2. Расчёты спектра магнонов

Для определения собственных значений системы (3.41) мы воспользуемся приближением, аналогичным приближению слабой связи для электронов в периодическом потенциале. Предположим, что несколько собственных значений ω для заданного квазиволнового вектора $\mathbf{q}$ близки

к $\omega_0(q)$, и отклонения $\omega - \omega_0(q)$ могут быть вычислены с помощью теории возмущений. Посмотрим, когда предположение о применимости теории возмущений справедливо. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда $\omega \approx \omega_0(q_i)$, $|m_i^+| \geq |m_j^+|$, и все величины $\omega_0(q_j)$ не близки к $\omega_0(q_i)$ при $j \neq i$. Тогда применима теория возмущений в её простейшем виде. Из уравнения (3.41) следует, что при $i \neq j$

$$m_j \approx \frac{b_{ij}m_i\gamma M}{\omega_0(q_i) - \omega_0(q_j)}.$$

Здесь и далее мы для краткости опустим верхний индекс "+". За счёт того, что некоторая компонента m_j не равна нулю, появляется поправка $\delta\omega$ к невозмущённой частоте $\omega = \omega_0(q_i)$, равная

$$\delta\omega = \frac{b_{ij}^2\gamma^2 M^2}{\omega_0(q_i) - \omega_0(q_j)}.$$

Для того, чтобы теория возмущений была применима, должно по крайней мере выполняться условие $|\delta\omega| \ll |\omega_0(q_i) - \omega_0(q_j)|$, или

$$\left\{ \frac{b_{ij}}{(q_i - q_j)(q_i + q_j) \left[\alpha - \frac{2\pi\lambda^{-2}}{(\lambda^{-2} + q_i^2)(\lambda^{-2} + q_j^2)} \right]} \right\}^2 \ll 1 \quad (3.45)$$

для всех $j \neq i$. Здесь для простоты положено $k_z = 0$.

Если условие (3.45) нарушено для нескольких индексов $N_j \geq 1$, следует применять теорию возмущений для близко лежащих собственных значений. При заданных параметрах задачи число N_j может быть оценено следующим образом:

$$N_j \sim S_q a_v^2, \quad (3.46)$$

где S_q — площадь области в q -пространстве, в которой выполнено неравенство

$$\frac{b_{ij}}{|q_i - q| (q_i + q) \left| \alpha - \frac{2\pi\lambda^{-2}}{(\lambda^{-2} + q_i^2)(\lambda^{-2} + q^2)} \right|} \geq 1. \quad (3.47)$$

Чтобы избежать решения больших секулярных уравнений, мы потребуем $N_q \sim 1$. Это означает, что площадь S_q должна быть не слишком велика. Ограничения на S_q наиболее сильны в двух случаях: (i) величина q_i близка к точке минимума функции $\omega_0(q_i)$; (ii) q_i велика. Для оценки S_q в первом случае мы возьмём $q_i = q_{\min}$. Обменная константа α , входящая в формулу (3.21) для $q_{\min}$, может быть оценена следующим образом:

$$\alpha \sim \Theta/d_a M^2, \quad (3.48)$$

где d_a — межатомное расстояние. Соотношение (3.48) может быть получено с использованием приближения среднего поля для системы локализованных спинов [96].¹ Используя данные из

¹ Строго говоря, соотношение (3.48) даёт оценку сверху для α , так как оно не учитывает влияние магнитокристаллической анизотропии на температуру Кюри.

таблицы 3.1, предполагая $d_a \sim 5 \text{ \AA}$, мы получаем $\alpha \sim 10^{-10} \text{ см}^2$ для UCoGe, и несколько меньшие значения для URhGe и UGe₂. Таким образом, в урановых ферромагнитных сверхпроводниках $\alpha \ll \lambda^2$, и $q_{\min} \gg \lambda^{-1}$.²

Вернёмся к оценкам числа N_q . При $q_i = q_{\min}$ неравенство (3.47) даёт

$$|q - q_{\min}|^2 \leq \frac{b_{ij}}{4\alpha}.$$

Здесь предполагается, что $|q - q_{\min}| \ll q_{\min}$. Тогда

$$N_q \sim a_v^2 q_{\min} \sqrt{\frac{b_{ij}}{\alpha}} \sim \frac{a_v}{\sqrt{1 + G^2 \lambda^2}} \sqrt{\frac{\Phi_0}{M \lambda \alpha^{3/2}}}.$$

Требование $N_q \lesssim 1$ для всех $G \neq 0$ приводит к условию

$$B_0 \gtrsim \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\Phi_0 \lambda}{M \alpha^{3/2}}}. \quad (3.49)$$

В случае больших q_i ($q_i \gg q_{\min}$) нетрудно показать, что $N_q \lesssim 1$ при

$$B_0 \gtrsim \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \frac{\Phi_0}{M \alpha}. \quad (3.50)$$

Таким образом, неравенства (3.49) и (3.50) задают условия применимости приближения слабой связи в соответствующих предельных случаях.

Подобно спектру электронов в периодическом потенциале, спектр магнонов в периодическом поле вихрей имеет зонную структуру. В приближении слабой связи нетрудно рассчитать энергетическую щель между соседними зонами. Очевидно, щель минимальна в тех точках зоны Бриллюэна, где зоны пересекались бы в отсутствие переменной компоненты поля вихрей (при $b_{ij} = 0$). В этих точках совпадают частоты $\omega_0(q_i)$ для нескольких индексов i . Возьмём такую точку, в которой совпадают всего две частоты: $\omega_0(q_i) = \omega_0(q_j)$ (случай, когда есть больше двух совпадающих частот, рассмотрен в следующем подразделе). Тогда для определения частот магнонов в приближении слабой связи нужно решить простое секулярное уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega_0(q_i) - \omega}{\gamma M} & b_{ij} \\ b_{ij} & \frac{\omega_0(q_j) - \omega}{\gamma M} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.51)$$

Отсюда сразу получается частотная щель

$$\Delta_{ij} = 2\gamma B_v(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j). \quad (3.52)$$

На основе уравнений (3.36) был произведён также численный расчёт спектров магнонов при разных значениях среднего поля B_0 . Для различных значений квазиволнового вектора $\mathbf{q}$,

² В работе [A3] величина α была оценена из соотношения $\alpha = KL^2$, однако значения α получились завышенными из-за использования неверных данных по толщинам доменных стенок в ферромагнитных сверхпроводниках.

лежащих в первой зоне Бриллюэна (см. рис. 3.2) решалась система из 61 уравнения на компоненты m_i , соответствующие 61 векторам $\mathbf{G}$ с наименьшими модулями. Остальные компоненты полагались равными нулю. Диагонализация матрицы размером 61×61 производилась с помощью стандартного алгоритма библиотеки GNU C Library. В расчётах использовались параметры UCoGe: $\lambda = 1.2 \mu\text{м}$, $\alpha = 10^{-10} \text{ см}^2$, $K = 10^4$, $M = 9 \text{ эрг} \cdot \text{Гс}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$. Во всех вычислениях полагалось $k_z = 0$. На рисунке 3.3а-с показаны спектры магнонов при поле B_0 , равном

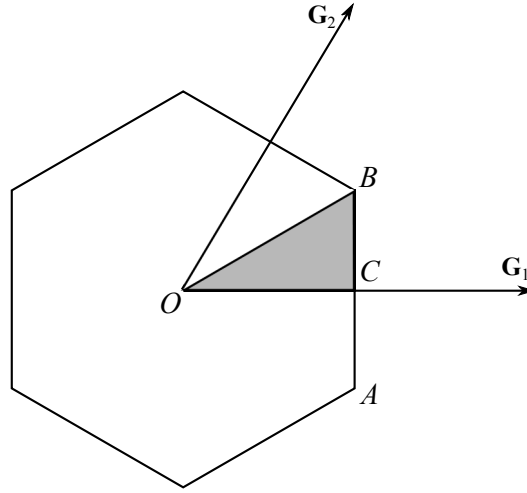


Рис. 3.2. Первая зона Бриллюэна для треугольной решётки вихрей. Для определения спектра во всей зоне достаточно рассчитать его в серой области; частоты магнонов в остальной части зоны Бриллюэна находятся из соображений симметрии.

$$B_p = \frac{\Phi_0 \sqrt{3}}{2\pi^2} \left(\frac{2\pi}{\alpha} - \lambda^{-2} \right). \quad (3.53)$$

При таком поле $\omega_0(0) = \omega_0(G_1/2)$. При графическом изображении спектров здесь используется схема приведённых зон: везде показана только первая зона Бриллюэна. На спектрах во второй и третьей энергетической зоне (рис. 3.3b и c) можно видеть изломы. Эти изломы соответствуют линиям пересечения зон в нулевом порядке теории возмущений (т. е., в однородном магнитном поле). В действительности изломы на спектрах сглажены, однако это можно увидеть лишь на очень мелкомасштабном графике. На рис. 3.3d и e показаны два сечения нижних шести зон спектра. Щели между некоторыми соседними зонами настолько малы, что они неразличимы на графике, так что соответствующие зоны представлены одной кривой. На рис. 3.4 показаны аналогичные графики для поля $B_0 = 0.1B_p$. При уменьшении поля структура спектра меняется качественно: спектры сильно деформируются в центре первой зоны Бриллюэна. Такое необычное поведение связано с немонотонностью невозмущённого спектра (3.20), и по сути есть проявление эффекта соизмеримости: трансформация спектров происходит при $\omega_0(0) > \omega_0(\mathbf{G}_1)$.

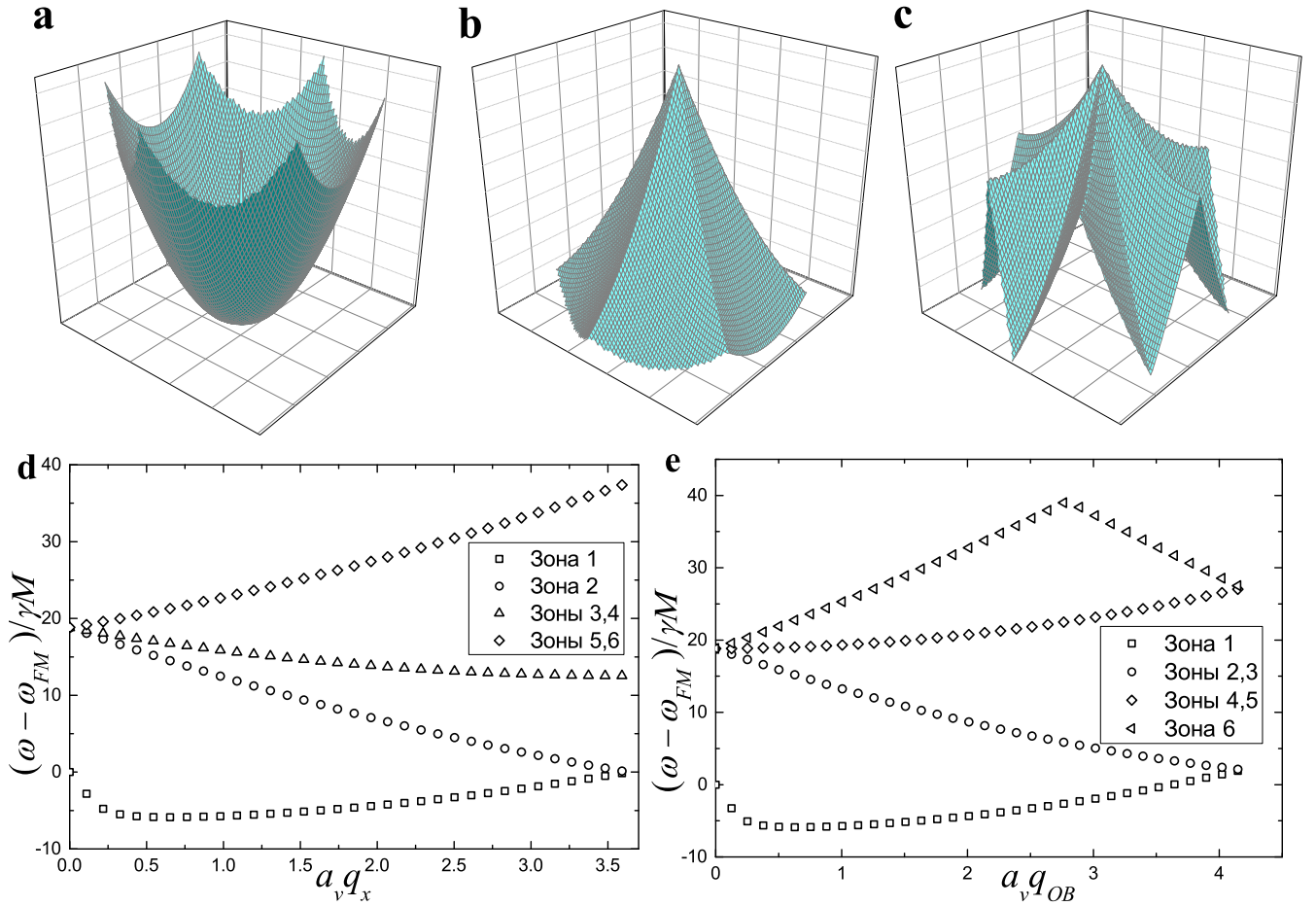


Рис. 3.3. Спектры магнонов в первой (а), второй (б) и третьей (с) зонах при $B_0 = B_p$. Масштабы по вертикали на разных графиках не совпадают. Сечение нижних шести зон вдоль линий ОС (д) и ОВ (е) первой зоны Бриллюэна (рис. 3.2). $\omega_{FM} = \gamma(MK + B_0)$.

В целом, результаты численного моделирования показали, что спектр магнонов при $B_0 \geq 0.1B_p$ довольно точно описывается в приближении слабой связи.

3.3.3. Спектр магнонов в точках высокой симметрии: пересечение зон

Основные результаты, полученные в подразделах 3.3.1 и 3.3.2, формально выведены в предположении, что ферромагнитный сверхпроводник имеет изотропные сверхпроводящие свойства (λ — скаляр), однако данные результаты также качественно верны в случае, когда сверхпроводящие свойства анизотропны. В данном подразделе будут проанализированы те особенности спектра магнонов, которые характерны именно для материалов с одноосной анизотропией.

Рассмотрим те точки первой зоны Бриллюэна, где система (3.41) допускает нетривиальную группу симметрии. Чтобы несколько упростить анализ, будем предполагать, что $\omega_0(\mathbf{q}) \neq \omega_0(\mathbf{q} + \mathbf{G})$ для всех $\mathbf{q}$, рассмотренных ниже в данном подразделе, и для всех векторов обратной решётки $\mathbf{G}$ (это предположение неверно лишь при некотором дискретном наборе магнитных

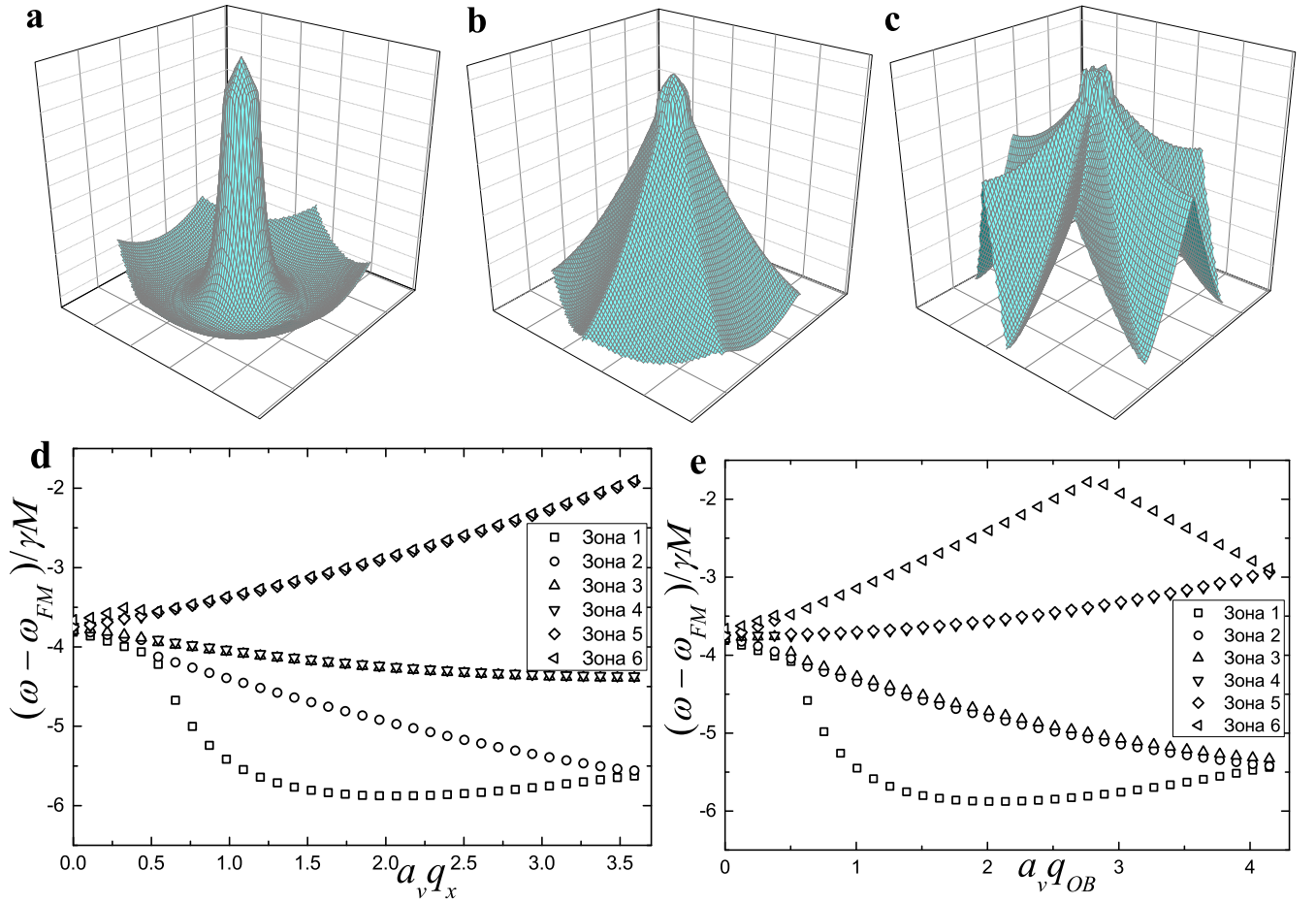


Рис. 3.4. Спектры магнонов в первой (а), второй (б) и третьей (с) зонах при $B_0 = 0.1B_p$. Сечение нижних шести зон вдоль линий ОС (d) и ОВ (е) первой зоны Бриллюэна. $\omega_{FM} = \gamma(MK + B_0)$.

полей, так что не является существенным ограничением).

Точка с самой высокой симметрией — центр первой зоны Бриллюэна, где $\mathbf{q} = 0$. В этой точке система (3.41) допускает группу

$$\mathcal{G}_0 = \{R^i, \sigma_i\}, \quad i = 0..5, \quad (3.54)$$

изоморфную группе C_{6v} . Здесь $\sigma_i = R^i \sigma_0$, а R и σ_0 определены следующим образом:

$$\begin{aligned} R : \quad m_i = m(\mathbf{G}_i) &\rightarrow m(\hat{T}\mathbf{G}_i), \\ \hat{T} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}; \\ \sigma_0 : \quad m_i = m(G_{ix}, G_{iy}) &\rightarrow m(G_{ix}, -G_{iy}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Характеры неприводимых представлений группы $\mathcal{G}_0$ собраны в таблице 3.2. Из-за наличия двумерных представлений B_1 и B_2 в центре первой зоны Бриллюэна имеются парные касания зон. Действительно, рассмотрим зоны с номерами от 2 до 7. В нулевом порядке теории возмущений

$\omega(\mathbf{q} = 0) = \omega_0(\mathbf{G}_1)$ во всех этих зонах. В первом порядке теории возмущений нужно решать шесть уравнений из системы (3.41) на компоненты $m(\hat{T}^i \mathbf{G}_1)$, $i = 0..5$. Решения данной задачи на собственные значения приведены в таблице 3.3. Здесь $b_{12} = B_v(\mathbf{G}_1)/M$, $b_{13} = B_v(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)/M$, $b_{14} = B_v(2\mathbf{G}_1)/M$. Пары зон 3,4 и 5,6 имеют точку касания при $\mathbf{q} = 0$.

	R^0	R, R^5	R^2, R^4	R^3	$\sigma_0, \sigma_2, \sigma_4$	$\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
A_3	1	-1	1	-1	1	-1
A_4	1	-1	1	-1	-1	1
B_1	2	-1	-1	2	0	0
B_2	2	1	-1	-2	0	0

Таблица 3.2. Характеры неприводимых представлений группы $\mathcal{G}_0$.

Представление	Номера зон	Решение $m(\hat{T}^k \mathbf{G}_1) = \dots$	$\frac{\omega - \omega_0(\mathbf{G}_1)}{\gamma M}$
A_3	2	$(-1)^k m(\mathbf{G}_1)$	$-2b_{12} + 2b_{13} - b_{14}$
B_1	3,4	$e^{\pm 2ik\pi/3} m(\mathbf{G}_1)$	$-b_{12} - b_{13} + b_{14}$
B_2	5,6	$e^{\pm ik\pi/3} m(\mathbf{G}_1)$	$b_{12} - b_{13} - b_{14}$
A_1	7	$m(\mathbf{G}_1)$	$2b_{12} + 2b_{13} + b_{14}$

Таблица 3.3. Решения системы (3.41) при $q = 0$ в первом порядке теории возмущений.

Другой точкой высокой симметрии является точка B (см. рис. 3.2), где $\mathbf{q} = \mathbf{q}_B = (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)/3$. В точке B система (3.41) допускает группу симметрии

$$\mathcal{G}_B = \{R_B^i, \sigma_{Bi}\}, i = 0, 1, 2, \quad (3.56)$$

где

$$R_B : \quad m(\mathbf{G}_i) \rightarrow m(\hat{T}^2 \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_1),$$

$$\sigma_{B0} : \quad m(\mathbf{G}_i) \rightarrow m(\hat{\sigma}_{OB} \mathbf{G}_i),$$

$$\sigma_{Bi} = R_B^i \sigma_{B0},$$

а $\hat{\sigma}_{OB}$ — оператор отражения относительно оси OB . Группа $\mathcal{G}_B$ изоморфна группе C_{3v} . Характеры неприводимых представлений $\mathcal{G}_B$ собраны в таблице 3.4. Пересечение двух зон в точке B возни-

	R_B^0	R_B, R_B^2	$\sigma_{Bi}, i = 0, 1, 2$
D_1	1	1	1
D_2	1	1	-1
E	2	-1	0

Таблица 3.4. Характеры неприводимых представлений группы $\mathcal{G}_B$.

Представ- ление	Номера зон	Решение	$\frac{\omega - \omega_0(\mathbf{q}_B)}{\gamma M}$
E	1,2	$m(-\mathbf{G}_1) = e^{\pm 2\pi i/3} m(0),$ $m(-\mathbf{G}_2) = e^{\mp 2\pi i/3} m(0)$	$-b_{12}$
D_1	3	$m(-\mathbf{G}_1) = m(-\mathbf{G}_2) = m(0)$	$2b_{12}$

Таблица 3.5. Решения системы (3.41) при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_B$ в первом порядке теории возмущений.

кает при частотах, близких к $\omega_0(q_B)$. Для нахождения частот магнонов в первом порядке теории возмущений следует решать систему из трёх уравнений относительно $m(0)$, $m(-\mathbf{G}_1)$, и $m(-\mathbf{G}_2)$. Решения задачи на собственные значения приведены в таблице 3.5. Оказывается, что точка B является точкой касания первой и второй зон.

Наконец, следует сделать замечание относительно симметрии исходной системы (3.35) и (3.36). В подразделе 3.3.1 было выведено приближённое уравнение (3.41) в предположении, что величина $\tilde{K}$ очень велика. В качестве побочного эффекта это приближение дало дополнительные операции симметрии σ_i при $\mathbf{q} = 0$ и σ_{Bi} при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_B$, которые не присутствуют в исходной системе (если быть более точным, аналоги σ_i и σ_{Bi} содержат операцию комплексного сопряжения, и по этой причине они не являются линейными). Система (3.34) - (3.36) при $\mathbf{q} = 0$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}_B$ допускает группы, изоморфные соответственно группам C_6 и C_3 , которые имеют только одномерные неприводимые представления. В результате между зонами, имеющими точку касания в приближении уравнения (3.41), имеется небольшая щель, ширина которой стремится к нулю при $K \rightarrow \infty$.

3.3.4. Учёт диссипации

Обсудим влияние диссипации на спектр спиновых волн. Сначала рассмотрим потери, связанные с вязким движением вихрей. В общем случае сложно выразить амплитуду смещения вихрей $\Delta \mathbf{R}$ через $\mathbf{m}(\mathbf{G}_i)$, используя уравнение (3.35). Упрощения возможны в пределе больших вязкостей η , когда все члены в правой части уравнения (3.35), содержащие $\Delta \mathbf{R}$ пренебрежимо

малы по сравнению с релаксационным членом в левой части этого уравнения. Для того, чтобы такая ситуация имела место, достаточно потребовать

$$\frac{\omega\eta}{\Phi_0} \gg B_0\lambda^{-2}, H_{c1}k_z^2, H_{c1}k^2, \quad (3.57)$$

где H_{c1} даётся формулой (2). Условия (3.57) могут быть удовлетворены в чистом пределе: известно, что вязкость вихря увеличивается с увеличением нормальной проводимости — см. главу 2.

В рамках нашего приближения

$$\Delta\mathbf{R} = \sum_{G_i < \xi^{-1}} \frac{\Phi_0 k_z \mathbf{m}(\mathbf{G}_i)}{\omega\eta [1 + \lambda^2(k_z^2 + q_i^2)]}. \quad (3.58)$$

После подстановки $\Delta\mathbf{R}$ в уравнение (3.36) мы можем повторить выкладки из подраздела 3.3.1 и снова получить систему (3.41), в которой теперь

$$\begin{aligned} \omega_0(q, k_z) &= \gamma M \left(\tilde{K} + \alpha q^2 - \frac{2\pi(2k_z^2 + q^2)}{\lambda^{-2} + k_z^2 + q^2} - \frac{iB_0\Phi_0 k_z^2}{\omega\eta(1 + \lambda^2(k_z^2 + q^2))^2} \right), \\ b_{ij} &= \frac{B_v(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j)}{M} - \frac{iB_0\Phi_0 k_z^2}{\omega\eta} \frac{1}{[1 + \lambda^2(k_z^2 + q_i^2)][1 + \lambda^2(k_z^2 + q_j^2)]}. \end{aligned}$$

Система уравнений (3.41) теперь представляет собой задачу на собственные значения неэрмитовой матрицы. Вследствие диссипации магнонные моды затухают, что затрудняет экспериментальное наблюдение щелей спектра, если мнимая часть частоты больше величины щели. Для того, чтобы связанные с щелями Δ_{ij} эффекты были наблюдаемы, необходимо обеспечить выполнение неравенства

$$\frac{B_v(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_j)}{M} \gtrsim \frac{B_0\Phi_0 k_z^2}{\Re(\omega)\eta(1 + \lambda^2(k_z^2 + q_{i,j}^2))^2}. \quad (3.59)$$

Данное условие выполняется, если вязкость достаточно велика, или продольная компонента квазиволнового вектора k_z достаточно мала.

За диссипативные явления, связанные с рассеянием магнонов на неоднородностях образца и электронах проводимости, в нашей модели отвечает второй член в уравнении Ландау-Лифшица-Гильберта (3.1). Мнимая добавка к частоте, вызванная этим членом, равна $\Re(\omega)\nu/M$, что соответствует времени релаксации магнонов $\tau_r = \Re(\omega)^{-1}M/\nu$. Экспериментальные значения величины ν в ферромагнитных сверхпроводниках на сегодняшний день неизвестны, однако грубые оценки времени затухания магнонных мод могут быть получены с использованием характерных значений $\tau_r \sim 10^{-9} - 10^{-8}$ с для металлических ферромагнетиков (см. [59]).

3.3.5. Коэффициент отражения электромагнитной волны от ферромагнитного сверхпроводника в параллельной геометрии

В данном подразделе будет продемонстрировано, что щели в спектре магнонов могут быть обнаружены экспериментально путём снятия частотной зависимости коэффициента отражения микроволнового излучения от ферромагнитного сверхпроводника. Рассмотрим электромагнитную ТЕ-волну с волновым вектором $\mathbf{k}$ и амплитудой $\mathbf{H}_0$, падающую на ферромагнитный сверхпроводник, занимающий полупространство $x > 0$ (см. рис. 3.5). Для простоты мы положим

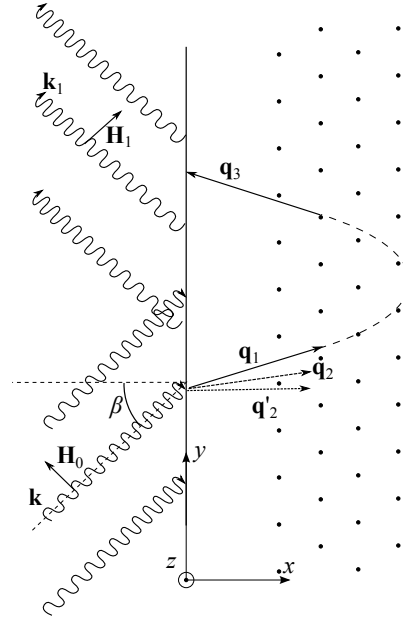


Рис. 3.5. Электромагнитная волна ($\mathbf{k}$), падающая на плоскую поверхность ферромагнитного сверхпроводника, частично отражается обратно как волна с волновым вектором $\mathbf{k}_1$. Внутри образца возбуждаются одна распространяющаяся ($\mathbf{q}_1$) и две затухающие моды ($\mathbf{q}_2$ and $\mathbf{q}'_2$). Мода $\mathbf{q}_1$ дифрагирует на решётке вихрей (условно изображённых в виде точек) и преобразуется в моду $\mathbf{q}_3$, распространяющуюся в направлении границы образца.

$k_z = 0$. Заметим, в ТМ-волне поле $\mathbf{H}$ осциллирует вдоль однородной намагниченности, следовательно, такая волна не возбуждает магноны и полностью отражается. По этой причине мы рассматриваем здесь ТЕ-волну. Такая волна возбуждает три магнонных моды в образце: одну распространяющуюся ($\mathbf{q}_1$) и две затухающие ($\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}'_2$). Волновые вектора $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}'_2$, можно определить из уравнений

$$\omega^2 = \omega_0^2(q) = \gamma^2 M^2 \left(K + \frac{B_0}{M} + \alpha q^2 \right) \left(K + \frac{B_0}{M} + \alpha q^2 - \frac{4\pi q^2}{q^2 + \lambda^{-2}} \right), \quad (3.60)$$

$$q_x^2 = q^2 - k_y^2, \quad (3.61)$$

Распространяющаяся мода может быть отражена обратно к поверхности образца за счёт брэгговского рассеяния на вихревой решётке, если существует волновой вектор $\mathbf{q}_3$, удовлетворяющий следующим двум соотношениям:

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{G}, \quad (3.62)$$

$$\omega_0(q_3) \approx \omega_0(q_1), \quad (3.63)$$

где $\mathbf{G} = -G\mathbf{x}_0$ — некоторый вектор обратной решётки (3.25).

Определим амплитуду отражённой электромагнитной волны $\mathbf{H}_1$. Для вычисления этой величины нужно знать равновесное магнитное поле $\mathbf{B}_{\text{eq}}(\mathbf{r})$ в образце:

$$\mathbf{B}_{\text{eq}} = 4\pi M\mathbf{z}_0 e^{-x/\lambda} + \mathbf{B}_v(\mathbf{r} - x_v\mathbf{x}_0) + \mathbf{B}'_0(\mathbf{r}). \quad (3.64)$$

Здесь первый член представляет собой экранированное поле намагниченности (мы пока положим $\mathbf{H}_e = 0$), $\mathbf{B}_v$ — поле вихрей (см. уравнение (3.11)), величина x_v задаёт сдвиг вихревой решётки относительно границы образца, а член $\mathbf{B}'_0(\mathbf{r})$ отвечает за искажение вихревой решётки в поверхностном слое с толщиной порядка λ .

Рассмотрим плотную вихревую решётку, так что $\alpha/a_v^2 \gg 1$. Для того, чтобы волна $\mathbf{q}_1$ могла дифрагировать на вихревой решётке, необходимо потребовать $q_1 \sim a_v^{-1}$. Тогда $\alpha q_1^2 \gg 1$. Нестационарная намагниченность может быть представлена в виде

$$\mathbf{m} \approx \mathbf{m}_1(x)e^{i\mathbf{q}_1\mathbf{r}} + \mathbf{m}_2e^{i\mathbf{q}_2\mathbf{r}} + \mathbf{m}'_2e^{i\mathbf{q}'_2\mathbf{r}} + \mathbf{m}_3(x)e^{i\mathbf{q}_3\mathbf{r}}, \quad (3.65)$$

где $\mathbf{m}_1(x)$ и $\mathbf{m}_3(x)$ медленно меняются в пространстве. В Приложении Д показано, что влияние экранированного поля намагниченности на магнитные моды несущественно. Аналогично может быть показано, что поле искажений $\mathbf{B}'_0(\mathbf{r})$ также слабо влияет на нестационарную намагниченность. По этой причине мы будем считать, что амплитуды $\mathbf{m}_2$ и $\mathbf{m}'_2$ не зависят от координат.

Теперь запишем граничные условия. Непосредственно из уравнений (3.1) и (3.6) в результате варьирования свободной энергии получаем

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x}(x=0) = 0. \quad (3.66)$$

Условие на непрерывность касательной компоненты поля $\mathbf{H}$ даёт

$$(H_0 + H_1) \cos \beta = -4\pi \sum_i \frac{(\lambda^{-2} + k_y^2)m_{iy}(0) + k_y q_{ix}m_{ix}(0)}{q_i^2 + \lambda^{-2}}, \quad (3.67)$$

где суммирование идёт по всем перечисленным выше модам. Здесь β — угол падения (см. рис. 3.5). Электрическое поле внутри ферромагнитного сверхпроводника равно

$$\mathbf{E} = -4\pi k \sum_i \frac{\mathbf{q}_i \times \mathbf{m}_i}{q_i^2 + \lambda^{-2}} e^{i\mathbf{q}_i\mathbf{r}}. \quad (3.68)$$

Условие непрерывности для электрического поля даёт

$$H_1 - H_0 = 4\pi k \sum_i \frac{k_y m_{ix}(0) - q_{ix} m_{iy}(0)}{q_i^2 + \lambda^{-2}}, \quad (3.69)$$

Волновой вектор $\mathbf{q}'_2$ имеет большой модуль по сравнению с волновыми векторами других мод ($q_2'^2 \approx -2\omega/\gamma M\alpha$, согласно уравнению (3.60)), поэтому соответствующая компонента намагниченности, $\mathbf{m}'_2$, мала. Ей можно пренебречь в соотношениях (3.67) и (3.69). Чтобы исключить $\mathbf{m}'_2$ и условия (3.66), заметим, что $m'_{2x} \approx im'_{2y}$, следовательно

$$\sum_{i=1}^3 q_{ix}(m_{ix}(0) - im_{iy}(0)) = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^3 q_{ix} m_{iy}(0) = 0, \quad (3.70)$$

так как $m_{ix} \approx -im_{iy}$ для $i = 1, 2, 3$. Теперь найдём связь между $\mathbf{m}_1$ и амплитудой отражённой моды, $\mathbf{m}_3$. Магнитное поле этих мод мало по сравнению с $\alpha \nabla^2 \mathbf{m}$, и в линеаризованном уравнении Ландау-Лифшица им можно пренебречь:

$$\frac{\omega}{\gamma M} \mathbf{m} = \tilde{K} \mathbf{m} - \alpha \nabla^2 \mathbf{m} + \frac{1}{M} B_v (\mathbf{r} - x_v \mathbf{x}_0) \mathbf{m}. \quad (3.71)$$

Моды $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_3$ взаимодействуют друг с другом посредством двух Фурье-компонент поля вихрей:

$$B_v(\mathbf{G})(e^{iG(x-x_v)} + e^{-iG(x-x_v)}),$$

где вектор $\mathbf{G}$ определяется из соотношений (3.62) и (3.63). Остальные Фурье-компоненты поля в данном случае несущественны. Подставив $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1(x)e^{i\mathbf{q}_1 \mathbf{r}} + \mathbf{m}_3(x)e^{i\mathbf{q}_3 \mathbf{r}}$ в уравнение (3.71), пренебрегая вторыми производными от $\mathbf{m}_1(x)$ и $\mathbf{m}_3(x)$, получаем

$$iv_{gx} \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial x} = \frac{\Delta}{2} e^{-i\varphi_v - i\delta x} \mathbf{m}_3(x), \quad (3.72)$$

$$iv_{gx} \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial x} = -\frac{\Delta}{2} e^{i\varphi_v + i\delta x} \mathbf{m}_1(x), \quad (3.73)$$

где

$$v_{gx} = \frac{\partial \omega_0}{\partial q_x}(\mathbf{q}_1) = 2\gamma M \alpha q_{1x},$$

$\Delta = 2\gamma B_v(G)$ — щель спектра (ср. с (3.52)), $\varphi_v = Gx_v$, и $\delta = 2q_{1x} - G$. Два линейно независимых решения уравнений (3.72) и (3.73) —

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1(x) &= (\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0) e^{(\epsilon - i\delta/2)x}, \\ \mathbf{m}_3(x) &= \frac{2iv_{gx} e^{i\varphi_v}}{\Delta} \left(\epsilon - i\frac{\delta}{2} \right) (\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0) e^{(\epsilon + i\delta/2)x}, \end{aligned}$$

$$\epsilon = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta^2}{v_{gx}^2} - \delta^2} \quad (3.74)$$

При $|\delta| < \Delta/v_{gx}$ следует взять знак «-» в уравнении (3.74), чтобы отбросить растущее решение.

При $|\delta| > \Delta/v_{gx}$ следует выбрать то решение, в котором $|\mathbf{m}_1| \gg |\mathbf{m}_3|$, когда $|\delta| \gg \Delta/v_{gx}$:

$$\epsilon = \frac{i}{2} \sqrt{\delta^2 - \frac{\Delta^2}{v_{gx}^2}} \text{ при } \delta > 0, \quad \epsilon = -\frac{i}{2} \sqrt{\delta^2 - \frac{\Delta^2}{v_{gx}^2}} \text{ при } \delta < 0. \quad (3.75)$$

Такой выбор знака позволяет отбросить решение с отрицательной проекцией групповой скорости на ось x . При $x = 0$ мы имеем связь

$$\mathbf{m}_3(0) = A \mathbf{m}_1(0), \quad (3.76)$$

$$A = 2iv_{gx} e^{i\varphi_v} \Delta^{-1} (\epsilon - i\frac{\delta}{2}) \quad (3.77)$$

Теперь мы можем записать полную систему линейных уравнений, позволяющих определить амплитуду отражённой волны, H_1 . Соотношения (3.67), (3.69), (3.70) и (3.76) дают

$$\tilde{q}_{1x} \tilde{m}_{1y} + q_{2x} m_{2y} = 0, \quad (3.78)$$

$$4\pi \frac{ik_y \tilde{q}_{1x} - \lambda^{-2} - k_y^2}{q_1^2 + \lambda^{-2}} \tilde{m}_{1y} + 4\pi \frac{ik_y q_{2x} - \lambda^{-2} - k_y^2}{q_2^2 + \lambda^{-2}} m_{2y} = (H_0 + H_1) \cos \beta, \quad (3.79)$$

$$-4\pi k \frac{ik_y + \tilde{q}_{1x}}{q_1^2 + \lambda^{-2}} \tilde{m}_{1y} - 4\pi k \frac{ik_y + q_{2x}}{q_2^2 + \lambda^{-2}} m_{2y} = H_1 - H_0, \quad (3.80)$$

где

$$\tilde{m}_{1y} = (A + 1)m_{1y}(0), \quad \tilde{q}_{1x} = \frac{1 - A}{1 + A} q_{1x}. \quad (3.81)$$

Отметим, что в данном случае задача об отражении электромагнитной волны от ферромагнитного сверхпроводника в смешанном состоянии оказалась формально эквивалентной аналогичной задаче для мейснеровского состояния (с точностью до замены q_{1x} на $\tilde{q}_{1x}$). Из системы (3.78) - (3.80) находим коэффициент отражения

$$R_H = \frac{H_1}{H_0} = \frac{\frac{\lambda^{-2} q_{2x}}{q_1^2 + \lambda^{-2}} - \frac{\alpha(q_1^2 + \lambda^{-2})}{2\pi} \tilde{q}_{1x} + e^{-i\beta} \left(k q_{2x} \frac{ik_y + \tilde{q}_{1x}}{q_1^2 + \lambda^{-2}} - k \tilde{q}_{1x} \frac{(ik_y + q_{2x})\alpha(q_1^2 + \lambda^{-2})}{2\pi\lambda^{-2}} \right)}{\frac{\lambda^{-2} q_{2x}}{q_1^2 + \lambda^{-2}} - \frac{\alpha(q_1^2 + \lambda^{-2})}{2\pi} \tilde{q}_{1x} - e^{i\beta} \left(k q_{2x} \frac{ik_y + \tilde{q}_{1x}}{q_1^2 + \lambda^{-2}} - k \tilde{q}_{1x} \frac{(ik_y + q_{2x})\alpha(q_1^2 + \lambda^{-2})}{2\pi\lambda^{-2}} \right)}. \quad (3.82)$$

Здесь использовано соотношение

$$\alpha q_1^2 - \frac{2\pi q_1^2}{q_1^2 + \lambda^{-2}} = \alpha q_2^2 - \frac{2\pi q_2^2}{q_2^2 + \lambda^{-2}},$$

справедливое в пределе $K \gg 1$. Выражение для коэффициента отражения может быть упрощено, если учесть, что $q_1 \gg \lambda^{-1}$ и $q_{2x} \approx i\lambda^{-1}$:

$$R_H = \frac{1 + ik^2 \lambda^2 e^{-i\beta} \sin \beta + Q(i - k\lambda e^{-i\beta})}{1 - ik^2 \lambda^2 e^{i\beta} \sin \beta + Q(i + k\lambda e^{i\beta})}, \quad (3.83)$$

где

$$Q = \frac{\alpha \lambda^2 q_1^4}{2\pi} q_{1x} \lambda \frac{1-A}{1+A}. \quad (3.84)$$

В соотношении (3.83) отброшены некоторые малые члены, которые практически не влияют на модуль R_H . Так как комплексная величина A может принимать любое значение в круге $|A| \leq 1$, то единственным ограничением на Q является $\Re(Q) \geq 0$.

Когда $|A| = 1$, Q чисто мнимое, и $|R_H| = 1$, то есть, волна полностью отражается. Это объясняется тем, что сечение спектра магнонов плоскостью $k_y = \text{const}$ имеет щель Δ , и магноны с частотой ω , лежащей внутри этой щели, не могут распространяться в образце.

Рассмотрим теперь частоты, лежащие вдали от щели: $\delta \gg \Delta/v_{gx}$. В этом случае магноны не чувствуют вихревую решётку, и величина Q действительная и большая: $Q \gg 1$. Из уравнения (3.83) тогда получаем

$$1 - |R_H|^2 = \frac{4k\lambda \cos \beta}{Q} \ll 1. \quad (3.85)$$

Интересный эффект, следующий из уравнения (3.83), заключается в полном прохождении электромагнитной волны с частотой, лежащей вблизи щели спектра. Для определения параметров, при которых это возможно, положим $R_H = 0$. Данное равенство приводит к требованию

$$Q \approx i + k\lambda e^{-i\beta}. \quad (3.86)$$

Это возможно при $A \approx 1$, но $|A| < 1$, то есть, отстройка от щели должна быть достаточно малой. Например, если $k\alpha\lambda^4 q_1^5 \gg 1$, то

$$\frac{|\delta| v_{gx}}{\Delta} - 1 \approx \frac{8\pi^2 k^2 \cos^2 \beta}{\alpha^2 \lambda^4 q_1^{10}}. \quad (3.87)$$

Заметим, что при $A \approx 1$ $\mathbf{m}_1(0) \approx \mathbf{m}_3(0)$. Следует подчеркнуть, что для того, чтобы провал на зависимости $R_H(\omega)$ был наблюдаем, параметры системы должны быть очень точно подогнаны. Так, величина A должна равняться единице на границе щели спектра, что приводит к следующему соотношению:

$$e^{iG_{X_v}} = \pm 1. \quad (3.88)$$

Данное условие может быть удовлетворено, если приложить некоторое внешнее магнитное поле.

3.4. Излучение магнонов движущимися вихрями в структурах сверхпроводник-ферромагнетик

3.4.1. Общие соотношения для силы, действующей на вихри

В данном разделе будет исследовано влияние магнонов на отклик вихрей на внешний ток в двух системах: ферромагнитном сверхпроводнике и сверхрешётке сверхпроводник (S)/

ферромагнетик (F) — см. рис. 3.6а.

Рассмотрим ситуацию, когда внутреннее магнитное поле составляют некоторый угол θ с осью лёгкого намагничивания. Ось z при этом направлена вдоль вихрей, которые мы для простоты будем считать прямыми, так что величины $\mathbf{R}_i$ не зависят от z . Уравнения на намагниченность и поле в ферромагнитном сверхпроводнике были получены в разделе 3.2. В случае многослойной SF системы уравнение Лондонов (3.14) применимо для описания сверхпроводящих слоёв, тогда как в ферромагнитных слоях намагниченность удовлетворяет линеаризованному уравнению Ландау-Лифшица-Гильберта (3.13), а поля определяются из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma_F}{c} \mathbf{E} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.89)$$

где σ_F — проводимость ферромагнетика. На SF-границе имеют место граничные условия

$$B_z \Big|_F = B_z \Big|_S, \quad H_{x,y} \Big|_F = H_{x,y} \Big|_S \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} \Big|_F = 0. \quad (3.91)$$

Мы будем пренебрегать джозефсоновской связью между сверхпроводящими слоями, что является допустимым приближением, если граница между S и F слоями малопрозрачна, или толщина ферромагнитных слоёв не слишком мала [97].

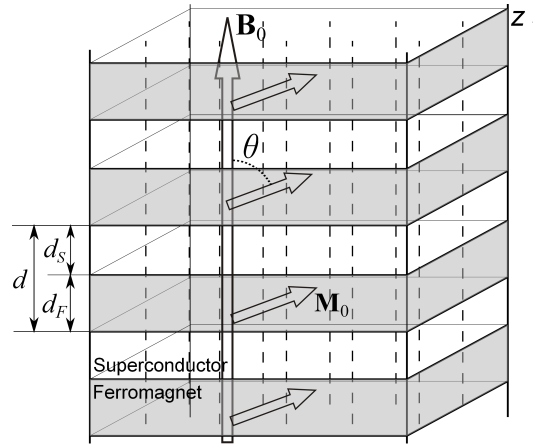


Рис. 3.6. Слоистая система сверхпроводник-ферромагнетик. Пунктирные линии обозначают вихри. Лёгкая ось в магнитных слоях параллельна вектору $\mathbf{M}_0$.

Решение задачи об отклике вихрей на внешнее воздействие несколько упрощается, если в уравнениях (3.14) и (3.89) можно пренебречь нормальными токами. Оценим влияние этих токов на магнитное поле. Рассмотрим сначала ферромагнитные слои. Из уравнений (3.89) следует

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} + \nabla_\rho^2 \mathbf{B} - \frac{4\pi\sigma_F}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.92)$$

Полагая

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx -(\mathbf{V}_L \nabla_\rho) \mathbf{B},$$

где $\mathbf{V}_L$ — скорость вихрей, мы можем видеть, что влияние нормальным токов на магнитное поле пренебрежимо мало, если имеет место неравенство

$$\frac{4\pi\sigma_F}{c^2} l V_L \ll 1,$$

где l — характерный масштаб задачи в плоскости xu . Аналогичное рассуждение можно провести и для сверхпроводящих слоёв с использованием уравнения (3.14). В итоге, для многослойной системы мы получаем следующее ограничение на скорость вихрей:

$$V_L \ll \frac{c^2}{4\pi \max(\sigma_n, \sigma_F) l}. \quad (3.93)$$

Для ферромагнитного сверхпроводника следует потребовать

$$V_L \ll \frac{c^2}{4\pi\sigma_n l}. \quad (3.94)$$

Наименьшими характерными масштабами задачи являются толщина доменной стенки L^3 и межвихревое расстояние a_v . В дальнейшем мы будем предполагать, что выполнены неравенства (3.93) и (3.94) с $l = \min(a_v, L)$. Тогда в уравнениях (3.14) и (3.92) можно не учитывать нормальные токи.

Удобно разложить полное магнитное поле $\mathbf{B}$ на собственное поле вихрей $\mathbf{h}$ и поле намагниченности $\mathbf{b}_M$. Эти величины удовлетворяют соотношениям

$$-\nabla^2 \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}}{\lambda^2} = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \mathbf{z}_0 \sum_i \delta^{(2)}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_i), \quad (3.95)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{b}_M + \frac{\mathbf{b}_M}{\lambda^2} = 4\pi \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{m} \quad (3.96)$$

в сверхпроводнике, и

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad (3.97)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{b}_M = 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{m}, \quad \operatorname{div} \mathbf{b}_M = 0 \quad (3.98)$$

в магнитных слоях.

Теперь мы приступим к вычислению силы $\mathbf{f}_M$, действующей на движущиеся вихри со стороны магнитных моментов, при заданных зависимостях координат вихрей от времени. Когда величина $\mathbf{f}_M$ известна, скорости вихрей могут быть определены самосогласованно. Сила, действующая на единицу длины i -го вихря, равна

$$\mathbf{f}_i = -\frac{1}{L_v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}_i}, \quad (3.99)$$

³ L здесь является исключительно характерным масштабом: в данной главе не рассматриваются системы, содержащие несколько ферромагнитных доменов

где L_v — длина вихря. Сила, усреднённая по всей вихревой решётке, равна

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{L_v N_v} \sum_i \frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}_i}, \quad (3.100)$$

где N_v — количество вихрей в системе. Магнитные моменты воздействуют на вихри благодаря наличию в свободной энергии члена

$$F_Z = - \int \mathbf{M} h d^3 \mathbf{r}.$$

Искомая магнитная часть силы, $\mathbf{f}_M$, даётся формулой (см. Приложение E)

$$\mathbf{f}_M = -\frac{1}{L_v N_v} \int m_z \nabla h_z d^3 \mathbf{r}. \quad (3.101)$$

Дальнейшие вычисления в подразделах 3.4.1 – 3.4.4 проделаны для случая ферромагнитного сверхпроводника. Обобщение результатов для SF-сверхрешёток проведено в подразделе 3.4.5.

Уравнение (3.101) в представлении Фурье имеет вид

$$\mathbf{f}_M = \frac{4\pi^2}{N_v} i \int \mathbf{q} m_{qz} h_{qz}^* d^2 \mathbf{q}, \quad (3.102)$$

где для всякой функции $X(\boldsymbol{\rho})$ её двумерный Фурье-образ определён как

$$X_q = \frac{1}{(2\pi)^2} \int X(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}} d^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Величины $\mathbf{m}_q$ находятся из линейного уравнения (3.13). В данном уравнении член $\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{m}$, как было показано в разделе 3.3, приводит к появлению зонной структуры у спектра магнонов. Однако, при вычислении силы $\mathbf{f}_M$ малые зонные эффекты не существенны, так как $\mathbf{f}_M$ определяется интегралом от $\mathbf{m}_q$. Кроме того, при сильной магнитной анизотропии ($H_{an} \gtrsim H_{c2}$), характерной для ферромагнитных сверхпроводников, всегда

$$|\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{m}| \ll |\gamma K \mathbf{m} \times \mathbf{M}_0|$$

при $B \ll H_{c2}$. По этим причинам мы пренебрежём здесь членом $\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{m}$. Уравнения (3.13), (3.95) и (3.96) в Фурье-представлении принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}_q}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \left(-(K + \alpha q^2) \mathbf{m}_q + \mathbf{b}_{Mq} + \mathbf{h}_q \right) + \frac{\nu}{M^2} \mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}_q}{\partial t}. \quad (3.103)$$

$$h_{qz} = \frac{\Phi_0}{4\pi^2(1 + \lambda^2 q^2)} \sum_i e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}_i(t)}. \quad (3.104)$$

$$\mathbf{b}_{Mq} = -4\pi \frac{\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{m}_q)}{q^2 + \lambda^{-2}}. \quad (3.105)$$

Нетрудно видеть, что член $\mathbf{b}_{Mq}$ в уравнении (3.103) по модулю много меньше $|K\mathbf{m}_q|$. В дальнейшем поле намагниченности $\mathbf{b}_{Mq}$ мы также пренебрежём⁴. Тогда из уравнения (3.103) нетрудно получить

$$m_{qz} = \frac{\gamma Mi}{2} \sin^2 \theta \int_{-\infty}^t h_{qz}(t') \left\{ \left(1 + i\frac{\nu}{M}\right)^{-1} \times \exp \left[- \left(1 + i\frac{\nu}{M}\right)^{-1} i\omega(q)(t - t') \right] - \left(1 - i\frac{\nu}{M}\right)^{-1} \exp \left[\left(1 - i\frac{\nu}{M}\right)^{-1} i\omega(q)(t - t') \right] \right\} dt', \quad (3.106)$$

где $\omega(q)$ даётся формулой (3.2), которую мы воспроизведём для удобства читателя:

$$\omega(q) = \omega_F(1 + L^2 q^2). \quad (3.2)$$

В пределе малой диссипации, $\nu \ll M$, имеем:

$$m_{qz} = \frac{\gamma Mi}{2} \sin^2 \theta \int_{-\infty}^t h_{qz}(t') \left\{ \exp \left[\left(-i - \frac{\nu}{M}\right) \omega(q)(t - t') \right] \times \left(1 - i\frac{\nu}{M}\right) - \exp \left[\left(i - \frac{\nu}{M}\right) \omega(q)(t - t') \right] \left(1 + i\frac{\nu}{M}\right) \right\} dt'. \quad (3.107)$$

В итоге сила $\mathbf{f}_M$ принимает вид

$$\mathbf{f}_M = \frac{2\pi^2 \gamma M}{N_v} \sin^2 \theta \int d^2 \mathbf{q} \int_{-\infty}^t h_{qz}(t') h_{qz}^*(t) \times \left\{ \exp \left[\left(i - \frac{\nu}{M}\right) \omega(q)(t - t') \right] \left(1 + i\frac{\nu}{M}\right) - \exp \left[\left(-i - \frac{\nu}{M}\right) \omega(q)(t - t') \right] \left(1 - i\frac{\nu}{M}\right) \right\} \mathbf{q} dt'. \quad (3.108)$$

3.4.2. Движение вихрей под действием постоянного тока

Пусть вихри приводятся в движение однородным постоянным током. Тогда их координаты зависят от времени следующим образом:

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_{i0} + \mathbf{V}_L t + \Delta \mathbf{R}_i(t). \quad (3.109)$$

Вектора $\mathbf{R}_{i0}$ здесь, как и ранее, обозначают позиции вихрей в идеальной решётке (см. уравнение (3.22)), а $\Delta \mathbf{R}_i(t)$ — случайные смещения вихрей вследствие тепловых флуктуаций и взаимодействия с центрами пиннинга ($\langle \Delta \mathbf{R}_i(t) \rangle = 0$). Следует подчеркнуть, что здесь не рассматривается влияние пиннинга на скорость движения вихрей, но учитывается искажение вихревой решётки, вносимое неоднородностями в сверхпроводнике. Эти искажения могут сильно влиять на эффективность генерации магнонов.

⁴ Учёт поля намагниченности $\mathbf{b}_{Mq}$ при $q \lesssim q_{\min}$ (см. уравнение (3.21)) приводит к немонотонности спектра магнонов — см. рис. 3.1b. При движении вихрей под действием постоянного тока (см. подраздел 3.4.2) на их динамику преимущественно влияют магноны с длиной волны $q \gg q_{\min}$. Если вихри приводятся в движение переменным током с частотой ω (см. подраздел 3.4.3), немонотонность спектра магнонов незначительна, когда $|\omega - \omega_F|/\omega_F \gg K^{-1}$.

Произведение магнитных полей под интегралом в формуле (3.108) равно

$$h_{qz}(t')h_{qz}^*(t) = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi^2(1 + \lambda^2 q^2)} \right)^2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{V}_L(t-t')} \mathcal{K}, \quad (3.110)$$

$$\mathcal{K} = \sum_{i,j} \exp \left[i\mathbf{q}(\mathbf{R}_{j0} - \mathbf{R}_{i0}) + i\mathbf{q}(\Delta\mathbf{R}_j(t) - \Delta\mathbf{R}_i(t')) \right].$$

Рассмотрим два предельных случая, когда сумму в правой части последнего соотношения можно вычислить.

Пусть неоднородности материала незначительны, так что вихревая решётка близка к идеальной, и можно положить

$$\left\langle e^{i\mathbf{q}(\Delta\mathbf{R}_j(t) - \Delta\mathbf{R}_i(t'))} \right\rangle \approx 1,$$

где усреднение производится по i . Для выполнения этого условия достаточно потребовать

$$\Delta R_c q \ll 1, \quad (3.111)$$

где ΔR_c — характерное значение смещений $\Delta\mathbf{R}_i$. Неравенство (3.111) должно выполняться для всех волновых чисел $\mathbf{q}$, дающих существенный вклад в интеграл в уравнении (3.108). Ниже мы покажем, что это приводит к условию

$$\Delta R_c \ll \min(L, a_v). \quad (3.112)$$

При условии, что это неравенство выполняется, можно положить

$$\mathcal{K} = \frac{4\pi^2 N_v B_0}{\Phi_0} \sum_{\mathbf{G}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{G}), \quad (3.113)$$

После интегрирования по $\mathbf{q}$ и t' уравнение (3.108) даёт

$$\mathbf{f}_M = \Phi_0 B_0 \gamma M \sin^2 \theta \sum_{\mathbf{G}, G < \xi^{-1}} \frac{\mathbf{G}}{(1 + \lambda^2 G^2)^2} \frac{i\omega(G) + \frac{\nu}{M} \mathbf{G}\mathbf{V}_L}{\omega^2(G) - (\mathbf{V}_L \mathbf{G})^2 - 2i\frac{\nu}{M} \mathbf{V}_L \mathbf{G}\omega(G)}. \quad (3.114)$$

Сгруппируем члены, соответствующие противоположным векторам обратной решётки:

$$\mathbf{f}_M = -\gamma \nu B_0 \Phi_0 \sin^2 \theta \sum_{\mathbf{G}, G < \xi^{-1}} \frac{\mathbf{G}(\mathbf{G}\mathbf{V}_L)}{(1 + \lambda^2 G^2)^2} \frac{(\mathbf{G}\mathbf{V}_L)^2 + \omega^2(G)}{[\omega^2(G) - (\mathbf{G}\mathbf{V}_L)^2]^2 + 4\frac{\nu^2}{M^2} (\mathbf{G}\mathbf{V}_L)^2 \omega^2(G)}. \quad (3.115)$$

Малые члены порядка ν/M в числителе здесь опущены. Из соотношения (3.115) следует, что сила имеет локальные максимумы, когда для некоторого вектора $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0$ выполнено условие

$$\omega(G_0) \approx \mathbf{V}_L \mathbf{G}_0. \quad (3.116)$$

Это равенство задаёт известное условие черенковского резонанса. Если оно удовлетворено, происходит эффективная генерация магнонов с волновым вектором $\mathbf{G}_0$. Когда скорость вихря близка

к резонансному значению, в сумме в уравнении (3.115) можно отбросить все члены, кроме двух резонансных, соответствующих векторам $\mathbf{G}_0$ и $-\mathbf{G}_0$. Тогда

$$\mathbf{f}_M \approx -\gamma\nu B_0 \Phi_0 \sin^2 \theta \frac{\mathbf{G}_0}{(1 + \lambda^2 G_0^2)^2} \frac{\omega(G_0)}{(\omega(G_0) - \mathbf{V}_L \mathbf{G}_0)^2 + \frac{\nu^2}{M^2} \omega^2(G_0)}. \quad (3.117)$$

Можно видеть, что зависимость $\mathbf{f}_M$ от V_L при заданном направлении скорости имеет вид лоренцевской функции с шириной

$$\Delta V_L = \frac{\nu}{M} \omega(G_0) \frac{V_L}{\mathbf{G}_0 \mathbf{V}_L}.$$

Значение модуля $\mathbf{f}_M$ в точке максимума равно

$$|\mathbf{f}_M|_{\max} = \frac{\gamma M^2 B_0 \Phi_0 G_0 \sin^2 \theta}{(1 + \lambda^2 G_0^2)^2 \nu \omega(G_0)}. \quad (3.118)$$

Интересным следствием уравнения (3.117) является то, что сила направлена под углом к скорости вихрей: $\mathbf{f}_M$ параллельна вектору $\mathbf{G}_0$, а не $\mathbf{V}_L$. Угол между $\mathbf{f}_M$ и $\mathbf{V}_L$ может составлять от 0° до 90° . Данный эффект следует также из уравнения (3) в работе [65], однако авторы не указали на это, так как в упомянутой работе предполагалось, что $\mathbf{V}_L$ и $\mathbf{f}_M$ всегда параллельны.

Обсудим влияние черенковских резонансов на вольт-амперную характеристику образца. Уравнение движения вихрей в ферромагнитном сверхпроводнике имеет вид

$$\frac{\Phi_0}{c} \mathbf{j}_{\text{tr}} \times \mathbf{z}_0 - \eta \mathbf{V}_L + \mathbf{f}_M = 0. \quad (3.119)$$

Умножив это равенство векторно на $\mathbf{z}_0$, мы получаем выражение для плотности тока

$$\mathbf{j}_{\text{tr}} = -\frac{c\eta}{\Phi_0} \mathbf{V}_L \times \mathbf{z}_0 + \frac{c}{\Phi_0} \mathbf{f}_M (\mathbf{V}_L \times \mathbf{z}_0). \quad (3.120)$$

Связь между $\mathbf{j}_{\text{tr}}$ и $\mathbf{E}$ может быть получена с использованием следствия из закона Фарадея (6). Из соотношения (3.120) следует, что сила $\mathbf{f}_M$ приводит к увеличению плотности тока на величину $\Delta \mathbf{j}_{\text{tr}}$, равную

$$\Delta \mathbf{j}_{\text{tr}} = \frac{c}{\Phi_0} \mathbf{f}_M \left(\frac{c}{B_0} \mathbf{E} \times \mathbf{z}_0 \right) \times \mathbf{z}_0. \quad (3.121)$$

Согласно уравнению (3.117), вблизи черенковского резонанса

$$\Delta \mathbf{j}_{\text{tr}} = \gamma\nu B_0 c \sin^2 \theta \frac{\mathbf{z}_0 \times \mathbf{G}_0}{(1 + \lambda^2 G_0^2)^2} \frac{\omega(G_0)}{\left[\omega(G_0) - \frac{c}{B_0} (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{G}_0) \mathbf{E} \right]^2 + \frac{\nu^2}{M^2} \omega^2(G_0)}. \quad (3.122)$$

Таким образом, на вольт-амперной характеристике должна наблюдаться серия пиков, положения которых определяются из уравнения

$$\omega(G) - \frac{c}{B_0} (\mathbf{z}_0 \times \mathbf{G}) \mathbf{E} \approx 0 \quad (3.123)$$

Вблизи резонанса добавочный ток $\Delta \mathbf{j}_{\text{tr}}$ направлен вдоль вектора $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{G}_0$, а не $\mathbf{E}$. Это означает, что добавка к проводимости локально анизотропна. Здесь важно учесть, что направления векторов

$\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{V}_L$, вообще говоря, не являются независимыми: известно, что в изотропных аморфных [98, 99] и поликристаллических [100] сверхпроводниках движущаяся вихревая решётка развивается так, что её наименьший вектор трансляции параллелен или перпендикулярен к $\mathbf{V}_L$ (переориентация решётки также наблюдалась численно в работах [101–104]). Этот эффект является следствием взаимодействия вихря с центрами пиннинга или с квазичастичным хвостом другого вихря [105, 106]. В результате в аморфных или поликристаллических магнитных сверхпроводниках сопротивление может остаться изотропным, несмотря на взаимодействие вихрей с магнитными моментами. В монокристаллических материалах, однако, имеется конкурирующая тенденция: вихрям энергетически выгодно ориентироваться так, чтобы определённые вектора трансляции решётки были направлены вдоль выделенных направления кристалла [107]. Когда вихри движутся, взаимодействие двух упомянутых эффектов определяет стационарную ориентацию вихревой решётки. В этом случае угол между $\mathbf{V}_L$ и $\mathbf{G}_0$ может быть сложной функцией тока и магнитного поля, и анизотропия сопротивления, связанная с черенковской генерацией магнонов, по крайней мере частично сохраняется.

Соотношение (3.122) следует также с осторожностью применять к макроскопическим образцам: известно, что даже малая концентрация дефектов в сверхпроводнике нарушает дальний порядок в вихревой решётке [108]. В действительности в макроскопических образцах наблюдаются вихревые домены — см. [107, 109–112]. Как было сказано выше, в монокристаллических сверхпроводниках симметрия кристалла делает выгодными только несколько (небольшое число) ориентаций вихревой решётки. Этот факт позволяет нам сделать качественное утверждение о вольт-амперной характеристике монокристалла. Обозначим за $\mathcal{G}$ множество всех обратных векторов решёток во всех вихревых доменах. Очевидно, в монокристалле $\mathcal{G}$ состоит из изолированных точек. Когда электрическое поле удовлетворяет условию (3.123) для некоторого вектора $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$, должно наблюдаться увеличение транспортного тока. Таким образом, даже при наличии нескольких вихревых доменов пики на вольт-амперной характеристике должны присутствовать. Измерения пиковых напряжений при различных значениях приложенного магнитного поля позволяют снять участок спектра магнонов в SF системе.

Теперь обратимся к противоположному предельному случаю, когда в решётке вихрей имеется значительный беспорядок. Такая ситуация может возникнуть в слабом магнитном поле, $B_0 \lesssim \Phi_0/\lambda^2$ ($a_v \gtrsim \lambda$), когда взаимодействие между вихрями слабо. Предполагая, что величины $\mathbf{R}_j(t)$ и $\mathbf{R}_i(t')$ при $i \neq j$ некоррелированы, мы получаем

$$\mathcal{K} = P \sum_{i \neq j} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_{j0} - \mathbf{R}_{j0})} + N_v \left\langle e^{i\mathbf{q}[\Delta\mathbf{R}_i(t) - \Delta\mathbf{R}_i(t')]} \right\rangle, \quad (3.124)$$

где

$$P = \left| \left\langle e^{iq\Delta\mathbf{R}_i(t)} \right\rangle \right|^2,$$

и усреднение производится по i . Далее мы предположим, что характерные значения ΔR_i достаточно велики, так что $P \ll 1$ при $q \gtrsim L^{-1}$. Ниже будет показано, что основной вклад в $\mathbf{f}_M$ происходит от магнонов с $q \sim L^{-1}$, так что поведение K при меньших q практически не влияет на $\mathbf{f}_M$. Для оценки требуемых характерных значений ΔR_i заметим, что если $\mathbf{R}_i(t)$ имеет гауссову функцию распределения, то условие $P \ll 1$ удовлетворяется при $\langle \Delta R_i^2 \rangle \gg L^2$.

Относительно второго члена в правой части уравнения (3.124) заметим, что

$$\left\langle e^{iq[\Delta\mathbf{R}_i(t) - \Delta\mathbf{R}_i(t')]} \right\rangle = 1$$

при $t = t'$, и

$$\left\langle e^{iq[\Delta\mathbf{R}_i(t) - \Delta\mathbf{R}_i(t')]} \right\rangle = P \ll 1$$

при $|t - t'| \rightarrow \infty$. Чтобы продвинуться дальше, положим

$$\left\langle e^{iq[\Delta\mathbf{R}_i(t) - \Delta\mathbf{R}_i(t')]} \right\rangle = e^{-|t-t'|/\tau(q)},$$

где время $\tau(q)$ выбирается так, что $\langle |q[\Delta\mathbf{R}_i(t) - \Delta\mathbf{R}_i(t')]| \rangle \sim 1$ при $t - t' = \tau(q)$. Наконец, предположим, что время корреляции $\tau(q)$ много больше $\omega(q)^{-1}$ при $q \sim L^{-1}$.

Из-за наличия малого множителя P первый член в правой части уравнения (3.124) даёт пренебрежимый вклад в силу $\mathbf{f}_M$, так что

$$\mathcal{K} \approx N_\nu e^{-|t-t'|/\tau(q)}. \quad (3.125)$$

После интегрирования по t' уравнение (3.108) даёт

$$\mathbf{f}_M = \frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2} \int_{q < \xi^{-1}} \frac{\mathbf{q} d^2 \mathbf{q}}{(1 + \lambda^2 q^2)^2} \frac{i\omega(q)}{[\omega^2(q) - (\mathbf{q}\mathbf{V}_L)^2 - 2i(\mathbf{q}\mathbf{V}_L)\tau_1^{-1}(q)]}, \quad (3.126)$$

где $\tau_1^{-1}(q) = \tau^{-1}(q) + \nu\omega(q)/M$, и в числителе малые члены порядка ν/M были опущены. Основной вклад в интеграл происходит от векторов $\mathbf{q}$, лежащих вблизи двух кругов $\omega(q) = \pm \mathbf{q}\mathbf{V}_L$ (это равенство задаёт условие черенковского резонанса). Вблизи круга $\omega(q) = \mathbf{q}\mathbf{V}_L$ можно сделать следующие преобразования:

$$\omega^2(q) - (\mathbf{q}\mathbf{V}_L)^2 - 2i(\mathbf{q}\mathbf{V}_L)\tau_1^{-1}(q) \approx 2\omega(q)[\omega(q) - \mathbf{q}\mathbf{V}_L - i\tau_1^{-1}(q)].$$

Для круга $\omega(q) = -\mathbf{q}\mathbf{V}_L$ преобразования аналогичны. Тогда

$$\mathbf{f}_M \approx \frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2} \int_{q < \xi^{-1}} \frac{\mathbf{q} d^2 \mathbf{q}}{(1 + \lambda^2 q^2)^2} \Re \frac{i}{\omega(q) - \mathbf{q}\mathbf{V}_L - i\tau_1^{-1}(q)}. \quad (3.127)$$

Последняя дробь в правой части напоминает выражение

$$\Re \frac{i}{f(x) - i\epsilon},$$

которое сводится к $-\pi\delta(f(x))$ при $\epsilon \rightarrow +0$. Следовательно, последний множитель в уравнении (3.127) тоже может быть заменён на дельта-функцию, когда $\tau_1^{-1}(q)$ достаточно мало. Чтобы вывести ограничение на $\tau_1^{-1}(q)$, направим ось q_x вдоль $\mathbf{V}_L$ и перепишем знаменатель большой дроби в уравнении (3.127) следующим образом:

$$\omega_F(1 + L^2 q^2) - q_x V_L - i\tau_1^{-1}(q) = \omega_F \left(1 - \frac{V_L^2}{V_{\text{th}}^2}\right) - i\tau_1^{-1}(q) + \omega_F L^2 \left[\left(q_x - \frac{V_L}{2L^2 \omega_F}\right)^2 + q_y^2 \right],$$

где $V_{\text{th}} = 2\omega_F L$ — пороговая скорость для генерации магнонов. Теперь нетрудно видеть, что дельта-функцию можно ввести в уравнение (3.127) при условии

$$\tau_1^{-1}(q) \ll \omega_F \left| \frac{V_L^2}{V_{\text{th}}^2} - 1 \right|.$$

Тогда

$$\mathbf{f}_M \approx -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi} \int_{q < \xi^{-1}} \frac{\mathbf{q} d^2 \mathbf{q}}{(1 + \lambda^2 q^2)^2} \delta(\omega(q) - \mathbf{q} \mathbf{V}_L). \quad (3.128)$$

Здесь следует отметить два момента: (i) выражение для $\mathbf{f}_M$ не зависит от константы диссипации ν и от искусственно введённого времени $\tau(q)$; (ii) уравнение (3.128) может быть получено из уравнения (3.115) в пределе очень разреженной решётки вихрей, когда суммирование по $\mathbf{G}$ может быть заменено на интегрирование.

Технические детали интегрирования в уравнении (3.128) приведены в Приложении E. В итоге для величины $\mathbf{f}_M$ получаем

$$\mathbf{f}_M = -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{8\lambda^4 \omega_F^2} \left[1 + \left(\frac{V_L}{\lambda \omega_F} \right)^2 \right]^{-3/2} \Theta(V_L - V_{\text{th}}) \mathbf{V}_L, \quad (3.129)$$

где Θ — функция Хевисайда. Уравнение (3.129) справедливо при $\lambda \gg L$ и

$$V_L < \max(V_{\text{th}}, \omega_F \xi (1 + L^2 \xi^{-2}))$$

— см. Приложение E. Таким образом, уравнение (3.129) не применимо к урановым ферромагнитным сверхпроводникам (см. таблицу 3.1) при $V_L > V_{\text{th}}$, так как у этих материалов $L \ll \xi$. Тем не менее, уравнение (3.129) с некоторыми изменениями (см. подраздел 3.4.5) может быть применено к SF решёткам с ферромагнитными слоями, имеющими достаточно большую толщину доменной стенки.

Согласно уравнениям (3.121) и (3.129), когда электрическое поле E равно $V_{\text{th}} B_0 / c$, плотность транспортного тока должна испытывать скачок на величину

$$\Delta j_{\text{tr}} = \frac{c}{\Phi_0} f_M(V_{\text{th}}) = \frac{\gamma M \Phi_0 c \sin^2 \theta}{8\lambda^4 \omega_F^2} V_{\text{th}}.$$

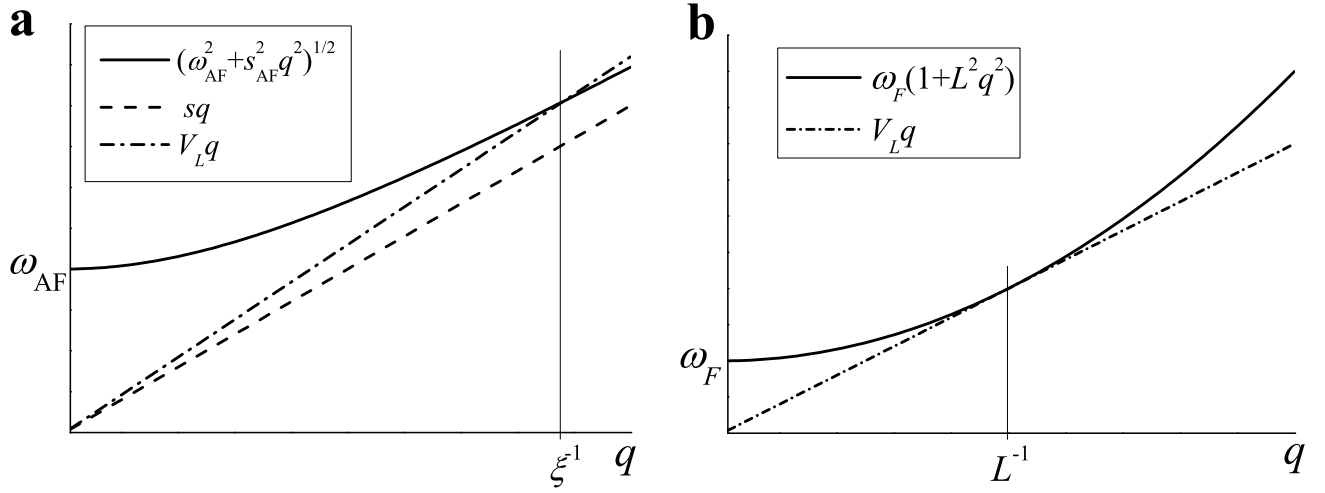


Рис. 3.7. Спектры спиновых волн в (а) антиферромагнетике и (б) ферромагнетике. Штрихпунктирная линия даётся уравнением $\omega = V_L q$, где V_L — скорость вихрей, при которой генерация магнонов становится эффективной ($V_L = V_c$ в антиферромагнитных сверхпроводниках и $V_L = V_{th}$ в SF системах).

При $E = \sqrt{2}\lambda\omega_F B_0/c$ добавка к току максимальна:

$$\Delta j_{\max} = \frac{\Phi_0 c \gamma M \sin^2 \theta}{8 \sqrt{2} \lambda^3 \omega_F 3^{3/2}}.$$

В работе [64] было предсказано, что в антиферромагнитном сверхпроводнике в пределе редкой вихревой решётки добавка к току Δj_{tr} за счёт взаимодействия вихрей с магнитными моментами пропорциональна $\sqrt{V_L - V_c}$ (при $V_L > V_c$), где V_c — некоторая критическая скорость. Этот результат контрастирует с полученным здесь: $\Delta j_{tr} \sim \Theta(V_L - V_{th})$ вблизи порога генерации магнонов. Эта разница связана с различием магнонных спектров в ферромагнетике и антиферромагнетике — см. рис. 3.7. В антиферромагнетике зависимость $\omega(q)$ даётся уравнением (3.3). При увеличении скорости вихрей условие резонанса $\omega(q) = V_L q$ начинается выполняться сперва при бесконечно больших q . Однако, при $q \gg \xi^{-1}$ Фурье-компоненты h_{qz} экспоненциально малы. Генерация магнонов становится эффективной при $q \sim \xi^{-1}$, что достигается при скорости вихрей, приближённо равной $V_c = \sqrt{\omega_{AF}^2 \xi^2 + s_{AF}^2}$. Другими словами, порог генерации в антиферромагнитном сверхпроводнике соответствует пересечению кривых $\omega = \omega(q)$ и $\omega = V_L q$ при $q \sim \xi^{-1}$ (см. рис. 3.7а), что даёт зависимость $\Delta j_{tr} \sim \sqrt{V_L - V_c}$. Напротив, в SF системах при $V_L = V_{th}$ кривые $\omega = \omega(q)$ и $\omega = V_L q$ имеют точку касания (см. рис. 3.7б). Это обстоятельство приводит к ступенькообразному увеличению тока при некотором критическом напряжении. Разумеется, ступенькообразная особенность на вольт-амперной характеристике может наблюдаться только в системах с $L \gtrsim \xi$.

Прежде чем перейти к числовым оценкам, получим условие применимости приближения идеальной решётки — уравнение (3.112). Из рис. 3.7б следует, что вблизи порога генерации

излучаются магноны с волновыми числами $q \approx L^{-1}$. Это означает, что при $V_L \gtrsim V_{\text{th}}$ основной вклад в интеграл в уравнении (3.108) происходит от $q \sim L^{-1}$. Отсюда сразу следует условие (3.112).

Теперь посмотрим, можно ли наблюдать связанные с черенковскими резонансами особенности на вольт-амперных характеристиках реальных ферромагнитных сверхпроводников и многослойных SF систем. Важно отметить, что настоящая пороговая скорость вихрей для генерации магнонов в урановых ферромагнитных сверхпроводниках, V'_{th} , больше V_{th} : $V'_{\text{th}} = \omega_F \xi$. Это связано с тем, что в данных материалах $\xi \gg L$. В результате вместо появления ступеньки на вольт-амперной характеристике следует ожидать, что вблизи порога генерации магнонов ток будет вести себя как в антиферромагнитном сверхпроводнике — см. [64]. Оценим плотность тока j_{th} , достаточную для разгона вихрей до скорости V'_{th} . Уравнение (3.120) даёт

$$j_{\text{th}} \approx \frac{c\eta}{\Phi_0} V'_{\text{th}} \quad (3.130)$$

Для вязкости η воспользуемся формулой Бардина и Стефена [31], которая даёт адекватную оценку в случае не слишком быстрых процессов [113]

$$\eta = \Phi_0 H_{c2} \sigma_n / c^2, \quad (3.131)$$

Для нормальной проводимости можно использовать оценку Друде

$$\sigma_n \sim \frac{e^2 n \ell}{m V_F}.$$

Здесь n — концентрация носителей заряда, m — их масса, ℓ — длина свободного пробега, а V_F — скорость Ферми. Тогда

$$j_{\text{th}} \sim \frac{e^2 n \ell H_{c2} V'_{\text{th}}}{m c V_F}. \quad (3.132)$$

Это значение следует сравнить с током распаривания, который в рамках теории БКШ оценивается следующим образом:

$$j_{\text{cr}} \sim e n \frac{\Delta}{m V_F},$$

где Δ — сверхпроводящая щель. Мы потребуем $j_{\text{th}} \ll j_{\text{cr}}$. Используя соотношение $\Delta \sim \hbar V_F / \xi$ (справедливое для чистых сверхпроводников), мы получаем требование

$$V'_{\text{th}} \ll \frac{\xi}{\ell} V_F, \quad (3.133)$$

или

$$\omega_F \ll \frac{V_F}{\ell}. \quad (3.134)$$

Согласно оценкам из работ [54–56], для урановых сверхпроводников типичным является значение $\ell \sim 50$ нм. Скорость Ферми порядка 10^8 cm/s в UGe_2 и 10^5 cm/s в UCoGe и URhGe — см.

[114–116]. Таким образом, неравенство (3.133) не удовлетворяется ни в одном из этих соединений. Это означает, что используемая здесь модель перестаёт работать при скоростях, меньших V'_{th} . Ситуация более оптимистична в SF сверхрешётках. Разумеется, мы должны проверить, применимо ли уравнение (3.131) к многослойным системам. В работах [117] и [118] проведён анализ вязкости вихря в сверхрешётках сверхпроводник-нормальный металл. Было показано, что оценка (3.131) существенно модифицируется в случае, когда вихри ориентированы под углом относительно нормали к слоям, и в случае сильно проводящих нормальных слоёв. Тем не менее, в случае SF сверхрешётки с параметрами $d_S \sim d_F$ и $\sigma_F \lesssim \sigma_n$, где d_S и d_F — толщины сверхпроводящих и ферромагнитных слоёв (см. рис. 3.6), соотношение (3.131) даёт адекватную оценку по порядку величины для вязкости.

За последние 14 лет появилось большое количество экспериментальных работ (см. [119–128]) в которых сообщается об успешном изготовлении сверхрешёток $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7/\text{La}_{2/3}\text{Ca}_{1/3}\text{MnO}_3$. В статье [129] приводится значение $H_{\text{an}} = 1200$ Гс для $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$. Строго говоря, у $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ с намагниченностью насыщения $M = 530$ эрг·Гс⁻¹·см⁻³ (см. [129]) коэффициент анизотропии K порядка единицы, что означает, что нельзя пренебрегать влиянием на спектр спиновых волн магнитостатического члена $\mathbf{b}_{Mq}$. Тем не менее, приведённая здесь оценка для пороговой скорости ($V_{\text{th}} = 2\omega_F L$) остаётся справедливой по порядку величины и при $K \sim 1$, и может быть применена к $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$.

Измеренная толщина доменной стенки в $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ [130] составляет 12 нм. Предполагая, что $\gamma \sim \mu_B/\hbar$, где μ_B — магнетон Бора, мы получаем

$$V_{\text{th}} = 2\gamma H_{\text{an}} L \sim 10^4 \text{ см/с}. \quad (3.135)$$

Скорость Ферми в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ больше или порядка 10^7 см/с [131]. Таким образом, условие (3.133) (с V_{th} вместо V'_{th}) может быть удовлетворено в SF сверхрешётках с купратными и манганитными слоями.

Конечно, в действительности оценка Бардина и Стефена для вязкости η может перестать работать и при токах, много меньших тока распаривания. Это может случиться, в частности, из-за развития неустойчивости Ларкина-Овчинникова [132, 133] (в грязных образцах при высоких температурах), или из-за перегрева. Эти эффекты приводят к зависимости η от E , и, как следствие, нелинейной вольт-амперной характеристике. Тем не менее, учитывая, что на практике удаётся достичь скорости вихрей порядка 10^5 см/с в линейном режиме как в высокотемпературных [134, 135] так и низкотемпературных [136] сверхпроводниках, можно ожидать, что связанные с излучением магнонов эффекты будут наблюдаемы в SF сверхрешётках.

3.4.3. Движение вихрей под действием переменного тока

Как было показано в подразделе 3.4.2, наблюдение излучения магнонов движущимися с постоянной скоростью вихрями в урановых ферромагнитных сверхпроводниках невозможно из-за того, что требуются слишком большие скорости вихрей. В данном подразделе мы рассмотрим принципиально другую ситуацию, когда вихри приводятся в движение переменным током. В эксперименте осциллирующий с высокой частотой ток может быть создан с использованием микроволн (см., например, [137]). Тогда информация о высокочастотных свойствах образца может быть извлечена из поверхностного импеданса — см. подраздел 3.4.4.

Перед вычислением $\mathbf{f}_M$ заметим, что существует очевидное ограничение по частоте ω для применимости теории Лондонов: $\hbar\omega < \Delta$. Генерация магнонов же происходит при достаточно высоких частотах, $\omega > \omega_F$. Таким образом, для справедливости приведённых ниже результатов необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\hbar\omega_F < \Delta$.

Пусть вихри приводятся в движение гармонической силой. Если амплитуда силы не очень велика, вихри будут совершать гармонические колебания:

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}'_{i0} + \mathbf{R}e^{-i\omega t} + \mathbf{R}^*e^{-i\omega t}. \quad (3.136)$$

Здесь $\mathbf{R}$ — амплитуда колебания вихрей, а $\mathbf{R}'_{i0}$ — равновесные положения вихрей, которые определяются как межвихревым взаимодействием, так и пиннингом. Вектора $\mathbf{R}'_{i0}$ не обязательно образуют правильную решётку, в отличие от векторов $\mathbf{R}_{i0}$. Мы будем рассматривать частоты порядка частоты ферромагнитного резонанса в ферромагнитных сверхпроводниках: $\omega_F \sim 100$ ГГц. Эти частоты на несколько порядков величины больше характерных частот депиннинга [138]. По этой причине можно пренебречь влиянием силы пиннинга на движение вихрей и считать, что все вихри колеблются с одинаковой амплитудой.

Произведение магнитных полей в уравнении (3.108) равно

$$\begin{aligned} h_{qz}(t')h_{qz}^*(t) &= \left[\frac{\Phi_0}{4\pi^2(1+\lambda^2q^2)} \right]^2 \mathcal{K}' e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_i(t)-\mathbf{R}_i(t'))} \\ &\approx \left[\frac{\Phi_0}{4\pi^2(1+\lambda^2q^2)} \right]^2 \mathcal{K}' \{1 + i\mathbf{q}[\mathbf{R}_i(t) - \mathbf{R}_i(t')]\}, \end{aligned} \quad (3.137)$$

где

$$\mathcal{K}' = \sum_{i,j} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}'_{i0} + i\mathbf{q}\mathbf{R}'_{j0}} = N_v \left\langle \sum_j e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}'_{j0} + i\mathbf{q}\mathbf{R}'_{j0}} \right\rangle. \quad (3.138)$$

Усреднение здесь производится по i . Линейный относительно $\mathbf{R}$ вклад в силу принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_M &= \frac{\gamma M \Phi_0^2}{8\pi^2 N_v} \sin^2 \theta \int_{q < \xi^{-1}} d^2 \mathbf{q} \int_{-\infty}^t \frac{i\mathcal{K}' \mathbf{q} \mathbf{R}}{(1+\lambda^2 q^2)^2} (e^{-i\omega t} - e^{-i\omega t'}) \\ &\quad \times \left\{ e^{[i\omega(q) - \frac{\gamma}{M}\omega(q)](t-t')} - e^{[-i\omega(q) - \frac{\gamma}{M}\omega(q)](t-t')} \right\} \mathbf{q} dt' + c.c. \\ &\approx \frac{\gamma M \Phi_0^2}{4\pi^2 N_v} \sin^2 \theta e^{-i\omega t} \int_{q < \xi^{-1}} d^2 \mathbf{q} \frac{\mathcal{K}'(q) \mathbf{q} \mathbf{R}}{(1+\lambda^2 q^2)^2} \left[\frac{\omega(q)}{\omega^2(q) - \omega^2 - 2i\frac{\gamma}{M}\omega\omega(q)} - \omega^{-1}(q) \right] \mathbf{q} + c.c. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Здесь $c.c.$ обозначает комплексное сопряжение, и малые члены порядка ν/M опущены.

Далее мы снова рассмотрим случаи идеальной вихревой решётки и решётки с сильным беспорядком.

Сначала предположим, что влияние сил пиннинга мало, так что

$$q\Delta R_c \ll 1, \quad (3.140)$$

где $\Delta R_c \sim |\mathbf{R}'_{i0} - \mathbf{R}_{i0}|$ — характерное отклонение вихрей от их положений в идеальной решётке. Потребуем, чтобы неравенство (3.140) выполнялось для всех $\mathbf{q}$, дающих существенный вклад в интеграл в уравнении (3.139).

При $q\Delta R_c \ll 1$ имеем:

$$\mathcal{K}' = \frac{4\pi^2 N_\nu B_0}{\Phi_0} \sum_{\mathbf{G}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{G}). \quad (3.141)$$

Подставив (3.141) в уравнение (3.139), предполагая, что решётка либо квадратная, либо правильная треугольная, получаем

$$\mathbf{f}_M = i\omega\eta_M \mathbf{R} e^{-i\omega t} + c.c., \quad (3.142)$$

$$\eta_M = -\frac{i\gamma M \Phi_0 B_0}{2\omega} \sin^2 \theta \sum_{G < \xi^{-1}} \frac{G^2}{(1 + \lambda^2 G^2)^2} \left[\frac{\omega(G)}{\omega^2(G) - \omega^2 - 2i\frac{\nu}{M}\omega\omega(G)} - \omega^{-1}(G) \right]. \quad (3.143)$$

Здесь введена комплексная величина η_M , играющая роль обобщённой вязкости вихря: когда η_M чисто действительная, магнитная сила равна $\mathbf{f}_M = -\eta_M d\mathbf{R}_i/dt$. В нашей системе же имеется сдвиг по фазе между скоростью вихрей и силой $\mathbf{f}_M$, так что имеет место более общее соотношение (3.142). Далее мы будем называть η_M магнитной вязкостью вихря.

Для образования идеальной вихревой решётки благоприятна ситуация, когда взаимодействие между вихрями достаточно сильно, то есть, расстояние между ними достаточно мало. Пусть $a_\nu \ll \lambda$, что означает $B_0 \gg \Phi_0/\lambda^2$. Тогда $\lambda G \gg 1$ для всех $\mathbf{G} \neq 0$, и

$$\eta_M \approx -\frac{i\gamma M \Phi_0 B_0 \omega}{2\lambda^4} \sin^2 \theta \sum_{\mathbf{G} \neq 0, G < \xi^{-1}} G^{-2} \omega^{-1}(G) \left[\omega^2(G) - \omega^2 - 2i\frac{\nu}{M}\omega\omega(G) \right]^{-1}. \quad (3.144)$$

Рассмотрим поведение η_M в различных частотных диапазонах. Сначала пусть $\omega < \omega_F$. Тогда генерации магнонов не происходит, однако, если положить $\nu = 0$, сила $\mathbf{f}_M$ не занулится. Магнитная вязкость будет чисто мнимой, что означает отсутствие диссипации в магнитной подсистеме. На рис. 3.8а показаны зависимости мнимой части η_M от поля B_0 при различных частотах ($\omega < \omega_F$).

При частотах выше ω_F диссипацией нельзя пренебречь, и действительная часть η_M становится существенной. На рис. 3.8b и с изображены графики зависимостей η_M от B_0 при двух различных частотах. На графиках имеется серия пиков ($\Re(\eta_M)$) и N-образных особенностей

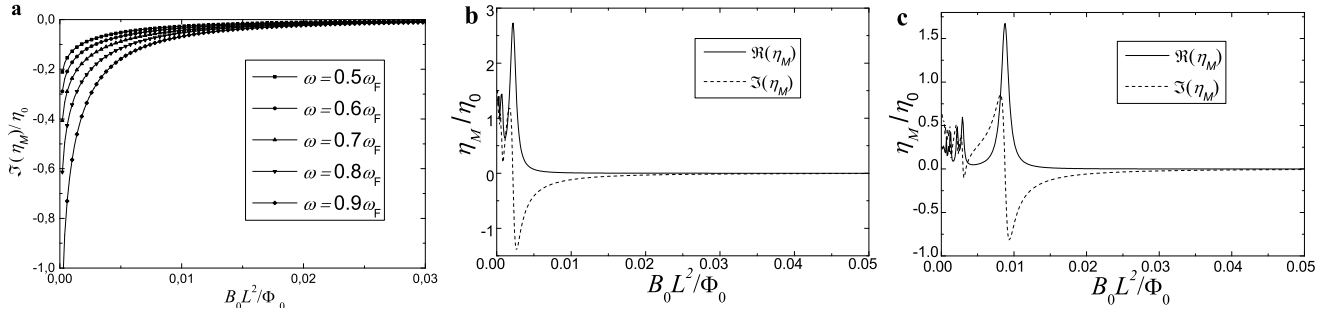


Рис. 3.8. (а) Зависимости $\Im(\eta_M)$ от B_0 при частотах ниже ω_F для идеальной вихревой решётки [см. уравнение (3.144)]. $\eta_0 = \gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta / (2\lambda^4 \omega_F^2)$. Зависимости η_M от B_0 при $\omega = 1.1\omega_F$ (b) и $\omega = 1.4\omega_F$ (c). $\nu/M = 0.02$.

($\Im(\eta_M)$), расположенных при некоторых резонансных значениях поля B_R , которые определяются из соотношения

$$\omega(G) = \omega. \quad (3.145)$$

При низких значениях поля особенности на графике могут сильно перекрываться, однако резонанс, соответствующий наибольшему полю, остаётся хорошо различимым. Для треугольной вихревой решётки наибольшее резонансное поле равно

$$B_R = \frac{\sqrt{3}}{8\pi^2} \frac{\Phi_0}{L^2} \left(\frac{\omega}{\omega_F} - 1 \right),$$

а для квадратной решётки

$$B_R = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Phi_0}{L^2} \left(\frac{\omega}{\omega_F} - 1 \right).$$

Решив уравнение (3.145) относительно G , получаем

$$G = q_0 \equiv L^{-1} \sqrt{\frac{\omega - \omega_F}{\omega_F}}. \quad (3.146)$$

Пики на зависимости η_M от B_0 будут наблюдаемы, если величина ΔR_c , которая является мерой беспорядка в решётке, удовлетворяет условию

$$\Delta R_c \ll \min(q_0^{-1}, a_v). \quad (3.147)$$

При $\omega < \omega_F$ из уравнения (3.144) можно видеть, что основной вклад в вязкость происходит от векторов $\mathbf{G}$, для которых $\omega(G) - \omega$ порядка $\omega_F - \omega$, так как члены в правой части уравнения (3.144) пропорциональны $[\omega(G) - \omega]^{-1}$ при $\nu \rightarrow 0$. Тогда для произвольной частоты ω мы получаем следующее условие применимости приближения идеальной решётки:

$$\Delta R_c \ll \min \left[a_v, L \sqrt{\frac{\omega_F}{|\omega - \omega_F|}} \right]. \quad (3.148)$$

Заметим, что, когда частота близка к ω_F , это неравенство значительно слабее неравенства (3.112).

Сравним величину η_M с основным вкладом в вязкость, который был обозначен как η . Когда выполнено условие резонанса (3.145), из уравнения (3.144) получаем

$$\eta_M \sim \frac{\gamma M \Phi_0 B_0}{\lambda^4 G^2 \omega^2} \frac{M}{\nu}.$$

Так как $B_0 G^{-2} \sim \Phi_0$, и наименьшее значение ω равно $\omega_F = \gamma M K$, имеем

$$\eta_M \lesssim \frac{\Phi_0^2}{K \lambda^4 \omega_F} \frac{M}{\nu}. \quad (3.149)$$

Тогда, согласно уравнению (3.131), отношение η_M к η оценивается следующим образом:

$$\eta_M / \eta \lesssim \frac{M}{\nu} \frac{\xi^2 c^2}{K \lambda^4 \omega_F \sigma_n}. \quad (3.150)$$

Для UCoGe, уранового сверхпроводника с наименьшей частотой ω_F , в работе [56] находит значение $12 \mu\Omega/\text{см}$ для удельного сопротивления в нормальном состоянии, и максимальное значение $200 \text{\AA}$ для длины когерентности. Используя таблицу 3.1, получаем

$$\eta_M / \eta \sim \frac{M}{\nu} 3 \times 10^{-5}. \quad (3.151)$$

Данные по отношению M/ν пока отсутствуют. Малый множитель 10^{-5} в уравнении (3.151) возник из-за сильной магнитокристаллической анизотропии UCoGe: из уравнения (3.150) можно видеть, что η_M / η пропорционально K^{-2} , так как $\omega_F = \gamma M K$. Следовательно, для увеличения отношения η_M к η предпочтительно использовать соединения (или многослойные системы) с малой магнитной анизотропией.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда вихревая решётка сильно искажена центрами пиннинга. Чтобы получить качественное понимание поведения вязкости η_M в этом случае, мы вычислим её в предположении, что величины R'_{i0} и R'_{j0} при $i \neq j$ некоррелированы. Другими словами, в решётке отсутствует даже ближний порядок, так что средняя концентрация вихрей на расстоянии R от данного вихря не зависит от R и равна B_0/Φ_0 . Тогда

$$\mathcal{K}' = N_v + N_v \left\langle \sum_{j(j \neq i)} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}'_{i0} + i\mathbf{q}\mathbf{R}'_{j0}} \right\rangle = N_v \left(\int \frac{B_0}{\Phi_0} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}} d^2\mathbf{R} + 1 \right) = N_v \left[4\pi^2 \frac{B_0}{\Phi_0} \delta(\mathbf{q}) + 1 \right]. \quad (3.152)$$

Заметим, что произведение $h_{qz}(t')h_{qz}^*(t)$ не спадает с увеличением $t - t'$ (ср. со случаем решётки с беспорядком в подразделе 3.4.2). Это объясняется тем, что вихри колеблются вблизи своих положений равновесия, а не переходят от одного центра пиннинга к другому. В результате позиции одного вихря в разные моменты времени всегда хорошо коррелируют между собой, что соответствует бесконечному времени корреляции $\tau(q)$.

С учётом (3.152) магнитная вязкость принимает вид

$$\eta_M = -\frac{i\gamma M \Phi_0^2}{4\pi\omega} \sin^2 \theta \int_0^{\xi^{-1}} \frac{q^3 dq}{(1 + q^2 \lambda^2)^2} \left[\frac{\omega(q)}{\omega^2(q) - \omega^2 - i\epsilon} - \omega^{-1}(q) \right]. \quad (3.153)$$

Здесь, как в подразделе 3.4.2, мы будем считать, что положительная величина ϵ является бесконечно малой. Чтобы упростить выражение в правой части уравнения (3.153), заметим, что вкладом в интеграл от малых q ($q \lesssim \lambda^{-1}$) можно пренебречь при $\lambda \gg L$. Тогда мы можем положить $1 + \lambda^2 q^2 \approx \lambda^2 q^2$ и обрезать интеграл снизу при $q = \lambda^{-1}$:

$$\eta_M = -\frac{i\gamma M\Phi_0^2}{4\pi\omega\lambda^4} \int_{\lambda^{-1}}^{\xi^{-1}} \frac{dq}{q} \left\{ \frac{\omega(q)}{[\omega + \omega(q)][\omega(q) - \omega - i\epsilon]} - \omega^{-1}(q) \right\}. \quad (3.154)$$

Дальнейшее интегрирование не представляет трудностей:

$$\eta_M = \frac{\gamma M\Phi_0^2 \sin^2 \theta}{16\lambda^4(\omega - \omega_F)} \left\{ \frac{1}{\omega} \Theta(\omega - \omega_F) \Theta \left[\omega_F \left(1 + \frac{L^2}{\xi^2} \right) - \omega \right] + i \frac{4\omega}{\pi\omega_F(\omega + \omega_F)} \ln \frac{\lambda}{\xi} \right\}, \quad (3.155)$$

при $L \ll \xi$. Как и в случае идеальной решётки, при $\omega < \omega_F$ магнитная вязкость чисто мнимая, однако теперь она не зависит от магнитного поля и имеет только резонанс при $\omega = \omega_F$. В пределе $B_0 \rightarrow 0$ уравнение (3.144) после суммирования приводится к виду (3.155), то есть, случаи изолированных и хаотично расположенных вихрей эквивалентны, как и в подразделе 3.4.2.

Помимо того, что вязкость η_M чисто мнимая при $\omega < \omega_F$, в пределе $\omega \ll \omega_F$ она пропорциональна ω . Это означает, что вихрю можно приписать некоторую массу M_v , так что его уравнение движения примет вид

$$M_v \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (3.156)$$

где $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ включает все силы, кроме $\mathbf{f}_M$. Величина M_v определяется из соотношения

$$M_v = \left. \frac{i\eta_M}{\omega} \right|_{\omega=0}. \quad (3.157)$$

Из уравнения (3.144) получаем, что магнитная добавка к массе вихря в случае идеальной решётки равна

$$M_v = \frac{\gamma M\Phi_0 B_0}{2\lambda^4} \sin^2 \theta \sum_{\mathbf{G} \neq 0} G^{-2} \omega^{-3}(G) \quad (3.158)$$

при $B_0 \gg \Phi_0/\lambda^2$. В случае беспорядочно расположенных вихрей уравнение (3.153) даёт

$$M_v = \frac{\gamma M\Phi_0^2}{4\pi\omega_F^3} \sin^2 \theta \int_0^{\xi^{-1}} \frac{q^3 dq}{(1 + q^2 \lambda^2)^2 (1 + L^2 q^2)^3} \approx \frac{\gamma M\Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi\omega_F^3 \lambda^4} \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (\lambda \gg \xi \gg L). \quad (3.159)$$

Сравним магнитную добавку M_v с электронным вкладом в массу вихря (см., например, [10]), который имеется в каждом сверхпроводнике:

$$M_e = \frac{2}{\pi^3} \frac{m^2 V_F}{\hbar}. \quad (3.160)$$

Величины ω_F и λ могут быть найдены в таблице 3.1. Для одного из карманов поверхности Ферми сверхпроводника URhGe масса квазичастиц m и скорость Ферми приведены в работе

[116]: $m = 22m_e$ и $V_F = 4.4 \times 10^5 \text{ cm/s}$, где m_e — масса свободного электрона. Тогда

$$M_v \sim \frac{\gamma M \Phi_0^2}{4\pi \omega_F^3 \lambda^4} \sim 10^{-24} \text{ g/cm}, \quad M_e \sim 10^{-20} \text{ g/cm}.$$

Можно видеть, что магнитная добавка к массе вихре пренебрежимо мала в URhGe. Оценки для UGe₂ и UCoGe дают аналогичный результат. Это является следствием того, что частота ω_F в этих соединениях очень велика: заметим, что правая часть уравнения (3.159) содержит ω_F^{-3} . Таким образом, добавка к массе вихря M_v должна быть обнаружима в материалах с меньшей частотой ферромагнитного резонанса.

Наконец, следует сделать замечание о связи между увеличением массы вихря, обсуждаемым здесь, и поляронным механизмом пиннинга, который анализировался теоретически в работах [65] и [66]. В упомянутых статьях рассматривалась чисто диссипативная динамика намагниченности, то есть, случай $\nu/M \gg 1$, когда в материале нет осциллирующих магнанных мод. Таким образом, поляронный механизм пиннинга скорее даёт добавку к действительной части η_M , а не к мнимой, и данный эффект не имеет непосредственного отношения к увеличению массы вихря.

3.4.4. Поверхностным импеданс ферромагнитного сверхпроводника в перпендикулярной геометрии

Простейший экспериментальный метод исследования динамики вихрей в сверхпроводниках заключается в измерении поверхностного импеданса образца. Возможная геометрия такого эксперимента изображена на рис. 3.9. Мы рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда вихри перпендикулярны к поверхности образца, а зондирующая электромагнитная волна с амплитудой $\mathbf{h}_e$ падает нормально на эту поверхность. В этом случае для немагнитного сверхпроводника ($\mathbf{M}_0 = 0$) теория предсказывает, что в широком диапазоне параметров поверхностный импеданс $Z(\omega)$ равен [81, 139]

$$Z(\omega) = \left(\frac{-i\omega\mu_s\rho_f}{4\pi} \right)^{1/2}, \quad (3.161)$$

где μ_s — статическая дифференциальная магнитная проницаемость,

$$\mu_s = \frac{dB_{0z}}{dH_{ez}},$$

а ρ_f — сопротивление материала в вихревом состоянии:

$$\rho_f = \frac{B\Phi_0}{c^2\eta}.$$

Таким образом, из экспериментальных данных по поверхностному импедансу можно определить вязкость вихря η .

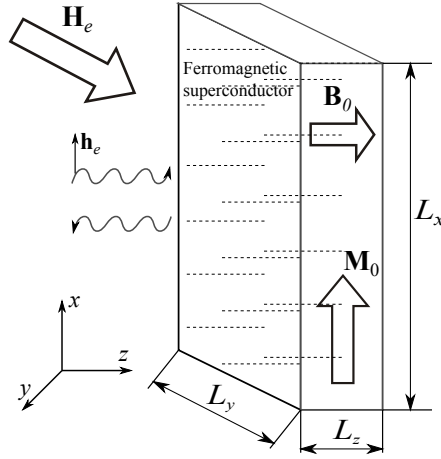


Рис. 3.9. Возможная геометрия для эксперимента по измерению поверхностного импеданса ферромагнитного сверхпроводника. Штриховые линии обозначают вихри.

Покажем, что для ферромагнитных сверхпроводников существует область параметров, в которой применимо уравнение (3.161), если в него подставить полную вязкость, то есть, заменить η на сумму $\eta + \eta_M$.

Сначала следует очертить условия применимости уравнения (3.161) в случае обычного сверхпроводника. В рамках приближения сплошной среды, использованного в работе [139], переменное внешнее поле $\mathbf{h}_e$ возбуждает в сверхпроводнике длинноволновую и коротковолновую моду. Для удобства будем называть их модами первого и второго типа и обозначим z -проекции их волновых векторов за k_1 и k_2 , соответственно. Эти величины определены явно в уравнении (24) из работы [139]. Чтобы использовать простое выражение (3.161) для импеданса, должны быть выполнены три условия: (i) $|k_1|\lambda \ll 1$, (ii) $|k_1| \ll |k_2|$, и (iii) $|k_2|L_z \gg 1$ (L_z — толщина образца, см. рис. 3.9). Согласно [139], условия (i) и (ii) выполнены, если

$$\omega \ll \omega_C \equiv \frac{\Phi_0 C_{44}^*}{B_0 \lambda^2 \eta}, \quad (3.162)$$

где C_{44}^* — один из модулей упругости вихревой решётки. Неравенство (3.162) даёт ограничение на частоту. В пределе $H_{c1} \ll B_0 \ll H_{c2}$ условие (3.162) может быть ослаблено следующим образом:

$$\omega \ll \omega_B \equiv \frac{\Phi_0 B_0}{4\pi \lambda^2 \eta} \quad (\omega_B \gg \omega_C). \quad (3.163)$$

Это следует непосредственно из уравнения (22) в статье [139].

Теперь обратимся к случаю ферромагнитного сверхпроводника. Будем считать, что образец является параллелепипедом с размерами L_x , L_y и L_z , где $L_z \ll L_x, L_y$ — см. рис. 3.9. Ось x , параллельная большой грани образца, является осью лёгкого намагничивания. В действительности геометрия параллелепипеда не является необходимым требованием, важно лишь, чтобы равновесная намагниченность была параллельна границе образца. Приложив внешнее поле,

можно добиться того, чтобы внутреннее поле было направлено вдоль оси z . В нашей геометрии размагничивающие коэффициенты равны $N_{xx} \approx 0$, $N_{yy} \approx 0$, $N_{zz} \approx 4\pi$. Тогда, согласно уравнению (3.10), если приложено внешнее поле $\mathbf{H}_e = (-4\pi M, 0, H_{ez})$, то внутреннее поле будет равно $\mathbf{B}_0 = (0, 0, H_{ez})$.

При вычислении поверхностного импеданса ферромагнитного сверхпроводника возникает дополнительная трудность, связанная с присутствием новых степеней свободы, которых нет в обычном сверхпроводнике. Так, в ферромагнетике имеются магнонные моды, которые могут быть непосредственно возбуждены электромагнитной волной даже в отсутствие вихрей [62, 88] (см. также подраздел 3.3.5). Однако, в геометрии, показанной на рис. 3.9, можно избежать возбуждения этих мод, как будет показано ниже.

Если частота волны не слишком близка к частоте ферромагнитного резонанса ($|\omega - \omega_F| / \omega_F \gg K^{-1}$) в уравнении Ландау-Лифшица можно пренебречь магнитостатическим взаимодействием при анализе дополнительных магнонных мод, как было сделано в подразделе 3.4.1, где мы отбросили член $\mathbf{b}_{Mq}$. Тогда в пределе малой диссипации уравнение (3.13) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \left(\alpha \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial z^2} - K \mathbf{m} \right). \quad (3.164)$$

Это уравнение даёт две моды с волновыми числами k_3 и k_4 , которые мы будем называть модами третьего и четвёртого типа:

$$\mathbf{m} = (\mathbf{z}_0 \mp i\mathbf{y}_0) m_{3,4} e^{ik_{3,4}z}, \quad k_3 = L^{-1} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_F} - 1}, \quad k_4 = iL^{-1} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_F} + 1}, \quad (3.165)$$

где m_3 и m_4 — скалярные амплитуды. Заметим, что эффекты, связанные с зонной структурой спектра магнонов (см. раздел 3.3) не влияют на данные моды, так как волны намагниченности в них распространяются вдоль вихрей и не испытывают брэгговского рассеяния на вихревой решётке.

Теперь пусть магнитное поле $\mathbf{h}_e$ в электромагнитной волне колеблется вдоль оси лёгкого намагничивания x (см. рис. 3.9). Разумно предположить, что внутри образца усреднённая по плоскости xy переменная магнитная индукция $\langle \mathbf{b} \rangle$ будет тоже параллельна оси x . Данное предположение приводит к самосогласованной цепочке следствий. Действительно, когда $\langle \mathbf{b} \rangle$ параллельно $\mathbf{M}_0$, мы можем видеть из уравнений (3.13) и (3.66), что $\partial \langle \mathbf{m} \rangle / \partial t = 0$. Это означает, что моды третьего и четвёртого типа не возбуждаются. В модах первого и второго типа $\langle \mathbf{m} \rangle = 0$, но $\langle \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Следовательно, эти моды отличаются от своих аналогов в немагнитных сверхпроводниках только наличием магнитной добавки к вязкости η_M , которая связана с Фурье-компонентами намагниченности $\mathbf{m}_q$ с $\mathbf{q} \neq 0$. Тогда, согласно [139], внутреннее поле $\langle \mathbf{b} \rangle$ будет параллельно

зондирующему полю $\mathbf{h}_e$ (что следует из уравнения Лондонов (3.14), если учесть деформации вихрей). Таким образом, мы доказали справедливость исходного предположения, показав помимо этого, что возбуждаются только моды первого и второго типа.

Строго говоря, эффективная вязкость для длинноволновой моды типа 1 слегка отличается от $\eta + \eta_M$, так как вихри слегка изгибаются, совершая колебания. Однако, так как $|k_1| \ll \lambda^{-1}$, радиус кривизны вихрей достаточно большой, чтобы этим отличием можно было пренебречь.

3.4.5. Обобщение результатов на случай сверхрешёток сверхпроводник-ферромагнетик

Обобщим теперь результаты из подразделов 3.4.2 и 3.4.3 на случай многослойных SF систем. Пусть вихри ориентированы перпендикулярно к слоям — см. рис. 3.6. Здесь S и F — обычный сверхпроводник второго рода и обычный ферромагнетик, соответственно. Пусть период структуры d достаточно мал (см. ниже). Тогда результаты из подразделов 3.4.2 и 3.4.3 непосредственно могут быть применены к SF сверхрешёткам, если учесть два обстоятельства:

(i) Так как магнитные моменты имеются только в части образца, все выражения для силы $\mathbf{f}_M$, начиная с (3.102), следует умножить на d'_F/d . Здесь $d'_F \leq d_F$ — эффективная толщина ферромагнитного слоя. Величины d'_F и d_F совпадают в случае, когда сверхпроводимость не приводит к подавлению магнетизма. На практике в сверхрешётках с купратными (S) и манганитными (F) слоями наблюдается гигантская модуляция намагниченности, индуцированная сверхпроводимостью [124], и подавление магнитного порядка вблизи SF границы [125–128]. В таких случаях следует учитывать, что $d'_F < d_F$.

(ii) Вследствие того, что система только частично сверхпроводящая, глубина проникновения магнитного поля в плоскости слоёв будет $\lambda_{\text{eff}} = \lambda(d/d_S)^{1/2}$ (см., например, [140]). Когда период структуры много меньше характерных масштабов задачи, можно пользоваться выражением для поля вихря

$$h_{qz} \approx \frac{\Phi_0}{4\pi^2(1 + q^2\lambda_{\text{eff}}^2)}. \quad (3.166)$$

Для применимости результатов по отклику вихрей на постоянный ток следует потребовать $d \ll \min(a_v, L)$, согласно подразделу 3.4.2. Ограничения несколько слабее в случае переменного тока. Действительно, в подразделе 3.4.3 было показано, что основной вклад в $\mathbf{f}_M$ происходит от волновых векторов с модулями $q \sim L^{-1} \sqrt{|\omega/\omega_F - 1|}$, следовательно, ограничение на период структуры имеет вид

$$d \ll \min \left[a_v, L \sqrt{\frac{\omega_F}{|\omega - \omega_F|}} \right].$$

В работе [137] было проведено экспериментальное исследование сопротивления трёх-слойной SFS системы Nb/PdNi/Nb. Было обнаружено, что добавление магнитного слоя PdNi

приводит к увеличению сопротивления сверхпроводящих ниобиевых слоёв, то есть, формально — к уменьшению вязкости вихрей, что противоречит предсказаниям, полученным в данной главе. В действительности данный эксперимент не может быть интерпретирован в рамках используемой здесь модели, так как сплав PdNi не обладает хорошо определённой анизотропией и, кроме того, из-за отсутствия трансляционной симметрии магنونным модам нельзя приписать волновой вектор $\mathbf{q}$. Также следует отметить, что зависимость критической температуры ниобия от толщины слоя PdNi говорит о сильном влиянии магнитного порядка на сверхпроводимость. Таким образом, чтобы объяснить увеличение сопротивления в системе Nb/PdNi/Nb, исследованной в работе [137], требуется более сложное микроскопическое рассмотрение.

3.5. Выводы

В настоящей главе были рассмотрены различные аспекты взаимодействия между вихрями и спиновыми волнами в гибридных SF системах. Был произведён численный и аналитический расчёт зонного спектра магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике. Показано, что при изменении магнитного поля B_0 зонная структура меняется качественно (см. рис. 3.3 и 3.4): когда поле становится достаточно малым, спектры в центре первой зоны Бриллюэна существенно деформируются. Данный эффект является следствием немонотонности спектра магнонов в отсутствие вихрей.

Движущиеся абрикосовские вихри в SF системах могут излучать спиновые волны, что приводит к появлению магнитного вклада $\mathbf{f}_M$ в силу, действующую на вихри. Было показано, что, когда вихри приводятся в движение постоянным током, на вольт-амперной характеристике образца должна возникнуть либо серия резонансов, либо ступенька — тип резонансной особенности зависит от степени упорядоченности вихревой решётки. Упомянутые эффекты могут наблюдаться в SF сверхрешётках с достаточно малой пороговой скоростью генерации магнонов, V_{th} . Для случая переменного тока малой амплитуды была вычислена магнитная добавка к вязкости вихря, η_M . При $\omega < \omega_F$ диссипация в магнитной подсистеме относительно мала — $\Im(\eta_M) \gg \Re(\eta_M)$. При этом имеется магнитная добавка к массе вихря. При $\omega > \omega_F$ происходит генерация спиновых волн, и действительная часть η_M становится существенной.

Зонная структура спектра магнонов и магнитный вклад в вязкость вихря отражаются на поверхностном импедансе образца. Щели в спектре магнонов лучше всего исследовать экспериментально в геометрии, где вихри параллельны поверхности образца — см. рис. 3.5. При такой ориентации вихрей удаётся избавиться от диссипации, связанной с движением вихрей. С другой стороны, измерение величины η_M можно производить в перпендикулярной геометрии — см. рис.

3.9. Так как η_M в урановых ферромагнитных сверхпроводниках много меньше вязкости Бардина-Стефена, для экспериментального обнаружения η_M следует измерять поверхностный импеданс Z при различных частотах и магнитных полях: на зависимостях $Z(\omega)$ и $Z(B_0)$ должны наблюдаться резонансы.

В целом, влияние магнитных моментов на динамику вихрей сильнее в системах с меньшей частотой ферромагнитного резонанса. Таким образом, упомянутые выше эффекты лучше наблюдать в SF сверхрешётках с ферромагнитными слоями, имеющими малую магнитокристаллическую анизотропию.

Нелокальная электродинамика и притяжение вихрей в гибридных системах сверхпроводник-ферромагнетик

4.1. Введение

Согласно теории Гинзбурга-Ландау, все сверхпроводники могут быть разделены на две группы в соответствии со значением параметра $\kappa = \lambda/\xi$. В сверхпроводниках первого рода ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) абрикосовские вихри притягиваются друг к другу, вследствие чего вихревая фаза в них нестабильна. Напротив, в сверхпроводниках второго рода ($\kappa > 1/\sqrt{2}$) реализуется смешанное состояние, которое устойчиво из-за отталкивающего взаимодействия между вихрями. Однако, уже в течение более чем сорока лет известно, что материал может одновременно проявлять свойства сверхпроводников как первого, так и второго рода. Так, из микроскопического рассмотрения следует, что в соединениях с параметром κ , лежащим в пределах $1/\sqrt{2} < \kappa \lesssim 1$, при достаточно низких температурах потенциал межвихревого взаимодействия может стать притягивающим на больших расстояниях [141–144], оставаясь отталкивающим на малых. Заметим, что этот факт не противоречит теории Гинзбурга-Ландау, справедливой лишь в небольшом температурном интервале вблизи T_c . Смена знака у силы взаимодействия между вихрями приводит к появлению неустойчивого S-образного участка на кривой намагничивания образца [145]. В результате переход из мейснеровского состояния в вихревое становится фазовым переходом первого рода: при нижнем критическом поле концентрация вихрей в сверхпроводнике возрастает скачком. В ранних экспериментальных работах данное явление удалось наблюдать в довольно простых соединениях, таких как чистый ниобий, сплав NbTi, а также Nb и Ti с примесью азота [146, 147] (см. также обзор [148]). Позднее аналогичное явление обнаружилось в так называемых сверхпроводниках 1.5-рода [149, 150] с многозонной сверхпроводимостью, где длины когерентности для разных участков поверхности Ферми не совпадают [151, 152].

В некоторых случаях притяжение между вихрями может возникнуть и в сверхпроводниках с большим параметром κ . В слабых магнитных полях, $B \ll H_{c2}$, электродинамика таких сверхпроводников локальная: она довольно точно описывается в приближении теории Лондонов. Тогда для притяжения вихрей достаточно, чтобы проекция магнитного поля изолированного вихря на ось вихря меняла знак [153–156]. Такая смена знака действительно возникает с анизотропных немагнитных [153–156] и магнитных сверхпроводниках [157] при определённых ориентациях вихрей. Тогда потенциал взаимодействия вихрей сильно анизотропен, из-за чего

вихри проникают в образец в виде цепочек [158].

В настоящей главе обсуждается новый механизм притяжения вихрей в гибридных SF структурах, связанный с пространственной дисперсией магнитной восприимчивости. Такая дисперсия приводит к нелокальной связи между плотностью тока $\mathbf{j}$ и векторным потенциалом $\mathbf{A}$ с типичным масштабом нелокальности, совпадающим с толщиной блоховской доменной стенки L . Нелокальные эффекты становятся особенно сильными, когда L больше или порядка лондонской длины λ . Тогда потенциал взаимодействия вихрей становится притягивающим на определённых расстояниях, и фазовый переход при H_{c1} становится переходом первого рода.¹

Глава построена следующим образом: в разделе 4.2 выводится поле вихря в гибридной SF структуре с большой величиной L . В разделе 4.3 обсуждается фазовая диаграмма такой SF структуры. В заключительном разделе 4.4 резюмируются полученные результаты и предлагается ряд систем, в которых возможно наблюдение предсказанных эффектов.

4.2. Поле вихря в SF системах с сильной пространственной дисперсией магнитной восприимчивости

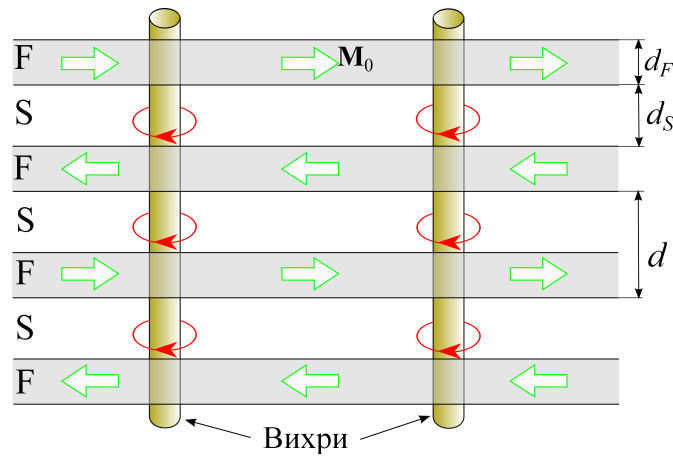


Рис. 4.1. Схематичное изображение многослойной SF системы.

Рассмотрим сверхрешётку сверхпроводник-ферромагнетик, изображённую на рис. 4.1. Пусть ось x является осью лёгкого намагничивания для ферромагнитных слоёв. Мы будем пренебрегать джозефсоновским током между сверхпроводящими слоями, так что джозефсоновские вихри не образуются. Такое приближение оправдано, если ферромагнетик является изолятором, либо если F слои достаточно толстые или между S и F слоями имеется оксидная прослойка.

¹ Данные эффекты не должны наблюдаться в урановых ферромагнитных сверхпроводниках, рассмотренных в предыдущей главе. В этих материалах $L \ll \lambda$, поэтому влияние магнитной пространственной дисперсии на вихревую решётку пренебрежимо мало.

Тогда в лондоновском приближении можно взять свободную энергию системы в виде (3.6). Перепишем здесь данное уравнение следующим образом:

$$F = \int \left[\frac{1}{8\pi\lambda_0^2} \left(\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta_s \right)^2 + \frac{(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})^2}{8\pi} + \frac{\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) + \frac{K_0 \mathbf{M}_\perp^2}{2} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}_e}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r}. \quad (4.1)$$

Здесь и далее в этой главе мы будем использовать символы λ_0 , K_0 и α_0 для обозначения характеристик отдельных слоёв, тогда как α , K и λ будут обозначать усреднённые характеристики (см. ниже). Отметим, что сверхпроводящие и магнитные члены в уравнении (4.1) следует интегрировать только по соответствующим слоям.

В отсутствии внешнего поля можно ожидать, что вектора намагниченности в соседних F слоях будут направлены в противоположные стороны, как на рис. 4.1. Такая конфигурация минимизирует магнитостатическую энергию. Тогда внешнее поле $\mathbf{H}_e$, ориентированное вдоль оси z (перпендикулярно к слоям) создаст в системе вихри, ориентированные вдоль той же оси.

Преобразуем плотность магнитостатической энергии следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})^2}{8\pi} &= \frac{B_{M0}^2}{8\pi} + \frac{B_v^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{B}_{M0}\mathbf{B}_v}{4\pi} - \mathbf{B}_v\mathbf{M}_0 - \mathbf{B}_{M0}\mathbf{M}_0 \\ &\quad - \mathbf{B}_{M0}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \mathbf{B}_v(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) + 2\pi M^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\mathbf{M}_0$ — намагниченность в отсутствие вихрей, $\mathbf{B}_{M0}$ — поле, источником которого является $\mathbf{M}_0$, а $\mathbf{B}_v$ — поле вихрей (при этом $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{M0} + \mathbf{B}_v$). Мы предполагаем, что температура значительно ниже температуры Кюри, так что модуль намагниченности M можно считать постоянным. Рассмотрим предел тонких слоёв, когда полупериод структуры d много меньше лондоновской длины и всех других характерных масштабов в плоскости xy (масштабами задачи являются $|q_1|^{-1}$ и $|q_2|^{-1}$ — см. уравнение (4.14)). Тогда в отсутствие вихрей поле, индуцируемое в F слое всеми другими магнитными слоями, равно нулю, следовательно, $\mathbf{B}_{M0} = 4\pi\mathbf{M}_0$. Далее мы будем предполагать, как и в главе 3, что перпендикулярная к лёгкой оси компонента намагниченности $\mathbf{m}$ мала: $m \ll M$. Пренебрегая в правой части соотношения (4.2) членами, содержащими степень m , выше второй, имея в виду, что $\mathbf{B}_v$ пропорционально m , мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})^2}{8\pi} &= \frac{(\mathbf{B}_{M0} - 4\pi\mathbf{M}_0)^2}{8\pi} + \frac{B_v^2}{8\pi} - \mathbf{B}_{M0}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \mathbf{B}_v\mathbf{m} \\ &\approx \frac{(\mathbf{B}_{M0} - 4\pi\mathbf{M}_0)^2}{8\pi} + \frac{B_v^2}{8\pi} + 2\pi m^2 - \mathbf{B}_v\mathbf{m}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

так как $M_x - M_{0x} \approx -M_{0x}m^2/(2M)$.

В уравнении (4.1) векторный потенциал и сверхпроводящую фазу можно представить в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{M0} + \mathbf{a}$ и $\theta_s = \theta_{M0} + \theta'$, где $\mathbf{A}_{M0}$ и θ_{M0} индуцированы намагниченностью $\mathbf{M}_0$, а $\mathbf{a}$ и θ' связаны с вихрями, при этом $\mathbf{B}_v = \text{rot } \mathbf{a}$. Поле $\mathbf{B}_{M0}$ проникает в сверхпроводящие слои только на

границах образца и не приводит к возникновению сверхтоков вдали от границы, следовательно, мы можем положить

$$\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta_S = \mathbf{a} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta'.$$

Тогда свободная энергия принимает вид

$$F = \int \left[\frac{1}{8\pi\lambda_0^2} \left(\mathbf{a} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta' \right)^2 + \frac{\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \right) + \frac{K_0 \mathbf{m}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}_v^2}{8\pi} + 2\pi m^2 - \mathbf{B}_v \mathbf{m} - \frac{\mathbf{H}_e \mathbf{B}_v}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r} + F_0, \quad (4.4)$$

где

$$F_0 = \int \frac{(\mathbf{B}_{M0} - 4\pi \mathbf{M}_0)^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r} = \text{const}$$

не зависит от внешнего поля и концентрации вихрей.

В пределе тонких слоёв мы можем переписать свободную энергию в приближении сплошной среды. Для этого сверхпроводящие и магнитные члены следует умножить на соответствующие факторы заполнения d_S/d и d_F/d , где d_S и d_F — толщины сверхпроводящих и магнитных слоёв:

$$F = \int \left[\frac{d_S}{8\pi\lambda_0^2 d} \left(\mathbf{a} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta' \right)^2 + \frac{\alpha_0 d_F}{2d} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \right) + (K_0 + 4\pi) \frac{d_F \mathbf{m}^2}{2d} + \frac{\mathbf{B}_v^2}{8\pi} - \frac{d_F}{d} \mathbf{B}_v \mathbf{m} - \frac{\mathbf{H}_e \mathbf{B}_v}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r} + \text{const}. \quad (4.5)$$

Здесь, в отличие от уравнения (4.4), все члены интегрируются по всему образцу. Минимизируя F относительно $\mathbf{m}$, мы получаем

$$\mathbf{m} = (K_0 + 4\pi - \alpha_0 \nabla^2)^{-1} \mathbf{B}_v, \quad \text{и}$$

$$F = \int \left[\frac{1}{8\pi\lambda^2} \left(\mathbf{a} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta' \right)^2 + \frac{\mathbf{B}_v \hat{\mu}_{zz}^{-1} \mathbf{B}_v}{8\pi} - \frac{\mathbf{B}_v \mathbf{H}_{ec}}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r} + \text{const}, \quad (4.6)$$

где

$$\hat{\mu}_{zz} = 1 + 4\pi(K - 4\pi - \alpha \nabla^2)^{-1}, \quad (4.7)$$

— оператор магнитной проницаемости, а

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{d/d_S}, \quad \alpha = \alpha_0 d/d_F, \quad K = (K_0 + 4\pi) d/d_F. \quad (4.8)$$

Соотношение (4.6) может быть выведено также для ферромагнитного сверхпроводника. Действительно, в этом случае свободная энергия (3.6) может быть преобразована следующим образом:

$$F = \int \left[\frac{1}{8\pi\lambda^2} \left(\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta_S \right)^2 + \frac{B^2}{8\pi} - B_x(M_x - M) - B_y m_y - B_z m_z + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \right) + \frac{K \mathbf{m}^2}{2} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{H}_e + 4\pi \mathbf{M}_0)}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r}. \quad (4.9)$$

Отсюда видно, что намагниченность $\mathbf{M}_0$, которая теперь постоянна во всём образце, играет роль внешнего поля, что приводит к образованию спонтанного вихревого состояния в ферромагнитном сверхпроводнике. При этом спонтанные вихри направлены вдоль вектора $\mathbf{M}_0$. Такая ситуация не очень интересна, так как пространственная дисперсия никак не проявляется, если поле параллельно лёгкой оси. Поле спонтанной намагниченности $\mathbf{M}_0$ можно скомпенсировать внешним полем, направленным против $\mathbf{M}_0$. Если образец имеет исчезающе малый размагничивающий коэффициент N_{xx} , компенсирующее поле $\mathbf{H}_{ec}$ равно $-4\pi\mathbf{M}_0$. Подставим $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_{ec} + \mathbf{H}'_e$ в уравнение (4.9), где $\mathbf{H}'_e$ параллельно оси z :

$$F = \int \left[\frac{1}{8\pi\lambda^2} \left(\mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta_S \right)^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B_x m^2}{2M} - B_y m_y - B_z m_z + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \right) + \frac{K \mathbf{m}^2}{2} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}'_e}{4\pi} \right] d^3 \mathbf{r}. \quad (4.10)$$

Из этого соотношения следует, что компонента B_x меньше или порядка m^2/M , следовательно, член, содержащий $B_x m^2$ много меньше m^2 , и им можно пренебречь. После минимизации F относительно $\mathbf{m}$ мы приходим к соотношениям (4.6) и (4.7), в которых на месте $\mathbf{H}_e$ стоит $\mathbf{H}'_e$. Таким образом, уравнение (4.6) применимо как к SF сверхрешёткам, так и к ферромагнитным сверхпроводникам.

Следует отметить, что в ферромагнитном сверхпроводнике при $K < 4\pi$ однородное состояние с $\mathbf{M} = M\mathbf{x}_0$ становится неустойчивым, так как компенсирующее поле $\mathbf{H}_{ec}$ разворачивает вектор намагниченности. В SF сверхрешётке K даётся формулой (4.8), так что неравенство $K < 4\pi$ формально невозможно. В дальнейшем мы будем считать, что $K > 4\pi$.

Определим теперь поле вихря, параллельного оси z . Минимизация свободной энергии относительно $\mathbf{a}$ даёт уравнение Лондонов в виде

$$i\mathbf{q} \times \mathbf{B}_{vq} = -\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{a}_q) = -\frac{1}{\lambda^2} \mu_{zz}(q) \left[\mathbf{a}_q + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta'_q \right], \quad (4.11)$$

где $\mathbf{B}_{vq}$, $\mathbf{a}_q$ и $\nabla\theta'_q$ — двумерные Фурье-образы функций $\mathbf{B}_v$, $\mathbf{a}$ и $\nabla\theta'$, а

$$\mu_{zz}(q) = 1 + \frac{4\pi}{K - 4\pi + \alpha q^2}. \quad (4.12)$$

Второй член в квадратной скобке отвечает за нелокальность (отметим, что этот член напоминает ядро, связывающее плотность тока и векторный потенциал, которое использовалось в работе [159] для описания сверхпроводников с малым параметром κ). С помощью соотношений (4.11) и (4.12) нетрудно определить Фурье-образ магнитной индукции B_{qz} изолированного вихря. Величина B_{qz} может быть представлена в виде

$$B_{qz} = \frac{\Phi_0}{4\pi^2 \lambda^2 L^2 (q_2^2 - q_1^2)} \left[\frac{1 - L^2 q_1^2}{q^2 + q_1^2} - \frac{1 - L^2 q_2^2}{q^2 + q_2^2} \right], \quad (4.13)$$

где $L = \sqrt{\alpha/K}$, а

$$q_{1,2}^2 = \frac{\alpha + \lambda^2 K - 4\pi\lambda^2 \pm \sqrt{(\alpha + \lambda^2 K - 4\pi\lambda^2)^2 - 4K\lambda^2\alpha}}{2\lambda^2\alpha}. \quad (4.14)$$

Если мы вспомним, что в обычном вихре

$$B_{qz} = \frac{\Phi_0}{4\pi^2(1 + \lambda^2 q^2)}, \quad B_z = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right),$$

мы можем легко сделать обратное преобразование Фурье в уравнении (4.13):

$$B_z = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 L^2 (q_2^2 - q_1^2)} \left[(1 - L^2 q_1^2) K_0(q_1 \rho) - (1 - L^2 q_2^2) K_0(q_2 \rho) \right]. \quad (4.15)$$

Поле $\mathbf{H} \equiv \hat{\mu}^{-1} \mathbf{B}$ вычисляется аналогично:

$$H_z = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 L^2 (q_2^2 - q_1^2)} \left[(1 - 4\pi K^{-1} - L^2 q_1^2) K_0(q_1 \rho) - (1 - 4\pi K^{-1} - L^2 q_2^2) K_0(q_2 \rho) \right]. \quad (4.16)$$

Любопытно, что величины q_1 и q_2 являются комплексными при $L_{\min} < L < L_{\max}$, где

$$L_{\min, \max} = \lambda [1 \mp \sqrt{4\pi K^{-1}}]. \quad (4.17)$$

В этом случае B_z и H_z испытывают пространственные осцилляции, спадающие при удалении от вихря. Похожее поведение полей было предсказано Эйленбергером [160] и Dichtel [159] для немагнитного сверхпроводника с малым κ . В нашем случае при увеличении L осцилляции пропадают: при $L > L_{\max}$ поля меняют знак один раз, оставаясь отрицательными при $\rho \rightarrow \infty$. Графики зависимостей $B_z(\rho)$ и $H_z(\rho)$ показаны на рис. 4.2.

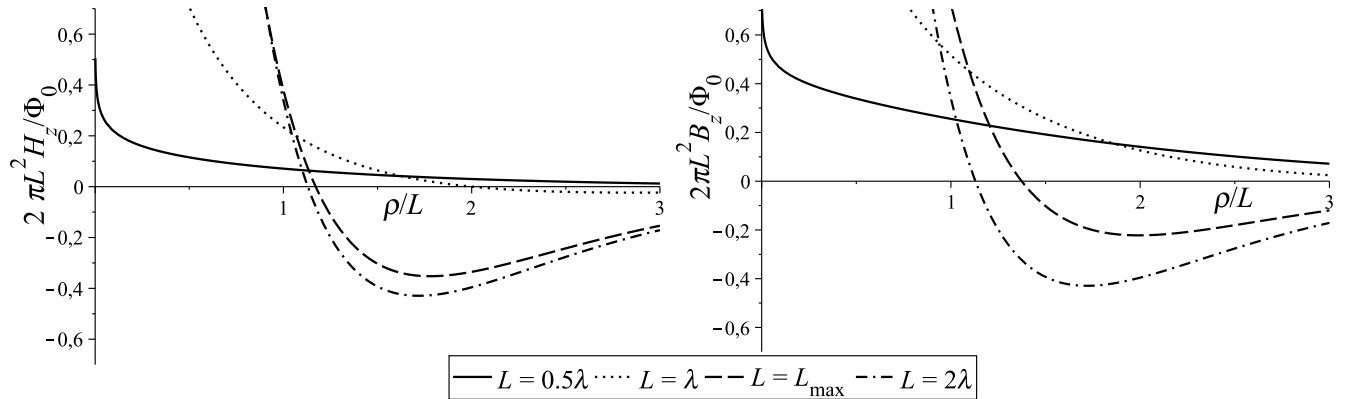


Рис. 4.2. Напряжённость и индукция магнитного поля одного вихря при различных температурах T , соответствующих различным значениям отношения $L/\lambda(T)$. $\mu_{zz}(0) = 5$. В линейном масштабе по вертикальной оси видна только одна осцилляция полей из-за быстрого спада амплитуды осцилляций при удалении от оси вихря.

С использованием соотношений (4.8) условие смены знака поля вихря в SF сверхрешётке приводится к виду

$$L_0 > \lambda_0 \sqrt{\frac{d}{d_S}} \left[\sqrt{1 + \frac{4\pi}{K_0}} - \sqrt{\frac{4\pi d_F}{d K_0}} \right], \quad (4.18)$$

где $L_0 = \sqrt{\alpha_0/K_0}$ — толщина блоховской стенки в ферромагнитных слоях.

4.3. Вихревое состояние

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в образце имеется много вихрей. Если размагничивающий фактор N_{zz} пренебрежимо мал, свободная энергия системы при нулевом внешнем поле (или при $\mathbf{H}'_e = 0$ в случае ферромагнитного сверхпроводника) может быть записана как

$$F = \int \frac{\kappa \mathbf{H}_v}{8\pi} d^3\mathbf{r} + \text{const}, \quad (4.19)$$

где $\kappa = -\Phi_0 \text{rot } \nabla \theta_S / (2\pi)$ — завихренность, а $\mathbf{H}_v \equiv \hat{\mu}_{zz}^{-1} \mathbf{B}_v$. Соотношение (4.19) может быть получено из уравнения (4.6) и уравнения Лондонов, взятого в виде

$$\text{rot } \mathbf{H}_v = -\lambda^{-2} \left(\mathbf{a} + \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta' \right).$$

Из уравнения (4.19) следует, что потенциал взаимодействия двух вихрей пропорционален напряжённости магнитного поля изолированного вихря. Таким образом, смена знака $H_z(\rho)$ (точнее, смена знака производной от этой функции) в уравнении (4.16) приводит к притяжению между вихрями. Отметим, что в нашем случае необычное поведение поля связано с сильной пространственной дисперсией магнитной проницаемости, тогда как в работах [153–157] смена знака поля являлась следствием анизотропии. В работе [68] было высказано ошибочное утверждение о том, что достаточно большая величина μ_{zz} достаточна для притяжения вихрей, так что пространственная дисперсия не требуется. Однако, если мы положим $\alpha = 0$ в уравнении (4.12), мы получим простую перенормировку λ , что является хорошо известным фактом [50] и не приводит к смене знака H_z . Любопытно, что численный расчёт, проделанный в работе [68], выявил кластеризацию вихрей, которая, по-видимому, связана именно с пространственной дисперсией, неявно заложенной в модель. Данное наблюдение хорошо согласуется с результатами настоящей главы.

Равновесные вихревые конфигурации были исследованы с использованием численного эксперимента. Было проведено моделирование релаксации к состоянию равновесия системы из 800 вихрей, заключённых в ящике с жёсткими стенками. Процесс релаксации происходил в соответствии с уравнениями

$$\eta \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}_i}, \quad (4.20)$$

где вектор $\mathbf{R}_i$ задаёт позицию i -го вихря, а $\eta > 0$ — произвольный положительный коэффициент вязкости (результат релаксации не зависит от величины η). Данный алгоритм позволяет найти локальный минимум свободной энергии. Релаксация останавливалась, когда все производные $d\mathbf{R}_i/dt$ становились достаточно малыми. Некоторые конечные вихревые конфигурации показаны на рис. 4.3. Параметры K , L и λ были выбраны таким образом, чтобы поле вихря осциллировало в пространстве (похожие вычисления были проделаны в работах [161–165], где, однако,

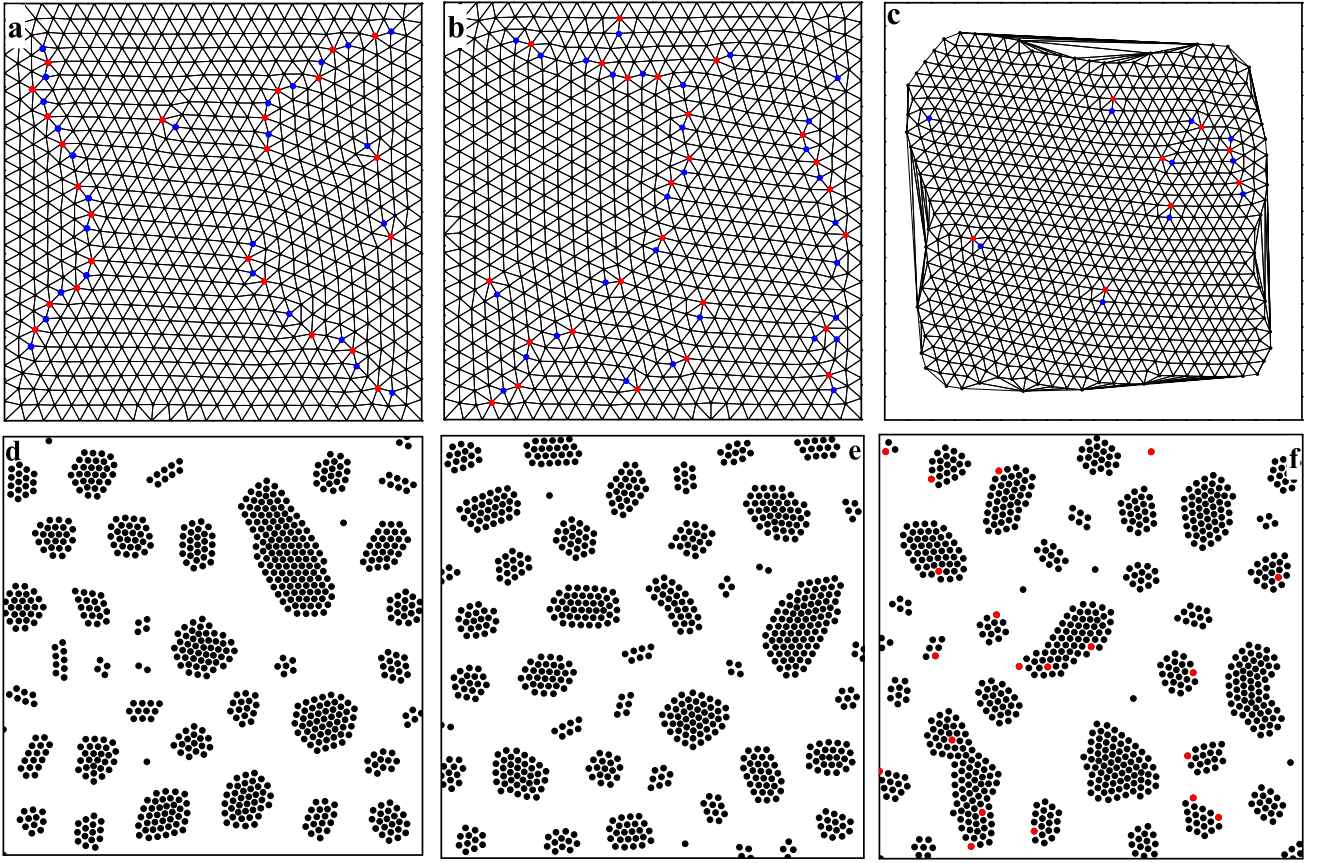


Рис. 4.3. (a)-(c) Триангуляции Делоне вихревых конфигураций в ферромагнитном сверхпроводнике с параметрами $\mu_{zz}(0) = K/(K - 4\pi) \gg 1$ и $L\mu_{zz}(0)/\lambda = 2$. Размеры коробки равны (a) $50\lambda' \times 50\lambda'$, (b) $60\lambda' \times 60\lambda'$, и (c) $90\lambda' \times 90\lambda'$, где $\lambda' = \sqrt{L\lambda}$. Вихри с пятью и семью соседями, образующие дислокации решётки, помечены как синие и красные точки, соответственно. (d),(e) Две реализации метастабильного состояния, полученные в результате релаксации из разных начальных состояний. Точки обозначают вихри. Заметим, что состояния с несколькими кластерами не дают абсолютного минимума свободной энергии. (f) Метастабильная конфигурация с двадцатью запиннированными вихрями (с фиксированными позициями), помеченными красными точками. В изображениях (d)-(f) размеры коробки равны $150\lambda' \times 150\lambda'$.

использовался потенциал взаимодействия с одним минимумом). В целом, можно видеть, что вихри либо образуют гексагональную решётку с небольшим количеством дефектов (рис. 4.3a и b), либо набор кластеров с правильной гексагональной внутренней структурой (рис. 4.3c-f). Квадратные конфигурации не наблюдались даже при использовании других параметров K , L и λ . Все дальнейшие расчёты производились в предположении, что вихревая решётка треугольная.

Компонента внутреннего поля B_{0z} в образце с нулевым размагничивающим фактором N_{zz} определяется из соотношения

$$H_{ez} = 4\pi V^{-1} \partial F / \partial B_{0z}. \quad (4.21)$$

Графики зависимостей B_{0z} от H_{ez} при различных температурах T изображены на рис. 4.4a. При $L > L_{\min}$ кривые намагничивания имеют S-образную форму с неустойчивым участком при малых

B_{0z} (ср. с результатом Кляйна [145], полученным для сверхпроводников с малым параметром κ). Это означает, что при нижнем критическом поле имеет место фазовый переход первого рода. Скачок внутреннего поля при $H_{ez} = H_{c1}$ определяется по правилу Максвелла: площади двух сегментов, ограниченных линией $H_{ez}(B_0)$, расположенных слева и справа от прямой $H_{ez} = H_{c1}$ (красная линия на рис. 4.4а), должны совпадать. Кривые намагничивания также позволяют определить метастабильные участки фазовой диаграммы. В частности, вихревое состояние может существовать при полях, меньших H_{c1} , но больших поля переохлаждения H_{c1m} , соответствующего минимуму функции $H_{ez}(B_{0z})$. Если поверхностный барьер для входа вихрей отсутствует, поле перегрева мейснеровского состояния равно $H_{c10} = H_{ez}(0) = 4\pi f_v/\Phi_0$, где f_v — энергия изолированного вихря в расчёте на единицу длины. Фазовая диаграмма SF структуры при $H_{ez} \ll H_{c2}$ показана на рис. 4.4б. Здесь предполагалось, что $H_{c10} \sim \lambda^{-2}(T)$, а T_c значительно меньше температуры Кюри, так что величины L и K можно считать постоянными. Зависимость $\lambda(T)$ была взята из учебника [5]. Фазовый переход первого рода при нижнем критическом поле наблюдается, когда температура меньше некоторого критического значения T_{cr} , которое определяется из условия $L = L_{\min}(T_{cr})$.

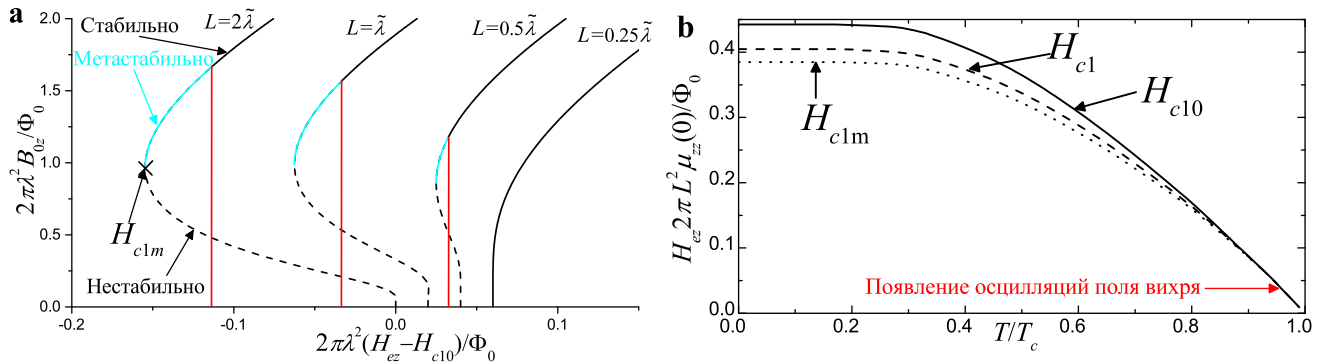


Рис. 4.4. (а) Зависимости B_{0z} от H_{ez} [уравнение (4.21)] при низких магнитных полях ($H_{ez} \ll H_{c2}$) и $\mu_{zz}(0) = 4$ ($L_{\min} = 0.268\tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda} = \lambda\mu_{zz}(0)^{-1/2}$ — перенормированная лондоновская длина, см. [50]). Для большей наглядности кривые сдвинуты друг относительно друга. Скачок B_{0z} при нижнем критическом поле отмечен красной линией. (б) Фазовая диаграмма SF системы с параметрами $\mu_{zz}(0) = 10$ и $\tilde{\lambda}(T=0) = L$.

Для экспериментального наблюдения вихревой решётки обычно используются сверхпроводящие образцы в форме тонких плёнок, при этом магнитное поле прикладывается перпендикулярно к плёнке. В этой геометрии $N_{zz} \approx 4\pi$, так что $B_{0z} \approx H_{ez}$, и средняя концентрация вихрей фиксирована внешним полем. В плёнке ферромагнитного сверхпроводника с толщиной $l_z \gg \lambda$ межвихревое взаимодействие остаётся притягивающим на средних расстояниях, однако становится отталкивающим на больших расстояниях из-за наличия магнитостатического вклада

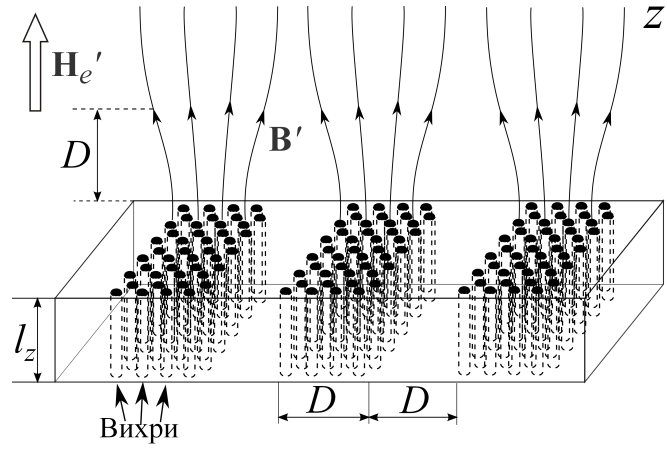


Рис. 4.5. Схематическое изображение доменной страйп-структуры в промежуточном состоянии ферромагнитного сверхпроводника при $H_{ez} \approx B_{0z}(H_{c1})/2$. Показаны линии поля $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{H}_{ec}$.

от свободного пространства в энергию взаимодействия вихрей. Тогда при приложении малого магнитного поля образец должен перейти в промежуточное вихревое состояние, в котором существуют домены мейснеровской и вихревой фаз [148]. Равновесное магнитное поле в вихревых доменах определяется из условия минимальности энергии в расчёте на один вихрь, и равно $B_{0z}(H_{c1})$ (функция $B_{0z}(H_{ez})$ даётся уравнением (4.21)). Следовательно, объёмная доля образца, находящаяся в вихревом состоянии, равна $H_{ez}/B_{0z}(H_{c1})$ при $H_{ez} < B_{0z}(H_{c1})$.

Вообще говоря, на практике в промежуточном вихревом состоянии, в зависимости от экспериментальных условий, могут реализоваться разнообразные доменные структуры [148]. В частности, в некоторых случаях удаётся наблюдать простую страйп-структуру, как на рис. 4.5. Оценим характерный размер доменов D для такой структуры. Пусть $H_{ez} \approx B_{0z}(H_{c1})/2$, так что половина образца находится в вихревом состоянии. Рассмотрим свободную энергию F_a в расчёте на единицу площади плёнки. Вклад в F_a от границ между доменами равен $\sigma_s l_z/D$, где σ_s — коэффициент поверхностного натяжения границы. Кроме этого, в F_a дают вклад искажения (неоднородности) магнитного поля в слоях с толщиной порядка D в областях над и под образцом — см. рис. 4.5. Следовательно,

$$F_a = \tilde{C}(D)B_{0z}^2(H_{c1})D + \sigma_s l_z/D + \text{const}, \quad (4.22)$$

где $\tilde{C}(D)$ — функция порядка единицы, слабо зависящая от D . Минимизация F_a относительно D даёт $D \propto \sqrt{l_z}$, что напоминает зависимость ширины магнитных доменов в ферромагнитной пластине от толщины пластины [94]. Приведённая оценка для D справедлива, когда D много больше межвихревого расстояния: $D \gg \sqrt{\Phi_0/B_{0z}(H_{c1})}$.

4.4. Выводы и предложения для экспериментов

В данной главе в рамках теории Лондонов было показано, что в SF системах с большой толщиной доменной стенки L электродинамика становится сильно нелокальной. Поле вихря в таких системах может менять направление на противоположное, и даже осциллировать в пространстве. Смена знака компоненты H_z приводит к притяжению вихрей на некоторых расстояниях. В результате фазовый переход при нижнем критическом поле становится переходом первого рода. Эти необычные эффекты могут наблюдаться при достаточно низких температурах, когда $L \lesssim \lambda$, тогда как вблизи T_c (при $\lambda \gg L$) можно ожидать обычное, характерное для сверхпроводников второго рода поведение (см. фазовую диаграмму на рис. 4.4b). В образце в форме плёнки, в условиях притяжения вихрей, должно наблюдаться промежуточное вихревое состояние. Доменная структура в этом состоянии может быть визуализирована с использованием техники магнитного декорирования [148].

Обсудим конкретные системы, в которых могут иметь место описанные выше явления. Урановые ферромагнитные сверхпроводники [54–56] обладают довольно сильной магнитокристаллической анизотропией, и толщина доменной стенки в них очень мала, так что условие притяжения вихрей, $L > L_{\min}$, в них не удовлетворяется. Надёжных данных по анизотропии ферромагнитного сверхпроводника EuFe_2As_2 [58] пока не имеется. Использование SF сверхрешёток даёт значительно больше свободы в манипулировании параметрами: имеется большой выбор материалов и, кроме того, имеется возможность создавать структуры с различным отношением толщин d_S и d_F . Чтобы удовлетворить условию (4.18), требуется ферромагнетик с большой величиной L_0 , такой как железо-иттриевый гранат [166] или пермаллой [167], у которых $L_0 \gtrsim 100$ нм. В качестве сверхпроводника можно использовать ниобий ($\lambda_0 \lesssim 100$ нм), тонкие плёнки которого, как правило, имеют большой параметр κ из-за наличия примесей [168].

Заключение

В представленной работе был исследован статический и динамический отклик абрикосовских вихрей на транспортный ток в анизотропных и магнитных сверхпроводниках, а также в сверхрешётках ферромагнетик(F)-сверхпроводник(S). Получены следующие основные результаты:

- В рамках теории Гинзбурга-Ландау развит новый аналитический метод определения энергии взаимодействия вихря с цилиндрическим изоляторным дефектом, размер сечения которого много меньше длины когерентности ξ . Определён потенциал пиннинга для дефекта с эллиптическим поперечным сечением. Показано, что в присутствии слабого транспортного тока может образоваться метастабильное связанное состояние, в котором вихрь смещён относительно дефекта на расстояние порядка ξ . Данное состояние может быть обнаружено экспериментально с использованием туннельного микроскопа или нано-сквида [83].
- В приближении нестационарной теории Гинзбурга-Ландау аналитически и численно рассчитан тензор вязкости вихря $\hat{\eta}$ в одноосных сверхпроводниках с несоответствием анизотропий нормальной проводимости и массы куперовской пары ($s_0 = m_c \sigma_c / m_{ab} \sigma_{ab} \neq 1$). Показано, что в таких сверхпроводниках анизотропия проводимости может сильно зависеть от температуры даже в области $T_c - T \ll T_c$. Полученные результаты полезны для интерпретации экспериментальных данных по электросопротивлению сверхпроводников на основе железа и купратных сверхпроводников.
- Показано, что спектр спиновых волн в ферромагнитном сверхпроводнике в смешанном состоянии имеет зонную структуру. Спектр рассчитан аналитически и численно в приближении уравнений Лондонов и Ландау-Лифшица. Предсказанные щели в спектре магнонов могут быть обнаружены при измерении зависимостей микроволнового коэффициента отражения от частоты, угла падения волны или магнитного поля.
- С использованием уравнений Лондонов и Ландау-Лифшица-Гильберта получены уравнения движения вихрей в гибридных SF системах с учётом силы $\mathbf{f}_M$, действующей на вихри со стороны магнитных моментов. Рассмотрены случаи постоянного и гармонического вынуждающего транспортного тока, идеальной и сильно неидеальной вихревой решётки. Рассчитанная сила $\mathbf{f}_M$ приводит к появлению резонансных особенностей, связанных с генерацией магнонов, на вольт-амперной характеристике образца и на зависимости поверхностного импеданса от частоты и магнитного поля.

- Показано, что в SF системах с большим масштабом магнитной нелокальности (совпадающим с толщиной блоховской доменной стенки) происходит качественное изменение структуры поля вихря. В частности, на некотором расстоянии от оси вихря поле меняет направление на противоположное. Продемонстрировано, что в условиях, когда поле вихря меняет направление, фазовый переход при нижнем критическом поле является переходом первого рода, при этом в образце в виде пластины должно наблюдаться промежуточное вихревое состояние (см. рис. 4.5). Предсказанное состояние может быть визуализировано с помощью техники магнитного декорирования.

Дальнейшее развитие темы диссертации возможно в направлении анализа рассмотренных задач с использованием микроскопических теорий, имеющих более широкую область применимости.

Автор глубоко признателен своим научным руководителям, А. С. Мельникову и А. И. Буздину, за активное участие в работе, терпение и постоянную поддержку. Кроме того, автор желает выразить благодарность коллегам за помощь и поддержку при подготовке настоящей диссертации:

- И. Д. Токману и Д. Ю. Водолазову — за ценные советы;
- А. А. Фраерману — за конструктивную критику;
- Л. Н. Булаевкому — за плодотворные идеи;
- А. В. Самохвалову и В. В. Курину — за постоянный интерес к работе.

Приложение А

Оценка вклада от функции $\psi_1^{(i)}$ в интеграл в формуле (1.22)

В данном приложении будет показано, что абсолютное значение интеграла

$$I = \int_{\partial S} \left(\psi_1^{(i)} \nabla \psi_d^*(0) + \psi_1^{(i)*} \nabla \psi_d(0) \right) \mathbf{n} d\ell$$

много меньше $n_0 D^2 / \xi^3$. Функция $\psi_1^{(i)}$ обладает следующими свойствами:

$$\nabla \psi_1^{(i)} \mathbf{n} \Big|_{\partial S} \approx 0, \quad \nabla^2 \psi_1^{(i)} = 0 \quad \text{при } \rho < \rho_0, \quad (\text{A.1})$$

где ρ_0 — величина порядка длины когерентности. Введём вспомогательную функцию v , удовлетворяющую уравнениям

$$\nabla^2 v = 0, \quad v \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{n} \nabla v \Big|_{\partial S} = \mathbf{n} \nabla \psi_d^*(0). \quad (\text{A.3})$$

Вблизи дефекта ($\rho \sim D$) характерный масштаб изменения функции v равен D , и из условия (A.3) следует, что $v \sim D \sqrt{n_0} \xi^2$. Кроме того, при удалении от дефекта функция v спадает как ρ^{-1} . Тогда, в случае гладкого дефекта, получаем оценку

$$v \sim \sqrt{n_0} D^2 / (\xi^2 \rho). \quad (\text{A.4})$$

Далее сделаем следующие преобразования:

$$0 = \int_{\rho \notin S, \rho < \rho_0} \operatorname{div} \left(\psi_1^{(i)} \nabla v - v \nabla \psi_1^{(i)} \right) d^2 \rho = - \int_{\partial S} \psi_1^{(i)} \nabla v \mathbf{n} d\ell + \int_{\rho=\rho_0} \left(\psi_1^{(i)} \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \rho} \right) d\ell.$$

Так как $\psi_1 = \psi_1^{(i)} + \psi_1^{(d)}$, и функция $\psi_1^{(d)}$ спадает при увеличении ρ , то при $\rho \sim \rho_0$ $\psi_1 \approx \psi_1^{(i)}$. Тогда

$$I = \int_{\rho=\rho_0} \left(\psi_1 \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} \right) d\ell + c.c., \quad (\text{A.5})$$

где $c.c.$ обозначает комплексно сопряжённое. Согласно предположению (В) из раздела 1.2.1, $|\psi_1| \ll \sqrt{n_0}$. При $\rho = \rho_0$ характерный масштаб изменения функции ψ_1 равен ξ , поэтому $|\partial \psi_1 / \partial \rho| \ll \sqrt{n_0} / \xi$. Тогда из уравнений (A.4) и (A.5) сразу следует, что $|I| \ll n_0 D^2 / \xi^3$, что и требовалось доказать.

Приложение Б

Вывод уравнения баланса сил (5) и выражения для тензора вязкости

В этом приложении выводятся уравнения (5), (2.7), (2.8), (2.12) и (2.13). В уравнениях (2.1) и (2.2) удобно сделать масштабное преобразование $x' = x(m(\varphi_0)/m_{ab})^{1/2}$, $y' = y$, $z' = z$, где $m(\varphi_0)$ даётся уравнением (2.6). Перепишем уравнение (2.1) в форме

$$\Gamma \hbar \frac{\partial |\psi|}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left[\nabla'^2 |\psi| - |\psi| (\nabla' \theta)^2 \right] - a_{GL} |\psi| - b_{GL} |\psi|^3, \quad (\text{Б.1})$$

$$\Gamma |\psi|^2 \left(\hbar \frac{\partial \theta_S}{\partial t} - 2e\Phi \right) = \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \nabla' (|\psi|^2 \nabla' \theta_S). \quad (\text{Б.2})$$

Согласно уравнению (2.4), преобразованная плотность тока $\mathbf{j}' = (j_x[m(\varphi_0)/m_{ab}]^{1/2}, j_y)$ удовлетворяет соотношению

$$\text{div}' \mathbf{j}' = 0. \quad (\text{Б.3})$$

Отметим, что мы оставили только линейный по скорости вихря $\mathbf{V}_L$ член. Производная $\partial \rho_e / \partial t$ квадратична по $\mathbf{V}_L$ (так как в неподвижном вихре $\rho_e = 0$), и мы ей пренебрежём. Из уравнений (Б.2) и (Б.3) следует

$$\Gamma |\psi|^2 \left(\hbar \frac{\partial \theta_S}{\partial t} - 2e\Phi \right) = -\frac{\hbar}{4e} \nabla' (\tilde{\sigma}_n \nabla' \Phi), \quad (\text{Б.4})$$

где введён тензор $\tilde{\sigma}_n$ с компонентами

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{nx'x'} &= s(\varphi_0) \sigma_{ab}, & \tilde{\sigma}_{ny'y'} &= \sigma_{ab}, \\ \tilde{\sigma}_{nx'y'} &= \tilde{\sigma}_{ny'x'} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Функция $s(\varphi_0)$ определяется уравнением (2.14). Рассматривая вихрь, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{V}_L$, решение уравнений (Б.1), (Б.2) и (Б.3) следует искать в виде $\psi = \psi(\boldsymbol{\rho}' - \tilde{\mathbf{V}}_L t)$, $\Phi = \Phi(\boldsymbol{\rho}' - \tilde{\mathbf{V}}_L t)$, где $\tilde{\mathbf{V}}_L = (V_{Lx}[m(\varphi_0)/m_{ab}]^{1/2}, V_{Ly})$, и $\boldsymbol{\rho}' = (x', y')$. Предполагая, что скорость вихря достаточно мала, разложим $|\psi|$ и θ_S по степеням V_L до членов первого порядка:

$$|\psi| \approx \Psi_0(\boldsymbol{\rho}' - \tilde{\mathbf{V}}_L t) + \Psi_1(\boldsymbol{\rho}' - \tilde{\mathbf{V}}_L t), \quad (\text{Б.6})$$

$$\theta_S \approx \theta_0(\boldsymbol{\rho}' - \tilde{\mathbf{V}}_L t) + \theta_1(\boldsymbol{\rho}' - \tilde{\mathbf{V}}_L t). \quad (\text{Б.7})$$

Функции $\Psi_0(\boldsymbol{\rho}')$ и $\theta_0(\boldsymbol{\rho}')$ соответствуют неподвижному вихрю. Функции Ψ_1 , θ_1 и Φ пропорциональны V_L . Подставим (Б.6) и (Б.7) в соотношения (Б.1), (Б.3) и (Б.4):

$$-a_{GL} \Psi_0 - b_{GL} \Psi_0^3 + \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left[\nabla'^2 \Psi_0 - \Psi_0 (\nabla' \theta_0)^2 \right] = 0, \quad (\text{Б.8})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left[\nabla'^2 \Psi_1 - \Psi_1 (\nabla' \theta_0)^2 - 2\Psi_0 \nabla' \theta_0 \cdot \nabla' \theta_1 \right] - a_{GL} \Psi_1 - 3b_{GL} \Psi_0^2 \Psi_1 = -\Gamma \hbar (\tilde{\mathbf{V}}_L \nabla') \Psi_0 \quad (\text{Б.9})$$

$$\text{div}' \mathbf{j}'_0 = 0, \quad \mathbf{j}'_0 = -\frac{2e\hbar \Psi_0^2}{m_{ab}} \nabla' \theta_0, \quad (\text{Б.10})$$

$$\text{div}' \mathbf{j}'_1 = 0,$$

$$\mathbf{j}'_1 = -\frac{2e\hbar}{m_{ab}} \left(2\Psi_0 \Psi_1 \nabla' \theta_0 + \Psi_0^2 \nabla' \theta_1 \right) - \tilde{\sigma}_n \nabla' \Phi, \quad (\text{Б.11})$$

$$\frac{\hbar \sigma_{ab}}{4e} \left[s(\varphi_0) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} \right] = \Gamma \Psi_0^2 (2e\Phi + \hbar \tilde{\mathbf{V}}_L \cdot \nabla' \theta_0). \quad (\text{Б.12})$$

Теперь введём следующие вспомогательные функции: $\Psi_d = (\mathbf{d} \nabla') \Psi_0$, $\theta_d = (\mathbf{d} \nabla') \theta_0$, $\mathbf{j}'_d = (\mathbf{d} \nabla') \mathbf{j}'_0$, где $\mathbf{d}$ — произвольный постоянный вектор. Соотношение, связывающее Ψ_d и θ_d может быть получено в результате применения оператора $\mathbf{d} \nabla'$ к уравнению (Б.8):

$$\frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left[\nabla'^2 \Psi_d - \Psi_d (\nabla' \theta_0)^2 - 2\Psi_0 \nabla' \theta_0 \cdot \nabla' \theta_d \right] - a_{GL} \Psi_d - 3b_{GL} \Psi_0^2 \Psi_d = 0. \quad (\text{Б.13})$$

Векторное поле $\mathbf{j}'_d$, очевидно, удовлетворяет уравнению $\text{div}' \mathbf{j}'_d = 0$. Умножим уравнение (Б.9) на Ψ_d , вычтем уравнение (Б.13), умноженное на Ψ_1 и проинтегрируем полученное соотношение по достаточно большому объёму, содержащему вихрь. После несложных алгебраических преобразований и интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} -\Gamma \hbar \int (\tilde{\mathbf{V}}_L \nabla') \Psi_0 \Psi_d d^3 \mathbf{r}' &= -\frac{\hbar}{4e} \int \left[(\mathbf{j}'_1 + \tilde{\sigma}_n \nabla' \Phi) \nabla' \theta_d - \mathbf{j}'_d \nabla' \theta_1 \right] d^3 \mathbf{r}' \\ &= -\frac{\hbar}{4e} \int (\tilde{\sigma}_n \nabla' \Phi) \nabla' \theta_d d^3 \mathbf{r}' - \frac{\hbar}{4e} \int_S (\mathbf{j}'_1 \theta_d - \mathbf{j}'_d \theta_1) dS. \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Здесь S — поверхность, охватывающая вихрь, и расположенная далеко от оси вихря. При $\rho' \gg \xi_{ab}$ имеем:

$$\mathbf{j}'_1 \approx -\frac{2e\hbar |a_{GL}|}{b_{GL} m_{ab}} \nabla' \theta_1 = \mathbf{j}'_{\text{tr}}, \quad \theta_1 = -\frac{b_{GL} m_{ab}}{2e\hbar |a_{GL}|} (\mathbf{j}'_{\text{tr}} \cdot \boldsymbol{\rho}') + \text{const},$$

где $\mathbf{j}'_{\text{tr}}$ — транспортный ток, являющийся константой. После вычисления поверхностного интеграла в уравнении (Б.14) и несложных преобразований мы получаем уравнение баланса сил [39]

$$\frac{\pi \hbar}{e} \mathbf{d} \cdot [\mathbf{j}'_{\text{tr}} \times \mathbf{z}_0] = 2\pi \Gamma \hbar (\mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_L) \int_0^\infty \left(\frac{d\Psi_0}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho + \frac{\hbar \sigma_{ab}}{2e} \int \left[s(\varphi_0) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} \right] (\mathbf{d} \nabla' \theta_0) d^2 \boldsymbol{\rho}'. \quad (\text{Б.15})$$

Сравнив уравнения (5) и (Б.15), можно видеть, что тензор вязкости в системе координат (x', y', z') следует определить следующим образом:

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\eta} \tilde{\mathbf{V}}_L = 2\pi \Gamma \hbar (\mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_L) \frac{|a_{GL}|}{b_{GL}} \int_0^\infty \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho + \frac{\hbar \sigma_{ab}}{2e} \int \left[s(\varphi_0) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} \right] (\mathbf{d} \cdot \nabla' \theta_0) d^2 \boldsymbol{\rho}', \quad (\text{Б.16})$$

где функция $f(\rho)$ равна

$$f(\rho) = \Psi_0(\rho \xi_{ab}) \sqrt{\frac{b_{GL}}{|a_{GL}|}}. \quad (\text{Б.17})$$

Компоненты тензора вязкости в системах координат (x, y, z) и (x', y', z') связаны соотношениями

$$\eta_{xx} = [m(\varphi_0)/m_{ab}]^{1/2} \eta'_{x'x'}, \quad \eta_{yy} = [m_{ab}/m(\varphi_0)]^{1/2} \eta'_{y'y'} \quad (\text{Б.18})$$

Правая часть уравнения (Б.16) содержит два слагаемых, ответственных за два механизма диссипации. Компонента вязкости вихря, связанная с диссипацией в процессе релаксации параметра порядка, равна [36, 37]

$$(\eta'_{p0})_{ij} = 2\pi\hbar\Gamma \frac{|a_{GL}|}{b_{GL}} \alpha_1 \delta_{ij}, \quad (\text{Б.19})$$

$$\alpha_1 = \int_0^\infty \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho = 0.279. \quad (\text{Б.20})$$

Второй член в уравнении (Б.16) определяет вклад Бардина-Стефена в вязкость $\hat{\eta}'_{\text{oh}}$, который вычисляется в главе 2:

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\eta}'_{\text{oh}} \tilde{\mathbf{V}}_L = \frac{\hbar\sigma_{ab}}{2e} \int \left[s(\varphi_0) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} \right] (\mathbf{d} \nabla' \theta_0) d^2 \rho'. \quad (\text{Б.21})$$

Теперь, подставив Φ в форме (2.15) в уравнения (Б.12) и (Б.21) и перейдя к координатам (x_1, y_1) (см. формулу (2.9)), мы получим уравнения (2.7), (2.8), (2.12) и (2.13).

Приложение В

Разложение вязкости вихря по степеням u^{-1}

В это приложении выводится уравнение (2.26). Разделим интеграл в уравнении (2.7) на две части:

$$\eta_x = \eta_{x1} + \eta_{x2}, \quad (\text{B.1})$$

$$\eta_{x1} = -2n_0\Gamma\hbar \int_{\rho_1 < \rho_0/\sqrt{u}} f^2(\rho_1) \frac{y_1}{\rho_1^2} \left(u^2 \Phi_x - \frac{y_1}{\rho_1^2} \right) dx_1 dy_1, \quad (\text{B.2})$$

$$\eta_{x2} = -2n_0\Gamma\hbar \int_{\rho_1 > \rho_0/\sqrt{u}} f^2(\rho_1) \frac{y_1}{\rho_1^2} \left(u^2 \Phi_x - \frac{y_1}{\rho_1^2} \right) dx_1 dy_1, \quad (\text{B.3})$$

где $\rho_0 = u^{1/6+\delta}$, $\delta \ll 1/6$. Заметим, что левая часть уравнения (2.12) мала при $\rho_1 > \rho_0/\sqrt{u} \gg u^{-1/2}$ и может быть учтена по теории возмущений:

$$\Phi_x = \frac{y_1}{u^2 \rho_1^2} + \Phi_{x1} + \Phi_{x2} + \dots, \quad (\text{B.4})$$

$$\Phi_{x1} = \frac{1}{u^4 f^2(\rho_1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + s \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{y_1}{\rho_1^2}, \quad \Phi_{x2} = \frac{1}{u^6} \left[\frac{1}{f^2(\rho_1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + s \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \right]^2 \frac{y_1}{\rho_1^2}.$$

Основной вклад в интеграл в формуле (B.3) происходит от области малых ρ_1 . Интеграл от Φ_{x2} порядка $(u\rho_0^6)^{-1} \ll u^{-2}$, интегралы от членов более высокого порядка также пренебрежимо малы (они входят в $o(u^{-1})$ в формуле (2.26)), следовательно,

$$\eta_{x2} \approx -2n_0\Gamma\hbar \frac{I'_{0x}}{u}, \quad I'_{0x} = \int_{\rho > \rho_0} \frac{y}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{y}{\rho^2} dx dy. \quad (\text{B.5})$$

Теперь рассмотрим компоненту η_{x1} . В переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\tilde{\Phi}_x$, введённых в разделе 2.3, уравнение (B.2) принимает вид

$$\eta_{x1} = -2n_0\Gamma\hbar \int_{\rho < \rho_0} f^2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{u}} \right) \frac{y}{\rho^2} \left(\tilde{\Phi}_x - \frac{y}{\rho^2} \right) dx dy. \quad (\text{B.6})$$

Оценим остаточный член R_x , введённый в уравнении (2.23). Он удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial^2 R_x}{\partial y^2} + s \frac{\partial^2 R_x}{\partial x^2} - u f^2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{u}} \right) R_x = \left[u f^2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{u}} \right) - f_2 \rho^2 - \frac{f_4 \rho^4}{u} \right] \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right) + \left[u f^2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{u}} \right) - f_2 \rho^2 \right] \frac{\Phi_x^{(1)}}{u}. \quad (\text{B.7})$$

Заметим, что при $\rho \ll \sqrt{u}$ источник в правой части уравнения (B.7) может быть представлен в виде $S(x, y)u^{-2}$, где $S(x, y)$ — некоторая функция, не зависящая от u . Уравнение (B.7), по сути, описывает экранировку источника, поэтому функция $R_x(x, y, u)$ при малых ρ не зависит от поведения источника при больших ρ , и эта функция может быть представлена в виде $R_x = \tilde{R}_x(x, y)u^{-2}$.

С другой стороны, при $\rho \gg 1$ производные в левой части уравнения (B.7) малы, следовательно в области $1 \ll \rho \ll \sqrt{u}$

$$R_x \approx \frac{1}{u^2} \left[-\frac{f_6 \rho^4}{f_2} \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right) - \frac{f_4 \rho^2}{f_2} \Phi_x^{(1)} \right], \text{ и } |R_x| \leq \frac{\text{const}}{\rho u^2}. \quad (\text{B.8})$$

Теперь подставим $\tilde{\Phi}_x$ в форму (2.23) в уравнение (B.6):

$$\eta_{x1} = -2n_0 \Gamma \hbar \left(\frac{I'_{1x}}{u} + \frac{I'_{2x}}{u^2} + I_{3x} \right), \quad (\text{B.9})$$

где

$$I'_{1x} = \int_{\rho < \rho_0} f_2 y \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right) dx dy, \quad (\text{B.10})$$

$$I'_{2x} = \int_{\rho < \rho_0} \frac{y}{\rho^2} \left[f_4 \rho^4 \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right) + f_2 \rho^2 \Phi_x^{(1)} \right] dx dy, \quad (\text{B.11})$$

$$I_{3x} = \int_{\rho < \rho_0} \left[f^2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{u}} \right) - \frac{f_2 \rho^2}{u} - \frac{f_4 \rho^4}{u^2} \right] \left(\Phi_x^{(0)} - \frac{y}{\rho^2} \right) \frac{y}{\rho^2} dx dy + \int_{\rho < \rho_0} \left[f^2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{u}} \right) - \frac{f_2 \rho^2}{u} \right] \frac{\Phi_x^{(1)}}{u} \frac{y}{\rho^2} dx dy + \int_{\rho < \rho_0} f^2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{u}} \right) R_x \frac{y}{\rho^2} dx dy. \quad (\text{B.12})$$

С помощью уравнений (2.24) и (2.25) нетрудно показать, что

$$\Phi_x^{(0)} = \frac{y}{\rho^2} + \frac{1}{f_2 \rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{y}{\rho^2} + O(\rho^{-9}), \quad (\text{B.13})$$

$$\Phi_x^{(1)} = O(\rho^{-3}). \quad (\text{B.14})$$

Из уравнений (B.13), (B.14) и (B.8) следует, что все интегралы в уравнении (B.12) меньше или порядка ρ_0^2/u^3 . Тогда $|I_{3x}| \ll u^{-2}$, и мы можем пренебречь этой величиной. Кроме того, из уравнений (2.27), (B.5), (B.10) и (B.13) следует, что

$$|I'_{0x} + I'_{1x} - I_{1x}(s)| \ll u^{-1}. \quad (\text{B.15})$$

Оценив выражение, стоящее под интегралом в формуле (B.11) при $\rho > \rho_0$, можно показать, что

$$|I'_{2x} - I_{2x}(s)| \ll 1. \quad (\text{B.16})$$

Наконец, сложив η_{x1} и η_{x2} , учитывая (B.15) и (B.16), мы получаем соотношение (2.26).

Приложение Г

Вывод уравнений (2.35) и (2.36)

В данном приложении приведён подробный вывод уравнения (2.36). Соотношение (2.35) может быть получено аналогичным образом, при этом промежуточные выкладки оказываются менее сложными, чем при выводе уравнения (2.36).

Перепишем соотношение (2.13) в виде

$$s \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial x^2} - u^2 \Phi_y + \frac{x}{\rho^2} f^2(\rho) = -\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y^2} - u^2 \Phi_y (1 - f^2(\rho)). \quad (\Gamma.1)$$

Индекс «1» у координат здесь для краткости опущен. Ниже будет показано, что члены в правой части этого уравнения дают малый вклад в вязкость и могут быть учтены по теории возмущений. На данный момент мы пренебрежём правой частью уравнения (Г.1). Тогда функция Φ_y может быть представлена в виде

$$\Phi_y \approx \Phi_{y0} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x' f^2(\rho') \exp(-u|x - x'| / \sqrt{s})}{x'^2 + y^2} \frac{1}{2u\sqrt{s}} dx', \quad (\Gamma.2)$$

где $\rho' = \sqrt{x'^2 + y^2}$. Разделим интеграл в уравнении (2.8) на три части:

$$\begin{aligned} \eta_y = & -2n_0 \Gamma \hbar \left[\int_{|y| < y_0} f^2(\rho) \frac{x}{\rho^2} u^2 \Phi_y dx dy - \int_{|y| < y_0} f^2(\rho) \frac{x^2}{\rho^4} dx dy \right] \\ & - 4n_0 \Gamma \hbar \int_{y > y_0} f^2(\rho) \frac{x}{\rho^2} \left(u^2 \Phi_y - \frac{x}{\rho^2} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (\Gamma.3)$$

где y_0 — некоторая константа в диапазоне $1 \ll y_0 \ll \sqrt{s}/u$ (например, $y_0 = s^{1/4}/u^{1/2}$). Так как имеет место неравенство

$$f^2(\rho) < \frac{\rho^2}{A_1 + \rho^2}, \quad (\Gamma.4)$$

где A_1 — константа порядка единицы, мы можем оценить первый интеграл в формуле (Г.3) следующим образом:

$$\left| \int_{|y| < y_0} f^2(\rho) \frac{x}{\rho^2} u^2 \Phi_y dx dy \right| < \frac{y_0 u}{\sqrt{s}} \int \frac{|x| |x'| \exp(-u|x - x'| / \sqrt{s}) dx dx'}{(x^2 + A_1)(x'^2 + A_1)} < \text{const} \frac{y_0 u}{\sqrt{s}} \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{u} \right)^2 \ll 1 \quad (\Gamma.5)$$

Здесь и далее в данном приложении “const” обозначает константу, не зависящую ни от каких параметров. Второй член в уравнении (Г.3) при $y_0 \gg 1$ может быть оценён следующим образом:

$$\int_{|y| < y_0} f^2(\rho) \frac{x^2}{\rho^4} dx dy \approx \pi \ln y_0 + C_y. \quad (\Gamma.6)$$

Константа C_y будет определена ниже. Третий интеграл в уравнении (Г.3) может быть вычислен, если учесть, что в области интегрирования с хорошей точностью можно положить $f^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{y>y_0} f^2(\rho) \frac{x}{\rho^2} \left(u^2 \Phi_y - \frac{x}{\rho^2} \right) dx dy &\approx \int_{y_0}^{\infty} \left(\frac{\pi u}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \exp\left(-\frac{u|x|}{\sqrt{s}}\right)}{x^2 + 4y^2} dx - \frac{\pi}{2y} \right) dy \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} dx \int_{y_0}^{\infty} dy \left(\frac{4y}{sx^2/u^2 + 4y^2} - \frac{1}{y} \right) e^{-x} \approx -\frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} \ln \frac{sx^2}{4y_0^2 u^2} e^{-x} dx = \frac{\pi}{2} \ln y_0 - \frac{\pi}{4} \ln \frac{s}{4u^2} + \frac{\pi}{2} C, \end{aligned} \quad (\text{Г.7})$$

где C — постоянная Эйлера:

$$C = - \int_0^{\infty} \ln x \cdot e^{-x} dx \approx 0.577.$$

Используя соотношения (Г.3) - (Г.7), получаем

$$\eta_y = 2\pi\hbar\Gamma n_0 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{4u^2} + \frac{C_y}{\pi} - C \right). \quad (\text{Г.8})$$

Аналогичные преобразования приводят к следующим формулам для η_x :

$$\eta_x = 2\pi\hbar\Gamma n_0 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{s}{4u^2} + \frac{C_x}{\pi} - C \right), \quad (\text{Г.9})$$

$$C_x = \lim_{y_0 \rightarrow \infty} \left(\int_{|y| < y_0} f^2(\rho) \frac{y^2}{\rho^4} dx dy - \pi \ln y_0 \right). \quad (\text{Г.10})$$

Теперь вычислим C_x и C_y . Нетрудно проверить, что

$$C_x = \pi g'_4 + \lim_{y_0 \rightarrow \infty} \int_{|y| < y_0, \rho > y_0} y^2 \rho^{-4} dx dy = \pi \left(g'_4 + \ln 2 - \frac{1}{2} \right),$$

где константа g'_4 , вычисленная в работе [36], равна

$$g'_4 = \int_0^{\infty} \left[f^2(\rho) - \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \right] \rho^{-1} d\rho = -0.3982. \quad (\text{Г.11})$$

Аналогично

$$C_y = \pi \left(g'_4 + \ln 2 + \frac{1}{2} \right).$$

Наконец, компоненты тензора вязкости принимают вид

$$\eta_x = 2\pi\hbar\Gamma n_0 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{u} + g'_4 - C - \frac{1}{2} \right), \quad (\text{Г.12})$$

$$\eta_y = 2\pi\hbar\Gamma n_0 \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{u} + g'_4 - C + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{Г.13})$$

Подставив сюда численные значения C и g'_4 , мы получим уравнения (2.35) и (2.36).

Теперь следует доказать справедливость предположения о том, что правая часть уравнения (Г.1) мало влияет на η_y . Учтём правую часть данного уравнения по теории возмущений. Поправка первого порядка к приближённому решению Φ_{y0} имеет вид

$$\Phi_{y1} = R_y^{(1)} + R_y^{(2)},$$

$$R_y^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\Phi_{y0}(x', y)[1 - f^2(\rho')]}{2\sqrt{s}} \exp(-u|x - x'| / \sqrt{s}) dx', \quad (\text{Г.14})$$

$$R_y^{(2)} = \frac{1}{2u\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Phi_{y0}}{\partial y^2}(x', y) \exp(-u|x - x'| / \sqrt{s}) dx'. \quad (\text{Г.15})$$

Добавка к η_y от Φ_{y1} равна

$$\Delta\eta_y = -2n_0\Gamma\hbar(I_y^{(1)} + I_y^{(2)}),$$

где

$$I_y^{(1)} = \int f^2(\rho) \frac{x}{\rho^2} u^2 R_y^{(1)} dx dy, \quad (\text{Г.16})$$

$$I_y^{(2)} = \int f^2(\rho) \frac{x}{\rho^2} u^2 R_y^{(2)} dx dy. \quad (\text{Г.17})$$

Покажем, что $|I_y^{(1)}| \ll 1$ и $|I_y^{(2)}| \ll 1$ при $s \gg u^2$.

С помощью соотношения (Г.4) несложно получить следующую оценку для $|\Phi_{y0}|$:

$$|\Phi_{y0}| \leq \text{const} \frac{\ln \frac{\sqrt{s}}{u}}{u\sqrt{s}}. \quad (\text{Г.18})$$

Используя неравенство

$$1 - f^2(\rho) < \frac{A_2}{A_2 + \rho^2},$$

где $A_2 = \text{const}$, и уравнение (Г.18), мы можем оценить $I_y^{(1)}$ следующим образом:

$$|I_y^{(1)}| \leq \text{const} \frac{u}{\sqrt{s}} \ln \frac{\sqrt{s}}{u} \ll 1.$$

Для всех x' и y справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{x'^2 + y^2} f^2(\rho') \right) \right| < \frac{\text{const}}{(A_3 + x'^2 + y^2)^2},$$

где $A_3 = \text{const}$, следовательно,

$$\begin{aligned} |I_y^{(2)}| &\leq \frac{\text{const}}{s} \int \frac{|x| \exp\left(-\frac{u|x-x'|}{\sqrt{s}}\right) \exp\left(-\frac{u|x''-x'|}{\sqrt{s}}\right)}{(A_3 + x'^2)(A_1 + x^2)} dx' dx'' dx \\ &\leq \frac{\text{const}}{s} \ln \frac{\sqrt{s}}{u} \int \frac{\exp\left(-\frac{u|x''-x'|}{\sqrt{s}}\right)}{x'^2 + A_3} dx' dx'' \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{s}u} \ln \frac{\sqrt{s}}{u} \ll 1 \end{aligned}$$

при $u \gtrsim 1$. Таким образом, функция Φ_{y1} действительно даёт пренебрежимо малый вклад в η_y .

Приложение Д

Влияние искажения поля вихрей вблизи поверхности на магنونные моды

В это приложении мы рассмотрим изменение моды с волновым вектором $\mathbf{q}_2$ (см. раздел 3.3.5) вблизи поверхности образца. Простой анализ, проведённый здесь, может быть обобщён на все остальные моды.

Заметим, что $q_2^2 \approx -\lambda^{-2}$ и $q_{2x} \approx i\lambda^{-1}$, так как $|k_y| \ll \lambda^{-1}$ (это неравенство справедливо для частот, много меньших плазменной частоты материала, которая порядка $c\lambda^{-1}$). Подставим в уравнение (3.26) $B_v = 4\pi M e^{-x/\lambda}$, и $\mathbf{m} \approx \mathbf{m}_2 e^{-x/\lambda} + \mathbf{m}_2^{(1)} e^{-2x/\lambda}$, где $\mathbf{m}_2^{(1)}$ — амплитуда поправки первого порядка к данной магنونной моде. Эта поправка определяется из следующих уравнений:

$$-\frac{i\omega}{\gamma M} \mathbf{m}_2^{(1)} + (K - 4\alpha\lambda^{-2}) \mathbf{m}_2^{(1)} \times \mathbf{z}_0 = (\mathbf{b}_2^{(1)} - 4\pi \mathbf{m}_2) \times \mathbf{z}_0, \quad (\text{Д.1})$$

$$-\frac{3}{\lambda^2} \mathbf{b}_2^{(1)} = -\frac{16\pi}{\lambda^2} m_{2y}^{(1)} \mathbf{y}_0.$$

При $\omega \approx \gamma M(K + \alpha q_1^2)$ и $\alpha q_1^2 \gg 1$ имеем

$$\mathbf{m}_2^{(1)} \approx \frac{4\pi}{\alpha q_1^2} \mathbf{m}_2. \quad (\text{Д.2})$$

Следовательно, $|\mathbf{m}_2^{(1)}| \ll |\mathbf{m}_2|$, и искажение данной моды мало.

Приложение Е

Вывод формулы (3.101) для силы $\mathbf{f}_M$

Для определения силы $\mathbf{f}_M$ следует вычислить приращение свободной энергии δF при одновременном сдвиге всех вихрей на вектор $\Delta\boldsymbol{\rho}$ относительно данного распределения намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Чтобы упростить вычисления, воспользуемся тем, что свободная энергия получит в точности такое же приращение, если оставить вихри неподвижными, но сдвинуть намагниченность на вектор $-\Delta\boldsymbol{\rho}$. Тогда

$$\delta F = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} \delta \mathbf{A} + \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \delta \mathbf{M} \right) d^3 \mathbf{r}.$$

Уравнение Лондонов даёт $\delta F / \delta \mathbf{A} = 0$, так что первый член в правой части исчезает. Также не дают вклада в δF все слагаемые из свободной энергии (3.6), которые зависят только от $\mathbf{M}$ (например, обменная энергия). Следовательно, остаётся только один член:

$$\delta F = - \int \mathbf{B} \delta \mathbf{M} d^3 \mathbf{r}. \quad (\text{E.1})$$

Сила, действующая на вихрь, равна

$$(\mathbf{f}_M)_{x_i} = \frac{1}{N_v L_v} \int \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} d^3 \mathbf{r} = - \frac{1}{N_v L_v} \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \mathbf{M} d^3 \mathbf{r}.$$

Здесь

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{b}_M}{\partial x_i},$$

так что

$$\mathbf{f}_M = \mathbf{f}_{M1} + \mathbf{f}_{M2}, \quad (\text{E.2})$$

$$(\mathbf{f}_{M1})_{x_i} = - \frac{1}{N_v L_v} \int \frac{\partial \mathbf{b}_M}{\partial x_i} \mathbf{M} d^3 \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{f}_{M2})_{x_i} = - \frac{1}{N_v L_v} \int \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \mathbf{M} d^3 \mathbf{r}.$$

Заметим, что член $\mathbf{f}_{M1}$ не зависит от положения вихрей. Следовательно, для вычисления этого члена мы можем поместить вихри в любое место в нашей системе. Пусть вихри находятся в области с однородной намагниченностью ($\mathbf{M} = \text{const}$). Тогда $\mathbf{f}_{M2} = 0$, и $\mathbf{f}_M = \mathbf{f}_{M1}$. С другой стороны, если намагниченность однородна, любое смещение вихрей не меняет свободную энергию, так что $\mathbf{f}_M = 0$. Значит, $\mathbf{f}_{M1} = 0$ всегда. Отсюда следует уравнение (3.101).

Приложение Ж

Вычисление интеграла в уравнении (3.128)

В это приложение будет показано, как можно вычислить интеграл в формуле (3.128). Введём безразмерные величины $l = L/\lambda$, $l_v = V_L/(\omega_F \lambda)$ и $\mathbf{g} = \lambda \mathbf{q}$. Направим ось g_x вдоль вектора $\mathbf{V}_L$. Тогда $f_{My} = 0$, и

$$\begin{aligned} f_{Mx} &= -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi \lambda^3 \omega_F} \int_{g < \lambda/\xi} \frac{g_x d^2 \mathbf{g}}{(1+g^2)^2} \delta(1 + l^2 g^2 - l_v g_x) = -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi \lambda^2 V_L} \int_{g < \lambda/\xi} \frac{(1+l^2 g^2) \delta(1+l^2 g^2 - l_v g_x)}{(1+g^2)^2} d^2 \mathbf{g} \\ &= -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi \lambda^2 V_L} \left[l^2 \int_{g < \lambda/\xi} \frac{\delta(1+l^2 g^2 - l_v g_x)}{1+g^2} d^2 \mathbf{g} + (1-l^2) \int_{g < \lambda/\xi} \frac{\delta(1+l^2 g^2 - l_v g_x)}{(1+g^2)^2} d^2 \mathbf{g} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Ж.1})$$

Возьмём $V_L > V_{\text{th}} \equiv 2\omega_F L$, чтобы проекция f_{Mx} не равнялась нулю. Для простоты предположим, что

$$L^2 \xi^{-1} > \frac{V_L}{2\omega_F} + \sqrt{\left(\frac{V_L}{2\omega_F}\right)^2 - L^2}, \quad (\text{Ж.2})$$

что возможно $\xi < L$. Тогда весь круг $1 + l^2 g^2 - l_v g_x = 0$ лежит в области интегрирования. Сделаем сдвиг координат, переобозначив $g_x - l_v/(2l^2)$ за g_x :

$$f_{Mx} = -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi \lambda^2 V_L} \left\{ \int \frac{\delta(g^2 - g_0^2) d^2 \mathbf{g}}{1 + g_y^2 + \left(g_x + \frac{l_v}{2l^2}\right)^2} + (l^{-2} - 1) \int \frac{\delta(g^2 - g_0^2) d^2 \mathbf{g}}{\left[1 + g_y^2 + \left(g_x + \frac{l_v}{2l^2}\right)^2\right]^2} \right\}, \quad (\text{Ж.3})$$

где

$$g_0^2 = l^{-2} \left(\frac{l_v^2}{4l^2} - 1 \right).$$

Выполнив интегрирование по модулю $\mathbf{g}$, имеем:

$$f_{Mx} = -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{8\pi \lambda^2 V_L} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + g_0^2 + \frac{l_v^2}{4l^4} + \frac{l_v}{l^2} g_0 \cos \varphi} + \int_0^{2\pi} \frac{(l^{-2} - 1) d\varphi}{\left(1 + g_0^2 + \frac{l_v^2}{4l^4} + \frac{l_v}{l^2} g_0 \cos \varphi\right)^2} \right], \quad (\text{Ж.4})$$

где φ — полярный угол в плоскости (g_x, g_y) . Интегрирование может быть завершено с использованием стандартных методов. В итоге получаем

$$f_{Mx} = -\frac{\gamma M \Phi_0^2 \sin^2 \theta}{8\lambda^2 V_L} (l^{-2} + 1) \frac{l_v^2}{l^4} \left[(1 - l^{-2})^2 + \frac{l_v^2}{l^4} \right]^{-3/2}. \quad (\text{Ж.5})$$

Вернувшись к размерным переменным и вспомнив, что $L \ll \lambda$, мы получаем уравнение (3.129).

Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. Beshpalov, A. A. Abrikosov vortex pinning on a cylindrical cavity inside the vortex core: formation of a bound state and depinning / A. A. Beshpalov, A. S. Mel'nikov // *Supercond. Sci. Technol.* — 2013. — Vol. 26, no. 8. — P. 085014.
- A2. Beshpalov, A. A. Mismatch of conductivity anisotropy in the mixed and normal states of type-II superconductors / A. A. Beshpalov, A. S. Mel'nikov // *Phys. Rev. B.* — 2012. — May. — Vol. 85. — P. 174502.
- A3. Beshpalov, A. A. Band structure of magnetic excitations in the vortex phase of a ferromagnetic superconductor / A. A. Beshpalov, A. I. Buzdin // *Phys. Rev. B.* — 2013. — Mar. — Vol. 87. — P. 094509.
- A4. Beshpalov, A. A. Magnon radiation by moving Abrikosov vortices in ferromagnetic superconductors and superconductor-ferromagnet multilayers / A. A. Beshpalov, A. S. Mel'nikov, A. I. Buzdin // *Phys. Rev. B.* — 2014. — Feb. — Vol. 89. — P. 054516.
- A5. Beshpalov, A.A. Microwave and dc response of an Abrikosov vortex lattice in ferromagnetic superconductors / A.A. Beshpalov, A.S. Mel'nikov, A.I. Buzdin // *Physica C: Superconductivity.* — 2014. — Vol. 503, no. 0. — P. 98 – 100.
- A6. Беспалов, А. А. Анизотропия сопротивления вихревого состояния сверхпроводника / А. А. Беспалов, А. С. Мельников // *Нанопизика и наноэлектроника: Труды XV межд. симпозиума.* — Т. 1. — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2011. — С. 274–275.
- A7. Беспалов, А. А. Пиннинг абрикосовского вихря на малой цилиндрической полости / А. А. Беспалов, А. С. Мельников // *Нанопизика и наноэлектроника: Труды XVI межд. симпозиума.* — Т. 1. — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2012. — С. 7–8.
- A8. Beshpalov, A. A. Pinning of an Abrikosov vortex on a small cylindrical cavity / A. A. Beshpalov, A. S. Mel'nikov // *Dubna-Nano2012: Book of Abstracts of the International Conference Theoretical Physics.* — Dubna: JINR, 2012. — P. 26.
- A9. Беспалов, А. А. Зонный спектр магнонов в ферромагнитном сверхпроводнике в смешанном состоянии / А. А. Беспалов, А. И. Буздин // *Нанопизика и наноэлектроника: Труды XVII межд. симпозиума.* — Т. 1. — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2013. — С. 13–14.

- A10. Beshpalov, A. A. Spin wave excitation by a moving vortex lattice in ferromagnetic superconductors and SF bilayers / A. A. Beshpalov, A. I. Buzdin // Eighth International Conference on Vortex Matter in Nanostructured Superconductors: Abstract Book. — Leuven, Belgium: KU Leuven, 2013. — P. 105.
- A11. Беспалов, А. А. Излучение магнонов движущимися абрикосовскими вихрями в ферромагнитных сверхпроводниках и сверхрешётках сверхпроводник/ферромагнетик / А. А. Беспалов, А. С. Мельников, А. И. Буздин // Нанوفизика и наноэлектроника: Труды XVIII межд. симпозиума. — Т. 1. — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2014. — С. 11–12.
- A12. Беспалов, А. А. Комплексная лондоновская длина и притяжение вихрей в структурах ферромагнетик/сверхпроводник / А. А. Беспалов, А. И. Буздин // Нанوفизика и наноэлектроника: Труды XVIII межд. симпозиума. — Т. 1. — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2014. — С. 13–14.

Литература

1. Meissner, W. Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit / W. Meissner, R. Ochsenfeld // [Naturwissenschaften](#). — 1933. — Vol. 21, no. 44. — P. 787–788.
2. Лифшиц, Е. М. Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — 4-е изд., стереот. изд. — Москва: Физматлит, 2004. — Т. 9 из Теоретическая физика. — 496 с.
3. London, F. The Electromagnetic Equations of the Supraconductor / F. London, H. London // [Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences](#). — 1935. — Vol. 149, no. 866. — P. 71–88.
4. Гинзбург, В. Л. К теории сверхпроводимости / В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. — 1950. — Т. 20. — С. 1064–1081.
5. Тинкхам, М. Введение в сверхпроводимость / М. Тинкхам; Под ред. К. К. Лихарева. — Москва: Атомиздат, 1980. — 310 с.
6. Абрикосов, А. А. О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы / А. А. Абрикосов // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1442.
7. Жен, П. де. Сверхпроводимость металлов и сплавов / П. де Жен; Под ред. Л. П. Горькова. — Москва: Мир, 1968. — С. 280.
8. Cribier, D. Mise en evidence par diffraction de neutrons d'une structure periodique du champ magnetique dans le niobium supraconducteur / D. Cribier, B. Jacrot, L. Madhav Rao, B. Farnoux // [Phys. Lett.](#) — 1964. — Vol. 9, no. 2. — P. 106 – 107.
9. Essmann, U. The direct observation of individual flux lines in type II superconductors / U. Essmann, H. Träuble // [Phys. Lett. A](#). — 1967. — Vol. 24, no. 10. — P. 526 – 527.
10. Blatter, G. Vortices in high-temperature superconductors / G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein et al. // [Rev. Mod. Phys.](#) — 1994. — Oct. — Vol. 66. — P. 1125–1388.
11. Civale, L. Vortex confinement by columnar defects in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ crystals: Enhanced pinning at high fields and temperatures / L. Civale, A. D. Marwick, T. K. Worthington et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 1991. — Jul. — Vol. 67. — P. 648–651.

12. Goyal, A. Irradiation-free, columnar defects comprised of self-assembled nanodots and nanorods resulting in strongly enhanced flux-pinning in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ films / A. Goyal, S. Kang, K. J. Leonard et al. // *Supercond. Sci. Technol.* — 2005. — Vol. 18, no. 11. — P. 1533.
13. Solovyov, Vyacheslav F. Influence of defect-induced biaxial strain on flux pinning in thick $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ layers / Vyacheslav F. Solovyov, Qiang Li, Weidong Si et al. // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Sep. — Vol. 86. — P. 094511.
14. Maiorov, B. Competition and cooperation of pinning by extrinsic point-like defects and intrinsic strong columnar defects in BaFe_2As_2 thin films / B. Maiorov, T. Katase, I. O. Usov et al. // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Sep. — Vol. 86. — P. 094513.
15. Xu, A. Role of weak uncorrelated pinning introduced by BaZrO_3 nanorods at low-temperature in $(\text{Y}, \text{Gd})\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$ thin films / A. Xu, V. Braccini, J. Jaroszynski et al. // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Sep. — Vol. 86. — P. 115416.
16. Haberkorn, N. High-temperature change of the creep rate in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ films with different pinning landscapes / N. Haberkorn, M. Miura, J. Baca et al. // *Phys. Rev. B.* — 2012. — May. — Vol. 85. — P. 174504.
17. Welp, U. Superconducting transition and vortex pinning in Nb films patterned with nanoscale hole arrays / U. Welp, Z. L. Xiao, J. S. Jiang et al. // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Dec. — Vol. 66. — P. 212507.
18. Raedts, S. Flux-pinning properties of superconducting films with arrays of blind holes / S. Raedts, A. V. Silhanek, M. J. Van Bael, V. V. Moshchalkov // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Jul. — Vol. 70. — P. 024509.
19. Karapetrov, G. Direct Observation of Geometrical Phase Transitions in Mesoscopic Superconductors by Scanning Tunneling Microscopy / G. Karapetrov, J. Fedor, M. Iavarone et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Oct. — Vol. 95. — P. 167002.
20. Campbell, A.M. Flux vortices and transport currents in type II superconductors / A.M. Campbell, J.E. Evetts // *Adv. Phys.* — 1972. — Vol. 21, no. 90. — P. 199–428.
21. Мкртчян, Г. С. Взаимодействие между полостью и вихрем в сверхпроводнике второго рода / Г. С. Мкртчян, В. В. Шмидт // *ЖЭТФ.* — 1971. — Т. 61. — С. 367.
22. Khalfin, I. B. Relaxation of magnetic flux in a superconductor with a system of columnar defects / I. B. Khalfin, B. Ya. Shapiro // *Physica C.* — 1993. — Vol. 207, no. 3–4. — P. 359–365.

23. Buzdin, A. Electromagnetic pinning of vortices by non-superconducting defects and their influence on screening / A. Buzdin, D. Feinberg // *Physica C*. — 1996. — Vol. 256. — P. 303 – 311.
24. Buzdin, A. Electromagnetic pinning of vortices on different types of defects / A. Buzdin, M. Daumens // *Physica C*. — 1998. — Vol. 294. — P. 257 – 269.
25. Buzdin, A. Electrostatic analogies in the problems of vortex–defect interactions / A. Buzdin, M. Daumens // *Physica C*. — 2000. — Vol. 332. — P. 108 – 114.
26. Nordborg, H. Interaction between a vortex and a columnar defect in the London approximation / H. Nordborg, V. M. Vinokur // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Nov. — Vol. 62. — P. 12408–12412.
27. Maurer, S. M. Vortex pinning by cylindrical defects in type-II superconductors: Numerical solutions to the Ginzburg-Landau equations / S. M. Maurer, N. C. Yeh, T. A. Tombrello // *Phys. Rev. B*. — 1996. — Dec. — Vol. 54. — P. 15372–15379.
28. Maurer, S. M. Numerical calculation of the vortex-columnar-defect interaction and critical currents in extreme type-II superconductors - a two-dimensional model based on the Ginzburg-Landau approximation / S. M. Maurer, N. C. Yeh, T. A. Tombrello // *J. Phys. Cond. Mat.* — 1998. — Vol. 10, no. 33. — P. 7429.
29. Priour, D. J. Deformation and depinning of superconducting vortices from artificial defects: A Ginzburg-Landau study / D. J. Priour, H. A. Fertig // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Feb. — Vol. 67. — P. 054504.
30. Rosenstein, B. Maximal persistent current in a type-II superconductor with an artificial pinning array at the matching magnetic field / B. Rosenstein, I. Shapiro, B. Ya. Shapiro // *Phys. Rev. B*. — 2010. — Feb. — Vol. 81. — P. 064507.
31. Bardeen, John. Theory of the Motion of Vortices in Superconductors / John Bardeen, M. J. Stephen // *Phys. Rev.* — 1965. — Nov. — Vol. 140. — P. A1197–A1207.
32. Schmid, A. A time-dependent Ginzburg-Landau equation and its application to the resistivity in the mixed state / A. Schmid // *Phys. Kond. Materie*. — 1966. — Vol. 5. — P. 302–317.
33. Горьков, Л. П. Вязкое течение вихрей в сверхпроводниках с парамагнитными примесями / Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин // *ЖЭТФ*. — 1971. — Т. 60, № 6. — С. 2331–2343.

34. Kopnin, N.B. Theory of Nonequilibrium Superconductivity / N.B. Kopnin. International Series of Monographs on Physics. — Clarendon Press, 2001. — 328 p.
35. Hu, Chia-Ren. Dynamic Structure of Vortices in Superconductors. II. $H \ll H_{c2}$ / Chia-Ren Hu, Richard S. Thompson // [Phys. Rev. B](#). — 1972. — Jul. — Vol. 6. — P. 110–120.
36. Hu, Chia-Ren. Numerical Constants for Isolated Vortices in Superconductors / Chia-Ren Hu // [Phys. Rev. B](#). — 1972. — Sep. — Vol. 6. — P. 1756–1760.
37. Куприянов, М. Ю. О вязком движении вихрей в сверхпроводниках второго рода / М. Ю. Куприянов, К. К. Лихарев // Письма в ЖЭТФ. — 1972. — Т. 15. — С. 349–353.
38. Mourachkine, A. High-Temperature Superconductivity in Cuprates: The Nonlinear Mechanism and Tunneling Measurements / A. Mourachkine. Fundamental Theories of Physics. — Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.
39. Генкин, В. М. Движение абрикосовских вихрей в анизотропных сверхпроводниках / В. М. Генкин, А. С. Мельников // ЖЭТФ. — 1989. — Т. 95. — С. 2170–2174.
40. Ivlev, B. I. Flux-Flow Conductivity in Anisotropic and Layered High- T_c Superconductors / B. I. Ivlev, N. B. Kopnin // [Europhys. Lett.](#) — 1991. — Vol. 15, no. 3. — P. 349.
41. Stewart, G. R. Superconductivity in iron compounds / G. R. Stewart // [Rev. Mod. Phys.](#) — 2011. — Dec. — Vol. 83. — P. 1589–1652.
42. Song, Yoo Jang. Synthesis, anisotropy, and superconducting properties of LiFeAs single crystal / Yoo Jang Song, Jin Soo Ghim, Byeong Hun Min et al. // [Appl. Phys. Lett.](#) — 2010. — Vol. 96, no. 21. — P. 212508.
43. Wang, Hang-Dong. Superconductivity at 32 K and anisotropy in $\text{Ti}_{0.58}\text{Rb}_{0.42}\text{Fe}_{1.72}\text{Se}_2$ crystals / Hang-Dong Wang, Chi-Heng Dong, Zu-Juan Li et al. // [Europhys. Lett.](#) — 2011. — Vol. 93, no. 4. — P. 47004.
44. Chen, G. F. Transport and anisotropy in single-crystalline SrFe_2As_2 and $\text{A}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{Fe}_2\text{As}_2$ (A=Sr, Ba) superconductors / G. F. Chen, Z. Li, J. Dong et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2008. — Dec. — Vol. 78. — P. 224512.
45. Wang, X. F. Anisotropy in the Electrical Resistivity and Susceptibility of Superconducting BaFe_2As_2 Single Crystals / X. F. Wang, T. Wu, G. Wu et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2009. — Mar. — Vol. 102. — P. 117005.

46. Shirai, K. Local transport properties of $\text{PrFeAsO}_{0.7}$ using FIB micro-fabrication technique / K. Shirai, H. Kashiwaya, S. Miura et al. // [Physica C](#). — 2010. — Vol. 470, no. 20. — P. 1473 – 1476. — Proceedings of the 22nd International Symposium on Superconductivity (ISS 2009).
47. Tanatar, M. A. Resistivity anisotropy of AFe_2As_2 (A=Ca, Sr, Ba): Direct versus Montgomery technique measurements / M. A. Tanatar, N. Ni, G. D. Samolyuk et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2009. — Apr. — Vol. 79. — P. 134528.
48. Tanatar, M. A. Anisotropy of the iron pnictide superconductor $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x)_2\text{As}_2$ ($x = 0.074$, $T_c = 23$ K) / M. A. Tanatar, N. Ni, C. Martin et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2009. — Mar. — Vol. 79. — P. 094507.
49. Hao, Z. Viscous flux motion in anisotropic type-II superconductors in low fields / Z. Hao, J. R. Clem // [IEEE Trans. Magn.](#) — 1991. — Vol. 27. — P. 1086–1088.
50. Bulaevskii, L.N. Coexistence of superconductivity and magnetism: Theoretical predictions and experimental results / L.N. Bulaevskii, A.I. Buzdin, M.L. Kulić, S.V. Panjukov // [Advances in Physics](#). — 1985. — Vol. 34, no. 2. — P. 175–261.
51. Fulde, Peter. Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field / Peter Fulde, Richard A. Ferrell // [Phys. Rev.](#) — 1964. — Aug. — Vol. 135. — P. A550–A563.
52. Larkin, A. I. Inhomogeneous State of Superconductors / A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov // [Sov. Phys. JETP](#). — 1964. — Vol. 20. — P. 762.
53. Buzdin, Alexandre. Ferromagnetic superconductors / Alexandre Buzdin, Jacques Flouquet // [Phys. World](#). — 2002. — Jan. — Vol. 15. — P. 41–46.
54. Saxena, S. S. Superconductivity on the border of itinerant-electron ferromagnetism in UGe_2 / S. S. Saxena, P. Agarwal, K. Ahilan et al. // [Nature \(London\)](#). — 2000. — Vol. 406. — P. 587–592.
55. Aoki, Dai. Coexistence of superconductivity and ferromagnetism in URhGe / Dai Aoki, Andrew Huxley, Daniel Ressouche, Eric Braithwaite et al. // [Nature \(London\)](#). — 2001. — Vol. 413. — P. 613–616.
56. Huy, N. T. Superconductivity on the Border of Weak Itinerant Ferromagnetism in UCoGe / N. T. Huy, A. Gasparini, D. E. de Nijs et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2007. — Aug. — Vol. 99. — P. 067006.

57. Paulsen, C. Observation of the Meissner-Ochsenfeld Effect and the Absence of the Meissner State in UCoGe / C. Paulsen, D. J. Hykel, K. Hasselbach, D. Aoki // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2012. — Dec. — Vol. 109. — P. 237001.
58. Nandi, S. Coexistence of superconductivity and ferromagnetism in P-doped EuFe_2As_2 / S. Nandi, W. T. Jin, Y. Xiao et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2014. — Jan. — Vol. 89. — P. 014512.
59. Вонсовский, С.В. Ферромагнитный резонанс: явление резонансного поглощения высокочастотного электромагнитного поля в ферромагнитных веществах / С.В. Вонсовский. Современные проблемы физики. — Москва: Гос. Изд. Физико-Мат. Лит., 1961. — 343 с.
60. Буздин, А. И. Спектр спиновых волн в антиферромагнитных сверхпроводниках / А. И. Буздин // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — Sep. — Vol. 40, no. 5. — P. 193–196.
61. Ng, T. K. Spin and vortex dynamics and electromagnetic propagation in the spontaneous vortex phase / T. K. Ng, C. M. Varma // [Phys. Rev. B.](#) — 1998. — Nov. — Vol. 58. — P. 11624–11630.
62. Braude, V. Excitation of Spin Waves in Superconducting Ferromagnets / V. Braude, E. B. Sonin // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2004. — Sep. — Vol. 93. — P. 117001.
63. Bulaevskii, L. N. Spectroscopy of Magnetic Excitations in Magnetic Superconductors Using Vortex Motion / L. N. Bulaevskii, M. Hruška, M. P. Maley // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2005. — Nov. — Vol. 95. — P. 207002.
64. Shekhter, A. Vortex Viscosity in Magnetic Superconductors Due to Radiation of Spin Waves / A. Shekhter, L. N. Bulaevskii, C. D. Batista // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2011. — Jan. — Vol. 106. — P. 037001.
65. Bulaevskii, Lev N. Prediction of Polaronlike Vortices and a Dissociation Depinning Transition in Magnetic Superconductors: The Example of $\text{ErNi}_2\text{B}_2\text{C}$ / Lev N. Bulaevskii, Shi-Zeng Lin // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2012. — Jul. — Vol. 109. — P. 027001.
66. Bulaevskii, Lev N. Self-induced pinning of vortices in the presence of ac driving force in magnetic superconductors / Lev N. Bulaevskii, Shi-Zeng Lin // [Phys. Rev. B.](#) — 2012. — Dec. — Vol. 86. — P. 224513.
67. Lin, Shi-Zeng. Measuring spectrum of spin wave using vortex dynamics / Shi-Zeng Lin, Lev N. Bulaevskii // [Phys. Rev. B.](#) — 2012. — Apr. — Vol. 85. — P. 134508.

68. Lin, Shi-Zeng. Vortex dynamics in ferromagnetic superconductors: Vortex clusters, domain walls, and enhanced viscosity / Shi-Zeng Lin, Lev N. Bulaevskii, Cristian D. Batista // [Phys. Rev. B](#). — 2012. — Nov. — Vol. 86. — P. 180506.
69. Lin, Shi-Zeng. Enhancement of critical current density in superconducting/magnetic multilayers with slow magnetic relaxation dynamics and large magnetic susceptibility / Shi-Zeng Lin, Lev N. Bulaevskii // [Phys. Rev. B](#). — 2012. — Aug. — Vol. 86. — P. 064523.
70. Bulaevskii, Lev N. Polaron-like vortices, dissociation transition, and self-induced pinning in magnetic superconductors / Lev N. Bulaevskii, Shi-Zeng Lin // [Sov. Phys.-JETP](#). — 2013. — Sep. — Vol. 144. — P. 475.
71. Villegas, J. E. A Superconducting Reversible Rectifier That Controls the Motion of Magnetic Flux Quanta / J. E. Villegas, Sergey Savel'ev, Franco Nori et al. // [Science](#). — 2003. — Vol. 302, no. 5648. — P. 1188–1191.
72. Wördenweber, R. Guidance of vortices and the vortex ratchet effect in high- T_c superconducting thin films obtained by arrangement of antidots / R. Wördenweber, P. Dymashevski, V. R. Misko // [Phys. Rev. B](#). — 2004. — May. — Vol. 69. — P. 184504.
73. Van de Vondel, J. Vortex-Rectification Effects in Films with Periodic Asymmetric Pinning / J. Van de Vondel, C. C. de Souza Silva, B. Y. Zhu et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2005. — Feb. — Vol. 94. — P. 057003.
74. Wu, T. C. Vortex ratchet effect in a niobium film with spacing-graded density of pinning sites / T. C. Wu, Lance Horng, J. C. Wu et al. // [Journal of Applied Physics](#). — 2007. — Vol. 102, no. 3. — P. 033918.
75. Jin, B. B. High-frequency vortex ratchet effect in a superconducting film with a nanoengineered array of asymmetric pinning sites / B. B. Jin, B. Y. Zhu, R. Wördenweber et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2010. — May. — Vol. 81. — P. 174505.
76. de Souza Silva, Clécio C. Vortex ratchet effects in films with a periodic array of antidots / Clécio C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, B. Y. Zhu et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2006. — Jan. — Vol. 73. — P. 014507.
77. Шмидт, В. В. Введение в физику сверхпроводников / В. В. Шмидт. — 2-е, испр. и доп. изд. — Москва: МЦНМО, 2000. — 402 с.

78. Thuneberg, E. V. Pinning of a Vortex Line to a Small Defect in Superconductors / E. V. Thuneberg, J. Kurkijärvi, D. Rainer // [Phys. Rev. Lett.](#) — 1982. — Jun. — Vol. 48. — P. 1853–1856.
79. Mel'nikov, A. S. Electronic structure of vortices pinned by columnar defects / A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, M. N. Zubarev // [Phys. Rev. B.](#) — 2009. — Apr. — Vol. 79. — P. 134529.
80. Mel'nikov, A.S. Abrikosov vortex escape from a columnar defect as a topological electronic transition in a vortex core / A.S. Mel'nikov, A.V. Samokhvalov // [JETP Letters.](#) — 2012. — Vol. 94, no. 10. — P. 759–763.
81. Горьков, Л. П. Движение вихрей и электросопротивление сверхпроводников второго рода в магнитном поле / Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин // [Успехи физических наук.](#) — 1975. — Т. 116, № 7. — С. 413–448.
82. Тихонов, Андрей Николаевич. Уравнения математической физики / Андрей Николаевич Тихонов, Александр Андреевич Самарский. — 2-е изд., испр. и доп. изд. — Москва: Гостехиздат, 1953.
83. Vasyukov, D. A scanning superconducting quantum interference device with single electron spin sensitivity / D. Vasyukov, Y. Anahory, L. Embon et al. // [Nature Nanotechnology.](#) — 2013. — Sep. — Vol. 8. — P. 639–644.
84. Tinkham, M. Viscous Flow of Flux in Type-II Superconductors / M. Tinkham // [Phys. Rev. Lett.](#) — 1964. — Dec. — Vol. 13. — P. 804–807.
85. Prigogine, I. Introduction to thermodynamics of irreversible processes / I. Prigogine. — New York: Interscience Publishers, 1968. — 147 p.
86. Watts-Tobin, R.J. Nonequilibrium theory of dirty, current-carrying superconductors: phase-slip oscillators in narrow filaments near T_c / R.J. Watts-Tobin, Y. Krähenbühl, L. Kramer // [J. Low Temp. Phys.](#) — 1981. — Vol. 42, no. 5-6. — P. 459–501.
87. Gilbert, T.L. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials / T.L. Gilbert // [IEEE Trans. Magn.](#) — 2004. — Nov. — Vol. 40, no. 6. — P. 3443–3449.
88. Braude, V. Microwave response and spin waves in superconducting ferromagnets / V. Braude // [Phys. Rev. B.](#) — 2006. — Aug. — Vol. 74. — P. 054515.

89. Logoboy, N. A. Two-dimensional domain-wall magnon waves in superconducting ferromagnets / N. A. Logoboy, E. B. Sonin // [Phys. Rev. B](#). — 2007. — Apr. — Vol. 75. — P. 153206.
90. Braude, V. Surface spin waves in superconducting and insulating ferromagnets / V. Braude, E. B. Sonin // *Europhys. Lett.* — 2005. — Vol. 72, no. 1. — P. 124.
91. Dao, Vu Hung. Size of stripe domains in a superconducting ferromagnet / Vu Hung Dao, Sébastien Burdin, Alexandre Buzdin // [Phys. Rev. B](#). — 2011. — Oct. — Vol. 84. — P. 134503.
92. Shick, Alexander B. Electronic and magnetic structure of URhGe / Alexander B. Shick // [Phys. Rev. B](#). — 2002. — Apr. — Vol. 65. — P. 180509.
93. Huy, N. T. Unusual Upper Critical Field of the Ferromagnetic Superconductor UCoGe / N. T. Huy, D. E. de Nijs, Y. K. Huang, A. de Visser // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2008. — Feb. — Vol. 100. — P. 077002.
94. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. — 3-е изд. изд. — Москва: "Наука," Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1982. — Т. 8 из Теоретическая физика. — 661 с.
95. Osborn, J. A. Demagnetizing Factors of the General Ellipsoid / J. A. Osborn // [Phys. Rev.](#) — 1945. — Jun. — Vol. 67. — P. 351–357.
96. Уайт, Р. Квантовая теория магнетизма / Р. Уайт. — издание второе, исправленное и дополненное изд. — Москва: Мир, 1985. — 304 с.
97. Buzdin, A. I. Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures / A. I. Buzdin // [Rev. Mod. Phys.](#) — 2005. — Sep. — Vol. 77. — P. 935–976.
98. Kokubo, N. Lattice orientations of driven vortex matter in amorphous MoGe films / N. Kokubo, T. Nishizaki, B. Shinozaki, P.H. Kes // [Physica C](#). — 2010. — Vol. 470, no. 1. — P. 43 – 47.
99. Okuma, S. Quantum melting and lattice orientation of driven vortex matter / S. Okuma, H. Imaizumi, D. Shimamoto, N. Kokubo // [Phys. Rev. B](#). — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 064520.
100. Charalambous, D. Vortex motion in type-II superconductors probed by muon spin rotation and small-angle neutron scattering / D. Charalambous, P. G. Kealey, E. M. Forgan et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2002. — Aug. — Vol. 66. — P. 054506.

101. Fangohr, Hans. Vortex dynamics in two-dimensional systems at high driving forces / Hans Fangohr, Simon J. Cox, Peter A. J. de Groot // [Phys. Rev. B.](#) — 2001. — Jul. — Vol. 64. — P. 064505.
102. Chandran, Mahesh. Dynamic transition in driven vortices across the peak effect in superconductors / Mahesh Chandran, R. T. Scalettar, G. T. Zimányi // [Phys. Rev. B.](#) — 2003. — Feb. — Vol. 67. — P. 052507.
103. Vodolazov, D. Y. Rearrangement of the vortex lattice due to instabilities of vortex flow / D. Y. Vodolazov, F. M. Peeters // [Phys. Rev. B.](#) — 2007. — Jul. — Vol. 76. — P. 014521.
104. Nakai, N. Simulation study for the orientation of the driven vortex lattice in an amorphous superconductor / N. Nakai, N. Hayashi, M. Machida // [Physica C.](#) — 2009. — Vol. 469, no. 15–20. — P. 1106 – 1109. — Proceedings of the 21st International Symposium on Superconductivity (ISS 2008).
105. Schmid, Albert. On the theory of vortex motion in an inhomogeneous superconducting film / Albert Schmid, Wolfgang Hauger // [J. Low Temp. Phys.](#) — 1973. — Vol. 11, no. 5-6. — P. 667–685.
106. Li, Dingping. Structure and orientation of the moving vortex lattice in clean type-II superconductors / Dingping Li, Andrey M. Malkin, Baruch Rosenstein // [Phys. Rev. B.](#) — 2004. — Dec. — Vol. 70. — P. 214529.
107. Kawano-Furukawa, H. Gap in KFe_2As_2 studied by small-angle neutron scattering observations of the magnetic vortex lattice / H. Kawano-Furukawa, C. J. Bowell, J. S. White et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2011. — Jul. — Vol. 84. — P. 024507.
108. Ларкин, А. И. Влияние неоднородностей на структуру смешанного состояния сверхпроводников / А. И. Ларкин // [ЖЭТФ.](#) — 1970. — Т. 58. — С. 1466.
109. Iavarone, M. Effect of magnetic impurities on the vortex lattice properties in NbSe_2 single crystals / M. Iavarone, R. Di Capua, G. Karapetrov et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2008. — Nov. — Vol. 78. — P. 174518.
110. Laver, M. Structure and degeneracy of vortex lattice domains in pure superconducting niobium: A small-angle neutron scattering study / M. Laver, C. J. Bowell, E. M. Forgan et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2009. — Jan. — Vol. 79. — P. 014518.

111. Eskildsen, M. R. Vortices in superconducting $\text{Ba}(\text{Fe}_{0.93}\text{Co}_{0.07})_2\text{As}_2$ studied via small-angle neutron scattering and Bitter decoration / M. R. Eskildsen, L. Ya. Vinnikov, T. D. Blasius et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2009. — Mar. — Vol. 79. — P. 100501.
112. Hanson, H. A. Structural evidence for an edge-contaminated vortex phase in a Nb crystal using neutron diffraction / H. A. Hanson, X. Wang, I. K. Dimitrov et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2011. — Jul. — Vol. 84. — P. 014506.
113. Куприянов, М. Ю. СВЧ импеданс сверхпроводников в смешанном состоянии / М. Ю. Куприянов, К. К. Лихарев // ЖЭТФ. — 1975. — Т. 68, № 4. — С. 1506.
114. Bauer, E. D. Coexistence of superconductivity and ferromagnetism in polycrystalline UGe_2 / E. D. Bauer, R. P. Dickey, V. S. Zapf, M. B. Maple // *J. Phys.: Condens. Matter*. — 2001. — Vol. 13, no. 33. — P. L759.
115. Aoki, Dai. First Observation of Quantum Oscillations in the Ferromagnetic Superconductor UCoGe / Dai Aoki, Ilya Sheikin, Tatsuma D. Matsuda et al. // [J. Phys. Soc. Jpn.](#) — 2011. — Vol. 80, no. 1. — P. 013705.
116. Yelland, E. A. High-field superconductivity at an electronic topological transition in URhGe / E. A. Yelland, J. M. Barraclough, W. Wang et al. // *Nat. Phys.* — 2011. — Vol. 7. — P. 890 – 894.
117. Mel'nikov, A. S. Dynamics of two-dimensional pancake vortices in layered superconductors / A. S. Mel'nikov // [Phys. Rev. B](#). — 1996. — Jan. — Vol. 53. — P. 449–456.
118. Mel'nikov, A. S. Inertial Mass and Viscosity of Tilted Vortex Lines in Layered Superconductors / A. S. Mel'nikov // [Phys. Rev. Lett.](#) — 1996. — Sep. — Vol. 77. — P. 2786–2789.
119. Habermeier, H.-U. Cuprate/manganite superlattices: A model system for a bulk ferromagnetic superconductor / H.-U. Habermeier, G. Cristiani, R.K. Kremer et al. // [Physica C: Superconductivity](#). — 2001. — Vol. 364–365, no. 0. — P. 298–304.
120. Sefrioui, Z. Ferromagnetic/superconducting proximity effect in $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3/\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ superlattices / Z. Sefrioui, D. Arias, V. Peña et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2003. — Jun. — Vol. 67. — P. 214511.
121. Holden, Todd. Proximity induced metal-insulator transition in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7/\text{La}_{2/3}\text{Ca}_{1/3}\text{MnO}_3$ superlattices / Todd Holden, H.-U. Habermeier, G. Cristiani et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2004. — Feb. — Vol. 69. — P. 064505.

122. Peña, V. Giant Magnetoresistance in Ferromagnet/Superconductor Superlattices / V. Peña, Z. Sefrioui, D. Arias et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2005. — Feb. — Vol. 94. — P. 057002.
123. Malik, V. K. Pulsed laser deposition growth of heteroepitaxial $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7/\text{La}_{0.67}\text{Ca}_{0.33}\text{MnO}_3$ superlattices on NdGaO_3 and $\text{Sr}_{0.7}\text{La}_{0.3}\text{Al}_{0.65}\text{Ta}_{0.35}\text{O}_3$ substrates / V. K. Malik, I. Marozau, S. Das et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2012. — Feb. — Vol. 85. — P. 054514.
124. Hoppler, J. Giant superconductivity-induced modulation of the ferromagnetic magnetization in a cuprate–manganite superlattice / J. Hoppler, J. Stahn, Ch. Niedermayer et al. // *Nat. Mater.* — 2009. — Vol. 8. — P. 315–319.
125. Stahn, J. Magnetic proximity effect in perovskite superconductor/ferromagnet multilayers / J. Stahn, J. Chakhalian, Ch. Niedermayer et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2005. — Apr. — Vol. 71. — P. 140509.
126. Hoffmann, A. Suppressed magnetization in $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3/\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ superlattices / A. Hoffmann, S. G. E. te Velthuis, Z. Sefrioui et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2005. — Oct. — Vol. 72. — P. 140407.
127. Satapathy, D. K. Magnetic Proximity Effect in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7/\text{La}_{2/3}\text{Ca}_{1/3}\text{MnO}_3$ and $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7/\text{LaMnO}_{3+\delta}$ Superlattices / D. K. Satapathy, M. A. Uribe-Laverde, I. Marozau et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2012. — May. — Vol. 108. — P. 197201.
128. Uribe-Laverde, M. A. Depth profile of the ferromagnetic order in a $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7/\text{La}_{2/3}\text{Ca}_{1/3}\text{MnO}_3$ superlattice on a LSAT substrate: A polarized neutron reflectometry study / M. A. Uribe-Laverde, D. K. Satapathy, I. Marozau et al. // [Phys. Rev. B.](#) — 2013. — Mar. — Vol. 87. — P. 115105.
129. Mathur, N. D. Magnetic anisotropy of thin film $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ on untwinned paramagnetic NdGaO_3 (001) / N. D. Mathur, M.-H. Jo, J. E. Evetts, M. G. Blamire // [J. Appl. Phys.](#) — 2001. — Vol. 89, no. 6. — P. 3388–3392.
130. Lloyd, S. J. Magnetic domain-wall width in $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ thin films measured using Fresnel imaging / S. J. Lloyd, N. D. Mathur, J. C. Loudon, P. A. Midgley // [Phys. Rev. B.](#) — 2001. — Oct. — Vol. 64. — P. 172407.
131. Mass, Nir. Sharp gap edge and determination of the fermi velocity in $\text{Y}_1\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ by point contact spectroscopy / Nir Mass, D. Ilzyer, G. Deutscher et al. // [J. Supercond.](#) — 1992. — Vol. 5, no. 2. — P. 191–194.

132. Ларкин, А. И. Нелинейная проводимость сверхпроводников в смешанном состоянии / А. И. Ларкин, Ю. Н. Очинников // ЖЭТФ. — 1975. — Т. 68, № 5. — С. 1915 – 1927.
133. Babić, D. Flux-flow instabilities in amorphous Nb_{0.7}Ge_{0.3} microbridges / D. Babić, J. Bentner, C. Sürgers, C. Strunk // *Phys. Rev. B*. — 2004. — Mar. — Vol. 69. — P. 092510.
134. Kunchur, Milind N. Unstable Flux Flow due to Heated Electrons in Superconducting Films / Milind N. Kunchur // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Sep. — Vol. 89. — P. 137005.
135. Doettinger, S. G. Electronic instability during vortex motion in cuprate superconductors. Regime of low and high magnetic fields / S. G. Doettinger, R. P. Huebener, A. Kühle // *Physica C*. — 1995. — Vol. 251, no. 3–4. — P. 285 – 289.
136. Klein, W. Nonlinearity in the flux-flow behavior of thin-film superconductors / W. Klein, R. P. Huebener, S. Gauss, J. Parisi // *J. Low Temp. Phys.* — 1985. — Vol. 61, no. 5-6. — P. 413–432.
137. Torokhtii, K. Microwave Properties of Nb/PdNi/Nb Trilayers / K. Torokhtii, N. Pompeo, C. Meneghini et al. // *J. Supercond. Nov. Magn.* — 2013. — Vol. 26, no. 3. — P. 571–574.
138. Shapira, Y. Magnetoacoustic Attenuation in High-Field Superconductors / Y. Shapira, L. J. Neuringer // *Phys. Rev.* — 1967. — Feb. — Vol. 154. — P. 375–385.
139. Sonin, E. B. Surface impedance of a type-II superconductor in dc magnetic fields parallel and tilted to the superconductor border / E. B. Sonin, K. B. Traito // *Phys. Rev. B*. — 1994. — Nov. — Vol. 50. — P. 13547–13556.
140. Klemm, R. A. Layered Superconductors / R. A. Klemm. — Oxford: Oxford University Press, 2012. — Vol. 1.
141. Jacobs, A. E. Interaction of Vortices in Type-II Superconductors near T_c / A. E. Jacobs // *Phys. Rev. B*. — 1971. — Nov. — Vol. 4. — P. 3029–3034.
142. Kramer, Lorenz. Interaction of vortices in type II superconductors and the behavior near H_{c1} at arbitrary temperature / Lorenz Kramer // *Z. Phys.* — 1973. — Vol. 258, no. 5. — P. 367–380.
143. Leung, M.C. Attractive interaction between vortices in type-II superconductors at arbitrary temperatures / M.C. Leung // *J. Low Temp. Phys.* — 1973. — Vol. 12, no. 1-2. — P. 215–235.
144. Brandt, E. H. Microscopic theory of clean type-II superconductors in the entire field-temperature plane / E. H. Brandt // *Phys. Status Solidi B*. — 1976. — Vol. 77, no. 1. — P. 105–119.

145. Klein, U. Microscopic calculations on the vortex state of type II superconductors / U. Klein // [J. Low Temp. Phys.](#) — 1987. — Vol. 69, no. 1-2. — P. 1–37.
146. Kumpf, U. Magnetisierungskurven von Supraleitern zweiter Art mit kleinen Ginzburg-Landau-Parametern / U. Kumpf // [Phys. Status Solidi \(b\)](#). — 1971. — Bd. 44, H. 2. — S. 829–843.
147. Auer, J. Magnetic Behavior of Type-II Superconductors with Small Ginzburg-Landau Parameters / J. Auer, H. Ullmaier // [Phys. Rev. B](#). — 1973. — Jan. — Vol. 7. — P. 136–145.
148. Brandt, Ernst Helmut. Attractive Vortex Interaction and the Intermediate-Mixed State of Superconductors / Ernst Helmut Brandt, Mukunda P. Das // [J. Supercond. Nov. Magn.](#) — 2011. — Vol. 24, no. 1-2. — P. 57–67.
149. Moshchalkov, Victor. Type-1.5 Superconductivity / Victor Moshchalkov, Mariela Menghini, T. Nishio et al. // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2009. — Mar. — Vol. 102. — P. 117001.
150. Garaud, Julien. Vortex coalescence and type-1.5 superconductivity in Sr_2RuO_4 / Julien Garaud, Daniel F. Agterberg, Egor Babaev // [Phys. Rev. B](#). — 2012. — Aug. — Vol. 86. — P. 060513.
151. Babaev, Egor. Semi-Meissner state and neither type-I nor type-II superconductivity in multicomponent superconductors / Egor Babaev, Martin Speight // [Phys. Rev. B](#). — 2005. — Nov. — Vol. 72. — P. 180502.
152. Koshelev, A. E. Mixed State of a Dirty Two-Band Superconductor: Application to MgB_2 / A. E. Koshelev, A. A. Golubov // [Phys. Rev. Lett.](#) — 2003. — Apr. — Vol. 90. — P. 177002.
153. Buzdin, A. I. Penetration of inclined vortices into layered superconductors / A. I. Buzdin, A. Y. Simonov // [JETP Letters](#). — 1990. — Feb. — Vol. 51, no. 3. — P. 191–195.
154. Kogan, V. G. Interaction of vortices in uniaxial superconductors / V. G. Kogan, N. Nakagawa, S. L. Thiemann // [Phys. Rev. B](#). — 1990. — Aug. — Vol. 42. — P. 2631–2634.
155. Grishin, A. M. Magnetic field inversion and vortex chains in anisotropic superconductors / A. M. Grishin, A. Yu. Martinovich, S. V. Yampol'skiy // [Sov. Phys. JETP](#). — 1990. — Vol. 70. — P. 1089.
156. Buzdin, A.I. Magnetization of anisotropic superconductors in the tilted magnetic field / A.I. Buzdin, A. Yu. Simonov // [Physica C](#). — 1991. — Vol. 175, no. 1-2. — P. 143 – 155.

157. Buzdin, A. I. Attraction of inclined vortices in magnetic superconductors / A. I. Buzdin, S. S. Krotov, D. A. Kuptsov // [Physica C](#). — 1991. — Vol. 175, no. 1 - 2. — P. 42 – 46.
158. Bending, Simon J. Vortex chains in anisotropic superconductors / Simon J Bending, Matthew J W Dodgson // *J. Phys.: Condens. Matter*. — 2005. — Vol. 17, no. 35. — P. R955.
159. Dichtel, K. A nonlocal model of a single flux line / K. Dichtel // [Phys. Lett. A](#). — 1971. — Vol. 35, no. 4. — P. 285 – 286.
160. Eilenberger, Gert. The structure of single vortices in type II superconductors / Gert Eilenberger, Helmut Büttner // [Z. Phys.](#) — 1969. — Vol. 224, no. 4. — P. 335–352.
161. Xu, X. B. Phase diagram of vortex matter of type-II superconductors / X. B. Xu, H. Fangohr, S. Y. Ding et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2011. — Jan. — Vol. 83. — P. 014501.
162. Xu, X. B. Vortex dynamics for low- κ type-II superconductors / X. B. Xu, H. Fangohr, Z. H. Wang et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2011. — Jul. — Vol. 84. — P. 014515.
163. Lin, Shi-Zeng. Vortex states and the phase diagram of a multiple-component Ginzburg-Landau theory with competing repulsive and attractive vortex interactions / Shi-Zeng Lin, Xiao Hu // [Phys. Rev. B](#). — 2011. — Dec. — Vol. 84. — P. 214505.
164. Zhao, H. J. Analysis of pattern formation in systems with competing range interactions / H. J. Zhao, V. R. Misko, F. M. Peeters // *New Journal of Physics*. — 2012. — Vol. 14, no. 6. — P. 063032.
165. Reichhardt, C. Statics and Dynamics of Vortex Matter with Competing Repulsive and Attractive Interactions / C. Reichhardt, J. Drocco, C.J. Olson Reichhardt, A.R. Bishop // [J. Supercond. Nov. Magn.](#) — 2013. — Vol. 26, no. 5. — P. 2041–2044.
166. Koronovskyy, V. E. Non linear electromagneto-optical effect in epitaxial films of yttrium iron garnet / V. E Koronovskyy // *Functional materials*. — 2006. — Vol. 13. — P. 515–518.
167. Trunk, T. Domain wall structure in Permalloy films with decreasing thickness at the Bloch to Néel transition / T. Trunk, M. Redjda, A. Kákay et al. // [J. Appl. Phys.](#) — 2001. — Vol. 89, no. 11. — P. 7606–7608.
168. Gubin, A. I. Dependence of magnetic penetration depth on the thickness of superconducting Nb thin films / A. I. Gubin, K. S. Il'in, S. A. Vitusevich et al. // [Phys. Rev. B](#). — 2005. — Aug. — Vol. 72. — P. 064503.