

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт физики твердого тела Российской академии наук

На правах рукописи

Бисти Вероника Евгеньевна

**Коллективные возбуждения
в многокомпонентных двумерных электронных системах**

Специальность 01.04.07 - физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Черноголовка 2021

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Коллективные возбуждения в квазидвумерных электронных системах в магнитном поле.	13
1.1. Обзор литературы.	13
1.2. Межподзонные коллективные возбуждения спиновой и зарядовой плотности в квантовых ямах с несколькими уровнями размерного квантования.	20
1.2.1. Межподзонные возбуждения в сильном магнитном поле.	20
1.2.2. Возбужденные состояния межподзонного экситона.	26
1.3. Комбинированные спин-флип возбуждения при учете электрон-электронных корреляций.	32
1.4. Спиновые возбуждения электронно-примесных комплексов в сильном магнитном поле.	36
1.5. Выводы к главе 1.	42
Глава 2. Плазменные и магнитоплазменные возбуждения в двойных квантовых ямах.	44
2.1. Обзор литературы.	44
2.2. Влияние пространственной асимметрии системы на спектр и дисперсионные свойства плазменных возбуждений в туннельно связанных двуслойных электронных системах.	45
2.3. Акустические и оптические плазмоны в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле.	53
2.4. Влияние пространственной асимметрии на магнитоплазмоны и магнитоэкситоны в двуслойной электронной системе со слабой туннельной связью.	59
2.5. Взаимодействие межподзонных и плазменных возбуждений в двойных асимметричных полупроводниковых слоях.	65
2.6. Выводы к главе 2 .	69

Глава 3. Магнитоэкситоны в чистом двуслойном графене.	71
3.1. Обзор литературы.	71
3.2. Уровни Ландау в двуслойном графене при учете слоевой и электронно-дырочной асимметрии.	77
3.3. Циклотронные переходы между уровнями Ландау в сильном перпендикулярном магнитном поле при учете электрон-электронного взаимодействия, слоевой и электронно-дырочной асимметрии.	78
3.2.1. Кулоновское взаимодействие и магнитоэкситоны.	78
3.2.2. Асимметричный бислой без e-h асимметрии.	83
3.2.3. Асимметричный бислой при учете электронно-дырочной асимметрии.	84
3.2.4. Полносимметричный случай.	86
3.2.5. Симметричный бислой с электронно-дырочной асимметрией.	87
3.3. Выводы к главе 3.	88
Глава 4. Уровни Ландау в квазидвумерных структурах с сильным спин-орбитальным взаимодействием.	90
4.1. Обзор литературы.	90
4.2. Спектры уровней Ландау дырок в узкой квантовой яме при учете спин-орбитального взаимодействия и непараболичности.	92
4.3. Циклотронные энергии и циклотронные массы дырок в квазиклассическом случае.	97
4.4. Квазидвумерные дырки в наклонном магнитном поле.	104
4.5. Влияние одноосной деформации вдоль слоя на положение уровней Ландау в двумерном дырочном канале.	108
4.6. Выводы к главе 4 .	114
Заключение.	115
Литература.	118

Введение

Исследование низкоразмерных, особенно двумерных и квазидвумерных электронных систем вызывает устойчивый интерес исследователей. Примером могут служить открытие целочисленного и дробного квантового эффекта Холла и графеновых структур. Особенностью рассматриваемых систем является чрезвычайное богатство электронного спектра и, как следствие, наличие разных типов носителей заряда (их многокомпонентность). Примерами многокомпонентных электронных систем являются двойные квантовые ямы, обладающие спиновой и изоспиновой (слоевой или подзонной) степенями свободы, квантовые ямы в сильном магнитном поле с несколькими заполненными уровнями Ландау, двумерные углеродные системы - графены, характеризующиеся двумя долинами, двумя подрешетками и числом слоев, а также давно известные электронно-дырочные системы. В таких системах особенно важна роль межэлектронного кулоновского взаимодействия, определяющего как основное состояние, так и энергетический спектр возбуждений.

Цели работы

Информацию об исследуемых системах, их основном состоянии, роли кулоновского взаимодействия можно получить, изучая коллективные возбуждения. Изучение спектров коллективных возбуждений многокомпонентных электронных систем в двумерных полупроводниковых и углеродных структурах является основной целью проделанной работы.

Актуальность работы

Низкоразмерные системы являются основой современной микроэлектроники, прогресс которой за последние пятьдесят лет впечатляет. Теоретическое исследование низкоразмерных систем в 70-80 годы прошлого века казалось академическим и далеким от применения, но дальнейший прогресс технологии вызвал новую волну интереса к теории низкоразмерных электронных и дырочных систем. Появление все новых и новых объектов требует нового теоретического описания. Исследование спектров коллективных возбуждений, содержащих информацию о структуре и взаимодействии элементарных возбуждений и позволяющих установить связи с макроскопическими характеристиками исследу-

емых объектов, делает эту тему несомненно актуальной.

Научная новизна работы и ее достоверность.

Результаты работы получены впервые. Были даны новые предсказания для проведения экспериментов или даны новые объяснения полученных экспериментальных данных, развиты теоретические методы применительно к новым объектам исследования.

Достоверность полученных результатов основывается на надежности и обоснованности применяемых методов. Результаты согласуются с экспериментальными данными, как полученными ранее, так и выполненными в подтверждение теоретических предсказаний. Также имеется согласие с другими теоретическими работами в той части, где результаты перекрываются.

Полученные результаты позволили обнаружить или правильно понять наблюдаемые результаты, которые могут быть применены или уже применены в приборах.

Личный вклад автора

Значительная часть работ выполнена без соавторов. Вторая значительная часть работ выполнена в соавторстве с экспериментаторами, где автору принадлежит вся теоретическая часть работы, включая предложенную интерпретацию результатов, теоретическую постановку задачи и выполнение расчетов. В теоретических работах, выполненных в соавторстве, автору также принадлежит решающий вклад в постановку задачи, выбор методов и проведение расчетов.

Апробация работы

Представленные в диссертации результаты были доложены на международных конференциях:

Electronic Properties of Two-dimensional Systems EP2DS-20 (Wroclaw, Poland, 2013),

20th International Conference on High Magnetic Fields in Semiconductor Physics HMF-20 (Chamonix Mont-Blanc, France, 2012),

International School and Workshop on Electronic Crystals ECRYS-2011 (Cargese, Corse, France, 2011),

19th International Conference on Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics and Nanotechnology HMF-19 (Fukuoka, Japan, 2010),

International Workshop "NanoPeter-2010"(Sankt-Peterburg, Russia, 2010),
International workshop on Interactions, Disorder and Topology in Quantum Hall Systems (Dresden, Germany, 2010),
High Magnetic Fields in Semiconductor Physics and Nanotechnology HMF-18 (Sao Pedro, Brazil, 2008)
ICTP Conference Graphene Week 2008 (Trieste, Italy, 2008),
Quantum Phases and Excitations in Quantum Hall Systems (Dresden, Germany, 2008),
Electronic Properties of Two-dimensional Systems EP2DS-17 (Genova, Italy, 2007),
High Magnetic Fields in Semiconductor Physics HMF-17 (Wuerzburg, Germany, 2006), High Magnetic Fields in Semiconductor Physics HMF-12 (Wuerzburg, Germany, 1996);
на III, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI Российских конференциях по физике полупроводников (Москва 1997, Нижний Новгород 2001, Санкт-Петербург 2003, Ершово 2005, Екатеринбург 2007, Новосибирск 2009, Нижний Новгород 2011, Санкт-Петербург 2013);
на семинарах в ИФТТ РАН (Черноголовка), в университете Париж-Юг (Орсэ, Франция), в Международном центре теоретической физики (Триест, Италия).

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Для системы электронов в квантовой яме на основе GaAs с несколькими уровням размерного квантования рассмотрены спектры межподзонных коллективных возбуждений спиновой и зарядовой плотности в пределе сильного магнитного поля. Показано, что как для переходов без изменения уровня Ландау, так и для бернштейновских мод все возбуждения имеют многомодовую структуру, число мод определяется фактором заполнения. Впервые полученный результат появления новых мод вблизи целочисленных факторов заполнения позволил дать правильное объяснение экспериментально наблюдаемой линии, ранее интерпретируемой как линия одночастичных возбуждений.

2. Для системы электронов в квантовой яме на основе GaAs с несколькими уровням размерного квантования без магнитного поля показана возможность

существования межподзонных коллективных возбуждений спиновой и зарядовой плотности с различными значениями проекции момента на нормаль к плоскости движения.

3. Для системы двумерных электронов показано влияние электрон-электронных корреляций на энергию комбинированного спин-флип возбуждения в ультраквантовом пределе при факторах заполнения от 0 до 1.

4. В квантовой яме на основе GaAs в пределе сильного магнитного поля проведен расчет энергии спиновых возбуждений примесных комплексов, состоящих из двух электронов в квантовой яме и неподвижной заряженной примеси, и доказана интерфейсная природа заряженных примесей.

5. Для системы электронов в двойных квантовых ямах со слабой туннельной связью исследовано влияние пространственной асимметрии системы на спектр, дисперсионные и физические свойства плазменных возбуждений. Показано, что в области энергий, превышающих параметр туннелирования, свойства плазменных возбуждений в системах с различной пространственной симметрией аналогичны, а в длинноволновом пределе влияние асимметрии определяющее.

6. Для системы электронов в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле показано, что энергия коллективных возбуждений зарядовой плотности (акустических и оптических фононов) зависит от взаимной ориентации магнитного поля и импульса возбуждения, эта зависимость определяется влиянием конечной ширины квантовых ям.

7. Рассмотрены коллективные возбуждения зарядовой и спиновой плотности (магнитоплазмоны и магнитоэкситоны) в двуслойной электронной системе с управляемой симметрией в сильном перпендикулярном магнитном поле. Показано, что существует изспиновое синглетное возбуждение (для возбуждений зарядовой плотности это оптический плазмон), не зависящее от симметрии системы, и изоспиновый триплет, энергия которого определяется параметрами асимметрии и туннелирования и разницей в энергиях внутрислоевого и межслоевого магнитоэкситонов.

8. Изучалось взаимодействие межподзонных экситонов и оптических плазмонов с близкими энергиями в зависимости от параметров асимметрии и туннелирования. Получено аналитическое выражение для величины расщепления энергий возбуждений и соответствующего импульса в асимметричных слоях со

слабым туннелированием в зависимости от параметров двойной квантовой ямы.

9. Для электронов в чистом двуслойном графене рассмотрены циклотронные переходы в сильном магнитном поле. Показано, что происходит расщепление линии циклотронного резонанса, для разных долин энергии циклотронных переходов различны. При учете кулоновского взаимодействия, слабой асимметрии слоев графена и электронно-дырочной асимметрии разница в энергиях обусловлена в малых полях электронно-дырочной асимметрией, а в сильных магнитных полях определяется электрон-электронным взаимодействием.

10. Исследовались особенности электронного спектра в двумерных дырочных каналах в Si и GaAs в перпендикулярном магнитном поле. В узкой квантовой яме при учете спин-орбитального взаимодействия и непараболичности получены спектры уровней Ландау дырок, в квазиклассическом случае получены выражения для циклотронных энергий и циклотронных масс.

11. Для двумерных дырочных каналов в GaAs в сильном наклонном магнитном поле вычислены значения эффективных масс дырок на различных уровнях Ландау для квантования движения электронов вдоль направления магнитного поля.

12. Изучалось влияние одноосной деформации вдоль слоя двумерных дырок в Si на положение уровней Ландау; показано, что линейная по деформации поправка к энергии уровней Ландау возникает только для двумерного канала на поверхности (110).

Список публикаций по теме диссертации

A1. В.Е. Бисти. Межподзонные коллективные возбуждения в квазидвумерных системах в сильном магнитном поле // Письма в ЖЭТФ.-1999.-Т.69.-В.8.-С.543-547.

A2. В.Е. Бисти. Структура межподзонных коллективных возбуждений в квазидвумерных системах в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ.-2001.- Т.73.- В.1.- С.25-28.

A3. В.Е. Бисти. Возбужденные состояния межподзонного экситона // ФТТ.-2002.- Т.44.- В.12.-С.2220-2224.

A4. А.С. Журавлев, Л.В. Кулик, И.В. Кукушкин, В.Е. Кирпичев, В.Е.Бисти. Циклотронная спин-флип мода в ультраквантовом пределе // Письма в ЖЭТФ.-

2007.- Т.85. -В. 2.- С.128-131.

А5. А.С. Журавлев, Л.В. Кулик, В.Е.Бисти, И.К. Дроздов, В.Е. Кирпичев, И.В. Кукушкин. Интерфейсные D- комплексы в двумерной электронной системе // Письма в ЖЭТФ.-2010.-Т.92.-В. 9.-С.672-677.

А6. В.Е. Бисти, В.Е. Кирпичев, Л.В. Кулик, И.В. Кукушкин. Дисперсионные свойства плазменных возбуждений в туннельно связанных двухслойных электронных системах // Письма в ЖЭТФ.-2006.- Т.83.-В.6.-С.300-304.

А7. С.В. Товстоног, В.Е. Бисти. Плазмоны в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле // Письма в ЖЭТФ 78.- 2003.-Т.78.- В.11.- С.1237-1241.

А8. V.E. Bisti. Magnetoplasmons in symmetry driven bilayer electron system // International Journal of Modern Physics B.-2007.- Vol. 21.- Nos.8-9.- P.1555-1558.

А9. V.E. Bisti. Charge and spin density excitations in symmetry driven bilayer electron system in high magnetic field // Physica E.-2008.- Vol.40.- P.1415-1417.

А10. V.E. Bisti. Interaction of intersubband and plasmon excitations in asymmetric semiconductor bilayers // Physica E.-2011.- Vol.43.- P.1398-1399.

А11. V.E. Bisti, N.N. Kirova. Charge density excitations in bilayer graphene in high magnetic field // Письма в ЖЭТФ.- 2009.- Т.90.- В.2.- С.130-133.

А12. V.E. Bisti, N.N. Kirova. Coulomb interaction and electron-hole asymmetry in cyclotron resonance of bilayer graphene in a high magnetic field // Phys. Rev. B.- 20011.- Vol.84.- No.15.- P.15543(6).

А13. В.Е. Бисти. Магнитоэкситоны в графене // Письма в ЖЭТФ.-2013.- Т.98.- В.1.- С.57-65.

А14. V.E. Bisti. Landau levels of holes in a two-dimensional channel // Superlattices and Microstructures.-1991.- Vol.10.- No.4.- P.485-488.

А15. М.Н. Ханнанов, И.В. Кукушкин, В.Е. Бисти, Ю.А. Нефедов, С.И. Губарев. Измерение циклотронных масс спин-орбитально расщепленных квазидвумерных дырок в узких квантовых ямах GaAs(001) // ЖЭТФ.- 2008.- Т.134.- В.3.- С.1-10.

А16. В.Е. Бисти, В.И. Фалько. Квазидвумерные дырки в наклонном магнитном поле // ФТТ.- 1992.- Т.34.- В.5.- С.1580-1586.

А17. В.Е. Бисти. Влияние деформации на спиновое расщепление в квазидвумерных дырочных системах // ФТТ.- 1998.- Т.40.- В.3.- С.546-549.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, включающего список основных публикаций автора по теме диссертации из 17 наименований, четырех глав, заключения и списка литературы.

Краткое содержание диссертации.

Во введении сформулированы цели работы, обоснованы актуальность темы, научная новизна, достоверность полученных результатов и их апробация, представлены основные положения, выносимые на защиту, структура диссертации и список основных публикаций по теме диссертационной работы.

В первой главе рассматривается система электронов в квантовой яме на основе GaAs. Это квазидвумерная система, ее особенности - наличие нескольких уровней размерного квантования и, следовательно, нескольких типов электронов, и существенная зависимость кулоновского взаимодействия от вида волновых функций электронов в направлении квантования. Исследованию коллективных возбуждений в этой системе посвящены работы [1-5] из списка основных публикаций по теме диссертации, приведенного выше. Рассчитаны спектры межподзонных коллективных возбуждений спиновой и зарядовой плотности в пределе сильного магнитного поля [1,2]. Рассматривались как переходы без изменения уровня Ландау, так и переходы с изменением уровня Ландау (бернштейновские моды). Спектры рассчитывались при факторах заполнения от 2 до 10, использовалось приближение Хартри-Фока. Показано, что все возбуждения имеют многомодовую структуру, число мод определяется фактором заполнения. Исследована зависимость от квазиимпульса возбуждения. Впервые обнаруженный результат появления новых мод коллективных возбуждений вблизи четных целочисленных факторов заполнения, что обусловлено началом заполнения следующего уровня Ландау, был подтвержден экспериментально. Рассмотрена возможность существования межподзонных коллективных возбуждений спиновой и зарядовой плотности с различными значениями проекции момента на нормаль к плоскости движения в системе без магнитного поля [3]. Исследована зависимость энергии комбинированного спин-флип возбуждения (возбуждения с переворотом спина и изменением уровня Ландау электрона) при изменении фактора заполнения от 0 до 1 при учете электрон-электронных

корреляций [4]. Экспериментальное исследование спектра возбуждений потребовало включить в рассмотрение и возбуждение примесных комплексов. Выполненный для случая сильного магнитного поля расчет спиновых возбуждений D-центров, состоящих из двух электронов в квантовой яме и неподвижной заряженной примеси, показал интерфейсную природу заряженных примесей [5].

Во второй главе рассмотрены плазменные и магнитоплазменные возбуждения в двойных квантовых ямах. Двойные квантовые ямы (частный случай системы с двумя уровнями размерного квантования) также могут служить примером многокомпонентной системы. Наличие дополнительной степени свободы приводит к существованию дополнительных ветвей в спектре возбуждений. Спектры плазменных и магнитоплазменных возбуждений в двойных квантовых ямах рассматривались в работах [6-10]. Исследованы коллективные возбуждения зарядовой плотности (акустические и оптические плазмоны) в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле. Показано, что энергия коллективных возбуждений зависит от взаимной ориентации магнитного поля и импульса возбуждения, что определяется влиянием конечной ширины квантовых ям [6]. Исследовано влияние пространственной симметрии системы на спектр, дисперсионные и физические свойства плазменных возбуждений без магнитного поля [7]. Изучалось взаимодействие межподзонных экситонов и плазмонов с близкими энергиями в зависимости от параметров асимметрии и туннелирования [8]. Эффект влияния пространственной симметрии на коллективные возбуждения зарядовой и спиновой плотности (магнитоплазмоны и магнитоэкситоны) в двуслойной электронной системе со слабой туннельной связью в сильном перпендикулярном магнитном поле рассмотрен в работах [9-10].

Третья глава посвящена магнитоэкситонам в чистом двуслойном графене. Широко исследуемые в последнее время истинно двумерные системы - однослойный и двуслойный графены, обладающие таким интересным свойством, как хиральность, могут рассматриваться как многокомпонентные сильно связанные системы. Коллективные возбуждения в хиральных системах обладают уникальными свойствами. В работах [11-12] были рассмотрены циклотронные переходы между уровнями Ландау в сильном перпендикулярном магнитном поле в чистом двуслойном графене, что соответствует нулевому фактору заполнения. Учитывались влияние Кулоновского взаимодействия, слабой асим-

метрии слоев графена и электронно-дырочной асимметрии. Показано, что при учете электронно-дырочной асимметрии происходит расщепление линии циклотронного резонанса; для разных долин энергии циклотронных переходов различны. Величина расщепления зависит от магнитного поля; в области меньших магнитных полей разница в энергиях обусловлена электронно-дырочной одночастичной асимметрией, при больших магнитных полях расщепление в спектре определяется электрон-электронным взаимодействием. Учитывались эффекты электрон-электронного взаимодействия, слоевой и электронно-дырочной асимметрии. Особенности магнитоэкситонов в двумерных хиральных структурах - однослойном и двуслойном графене представлены в обзоре [13].

В четвертой главе рассмотрены возбуждения в двумерных структурах с сильным спин-орбитальным взаимодействием. Особенности электронного спектра в квазидвумерных системах с сильным спин-орбитальным взаимодействием изучались в работах [14-17]. В качестве объекта рассматривались дырочные двумерные каналы в Si и GaAs в перпендикулярном и наклонном [16] магнитном поле. В перпендикулярном поле получены спектры уровней Ландау дырок в узкой квантовой яме, учитывались спин-орбитальное взаимодействие и непараболичность [14-15]; в квазиклассическом случае получены выражения для циклотронных энергий и циклотронных масс [15]. Для случая сильного наклонного поля вычислены значения эффективных масс дырок на различных уровнях Ландау вдоль направления поля [16]. Изучалось влияние одноосной деформации вдоль слоя на положение уровней Ландау; показано, что линейная по деформации поправка к энергии уровней Ландау возникает только для двумерного канала на поверхности (110) [17].

В заключении представлены основные результаты работы и следующие из них выводы.

Глава 1. Коллективные возбуждения в квазидвумерных электронных системах в магнитном поле.

1.1. Обзор литературы.

Квазидвумерные электронные системы являются постоянным объектом исследований в течение уже нескольких последних десятилетий. Основная особенность таких систем состоит в том, что носители заряда (в данном случае электроны) локализованы в слое с малыми поперечными размерами (порядка нм). Квазидвумерные электронные системы возникают, когда вдоль одной из осей имеется ограничивающий потенциал. Вследствие наличия ограничивающего потенциала движение электронов поперек слоя является существенно квантовым и описывается уровнями размерного квантования и соответствующими им волновыми функциями (см., например, обзор [18]). С учетом движения в плоскости квазидвумерная система характеризуется набором размерно-квантованных подзон.

Квазидвумерные системы обладают многими свойствами двумерных систем, отличающими их от трехмерных. Однако наличие нескольких подзон размерного квантования приводит к появлению ряда особенностей в квазидвумерных системах по сравнению чисто двумерными. Одна из таких особенностей - существование межподзонных коллективных возбуждений, связанных с переходом электронов из одной подзоны в другую. Другая особенность связана с учетом конечной ширины квантовой ямы даже в том случае, когда можно ограничиться рассмотрением только одной подзоны, поскольку взаимодействие между частицами зависит от ширины ямы. Изучение спектров коллективных возбуждений дает возможность наблюдать эти особенности.

Вначале представляется необходимым дать краткий обзор теоретических исследований возбуждений в чисто двумерных системах в магнитном поле. Основными возбуждениями во внешнем перпендикулярном магнитном поле являются нейтральные коллективные возбуждения - магнитоэкситоны. Согласно теореме Кона [19], энергия циклотронного резонанса трансляционно инвариантной электронной системы не зависит от величины кулоновского взаимодействия. Поэтому магнитоплазмоны (возбуждения с изменением орбитального кванто-

вого числа электронной системы на единицу) при нулевом импульсе возбуждения $q = 0$ имеют энергию, равную энергии циклотронного резонанса невзаимодействующей электронной системы. Аналогичное утверждение имеет место для спиновых экситонов (возбуждений с изменением спинового квантового числа на единицу без изменения орбитального квантового числа) в электронной системе, инвариантной относительно группы вращений в спиновом пространстве (теорема Лармора). Как следствие, энергия спиновых экситонов с нулевым импульсом $q = 0$ равна Зеемановской энергии. Оба вышеупомянутых утверждения являются точными, то есть справедливы при любом соотношении между Кулоновской и циклотронной энергиями и при любом факторе заполнения. Подобных ограничений не существует на энергию комбинированных возбуждений при одновременном изменении спина и орбитальной компоненты волновой функции электрона.

Как в самых первых кратких работах [20, 21], так и в последующих вскоре более подробных работах [22, 23] энергии магнитоэкситонов (магнитоплазмонов и спиновых экситонов) при ненулевых q для целочисленных факторов заполнения уровней Ландау в пределе сильного магнитного поля были вычислены в рамках теории возмущений. Малым параметром в этом случае является отношение Кулоновской энергии на межчастичном расстоянии к циклотронной энергии: $E_c/\hbar\omega_c \ll 1$ ($E_c = e^2/\epsilon a_H$, a_H - магнитная длина, $\omega_c = eH/m^*c$, m^* - эффективная масса электрона). Теоретическое рассмотрение задачи о коллективных возбуждениях в двумерной электронной системе в магнитном поле было проведено впервые в работе [20]. Использовалась модель магнитоэкситона - пары заряженных частиц, состоящей из электрона, перешедшего в незаполненное энергетическое состояние, и дырки, оставшейся в начальном состоянии, при этом электрон взаимодействует с дыркой и с остальными электронами посредством кулоновского взаимодействия; были получены дисперсионные зависимости для двух типов магнитоэкситонов, магнитоплазмона и спинового экситона при целочисленном заполнении $\nu = 1$. При малых импульсах $qa_H \ll 1$ магнитоплазмон обладает линейной дисперсией, а спиновый экситон - квадратичной.

$$\begin{aligned}
E_{MP}(q) &= \hbar\omega_c + \frac{e^2}{2\epsilon a_H} qa_H \\
E_s(q) &= g\mu_B B + \frac{e^2}{4\epsilon a_H} (qa_H)^2
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Аналогичные выражения были получены в работе [21], где рассматривались возбуждения в двумерной системе электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне,

Более подробное рассмотрение спектров магнитоэкситонов было проведено с использованием диаграммного формализма [22] и приближения Хартри-Фока для возбуждений TDHF (time-dependent Hartree-Fock) [23]. Эти подходы эквивалентны и приводят к одинаковым результатам. Важно подчеркнуть, что корректное решение задачи о магнитоэкситонах возможно лишь в состояниях с целочисленными факторами заполнения, при которых основное состояние системы невырождено. В общем случае энергия магнитоэкситона может быть представлена в виде

$$E_{n,n'}(q) = \hbar\omega_c \Delta n + g\mu_B H \Delta S_z + \Delta E_{n,n'}(q) \tag{1.2}$$

где учтены энергетические вклады от изменения орбитального квантового числа (индекса уровня Ландау электрона n), от изменения Зеемановской энергии при перевероте спина электрона и от многочастичного кулоновского взаимодействия $\Delta E_{n,n'} \sim E_c$.

Строго говоря, коллективные возбуждения в двумерном электронном газе можно рассматривать как двухчастичные только при переходах с заполненного на следующий уровень Ландау (изменение орбитального квантового числа $\Delta n = 1, \Delta S = 0$) или при переходах с переверотом спина при $\delta n = 0, \Delta S = 1$, что отмечалось авторами [22, 23]). При отсутствии примесей и при $T = 0$ магнитоплазмоны и спиновые экситоны - незатухающие возбуждения, поскольку других возбуждений двумерной электронной системы с такими же энергией, импульсом и спином не существует.

В случае циклотронных спин-флип возбуждений ($\Delta n = 1, \Delta S = 1$), так же, как и переходов с $\Delta n > 1$ одноэкситонное приближение неприменимо. Необ-

ходимо учитывать распад магнитоэкситона на два других возбуждения с сохранением энергии, волнового вектора, проекции спина и орбитального момента. Учет таких процессов влияет не только на время жизни магнитоэкситона, но и на его энергию. Тем не менее при вычислении энергий магнитоэкситонов двухэкситонными поправками обычно пренебрегают [22, 23, 25], что можно объяснить неплохим согласием с экспериментом.

При четном факторе заполнения оба спиновых состояния состояния заполнены одинаково. Основное состояние системы имеет полный спин $S = 0$, а возбуждения с $\Delta n = 1$ могут быть синглетными или триплетными, причем синглетный магнитоэкситон - это магнитоплазмон, являющийся синфазной комбинацией двух переходов с $\Delta S_z = 0$. Компоненты триплетного возбуждения расщеплены по спину и являются комбинированными спин-флип возбуждениями. При нечетных факторах заполнения, когда имеет место разное заполнение двух спиновых состояний, классификация возбуждений на синглетные и триплетные неприменима. В этом случае при $\Delta n = 1$ существуют два типа магнитоплазменных возбуждений - синфазные и антифазные, а также возможны комбинированные циклотронные возбуждения с переворотом спина.

Гамильтониан двумерной электронной системы в магнитном поле имеет вид:

$$\hat{H} = \sum \hbar\omega_c(n + 1/2)\hat{a}_{\sigma nk}^+\hat{a}_{\sigma nk} + \hat{H}_{int}, \quad (1.3)$$

где $\hat{a}_{\sigma nk}^+$, $\hat{a}_{\sigma nk}$ операторы рождения и уничтожения электронов на n -м уровне Ландау. k - параметр, обозначающий вырожденные состояния в пределах одного уровня Ландау, σ - спин. Волновые функции электронов в одночастичном приближении в калибровке Ландау

$$\phi_{n,k} = N^{-1/2}e^{iky} \exp\left[-\frac{(x + ka_H^2)^2}{2a_H^2}\right] H_n((x + ka_H^2)/a_H) \quad (1.4)$$

(N -нормировочный коэффициент, H_n - полиномы Эрмита). Гамильтониан взаимодействия в магнитном поле H_{int}^H определяется матричными элементами Кулоновского взаимодействия $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ по этим функциям. В приближении Хартри-

Фока вводятся соответствующие операторы рождения для возбуждений с импульсом q вдоль оси y

$$\hat{Q}_Y^+(q) = \hat{Q}_{nm\sigma\sigma'}^+(q) = \sum_k \hat{a}_{\sigma',m,k+q}^+ \hat{a}_{\sigma,n,k} \quad (1.5)$$

и соответствующее уравнение для энергии

$$\langle \hat{Q}_Y^+(q) [\hat{H} \hat{Q}_Y^-(q)] \rangle - \hbar\omega(q) \hat{I} = 0 \quad (1.6)$$

Функции отклика зарядовой и спиновой плотности $\chi_{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}, \omega)$ могут быть выражены через одночастичную функцию Грина для электрона в магнитном поле $G_\alpha(\omega)$, включающую обменные поправки по взаимодействию ($\alpha = n_\alpha, \sigma_\alpha$ - номер уровня Ландау и спиновый индекс) и вершинную часть $\Gamma_{\alpha\beta}(k, k', q, \omega)$, представляющую сумму лестничных и петлевых диаграмм (рис.1.1).

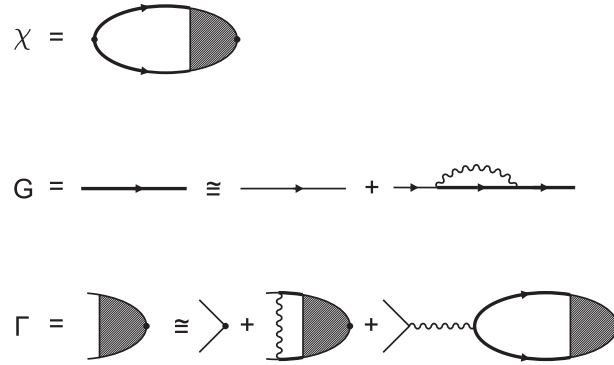


Рис.1.1. Функция отклика зарядовой плотности $\chi_{\sigma\sigma}(\mathbf{q}, \omega)$ в приближении сильного магнитного поля. $\Gamma_{\alpha\beta}(k, k', \mathbf{q}, \omega)$ - вершинная часть, $G_\alpha(\omega)$ -одночастичная Гриневская функция. Одночастичные функции Грина для невзаимодействующих частиц обозначены тонкими линиями со стрелками, незранированное кулоновское взаимодействие – волнистыми линиями.

Вклад кулоновского взаимодействия в энергию возбуждений в первом порядке теории возмущений состоит из трех частей:

1) не зависящая от импульса и энергии разность обменных собственных энергий возбужденного электрона и дырки на уровне Ландау, с которого электрон был удален: $\Sigma_{n'} - \Sigma_n$.

2) прямое кулоновское взаимодействие электрона и дырки, зависящее от импульса возбуждения. В графическом уравнении для вершинной части Γ это второй член, соответствующий учету лестничных диаграмм.

3) "аннигиляционный" член, присутствующий только для возбуждений зарядовой плотности (приближение RPA). Это последний член в графическом уравнении для Γ).

Рассматриваемый формализм обобщается на случай, когда имеется несколько экситонных ветвей (уравнение становится матричным).

На рис. 1.2 приведены дисперсионные кривые для спиновой волны при факторе заполнения 1 и магнитоплазмонов при факторах заполнения 1 и 2, взятые из работы [22]. Особенностью дисперсии магнитоплазмонов является наличие минимума на дисперсионной кривой, обычно называемого ротонным минимумом. При нецелочисленном заполнении основное состояние системы без учета взаимодействия вырождено. При расчетах спектров возбуждений используются модифицированное приближение TDHF [24], при котором считается, что электроны распределены однородно (все конфигурации равновероятны, корреляций нет) и обобщенное одномодовое приближение GSMA [25-27], в котором корреляции между электронами учитываются через структурный фактор. Для произвольных факторов заполнения структурный фактор не известен, но он может быть получен из численных расчетов для некоторых Лафлиновских несжимаемых состояний $\nu = 1/3, 1/5...$ [28, 29].

Межподзонные коллективные возбуждения в квазидвумерной системе в отсутствие магнитного поля (переходы электронов из одной подзоны размерного квантования в другую) делятся на возбуждения зарядовой плотности (CDE) и возбуждения спиновой плотности (SDE), иначе CDE и SDE можно интерпретировать как синглетные и триплетные межподзонные экситоны. Эти возбуждения исследованы достаточно широко как теоретически, так и экспериментально. Экспериментально эти возбуждения наблюдаются методами комбинационного рассеяния [30, 31] и инфракрасного поглощения [32] различие проявляется в поляризационной зависимости наблюдаемых линий. Объясняется существование этих возбуждений и теоретически. Самое простое теоретическое рассмотрение

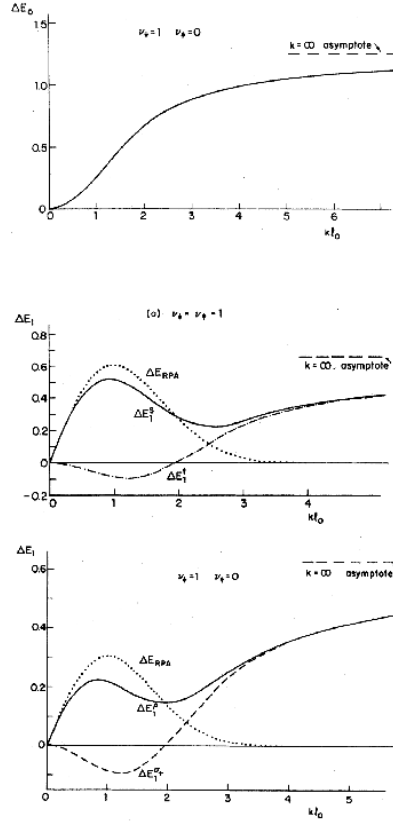


Рис.1.2. Спектры коллективных возбуждений для точно решаемых моделей. На верхнем рисунке для $\nu = 1$ приведен спектр спиновой волны без учета энергии Зеемана. На среднем рисунке для $\nu = 2$ приведены спектры магнитоплазмона в приближении TDHF (сплошная) и RPA(точки), а также магнитоэкситона с $S_z = 0$ (штрих-пунктир); на нижнем рисунке для $\nu = 1$ приведены спектры магнитоплазмона в приближении TDHF (сплошная) и RPA(точки), а также магнитоэкситона с $S_z = 1$ (пунктир); на обоих рисунках отсчет ведется от циклотронной энергии. Энергия измеряется в единицах $e^2/\epsilon l_0$.

- приближение хаотических фаз (RPA) - дает только один тип возбуждений - CDE [33, 34]. Учет обменного взаимодействия приводит к существованию двух

типов возбуждений. Методы расчета межподзонных возбуждений с учетом обменной энергии можно разделить на две основные группы. Первая группа включает в себя расчеты с применением приближения локальной плотности (LDA) и его модификаций [30,35-37], базирующихся на более общих методах функционала плотности [38-40]. Вторая группа использует прямые методы для нахождения функции отклика системы (поляризационного оператора) (диаграммный или использование матрицы плотности с последующим решением уравнения Бете-Солпитера) [31,41-43].

Межподзонные переходы в квазидвумерных системах в магнитном поле возможны как без изменения уровня Ландау (модифицированные CDE и SDE), так и с изменением уровня Ландау (комбинированные межподзонно-циклотронные бернштейновские моды - ISBM)

Теоретическое рассмотрение этой проблемы проводилось в рамках RPA и LDA [36, 44, 45].

1.2 Межподзонные коллективные возбуждения спиновой и зарядовой плотности в квантовых ямах с несколькими уровнями размерного квантования.

1.2.1. Межподзонные возбуждения в сильном магнитном поле.

Экспериментальные результаты по изучению спектров возбуждений квазидвумерных систем с несколькими подзонами размерного квантования в сильных магнитных полях, в частности полученные методом резонансного комбинационного рассеяния в работах [47, 48], не удавалось объяснить теоретически, используя методы RPA и LDA. Так, в работе [48], посвященной изучению CDE и SDE в сильных магнитных полях, была обнаружена существующая при $\nu \geq 2$ новая неполяризованная линия, появляющаяся при $\nu = 2$ вблизи линии SDE. Интерпретация этой линии как линии одночастичных возбуждений (SPE), как подчеркивалось авторами, была неудовлетворительной.

Поэтому возникла задача расчета спектра межподзонных коллективных возбуждений, в которой учитывалось бы, что электроны разных уровней Ландау в разных подзонах имеют разные волновые функции. Этот расчет в прибли-

жении Хартри-Фока проведен впервые в работах автора [1, 2]. Рассчитаны спектры межподзонных возбуждений при малых импульсах \mathbf{k} для $\nu \leq 10$, $\Delta n = 0, \pm 1, \pm 2$ (Δn - изменение номера уровня Ландау). Показано, что как бернштейновские моды (возбуждения с $\Delta n \neq 0$), так и возбуждения с $\Delta n = 0$ имеют многомодовую структуру; при заполнении нового уровня Ландау появляются новые моды. Рассмотрена зависимость полученных мод от квазиимпульса. Проведены оценки сравнительной интенсивности комбинационного рассеяния на различных модах.

Спектр межподзонных коллективных возбуждений в зависимости от величины магнитного поля H ищется при следующих условиях:

1. В системе имеются 2 подзоны размерного квантования, влиянием остальных подзон можно пренебречь. Плотность двумерных электронов n_s такова, что нижняя подзона E_0 заполнена, а следующая, E_1 - пуста. Энергии E_0 и E_1 вычислены в приближении Хартри. $E_{10} = E_1 - E_0$.

2. Приложено магнитное поле H , направленное перпендикулярно двумерному слою. Рассматривается область магнитных полей, для которых $0 < \nu \leq 10$.

3. Учитываются только процессы без переворота спина; для простоты полагаем g -фактор электронов $g = 0$ ($\mu_0 H g \ll T$, T - температура системы), но спиновое вырождение в расчет включается.

4. Рассматривается длинноволновый предел $ka \ll 1$, $ka_H \ll 1$ (a - ширина квантовой ямы, $a_H = (\hbar c / eH)^{1/2}$ - магнитная длина).

5. Масштабы энергии таковы, что $\delta E \ll T \ll \Delta E$ (ΔE - характерное расстояние между уровнями в системе, δE - ширина уровней Ландау, существующая вследствие взаимодействия с примесями).

Энергии коллективных возбуждений являются полюсами полного поляризационного оператора $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$. Так как в длинноволновом пределе межподзонные и внутриволновые возбуждения независимы, рассмотрим межподзонный поляризационный оператор

$$\Pi_{01}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{n, n', \sigma} \Pi_{0n, 1n', \sigma}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{n, n', \sigma} \sum_{m, m', \sigma'} \Pi_{0n, 1n', \sigma}^{0m, 1m', \sigma'}(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.7)$$

m, m', n, n' - номера уровней Ландау.

При целочисленном факторе заполнения все вырожденные по энергии уровни Ландау заполнены с вероятностью 1. Предполагается, что и при произвольном факторе заполнения уровни Ландау заполнены равновероятно, вследствие того, что их ширина мала по сравнению с температурой; в остальном используется техника функций Грина для $T = 0$ (выполнено условие 5). Сравнение E_{CD} в приближении РРА, вычисленной предложенным методом, с результатом, полученным в работе [45] с использованием температурной техники, показывает их эквивалентность при указанных предположениях.

Система уравнений для $\Pi_{0n,1n',\sigma}$ включает суммирование лестничных и петлевых диаграмм, описывающих соответственно экситонный и деполяризационный эффекты. В одночастичных функциях Грина учитываются обменные поправки к собственно-энергетической части. Эта совокупность диаграмм, соответствующая приближению Хартри-Фока, учитывалась в работах [41-43], посвященных расчету межподзонных коллективных возбуждений без магнитного поля, а также при рассмотрении возбуждений магнитоплазмонного типа в чисто двумерных системах [20, 22] и частично в работе [21] при рассмотрении экситона Мотта в квазидвумерных полупроводниках в сильном магнитном поле.

В этом приближении одночастичные функции Грина в магнитном поле зависят только от частоты, а взаимодействие - только от импульсов. Поэтому взаимодействие можно усреднить по импульсам, и система становится алгебраической. Взаимодействие, определяющее деполяризационный сдвиг:

$$\alpha_{0n,1n',\sigma}^{0m,1m',\sigma'}(k) = V_{01}^{01}(k) I_{nn'}(k, 0) I_{m'm}^*(k, 0) = \alpha_{nn'}^{mm'}(k) \quad (1.8)$$

Взаимодействие, определяющее экситонные поправки:

$$\beta_{0n,1n',\sigma}^{0m,1m',\sigma'}(k) = -\delta_{\sigma\sigma'} (2\pi)^{-1} \int V_{00}^{11}(q) J_{nm}(\mathbf{q}) J_{n'm'}^*(\mathbf{q}) e^{ia_H^2 q_y k} d\mathbf{q} = \delta_{\sigma\sigma'} \beta_{nn'}^{mm'}(k) \quad (1.9)$$

где

$$V_{ik}^{jl}(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \int \exp(-q|z_1 - z_2|) \psi_i(z_1) \psi_k(z_1) \psi_j(z_2) \psi_l(z_2) dz_1 dz_2$$

$$I_{nn'}(q_x, q_y) = \int \phi_n(y) \phi_{n'}(y + q_x a_H^2) \exp(-iq_y y) dy \quad (1.10)$$

i, j, k, l - индексы подзон; $\psi_i(z)$ -волновые функции электронов в направлении оси квантования; $\phi_n(y) = \pi^{-1/4} (a_H 2^n n!)^{-1/2} \exp(-y^2/2a_H^2) H_n(y/a_H)$. Ось x направлена вдоль \mathbf{k} .

При $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ переходы с различными $\Delta n = n' - n$ можно рассматривать независимо. При малых \mathbf{k} (условие 4) взаимодействие уровней будет проявляться только вблизи точек пересечения. Поэтому, интересуясь определенным диапазоном энергий, можно ограничить число рассматриваемых переходов; в данной работе это переходы с $|\Delta n| \leq 2$, наблюдаемые экспериментально [48, 49] Система уравнений для $\Pi_{0n,1n',\sigma}$ при этом становится конечной.

$$\begin{aligned} \Pi_{0n,1n',\sigma} &= \Pi_{0n,1n',\sigma}^0 + \Pi_{0n,1n',\sigma}^0 V_{0n,1n',\sigma}^{0m,1m',\sigma'} \Pi_{0m,1m',\sigma'} \\ V_{0n,1n',\sigma}^{0m,1m',\sigma'} &= \alpha_{nn'}^{mm'} + \beta_{nn'}^{mm'} \delta_{\sigma\sigma'} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Нулевые поляризационные операторы, включающие в себя обменные поправки

$$\Pi_{0n,1n',\sigma}^0 = \frac{n_{n\sigma}}{\omega - E_{10} - \Sigma_{1n'\sigma} + \Sigma_{0n\sigma} - \hbar\omega_c(n' - n)} \quad (1.12)$$

Обменные поправки к одночастичным энергиям

$$\Sigma_{in\sigma} = \sum_m \varepsilon_{nm}^{0i} n_{m\sigma}; \quad \varepsilon_{nm}^{0i} = -(2\pi)^{-1} \int V_{0i}^{0i}(q) |I_{nm}(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q}; \quad (i = 0, 1) \quad (1.13)$$

$n_{n\sigma}$ -плотность электронов на уровне $(0, n, \sigma)$; $\omega_c = eH/mc$ - циклотронная частота .

Для нахождения полюсов приравняем к нулю детерминант системы (1.11).

$$\det |\Pi_{0n,1n',\sigma}^0 V_{0n,1n',\sigma}^{0m,1m',\sigma'} - \delta_{nn'\sigma,mm'\sigma'}| = 0 \quad (1.14)$$

Вводя конечное затухание и решая неоднородную систему (1.11), можем оценить сравнительную интенсивность линий комбинационного рассеяния на найденных возбуждениях. Число мод

$$N_i(\Delta n \geq 0) = [\nu/2] + 1; \quad N_i(\Delta n < 0) = [\nu/2] + 1 + \Delta n \quad (1.15)$$

$i = cd, sd$; при отрицательных значениях N мод не существует. Заметим, что только в рассматриваемом случае, когда система неполяризована по спину ($n_{n,1/2} = n_{n,-1/2}$), происходит разделение моды на CD и SD типы, спектры которых определяются независимо, однако всегда число мод увеличивается с ростом фактора заполнения.

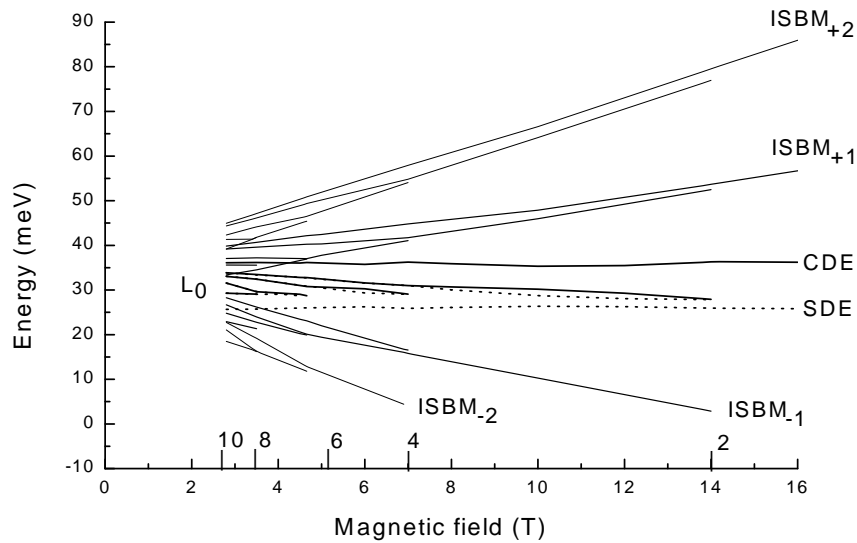


Рис.1.3. Зависимость энергий межподзонных коллективных возбуждений системы двумерных электронов в одиночной квантовой яме шириной 250 \AA ($n_s = 6.8 * 10^{11} \text{ cm}^{-2}$) от величины перпендикулярного магнитного поля при $k = 0$. На горизонтальной оси также отмечены положения четных целочисленных факторов заполнения.

На рисунке 1.3 показаны спектры коллективных возбуждений для прямоугольной квантовой ямы GaAs/AlGaAs ($a = 250 \text{ \AA}$; $n_s = 6.8 * 10^{11} \text{ cm}^{-2}$) при $k = 0$ в диапазоне магнитных полей, соответствующих $\nu \leq 10$.

Бернштейновские моды при $k = 0$ вырождены (энергии $ISBM^{cd}$ и $ISBM^{sd}$ совпадают). Энергии основных мод CDE и SDE слабо осциллируют как функции магнитного поля, совпадая при целочисленных факторах заполнения. Впервые полученные в работе автора [1] новые моды (CDE1, SDE1, CDE2, SDE2

и т.д.) невырождены. Их энергии имеют вполне заметный наклон к оси H . Этот мультиплет соответствует линии L_0 , экспериментально наблюдаемой в работах [46-49], интерпретируемой ранее как линия одночастичных возбуждений [46].

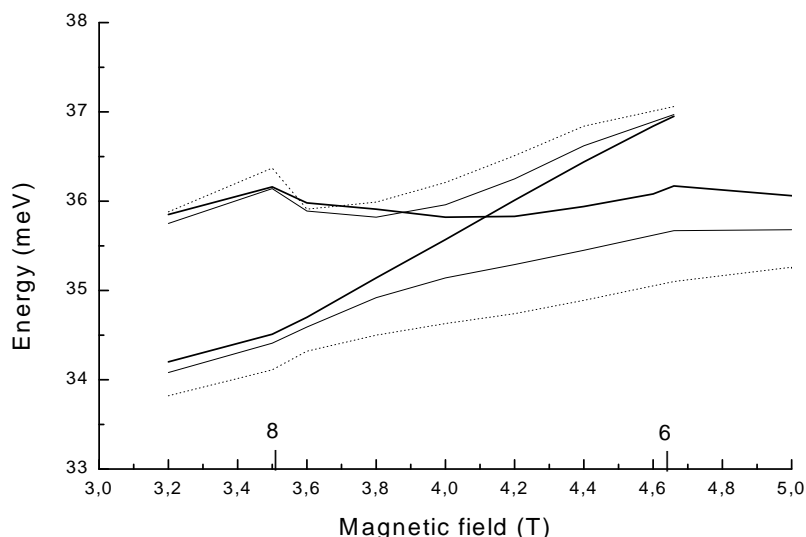


Рис.1.4. Зависимость энергий межподзонных коллективных возбуждений от величины магнитного поля вблизи точки пересечения линий CD и $ISBM_{+1}$ для различных значений квазиимпульса. $k = 0$ (жирная линия), $k = 0.4 * 10^5 cm^{-1}$ (тонкая линия), $k = 0.8 * 10^5 cm^{-1}$ (точки).

Зависимость коллективных возбуждений от квазиимпульса, исследованная для тех же условий при $k \leq 1.5 * 10^5 cm^{-2}$, существенна только для CDE и области пересечения CDE и нижней из $ISBM_{+1}^{cd}$ (вырождение $ISBM^{cd}$ и $ISBM^{sd}$ при этом снимается). Остальные бернштейновские моды, моды L_0 и SDE практически бездисперсионны. Рис.1.4 иллюстрирует влияние квазиимпульса на вид спектра. Видно, что расщепление основной CD моды и $ISBM_{+1}^{cd}$ моды пропорционально k . Также линейную зависимость от k демонстрирует энергия CDE при $\nu < \nu_c$ (ν_c соответствует пересечению уровней). Полученная зависимость согласуется с данными экспериментов и соответствующими расчетами в LDA [48].

Оценка интенсивности комбинационного рассеяния на коллективных возбуждениях показывает, что наибольший вклад в рассеяние вносят CDE, SDE и L_0 . Бернштейновские моды значительно слабее и зависят от k . В мультиплете L_0 значительно более интенсивна нижняя пара CD и SD линий, однако при появлении новых пар линий вблизи целочисленных четных ν интенсивности сравнимы, и вероятность наблюдать дублетную структуру наибольшая. Для бернштейновских мод в каждой группе $ISBM_{\Delta n}$ интенсивность нижней линии также наибольшая, а дублетная структура может проявляться, как и для L_0 , при появлении новых мод.

Получена структура межподзонных коллективных возбуждений в магнитном поле, исследована зависимость от импульса и даны оценки вклада различных возбуждений в интенсивность линий комбинационного рассеяния. Результаты, полученные в предположении, что вырожденные по энергии уровни при низкой, но конечной температуре заполнены равновероятно, позволяют объяснить в рамках единой схемы весь спектр коллективных возбуждений, наблюдаемый экспериментально, и предсказать возможность наблюдения многомодовой структуры.

Было показано появление при $\nu = 2$ двух близко расположенных линий, что объясняет результаты работы [48] и подтверждается результатами работы [49].

1.2.2. Возбужденные состояния межподзонного экситона.

Как было упомянуто в разделе 1.1, основными методами нахождения энергии возбуждений зарядовой и спиновой плотности в системе без магнитного поля являются приближение локальной плотности (LDA) и уравнение Бете-Солпитера. Эти методы были использованы для нахождения нижайшей энергии для триплетного или синглетного возбуждения. В приближении LDA взаимодействие, зависящее от импульсов, заменяется эффективной константой (контактное взаимодействие в координатном пространстве), при этом существует только одно связанное состояние. Решение уравнения Бете-Солпитера также рассматривалось только для основного состояния межподзонного экситона.

В экспериментах по комбинационному рассеянию света в квантовых ямах наблюдалась широкая неполяризованная линия, расположенная между SDE и CDE возбуждениями [30, 47]. Интерпретировалась эта линия как результат рассеяния на одночастичных возбуждениях (SPE). Однако эта интерпретация вызывала сомнения даже у авторов экспериментов, поэтому была необходимось рассмотреть эту проблему подробнее.

В работе [3] автором проведен расчет энергии основных и возбужденных состояний межподзонного экситона в приближении Хартри-Фока в системе без магнитного поля. Предложено интерпретировать линии SDE и CDE как результат рассеяния на основных состояниях, в то время как линию, расположенную между ними - как результат рассеяния на возбужденных состояниях.

Рассмотрим обычно используемую в экспериментах квантовую яму GaAs-AlGaAs. Это слой GaAs, окруженный с двух сторон широкими слоями AlGaAs, в одном из которых расположен слой доноров. Энергии подзон E_n^H и волновые функции электронов $\phi_n(z)$ определялись в приближении Хартри из самосогласованного решения одночастичного уравнения Шредингера и уравнения Пуассона (ось z направлена по нормали к слою).

Гамильтониан такой квазидвумерной системы имеет вид

$$H = \sum_{nks} (E_n^H + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}) c_{nks}^+ c_{nks} + \frac{1}{2} \sum_{nn'mm'ss'kk'} V_{nm}^{n'm'} c_{n\mathbf{k}+\mathbf{q}s}^+ c_{n'\mathbf{k}'-\mathbf{q}s'}^+ c_{m'\mathbf{k}'s'} c_{m\mathbf{k}s} \quad (1.16)$$

где m^* - эффективная масса электрона, n, n', m, m' - индексы подзон, s, s' - спиновые индексы, $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}$ - волновые векторы в плоскости движения электронов xy .

$$V_{nm}^{n'm'}(q) = \frac{e^2}{2\epsilon q} \int \phi_n^*(z) \phi_{n'}^*(z') \phi_{m'}(z') \phi_m(z) e^{-q|z-z'|} dz dz' \quad (1.17)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только двух нижних подзон размерного квантования с энергиями E_1^H и E_2^H . Концентрация электронов такова, что заполнена только нижняя подзона.

Энергии коллективных возбуждений системы являются полюсами поляризационного оператора (поляризационной функции отклика системы) или, что то же самое, полюсами двухчастичной функции Грина. В приближении Хартри-Фока учитываются обменные поправки к собственным энергиям, деполаризационные (для $\mathbf{S} = 0$) и экситонные поправки. На диаграммном языке это соответствует обменной поправке в одночастичных функциях Грина и суммированию петлевых и лестничных диаграмм для двухчастичной функции Грина. Вывод этого уравнения через матрицу плотности приведен в работе [42].

В полюсном приближении уравнение на собственные значения, являющиеся энергиями межподзонного экситона имеет вид

$$\begin{aligned} [E_2^{HF}(\mathbf{k} + \mathbf{K}) - E_1^{HF}(\mathbf{k}) - E] P(\mathbf{k}, \mathbf{K}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}) P(\mathbf{k}', \mathbf{K}) d\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь E - собственное значение энергии, $P(\mathbf{k}, \mathbf{K})$ - волновая функция межподзонного экситона в импульсном представлении.

$$E_i^{HF}(\mathbf{k}) = E_i^H + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{1}{(2\pi)^2} \int V_{1i}^{i1}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) d\mathbf{k}' \quad (1.19)$$

Для SD возбуждений ($\mathbf{S} = 1$)

$$V^{SD}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}) = V_{11}^{22}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (1.20)$$

Для CD возбуждений ($\mathbf{S} = 0$)

$$V^{CD}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}) = V^{SD} - 2V_{12}^{21}(\mathbf{K}) \quad (1.21)$$

При $\mathbf{K} = 0$ проекция момента на ось z сохраняется, и решения уравнения (16) можно искать в виде $P_m(\mathbf{k}) = P_m(k) e^{im\varphi}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$)

$P_m(k)$ и E_m определяются из уравнений

$$[E_2^{HF}(k) - E_1^{HF}(k) - E_m] P_m(k) = \frac{1}{2\pi} \int V_m(k, k') P(k') k' dk' \quad (1.22)$$

где

$$V_m(k, k') = \frac{1}{2\pi} \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) \cos m\varphi d\varphi \quad (1.23)$$

Поскольку приближение Хартри-Фока само по себе имеет вариационную природу, для каждого типа симметрии имеет смысл только нижнее состояние E_m .

Численное решение уравнений проводилось для квантовых ям GaAs-AlGaAs толщиной 250Å и концентраций электронов $3 * 10^{11}\text{cm}^{-2}$ и $6 * 10^{11}\text{cm}^{-2}$.

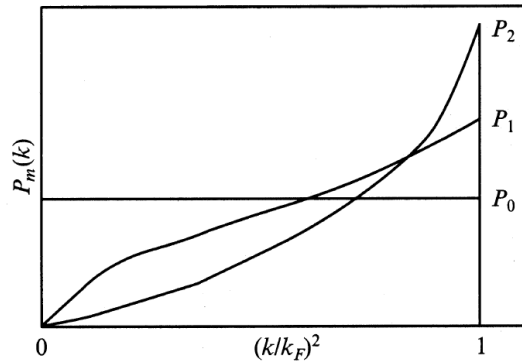


Рис.1.5. Радиальные волновые функции межподзонных экситонов в импульсном представлении.

Уравнения (1.18) и (1.22) решались численно. Следует отметить, что решения (1.22) с различными m входят в решения (1.18) с $\mathbf{K} = 0$. На рис.1.5 изображены $P_m(k^2/k_F^2)$, которые можно трактовать как радиальные волновые функции межподзонного экситона в импульсном представлении. Получившийся результат для P_0 объясняет хорошее совпадение результатов различных методов - это показывает, что для основного состояния можно действительно ввести эффективное контактное взаимодействие; область корреляции между электроном в возбужденной подзоне и дыркой в основной подзоне порядка межчастичного расстояния. Возбужденные состояния P_m с ненулевыми проекциями момента представляют собой возбуждения вблизи уровня Ферми. Для $m = 0$ решение уравнения (1.22) дает известные CD и SD возбуждения. Полученный результат

совпадает с результатами [41, 42]. При $m \neq 0$ $E_{+m} = E_{-m}$ - состояния с $\pm m$ вырождены; кроме того, эти состояния вырождены по спину.

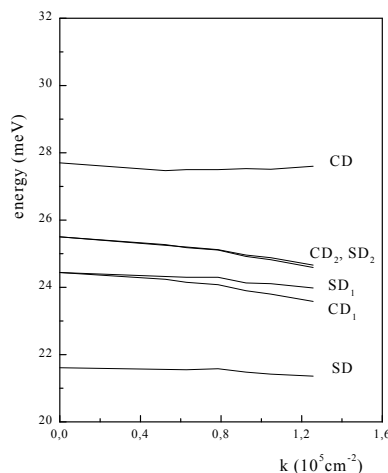


Рис.1.6. Дисперсия межподзонных экситонов в квантовой яме GaAlGaAs шириной 250 \AA при $n_s = 3 * 10^{11} \text{ cm}^{-2}$.

Из решение уравнения (1.18) можно получить закон дисперсии межподзонных экситонов. Строго говоря, при $\mathbf{K} \neq 0$ возбужденные состояния уже не являются, состояниями с определенной проекцией момента. Вырождение снимается, и одно из состояний может проявляться неупругом рассеянии (при $\mathbf{K} = 0$ в рассеянии участвуют только основные состояния с $m = 0$). На рис.1.6-1.7.представлен закон дисперсии для активных мод.

Дисперсия основных CD и SD возбуждений совпадает с полученной ранее [31, 35]. Дисперсия CDE при малых \mathbf{K} определяется в основном $V_{12}^{21}(\mathbf{K})$, SDE обнаруживают очень слабую квадратичную зависимость. Для возбужденных состояний зависимость от импульса значительно сильнее и существенно не квадратична; вырождение CD и SD мод снимается. Не активные в неупругом рассеянии состояния расположены посредине и вырождены по спину. На рис.1.8 изображен общий вид спектра неупругого рассеяния света на межподзонных

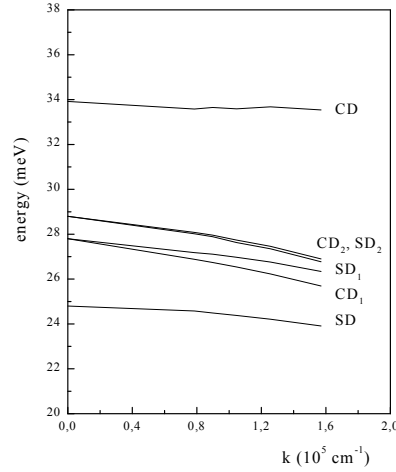


Рис.1.7. Дисперсия межподзонных экситонов в квантовой яме GaAlGaAs шириной 250 \AA при $n_s = 6 * 10^{11} \text{ cm}^{-2}$.

возбуждениях, как основных, так и возбужденных. Соотношение интенсивностей рассеяния на основных и возбужденных состояниях межподзонного экситона зависит от импульса экситона \mathbf{K} , длины волны падающего света и размера области когерентности, поэтому экспериментальный спектр может заметно отличаться.

Итак, в рамках приближения Хартри-Фока получена структура и рассчитаны энергии межподзонных экситонов (основных и возбужденных состояний, различающиеся значениями проекции момента). Полученные результаты позволяют сделать вывод, что линия, приписываемая ранее рассеянию на одночастичных возбуждениях, на самом деле обусловлена в значительной степени рассеянием на возбужденных состояниях межподзонного экситона. Это должно приводить к появлению у этой линии с ростом \mathbf{K} определенной структуры, которая может быть обнаружена экспериментально.

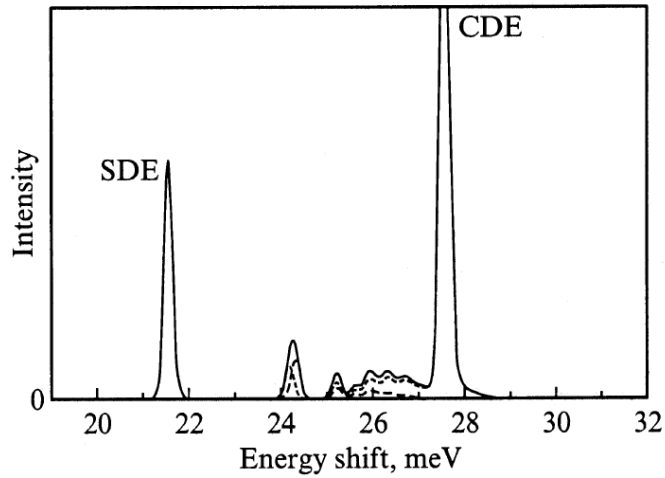


Рис.1.8. Спектры неупругого рассеяния света на основных (SDE и CDE) и возбужденных межподзонных возбуждениях при $n_s = 3 * 10^{11} cm^2$, $k = 0.63 * 10^5 cm^{-1}$. Пунктирной и штриховой линиями изображены спектры рассеяния SD и CD возбужденными состояниями соответственно, а сплошной линией – их сумма. Вне области возбужденных состояний сплошная – рассеяние основными состояниями.

1.3. Комбинированные спин-флип возбуждения при учете электрон-электронных корреляций.

В предыдущих разделах 1.2.1 и 1.2.2 рассматривались межподзонные электронные переходы в квазидвумерной электронной системе с двумя уровнями размерного квантования. При учете в квазидвумерной системе в магнитном поле только одного уровня размерного квантования, но нескольких уровней Ландау возможны переходы с изменением уровня Ландау (магнитоплазмоны), с переворотом спина (спиновые волны) и комбинированные спин-циклотронные возбуждения, связанные с изменением орбитального и спинового квантовых чисел.

Переворот спина с одновременным изменением уровня Ландау приводит к значительному уменьшению обменной энергии электронной системы даже при нулевом импульсе возбуждения, что показано экспериментально [50, 51] мато-

дом неупругого рассеяния света. Теоретическое исследование комбинированных возбуждений, активных в неупругом рассеянии света, представляет несомненный интерес для интерпретации экспериментальных данных.

В данном разделе исследовано комбинированное возбуждение - циклотронная спин-флип мода при факторе заполнения $\nu \leq 1$. Получена зависимость энергии циклотронной спин-флип моды (SF) от фактора заполнения электронов в диапазоне от $\nu = 0$ до $\nu = 1$. Как уже было отмечено во введении, комбинированные возбуждения затухающие - возможен распад на магнитоплазмон и спиновый экситон. Однако если затухание мало, что и наблюдается экспериментально, в расчетах допустимо предположить, что в каждый момент времени существует только одно возбуждение. Это предположение было использовано и в данной работе.

При нецелочисленном заполнении нижайшего спинового подуровня Ландау для определения энергии SF используются два приближения: Хартри-Фока (все состояния равновероятны, корреляций в основном состоянии нет) и одномодовое приближение SMA (single-mode approximation), в котором корреляции учитываются через парную корреляционную функцию электронов (или статистический структурный фактор) [25-27]. Для произвольных факторов заполнения структурный фактор не известен, но он получен из численных расчетов методом Монте-Карло для ряда Лафлиновских несжимаемых состояний $\nu = 1/3, 1/5, 1/7$ [28, 29].

В состоянии холловского ферромагнетика $\nu = 1$, энергия SF моды в двух указанных приближениях совпадает и находится в полном согласии с экспериментом.

$$E_{SF} = \hbar\omega_c + E_Z + \Delta(k) \quad (1.24)$$

где $\Delta(k)$ - кулоновский вклад, связанный с обменной энергией в основном состоянии электронной системы, имеющий квадратичную зависимость от k . Поэтому для малых k в условиях эксперимента можно положить $\Delta(k) = \Delta(0)$.

При нецелочисленном заполнении $\nu < 1$ энергия SF в приближении Хартри-Фока зависит линейно от фактора заполнения.

$$E_{SF} = \hbar\omega_c + E_Z + \nu\Delta(k) \quad (1.25)$$

В приближении SMA волновая функция основного состояния Ψ считается известной, основное состояние считается построенным из электронов на нижнем уровне Ландау и, при учете кулоновского взаимодействия, не вырождено. Волновая функция комбинированного возбужденного состояния выбирается в виде

$$\psi_k = N^{-1/2} \sum_p a_{1\uparrow,p+k}^+ a_{0\downarrow,p} |\Psi \rangle; \quad \langle \psi_k | \psi_k \rangle = 1 \quad (1.26)$$

Используется калибровка Ландау, $a_{0\downarrow,p}$ - оператор уничтожения электрона на нижнем частично заполненном уровне, $a_{1\uparrow,p+k}^+$ - оператор рождения электрона на следующем уровне (\uparrow, \downarrow указывает направление спина), $N = \nu N_0$ - число частиц, N_0 - кратность вырождения уровня Ландау. Энергия возбуждения

$$E(k) = \langle \psi_k | H - E_0 | \psi_k \rangle = N_1 \langle \Psi | \left(\sum_p a_{1\uparrow,p+k}^+ a_{0\downarrow,p} \right)^+ [H, \sum_p a_{1\uparrow,p+k}^+ a_{0\downarrow,p}] | \Psi \rangle \quad (1.27)$$

т.е.

$$E_{SF} = \hbar\omega_c + E_Z + \epsilon_{SMA}(k, \nu) = \hbar\omega_c + E_Z + \nu\Delta(k) + \delta\epsilon_{SMA}(k, \nu) \quad (1.28)$$

Здесь явно выделена часть, соответствующая приближению Хартри-Фока, а поправка (отрицательная) к приближению Хартри-Фока $\delta\epsilon_{SMA}(k, \nu)$ определяется зависящим только от основного состояния коррелятором вида

$$N^{-1} \sum_p (\langle n_p n_{p+q} \rangle - \langle n_p \rangle \langle n_{p+q} \rangle); \quad n_p = a_{0\downarrow,p}^+ a_{0\downarrow,p} \quad (1.29)$$

Этот коррелятор может быть выражен через статический форм-фактор электронов в основном состоянии. Переход от электронных операторов к дырочным ($b_{0\uparrow,-p}^+ = a_{0\downarrow,p}$, $b_{0\uparrow,-p} = a_{0\downarrow,p}^+$, $n_p = 1 - n_p^h$, $N_h = (1 - \nu)N_0$), позволяет перейти к дырочному коррелятору

$$\begin{aligned} & N^{-1} \sum_p (\langle n_p n_{p+q} \rangle - \langle n_p \rangle \langle n_{p+q} \rangle) = \\ & = \frac{1 - \nu}{\nu} N_h^{-1} \sum_p (\langle n_p^h n_{p+q}^h \rangle - \langle n_p^h \rangle \langle n_{p+q}^h \rangle) \end{aligned} \quad (1.31)$$

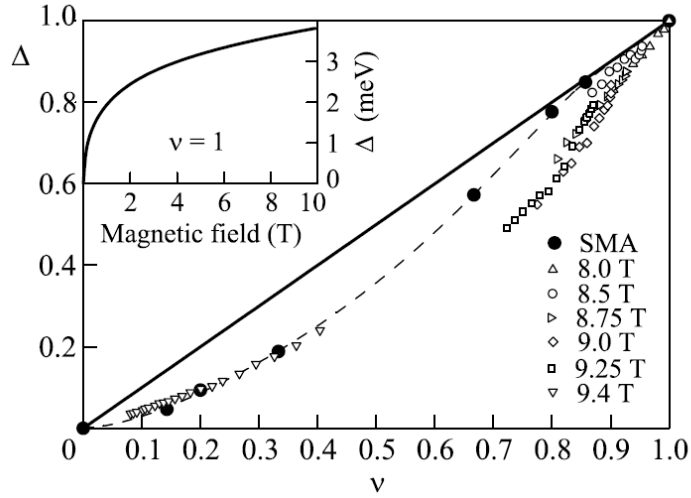


Рис.1.9. Зависимость от фактора заполнения обменного вклада в энергию SF возбуждения, нормированного на величину обменного вклада при $\nu = 1$. Сплошная линия - приближении Хартри-Фока, черные точки - приближение SMA (штриховая линия проведена для удобства), другие символы - данные эксперимента при различных магнитных полях. На вставке показана теоретическая зависимость обменного вклада SF от магнитного поля при $\nu = 1$ для квантовой ямы 25 нм.

При заполнениях, близких к $\nu = 1$ ($\nu = 6/7, 4/5, 2/3$) энергию спин-флип возбуждений можно выразить через форм-фактор дырок на почти заполненном уровне Ландау. Предположив, что форм-фактор дырок при электронном факторе заполнения ν будет таким же, как и для электронов при электронном факторе заполнения $1 - \nu$, энергии возбуждений при $\nu > 1/2$ можно выразить через энергии возбуждений при $\nu < 1/2$.

$$E_{SF} = \hbar\omega_c + E_Z + \nu\Delta(k) + \frac{1-\nu}{\nu}\delta\epsilon_{SMA}(k, 1-\nu)$$

Зависимость обменного вклада в энергию SF возбуждения от фактора заполнения показана на рис. 1.9. Заметим, что корреляционные поправки в энергию SF возбуждения доминируют при $\nu \rightarrow 0$, а при ν в интервале $0.8 \div 1$ оба приближения, Хартри-Фок и SMA, дают почти одинаковые результаты. В этой

области факторов заполнения изменение обменной энергии на одну частицу отражает изменение средней плотности электронов в системе. Экспериментальные значения энергии дают удовлетворительное согласие с теорией в области $0.9 \div 1$, однако при меньших факторах заполнения наблюдается более сильное, чем ожидаемое смягчение. При малых факторах заполнения $\nu < 0.4$ энергия SF моды находится в хорошем согласии с расчетами в рамках SMA приближения.

1.4. Спиновые возбуждения электронно-примесных комплексов в сильном магнитном поле.

В спектрах неупругого рассеяния света двумерными электронами в ультраквантовом пределе наблюдаются четыре линии, две из которых соответствуют процессам неупругого рассеяния света с сохранением продольной компоненты импульса света и рождением коллективных электронных возбуждений - магнитоплазмона (MP) и циклотронной спин-флип моды (SF) Две другие спектральные компоненты связаны с неупругим рассеянием света на электронных возбуждениях вблизи примесных комплексов. Поскольку в экспериментах необходимо различать линии, связанные с коллективными возбуждениями и возбуждениями электронно-примесных комплексов, необходимо исследовать особенности в спектрах возбуждения многочастичных электронно-примесных комплексов.

В настоящем разделе будут рассмотрены спиновые возбуждения многочастичных электронно-примесных D^- комплексов в сильном магнитном поле. D^- комплекс - это объект, в котором два электрона, локализованных в квантовой яме определенной ширины, связываются с заряженной примесью, расположенной внутри квантовой ямы, в барьере или на интерфейсе - на границе между ямой и барьером. Вследствие того, что положительный заряд является трехмерным объектом, а электроны - квазидвумерными (характерные энергии кулоновского взаимодействия между частицами комплекса много меньше энергии размерного квантования), D^- комплексы обладают рядом отличительных особенностей. Теоретическое описание двумерных D^- комплексов пределе большого поля было дано в работах [54-57]. Было показано, что основным состоянием D^- комплекса с примесью внутри квантовой ямы в магнитном поле является

спиновый синглет. В эксперименте наблюдаются линии, соответствующие циклотронным переходам электронов из спин-синглетного (S) состояния D^- комплексов с нулевого уровня Ландау [58]. Методом инфракрасной спектроскопии [59-61] была получена оценка для энергии связи D^- комплекса в AlGaAs/GaAs квантовой яме, которая находится в хорошем согласии с теоретическими расчетами [62].

D^- комплексы, в которых электроны находятся в квантовой яме, а положительный заряд – в барьере [63], представляют интерес, связанный с особенностями роста квантовых ям. В квантовой яме концентрация заряженных примесей может быть сделана достаточно малой (на уровне $\sim 10^8$ см $^{-1}$), поэтому их влиянием на свойства двумерного электронного газа обычно пренебрегают. Число положительно заряженных примесей в AlGaAs барьере квантовой ямы, находящихся вблизи двумерной плоскости, почти на два порядка больше ($\sim 10^{10}$ см $^{-1}$), и именно они определяют оптические и транспортные свойства двумерного электронного газа малой плотности.

Один из главных вопросов при экспериментальном исследовании барьерных D^- комплексов – определение местоположения ионизованного донора. Положение ионизованного донора можно найти путем количественного сравнения результатов теоретического расчета с экспериментом. Для ответа на этот вопрос были рассчитаны энергии синглетных и триплетных D^- комплексов в зависимости от магнитного поля и положения заряженной примеси. Расчет энергии связанных состояний для подобных комплексов проводился с учетом конечной ширины квантовой ямы.

При рассмотрении спектра возбуждений D^- комплексов в сильном магнитном поле локализирующее действие заряженной примеси рассматривается как слабое возмущение к гамильтониану свободных электронов [54, 63]. Волновые функции электронов в z -направлении $\psi(z)$ (ось z направлена перпендикулярно плоскости ямы, $z = 0$ соответствует середине ямы) можно определить, решая совместно уравнения Шредингера и Пуассона при заданной концентрации электронов (для строго двумерного случая $\psi(z) = \delta(z)$). Ионизованный донор (положительный заряд) расположен на некотором расстоянии Z от слоя электронов, в барьере, а его положение в плоскости соответствует началу

координат. Кулоновское взаимодействие электронов между собой выражается как

$$V(r) = \frac{e^2}{\varepsilon} \int \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z_1 - z_2)^2}} \psi^2(z_1) \psi^2(z_2) dz_1 dz_2, \quad (1.32)$$

здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ - двумерные радиус-вектора электронов. Кулоновское взаимодействие электронов ($i = 1, 2$) с положительным зарядом

$$V(r_i, Z) = \frac{e^2}{\varepsilon} \int \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + (z - Z)^2}} \psi^2(z) dz \quad (1.33)$$

В сильном магнитном поле, направленном вдоль оси z , энергию D^- комплекса можно найти, рассматривая кулоновское взаимодействие $V(r) + V(r_1) + V(r_2)$ как возмущение [55, 63].

Волновые функции электронов нулевого уровня Ландау вырождены по проекции момента M на ось z и при выборе аксиальной калибровки векторного потенциала имеют вид

$$\psi_{M_i}(r_i, \varphi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_H}} \left(\frac{r_i}{a_H}\right)^M e^{-iM\varphi} e^{-\frac{r_i^2}{4a_H^2}} \quad (1.34)$$

a_H -магнитная длина. Волновая функция пары электронов зависит от их спинового состояния, поскольку полная волновая функция двух фермионов должна быть антисимметричной. Для спинового синглета координатная часть симметрична, и электроны могут находиться в одинаковых состояниях с нулевым моментом. Волновая функция пары имеет вид

$$\Psi_S = \psi_0(r_1, \varphi_1) \psi_0(r_2, \varphi_2) \quad (1.35)$$

Для спинового триплета координатная часть антисимметрична, электроны находятся в разных орбитальных состояниях. Полный орбитальный момент пары $M = 1$, а волновая функция имеет вид

$$\Psi_T = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(r_1, \varphi_1) \psi_1(r_2, \varphi_2) - \psi_1(r_1, \varphi_1) \psi_0(r_2, \varphi_2)) \quad (1.36)$$

Кулоновское взаимодействие не изменяет проекцию орбитального движения, что позволяет для нахождения энергии взаимодействия электронов с положительным зарядом пользоваться теорией возмущений для невырожденных состояний. Гамильтониан системы двух электронов в гармоническом потенциале и, в

частности, в магнитном поле допускает разделение переменных в координатах центра масс $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ и относительного движения электронов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, что удобно использовать для определения энергии взаимодействия электронов. Поскольку волновая функция центра масс $\Psi_0(R, \Phi)$ всегда четна относительно перестановки координат электронов, то различия в четности для синглета и триплета определяются только функцией относительного движения $\Psi_0(r, \varphi)$, имеющей тот же вид, что и волновые функции электронов $\psi_{M_i}(r_i, \varphi_i)$, с заменой a_H на $\sqrt{2}a_H$.

Для синглета с $M = 0$

$$\Psi_S = \Psi_0(R, \Phi)\Psi_0(r, \varphi), \quad (1.37)$$

а для триплета с $M = 1$

$$\Psi_T = \Psi_0(R, \Phi)\Psi_1(r, \varphi). \quad (1.38)$$

Энергии взаимодействия электронов с положительным зарядом

$$E_{Di}(Z) = \langle \psi_i(r, \varphi) | V(r, Z) | \psi_i(r, \varphi) \rangle, \quad (1.39)$$

а энергии взаимодействия электронов между собой

$$E_{Ii} = \langle \Psi_i(r, \varphi) | V(r) | \Psi_i(r, \varphi) \rangle. \quad (1.40)$$

Энергия синглета с моментом $M = 0$

$$E_{S0} = E_{I0} - 2E_{D0}(Z). \quad (1.41)$$

Энергия триплета с моментом $M = 1$

$$E_{T1} = E_{I1} - E_{D1}(Z) - E_{D0}(Z). \quad (1.42)$$

Энергия связи двух электронов определяется как разница между полной энергией и энергией взаимодействия электрона с положительным зарядом. Для синглета

$$\Delta E_{S0} = E_{I0} - E_{D0}(Z), \quad (1.43)$$

а для триплета

$$\Delta E_{T1} = E_{I1} - E_{D1}(Z). \quad (1.44)$$

Разность энергий синглета и триплета с учетом одночастичной зеемановской энергии $E_Z = 2\mu g_e^* H$ (g_e^* -эффективный g-фактор электронов в GaAs)

$$E_S - E_T = E_{I0} - E_{I1} + E_{D1}(Z) - E_{D0}(Z) + E_Z, \quad (1.45)$$

При изменении магнитного поля происходит изменение основного состояния барьерного D^- комплекса с триплетного на синглетное. Характеристикой этого изменения является зануление энергии возбуждения $1T \rightarrow 0S$. Аналогичное изменение основного состояния системы двух электронов, локализованных в гармоническом потенциале, обсуждалось в работе [64]. Варьированием Z -координаты положительного заряда можно достичь количественного совпадения экспериментальных и теоретических результатов. Согласие с экспериментом наблюдается, если поместить положительный заряд на гетероинтерфейс - границу между квантовой ямой и барьером. Если отодвинуть донор всего на 1 нм от гетероинтерфейса, согласие с экспериментом уменьшается на 30 процентов (рис.1.10). Для квантовой ямы с шириной 20 нм переход синглет-триплет происходит при поле около $3T$. Теоретическое и экспериментальное значения для критического магнитного поля несколько отличаются, поскольку теория возмущений не вполне применима при меньших магнитных полях. Сравнение экспериментальных данных и расчетов позволяет сделать вывод, что ионизованный донор расположен на границе, разделяющей квантовую яму и барьер. Известно, что диффузия объемных примесей в AlGaAs барьере в процессе эпитаксиального роста существенно замедляется на дефектах решетки гетероинтерфейса GaAs/AlGaAs. Из анализа интенсивностей линий рамановского рассеяния можно заключить, что концентрация ионизованных доноров на гетероинтерфейсе должна на порядок превышать среднюю концентрацию ионизованных доноров в барьере квантовой ямы.

Экспериментальные исследования проводились на серии селективно-легированных GaAs/AlGaAs квантовых ям шириной 17–30 нм. Концентрации в квантовых ямах составляли $3 - 15 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$. Измерения проводились при температурах 0.3–1.5 К в диапазоне магнитных полей 0–15 Т, было возможно изменять угол между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости квантовой ямы. Свойства исследуемой Т-линии позволяют однозначно связать

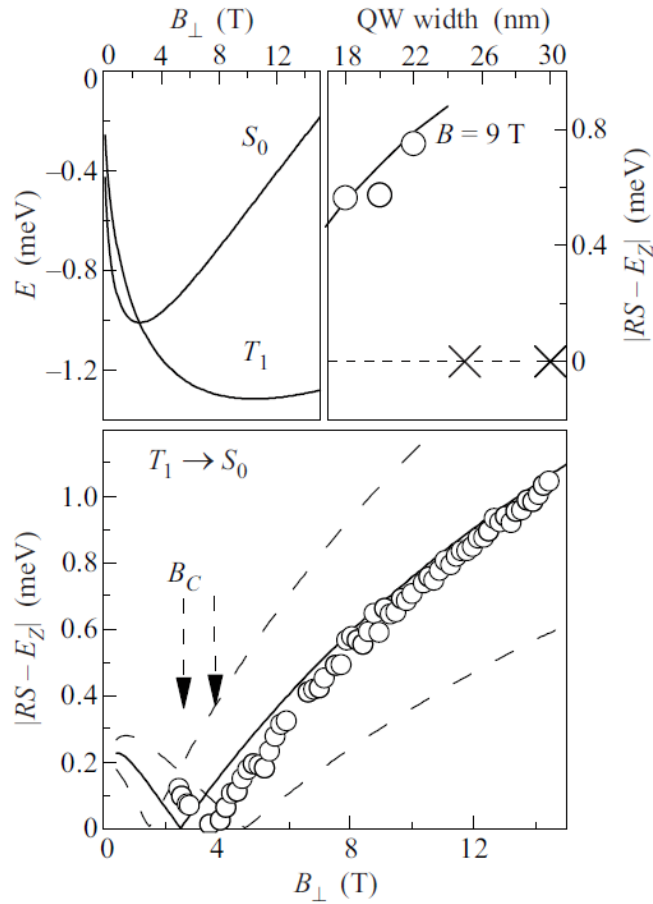


Рис.1.10. Внизу: теоретические (сплошная и штриховые линии) и экспериментальная (кружки) энергии возбуждения $1T \rightarrow 0S D^-$ комплекса для ямы шириной 20 нм. Сплошная линия соответствует положению донора на интерфейсе, штриховые – смещению на 1 нм в обе стороны. Стрелками указаны теоретическое и экспериментальное магнитные поля, в которых изменяется симметрия основного состояния D^- комплекса. Верху слева: теоретические зависимости энергий синглета и триплетта D^- (яма – 20 нм, донор – на интерфейсе). Верху справа: зависимость энергии возбуждения от ширины ямы.

ее с внутриуровневым возбуждением барьерного D^- комплекса. Зависимость энергии возбуждения от компоненты магнитного поля вдоль квантовой ямы

(B_{\parallel}) при постоянной перпендикулярной компоненте (B_{\perp}) соответствует зеемановскому расщеплению, следовательно, наблюдаемое возбуждение связано с изменением проекции спина электрона вдоль магнитного поля. Оставшаяся часть энергии возбуждения зависит только от перпендикулярной компоненты магнитного поля, причем растет даже при факторах заполнения электронов меньше 1/10, когда электронная система может рассматриваться как совокупность невзаимодействующих D^{-} комплексов [65].

В заключение можно резюмировать, что впервые рассчитаны и обнаружены возбуждения барьерных D^{-} комплексов, связанные с изменениями внутриуровневых степеней свободы электронов комплекса, проведено прямое сравнение экспериментально полученных энергий электронных возбуждений с теоретическими расчетами.

1.5. Выводы к главе 1.

1. Для системы электронов в квантовой яме на основе GaAs с несколькими уровням размерного квантования рассмотрены спектры межподзонных коллективных возбуждений спиновой и зарядовой плотности в пределе сильного магнитного поля. Показано, что как для переходов без изменения уровня Ландау, так и для бернштейновских мод все возбуждения имеют многомодовую структуру, число мод определяется фактором заполнения. Впервые полученный результат появления новых мод вблизи целочисленных факторов заполнения позволил дать правильное объяснение экспериментально наблюдаемой линии, ранее интерпретируемой как линия одночастичных возбуждений.

2. Для системы электронов в квантовой яме на основе GaAs с несколькими уровням размерного квантования без магнитного поля показана возможность существования межподзонных коллективных возбуждений спиновой и зарядовой плотности с различными значениями проекции момента на нормаль к плоскости движения.

3. Для системы двумерных электронов показано влияние электрон-электронных корреляций на энергию комбинированного спин-флип возбуждения в ультраквантовом пределе при факторах заполнения от 0 до 1.

4. В квантовой яме на основе GaAs в пределе сильного магнитного поля проведен расчет энергии спиновых возбуждений примесных комплексов, состоящих из двух электронов в квантовой яме и неподвижной заряженной примеси, и доказана интерфейсная природа заряженных примесей.

Глава 2. Плазменные и магнитоплазменные возбуждения в двойных квантовых ямах.

2.1. Обзор литературы.

Двойные электронные слои как пример двухкомпонентных двумерных систем со свойствами, варьируемыми в широких пределах, представляют значительный интерес для фундаментальных исследований. Спектр возбуждений двухкомпонентных систем обладает рядом особенностей, отмеченных впервые в работе Пайнса и Шриффера [66]. Одна из них - возникновение бесщелевой плазменной моды с линейным законом дисперсии - акустического плазмона. Акустическая плазменная ветвь была также предсказана теоретически и наблюдалось экспериментально в двойных слоях с кулоновской связью [67-69]. Вопрос о изменении спектра плазменных возбуждений при включении туннелирования между слоями остается открытым. В общем виде задача о влиянии туннельного взаимодействия на спектр возбуждений в двуслойных системах была рассмотрена еще в 1981 году [67], однако описание плазменных возбуждений в экспериментально реализуемых системах остается актуальным. Туннелирование достаточно легко учесть в системах с сильной туннельной связью, в случае которых правильнее говорить на языке подзон, а не слоев [70-72]. В случае слабой туннельной связи теоретические исследования [73-75] дают спектр плазменных возбуждений, который не полностью согласуется с экспериментом [76]. Известно [69], что в отсутствие внешнего магнитного поля в спектре коллективных возбуждений зарядовой плотности (CD возбуждений) в двойных квантовых ямах присутствуют две плазменные моды. Для системы из двух электронных слоев без туннелирования одна из мод - оптический плазмон (OP) с корневым законом дисперсии, соответствующий синфазным колебаниям плотности заряда в слоях, другая мода - акустический плазмон (AP) с линейным законом дисперсии, соответствующий антифазным колебаниям. Кроме того, существуют одночастичные возбуждения 2D электронного газа (SPE).

2.2. Влияние пространственной асимметрии системы на спектр и дисперсионные свойства плазменных возбуждений в туннельно связанных двуслойных электронных системах.

В данном разделе рассмотрены плазменные возбуждения в двуслойной электронной системе со слабой туннельной связью. Исследовано влияние пространственной симметрии системы двойных слоев на спектр плазменных возбуждений. Теоретически показано, что плазменные возбуждения в системах с различной пространственной симметрией в области энергий, превышающих параметр туннелирования, имеют аналогичные физические свойства [7].

Рассмотрим плазменные возбуждения в двуслойной квазидвумерной электронной системе. Заполнены только две подзоны, остальные расположены существенно выше по энергии. Случай равновесный - энергия Ферми общая для обеих подзон. Спин не учитывается. При рассмотрении задачи о плазменных возбуждениях для двух туннельно связанных квантовых ям l и r удобно использовать приближение туннельного гамильтониана [77, 78]:

$$H = \sum_{\mathbf{k}, i, i'} (E_{\mathbf{k}}^i a_{i\mathbf{k}}^+ a_{i\mathbf{k}} - \frac{\Delta_{SAS}}{2} (a_{i\mathbf{k}}^+ a_{i'\mathbf{k}} + a_{i'\mathbf{k}}^+ a_{i\mathbf{k}})) = \sum_{\mathbf{k}, j} \tilde{E}_{\mathbf{k}}^j A_{j\mathbf{k}}^+ A_{j\mathbf{k}} \quad (2.1)$$

где $E_{\mathbf{k}}^{l,r} = E_0 \pm \frac{\Delta E}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} k^2$ - энергии электронов в квантовых ямах (слоях) без туннелирования, $E_0 \pm \frac{\Delta E}{2}$ - энергия электрона в первой квантовой подзоне каждой из ям, Δ_{SAS} - параметр туннельной связи (в симметричном случае - туннельная щель), ΔE - параметр асимметрии (разность энергий электронов в квантовых ямах без туннелирования), $a_{i\mathbf{k}}^+$, $a_{i\mathbf{k}}$, - операторы рождения и уничтожения электронов в двух ямах ($i=1,r$), \mathbf{k} - импульс электрона в плоскости. $A_{j\mathbf{k}}^+$, $A_{j\mathbf{k}}$ - операторы рождения и уничтожения электронов в подзонах ($j=1,2$). Условие применимости этого приближения $E_0 \gg \Delta_{SAS}$, $E_0 \gg \Delta E$ - волновые функции электронов в каждой из ям ψ_l , ψ_r практически не зависят от этих параметров. Если сами ямы, а не только энергии E_0 одинаковы, то можно считать $\psi_l(z) = \psi_r(-z)$ (0 соответствует центру барьера).

Энергии электронов в подзонах имеют вид

$$\tilde{E}_{\mathbf{k}}^{1,2} = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{\Delta E^2 + \Delta_{SAS}^2} \quad (2.2)$$

Волновые функции электронов в подзонах в z -направлении и операторы рождения и уничтожения преобразуются по следующему закону

$$\begin{aligned} \Psi_j &= C_{ji}\psi_i(z), \quad A_{j\mathbf{k}} = C_{ji}a_{i\mathbf{k}}, \quad A_{j\mathbf{k}}^+ = C_{ji}a_{i\mathbf{k}}^+ \quad (j = 1, 2, \quad i = l, r) \\ C_{jl} &= \frac{\Delta_{SAS}}{\sqrt{\Delta_{SAS}^2 + 4(E_{\mathbf{k}}^l - \tilde{E}_{\mathbf{k}}^j)^2}}, \quad C_{jr} = \frac{2(E_{\mathbf{k}}^l - E_{\mathbf{k}}^j)}{\sqrt{\Delta_{SAS}^2 + 4(E_{\mathbf{k}}^l - \tilde{E}_{\mathbf{k}}^j)^2}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

C_{ji} не зависят от импульса \mathbf{k} .

Рассмотрим плазменные возбуждения в области импульсов и частот

$$\Delta \ll \hbar qv_F \ll E_F, \quad \omega \gg qv_F \quad (v_F = \frac{\hbar k_F}{m}) \quad (2.4)$$

Поскольку $\Delta \ll E_F$, концентрации частиц в подзонах $n_{1,2}$ близки ($n_1, n_2 \simeq n$).

Расчет спектров плазменных колебаний проводится в приближении RPA. Согласно [67], спектр плазменных волн получается из требования обращения в нуль детерминанта системы для компонент потенциала $U_{ij}(q)$.

$$U_{ij}(q) + \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \sum_{n,m} J_{ij,nm}(q) \Pi_{nm}^0(q) U_{nm}(q) = 0 \quad (2.5)$$

где

$$J_{ij,nm}(q) = \int \Psi_i(z) \Psi_j(z) e^{-q|z-z_0|} \Psi_n(z_0) \Psi_m(z_0) dz dz_0 \quad (2.6)$$

$$\Pi_{nm}^0(q, \omega) = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_n(\mathbf{k}) - f_m(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\tilde{E}_{\mathbf{k}}^n - \tilde{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^m + \omega + i\delta} \quad (2.7)$$

При выполнении условий (2.4) все Π_{ij}^0 можно считать одинаковыми:

$$\Pi_{ij}^0 = \Pi^0(q, \omega) = \frac{m}{\pi} \left[1 - \left(1 - \frac{q^2 v_F^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} \right] = - \frac{mq^2 v_F^2}{2\pi\omega^2} \quad (2.8)$$

Заметим, что такая же система уравнений будет и для матрицы плотности $\langle \rho_{ij}^+(q) \rangle$, и для полного поляризационного оператора. Оператор матрицы плотности выражается через операторы рождения и уничтожения электронов в подзонах

$$\rho_{ij}^+(q) = \sum_k A_{j\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ A_{i,\mathbf{k}} \quad (2.9)$$

Рассмотрим два предельных случая симметричных и асимметричных двойных слоев. В дальнейшем, будем называть симметричным или асимметричным такое состояние двойных слоев, в котором волновые функции одночастичных состояний в подзонах обладают или не обладают четностью.

1) Система асимметрична, туннелирование пренебрежимо мало, и при вычислении волновых функций его можно не учитывать

$$\Delta_{SAS} \ll \Delta E, \quad \Psi_1 = \psi_l(z), \quad \Psi_2 = \psi_r(z) \quad (2.10)$$

Понятия "слой" и "подзона" совпадают. Условие (2.4) можно заменить на более мягкое $\Delta_{SAS} \ll \hbar q v_F \ll E_F$, $\Delta \ll E_F$. Вследствие малости туннелирования при вычислении форм-факторов $J_{ij, nm}$ можно пренебречь перекрытием волновых функций. Тогда

$$J_{ij, nm}(k) = J_{ii, nn} \delta_{ij} \delta_{nm} \quad (2.11)$$

δ_{ij} - символ Кронекера. Нет не только зацепления внутривозонных и межподзонных переходов, но и самих межподзонных (в данном случае межслоевых) переходов. В этом случае при $qL \ll 1$, $qD \ll 1$ (L , D - эффективные толщина слоя и расстояние между слоями) существуют две ветви плазменных колебаний [67]. Одна из них - "оптический" плазмон - характеризуется обычным для двумерного плазмона корневым законом дисперсии и соответствует синфазным колебаниям частиц в обоих слоях:

$$\omega_+^2 = \frac{2\pi e^2 q}{\varepsilon m} (n_1 + n_2) \simeq \frac{2\pi e^2 q}{\varepsilon m} 2n \quad (2.12)$$

Синфазным колебаниям электронной плотности частиц в слоях соответствует оператор

$$\rho_{11}^+(q) + \rho_{22}^+(q) = \rho_{ll}^+(q) + \rho_{rr}^+(q) \quad (2.13)$$

Колебание, синфазное по слоям, одновременно синфазное и по подзонам.

Второй тип плазменных колебаний - "акустический" плазмон с линейным законом дисперсии

$$\omega_-^2 = \frac{2\pi e^2 D q^2}{\varepsilon m} \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} \simeq \frac{2\pi e^2 D q^2}{\varepsilon m} n \quad (2.14)$$

соответствующий антифазным колебаниям электронной плотности в слоях и антифазным в подзонах:

$$\rho_{11}^+(q) - \rho_{22}^+(q) = \rho_{ll}^+(q) - \rho_{rr}^+(q) \quad (2.15)$$

Эффективные толщина слоя и расстояние между слоями:

$$L = L_l = L_r = \int \psi_l^2(z) |z - z_0| \psi_l^2(z_0) dz dz_0; \quad (2.16)$$

$$D = \int \psi_l^2(z) |z - z_0| (\psi_r^2(z_0) - \psi_l^2(z_0)) dz dz_0 \quad (2.17)$$

2). Система симметрична:

$$\Delta_{SAS} \gg \Delta E, \quad \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_l(z) + \psi_r(z)), \quad \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_l(z) - \psi_r(z)) \quad (2.18)$$

$$A_{1\mathbf{k}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{l\mathbf{k}}^+ + a_{r\mathbf{k}}^+); \quad A_{2\mathbf{k}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{l\mathbf{k}}^+ - a_{r\mathbf{k}}^+) \quad (2.19)$$

В этом случае межподзональные и внутриподзональные возбуждения независимы. С учетом (2.6, 2.16-2.18) выражения для форм-факторов следующие:

$$I_{ii,ii} = I_{ii,jj} = 1 - \frac{1}{2}q(D + 2L), \quad I_{ij,ij} = I_{ij,ji} = \frac{1}{2}qD \quad (i \neq j) \quad (2.20)$$

Уравнение для внутриподзональных возбуждений с учетом (2.20) имеет вид

$$1 + 2\gamma I_{11,11} \Pi^0 = 0, \quad \gamma = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \quad (2.21)$$

и имеет только одно решение. Это двумерный плазмон с корневым законом дисперсии (2.12), который представляет синфазные по подзонам колебания электронной плотности (они же синфазные по слоям). В этом легко убедиться, воспользовавшись соотношением (2.19)

$$\rho_{11}^+(q) + \rho_{22}^+(q) = \sum_k A_{1\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ A_{1,\mathbf{k}} + \sum_k A_{2\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ A_{2,\mathbf{k}} = \rho_{ll}^+(q) + \rho_{rr}^+(q) \quad (2.22)$$

Характерной особенностью симметричного состояния является отсутствие в спектре бесщелевой плазменной моды с линейным законом дисперсии - акустического плазмона, который является противофазным колебанием плотности заряда в симметричной и антисимметричной подзонах. Энергия акустического плазмона определяется разностью в кулоновском взаимодействии электронов в разных подзонах, а поскольку электронная плотность в двух подзонах симметричных двойных слоев распределена почти одинаково, мода акустического плазмона в этом приближении отсутствует (при более точном рассмотрении попадает в континуум одночастичных состояний).

Однако существует возбуждение, связанное с межподзонными переходами - туннельный плазмон. Его энергия с учетом соотношения (2.20) определяется из уравнения

$$1 + 2\gamma I_{12,12}\Pi^0 = 0 \quad (2.23)$$

и совпадает с формулой (2.14) для энергии акустического плазмона для случая двух туннельно несвязанных слоев. Это межподзонное возбуждение соответствует антифазным по слоям колебаниям электронной плотности:

$$\rho_{12}^+(q) + \rho_{21}^+(q) = \sum_k A_{2\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ A_{1,\mathbf{k}} + \sum_k A_{1\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ A_{2,\mathbf{k}} = \rho_{ll}^+(q) - \rho_{rr}^+(q) \quad (2.24)$$

3). Общий случай - соотношение между Δ_{SAS} и ΔE произвольно. В этом случае внутриподзонные и межподзонные переходы не разделяются. Однако и в этом случае можно показать, что существует двумерный плазмон с корневым законом дисперсии, соответствующий синфазным колебаниям электронной плотности как по подзонам, так и по слоям. Можно также показать, что из оставшихся возбуждений в интересующий интервал частот попадает решение, энергия которого опять совпадает с энергией "акустического" плазмона. Это возбуждение комбинированное внутриподзонно-межподзонное, но опять-таки антифазное по слоям.

Это рассмотрение нашло свое экспериментальное подтверждение (изложено в совместной работе [7]). Методом неупругого рассеяния света была исследована система со слабым туннелированием, для которой применимо при-

ближение туннельного гамильтониана. Использовались симметрично легированные AlGaAs/GaAs двойные квантовые ямы с концентрацией электронов $3.6 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$ в каждой яме. Ширина квантовых ям 200 \AA , ямы разделены барьером 25 \AA . Изменение симметрии системы достигалось дополнительной подсветкой HeNe лазером с энергией фотона больше ширины запрещенной зоны в барьере, что вызывало изменение концентраций ионизованных доноров в одной из квантовых ям. Электронные концентрации и межподзонные энергии измерялись из спектров неупругого рассеяния света и фотолюминесценции [79]. Рассматриваемая область импульсов $\sim 8 \times 10^4 \text{ см}^{-1}$. Для характеристики степени асимметрии использовался параметр $\delta = (N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)$, где $N_{1,2}$ - концентрации ионизованных доноров по обе стороны двухслойной структуры.

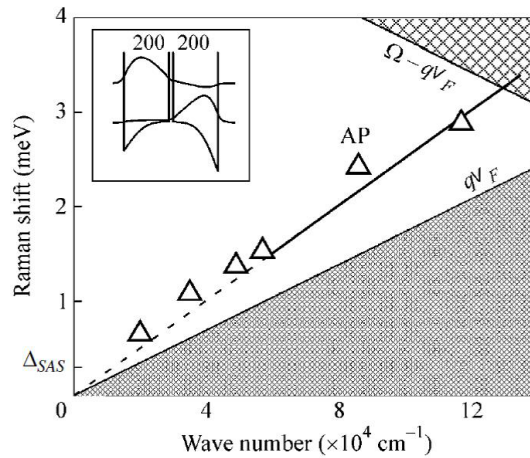


Рис. 2.1. Экспериментальная (треугольники) и расчетная (сплошная) дисперсионные зависимости энергии акустического плазмона (AP) в асимметричных двойных слоях с параметром асимметрии $\delta = 0.3$. Заштрихованными областями показаны континуумы одночастичных возбуждений. На вставке показаны вид самосогласованного потенциала и волновые функции подзон.

Случай асимметричных двойных слоев проиллюстрирован на рис. 2.1. Волновые функции электронов из двух нижайших подзон размерного квантования локализованы в разных слоях. В спектрах наблюдается бесщелевая аку-

стическая плазменная мода с линейной дисперсией. Ее энергия согласуется с теоретическим результатом (2.14). Для сравнения с экспериментом использовались волновые функции для двух нижайших размерно-квантованных подзон, полученные самосогласованным решением одномерных уравнений Шредингера и Пуассона для параметров квантовой ямы, соответствующих условиям эксперимента.

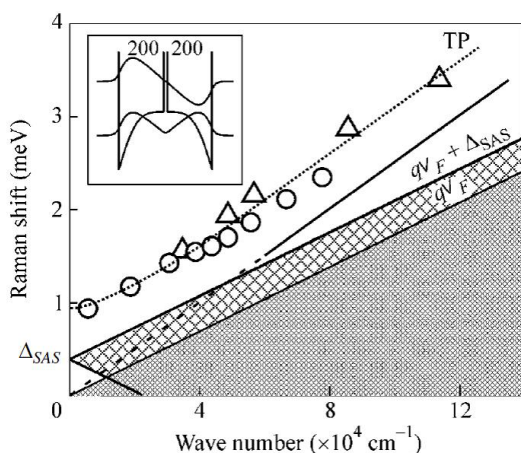


Рис. 2.2. Экспериментальная (треугольники для световодной и кружки для стандартной методик) и расчетная (сплошная линия) дисперсионные зависимости туннельного плазмона (TP) в симметричных двойных слоях $\delta = 0$. Заштрихованными областями показаны континуумы одночастичных возбуждений. Пунктирная линия показана для удобства. На вставке приведены форма самосогласованного потенциала и волновые функции подзон.

Случай симметричных двойных слоев показан на рис. 2.2. При $\Delta_{SAS} \ll \hbar qv_F$ существует область линейной дисперсии с наклоном, соответствующим наклону дисперсионной зависимости акустического плазмона в асимметричных слоях.

В длинноволновом пределе $\Delta_{SAS} \sim \hbar qv_F$ туннельный плазмон является щелевой модой, плазменная щель обусловлена деполяризационным сдвигом и значительно (почти в 3 раза) превышает одночастичную туннельную щель Δ_{SAS} (эта область выходит за рамки рассматриваемого приближения). Ранее предполагалось [74, 75], что туннельный плазмон - это не отдельная плазменная мода,

а мода акустического плазмона, у которой открывается длинноволновая плазменная щель при увеличении туннельной связи между слоями. Действительно, туннельная мода (для симметричного случая) и акустическая (для асимметричного) обладают линейными дисперсионными зависимостями при $\Delta_{SAS} \ll \hbar qv_F$, причем наклоны этих зависимостей сравниваются с уменьшением туннельной связи. Различить две плазменные моды можно, либо непрерывно увеличивая туннельную связь между слоями (что достаточно сложно выполнить экспериментально), либо изменяя симметрию двойных слоев.

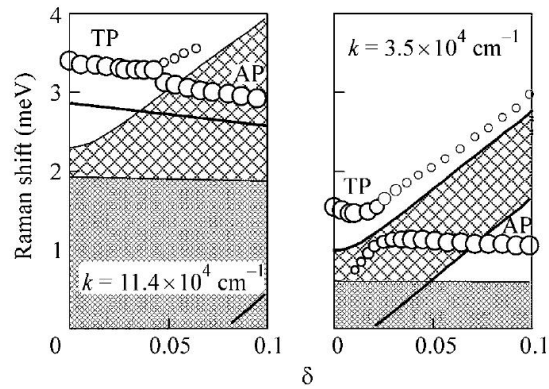


Рис. 2.3. Экспериментальные энергии плазменных мод в зависимости от параметра асимметрии в переходной области (размер точек показывает экспериментальное сечение неупругого рассеяния света). Заштрихованными областями показаны континуумы внутриподзонных (темная область) и межподзонных (светлая область) одночастичных возбуждений.

На рис. 2.3 показана трансформация плазменных мод при изменении степени пространственной асимметрии системы. Приведены экспериментальные и теоретические зависимости энергии возбуждений в двух рассматриваемых пределах $\hbar qv_F \sim \Delta_{SAS}$ и $\Delta_{SAS} \ll \hbar qv_F$. В коротковолновом пределе $\Delta_{SAS} \ll \hbar qv_F$ в спектрах присутствует линия с энергией, слабо зависящей от δ , которая при $\delta < 0.02$ соответствует туннельному плазмону, а при $\delta > 0.05$ акустическому плазмону. Поскольку поперечное сечение неупругого рассеяния света пропорционально динамическому структурному фактору, то в соответствии с формулами

(2.15) и (2.24) поперечное сечение неупругого рассеяния света от туннельного плазмона в симметричном состоянии $\delta = 0$ и акустического плазмона в асимметричном состоянии $\delta > 0.05$ совпадают.

В длинноволновом пределе $\hbar qv_F \sim \Delta_{SAS}$ в спектре присутствуют две плазменные моды: акустический плазмон и туннельный плазмон. Переход от симметричного к асимметричному состоянию сопровождается уменьшением поперечного сечения неупругого рассеяния света туннельного плазмона, причем сам туннельный плазмон затухает на межподзонных одночастичных возбуждениях. Напротив, энергия акустического плазмона увеличивается, а при некотором параметре асимметрии двойной квантовой ямы она превышает граничную энергию одночастичного континуума. Таким образом существует асимметрия, при которой в спектре присутствуют две слабо затухающие плазменные моды (рис. 2.3). Туннельный и акустический плазмоны являются разными возбуждениями: акустический плазмон - это внутризонное возбуждение, а туннельный плазмон - межподзонное возбуждение, связанное с электронными переходами между нижайшими подзонами размерного квантования в двухслойной системе. Физические свойства туннельного и акустического плазмонов одинаковы только в коротковолновом пределе $\Delta_{SAS} \ll \hbar qv_F$. В противоположном пределе туннельный плазмон является возбуждением экситонного типа с квадратичной дисперсионной зависимостью [70-72]. Дисперсионная же зависимость акустического плазмона линейна и слабо зависит от величины туннельной щели.

2.3. Акустические и оптические плазмоны в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле.

Влияние внешнего магнитного поля на двумерные электронные системы, примером которых могут служить как одиночные, так и двойные квантовые ямы, исследуется достаточно давно, однако вплоть до настоящего времени представляет большой теоретический и экспериментальный интерес. Тем не менее, если свойства коллективных возбуждений в двумерных электронных системах в перпендикулярном поле изучаются достаточно широко (например, [80, 81], ра-

бот, посвященных рассмотрению влияния параллельного магнитного поля на спектр возбуждений, сравнительно немного [82-85].

В данном разделе рассмотрено влияние параллельного магнитного поля на спектр плазменных возбуждений в двойных GaAs/AlGaAs квантовых ямах [6]. Методом неупругого рассеяния света исследованы коллективные внутризонные возбуждения зарядовой плотности квазидвумерной электронной системы в двойных GaAs/AlGaAs квантовых ямах во внешнем параллельном магнитном поле B_{\parallel} . Обнаружено, что энергия исследуемых возбуждений (акустического и оптического плазмонов) демонстрирует анизотропию в зависимости от взаимной ориентации H_{\parallel} и квазиимпульса возбуждения \mathbf{k} . Теоретически показано, что в сильном параллельном магнитном поле эффекты, обусловленные влиянием конечной ширины квантовых ям, преобладают над эффектами, связанными с туннелированием между слоями, и определяют анизотропию плазмонов. Проведено сопоставление теоретических и экспериментальных результатов.

Для теоретического определения энергии плазмонов в большинстве случаев достаточно приближения случайных фаз (RPA)[67, 68], без учета обменного взаимодействия между электронами. Так, для случая бесконечно тонких электронных слоев с равными концентрациями N без учета туннелирования между слоями, в отсутствие параллельного магнитного поля энергии плазменных колебаний следующие:

$$\omega_{OP} = \left(\frac{4\pi e^2 N k}{\epsilon m} \right)^{1/2} ; \quad \omega_{AP} = k v_F \frac{(1 + 2b/a_B)}{(1 + 4b/a_B)^{1/2}} \quad (2.25)$$

где b - расстояние между слоями, k - импульс возбуждения, a_B - боровский радиус электрона, k_F - импульс Ферми, $v_F = \hbar k_F / m$. Учет конечной толщины слоев приводит к изменению взаимодействия между электронами и, как следствие, к следующему изменению дисперсии плазмонов :

$$\omega_{OP,AP} \rightarrow \omega_{OP,AP} (1 - const * ka) \quad (2.26)$$

где a - характерная толщина слоя, однако при $ka \ll 1$ это изменение незначительно.

Влияние слабого туннелирования ($E_0 \gg \Delta_{SAS}$, где E_0 - энергия нижнего уровня, Δ_{SAS} - величина расщепления энергетических уровней) в области частот $\hbar\omega \gg \Delta_{SAS}$ также сводится лишь к малым поправкам [74, 86].

Спектр коллективных возбуждений в двойных квантовых ямах, находящихся в сильном магнитном поле, параллельном плоскостям движения электронов, определяется одновременным действием таких факторов, как магнитное поле, конечная ширина квантовых ям, туннелирование. Влияние параллельного магнитного поля для случая бесконечно тонких слоев, но конечного туннелирования рассмотрено в [77], однако этот случай недостаточно реалистичен, т.к. туннелирование всегда связано с конечной шириной слоев; кроме того, приведенные формулы в квадратурах и слишком мелкомасштабные графики делают невозможным сравнение с экспериментом. В работе [87] приведены данные конкретного численного расчета для широкой квантовой ямы, которая в сильном параллельном поле обнаруживает сходство с двойной квантовой ямой; необходимые факторы учтены, но вклад каждого из них проследить сложно.

Поэтому далее рассмотрены отдельно вклады каждого из определяющих факторов на спектр плазмонов и выявлены общие закономерности.

В общем случае волновые функции электронов находятся из уравнения Шредингера для электрона во внешнем потенциале $V_{DQW}(z)$, параллельном магнитном поле B и, в случае необходимости, самосогласованном потенциале Хартри $V_H(z)$.

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}(k_x - eBz)^2 + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} + V_{DQW}(z) + V_H(z)\right)\Psi_{lk}(z) = E_l(k)\Psi_{lk}(z) \quad (2.27)$$

Предполагается, что магнитное поле в этом уравнении можно рассматривать как возмущение ($\hbar\omega_c \ll E_l$).

Для двух электронных слоев без учета их конечной толщины и туннелирования учет параллельного поля приводит к сдвигу дисперсионных кривых

$$E_1 = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m}((k_x + k_H)^2 + k_y^2); \quad E_2 = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m}((k_x - k_H)^2 + k_y^2) \quad (2.28)$$

где $k_H = b/2a_H^2$, a_H - магнитная длина. При этом энергии плазменных колебаний не изменяются.

Для двух слоев конечной толщины в первом порядке теории возмущений результат аналогичен предыдущему, только вместо b войдет $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$, где

$$\bar{z}_i = \int_0^\infty \Psi_i^2(z) z dz$$

(i - номер слоя). Второй порядок теории возмущений (учет вышележащих подзон размерного квантования с номерами $l > 0$) приведет к анизотропии эффективной массы электронов:

$$E_1 = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m_H} (k_x + k_H)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} k_y^2; \quad E_2 = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m_H} (k_x - k_H)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} k_y^2 \quad (2.29)$$

где

$$\frac{1}{m_H} = \frac{1}{m} (1 - \gamma); \quad \gamma = \sum_i \frac{2\hbar^2 | \langle z \rangle_{0i} |^2}{m a_H^4 (E_i - E_0)} \quad (2.30)$$

Для случая параболической ямы (гармонический осциллятор с частотой ω_0) анизотропия массы электронов в магнитном поле находится точно [88]:

$\gamma = \omega_c^2 / (\omega_0^2 + \omega_c^2)$. Анизотропный закон дисперсии для электронов приводит, в свою очередь, к зависимости дисперсии плазмонов от угла φ между импульсом возбуждения и направлением параллельного магнитного поля:

$$\omega_{OP,AP} \rightarrow \omega_{OP,AP} (1 - \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (2.31)$$

Для асимметричного случая (ямы с разной анизотропией электронной массы γ_1 и γ_2 и разными электронными концентрациями n_1 и n_2) угловая зависимость энергии ОР и АР плазмонов также описывается формулой (2.31), но со следующими параметрами

$$\begin{aligned} \gamma_{OP} &= (\gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2) / (n_1 + n_2) \\ \gamma_{AP} &= (\gamma_2 n_1 + \gamma_1 n_2) / (n_1 + n_2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Величину анизотропии γ можно оценить для двух предельных случаев: а) узкая прямоугольная яма с бесконечными стенками; поправка за счет самосогласованного потенциала Хартри не учитывается; б) приближение треугольной

ямы (может служить моделью для широкой прямоугольной ямы с односторонним легированием): $\gamma_a = 1 - 0.04(a/a_H)^4$; $\gamma_b = 1 - 4(\langle z \rangle / a_H)^4$. В магнитном поле 7Т для образца А $\gamma_a = 0.4$; $\gamma_b = 0.2$; для образца В $\gamma_a = 0.7$; $\gamma_b = 0.13$. Реальное значение γ с учетом легирования и самосогласованного потенциала лежит в этом промежутке.

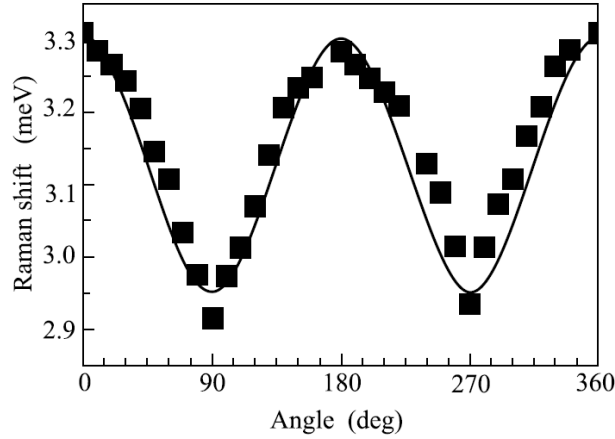


Рис. 2.4. Зависимость энергии АР двойной квантовой ямы 200/25/200 от величины угла между квазиимпульсом возбуждения в плоскости $k = 13 \times 10^4 \text{cm}^{-1}$ и направлением параллельного магнитного поля $H_{\parallel} = 7\text{T}$ в декартовых координатах при равенстве концентраций в обеих ямах: $n_1 = n_2 = 3.26 \times 10^{11} \text{cm}^{-3}$. Эксперимент - черные квадраты, теория - сплошная линия, $\gamma = 0.2$.

Учет туннелирования для бесконечно тонких слоев в сильном поле ($E_F < U$, $U = \hbar^2 k_H^2 / 2m$) [77], позволяет получить анизотропию дисперсии плазмонов такого же вида (2.31), но параметром, определяющим анизотропию, в данном случае является $(\Delta_{SAS} / 4U)^2$. Для исследуемых образцов ($\Delta_{SAS} < 1 \text{meV}$ эта величина $\sim 10^{-2}$, поэтому влияние туннелирования несущественно.

В эксперименте было возможно непрерывно менять угол между квазиимпульсом и вектором параллельного магнитного поля, что позволило исследовать зависимость энергии возбуждений от угла.

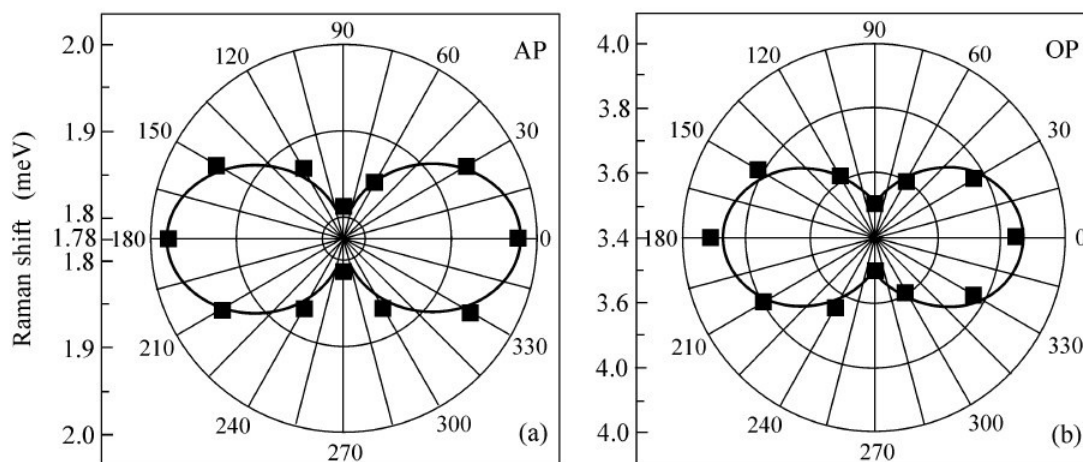


Рис.2.5. Зависимость энергии AP (a) и OP (b) двойной квантовой ямы 250/20/250 от величины угла между квазиимпульсом возбуждения в плоскости $k = 13 \times 10^4 \text{cm}^{-1}$ и направлением параллельного магнитного поля $H_{\parallel} = 7\text{T}$ при неравенстве концентраций в обеих ямах: $n_1 = 1.1 \times 10^{11} \text{cm}^{-3}$ и $n_2 = 5.5 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$). Эксперимент - черные квадраты, теория - сплошная линия, $\gamma = 0.17$.

Экспериментально исследовались два образца, выращенных методом молекулярно-пучковой эпитаксии. Образцы представляли собой две квантовые ямы GaAs, разделенные барьером AlGaAs, симметрично легированные с двух сторон δ -слоем Si. Структура (A) - с ямами шириной 200 Å и расстоянием между границами ям 25 Å (200/25/200), структура (B) - 250/20/250. Спектры неупругого рассеяния света детектировались со спектральным разрешением 0.02 мэВ. Измерения проводились при температуре 4.2 К с помощью двухсветовой методики в криостате с горизонтальной ориентацией магнит-

ного поля. Для образца А(200/25/200) суммарная концентрация электронов $7.2 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$, для образца В(250/20/250) при небольшой подсветке HeNe-лазером - $1.65 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Поворотом вставки вокруг вертикальной оси можно было менять угол между импульсом возбуждения и направлением параллельного магнитного поля φ в диапазоне от 0° до 360° . Небольшой подсветкой HeNe-лазером можно было изменять концентрации электронов в ямах, что позволило исследовать асимметричный случай.

Для сравнения теоретической зависимости (2.31) с экспериментальными результатами на рис.2.4 приведена угловая зависимость для образца А для энергии AP при $\gamma = 0.2$; на рис.2.5 приведены угловые зависимости для образца В для AP и OP при $\gamma = 0.17$ (значения энергий вдоль поля для построения теоретических кривых взяты из эксперимента). Экспериментальные и теоретические результаты хорошо соответствуют друг другу.

Полученные результаты позволяют утверждать, что для системы электронов в двойных квантовых ямах в сильном параллельном магнитном поле наблюдается заметная анизотропия спектров возбуждений. Анизотропия энергии оптического и акустического плазмонов обусловлена конечной толщиной электронных слоев, проявляющейся в анизотропии эффективной массы.

2.4. Влияние пространственной симметрии на магнитоплазмоны и магнитоэкситоны в двуслойной электронной системе со слабой туннельной связью.

Экспериментальная возможность изменять пространственную симметрию двуслойных систем со слабым туннелированием вызвала интерес к теоретическим аспектам. Экспериментально [89] симметрией можно управлять, изменяя концентрации ионизованных доноров по обе стороны от двуслойной структуры с помощью облучения лазером с энергией фотона большей ширины запрещенной зоны в барьере. Электрическое поле ионизованных доноров влияет на профиль ограничивающего потенциала двойной квантовой ямы. Без магнитного поля влияние пространственной симметрии на плазмоны в двуслойной системе со слабой туннельной связью рассматривалось автором в [7], влияние туннели-

рования рассмотрено в [74, 75], роль асимметрии, обусловленной положением дна или различной шириной квантовых ям, обсуждалась в [90].

В данном разделе рассматривается влияние асимметрии на коллективные возбуждения зарядовой и спиновой плотности в двуслойной системе при $\nu = 4$ (два спиновых подуровня каждой из двух нижайших подзон заполнены, все электроны находятся на нулевом уровне Ландау). Зеемановское расщепление пренебрежимо мало, но электронный спин учитывается. В случае слабого туннелирования удобно пользоваться методом туннельного гамильтониана [77]. Заполнены только две нижайшие подзоны, остальные подзоны находятся высоко по энергии и не учитываются. Гамильтониан системы в слоевом представлении без магнитного поля $H = H_0 + H_{int}$. Без учета взаимодействия

$$H_0 = \sum ((E_i + \frac{\hbar^2}{2m} k^2) a_{i\sigma\mathbf{k}}^+ a_{i\sigma\mathbf{k}} + \Delta_{SAS} (a_{i\sigma\mathbf{k}}^+ a_{i'\sigma\mathbf{k}} + a_{i'\sigma\mathbf{k}}^+ a_{i\sigma\mathbf{k}})) \quad (2.33)$$

$a_{i\sigma\mathbf{k}}^+$, $a_{i\sigma\mathbf{k}}$ операторы рождения и уничтожения электронов в слоях ($i = l, r$), σ спин электрона, \mathbf{k} импульс электрона в плоскости. $E_{l,r} = E_0 \pm \Delta_E$ энергия электрона в первой квантовой подзоне каждой ямы, Δ_E параметр асимметрии, зависящий от концентрации заряженных примесей, Δ_{SAS} параметр туннелирования. Если $\Delta_{SAS} \ll \Delta_E$, имеются два независимых слоя. Если $\Delta_E \ll \Delta_{SAS}$, имеются две подзоны, симметричная и асимметричная. Метод применим, если $E_0 \gg \Delta_{SAS}$, $E_0 \gg \Delta_E$, и волновые функции электронов в каждой из ям слабо зависят от вышперечисленных параметров. Гамильтониан без взаимодействия диагонален в подзонном представлении

$$H_0 = \sum (\tilde{E}_j + \frac{\hbar^2}{2m} k^2) A_{j\sigma\mathbf{k}}^+ A_{j\sigma\mathbf{k}} \quad (2.34)$$

$A_{j\sigma\mathbf{k}}^+$, $A_{j\sigma\mathbf{k}}$ - операторы рождения и уничтожения в подзонах ($j = 1, 2$). Энергии электронов в двух нижайших подзонах

$$\tilde{E}_{1,2} = E_0 \pm \sqrt{\Delta_E^2 + \Delta_{SAS}^2} \quad (2.35)$$

$A_{j\sigma\mathbf{k}} = C_{ji}a_{i\sigma\mathbf{k}}$, $A_{j\sigma\mathbf{k}}^+ = C_{ij}a_{i\sigma\mathbf{k}}^+$. После введения параметра φ , где $\Delta_{SAS} = \Delta\sin\varphi$, $\Delta_E = \Delta\cos\varphi$ преобразование можно записать в виде

$$C_{ji} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

Это преобразование по форме совпадает с поворотом в спиновом пространстве и может рассматриваться как поворот в изоспиновом пространстве. Отношение Δ_E / Δ_{SAS} служит мерой пространственной асимметрии и характеризует ориентацию в изоспиновом пространстве. Кулоновское взаимодействие электронов в слоевом представлении H_{int} имеет вид:

$$H_{int} = \sum V_{ii'}(q)a_{i\sigma\mathbf{k}+\mathbf{q}}^+ a_{i'\sigma'\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^+ a_{i'\sigma'\mathbf{k}'} a_{i\sigma\mathbf{k}} \quad (2.37)$$

$$V_{ii'}(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} \int \Psi_i^2(z)\Psi_{i'}^2(z_0)e^{-q|z-z_0|} dz dz_0 \quad (2.38)$$

где Ψ_i - волновые функции электронов в слоях. В подзонном представлении H_{int} имеет более сложный вид. В предположении, что нет межслоевых переходов за счет кулоновского взаимодействия, что справедливо, если поправки Хартри к энергиям подзон также малы.

Гамильтониан системы в магнитном поле с использованием калибровки Ландау в слоевом приближении

$$H = \sum ((E_i + n\omega_c)a_{i\sigma nk}^+ a_{i\sigma nk} + \Delta_{SAS}(a_{i\sigma nk}^+ a_{i'\sigma nk} + h.c.)) + H_{int} \quad (2.39)$$

где $a_{i\sigma nk}^+$, $a_{i\sigma nk}$ операторы рождения и уничтожения электронов в слоях ($i = l, r$) на n -м уровне Ландау, ω_c - циклотронная энергия, k параметр, обозначающий вырожденные состояния внутри одного уровня Ландау в калибровке Ландау. Магнитное поле сильное: $E_c \ll \omega_c$, где $E_c = e^2/\varepsilon a_H$, l_H магнитная длина. В этом случае задача аналогична рассмотренной в [22, 23] для однослойной системы. Для вычисления энергии возбуждений для переходов с нулевого на первый уро-

вень Ландау используется приближение Хартри-Фока. Соответствующие операторы для возбуждений с импульсом K а

$$Q_{ii'\sigma\sigma'}(K) = \sum_k a_{i'\sigma',1,k+K}^+ a_{i\sigma,0,k} \quad (2.40)$$

Известно, что существует 4 типа возбуждений в спиновом пространстве: магнитоплазмон с $S = 0$ ($Q_{ii'}^{MP}$), и три возбуждения, составляющих спиновый триплет: возбуждение спиновой плотности с $S = 1$ и $S_z = 0$ ($Q_{ii'}^{SD}$) и два возбуждения с переворотом спина с $S = 1$ и $S_z = \pm 1$ ($Q_{ii'}^\pm$). Гамильтониан (2.39) диагонален в спиновом пространстве, кулоновское взаимодействие и туннелирование также не меняют спин, и перечисленные 4 типа возбуждений могут рассматриваться независимо.

Для каждого из них ($S = MP, SD, +, -$) имеется 4 типа возбуждений в изоспиновом пространстве. По аналогии со спином, мы имеем одно состояние, не зависящее от симметрии, и триплет в изоспиновом пространстве. Соответствующие этим возбуждениям операторы следующие:

$$Q_O^S(K) = (Q_{ll}^S(K) + Q_{rr}^S(K))/\sqrt{2}$$

для не зависящего от симметрии (оптического) возбуждения;

$$Q_A^S(K) = (Q_{ll}^S(K) - Q_{rr}^S(K))/\sqrt{2}$$

для акустического возбуждения;

$$Q_{lr}^S(K), Q_{rl}^S(K)$$

для межслоевых возбуждений. Три последних образуют триплет в изоспиновом пространстве.

В приближении Хартри-Фока для каждого из возбуждений определенного спинового типа получается матричное 4×4 уравнение для энергий изоспиновых возбуждений ($Y = O, A, lr, rl$):

$$\langle Q_Y^+(K) [H Q_{Y'}(K)] \rangle - \omega_Y(K) \hat{I} = 0 \quad (2.41)$$

Далее будут использоваться обозначения $\Delta\omega_O = \omega_O^2(K)/2\omega_c$, $\Delta\omega_A = \omega_A^2(K)/2\omega_c$, где $\omega_O(K)$ и $\omega_A(K)$ энергии оптического и акустического плазмонов без магнитного поля в RPA приближении.

Энергия оптического магнитоузона отделяется

$$\omega_{Oc}(K) = \omega_c + \Delta\omega_O + \delta_X^K \quad (2.42)$$

$$\delta_X^K = \frac{1}{(2\pi)^2} \int V_{ii}(q)(1 - e^{i\mathbf{K}\mathbf{q}a_H^2})|J_{01}(qa_H)|^2 d\mathbf{q} \quad (2.43)$$

$$|J_{01}(qa_H)|^2 = \frac{(qa_H)^2}{2} e^{-\frac{(qa_H)^2}{2}} \quad (2.44)$$

Эта энергия не зависит от пространственной асимметрии и имеет основной линейный по K член за счет $\Delta\omega_O$. Изоспин-триплетные магнитоузональные состояния связаны, поскольку гамильтониан не диагонален в изоспиновом пространстве. Энергии коллективных возбуждений для магнитоузоналов определяются из следующего уравнения Lkz $\Omega = \omega^0 - \omega_c$

$$\det \begin{vmatrix} \Omega - \Delta\omega_A - \delta_X^K & \Delta_{SAS}/\sqrt{2} & \Delta_{SAS}/\sqrt{2} \\ \Delta_{SAS}/\sqrt{2} & \Omega + \Delta_E - \Delta_I^K & 0 \\ \Delta_{SAS}/\sqrt{2} & 0 & \Omega - \Delta_E - \Delta_I^K \end{vmatrix} = 0 \quad (2.45)$$

$$\Delta_I^K = \Delta_I^0 + \delta_I^K \quad (2.46)$$

$$\Delta_I^0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int (V_{ii}(q) - V_{ij}(q))|J_{01}(qa_H)|^2 d\mathbf{q} \quad (2.47)$$

$$\delta_I^K = \frac{1}{(2\pi)^2} \int V_{ij}(q)(1 - e^{i\mathbf{K}\mathbf{q}a_H^2})|J_{01}(qa_H)|^2 d\mathbf{q} \quad (2.48)$$

Для четырех возбуждений спиновой плотности (так же, как и для спин-флип возбуждений) соответствующие уравнения могут быть получены, если в (2.42) и (2.45) убрать члены $\Delta\omega_O$ и $\Delta\omega_A$. Существует симметричный внутрислоевой магнитоэкситон с энергией $\omega_X(K) = \omega_c + \delta_X^K$ (с нулевым изоспином) и три магнитоэкситона из изоспинового триплета. Если учитывать Зеемановскую энергию, то каждая этих из четырех энергий расщепится на спиновый триплет, $\omega \rightarrow \omega + \mu g H S_z$. При малых K , если $Kl_H \ll 1$, члены $\Delta\omega_A(K)$, δ_X^K и δ_I^K имеют слабую квадратичную зависимость K и могут быть опущены. При этих предположениях изоспин-триплетные состояния для всех четырех спиновых состояний совпадают по энергии.

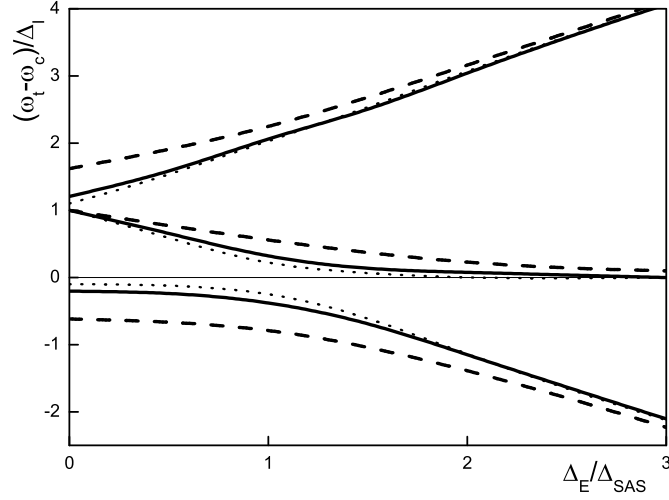


Рис.2.6. Зависимость энергий изоспинового триплета $(\omega_t(k) - \omega_c)/\Delta_I^0$ от степени пространственной асимметрии Δ_E / Δ_{SAS} при $\Delta_I^0/\Delta_{SAS} = 1$ (пунктир), 2(сплошная линия), 3(точки).

Рис.2.6 иллюстрирует зависимость энергий изоспинового триплета от пространственной асимметрии. Все линии изоспинового триплета могут наблюдаться со сравнимой интенсивностью только если Δ_I^0 , Δ_E и Δ_{SAS} одного порядка. В случае $\Delta_{SAS} \ll \Delta_E$ присутствуют акустическая магнитоплазменная мода (или внутрислоевая магнитоэкситонная мода) с энергией приблизительно равной ω_c и межслоевые моды с энергиями $\omega_c + \Delta_I^0 \pm \Delta_E$. Случай $\Delta_E \ll \Delta_{SAS}$ соответствует соответственно модам с энергиями

$$\omega_t^\pm(K) = \omega_c + \Delta_I^0/2 \pm \sqrt{(\Delta_I^0)^2/4 + \Delta_{SAS}^2}, \quad \omega_c + \Delta_I.$$

При рассмотрении влияния пространственной симметрии на возбуждения спиновой и зарядовой плотности в двуслойных электронных системах в магнитном поле при факторе заполнения $\nu = 4$ установлено, что энергии магнитоплазмонов и возбуждений спиновой плотности могут дать информацию о пространственной симметрии двуслойной системы. Энергии оптических магнитоплазмонов и внутрислоевых магнитоэкситонов (изоспиновый синглет) не зависят от симметрии системы. Три магнитоплазменных моды, также как и

три магнитоэкситонных моды (изоспиновый триплет) зависят от соотношения между параметрами асимметрии, туннелирования и разницы между энергиями внутрислоевого и межслоевого магнитоэкситонов. Зависимость от экспериментально изменяемого параметра Δ_E может быть обнаружена при малых K методом неупругого рассеяния света.

2.5. Взаимодействие межподзонных и плазменных возбуждений в двойных асимметричных полупроводниковых слоях.

В этом разделе рассмотрено взаимодействие межподзонных экситонов и оптических плазмонов в двойных асимметричных квантовых ямах вблизи энергии межподзонного перехода. Получено аналитическое выражение для величины расщепления энергий возбуждений и соответствующего импульса в асимметричных слоях с со слабым туннелированием в зависимости от параметров двойной квантовой ямы и межподзонной энергии. Исследовались влияние асимметрии, туннелирования и слабого магнитного поля.

Известно, что спектр возбуждений зарядовой плотности (CDE) в двуслойной системе без туннелирования состоит из двух мод. Это оптический плазмон (OP) с корневым законом дисперсии, соответствующий синфазным колебаниям зарядовой плотности в слоях, и акустический плазмон (AP) с линейным законом дисперсии, соответствующий анитфазным колебаниям зарядовой плотности в слоях. [67, 68, 91]. Двуслойные системы с туннелированием рассматривались в работах [67, 73-75, 86]. В [92] рассматриваются смешивание мод за счет асимметрии и антипересечение уровней; в случае сильного туннелирования, когда только одна из двух подзон заполнена, расщепление между подзонами и энергия оптического внутривидового плазмона получены аналитически, в общем случае результаты получены численно и качественно объясняются симметричным анализом.

В отсутствие магнитного поля для энергий, значительно превышающих межподзонное расщепление, возбуждения классифицируются как оптические и акустические плазмоны. Этот случай рассмотрен в предыдущем разделе [7]. Для малых импульсов в двуслойной системе с туннелированием имеется два следу-

ющих типа возбуждений: оптический плазмон (ОР) и межподзонный экситон, иногда называемый туннельным плазмоном (ТР). При слабом туннелировании удобно пользоваться методом туннельного гамильтониана [7, 77]. Считаются заполненными только две подзоны, остальные подзоны значительно выше по энергии. Предполагается, что межслоевых переходов, обусловленных кулоновским взаимодействием, нет, что справедливо в случае, когда в дополнение к слабому туннелированию, квантовые ямы достаточно узкие, и поправки Хартри к энергиям подзон малы.

Энергия оптического плазмона [67]

$$\omega_{OP} = \sqrt{\frac{2\pi e^2 n q}{m\epsilon}}. \quad (2.49)$$

Здесь $n = n_l + n_r = n_1 + n_2$ суммарная плотность 2D электронов в обоих слоях, n_l, n_r плотности электронов в слоях, n_1, n_2 плотности электронов в подзонах и q - импульс возбуждения.

Межподзонная щель без кулоновских поправок Δ определяется параметрами асимметрии Δ_E и туннелирования Δ_{SAS} .

$$\Delta = \sqrt{\Delta_E^2 + \Delta_{SAS}^2}, \quad n_1 - n_2 = \frac{m}{\pi\hbar^2}\Delta \quad (2.50)$$

Энергия межподзонного возбуждения : $\hbar\omega_{TP} \simeq \Delta$. Кулоновские поправки малы при малых волновых векторах k [75, 92]. В длинноволновом пределе основной поправкой к Δ является экситонная поправка. Рассмотрим область импульсов (волновых векторов), в которой энергии межподзонного экситона и оптического плазмона почти совпадают. Исследуем взаимное влияние (взаимодействие) мод, проявляющееся как расщепление. В симметричном случае уровни энергий пересекаются. В области малых импульсов и энергий, близких к Δ можно рассматривать только ОР и ТР возбуждения, учитывая, что $(\hbar\omega - \Delta)/\Delta \ll 1$. При этих предположениях в RPA приближении

$$1 - V_{ij}\Pi_j = 0, \quad (i, j = OP, TP) \quad (2.51)$$

$$\Pi^{OP}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{(n_1 + n_2)q^2}{(\omega^2 - \omega_{OP}^2)m} \simeq \frac{(n_1 + n_2)q^2}{2\omega_{OP}(\omega - \omega_{OP})m} \quad (2.52)$$

$$\Pi_{TP}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{(n_1 - n_2)}{\hbar(\omega - \omega_{TP})} \quad (2.53)$$

$$V_{OP,TP}(q) = V_{OP,TP}(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} \chi_{OP,TP} \quad (2.54)$$

Минимальное расщепление имеет место при $\hbar\omega_{OP} = \hbar\omega_{TP} = \Delta$.

Величина расщепления

$$\hbar\delta\omega = \frac{2\pi e^2}{\epsilon} \chi_{TP,OP} \left[\frac{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)}{2m\Delta} \right]^{1/2} = \frac{2\sqrt{2\pi}e^2}{\epsilon} \chi_{TP,OP} (n_1 + n_2)^{1/2} \quad (2.55)$$

Соответствующее значение q :

$$q = \frac{\Delta^2 m \epsilon}{2\pi \hbar^2 e^2 (n_1 + n_2)} \quad (2.56)$$

Величина расщепления определяется $\chi_{TP,AP}$ и зависит от симметрии

$$\begin{aligned} \chi_{TP,OP} &= \frac{n_1 \chi_{12,11} + n_2 \chi_{12,22}}{(n_1 + n_2)} \\ \chi_{12,11} &= \frac{1}{2} \sin \varphi \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \chi_{ll} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \chi_{rr} \right) - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \chi_{lr} \\ \chi_{12,22} &= \frac{1}{2} \sin \varphi \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \chi_{rr} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \chi_{ll} \right) + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \chi_{lr} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$\chi_{rr}, \chi_{ll}, \chi_{lr}$ форм-факторы для для внутрислоевых и межслоевых типов кулоновского взаимодействия. Подробно это рассмотрено в [7]. Для малых q $\chi_{ll(rr)} = 1 - qa_{l(r)}$, $\chi_{lr} = 1 - qd$, $\sin \varphi = \Delta_{SAS}/\Delta$, $a_{l(r)}$, d - эффективные величины для ширины ям и расстояния между ними. Для узких ям ($a_{l(r)} \ll d$)

$$\begin{aligned} \chi_{12,11} &= -\chi_{12,22} = \frac{1}{4} \sin 2\varphi * qd \\ \chi_{OP,TP} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \frac{1}{4} \sin 2\varphi * qd = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \frac{\Delta_E \Delta_{SAS}}{2\Delta^2} qd \end{aligned} \quad (2.58)$$

Возможно оценить параметр туннелирования Δ_{SAS} , выразив его через ширину ямы, ширину и высоту барьера. для узких ям поправка Хартри мала, и ямы можно считать прямоугольными.

$$\Delta_{SAS} = \frac{E}{\pi} \sqrt{\frac{E}{U-E}} e^{-\frac{d}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}} \quad (2.59)$$

U - высота барьера, $E = (\pi^2 \hbar^2)/(2ma^2)$ - энергия электрона для нижайшего энергетического состояния в прямоугольной квантовой яме эффективной ширины a ([93]). Ямы можно считать одинаковой ширины, $a_l = a_r = a$, если $\Delta E \ll E$, что предполагалось выше. Как и следовало ожидать, расщепление существует только в случае одновременного наличия туннелирования и асимметрии слоев.

$$\hbar \delta \omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 m}{\epsilon \hbar^2} (n_1 + n_2)^{-1/2} \frac{\Delta_E \Delta_{SAS}}{\Delta} q d \quad (2.60)$$

Этот результат можно сравнивать с экспериментом. Δ и q определяются экспериментально как точка, где разность между энергиями возбуждений минимальна. Δ_E может быть вычислена. Суммарная плотность электронов n обычно известна, это один из параметров системы.

Основными экспериментальными методами исследования спектров возбуждений являются неупругое рассеяние света и микроволновое поглощение. Для неупругого рассеяния света характерный волновой вектор $q \sim 10^5 \text{cm}^{-1}$. Для малых асимметрии и туннелирования энергии возбуждений значительно превышают межподзонную энергию и классифицируются как оптические и акустические плазмоны ([7]). Для микроволнового поглощения значение волнового вектора $q \sim 2/D \sim 10^2 \text{cm}^{-1}$, где D - диаметр мезоскопического образца (диска). В длинноволновой части спектра перпендикулярное магнитное поле сдвигает энергию оптического магнитоплазмона [94, 95]: $\omega_{MP}^2 = \omega_{OP}^2 + \omega_c^2$, ω_c - циклотронная энергия.

Увеличение энергии магнитоплазмона приводит к сдвигу точки антипересечения в область меньших волновых векторов, доступную для исследования методом микроволнового поглощения.

$$q = \frac{(\Delta^2 - (\hbar\omega_c)^2)m\epsilon}{2\pi\hbar^2e^2(n_1 + n_2)} \quad (2.61)$$

В двойной квантовой яме GaAs/AlGaAs, 170 Å шириной, 40–90 Å барьер $\Delta_{SAS} \sim 2 - 0.1$ meV. Для $n = 10^{11}$ и $q = 2 * 10^2 \text{cm}^{-1}$ в микроволновых экспериментах с диском диаметра $D = 0.01 \text{cm}$ ожидаемая энергия расщепления $\delta\hbar\omega \sim \Delta_{SAS} * 10^{-3}$ слишком мала.

С теоретической точки зрения ясно, что антипересечение уровней энергии оптического плазмона и межподзонного экситона должно существовать. В приближении туннельного гамильтониана величина расщепления найдена, однако вряд ли возможно в настоящее время наблюдать ее в типичных исследуемых структурах GaAs/AlGaAs.

2.5. Выводы к главе 2 .

1. Для системы электронов в двойных квантовых ямах со слабой туннельной связью исследовано влияние пространственной асимметрии системы на спектр, дисперсионные и физические свойства плазменных возбуждений. Показано, что в области энергий, превышающих параметр туннелирования, свойства плазменных возбуждений в системах с различной пространственной симметрией аналогичны, а в длинноволновом пределе влияние асимметрии определяющее.

2. Для системы электронов в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле показано, что энергия коллективных возбуждений зарядовой плотности (акустических и оптических фононов) демонстрирует анизотропию в зависимости от взаимной ориентации магнитного поля и импульса возбуждения, что определяется влиянием конечной ширины квантовых ям.

3. Рассмотрены коллективные возбуждения зарядовой и спиновой плотности (магнитоплазмоны и магнитоэкситоны) в двуслойной электронной системе с управляемой симметрией в сильном перпендикулярном магнитном поле. Показано, что существует изспиновое синглетное возбуждение (для возбуждений зарядовой плотности это оптический плазмон), не зависящее от симметрии системы, и изоспиновый триплет, энергия которого определяется параметрами

асимметрии и туннелирования и разницей в энергиях внутрислоевого и межслоевого магнитоэкситонов.

4. Изучалось взаимодействие межподзонных экситонов и оптических плазмонов с близкими энергиями в зависимости от параметров асимметрии и туннелирования. Получено аналитическое выражение для величины расщепления энергий возбуждений и соответствующего импульса в асимметричных слоях со слабым туннелированием в зависимости от параметров двойной квантовой ямы.

Глава 3. Магнитоэкситоны в чистом двуслойном графене.

3.1. Обзор литературы.

Развитие технологии позволило получать такие по-настоящему двумерные структуры, как однослойный и двуслойный графен, с высоким качеством и достаточного размера. Открывшиеся возможности вызвали интерес к экспериментальному и теоретическому изучению графеновых структур, а также возрождению интереса к изучению графита, бесщелевых полупроводников и полуметаллов. Особенность таких объектов в том, что структура электронных зон бесщелевая и обладает хиральностью [96]. Однослойный графен имеет спектр Дираковского типа с линейной дисперсией и хиральность, характеризующуюся Берри-фазой π . Двуслойный графен сочетает параболический закон дисперсии квазичастиц вблизи точки нулевой энергии с хиральностью, характеризующейся Берри-фазой 2π . Эта картина получена для идеальных структур в приближении сильной связи для электронов, при учете только переходов между ближайшими соседями, электронный спектр при этом симметричен относительно нулевой энергии. Асимметрия системы (неэквивалентность слоев за счет влияния подложки или внешних электрических полей) приводит к появлению щели в двуслойном графене. Учет переходов между следующими соседями приводит к асимметрии электронного спектра [97]. В чистом двуслойном графене асимметрию электронного спектра демонстрирует ряд экспериментальных данных по циклотронному резонансу. [98-102].

Информацию об энергетическом спектре электронов в графеновых структурах дает изучение переходов между уровнями Ландау в перпендикулярном магнитном поле. Для этого используются магнитооптические (неупругое рассеяние и микроволновое поглощение) и магнитотранспортные методы (квантовый эффект Холла). Уровни Ландау для Дираковского спектра были получены в работах [103-105], для двуслойного графена - в работах [106-108] для Гамильтониана, полученного в приближении ближайших соседей. В обоих случаях характерным является наличие уровня Ландау нулевой энергии. Для двуслойного графена уровень нулевой энергии двукратно вырожден, что обусловлено различными орбитальными состояниями. При учете спинового и долинного вырожд-

дения уровень нулевой энергии в монослое вырожден четырехкратно, в бислое - вырожден восьмикратно. Для бислоя с неэквивалентными слоями (например, за счет перпендикулярного электрического поля или влияния подложки) имеются четыре близко расположенных двукратно вырожденных по спину уровня вблизи нулевой энергии. Долинное и орбитальное вырождения снимаются, но электронно-дырочная симметрия остается.

На уровни Ландау с энергией, близкой к нулю, оказывает сильное влияние электрон-электронное взаимодействие, что является важной проблемой для экспериментального изучения циклотронного резонанса в однослойном [109, 110], двуслойном [98, 111] и многослойном [102, 112-116] графене, демонстрирующем свойства моно- и бислоев. В двуслойном графене сдвиг энергии циклотронного резонанса в зависимости от фактора заполнения изучался в [111], нарушение симметрии уровней Ландау демонстрировалось в [117].

При изучении циклотронного резонанса важным вопросом является влияние кулоновского взаимодействия на энергию магнитоэкситонов. Магнитоэкситоны - коллективные возбуждения в двумерной электронной системе во внешнем перпендикулярном магнитном поле, возникающие в системе при переходе электрона с одного уровня Ландау на другой при учете взаимодействия между электронами и характеризующиеся определенными значениями энергии и импульса. Эти возбуждения исследовались для двумерных систем еще в работах [21-23]. Однако особенности энергетического спектра графеновых структур потребовали развития теории магнитоэкситонов с учетом хиральности.

Возбуждения зарядовой плотности (магнитоэкситоны с нулевым спином) при малых импульсах рассматривались в приближении Хартри-Фока для однослойного графена [118, 119]. В работах [120-122] электромагнитный отклик в графене рассчитывался численно в RPA приближении для широкого интервала импульсов. Возбуждения с переворотом спина и спиновые волны в графене изучались в [123]. В работах [124, 125] были рассмотрены переходы внутри уровней Ландау. Рассматривались многочастичные поправки, полученные методом перенормировки, с учетом электронно-дырочной асимметрии, и попытки объяснить резкий переход от квадратичной к линейной дисперсии в спектре уровней Ландау [126-128]. При анализе магнитоэкситонных мод в двуслойном графене для це-

лочисленного заполнения $\pm 3, \pm 2, 0, 1$ [129] показано, что смешивание уровней Ландау в области, где Кулоновская энергия сравнима с циклотронной энергией, делает классификацию магитоэкситонных мод при конечных волновых векторах квантовым числом углового момента проблематичной, а закон дисперсии становится очень сложным. В работах [118, 119] показано, что учет кулоновского взаимодействия сохраняет электронно-дырочную симметрию для возбуждений.

В работе [130] и мини-обзоре [131] рассмотрены магнитотранспортные свойства - оптическая проводимость однослойного и двуслойного графена в квантующих магнитных полях; аналитически оценены динамические продольная и Холловская проводимости; пики проводимости объяснены терминах электронных переходов.

Однослойный графен.

Однослойный графен состоит из атомов углерода, образующих гексагональную решетку, позиции атомов в которой неэквивалентны. Элементарная ячейка графена состоит из двух атомов (А,В). Эти атомы образуют две треугольные подрешетки. Зонная структура графена представлена гамильтонианом Дираковского типа вблизи двух неэквивалентных точек зоны Бриллюэна K' и K , действующим в пространстве волновых функций $\Psi = (\psi_A, \psi_B)$ в долине K и $\Psi = (\psi_B, \psi_A)$ в долине K' .

$$H = \xi v \begin{pmatrix} 0 & \pi^+ \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

где $\pi = \hbar k_x + i\hbar k_y$, $\pi^+ = \hbar k_x - i\hbar k_y$, \mathbf{k} - волновой вектор, отсчитанный от центра долины, ξ - долинный индекс, $\xi = 1$ в долине K , $\xi = -1$ в долине K' , $v = \frac{\sqrt{3}}{2\hbar} a \gamma_0$, γ_0 - константа связи А-В внутри слоя, a - постоянная решетки.

Этот гамильтониан получен в модели сильной связи и учитывает только линейные члены в приближении ближайших соседей.

В перпендикулярном магнитном поле H энергия уровней Ландау $E_{n\xi}$ ($n = 0, \pm N$, $N = 0, 1, 2, \dots$) и соответствующие двухкомпонентные волновые функции Ψ_{nk} находятся из гамильтониана H (3.1), выраженного через операторы

рождения и уничтожения $a^+ = a_H \pi^+ / \sqrt{2}$ и $a = a_H \pi / \sqrt{2}$. Магнитная длина $a_H = \sqrt{\hbar/eH}$, e - заряд электрона. В качестве базиса используются волновые функции обычных двумерных электронов в магнитном поле $\phi_{Nk} = e^{iky} \phi_{Nk}(x)$, k - параметр, описывающий вырождение уровней Ландау в калибровке Ландау, $\mathbf{A} = (0, Hx)$.

$$E_0(\xi) = 0 \quad (3.2)$$

$$E_{\pm N}(\xi) = \pm \frac{\hbar v}{a_H} \sqrt{N}$$

$$\Psi_{0k} = (\phi_{0k}, 0)$$

$$\Psi_{nk\xi} = (a_{n\xi} \phi_{Nk}, b_{n\xi} \phi_{N-1,k}) \quad (3.3)$$

$$a_{\pm N,\xi} = 1/\sqrt{2}, b_{\pm N,\xi} = \pm 1/\sqrt{2}.$$

Для однослойного графена эффекты тригональной симметрии и учет влияния следующих соседей приводят к квадратичным членам в гамильтониане и оказывают слабое влияние; их можно учесть по теории возмущений обычным способом.

Двуслойный графен.

Двуслойный графен представляет из себя два графеновых слоя 1 и 2, каждый из которых состоит из двух гексагональных решеток с неэквивалентными местами (A1, B1) и (A2, B2) соответственно, упорядоченных по Берналу (A2-B1 друг над другом). В модели сильной связи энергетические состояния электронов (A1-B2) димера вблизи нуля энергии описываются двухкомпонентным гамильтонианом [97, 106, 107] действующим в пространстве волновых функций $\Psi = (\psi_{A1}, \psi_{B2})$ в долине K и $\Psi = (\psi_{B2}, \psi_{A1})$ в долине K' . Асимметрия между энергиями в слоях U возникает вследствие приложенного напряжения, переходы между следующими соседями и разница в энергиях пар димеров (A1-B2) и (A2-B1) $\tilde{\Delta}$ также могут учитываться.

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \quad (3.4)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 0 & (\pi^+)^2 \\ \pi^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$H_1 = \frac{\xi U}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2m} \frac{\xi U}{\gamma_1} \begin{pmatrix} \pi^+ \pi & 0 \\ 0 & -\pi \pi^+ \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$H_2 = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 2\gamma_4 & \tilde{\Delta} \\ \gamma_0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^+ \pi & 0 \\ 0 & \pi \pi^+ \end{pmatrix} + \frac{\tilde{\Delta}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

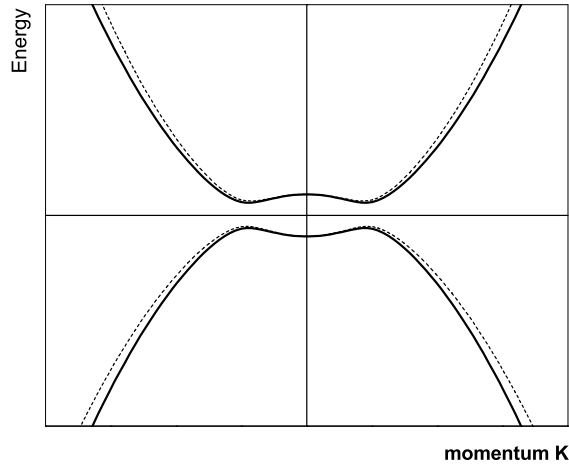


Рис.3.1. Закон дисперсии для двуслойного графена при учете слоевой (сплошная) и слоевой +электронно-дырочной асимметрии (пунктир).

где $\pi = \hbar k_x + i\hbar k_y$, $\pi^+ = \hbar k_x - i\hbar k_y$, \mathbf{k} - волновой вектор, отсчитанный от центра долины, ξ - долинный индекс, $\xi = 1$ в долине K , $\xi = -1$ в долине K' , γ_0 - константа связи А-В внутри слоя, γ_1 - константа связи между слоями А2-В1, $m = \gamma_1/2v^2$ эффективная масса для двуслойного графена, $v = \frac{\sqrt{3}}{2\hbar}a\gamma_0$, a - постоянная решетки.

γ_4 описывает переходы между следующими соседями (А1-А2 и В1-В2), $\gamma_1 = 0.1\gamma_0$, $\gamma_4 = 0.05\gamma_0$ (см. [100, 101]).

H_0 - основной гамильтониан, дающий параболическую дисперсию с эффективной массой m для хиральных квазичастиц с Берри-фазой 2π .

H_1 описывает слоевую асимметрию, приводящую к щели в спектре $\sim U$.

H_2 возникает вследствие переходов между следующими соседями и разницы между энергиями положений пар. Первый член приводит к электронно-дырочной асимметрии. Второй член за счет $\tilde{\Delta}$ приводит к сдвигу спектра как целого и может быть опущен.

Двухкомпонентный гамильтониан применим в области энергий электронов ε внутри диапазона $|\varepsilon| < \frac{1}{4}\gamma_1$. Слабая асимметрия соответствует $U/\gamma_1 \ll 1$, $\Delta/\gamma_1 \ll 1$, $\gamma_4/\gamma_0 \ll 1$ (Рис. 3.1).

На рис. 3.2 приведены законы дисперсии и уровни Ландау для обычного двумерного электронного газа (слева), однослойного (в центре) и двуслойного графена с параболической дисперсией (основной гамильтониан) - справа.

$$E_N \sim (N + 1/2) \text{ для обычных частиц,}$$

$$E_N \sim \pm\sqrt{N} \text{ для однослойного графена,}$$

$$E_N \sim \pm\sqrt{N(N - 1)} \text{ для двуслойного графена.}$$

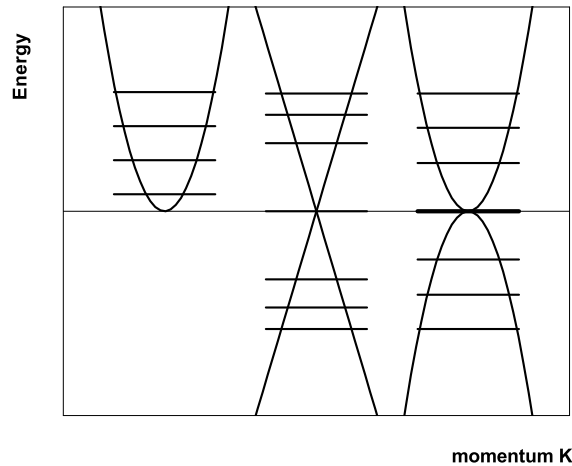


Рис.3.2. Закон дисперсии и уровни Ландау для обычного двумерного электронного газа, однослойного и двуслойного графена.

Учет тригональной симметрии вследствие $\gamma_3 = \gamma_{A1-B2} \ll \gamma_1$ изменяет спектр двуслойного графена вблизи нуля, в бесщелевом случае вместо двух соприкасающихся парабол появляются четыре конуса [97]. Подробно влияние этого фактора проанализировано методом топологического анализа в [132], показано,

при каких условиях остается дав конуса, там же представлен квазиклассический численный расчет уровней Ландау. В работе [133] указано, что вследствие кулоновского взаимодействия происходит спонтанное нарушение симметрии, и вместо соприкасающихся парабол возникают два конуса. В работе [134] показано, что в сильных магнитных полях влияние тригональной симметрии можно учесть с помощью специально развитой теории возмущений, при этом число уровней Ландау вблизи нулевой энергии не меняется, возникают только небольшие поправки. Все это дает основания не учитывать тригональную симметрию в дальнейшем при рассмотрении магнитоэкситонов.

3.2. Уровни Ландау в двуслойном графене при учете слоевой и электронно-дырочной асимметрии.

В этом разделе получены энергии уровней Ландау при учете переходов не только между ближайшими, но и с следующими соседями. В перпендикулярном магнитном поле H энергия уровней Ландау $E_{n\xi}$ ($n = 0, 1, \pm N, N = 0, 1, 2, \dots$) и соответствующие двухкомпонентные волновые функции Ψ_{nk} находятся из гамильтониана H (3.4), выраженного через операторы рождения и уничтожения $a^+ = a_H \pi^+ / \sqrt{2}$ и $a = a_H \pi / \sqrt{2}$. Циклотронная энергия $\omega_c = eH/m$. В качестве базиса используются волновые функции обычных двумерных электронов в магнитном поле $\phi_{Nk} = e^{iky} \phi_{Nk}(x)$, k - параметр, описывающий вырождение уровней Ландау в калибровке Ландау.

$$E_0(\xi) = \frac{1}{2}\xi U, \quad E_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi U - \xi\delta + \left(\frac{2\gamma_4}{\gamma_0} - \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1}\right)\hbar\omega_c \quad (3.8)$$

$$E_{\pm N}(\xi) = \pm\hbar\omega_c\sqrt{N(N-1)} - \frac{1}{2}\xi\delta + \left(\frac{\gamma_4}{\gamma_0} - \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1}\right)\hbar\omega_c(2N-1) \quad (3.9)$$

где $\delta = U\hbar\omega_c/\gamma_1$.

$$\begin{aligned} \Psi_{0k} &= (\phi_{0k}, 0), \quad \Psi_{1k} = (\phi_{1k}, 0), \\ \Psi_{nk\xi} &= (a_{n\xi}\phi_{Nk}, b_{n\xi}\phi_{N-2,k}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$a_{n\xi} = 1/\sqrt{1 + D_{n\xi}}, \quad b_{n\xi} = D_{n\xi}/\sqrt{1 + D_{n\xi}}$$

$$D_{n\xi} = \frac{E_{n\xi} - \xi U/2 + \xi N\delta - (\frac{\gamma_4}{\gamma_0} - \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1})\hbar\omega_c(2N - 1)}{\hbar\omega_c\sqrt{N(N - 1)}} \quad (3.11)$$

В нулевом приближении $a_{\pm N,\xi} = 1/\sqrt{2}$, $b_{\pm N,\xi} = \pm 1/\sqrt{2}$.

Асимметрия снимает долинные и орбитальное вырождение уровня нулевой энергии для уровней с $N \geq 2$.

Заметим, что область применимости приведенных выражений $\hbar\omega_c\sqrt{N(N - 1)} < \gamma_1/4$. Для $\gamma_1 = 0.39eV$ это соответствует $B < 50T$ для $N = 2$. В более сильных полях необходимо использовать четырехкомпонентный гамильтониан для нахождения уровней Ландау [108, 135].

В пренебрежении Зеемановским расщеплением все уровни двукратно вырождены по спину. Несмотря на то, что в графите электронный g -фактор не мал ($g = 2$), $\varepsilon_Z/\hbar\omega_c \sim 0.05$ вследствие малой эффективной массы двуслойного графена $m \approx 0.054$ [107].

3.3. Циклотронные переходы между уровнями Ландау в сильном перпендикулярном магнитном поле при учете электрон-электронного взаимодействия, слоевой и электронно-дырочной асимметрии.

В разделе 3.3. подробно рассмотрен случай двуслойного графена при одновременном учете электронно-дырочной асимметрии и разницы в энергиях электронов из разных слоев за счет внешнего потенциала, исследованный автором в [11, 12].

Рассмотрены возбуждения зарядовой плотности (магнитоэкситоны с нулевым спином) при малых импульсах в приближении Хартри-Фока для чистого двуслойного графена в сильном перпендикулярном магнитном поле при факторе заполнения $\nu = 0$, при этом электронно-дырочная асимметрия и кулоновское взаимодействие учитывались одновременно; особое внимание уделялось разнице в энергиях циклотронных переходов для двух долин при различных условиях.

3.3.1. Кулоновское взаимодействие и магнитоэкситоны.

Энергия магнитоэкситонов (возбуждений, возникающие при переходе с одного уровня Ландау на следующий) в двумерных системах впервые была по-

лучена в [20, 21] в приближении сильного магнитного поля для полностью заполненного нулевого уровня Ландау (фактор заполнения 2, а также для спиновых волн (возбуждений с переворотом спина без изменения уровня Ландау) для фактора заполнения 1. В последующих работах [22, 23] представлена более развернутая теория и определены энергии возбуждений для других целочисленных факторов заполнения (четных для магнитоэкситонов и нечетных для спиновых волн). Согласно теореме Кона [19], энергия циклотронного резонанса трансляционно инвариантной электронной системы с квадратичным законом дисперсии не зависит от кулоновского взаимодействия. Поэтому возбуждения с изменением орбитального числа электронной системы на единицу (магнитоплазмоны) при нулевом импульсе $q = 0$ имеют энергию, равную энергии циклотронного резонанса невзаимодействующей электронной системы, влияние электрон-электронного взаимодействия проявляется только в законе дисперсии. Аналогичное утверждение имеет место для спиновых экситонов (возбуждений с изменением спина на единицу без изменения орбитального квантового числа) в электронной системе, инвариантной относительно группы вращений в спиновом пространстве (теорема Лармора). Энергия спиновых экситонов с нулевым импульсом $q = 0$ равна Зеемановской энергии. Оба этих утверждения справедливы при любом соотношении между Кулоновской и циклотронной энергиями и при любом факторе заполнения. Однако для хиральных систем - однослойного графена с линейным законом дисперсии и двуслойного графена теорема Кона не применима, и электрон-электронное взаимодействие должно оказывать заметное влияние на энергию циклотронных возбуждений даже при нулевых импульсах. Действительно, эксперименты по изучению магнито-оптических переходов показывают значительный разброс в дираковской скорости, от $1.03 \cdot 10^6$ до $1.18 \cdot 10^6 m/c$, что можно объяснить перенормировкой вследствие электрон-электронного взаимодействия.

Гамильтониан системы электронов в графеновых структурах с кулоновским взаимодействием в перпендикулярном магнитном поле

$$\hat{H} = \sum E_{n\xi} a_{\lambda\xi\sigma}^+ a_{\lambda\xi\sigma} + H_{int} \quad (3.12)$$

$a_{\lambda\xi\sigma}^+$ и $a_{\lambda\xi\sigma}$ операторы рождения и уничтожения ; $\lambda = (n, k)$, $n = 0, 1, \pm N$ - номер уровня Ландау; k - параметр вырождения ; ξ и σ - долинный и спиновый индексы.

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum V_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_1; \lambda_2} a_{\lambda_4 \xi \sigma}^+ a_{\lambda_3 \xi' \sigma'}^+ a_{\lambda_2 \xi' \sigma'} a_{\lambda_1 \xi \sigma} \quad (3.13)$$

Кулоновское взаимодействие не меняет спиновый и долинный индексы; $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$. Далее все импульсы будут безразмерными и выражаться в единицах $1/a_H$.

Матричные элементы кулоновского взаимодействия определяются с использованием двухкомпонентных волновых функций (3.3, 3.10, 3.11) для однослойного и двуслойного графена.

$$V_{\lambda_3, \lambda_4}^{\lambda_1; \lambda_2} = V(q) e^{iq_x(k_1 - k_2 - q_y)} \tilde{J}_{n_4, n_1}(q) \tilde{J}_{n_3, n_2}(-q), \quad V(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon a_H q} \quad (3.14)$$

Для однослойного графена

$$\tilde{J}_{m, n}(q) = a_n^* a_m J_{|m||n|}(\mathbf{q}) + b_n^* b_m J_{|m|-1, |n|-1}(\mathbf{q}) \quad (3.15)$$

Для двуслойного графена

$$\tilde{J}_{m, n}(q) = a_n^* a_m J_{|m||n|}(\mathbf{q}) + b_n^* b_m J_{|m|-2, |n|-2}(\mathbf{q}) \quad (3.16)$$

$$J_{m, n}(\mathbf{q}) = \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} e^{-\frac{q^2}{4}} \left(\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{2}}\right)^{m-n} L_n^{m-n}\left(\frac{q^2}{2}\right), \quad (3.17)$$

$\mathbf{q} = (q_x, q_y)$, $k_4 = k_1 + q_y$, $k_3 = k_2 - q_y$. $J_{m, n}(\mathbf{q}) = J_{n, m}^*(-\mathbf{q})$ ($m > n$); L_n^{m-n} - полиномы Лагерра.

Суммирование ведется по n_1, n_2, n_3, n_4 , k_1, k_2 , двум спинам, двум долинам и волновому вектору $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$.

Если рассматривать только возбуждения зарядовой плотности, долинный и спиновый индексы (ξ, σ) не меняются.

Соответствующие операторы для возбуждений (n, n') с уровня n на уровень n' с импульсом K

$$Q_{n, n'; \xi \sigma}^+(K) = \sum_k a_{\lambda' \xi \sigma}^+ a_{\lambda \xi \sigma} \quad (3.18)$$

$\lambda = (n, k)$, $\lambda' = (n', k + K)$. Характерная кулоновская энергия $E_c = e^2/\epsilon a_H$. Импульс возбуждения предполагается малым: $K \ll 1$.

Задача о магнитоэкситонных возбуждениях в графенах рассматривалась в [118, 119, 123, 127] для однослойного графена и в [11-12, 126-128] для двуслойного графена. Используется метод, аналогичный предложенному в [22] для двумерного газа с квадратичным законом дисперсии - приближение Хартри-Фока для возбуждений (time-dependent Hartree-Fock), применимое при $E_c/\Delta E_{nn'}(\xi) \ll 1$, где $\Delta E_{nn'}(\xi)$ энергия перехода в отсутствие взаимодействия.

$$\Delta E_{nn'}(\xi) = E_{n'}(\xi) - E_n(\xi) \quad (3.19)$$

Для однослойного графена $\Delta E_{10}/E_c = 2.77$ ([118]) и не зависит от величины магнитного поля вследствие линейной дисперсии. Для бислой графена $E_c = 10\sqrt{H}$, $\hbar\omega_c = 2.2H$ (см. [106]) и $\hbar\omega_c/E_c = 0.22H^{1/2}$ для $\epsilon = 5$; для перехода $E_{12} \simeq \sqrt{2}\hbar\omega_c$, и для $H = 40T$ отношение $E_{12}/E_c \simeq 2$ (энергия в meV, магнитное поле в T).

Энергия возбуждения $\tilde{E}_{n,n';\xi\sigma}$ состоит из энергии перехода без взаимодействия и кулоновской поправки:

$$\tilde{E}_{n,n';\xi\sigma} = \Delta E_{nn'}(\xi) + E_{nn';\xi\sigma}^c \quad (3.20)$$

Кулоновская часть $E_{nn'}^c$, состоит из экситонного члена $E_{nn'}^{ex}$, вследствие прямого взаимодействия электрона на уровне n' и дырки на уровне n , обменных поправок энергии $\Sigma_{n\xi\sigma}$ и $\Sigma_{n'\xi\sigma}$ к одноэлектронным уровням Ландау и деполяризованного сдвига, получающегося с приближении случайных фаз (RPA). Деполяризованный сдвиг пропорционален K и существенен для дисперсии ([119]). Представляющее интерес в данной работе междолинное расщепление не зависит от K , поэтому RPA член можно опустить, что позволяет рассматривать возбуждения с различными (ξ, σ) независимо.

$$E_{n,n';\xi\sigma}^c = E_{n,n'}^{ex} + \Sigma_{n'\xi\sigma} - \Sigma_{n\xi\sigma} \quad (3.21)$$

Основная сложность при вычислении энергии магнитоэкситонов заключается в определении обменных поправок. Спектры однослойного и двуслойного графена формально описываются модельным гамильтонианом, неограниченным

сверху и снизу(3.1,3.4). Существует проблема расходимости обменной собственной энергии Σ_n при суммировании по всем заполненным уровням Ландау.

Для вычисления этого вклада для монослоя графена в работе [119] вводилось обрезание по энергии. Было показано, что возникающая расходимость логарифмическая по числу уровней Ландау, и реально область обрезания по энергии ограничивается областью применимости модельного гамильтониана Дираковского типа, дающего линейную дисперсию. В [118] применялся полуэмпирический подход - электрон-электронная поправка бралась для одного типа переходов из данных эксперимента, после чего для других типов переходов можно было вычислить разницу в энергии по сравнению с калибровочным переходом. При этом с необходимостью предполагалось, что весь эффект перенормировки скорости в графене обусловлен только электрон-электронным взаимодействием. Для двуслойного графена область параболической дисперсии меньше, чем допустимое значение энергии обрезания, и необходимо рассматривать четырехзонный гамильтониан [126-128].

В работах автора [11, 12] представлены некоторые возможности увидеть кулоновские поправки без вычисления полной величины обменной энергии в разности энергий переходов для чистого двуслойного графена. Рассмотрены межуровневые электронные переходы с верхнего заполненного (полностью или частично) уровня Ландау на следующий свободный (полностью или частично) уровень с энергией перехода порядка ω_c (правила отбора для таких переходов $\Delta N = 1$). Фактор заполнения $\nu = 0$, уровень Ферми также равен нулю. Этот случай означает отсутствие свободных носителей и равное количество электронов и дырок. Переходы с малыми энергиями между уровнями 0 и 1 двуслойного графена не рассматриваются; с помощью этого метода они не могут быть рассмотрены, так как $E_c \sim |\Delta E_{01}(\xi)|$.

Нулевому заполнению могут соответствовать разные основные состояния и различные циклотронные переходы. Далее подробно рассмотрены возможные случаи.

3.3.2. Асимметричный бислои без e-h асимметрии.

Этот случай описывается гамильтонианом $H_0 + H_1$ (3.5,3.6). При $U > 0$ $\nu = 0$ означает фактор заполнения $\nu = 4$ для электронов в одной долине и $\nu = 4$ для дырок в другой долине. Для долины с $\xi = 1$ полностью заполнены уровни с $n = -2$ и возможны переходы $(-2,1)$, для долины с $\xi = -1$ полностью заполнены уровни 0 и 1 и возможны переходы $(1,2)$ (рис.3.3 слева). Невзаимодействующая часть одинакова для обоих переходов:

$$\Delta E_{-2,1}(1) = \Delta E_{1,2}(-1) = \omega_c \sqrt{2} + \frac{1}{2}|U - \delta| \quad (3.22)$$

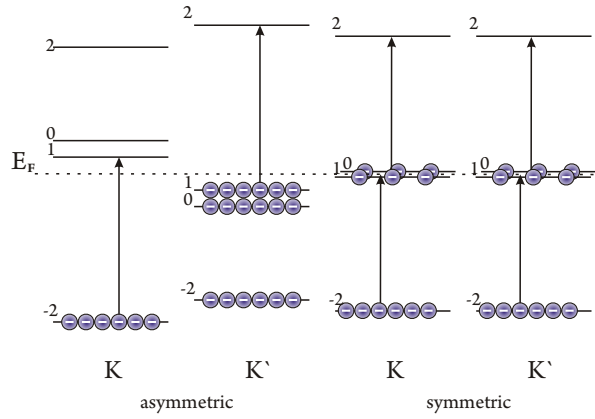


Рис.3.3. Одноэлектронные уровни Ландау и циклотронные переходы для симметричного (справа) и асимметричного(слева) случаев.

Электронно-дырочная симметрия одночастичного гамильтониана приводит к симметрии переходов $(-2,1)$ и $(1,2)$; $(-2,1)$ в электронном представлении есть $(1,2)$ в дырочном представлении. При учете спина имеются 4 перехода с равными энергиями. Поскольку все рассматриваемые виды асимметрии и электрон-электронное взаимодействие рассматриваются как малые поправки, для вычисления поправок, связанных с взаимодействием, можно использовать волновые функции для симметричного случая.

Для $\nu = 0$ (обозначение $0I$)

$$\begin{aligned}
E_{ex,0I}^{(1,2)} &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} V(q) \tilde{J}_{22}(\mathbf{q}) \tilde{J}_{1,1}(-\mathbf{q}) = \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} V(q) (J_{22}(q) + J_{00}(q)) J_{11}(q)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
(\Sigma_2 - \Sigma_1)_{0I} &= \int d\mathbf{q} \frac{V(q)}{2(2\pi)^2} (|J_{11}(\mathbf{q})|^2 + |J_{10}(\mathbf{q})|^2 - \\
&\quad - \int d\mathbf{q} \frac{V(q)}{2(2\pi)^2} (\frac{1}{2}|J_{21}(\mathbf{q})|^2 + \frac{1}{2}|J_{20}(\mathbf{q})|^2) + \\
&\quad + \int d\mathbf{q} \frac{V(q)}{2(2\pi)^2} \sum_{N=2} |J_{2,N}(\mathbf{q}) J_{0,N-2}^* \mathbf{q}|
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Это значение не равно нулю, поскольку теорема Кона неприменима.

В результате можно утверждать, что для возбуждений из различных долин расщепление вследствие слоевой асимметрии отсутствует, хотя для уровней Ландау оно присутствует.

Такие же переходы будут для спинового ферромагнитного состояния, при учете спинового расщепления: для спина σ_1 of уровни 0 и 1 заполнены, для спина σ_2 полностью пусты в обеих долинах. Имеются два возбуждения $Q_{1,2;\xi\sigma_1}^+$ и два возбуждения $Q_{-2,1;\xi,\sigma_2}^+$ с одинаковой энергией.

3.2.3. Асимметричный бислой при учете электронно-дырочной асимметрии

Этот случай описывается гамильтонианом $H_0 + H_1 + H_2$ (3.5, 3.6, 3.7). В этом случае при суммарном факторе заполнения $\nu = 0$ заполнение уровней Ландау зависит от магнитного поля. Если магнитное поле не слишком велико и

$$\left(\frac{\gamma_4}{\gamma_0} - \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1}\right) \hbar\omega_c - \delta < \frac{U}{2} \tag{3.25}$$

то в долине с $\xi = -1$ уровни 0 и 1 заполнены, а в долине с $\xi = 1$ пусты. В этом случае имеются электронные и дырочные переходы (1,2) с верхнего заполненно-

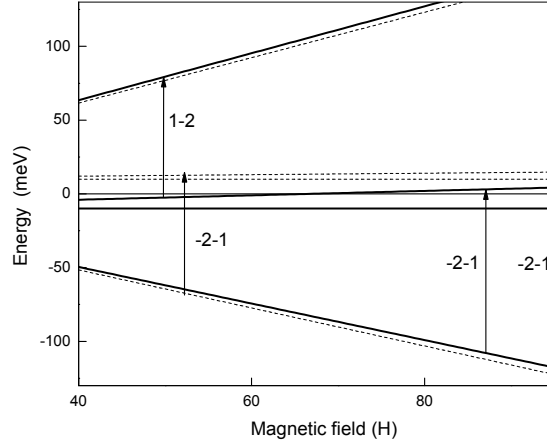


Рис.3.4. Одноэлектронные уровни Ландау и циклотронные переходы при учете слоевой и электронно-дырочной асимметрии (сплошная для долины K и пунктир для долины K').

го на следующий пустой уровень (рис.3.4, слева). Невзаимодействующие части представлены следующими выражениями:

$$\Delta E_{1,2}(-1) = \hbar\omega_c(\sqrt{2} + \frac{\gamma_4}{\gamma_0} - \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1}) + \frac{1}{2}(U - \delta) \quad (3.26)$$

$$\Delta E_{-2,1}(1) = \hbar\omega_c(\sqrt{2} - \frac{\gamma_4}{\gamma_0} + \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1}) + \frac{1}{2}(U - \delta) \quad (3.27)$$

Кулоновские части одинаковы, как обсуждалось выше. Разница в энергиях для переходов из разных долин обусловлена электронно-дырочной асимметрией.

$$\Delta E_{1,2}(-1) - \Delta E_{-2,1}(1) = (\frac{2\gamma_4}{\gamma_0} - \frac{\tilde{\Delta}}{\gamma_1})\hbar\omega_c \quad (3.28)$$

Если магнитное поле достаточно велико, то

$$(\frac{\gamma_4}{\gamma_0} - \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1})\hbar\omega_c - \delta > \frac{U}{2} \quad (3.29)$$

В обеих долинах уровни 1 пусты, но уровень 0 заполнен для долины K и пуст для долины K' (рис.3.4, справа). Имеется только переходы дырочного типа $(-2,1)$. Невзаимодействующие части

$$\Delta E_{-2,1}(1) = \hbar\omega_c(\sqrt{2} - \frac{\gamma_4}{\gamma_0} + \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1}) + \frac{1}{2}(U - \delta) \quad (3.30)$$

$$\Delta E_{-2,1}(-1) = \hbar\omega_c(\sqrt{2} - \frac{\gamma_4}{\gamma_0} + \frac{\tilde{\Delta}}{2\gamma_1}) - \frac{1}{2}(U - \delta) \quad (3.31)$$

Вследствие различного заполнения уровней Ландау в долинах влияние кулоновского взаимодействия различно в части собственно-энергетической части.

$$\frac{1}{2}\Sigma_{20} - \Sigma_{10} = \int d\mathbf{q} \frac{V(q)}{(2\pi)^2} (|J_{10}(\mathbf{q})|^2 - \frac{1}{2}|J_{20}(\mathbf{q})|^2) \quad (3.32)$$

$$\Sigma_{10} - \frac{1}{2}\Sigma_{20} = \frac{7}{16}E_c\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.33)$$

$$\tilde{E}_{-2,1}(1) - \tilde{E}_{-2,1}(-1) = (U - \delta) + \frac{7}{16}E_c\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.34)$$

Расщепление между переходами из разных долин обусловлено кулоновским взаимодействием и слоевой асимметрией.

3.3.4. Полносимметричный случай

В этом случае, описываемом гамильтонианом H_0 (3.5), мы имеем по две наполовину заполненных уровня нулевой энергии в обеих долинах: 0 ($\nu_0 = 1/2$) и 1 ($\nu_1 = 1/2$); это означает $\nu = 2$ для электронов в каждой долине и $\nu = 2$ для дырок в каждой долине. Для каждой долины имеются два перехода: $(1, 2)$ с наполовину заполненного на пустой уровень и $(-2, 1)$ с заполненного на наполовину пустой. Эти переходы связаны кулоновским взаимодействием \tilde{V} . Используя приближение Хартри-Фока для нецелочисленных факторов заполнения [1, 137], можно найти две моды $Q_{s,a}^+$ с энергиями $E_{s,a}$.

$$Q_{s,a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{1,2,\xi,\sigma}^+ \pm Q_{-2,1,\xi,\sigma}^+)$$

$$E_{s,a} = \omega_c \sqrt{2} + E_c^h \pm \frac{1}{2} \tilde{V} \quad (3.35)$$

Эти моды могут быть названы симметричной и антисимметричной.

$$E_c^h = \frac{1}{2} E_{ex,0I}^{(1,2)} + (\Sigma_2 - \Sigma_1)_h; \quad (\Sigma_2 - \Sigma_1)_h \neq \frac{1}{2} (\Sigma_2 - \Sigma_1)_{0I} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V} = V_{-2,1}^{1,2} = V_{1,2}^{-2,1} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} V(q) \tilde{J}_{12}(\mathbf{q}) \tilde{J}_{-2,1}(-\mathbf{q}) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} V(q) |J_{12}|^2(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} E_c * \frac{7}{16} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$\tilde{V} = 2.5\sqrt{H}$ и для $H = 40T$ $\tilde{V} \simeq 15meV$.

Это расщепление для комбинированных электронно-дырочных переходов с участием наполовину заполненных уровней не специфично для двуслойного графена. В однослойном графене с долиной асимметрией [118] факторы заполнения равны $\nu = 2$ для электронов в одной долине и $\nu = 2$ для дырок в другой долине. В случае с симметричными долинами имеется наполовину заполненный уровень нулевой энергии в обеих долинах ($\nu = 1$ как для электронов, так и для дырок). Для монослоя графена с наполовину заполненным уровнем нулевой энергии имеются переходы $(0, 1)$ для электронов и $(-1, 0)$ для дырок, и соответствующая величина расщепления для комбинированных мод

$$\tilde{V}_{mg} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} E_c$$

определяется с использованием волновых функций из [118]. Наблюдать расщепление ($\tilde{V}_{mg} \simeq 2.5\sqrt{H}$) для монослоя можно при меньших значениях магнитных полей.

3.3.5. Симметричный бислой с электронно-дырочной асимметрией.

Для двуслойного графена, описываемого гамильтонианом $H_0 + H_2$ (формулы), с симметричными слоями и, следовательно, симметричными долинами, но с электронно-дырочной асимметрией имеются наполовину заполненные 0 ($\nu_0 = 1/2$) и пустые 1 уровни Ландау ($\nu_1 = 0$) в обеих долинах. Для каждой долины имеются только переходы $(-2, 1)$ дырочного типа. Кулоновские поправки одинаковы в обеих долинах, расщепления нет.

При рассмотрении циклотронных переходов в чистом двуслойном графене в [11, 12] учитывались электронно-дырочная асимметрия, слабая слоевая асимметрия и влияние кулоновского взаимодействия. Было показано, что энергии циклотронных переходов в двух долинах могут быть расщеплены как вследствие электронно-дырочной асимметрии, так и вследствие кулоновского взаимодействия. При меньших магнитных полях расщепление обусловлено электронно-дырочной асимметрией, с ростом магнитного поля расщепление возникает из-за кулоновского взаимодействия. Для симметричного случая с половинным заполнением уровней нулевой энергии расщепление за счет кулоновской энергии возможно как для двуслойного, так и однослойного графена. В экспериментальной работе [102] исследовались графеновые бислои в многослойном эпитаксиальном графене. Расщепление между переходами электронного и дырочного типа было найдено в относительно узком диапазоне B . Возможное объяснение (влияние электронно-дырочной асимметрии) дает правильные значения величины расщепления, однако узость исследуемого диапазона не позволяет сделать однозначный вывод. В работе [128] учитывалась слабая $e-h$ асимметрия, при определении энергии циклотронного резонанса в четырехзонной модели. Результаты в части невзаимодействующей части совпадают в пределах точности двухзонной модели, метод учета многочастичных поправок для целочисленных факторов заполнения совпадает, однако прямое сравнение провести невозможно, поскольку в [128] рассмотрены другие факторы заполнения.

3.4. Выводы к главе 3 .

1. Получены энергии уровней Ландау для двуслойного графена при учете слоевой и электронно-дырочной асимметрии.
2. Рассмотрены циклотронные возбуждения (магнитоэкситоны) в чистом двуслойном графене при одновременном учете слоевой и электронно-дырочной асимметрии и кулоновского взаимодействия в приближении Хартри-Фока при малых импульсах возбуждения.
3. Показано, что энергии циклотронных возбуждений в для двух долин могут совпадать или быть расщеплены, в зависимости от величины приложенного магнитного поля.

4. При меньших магнитных полях величина расщепления обусловлена электронно-дырочной асимметрией, при больших магнитных полях величина расщепления определяется кулоновским взаимодействием.

Глава 4. Уровни Ландау в квазидвумерных структурах с сильным спин-орбитальным взаимодействием.

4.1. Обзор литературы.

Двумерные электронные и дырочные каналы в МДП-структурах, гетеропереходах и квантовых ямах образуются за счет квантования поперечного движения и свободного движения заряженных частиц параллельно интерфейсу. В электронных слоях движение в плоскости слабо зависит от квантования, и в перпендикулярном магнитном поле мы имеем обычные уровни Ландау с теми же значениями циклотронной частоты и g -фактора, что и в трехмерном случае. Для дырочных каналов, наоборот, наличие спин-орбитального взаимодействия и ограничивающего потенциала приводят к сильному взаимному влиянию параллельного и перпендикулярного движений. Закон дисперсии $E(\mathbf{k})$ ($\mathbf{k} = (k_x, k_y)$) в дырочных подзонах сильно непараболический. Как известно, отсутствие в системах без центра инверсии при учете спин-орбитального взаимодействия должно приводить к снятию спинового вырождения в электронном спектре при $k \neq 0$ [138-141]. Примерами таких квазидвумерных систем без центра инверсии являются дырочные каналы в кремниевых МДП-структурах и асимметричных квантовых ямах на основе GaAs.

В полярных кристаллах без центра инверсии спин-орбитальное взаимодействие снимает спиновое вырождение при конечных импульсах носителей в зонах. В квазидвумерных системах отсутствие центра инверсии может быть обусловлено как отсутствием инверсии в трехмерном материале, например, для GaAs, обладающего структурой цинковой обманки (bulk inversion asymmetry - BIA, или вклад Дрессельхауза), так и геометрией самой структуры - пространственной асимметрией потенциала $V(z)$ (structure inversion asymmetry - SIA, или вклад Рашба).

Для электронов спиновое расщепление линейно по импульсу, при этом вклады Рашбы и Дрессельхауза могут быть одного порядка [142]. Для дырочных каналов в квантовых ямах GaAs/AlGaAs размерное квантование снимает четырехкратное вырождение валентной зоны в центре зоны Бриллюэна и рас-

щепляет валентную зону на подзоны тяжелых и легких дырок. При конечных импульсах k спин-орбитальное взаимодействие приводит к снятию спинового вырождения в подзонах как для легких, так и для тяжелых дырок. Кроме того, вследствие смешивания состояний легких и тяжелых дырок, энергетический спектр дырок сильно непараболический, закон дисперсии определяется геометрией квантовой ямы.

В работе [143] был проведен анализ симметрии поверхностных электронных (дырочных) состояний в кристаллах со структурой цинковой обманки для направлений (111) и (001). Было показано, что для поверхностных состояний (111), обладающих осью симметрии третьего порядка спиновое расщепление тяжелых дырок с проекцией полного момента $m_j = \pm 3/2$ может быть только кубическим по k . Для двумерных состояний в плоскости (001) спиновое расщепление тяжелых дырок может быть и линейным по k , однако для больших импульсов Ферми, характерных для рассматриваемым нами концентраций двумерных дырок, величина линейного вклада много меньше спинового расщепления, обусловленного кубическими по k членами [144, 145]. При малых же концентрациях (и соответственно малых импульсах), когда величины линейного и кубического по k членов оказываются сравнимы, сама величина спинового расщепления оказывается ничтожно мала по сравнению с точностью эксперимента. В квантовой яме GaAs/AlGaAs (001) с односторонним легированием макроскопическое электрическое поле, нормальное к плоскости ямы, приводит к дополнительному кубическому по k спиновому расщеплению состояний тяжелых дырок. В отличие от легких дырок, где спиновое расщепление, как и в 3D-электронных системах, линейно по k , в подзоне тяжелых дырок основной вклад в спиновое расщепление при конечных волновых векторах должны вносить члены, пропорциональные k^3 .

При низких концентрациях дырок и соответственно малых волновых векторах k_F в законе дисперсии можно ограничиться только параболическим приближением, однако его область применимости крайне мала. Теоретическая работа [146], в которой рассматривался закон дисперсии дырок для пустой прямоугольной ямы с бесконечным барьером в сферическом приближении, предсказывает для массы тяжелых дырок значение $0.12m_0$ в пределе $kW \ll 1$; при увеличе-

нии k ($kW \sim 1$) циклотронная масса дырок должна увеличиваться, а в пределе больших k ($kW \gg 1$) стремиться к значению $0.49m_0$ (m_0 - масса свободного электрона, k - волновой вектор, W - ширина ямы). Рассчитанное в работе [147] в приближении Хартри с учетом спин-орбитального взаимодействия и конечной высоты барьера значение массы дырки находится в пределах $0.16 - 0.19m_0$. Однако измерение циклотронной массы 2D дырок в GaAs(001) квантовой яме методом резонансного поглощения в СВЧ диапазоне, впервые выполненное в [148] на образцах с низкой концентрацией дырок дает значение $0.26m_0$, что значительно превышает расчетные значения. Другим методом для изучения систем с сильным спин-орбитальным взаимодействием является наблюдение осцилляций Шубникова-де Гааза. Пересечение уровней вследствие нелинейной зависимости от магнитного поля приводит к сбою фазы (биениям) в осцилляциях Шубникова-де Гааза, что было показано экспериментально [149] как для электронов в GaAs-гетеропереходах, так и для дырок в Si МДП-структурах. Поведение осцилляций Шубникова-де Гааза при одноосном растяжении или сжатии вдоль оси [001] в плоскости двумерных дырочных каналов (поверхность (110)) в кремниевых полевых транзисторах изучалось экспериментально [150]; был обнаружен зависящий от знака деформации сдвиг положения биения. В работе [152] рассчитывались биения Шубникова-де Гааза для инверсионных слоев р-типа на поверхности [110] Si в сильном магнитном поле. Зависимость картины биений в случае приложения одноосной деформации наблюдалась, но ясного объяснения дано не было.

4.2. Спектры уровней Ландау дырок в узкой квантовой яме при учете спин-орбитального взаимодействия и непараболичности.

В работе автора [14] был рассмотрен эффективный двумерный гамильтониан дырок в асимметричной квантовой яме. Получены выражение для спинового расщепления, пропорциональное k^3 , аналитическое выражение для уровней Ландау. Показан сбой фазы в осцилляциях Шубникова-де Гааза.

Дырочный закон дисперсии $E(k)$ находится из уравнения Шредингера (4.1) и при $k = 0$ состоит из подзон, двукратно вырожденных при $k = 0$.

$$\left(H_0(k_x, k_y, -i\frac{d}{dz}) - E = V(z) \right) \Psi = 0 \quad (4.1)$$

Здесь $H_0(k_x, k_y, k_z)$ - трехмерный гамильтониан Латтинжера 4×4 для легких и тяжелых дырок.

Предыдущие вычисления уровней Ландау в дырочных каналах [138, 139, 147, 153] базировались на работе Латтинжера [154]. При направлении магнитного поля вдоль оси z , k_x и k_y можно заменить операторными формами

$$\hat{k}_x = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} + \frac{e}{\hbar c} A_x; \quad \hat{k}_y = \frac{1}{i} \frac{d}{dy} + \frac{e}{\hbar c} A_y \quad (4.2)$$

где A_x, A_y - компоненты вектор-потенциала. В цилиндрическом приближении, если пренебречь анизотропией в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, решение выражается через функции гармонического осциллятора $u_N(x, y)$.

$$\Psi_N(x, y, z) = (\psi_{1N}(z)u_{N-2}, \psi_{2N}(z)u_N, \psi_{3N}(z)u_{N-1}, \psi_{4N}(z)u_{N+1}) \quad (4.3)$$

Уровни Ландау могут быть найдены численно путем последующего решения дифференциальных уравнений по z для функций $\psi_{iN}(z)$. Величина магнитного поля в этом случае может быть любой. Анизотропия может быть включена в рассмотрение посредством теории возмущений [139, 153].

Построение эффективного 2D гамильтониана

В случае слабого магнитного поля, которое может рассматриваться как возмущение, эффективный 2D дырочный гамильтониан получается в виде разложения по степеням k и H . Если ось z направлена вдоль кристаллографической оси (100) трехмерный гамильтониан для легких и тяжелых дырок имеет вид

$$H(\mathbf{K}) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left((\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2)K^2 I - 2\gamma_3(\mathbf{JK})^2 + 2(\gamma_3 - \gamma_2)(J_x^2 k_x^2 + J_y^2 k_y^2 + J_z^2 k_z^2) \right) \quad (4.4)$$

где $\mathbf{K} = \{k_x, k_y, k_z\}$, J_x, J_y, J_z - матрицы спина $3/2$, I - единичная матрица. В магнитном поле, направленном вдоль z , k_x и k_y заменяются операторами (4.3) и

добавляется спиновый член $H(H) = \mu_0 g_h (\mathbf{JH})$. Используется калибровка Ландау: $A_x = -Hy$, $A_y = 0$ ($H \parallel z$).

$$H(\hat{\mathbf{K}}, H) = H(\hat{\mathbf{K}}) + V(z) + H(H) = H_0 + \delta H$$

$$H_0 = [(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2)k_z^2 - 2J_z^2 k_z^2 \gamma_2 + V(z)] \quad (4.5)$$

В нулевом приближении получают двукратно вырожденные уровни энергии E_m и E_n для легких и тяжелых дырок. Член, рассматриваемый как возмущение,

$$\begin{aligned} \delta H = \frac{\hbar^2}{2m_0} [(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2)\hat{k}^2 - 2\gamma_3(J_{\parallel}\hat{\mathbf{k}})^2 + 2(\gamma_3 - \gamma_2)(J_x^2\hat{k}_x^2 + J_y^2\hat{k}_y^2) - \\ - 2\gamma_3(J_z k_z J_{\parallel}\hat{\mathbf{k}} + J_{\parallel}\hat{\mathbf{k}} J_z k_z)] + \mu_0 g_h J_z B \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поправки второго порядка представляют матрицу 2x2, включающую члены k^2 , k^3 и B , и связывающую состояния тяжелых или легких дырок

Для уровней тяжелых дырок E_n

$$\begin{aligned} \delta H_{3/2,n}^{(2)} = \langle 3/2, n | \delta H | 3/2, n \rangle + \sum_m \frac{\langle 3/2, n | \delta H | 1/2, m \rangle \langle 1/2, m | \delta H | 3/2, n \rangle}{E_n - E_m} = \\ = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_n) k^2 + \frac{3}{2} \mu_0 (g_h + \frac{2}{3} \alpha_n) H \sigma_z + \\ + \frac{\hbar^2}{2m_0} [(\hat{R}\hat{k}_- + \hat{k}_-\hat{R})\sigma_+ - (\hat{R}^*\hat{k}_+ + \hat{k}_+\hat{R}^*)\sigma_-] \beta_n \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_m 3\gamma_3^2 \frac{|\langle n | k_z | m \rangle|^2}{E_n - E_m} \quad (4.8)$$

$$\beta_n = \frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_m \sqrt{3} \frac{\langle n | m \rangle \langle m | k_z | n \rangle}{E_n - E_m} \quad (4.9)$$

$$R = -\frac{\sqrt{3}}{4} [(\gamma_2 + \gamma_3)k_-^2 + (\gamma_2 - \gamma_3)k_+^2] \quad (4.10)$$

$k_{\pm} = k_x \pm ik_y$, $\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - матрицы Паули.

Для уровней легких дырок E_m

$$H_{1/2,m}^{(2)} = \langle 1/2, m | \delta H | 1/2, m \rangle + \sum_n \frac{\langle 1/2, m | \delta H | 3/2, n \rangle \langle 3/2, n | \delta H | 1/2, m \rangle}{E_m - E_n} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha_m) k^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (g_h - 2\alpha_m) H \sigma_z + \frac{\hbar^2}{2m_0} [(\hat{R}\hat{k}_+ + \hat{k}_+\hat{R})\sigma_+ - (\hat{R}^*\hat{k}_- + \hat{k}_-\hat{R}^*)\sigma_-] \beta_m \quad (4.11)$$

Для α_m, β_m можно использовать выражения (4.8, 4.9), поменяв местами m и n .

В нулевом магнитном поле эффективный 2D гамильтониан $\delta H^{(2)}(k_x, k_y)$ дает закон дисперсии частиц в двумерных подзонах. Для тяжелых дырок

$$E_n^{1,2} = \frac{\hbar^2}{2m_0} [(\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_n) k^2 \pm |\beta_n| |R| k] \quad (4.12)$$

В асимметричном потенциале происходит снятие двукратного спинового вырождения. Расщепление пропорционально k^3 , как и должно быть из соображений симметрии [143]. Гофрировка (анизотропия в плоскости) впервые появляется в членах k^3 и поэтому может рассматриваться как поправка.

Эффективный g-фактор определяется тем же параметром, что и изменение эффективной массы.

$$m_{2,n} = 1/(\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_n); \quad g_{2,n} = g_h + \frac{2}{3}\alpha_n \quad (4.13)$$

Параметры α, β могут быть определены из закона дисперсии, полученного численно или экспериментально.

Уровни Ландау

Построенный с помощью теории возмущений гамильтониан 2D дырок в магнитном поле (4.7, 4.11) позволяет найти уровни Ландау. Рассмотрим для примера нижайшую подзону тяжелых дырок (индекс n опустим). Должна быть решена следующая система дифференциальных уравнений по y (в калибровке (5) $\hat{k}_x = k_x$ приводит к сдвигу начала отсчета по оси y):

$$[\delta H_{3/2}^{(2)}(\hat{k}_x, \hat{k}_y, H) - E] \Phi = 0 \quad (4.14)$$

Численное решение системы (4.14) позволяет учесть анизотропию в плоскости (гофрировку). Если пренебречь гофрировкой, то можно получить анали-

тические выражения для энергий уровней Ландау. Следуя Латтинжеру, введем операторы рождения и уничтожения $a^+ = a_H \hat{k}_+ / \sqrt{2}$, $a = a_H \hat{k}_- / \sqrt{2}$, $a_H = (\hbar c / eH)^{1/2}$. Гамильтониан приобретает вид

$$\delta H^{(2)}(a, a^+, H) = \frac{\mu_0 H}{m_2} (a^+ a + a a^+) + \frac{3}{2} \mu_0 g_2 H \sigma_z + \frac{\mu_0 H}{R_c} (i \bar{\beta} a^3 \sigma_+ - i \bar{\beta} (a^+)^3 \sigma_-) \quad (4.15)$$

Здесь $\bar{\beta} = |\beta| \sqrt{3/2} (\gamma_2 + \gamma_3)$. Гамильтониан (4.15) имеет решение, выражающееся через функции гармонического осциллятора u_N , $a u_N = \sqrt{N} u_{N-1}$; $a^+ u_N = \sqrt{N+1} u_{N+1}$. Подстановка

$$\Phi = (A u_{N-3}, C u_N)$$

приводит к алгебраическому уравнению для уровней Ландау.

Для $N = 3, 4..$ мы имеем

$$E_{1,2} = 2 \frac{\mu_0 H}{m_2} (N-1) \pm \mu_0 H \sqrt{\left(\frac{3}{m_2} - \frac{3}{2} g_2\right) + \frac{\bar{\beta}^2}{a_H^2} N(N-1)(N-2)} \quad (4.16)$$

Для $= 0, 1, 2$ мы имеем

$$E_1 = 2 \frac{\mu_0 H}{m_2} \left(N + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \mu_0 g_2 H \quad (4.17)$$

В линейном приближении

$$E_{1,2} = 2 \frac{\mu_0 H}{m_2} \left(N + \frac{1}{2}\right) \mp \frac{3}{2} \mu_0 g_2 H \quad (4.18)$$

Предложенный метод может использоваться в случае, если уровень Ферми попадает в диапазон энергий, в котором можно учитывать только члены k^2 и k^3 . Если же E_F требует учета членов k^4 , но число уровней Ландау $N \gg 1$, гамильтониан может быть дополнен членом γk^4 , а члены $k^2 H$ и H^2 можно не учитывать. Выражение (4.16) трансформируется в

$$E_{1,2} = 2 \frac{\mu_0 H}{m_2} (N-1) \pm \mu_0 H \sqrt{\left(\frac{3}{m_2} - \frac{3}{2} g_2\right) + \frac{\bar{\beta}^2}{a_H^2} N(N-1)(N-2) + 4 \mu_0 H \frac{\gamma N^2}{a_H^2}} \quad (4.19)$$

В экспериментах Дорожкина и Ольшанецкого [149-151] на р-каналах в Si (110) наблюдался сдвиг фазы на π в осцилляциях Шубникова -де Гааза в узком диапазоне магнитных полей. Авторы объясняли этот сдвиг линейным членом Бычкова-Рашба [140] в дисперсии. Однако проведенные согласно описанной выше схеме вычисления уровней Ландау позволяют отнести наблюдаемый сдвиг к влиянию членов k^3 в эффективном гамильтониане. Рассчитывались уровни Ландау для дырочных каналов в кремнии для двух значений электронной плотности. Параметры $m_2, \bar{\beta}, \gamma$ определялись из уравнения (4.1) в сферическом приближении для треугольного потенциала $V(z)$, достаточного для описания нижней подзоны :

$$V(z) = 2\pi n_s e z / \varepsilon; \gamma_1 = 4.0; \gamma_2 = 1.2; g_h = 1.2$$

Полученные значения $m_2, \bar{\beta}, \gamma$ и E_F следующие: для $n_s = 0.9 * 10^{12} \text{cm}^{-2}$ $m_2 = 0.23, \bar{\beta} = 0.26, \gamma = -0.04, E_F = 7.2 \text{meV}$; для $n_s = 2.7 * 10^{12} \text{cm}^{-2}$ $m_2 = 0.23, \bar{\beta} = 0.18, \gamma = -0.02, E_F = 19.5 \text{meV}$. Фазовый сдвиг в осцилляциях Шубникова-де Гааза происходит при $B_{sh} \sim 4T$ и слабо зависит от n_s . Экспериментальные результаты [149-151] неплохо объясняются проведенными вычислениями, однако полностью исключить влияние члена Бычкова-Рашбы тоже нельзя. Для точного количественного согласия необходимо учитывать оба спин-орбитальных члена - как линейный, так и кубический.

4.3. Циклотронные энергии и циклотронные массы дырок в квазиклассическом случае.

Квазиклассическая циклотронная масса, соответствующая эффективной массе плотности состояний, имеет смысл, когда под уровнем Ферми находится много уровней Ландау. Изучение циклотронного резонанса в микроволновой области является наиболее прямым способом измерения масс носителей в полупроводниковых структурах. Меняя концентрацию дырок, можно исследовать энергетический спектр в зависимости от волнового вектора и получить основные параметры, определяющие спектр дырок с учетом непараболичности.

Расчет и сравнение с экспериментом частот циклотронных резонансов в случае спин-орбитально расщепленных 2D тяжелых дырок в зависимости от кон-

центрации и магнитного поля в узких квантовых ямах в квазиклассическом пределе позволили получить значения эффективных масс и параметров непараболичности дырок.

Поскольку в эксперименте в качестве образцов были выбраны относительно узкие квантовые ямы шириной 100 Å, для которых верхние размерно квантованные подзоны тяжелых дырок расположены значительно выше, чем основные, их влияние можно было не учитывать. Вклад в непараболичность закона дисперсии нижней подзоны тяжелых дырок определялся влиянием нижней подзоны легких дырок.

Рассматривался спектр тяжелых дырок в узкой квантовой яме шириной W для $kW \ll 1$, когда взаимное влияние уровней легких и тяжелых дырок можно учитывать по теории возмущений, как это рассматривалось в предыдущем разделе. Спектр квазидвумерных дырок в квантовых ямах GaAs/AlGaAs получается при квантовании гамильтониана трехмерных дырок в приближении эффективной массы (гамильтониан Латтинжера [154]). При нулевых планарных импульсах размерное квантование тяжелых (проекция спина на ось квантования $J = \pm 3/2$) и легких ($J = \pm 1/2$) дырок происходит независимо, уровни двукратно вырождены. При конечных импульсах происходит смешивание состояний легких и тяжелых дырок, приводящее к непараболичности спектра, однако в симметричной квантовой яме в законе дисперсии присутствуют только четные степени k , и двукратное вырождение зон сохраняется. Если же яма не симметрична, то спиновое вырождение снимается полностью, в законе дисперсии появляются кубические члены [14]. Для квантовой ямы GaAs (001) анизотропия в энергетическом спектре 2D дырок (гофрировка) появляется, начиная с членов порядка k^3 и k^4 [14], поэтому можно рассмотреть аксиально-симметричный случай (гофрировку в плоскости не учитывать). Основной вклад в непараболичность и спин-орбитальное расщепление вносят члены второго порядка за счет влияния ближайшей зоны - нижней подзоны легких дырок, а вклад в эффективную массу (коэффициент при k^2) определяется вкладом как основной, так и возбужденных подзон легких дырок. В симметричной яме основная подзона легких дырок не дает вклада в эффективную массу. Для

пустой прямоугольной ямы с бесконечным барьером значение m_h определено аналитически [146], для GaAs $m_h = 0.12m_0$. Численные расчеты для симметричных ям с конечными барьерами были выполнены в работе [155], где было показано, что для основного состояния тяжелых дырок в квантовых ямах GaAs влияние конечного барьера незначительно.

Гамильтониан для основной подзоны тяжелых дырок в базисе $(3/2, -3/2)$ имеет вид

$$H = \frac{\hbar^2}{m_0} \begin{vmatrix} \frac{k^2}{2m} - \gamma W^2 k_-^2 k_+^2 & \beta W k_-^3 \\ \beta W k_+^3 & \frac{k^2}{2m} - \gamma W^2 k_+^2 k_-^2 \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

Здесь $k_+ = k_x + ik_y$, $k_- = k_x - ik_y$. Безразмерные параметры m , β , γ определяются самосогласованным потенциалом ямы и связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{1}{m_s} + 3\gamma_2^2 | \langle h|k_z|l \rangle |^2 / E_{hl} \\ \beta W &= 3\gamma_2^2 \langle h|l \rangle | \langle h|k_z|l \rangle | / E_{hl} \\ \gamma W^2 &= \frac{3}{4} (\gamma_2 \langle h|l \rangle)^2 / E_{hl} \\ \beta^2 &= 4\gamma \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_s} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

m_s - безразмерная эффективная масса за счет влияния верхних возбужденных состояний легких дырок; будем считать $m_s = 0.12$, как было получено в [146] для симметричной ямы.

Энергии двух спиновых ветвей тяжелых дырок при малых kW

$$E_{1,2}(k) = \frac{\hbar^2}{m_0 W^2} \left(\frac{(kW)^2}{2m} \pm \beta (kW)^3 - \gamma (kW)^4 \right) \quad (4.22)$$

Связь между энергией Ферми E_F , суммарной концентрацией дырок n_h и концентрациями двух сортов дырок n_1 , n_2 дается соотношениями

$$n_1(E_F) + n_2(E_F) = n_h; \quad 4\pi n_i(E_F) = k_i^2(E_F) \quad (4.23)$$

Система характеризуется двумя импульсами Ферми $k_1(E_F)$ и $k_2(E_F)$. Зависимости $k_{1,2}(E)$ определяются из выражений для энергии $E_{1,2}$.

Далее рассмотрим систему тяжелых дырок в магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости ямы. Для трехмерных дырок в изотропном приближении задача о квантовании в магнитном поле была аналитически решена Латтинжером в работе [156]. Для квазидвумерных дырок без учета гофрировки с учетом квадратичных и кубических членов в гамильтониане аналитическое решение было получено в [14]. Одновременно с поправкой к эффективной массе возникает поправка к g-фактору.

$$\frac{1}{m} = \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha; \quad \kappa_2 = \kappa + \alpha/3 \quad (4.24)$$

κ , γ_1 , γ_2 - параметры Латтинжера для трехмерных дырок, $g_h = 2\kappa$. Гамильтониан (4.20), в котором учтены как спин-орбитальное расщепление, так и непараболичность, однако не учтена гофрировка, также имеет решение в базисе (u_{N-3}, u_N) , где u_N - функции гармонического осциллятора. Гамильтониан приобретает вид

$$H = \hbar\omega_{c0} \begin{vmatrix} \frac{N-3+\frac{1}{2}}{m} + \frac{3}{2}\kappa_2 - 4\frac{\gamma W^2(N-1)(N-2)}{a_H^2} & 2^{3/2}\frac{\beta W\sqrt{N(N-1)(N-2)}}{a_H} \\ 2^{3/2}\frac{\beta W\sqrt{N(N-1)(N-2)}}{a_H} & \frac{N+\frac{1}{2}}{m} - \frac{3}{2}\kappa_2 - 4\frac{\gamma W^2(N)(N-1)}{a_H^2} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

Энергии уровней Ландау тяжелых дырок

$$\begin{aligned} \frac{E_{1,2}(N)}{\hbar\omega_{c0}} &= \frac{1}{m}(N-1) - 4\frac{\gamma}{a_H^2}(N-1)^2 \pm \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{3}{2m} - \frac{3\kappa_2}{2} + \frac{4\gamma}{a_H^2}(N-1)\right)^2 + 8\frac{\beta^2}{a_H^2}N(N-1)(N-2)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$N = 0, 1, 2, 3, \dots$ для E_1 , $N = 3, 4, \dots$ для E_2 ; $\omega_{c0} = eH/m_0c$.

Для целочисленного заполнения существуют две циклотронные частоты ω_1 и ω_2 , проявляющиеся в СВЧ поглощении, и две соответствующие им циклотронные массы.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\hbar}(E_1(N_1+1) - E_1(N_1)), \\ \omega_2 &= \frac{1}{\hbar}(E_2(N_2+1) - E_2(N_2)), \end{aligned}$$

$$m_{h1,2}/m_0 = \omega_{c0}/\omega_{1,2} \quad (4.27)$$

N_1 и N_2 - номера верхних заполненных уровней Ландау, их значения можно определить из соотношений $2\pi a_H^2 n_s = N_1 + N_2 - 1$, $E_1(N_1) < E_2(N_2 + 1)$, $E_2(N_2) < E_1(N_1 + 1)$.

Квантовые выражения в слабых магнитных полях (при очень больших N) переходят к квазиклассические. В квазиклассическом пределе выражения для циклотронных частот на уровне Ферми имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{c0} \left(\frac{1}{m} + 3\beta W k_1(E_F) - 4\gamma W^2 k_1^2(E_F) \right) \\ \omega_2 &= \omega_{c0} \left(\frac{1}{m} - 3\beta W k_2(E_F) - 4\gamma W^2 k_2^2(E_F) \right) \end{aligned}$$

Циклотронная масса в квазиклассическом случае определяется из условия квантования орбит в импульсном пространстве. Имеются два значения квазиклассической циклотронной массы m_{c1} и m_{c2}

$$m_{ci} = 2\pi \hbar^2 \frac{dn_i(E_F)}{dE_F} \quad (4.29)$$

Квазиклассические циклотронные массы не зависят от магнитного поля, циклотронные частоты зависят от поля линейно, концентрации двух сортов частиц не зависят от поля. С ростом магнитного поля квазиклассическое приближение работает хуже. Появляется зависимость циклотронной массы от поля (4.27).

Проведенное теоретическое рассмотрение и возможность экспериментального определения квазиклассических циклотронных масс дырок позволяют найти параметры спектра m, β, γ и энергию Ферми для заданной концентрации тяжелых дырок. В эксперименте использовалась методика оптического детектирования резонансного магнитоплазменного микроволнового поглощения в 2D газе. Плазменная частота в эксперименте мала из-за больших размеров образца, поэтому частоты наблюдаемых резонансов близки к соответствующим им циклотронным частотам.

На рис.4.1 показана зависимость частоты F , на которой измерялось микроволновое поглощение, от резонансного магнитного поля для двух концентраций 2D дырок. Из рисунка видно, что более тяжелая циклотронная масса практически не изменяется с изменением магнитного поля, а более легкая растет с

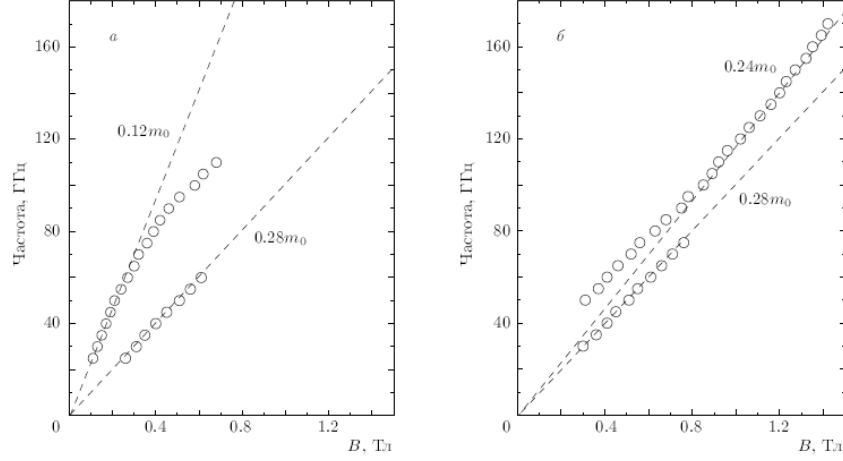


Рис.4.1. Магнитополевые зависимости резонансных плазменных частот, измеренные в квантовой яме GaAs/AlGaAs(001) шириной 100 А для двух концентраций дырок: *a* (слева) - $n_h = 4 * 10^{10} \text{cm}^{-2}$; *б* (справа) - $n_h = 1.4 * 10^{11} \text{cm}^{-2}$. Штриховые линии - циклотронные резонансы, соответствующие различным массам.

увеличением поля. На рис.4.1(а) видно, что легкая масса в малых полях близка к значению $0.12m_0$, рассчитанному в [146]. В случае большей концентрации (рис.4.1(б)) в больших полях циклотронная масса перестает расти, достигнув значения $0.24m_0$.

Параметры β и m подбирались таким образом, чтобы достигалось наибольшее соответствие экспериментальных и теоретических (4.27) зависимостей циклотронных масс от магнитного поля. Параметр γ вычислялся по формуле (4.21). Для квантовой ямы GaAs/AlGaAs(001) шириной 100 А значения параметров следующие:

$$m = 0.16, \beta = 1.6, \gamma = 0.3 \text{ для } n_h = 4 * 10^{10} \text{cm}^{-2};$$

$$m = 0.2, \beta = 0.6, \gamma = 0.03 \text{ для } n_h = 1.4 * 10^{11} \text{cm}^{-2}.$$

Уменьшение параметра β с увеличением концентрации дырок можно объяснить следующим образом. Во-первых, на форму ямы, помимо внешнего электрического поля, определяемого концентрацией дырок в квантовой яме, оказывают влияние самосогласованные поправки Хартри. Во-вторых, при больших кон-

центрациях уровень Ферми выше, и влияние легких дырок выходит за рамки приближения, использованного для получения уровней Ландау. Также при больших энергиях сильнее проявляется влияние гофрировки.

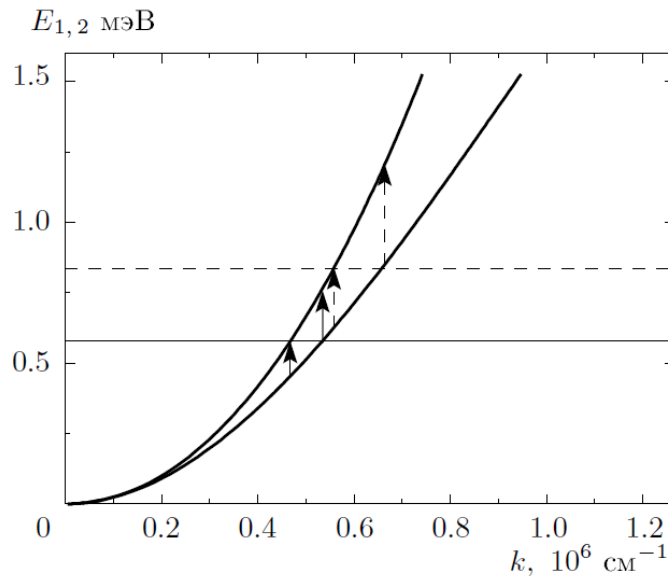


Рис. 4.3. Дисперсия спин-орбитально расщепленных подзон тяжелых дырок в квантовой яме GaAs/AlGaAs(001) для параметров $m = 0.16$, $\beta = 1.6$, $\gamma = 0.3$. Положение уровня Ферми для концентрации дырок $n_h = 4 * 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ обозначено сплошной прямой линией ($E_F = 0.58$ мэВ), для $n_h = 6 * 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ — штриховой ($E_F = 0.84$ мэВ). Стрелками показаны разрешенные переходы с минимальной и максимальной энергиями.

Полученные параметры позволяют построить закон дисперсии (4.22) и найти энергию Ферми (4.23) для данной концентрации 2D тяжелых дырок. На рис.4.3 изображен закон дисперсии для безразмерных параметров $m = 0.16$, $\beta = 1.6$, $\gamma = 0.3$, определенных для $n_h = 4 * 10^{10} \text{ cm}^{-2}$. С его помощью можно также определить спин-орбитальное расщепление дырок для концентраций, незначительно отклоняющихся от $4 * 10^{10} \text{ cm}^{-2}$.

4.4. Квазидвумерные дырки в наклонном магнитном поле.

В данном разделе рассматриваются частицы с вырожденной энергетической зоной (дырки), находящиеся в квантовой яме, описываемой потенциалом $V(z)$ и в магнитном поле \mathbf{H} , направленном под углом α к оси z . Дырочная зона считается изотропной ($\gamma_2 = \gamma_3$). Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{H}, z) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2 \right) \hat{k}^2 - 2\gamma_2 \{ \hat{k}_i \hat{k}_j \} \{ J_i J_j \} \right] + \mu_0 g \mathbf{J} \mathbf{H} + V(z). \quad (4.30)$$

Здесь m_0 - масса свободного электрона, γ_1, γ_2 - параметры Латтинжера, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}$, \mathbf{A} - вектор-потенциал, \mathbf{J} - матрицы спина $3/2$, $i, j = x, y, z$, g - g -фактор трехмерных дырок.

Для $H \parallel z$ уравнение Шредингера с гамильтонианом (4.30) решалось численно в работах [138, 139, 147, 153]. Случай $H \perp z$ был рассмотрен в [157, 158].

Влияние наклонного магнитного поля рассматривается в двух предельных случаях: $\hbar\omega_c \gg E_n$ (сильное поле) и $\hbar\omega_c \ll \Delta E_n$ (слабое поле). $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$, E_n - уровни энергии в потенциале без магнитного поля.

Сильное магнитное поле. Если магнитное поле направлено вдоль оси z , то $\hat{k}_z = k_z = -id/dz$, а \hat{k}_x и \hat{k}_y можно выразить через операторы рождения и уничтожения a и a^+ . Гамильтониан (4.30) приобретает вид [154, 156]

$$H = H_0(a, a^+, k_z) + V(z)$$

где

$$H_0(a, a^+, k_z) = \begin{vmatrix} P + Q + \frac{3}{4}gH & R & -S & 0 \\ R_+ & P - Q - \frac{1}{4}gH & 0 & S \\ -S^+ & 0 & P - Q + \frac{1}{4}gH & R \\ 0 & S^+ & R^+ & P + Q - \frac{3}{4}gH \end{vmatrix}$$

$$P = \frac{\gamma_1}{2} (k_z^2 + \omega_c(a^+a + aa^+))$$

$$Q = \frac{\gamma_2}{2} (-2k_z^2 + \omega_c(a^+a + aa^+))$$

$$R = -\sqrt{3}\gamma_2\omega_c a^2; \quad S = \sqrt{6}\gamma_2\omega_c^{1/2}k_z a \quad (4.31)$$

(использовались атомные единицы). Решение уравнения Шредингера с гамильтонианом (4.31) ищется в виде (4.3). В аксиальной калибровке волновые функции, являющиеся решениями гамильтониана (4.31) имеют вид

$$\Psi_N(z, \rho, \varphi) = \begin{pmatrix} A_1(z, N)U_{N-3, j_z-3/2} \\ A_2(z, N)U_{N-1, j_z+1/2} \\ A_3(z, N)U_{N-2, j_z-1/2} \\ A_4(z, N)U_{N, j_z+3/2} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Как следует из соображений симметрии, это решения с сохраняющейся проекцией полного момента частицы на ось z : $j_z = l_z + s_z$, причем поскольку j_z не входит в гамильтониан H_N , по j_z имеется вырождение.

Подставляя (4.32) в уравнение (4.31), получаем для функций $A_i(z, N)$ одномерное по z четырехкомпонентное уравнение Шредингера с эффективным гамильтонианом H_N .

$$H_N = \begin{vmatrix} C^+(N-3, k_z) & B(N-1) & -D(N-2)k_z & 0 \\ B(N-1) & A^-(N-1, k_z) & 0 & D(N)k_z \\ -D(N-2)k_z^+ & 0 & A^+(N-2, k_z) & B(N) \\ 0 & D(N)k_z & B(N) & C^-(N, k_z) \end{vmatrix} + V(z) \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} C^\pm(N, k_z) &= (\gamma_1 + \gamma_2)\omega_c(N + \frac{1}{2}) \pm \frac{3}{4}gH + (\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2)k_z^2 \\ A^\pm(N, k_z) &= (\gamma_1 - \gamma_2)\omega_c(N + \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{4}gH + (\frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2)k_z^2 \\ D(N) &= \sqrt{6}\gamma_2\omega_c^{1/2}\sqrt{N}, \quad B(N) = -\sqrt{3}\gamma_2\omega_c\sqrt{N(N-1)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

При $N = 0, 1, 2$ часть компонент функции Ψ_N равна нулю, и матрица гамильтониана H_N имеет меньший размер.

$$H_N = H_{N0} + k_z H_{N1} + k_z^2 H_{N2} + V(z)$$

$$H'_N = U H_N U^+ \quad (4.35)$$

Здесь U – унитарное преобразование гамильтониана, диагонализирующее не зависящую от z и k_z числовую матрицу H_{N0} . Элементами диагональной матрицы H'_{N0} будут уровни Ландау дырок E_N^i при $k_z = 0$, $V(z) = 0$.

Все уровни E_N^i не вырождены по индексу i , $E_N^i - E_N^j \sim \hbar\omega_c$. Если магнитное поле сильное ($\hbar\omega_c \gg E_n$ по крайней мере для нескольких нижних уровней легких и тяжелых дырок), то при решении уравнения Шредингера с гамильтонианом H'_N (4.35) E_N^i можно считать нулевым приближением, а оставшуюся часть учесть по теории возмущений. В низшем порядке разложения для состояний, близких по энергии к E_N^i , получается уравнение Шредингера с гамильтонианом

$$H_N^i = E_N^i + \frac{1}{2m_{Ni}} k_z^2 + V(z) \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{2m_{Ni}} = (H'_{N2})_{ii} = \sum_{j \neq i} \frac{(H'_{N1})_{ij} (H'_{N1})_{ji}}{E_N^i - E_N^j} \quad (4.37)$$

Каждый уровень Ландау характеризуется своей массой для движения вдоль направления магнитного поля, не зависящей от его величины. Так, при $N = 0$ имеется только один уровень E_0^1 с массой m_{01}

$$E_0^1 = \frac{\gamma_1 + \gamma + 2}{2} \omega_c - \frac{3}{4} gH, \quad \frac{1}{2m_{01}} = \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2$$

E	1.3	1.6	2.0	2.9
m	0.12	0.21	0.33	0.55

Таблица 1. Расчетные значения масс дырок для четырех нижних уровней Ландау в GaAs ($\gamma_1 = 6.9$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 2.5$, $g = 2.4$). Энергия уровня Ландау E в $\hbar\omega_c$, масса m вдоль поля в m_0 .

Пусть теперь сильное магнитное поле направлено под углом α к оси z : $\mathbf{H} = (-h \sin \alpha, 0, h \cos \alpha)$. Удобно ввести новые пространственные переменные

(ξ, η) место переменных (x, z) , направив ось η вдоль направления магнитного поля.

$$V(z) = V(\eta \cos \alpha + \xi \sin \alpha) = V(\eta \cos \alpha) + \frac{dV}{dz} \xi \sin \alpha + \dots \quad (4.38)$$

В пределе сильного поля для гладкого потенциала $V(z)$ в области $z \sim \lambda_z$ (λ_z - эффективная ширина ямы) справедливо условие

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dz} a_H \sim \frac{a_H}{\lambda_z} \sim \left(\frac{E_n}{\hbar \omega_c} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (4.39)$$

Поскольку $\xi \sim a_H$, то в выражении (25) достаточно учесть только главный член $V(\eta \cos \alpha)$ - изменение потенциала вдоль магнитного поля. Задача становится полностью аналогичной рассмотренной выше для $\mathbf{H} \parallel z$. Движение вдоль η определяется эффективным гамильтонианом для каждого из уровней Ландау:

$$H_N^j(\alpha) = E_N^j + \frac{1}{2m_{Nj}} k_\eta^2 + V(\eta \cos \alpha) \quad (4.40)$$

Слабое магнитном поле. Выполняется условие $\omega_c \ll \Delta E_n$. В наклонном поле $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$ и калибровке $\mathbf{A} = (H_z y, -H_x z, 0)$ гамильтониан (4.30) имеет вид

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{H}, z) = H_0(k_z, z) + \delta H(\mathbf{H}) \quad (4.41)$$

Нулевым приближением являются две серии двукратно вырожденных уровней размерного квантования, соответствующие тяжелым и легким дыркам. Поправки к ним по теории возмущений с точностью до линейных по H_x и H_z членов. Поправки имеют вид матриц 2×2 .

$$\begin{aligned} \delta H_{3/2,n}^{(2)} &= \frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_n) (\hat{k}_x^2 + k_y^2) + \frac{3}{2} \mu_- (g + \frac{2}{3} \alpha_n) H_z \sigma_z \\ \alpha_n &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_m 3\gamma_2^2 \frac{|\langle n | k_z | m \rangle|^2}{E_{3/2,n} - E_{1/2,m}} \\ \delta H_{1/2,m}^{(2)} &= \frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha_m) (\hat{k}_x^2 + k_y^2) + \frac{1}{2} \mu_0 (g - 2\alpha_n) H_z \sigma_z + \mu_0 g H_x \sigma_x \\ \alpha_m &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_m 3\gamma_2^2 \frac{|\langle m | k_z | n \rangle|^2}{E_{1/2,m} - E_{3/2,n}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Известно [157-159], что H_x не дает линейного по вкладу. Вклад линейных по H_z членов подробно рассматривался в разделе 4.2 этой главы. Энергии уровней Ландау

$$E_{nN}^{1,2} = E_{3/2,n} + 2\mu_0(\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_n)(N + \frac{1}{2})H_z \pm \frac{3}{2}\mu_0(g + \frac{2}{3}\alpha_n)H_z$$

$$E_{mN}^{1,2} = E_{1/2,n} + 2\mu_0(\gamma_1 - \gamma_2 + \alpha_m)(N + \frac{1}{2})H_z \pm \frac{1}{2}\mu_0\sqrt{(g - 2\alpha_m)^2 H_z^2 + 4g^2 H_x^2} \quad (4.43)$$

Для состояний $E_{nN}^{1,2}$, принадлежащих в основном тяжелым дыркам, существенна только компонента поля H_z . Что же касается состояний $E_{mN}^{1,2}$, принадлежащих в основном легким дыркам, то в этом случае в орбитальное движение входит только H_z , а спиновое расщепление зависит от обеих компонент H_z и H_x , причем имеет место анизотропия g-фактора.

4.5. Влияние одноосной деформации вдоль слоя на положение уровней Ландау в двумерном дырочном канале.

В данном разделе рассмотрено влияние одноосной деформации в плоскости на осцилляции Шубникова-де Гааза в дырочном канале. Для этой цели получен вид эффективного гамильтониана дырок в асимметричной квантовой яме при условии, что деформация вдоль плоскости считается возмущением.

Исследовались следующие случаи:

- (а) деформация в плоскости двумерного канала в приближении сферически-симметричной валентной зоны;
- (б) плоскость двумерного канала (100), деформация вдоль оси [001];
- (с) плоскость двумерного канала (110), деформация вдоль оси [001].

Показано, что в эффективном гамильтониане появляется линейный по k член, пропорциональный деформации. Установлено, что поправка к уровням Ландау, линейно зависящая от деформации, и возникающий вследствие этого сдвиг положения биений в осцилляциях Шубникова-де Гааза возникают только при понижении симметрии поверхности (необходима неэквивалентность оси сжатия-растяжения и перпендикулярного ей направления в плоскости, например, для поверхности (110)).

Рассматриваются частицы (дырки) с вырожденной энергетической зоной, для описания которых используется одночастичный гамильтониан Латтинжера [154, 156]. Дырки находятся в асимметричной квантовой яме $V(z)$ (ось z направлена по нормали к плоскости ямы). Система помещена в магнитное поле H , направленное по оси z , и подвергается одноосному сжатию или растяжению по оси x .

Гамильтониан $H(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{H}, \varepsilon)$ в базисе $|j_z\rangle$ имеет вид

$$H(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{H}, \varepsilon) = H_0(\hat{\mathbf{k}}) + \mu_0 g_0 \kappa \mathbf{H} \mathbf{J} + H(\varepsilon) + V(z) \quad (4.44)$$

где \mathbf{J} - матрицы спина $3/2$, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + e\mathbf{A}/(\hbar c)$ (\mathbf{A} - вектор-потенциал), $H_0(\mathbf{k})$ - гамильтониан Латтинжера.

$$H_0(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \begin{vmatrix} P+Q & -S & R & 0 \\ -S^* & P-Q & 0 & R \\ R^* & 0 & P-Q & S \\ 0 & R^* & S^* & P+Q \end{vmatrix} \quad (4.45)$$

а) В сферическом приближении для валентной зоны ($\gamma_2 = \gamma_3$) элементы матрицы гамильтониана $H_0(\hat{\mathbf{k}})$ имеют вид

$$P = \gamma_1(k_z^2 + k^2), \quad Q = \gamma_2(-2k_z^2 + k^2), \quad S = 2\sqrt{3}\gamma_2 k_z k_-, \\ R = -\sqrt{3}\gamma_2 k_-^2, \quad k_{\pm} = k_x \pm ik_y, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (4.46)$$

б) Если ось z направлена по $[100]$, а ось x - по оси $[001]$, то P и Q те же, что и в сферическом приближении (4.46),

$$S = 2\sqrt{3}\gamma_3 k_z k_-, \\ R = -\frac{\sqrt{3}}{2} [(\gamma_2 + \gamma_3)k_-^2 + (\gamma_2 - \gamma_3)k_+^2] = \\ = -\sqrt{3}\tilde{\gamma}_2(k_-^2 + \delta k_+^2) \quad (4.47)$$

где $\tilde{\gamma}_2 = (\gamma_2 + \gamma_3)/2$, $\delta = (\gamma_2 - \gamma_3)/(\gamma_2 + \gamma_3)$. в) В случае, если ось $z \parallel [110]$, ось $x \parallel [001]$, согласно [160], имеем

$$P = \gamma_1(k_z^2 + k^2),$$

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{3\gamma_3 + \gamma_2}{2}k_z^2 + \gamma_2k_x^2 + \frac{3\gamma_3 - \gamma_2}{2}k_y^2 \\
R &= -\sqrt{3}\left(\frac{\gamma_3 - \gamma_2}{2}k_z^2 + \gamma_2k_x^2 - \frac{\gamma_3 + \gamma_2}{2}k_y^2 + 2i\gamma_3k_xk_y\right) \\
S &= 2\sqrt{3}k_z(\gamma_3k_x - i\gamma_2k_y)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \kappa$ - параметры Латтинжера.

Слагаемое $H(\varepsilon)$ описывает влияние деформации. Если оси x, y, z совпадают с кристаллографическими осями, то

$$H(\varepsilon) = \begin{vmatrix} p+q & h & j & 0 \\ h^* & p-q & 0 & j \\ j^* & 0 & p-q & -h \\ 0 & j^* & -h^* & p+q \end{vmatrix} \tag{4.49}$$

$$p = a(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), q = \frac{b}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{zz})$$

$$h = -(i\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{yz}), j = -\frac{\sqrt{3}}{2}b(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) - id\varepsilon_{xy}$$

a, b, d - константы деформационного потенциала [144]. В сферическом приближении $d = \sqrt{3}b$; при этом вид $H(\varepsilon)$ не зависит от ориентации осей. Далее $H(\varepsilon)$ будет рассматриваться только в сферическом приближении. Зависимость деформации от приложенного напряжения учитываем точно. Растяжение и сжатие происходит вдоль кристаллографической оси [001] (ось x). Как для оси $z \parallel [110]$, так и для оси $z \parallel [100]$ тензор деформации имеет три неисчезающие компоненты $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$,

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -t\varepsilon_{xx}, t = \frac{C'_{12}}{C'_{11}}$$

где C'_{ij} - упругие константы (для Si $C'_{11} = 11169$ ГПа, $C'_{12} = 65$ ГПа [152]). Тогда $h = 0, j = -\frac{\sqrt{3}}{2}b\varepsilon_{xx}(1+t)$.

Эффективный гамильтониан квазидвумерных дырок для поверхности (001) в магнитном поле, но без деформации был получен по теории возмущений в

разделе 4.2 ([14]). В качестве нулевого приближения использовался гамильтониан $H_0(k_z) + V(z)$, дающий набор двукратно вырожденных уровней E_m и E_n для легких и тяжелых дырок соответственно. Движение в плоскости с энергиями, близкими к каждому из этих уровней, описывается эффективным 2D-гамильтонианом $H_{n(m)}(\hat{k}_x, \hat{k}_y, \mathbf{H})$. Аналогичным образом получаем по теории возмущений гамильтониан для основного состояния тяжелых дырок при деформации

$$H_{0h} = E_{0h}(\varepsilon) + \frac{\hbar^2}{2m_{0h}}\hat{k}^2 + \frac{3}{2}g_{0h}H_z\sigma_z + \beta_{0h} \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m_0}\hat{R} + j \right) \hat{S}\sigma_+ - \left(\frac{\hbar^2}{2m_0}\hat{R}^* + j \right) \hat{S}^*\sigma_- \right] \quad (4.50)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - матрицы Паули, $\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$.

$$E_{0h}(\varepsilon) = E_{0h} + p + q, \quad \frac{1}{m_{0h}} = \frac{1}{m_0}(\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_{0h})$$

$$g_{0h} = g_0\kappa + \frac{2}{3}\alpha_{0h}, \quad \alpha_{0h} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_m 3\gamma_3^2 \frac{|\langle 0h | k_z | m \rangle|^2}{E_{0h} - E_m}$$

$$\beta_{0h} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_m \frac{\langle 0h | m \rangle \langle m | k_z | 0h \rangle}{E_{0h} - E_m} \quad (4.51)$$

Для треугольной ямы при $V(z) = 2\pi n_s e z / \epsilon_0$ (n_s - двумерная плотность, ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость) получено:

$$\alpha_{0h} = -0.575(\gamma_1 - 2\gamma_2), \quad \beta' = i\sqrt{3}\gamma_3\beta_{0h} = (\gamma_1 - 2\gamma_2)^{4/3}(n_0/n_s)^{1/3} * 0.644 * 10^{-5} (cm)$$

($n_0 = 10^{12} cm^{-2}$).

Рассмотрим вид уровней энергии в различных случаях.

(а) Без учета гофрировки, делая унитарное преобразование $H_{0h} = U^+_{0h}U$, где $U = \frac{1}{2}(1 + i\sigma_z)$, приводим 2D-гамильтониан к виду

$$H_{0h} = E_{0h}(\varepsilon) + \frac{\hbar^2}{2m_{0h}}\hat{k}^2 + \frac{3}{2}g_{0h}H_z\sigma_z + \beta' j [\sigma \times \hat{\mathbf{k}}] \mathbf{n} + \beta'' [\sigma \times \hat{\kappa}] \mathbf{n} \quad (4.52)$$

где $\hat{\kappa} = (\hat{k}_x(\hat{k}_x^2 - 3\hat{k}_y^2), -\hat{k}_y(\hat{k}_y^2 - 3\hat{k}_x^2), 0)$, $\beta'' = \frac{\hbar^2}{2m_{0h}}\sqrt{3}\gamma_2\beta'$.

Получается линейный член такого же вида, как и у Бычкова-Рашбы [140]. В отсутствие магнитного поля гамильтониан (4.50) дает уровни энергии

$$E_{0h} = \frac{\hbar^2}{2m_{0h}} k^2 \pm k\beta' \sqrt{\beta''^2 k^4 + j^2 + 2\beta'' j k^2 \cos 2\varphi} \quad (4.53)$$

(b) Для поверхности (100) уровни энергии имеют вид

$$E_{0h} = \frac{\hbar^2}{2m_{0h}} k^2 \pm k\beta' \sqrt{\beta''^2 k^4 (1 + \delta^2 + 2\delta \cos 4\varphi) + j^2 + 2\beta'' j (1 + \delta) k^2 \cos 2\varphi} \quad (4.54)$$

(c) Для поверхности (110) гамильтониан $H_0(\mathbf{k})$ (4.45, 4.48) приводится вначале к виду, диагональному при $k = 0$, при этом члены, зависящие только от k_z , включаются в нулевое приближение и учитываются точно.

Частично диагонализированный таким образом гамильтониан $H'_0(\mathbf{k})$ имеет вид, аналогичный (4.45), с элементами P', Q', S', R' .

$$P' = P; S' = S$$

$$\begin{aligned} Q' &= -\sqrt{3\gamma_3^2 + \gamma_2^2} k_z^2 + \left(\frac{\gamma_2(3\gamma_3 + \gamma_2)}{2\sqrt{3\gamma_3^2 + \gamma_2^2}} - \frac{3\gamma_2(\gamma_3 - \gamma_2)}{2\sqrt{3\gamma_3^2 + \gamma_2^2}} \right) k_x^2 + \\ &+ \left(\frac{(3\gamma_3 - \gamma_2)(3\gamma_3 + \gamma_2)}{4\sqrt{3\gamma_3^2 + \gamma_2^2}} + \frac{3(\gamma_3 + \gamma_2)(\gamma_3 - \gamma_2)}{4\sqrt{3\gamma_3^2 - \gamma_2^2}} \right) k_y^2 \\ R' &= -\sqrt{3} \left(\frac{\gamma_2(3\gamma_3 + \gamma_2)}{4\sqrt{3\gamma_3^2 + \gamma_2^2}} k_x^2 - \frac{(\gamma_3 + \gamma_2)(3\gamma_3 + \gamma_2)}{4\sqrt{3\gamma_3^2 + \gamma_2^2}} k_y^2 + 2i\gamma_3 k_x k_y \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Затем определяется эффективный гамильтониан вида (4.50), дающий следующие уровни энергии для основного состояния тяжелых дырок:

$$E_{0h} = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{k_x^2}{m_{0x}} + \frac{k_y^2}{m_{0y}} \right) \pm |\beta_{0h}|^2 \sqrt{|S|^2 (R' + j)(R'^* + j)} \quad (4.56)$$

Анизотропию в квадратичном по k члене удобно перевести во второе слагаемое с помощью масштабного преобразования

$$k_x = k'_x \left(\frac{m_{0x}}{m_{0y}} \right)^{1/4}, \quad k_y = k'_y \left(\frac{m_{0y}}{m_{0x}} \right)^{1/4} \quad (4.57)$$

Для расчетов с использованием треугольного потенциала ($n_0 = 10^{12} \text{cm}^{-2}$) $m_{0x}/m_{0y} \approx 2$. После этого анизотропия в членах R' значительно уменьшится, и ее можно в дальнейшем не учитывать. Анизотропия же в членах S , наоборот, возрастет.

$$E_{0h} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2\sqrt{m_{0x}m_{0y}}} \pm k\beta' \sqrt{(\cos^2 \varphi + \tilde{\delta} \sin^2 2\varphi)(\beta''^2 k'^4 + j^2 + 2\beta'' j k'^2 \cos 2\varphi)} \quad (4.58)$$

В магнитном поле уровни Ландау находятся аналитически для изотропного двумерного гамильтониана в случае или только линейного [140], или только кубического [14] члена, дающего спиновое расщепление. Волновые функции имеют вид χ_N (для линейного расщепления) или ϕ_N (для кубического расщепления), где

$$\chi_N = (Au_{N-1}, Bu_N); \quad \phi_N = (Cu_{N-3}, Du_N) \quad (4.59)$$

(u_N - функции гармонического осциллятора). Полагая в полученном гамильтониане (4.50) член, зависящий от деформации, малым по сравнению с кубическим, для трех рассматриваемых случаев проанализируем его влияние на уровни Ландау.

(а) Гамильтониан (4.52) при $j = 0$ имеет аналитическое решение, и волновые функции имеют вид ϕ_N . Добавление члена $\beta' j [\boldsymbol{\sigma} \times \hat{\mathbf{k}}] \mathbf{n}$ не дает поправки первого порядка к уровням энергии в магнитном поле.

(б) Для поверхности (100) учет гофрировки приводит к смешиванию состояний ϕ_N и $\phi_{N\pm 4}$, что опять не дает линейных по j поправок к уровням Ландау. Очевидно, для этих случаев не будет и сдвига положения биений, зависящего от знака деформации.

(с) Анизотропия поверхности (110) "зацепляет" состояния ϕ_N, ϕ_{N-2} , что приводит к членам вида χ_N в волновой функции при $j = 0$. Следовательно, возникает линейная по j поправка ΔE_j^N к уровням Ландау

$$\Delta E_j^N \sim (1 - \tilde{\delta}) \beta' j a_H^{-1} (N)^{1/2} \quad (4.60)$$

приводящая к пропорциональному деформации сдвигу положения узла биений в осцилляциях Шубникова-де Гааза.

Результаты, полученные для поверхности (110), качественно согласуются с экспериментальными данными [150] и результатами численных расчетов [152]. Кроме того, проведенное выше рассмотрение позволяет сделать новый вывод о том, что линейно зависящий от деформации сдвиг положения биений существует только в учете анизотропии и только при вследствие более низкой симметрии поверхности (110). Аналитическое рассмотрение позволяет также объяснить чувствительность результатов численного счета к выбору параметров Латтинжера: эффект линейной зависимости положения биений от деформации существует в меру анизотропии (19). При учете анизотропии возникает и линейный по k член, однако величина его значительно меньше, чем у возникающего за счет приложенных внешних напряжений, и поэтому он не играет существенной роли при объяснении экспериментов [150].

4.6. Выводы к главе 4 .

1. Исследовались особенности электронного спектра в двумерных дырочных каналах в Si и GaAs в перпендикулярном магнитном поле. В узкой квантовой яме при учете спин-орбитального взаимодействия и непараболичности получены спектры уровней Ландау дырок, в квазиклассическом случае получены выражения для циклотронных энергий и циклотронных масс.

2. Для двумерных дырочных каналов в GaAs в сильном наклонном магнитном поле вычислены значения эффективных масс дырок на различных уровнях Ландау для квантования движения электронов вдоль направления магнитного поля.

3. Изучалось влияние одноосной деформации вдоль слоя двумерных дырок в Si на положение уровней Ландау; показано, что линейная по деформации поправка к энергии уровней Ландау возникает только для двумерного канала на поверхности (110).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Основные результаты и выводы.

1. Межподзонные коллективные возбуждения зарядовой и спиновой плотности в квазидвумерной электронной системе в сильном магнитном поле имеют многомодовую структуру, число мод определяется фактором заполнения. Как для межподзонных возбуждений без изменения уровня Ландау, так и для переходов с повышением или понижением номера уровня Ландау новые моды появляются вблизи целочисленных факторов заполнения. Наиболее значительный эффект, доступный для экспериментального наблюдения, существует для переходов без изменения уровня Ландау.

2. Для системы электронов в квантовой яме с несколькими уровнями размерного квантования возможно существование межподзонных коллективных возбуждений спиновой и зарядовой плотности с различными значениями проекции момента на нормаль к плоскости движения.

3. Энергия комбинированного спин-флип возбуждения в ультраквантовом пределе при факторах заполнения ν от 0 до 1 зависит от электрон-электронных корреляций. Корреляционные поправки доминируют при факторе заполнения вблизи 0, тогда как при $\nu \rightarrow 1$ их влияние не так существенно.

4. На основании расчета энергии спиновых возбуждений примесных комплексов, состоящих из двух электронов в квантовой яме и неподвижной заряженной примеси, выполненного в пределе сильного магнитного поля, доказана интерфейсная природа заряженных примесей.

5. Для системы электронов в асимметричных двойных квантовых ямах со слабой туннельной связью показано, что в области энергий, превышающих параметр туннелирования, свойства плазменных возбуждений в системах с различной пространственной симметрией аналогичны, а в длинноволновом пределе влияние асимметрии определяющее.

6. Энергия коллективных возбуждений зарядовой плотности (акустических и оптических фононов) для системы электронов в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле зависит от взаимной ориентации магнитного

поля и импульса возбуждения. Анизотропия определяется влиянием конечной ширины квантовых ям.

7. Получена энергия коллективных возбуждений зарядовой и спиновой плотности (магнитоплазмонов и магнитоэкситонов) в асимметричной двуслойной электронной системе в сильном перпендикулярном магнитном поле. Показано, что существует изспиновое синглетное возбуждение (для возбуждений зарядовой плотности это оптический плазмон, для возбуждений спиновой плотности - внутрислойной магнитоэкситон), не зависящее от симметрии системы, и изоспиновый триплет, энергия которого определяется параметрами асимметрии и туннелирования и разницей в энергиях внутрислойного и межслойного магнитоэкситонов.

8. Получено аналитическое выражение для величины энергетического расщепления и соответствующего импульса в области антипересечения межподзонных экситонов и оптических плазмонов в асимметричных слоях со слабым туннелированием в зависимости от параметров двойной квантовой ямы.

9. Для электронов в чистом двуслойном графене в сильном магнитном поле при определенных условиях происходит расщепление линии циклотронного резонанса. Для разных долин энергии циклотронных переходов различны. При учете Кулоновского взаимодействия, слабой асимметрии слоев графена и электронно-дырочной асимметрии разница в энергиях обусловлена в меньших полях электронно-дырочной асимметрией, а в больших полях определяется электрон-электронным взаимодействием.

10. Для узкой квантовой ямы (двумерные дырочные каналы в Si и GaAs) в перпендикулярном магнитном поле при учете спин-орбитального взаимодействия и параболичности получены спектры уровней Ландау дырок, выражающиеся в аналитическом виде. В квазиклассическом случае получены выражения для циклотронных энергий и циклотронных масс.

11. В сильном наклонном магнитном поле (циклотронная энергия много больше энергии размерного квантования) размерное квантование определяется изменением ограничивающего потенциала вдоль направления магнитного поля и эффективной массой для соответствующего уровня Ландау. Для двумерных дырочных каналов в GaAs вычислены значения эффективных масс дырок на

различных уровнях Ландау для квантования движения электронов вдоль направления магнитного поля.

12. При одноосной деформации вдоль слоя двумерных дырок в Si линейная по деформации поправка к энергии уровней Ландау возникает только двумерного канала на поверхности (110) (необходима неэквивалентность оси сжатия-растяжения и перпендикулярного ей направления в плоскости).

Список литературы

1. В.Е. Бисти. Межподзонные коллективные возбуждения в квазидвумерных системах в сильном магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. –1999.–Т.69.– №8.– С.543-547.
2. В.Е. Бисти. Структура межподзонных коллективных возбуждений в квазидвумерных системах в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. –2001.– Т.73.– №1.–С.25-28.
3. В.Е. Бисти. Возбужденные состояния межподзонного экситона // ФТТ. –2002.– Т.44.– №12.–С.2220-2224.
4. А.С. Журавлев, Л.В. Кулик, И.В. Кукушкин, В.Е. Кирпичев, В.Е.Бисти. Циклотронная спин-флип мода в ультраквантовом пределе. // Письма в ЖЭТФ. –2007.– Т.85. –№2.– С.128-131.
5. А.С. Журавлев, Л.В. Кулик, В.Е.Бисти, И.К. Дроздов, В.Е. Кирпичев, И.В. Кукушкин. Интерфейсные D- комплексы в двумерной электронной системе // Письма в ЖЭТФ. –2010.–Т.92.–№9.–С.672–677.
6. С.В. Товстоног, В.Е. Бисти. Плазмоны в двойных квантовых ямах в параллельном магнитном поле // Письма в ЖЭТФ 78.–2003.–Т.78.–В.11.– С.1237-1241.
7. В.Е. Бисти, В.Е. Кирпичев, Л.В. Кулик, И.В. Кукушкин. Дисперсионные свойства плазменных возбуждений в туннельно связанных двухслойных электронных системах // Письма в ЖЭТФ. –2006.– Т.83.–В.6.–С.300-304.
8. V.E. Bisti. Magnetoplasmons in symmetry driven bilayer electron system // International Journal of Modern Physics B.–2007.- Vol. 21.– Nos.8-9.– P.1555-1558.
9. V.E. Bisti. Charge and spin density excitations in symmetry driven bilayer electron system in high magnetic field // Physica E.–2008.–Vol.40.–P.1415-1417.
10. V.E. Bisti. Interaction of intersubband and plasmon excitations in asymmetric semiconductor bilayers // Physica E.-2011.–Vol.43.– P.1398-1399.

11. V.E. Bisti, N.N. Kirova. Charge density excitations in bilayer graphene in high magnetic field // Письма в ЖЭТФ.– 2009.– Т.90.– В.2.– С.130-133.
12. V.E. Bisti, N.N. Kirova. Coulomb interaction and electron-hole asymmetry in cyclotron resonance of bilayer graphene in a high magnetic field // Phys. Rev.B.– 2011.– Vol.84.– No.15.– P.15543(6).
13. В.Е. Бисти. Магнитоэкситоны в графене // Письма в ЖЭТФ.–2013.–Т.98.– В.1.– С.57-65.
14. V.E. Bisti. Landau levels of holes in a two-dimensional channel // Superlattices and Microstructures.–1991.– Vol.10.– No.4.– P.485-488.
15. М.Н. Ханнанов, И.В. Кукушкин, В.Е. Бисти, Ю.А. Нефедов, С.И. Губарев. Измерение циклотронных масс спин-орбитально расщепленных квазидвумерных дырок в узких квантовых ямах GaAs(001) // ЖЭТФ.– 2008.– Т.134.– В.3.– С.1-10.
16. В.Е. Бисти, В.И. Фалько. Квазидвумерные дырки в наклонном магнитном поле // ФТТ.– 1992.– Т.34.– В.5.– С.1580-1586.
17. В.Е. Бисти. Влияние деформации на спиновое расщепление в квазидвумерных дырочных системах // ФТТ.– 1998.– Т.40.– В.3.– С.546-549.
18. T. Ando, A.B. Fowler, F. Stern // Rev. Mod. Phys. – 1982. –Vol. 54. – No.3. –P. 437-672.
19. W. Kohn. Cyclotron resonance and de Haas-van Alphen oscillations of an interacting electron gas // Phys. Rev. –1961.– Vol. 123.– P. 1242-1244.
20. Ю.А. Бычков, С.В. Иорданский, Г.М. Элиашберг. Двумерные электроны в сильном магнитном поле // Письма в ЖЭТФ.–1981.– В. 33.– С. 152-155. (1981).
21. И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. Экситон Мотта в квазидвумерном полупроводнике в сильном магнитном поле // ЖЭТФ.– 1980.– Т. 78.– С. 1167-1175.
22. C. Kallin, V.I. Halperin. Excitations from a filled Landau level in the two-dimensional electron gas // Phys. Rev. B.– 1984.– Vol. 30.– P. 5655-5668.
23. A.H. MacDonald. Hartree-Fock approximation for response functions and collective excitations in a two-dimensional electron gas with filled Landau levels // J. Phys. C.– 1985.– Vol. 18.– P. 1003-1016.

24. J.P. Longo and C. Kallin. Spin-flip excitations from Landau levels in two dimensions // Phys. Rev. B.– 1993.– Vol. 47.– P. 4429-4439.
25. Y.A. Bychkov, G. Martinez. Magnetoplasmons and band nonparabolicity in two-dimensional electron gas // Phys. Rev. B.– 2002.– Vol. 66.– P. 193312.
26. A. H. MacDonald, H. C. A. Oji, and S. M. Girvin. Magnetoplasmon excitations from partially filled Landau levels in two dimensions // Phys.Rev. Letters.– 1985.– Vol. 55.– P. 2208-2211.
27. H. C. A. Oji and A. H. MacDonald. Magnetoplasma modes of the two-dimensional electron gas at nonintegral filling factors // Phys.Rev. B.– 1986.– Vol. 33.– P. 3810-3818.
28. S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman. Collective-Excitation Gap in the Fractional Quantum Hall Effect // Phys. Rev. Lett.– 1985.– Vol. 54.– P. 581-583.
29. S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman. Magneto-roton theory of collective excitations in the fractional quantum Hall effect // Phys. Rev. B.– 1986.– Vol. 33.– P. 2481-2494.
30. A. Pinczuk, S. Smitt-Rink, G. Danan et al. Large exchange interactions in the electron gas of GaAs quantum wells // Phys. Rev. Lett.– 1989.– Vol. 63.– P. 1633.
31. D. Gammon, B.V. Shanabrook, J.C. Ryan et al. Exchange and correlation in the nonhomogeneous electron gas in semiconductor heterojunctions // Phys.Rev. Lett.– 1992.– Vol. 68.– P. 1884.
32. M.Ramsteiner, J.D. Ralston, P. Koidi, B. Discher, U. Biebi, I.Wagner, H. Ennen. Doping density dependence of intersubband transitions in GaAs/Al_xGa_{1-x}As quantum well structures // J. Appl. Phys.– 1990.– Vol. 67.– P. 3900.
33. Jainendra K. Jain, S. Das Sarma. Elementary electronic excitations in a quasi-two-dimensional electron gas // Phys. Rev. B.– 1987.– Vol. 36.– P. 5949.
34. D.H. Ehlert. Intersubband resonances and plasmons in quasi-two-dimensional systems: A line-shape and coupling analysis // Phys. Rev. B.– 1988.– Vol. 38.– P. 9706.

35. I.K. Marmorkos, S. Das Sarma. Interacting intersubband excitations in parabolic semiconductor quantum wells // Phys. Rev. B.– 1993.– Vol. 48.– P. 1544.
36. A. Tselis, J.J. Quinn. Theory of collective excitations in semiconductor superlattice structures// Phys. Rev. B.–1984.– Vol. 29.– P. 3318.
37. T. Ando. Self-consistent results for a GaAs/Al_xGa_{1-x}As heterojunction. I. Subband structure and light-scattering spectra // J. Phys. Soc. Jpn.– 1982.– Vol. 51.– P. 3893-3899.
38. 10. P. Hohenberg, W. Kohn. Inhomogeneous Electron Gas // Phys.Rev.– 1964.– Vol. 136.– P. B864.
39. 11. W. Kohn, L.J. Sham. Self-consistent equations including exchange and correlation effects // Phys. Rev.– 1965.– Vol. 140.– P. A1133.
40. O. Gunnarsson, B.I. Lundqvist. Exchange and correlation in atoms, molecules, and solids by the spin-density-functional formalism // Phys. Rev. B.– 1976.– Vol. 13.– P. 4274.
41. S.L. Chuang, M.S.C. Luo, S. Schmitt-Rink et al. Many-body effects on intersubband transitions in semiconductor quantum-well structures // Phys. Rev. B.– 1992.– Vol. 46.– P. 1897.
42. M.S.-C. Luo, S.L. Chuang, S. Schmitt-Rink et al. Many-body effects on intersubband spin-density and charge-density excitations // Phys. Rev. B.– 1993.– Vol. 48.– P. 11086.
43. J.C. Ryan. Collective interactions in a quantum well: The inclusion of nonlocal exchange // Phys. Rev. B.– 1991.– Vol. 43.– P. 12406.
44. K.W. Chui, J.J. Quinn. Plasma oscillations of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // Phys. Rev. B.– 1974.– Vol. 9.– P. 4724-4732.
45. L. Wendler, R. Pechstedt. Magnetoplasmon-phonon coupling in semiconductor quantum wells // J. Phys: Condens. Matter.– 1990.– Vol. 2.– P. 8881-8904.
46. G.Brosak, B.V.Shanabrook, D. Gammon and D. S. Katzer. Collective intersubband spin- and charge-density excitations in tilted magnetic fields // Phys. Rev. B.– 1993.– Vol. 47.– P. 9981-9984.

47. В.Е. Кирпичев, И.В. Кукушкин, К. фон Клитцинг Эберл К. Межподзонные коллективные возбуждения спиновой и зарядовой плотности в системе двумерных электронов в режиме квантового эффекта Холла // Письма в ЖЭТФ.– 1998.– Т. 67.– В. 3.– С. 196-200.
48. V.E. Kirpichev, L.V. Kulik, I.V. Kukushkin et al. Direct observation of the intersubband Bernstein modes: Many-body coupling with spin- and charge-density excitations // Phys. Rev. B.– 1999.– Vol. 59.– P. R12751-R12754.
49. L. V. Kulik, I. V. Kukushkin, V. E. Kirpichev, K. v. Klitzing, and K. Eberl. Modification of the intersubband excitation spectrum in a two-dimensional electron system under a perpendicular magnetic field // Phys. Rev. Lett.– 2001.– Vol. 86.– P. 1837-1840.
50. A. Pinczuk, B. S. Dennis, D. Heiman, C. Kallin, L. Brey, C. Tejedor, S. Schmitt-Rink, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Spectroscopic measurement of large exchange enhancement of a spin-polarized 2D electron gas // Phys. Rev. Lett.– 1992.– Vol. 68.– P. 3623-3626.
51. L. V. Kulik, I. V. Kukushkin, V. E. Kirpichev, J. H. Smet, K. v. Klitzing and W. Wegscheider. Cyclotron spin-flip excitations in the extreme quantum limit // Phys. Rev. B.– 2001.– Vol. 63.– P. 201402(R).
52. A. B. Van'kov, L. V. Kulik, I. V. Kukushkin, V. E. Kirpichev, S. Dickmann, V. M. Zhilin, J. H. Smet, K. v. Klitzing, and W. Wegscheider. Cyclotron spin-flip mode as the lowest-energy excitation of unpolarized integer quantum Hall states // Phys. Rev. B.– 2005.– Vol. 72.– P. 073304.
53. S. Dickmann, V. M. Zhilin. Double-exciton component of the cyclotron spin-flip mode in a quantum Hall ferromagnet // Phys. Rev. B.– 2008.– Vol. 78.– P. 115302.
54. A.B. Dzyubenko and A.Yu. Sivachenko. D^- centers in quantum wells: Spin-singlet and spin-triplet magneto-optical transitions // Phys. Rev. B.– 1993.– Vol. 48.– P. 14690-14693.
55. D.M. Larsen and S.Y. McCann. Excited states of the two-dimensional D^- center in magnetic fields // Phys. Rev. B.– 1992.– Vol. 45.– P. 3485-3488.

56. P. Hawrylak. Many-electron effects on donor states in a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // Phys. Rev. Lett.– 1994.– Vol. 72.– P. 2943-2946.
57. A.B. Dzyubenko, A. Mandray, S. Huant, A.Yu. Sivachenko, B. Etienne. Triplet transitions of D^- centers in quantum wells in high magnetic fields // Phys. Rev. B.– 1994.– Vol. 50.– P. 4687-4691.
58. S. Huant, A. Mandray, J. Zhu, S. Louie, T. Pang, and B. Etienne. Well-width dependence of D^- cyclotron resonance in quantum wells // Phys. Rev. B.– 1993.– Vol. 48.– P. 2370-2375.
59. S. Huant, S. P. Najda and B. Etienne. Two-dimensional D^- centers // Phys. Rev. Lett.– 1990.– Vol. 65.– P. 1486-1489.
60. J-P. Cheng, Y.J. Wang, B.D. McCombe, and W. Schaff. Many-electron effects on quasi-two-dimensional shallow-donor impurity states in high magnetic fields // Phys. Rev. Lett.– 1993.– Vol. 70.– P. 489-492.
61. Z.X. Jiang, B.D. McCombe, and P. Hawrylak. Donor impurities as a probe of electron correlations in a two-dimensional electron gas in high magnetic fields // Phys. Rev. Lett.– 1998.– Vol. 81.– P. 3499-3502.
62. J. G. S. Lok, A. K. Geim, J. C. Maan et al. D^- centers probed by resonant tunneling spectroscopy // Phys. Rev. B.– 1996.– Vol. 53.– P. 9554-9557.
63. H.L. Fox and D.M. Larsen. Exact solutions for barrier D^- states at high magnetic fields // Phys. Rev. B.– 1995.– Vol. 51.– P. 10709-10713.
64. M. Wagner, U. Merkt and A.V. Chaplik. Spin-singlet–spin-triplet oscillations in quantum dots // Phys. Rev. B.– 1992.– Vol. 45.– P. 1951-1954.
65. L. V. Kulik, I. V. Kukushkin, V. E. Kirpichev, J. H. Smet, K. v. Klitzing and W. Wegscheider. Cyclotron spin-flip excitations in the extreme quantum limit // Phys. Rev. B.– 2001.– Vol. 63.– P. 201402(R).
66. D. Pines and J. R. Schrieffer. Collective behavior in solid-state plasmas // Phys. Rev.– 1961.– Vol. 124.– P. 1387-1400.
67. Р.З. Витлина, А. В. Чаплик. Плазменные колебания в многокомпонентных двумерных системах // ЖЭТФ.– 1981.– Т. 81.– С. 1011-1021.

68. S. Das Sarma, A. Madhukar. Collective modes of spatially separated, two-component, two-dimensional plasma in solids // *Phys. Rev.*– 1981.– Vol. 23.– P. 805-815.
69. D. S. Kainth, D. Richards, A. S. Bhatti, H. P. Hughes, M. Y. Simmons, E. H. Linfield, and D. A. Ritchie. Angle-resolved Raman spectroscopy of the collective modes in an electron bilayer // *Phys. Rev. B.*– 1999.– Vol. 59.– P. 2095-2101.
70. R. Decca, A. Pinczuk, S. Das Sarma, B. S. Dennis, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Absence of spin-density excitations in quasi two-dimensional electron system // *Phys. Rev. Lett.*– 1994.– Vol. 72.– P. 1506-1509.
71. M.-T. Bootsmann, C.-M. Hu, Ch. Heyn, D. Heitmann, and C. Schüller. Acoustic plasmons and indirect intersubband excitations in tunneling-coupled GaAs-AlGaAs double quantum wells // *Phys. Rev. B.*– 2003.– Vol. 67.– P. 121309.
72. С. В. Товстоног, Л. В. Кулик, В. Е. Кирпичев, И. В. Кукушкин, В. Дитче, К. фон Клитцинг. Коллективные возбуждения в двойных квантовых ямах с сильной туннельной связью // *Письма в ЖЭТФ.*– 2004.– Т. 79.– 54-58.
73. Tunneling density of states and plasmon excitations in double-quantum-well systems // *Phys. Rev. B.*– 1995.– Vol. 51.– P. 7074-7084.
74. S. Das Sarma and E. H. Hwang. Plasmons in coupled bilayer structures // *Phys. Rev. Lett.*– 1998.– Vol. 81.– P. 4216-4219.
75. P. G. Bolcatto and C. R. Proetto. Spin-density and charge-density excitations in the paramagnetic phase of semiconductor double quantum well systems // *Phys. Rev. Lett.*– 2000.– Vol. 85.– P. 1734-1737.
76. S. V. Tovstonog, L. V. Kulik, I. V. Kukushkin, A. V. Chaplik, J. H. Smet, K. v. Klitzing, D. Schuh, and G. Abstreiter // *Phys. Rev. B.*– 2002.– Vol. 66.– P. 241308(R).
77. G. R. Aїzin and G. Gumbs. Magnetoplasmon excitations in in double-quantum-well systems in a parallel magnetic field // *Phys. Rev. B.*– 1996.– Vol. 54.– P. 2049-2058.

78. A. A. Gorbatsевич and I. V. Tokatly. Formation of k -space indirect magnetoexcitons in double-quantum-well direct-gap heterostructures // *Semicond. Sci. Technol.*– 1998.– Vol. 13.– P. 288-295.
79. С. В. Товстоног, Л. В. Кулик, В. Е. Кирпичев, И. В. Кукушкин, В. Дитче, К. фон Клитцинг. Элементарные возбуждения в двойных электронных слоях с туннельной связью // *Письма в ЖЭТФ.*– 2003.– Т. 78.– С. 1151-1155.
80. С.В. Товстоног, И.В. Кукушкин, Л.В. Кулик, В.Е. Кирпичев. Акустические магнитоплазменные возбуждения в двойных электронных слоях // *Письма в ЖЭТФ.*– 2002.– Т. 76.– С. 592-597.
81. S.V. Tovstonog, L.V. Kulik, I.V. Kukushkin, A.V. Chaplik, J.H. Smet, K. von Klitzing, D. Schuh, G. Abstreiter. Acoustical and optical magnetoplasma excitations in a bilayer electron system // *Phys. Rev. B.*– 2002.– Vol. 66.– P. 241308.
82. L.V. Kulik, I.V. Kukushkin, V.E. Kirpichev, K. von Klitzing, and K. Eberl. Magnetic-field-induced dispersion anisotropy of intersubband excitations in an asymmetrical quasi-two-dimensional electron system // *Phys. Rev. B.*– 2000.– Vol. 61.– P. 1712-1715.
83. L.V. Kulik, I.V. Kukushkin, V. E. Kirpichev et al. Pseudomomentum of a dipole in a two-dimensional system // *Phys. Rev. B.*– 2002.– Vol. 66.– P. 073306.
84. J. Dempsey and B.I. Halperin. Tilted-field magneto-optical absorption in an imperfect parabolic quantum well // *Phys. Rev. B.*– 1992.– Vol. 45.– P. 3902-3905.
85. P.I. Tambonea and S. Das Sarma. Collective excitations in imperfect parabolic quantum wells with in-plane magnetic fields // *Phys. Rev. B.*– 1994.– Vol. 49.– P. 16593-16599.
86. G. Santoro and G. Giuliani. Acoustic plasmons in a conducting double layer // *Phys. Rev. B.*– 1988.– Vol. 37.– P. 937-940.
87. Shuh-Jen Cheng and Rolf R. Gerhards. Coupled two-layer plasmon modes induced in a single quantum well by in-plane magnetic fields // *Phys. Rev. B.*– 2002.– Vol. 65.– P. 085307.

88. H. Tang and P.N. Butcher. Parallel transport in a quasi-two-dimensional electron gas subjected to an in-plane magnetic field // J. Phys.– 1988.– Vol. 21.– P. 3313.
89. L.V. Kulik, S.V. Tovstonog, V.E. Kirpichev, I.V. Kukushkin, W. Dietsche, M. Hauser, and K. v.Klitzing. Symmetry driven plasmon transformations in a bilayer electron system // Phys. Rev. B.– 2004.– Vol. 70.– P. 033304.
90. R.J. Radtke, S. Das Sarma, A. H. MacDonald. Mode mixing in antiferromagnetically correlated double quantum wells // Phys. Rev. B.– 1998.– Vol. 57.– P. 2342-2351.
91. A.C. Tselis and J.J. Quinn. Theory of collective excitations in semiconductor superlattice structures // Phys. Rev. B.– 1984.– Vol. 29.– P. 3318-3335.
92. C.-M. Hu, C. Schueller, and D. Heitmann. Space-asymmetry-induced plasmon mode mixing and anticrossing in coupled bilayer structures // Phys. Rev. B.– 2001.– Vol. 64.– P. 073303.
93. В.Е. Бисти, А.П. Силин. Еэлектронно-дырочная жидкость в полупроводниковых решетках I типа // ФТТ.– 1986.– Т. 28.– С. 2379-2385.
94. K.W.Chui, J.J. Quinn. Plasma oscillations of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // Phys. Rev B.– 1974.– Vol. 9.– P. 4724-4732.
95. S. Das Sarma, J.J. Quinn. Collective excitations in semiconductor superlattices. Phys. Rev. **B25**(1982), 7603-7618.
96. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov and A.K. Geim. The electronic properties of graphene // Rev. Mod. Phys.– 2009.– Vol. 81.– P. 109-162.
97. M. Mucha-Kruczynski, E. McCann and Vladimir I. Falko. Electron-hole asymmetry and energy gaps in bilayer graphene // Semicond. Sci. Technol.– 2010.– Vol. 25.– P. 033001.
98. E.A. Henriksen, Z. Jiang, L.-C. Tung, M.E. Schwarz, M. Takita, Y.-J. Wang, P. Kim, and H.L. Stormer. Cyclotron resonance in bilayer graphene // Phys. Rev. Lett.– 2008.– Vol. 100.– P. 087403.

99. Z.O. Li, E.A. Henriksen, Z. Jiang, Z. Hao, M.C. Martin, P. Kim, H.L. Stormer and D.N. Basov. Band structure asymmetry of bilayer graphene revealed by infrared spectroscopy // *Phys. Rev. Lett.*– 2009.– Vol. 102.– P. 037403.
100. L.M. Zhang, Z.Q. Li, D.N. Basov, M.M. Fogler, Z. Hao and M. C. Martin. Determination of the electronic structure of bilayer graphene from infrared spectroscopy // *Phys. Rev. B.*– 2008.– Vol. 78.– P. 235408.
101. A.B. Kuzmenko, E. van Heumen, D. van der Marel, P. Lerch, P. Blake, K.S. Novoselov, and A.K. Geim. Infrared spectroscopy of electronic bands in bilayer graphene // *Phys. Rev. B.*– 2009.– Vol. 79.– 115441.
102. M. Orlita, C. Faugeras, J. Borisiuk, J.M. Baranowski, W. Strupinski, M. Sprinkle, C. Berger, W.A. de Heer, D.M. Basko, G. Martines, and M. Potemski. Magneto-optics of bilayer inclusions in multilayered epitaxial graphene on the carbon face of SiC // *Phys. Rev. B.*– 2011.– Vol. 83.– P. 125302.
103. J. McClure. Diamagnetism of graphite // *Phys. Rev.*– 1956.– Vol. 104.– P. 666-671.
104. F. Haldane. Model for a quantum hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the "parity anomaly" // *Phys. Rev. Lett.*– 1988.– Vol. 61.– P. 2015-2018.
105. Y. Zheng, T. Ando. Hall conductivity of a two-dimensional graphite system // *Phys. Rev. B.*– 2002.– Vol. 65.– P. 245420.
106. Edward McCann. Asymmetry gap in the electronic band structure of bilayer graphene // *Phys. Rev. B.*– 2006.– Vol. 74.– P. 161403.
107. Edward McCann and Vladimir I. Fal'ko. Landau-level degeneracy and quantum hall effect in a graphite bilayer // *Phys. Rev. Lett.*– 2006.– Vol. 96.– P. 086805.
108. J. Milton Pereira, Jr., F.M. Peeters, and P. Vasilopoulos. Landau levels and oscillator strength in a biased bilayer of graphene // *Phys. Rev. B.*– 2007.– Vol. 76.– P. 115419.
109. Z. Jiang, E.A. Henriksen, L.-C. Tung, Y.-J. Wang, M.E. Schwarz, M.Y. Han, P. Kim, and H.L. Stormer. Infrared spectroscopy of Landau levels of graphene // *Phys. Rev. Lett.*– 2007.– Vol. 98.– P. 197403.

110. R.S. Deacon, K.-C. Chuang, R.J. Nicholas, K.S. Novoselov, and A.K. Geim. Cyclotron resonance study of the electron and hole velocity in graphene monolayers // *Phys. Rev. B.*– 2007.– Vol. 76.– P. 081406.
111. E.A. Henriksen, P. Cadden-Zimansky, Z. Jiang, Z.O. Li, L.-C. Tung, M.E. Schwarz, M. Takita, Y.-J. Wang, P. Kim, and H.L. Stormer. Interaction-induced shift of the cyclotron resonance of graphene using infrared spectroscopy // *Phys. Rev. Lett.*– 2010.– Vol. 104.– P. 067404.
112. Mikito Koshino and Tsuneya Ando. Magneto-optical properties of multilayer graphene // *Phys. Rev. B.*– 2008.– Vol. 77.– P. 115313.
113. M.L. Sadowski, G. Martinez, and M. Potemski, C. Berger and W.A. de Heer. Landau level spectroscopy of ultrathin graphite layers // *Phys. Rev. Lett.*– 2006.– Vol. 97.– P. 266405.
114. P. Plochocka, C. Faugeras, M. Orlita, M.L. Sadowski, G. Martinez, and M. Potemski, M.O. Goerbig and J.-N. Fuchs, C. Berger and W.A. de Heer. High-energy limit of massless dirac fermions in multilayer graphene using magneto-optical transmission spectroscopy // *Phys. Rev. Lett.*– 2008.–Vol. 100.– P. 087401.
115. M.Orlita, C.Faugeras, G. Martinez, D.K. Maude, M.L. Sadowski, and M. Potemski. Dirac fermions at the H point of graphite: magnetotransmission studies // *Phys. Rev. Lett.*– 2008.– Vol. 100.– P. 136403.
116. M.Orlita, C.Faugeras, P. Plochocka, P. Neugebauer, G. Martinez, D.K. Maude, A.-L. Barra, M. Sprinkle, C. Berger, W.A. de Heer, and M. Potemski. Approaching the dirac point in high-mobility multilayer epitaxial graphene // *Phys. Rev. Lett.*– 2008.– Vol. 101.– P. 267601.
117. Y. Zhao, P. Cadden-Zimansky, Z. Jiang, and P. Kim. Symmetry breaking in the zero-energy Landau level in bilayer graphene // *Phys. Rev. Lett.*– 2010.– Vol. 104.– P. 066801.
118. Yu.A. Bychkov and G. Martinez. Magnetoplasmon excitations in graphene for filling factors ≤ 6 // *Phys. Rev. B.*– 2008.– Vol. 77.– P. 125417.
119. A. Iyengar, Jianhui Wang, H.A. Fertig, and L. Brey. Excitations from filled Landau levels in graphene // *Phys. Rev. B.*– 2007.– Vol. 75.– P. 125430.

120. T. Misumi and K. Shizuya. Electromagnetic response and pseudo-zero-mode Landau levels of bilayer graphene in a magnetic field // Phys. Rev. B.– 2008.– Vol. 77.– P. 195423.
121. Marcus Mueller and Subir Sachdev. Collective cyclotron motion of the relativistic plasma in graphene // Phys. Rev. B.– 2008.– Vol. 78.– P. 115419.
122. R. Roldan, J.-N.Fuchs, and M. O. Goerbig. Collective modes of doped graphene and a standard two-dimensional electron gas in a strong magnetic field: Linear magnetoplasmons versus magnetoexcitons // Phys. Rev. B.– 2009.– Vol. 80.– P. 085408.
123. R. Roldan, J.-N.Fuchs, and M. O. Goerbig. Spin-flip excitations, spin waves, and magnetoexcitons in graphene Landau levels at integer filling factors // Phys. Rev. B.– 2010.– Vol. 82.– P. 205418.
124. Yafis Barlas, R. Cote, K. Nomura, and A.H. MacDonald. Intra-Landau-level cyclotron resonance in bilayer graphene // Phys. Rev. Lett.– 2008.– Vol. 101.– P. 097601.
125. Csaba Toke, Vladimir I. Falko. Intra-Landau-level magnetoexcitons and the transition between quantum Hall states in undoped bilayer graphene // Phys. Rev. B.– 2011.– Vol. 83.– P. 115455.
126. K. Shizuya. Pseudo-zero-mode Landau levels and collective excitations in bilayer graphene // Phys. Rev. B.– 2009.– Vol. 79.– P. 165402.
127. K. Shizuya. Many-body corrections to cyclotron resonance in monolayer and bilayer graphene // Phys. Rev. B.– 2010.– Vol. 81.– P. 075407.
128. K. Shizuya. Renormalization and cyclotron resonance in bilayer graphene with weak electron-hole asymmetry // Phys. Rev. B.– 2011.– Vol. 84.– P. 075409.
129. Judit Sari and Csaba Toke. Theory of inter-Landau-level magnetoexcitons in bilayer graphene // Phys. Rev. B.– 2013.– Vol. 87.– P. 085432.
130. L.A. Falkovsky. Quantum magneto-optics of graphite with trigonal warping // Phys. Rev. B.– 2011.– Vol. 84.– P. 115414.
131. L.A. Falkovsky. Magneto-optics of monolayer and bilayer graphene // Письма в ЖЭТФ.– Т. 97.– С. 496-505.

132. R. de Gail, M. O. Goerbig, and G. Montambaux. Magnetic spectrum of trigonally warped bilayer graphene: Semiclassical analysis, zero modes, and topological winding numbers // *Phys. Rev. B.*– 2012.– Vol. 86.– P. 045407.
133. A. S. Mayorov, D. C. Elias, M. Mucha-Kruczynski, R. V. Gorbachev, T. Tudorovskiy, A. Zhukov, S. V. Morozov, M. I. Katsnelson, V. I. Fal'ko, A. K. Geim, K. S. Novoselov // *Science.*– 2011.– Vol. 333.– P. 860.
134. Л.А. Фальковский. Теория возмущений для гамильтониана, линейного по квазиимпульсу // *Письма в ЖЭТФ.*– 2010.– Т. 94.– С. 783-787.
135. Y.H. Lai, J.H. Ho, C.P. Chang, and M.F. Lin. Magnetoelectronic properties of bilayer Bernal graphene // *Phys. Rev. B.*– 2008.– Vol. 77.– P. 085426.
136. D.S.L. Abergel and Vladimir Fal'ko. Optical and magneto-optical far-infrared properties of bilayer graphene // *Phys. Rev. B.*– 2007.– Vol. 75.– P. 155430.
137. Yu.A. Bychkov and G. Martinez. Magnetoplasmons and band nonparabolicity in two-dimensional electron gas // *Phys. Rev. B.*– 2002.– Vol. 66.– P. 193312.
138. D.A. Broido, L.J. Sham. Effective masses of holes at GaAs-AlGaAs heterojunctions // *Phys. Rev. B.*– 1985.– Vol. 31.– P. 888-892.
139. S.R. Eric Jang, D.A. Broido, L.J. Sham. Holes at GaAs- AlGaAs heterojunctions in magnetic fields // *Phys. Rev. B.*– 1985.– Vol. 32.– P. 6630-6633.
140. Ю.А. Бычков, Э.И. Рашба. Свойства двумерного электронного газа со снятым вырождением спектра // *Письма в ЖЭТФ.*– 1984.– Т. 39.– С. 66-69.
141. Ф.Т. Васько. Спиновое расщепление спектра двумерных электронов, обусловленное поверхностным потенциалом // *Письма в ЖЭТФ.*– 1979.– Т. 30.– С. 574-577.
142. N.S. Averkiev, L.E. Golub and M. Willander. Spin relaxation anisotropy in two-dimensional semiconductor systems // *J. Phys.: Condens. Matter.*– 2002.– Vol. 14.– P. R271-R283.
143. С.М. Мешков, С.Н. Молотков. Симметричный анализ поверхностных зонных структур // *Поверхность.*– 1989.– В. 1.– С. 5.
144. Бир Г.Л., Пикус Г.Е. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках.– Москва, Наука, 1972. [

145. R. Winkler. Rashba spin splitting in two-dimensional electron and hole systems // Phys. Rev. B.– 2004.– Vol. 62.– P. 4245-4248.
146. М.И. Дьяконов, А.И. Хаецкий. Размерное квантование дырок в полупроводнике со сложной валентной зоной и зарядов в бесщелевом полупроводнике // ЖЭТФ.– 1982.– Т. 82.– С. 1584-1590.
147. V.Ekenberg, M. Altarely. Subbands and Landau levels in the two-dimensional hole gas at the GaAs-AlGaAs interface // Phys. Rev. B.– 1985.– Vol. 32.– P. 3712-3722.
148. М.Ю.Акимов, И.В.Кукушкин, С.И.Губарев и др. Размерный магнитоплазменный резонанс двумерных дырок в (001) GaAs/AlGaAs квантовых ямах // Письма в ЖЭТФ.– 200.– Т. 72.– С. 662-667.
149. S.I. Dorozhkin. Determination of energy spectrum parameters for two-dimensional carriers from the quantum oscillation beating pattern // Phys. Rev. B.– 1990.– Vol. 41.– P. 3235.
150. С.И. Дорожкин, Г. Ландвер. Влияние одноосного сжатия на осцилляции Шубникова-де Гааза в дырочном канале кремниевого полевого транзистора // Письма в ЖЭТФ.– 1996.– Т. 64.– С. 630-635.
151. С.И. Дорожкин, Е.Б. Ольшанецкий. Отличительные особенности осцилляций Шубникова-де Гааза в 2D системах с сильным спин-орбитальным взаимодействием и дырок на поверхности Si(110) // ЖЭТФ.– 1987.– Т. 46.– С 399-402.
152. W.O.G. Schmitt. Density-functional calculation of Landau levels for quasi-two-dimensional hole gases // Phys. Rev. B.– 1994.– Vol. 50.– P. 15239-15247.
153. E.Bandert, G.Landwehr. Landau levels of the two-dimensional holes gas in GaAs with inclusion of the anisotropy of the band structure // Surf. Sci.– 1986.– Vol. 170.– P. 593-600.
154. J.M. Luttinger, W. Kohn. Motion of electrons and holes in perturbed periodic fields // Phys. Rev.– 1955.– Vol. 97.– 869-883.
155. З.Н. Соколова, В.Б. Халфин, Ал.Л. Эфрос. Размерное квантование дырок и особенности экситонных спектров в квантовой яме конечной глубины // Физика и техника полупроводников.– 1988.– Т. 22.– С. 2124.

156. J.M. Luttinger. Quantum Theory of Cyclotron Resonance in Semiconductors: General Theory // Phys. Rev.– 1956.– Vol. 102.– P. 1030-1041.
157. Glauca M. G. Oliveira, Vivili M. S. Gomes, A. S. Chaves, J. R. Leite, and J. M. Worlock. Behavior of the electron-hole gas in quantum wells in $GaAs - Al_xGa_{1-x}As$ heterostructures under in-plane magnetic fields // Phys. Rev. B.– 1987.– Vol. 35.– P. 2896.
158. E. Batke and C. W. Tu. Effective mass of a space-charge layer on GaAs in a parallel magnetic field // Phys. Rev. B.– 1986.– Vol. 34.– P. 3027(R).
159. Vladimir I.Falko. On the resonant tunneling through double-barrier structures in a tilted magnetic field // Solid State Commun.– 1991.– Vol. 78.– P. 925-929.
160. W.O.G. Schmitt. Density-functional calculation for quasi-two-dimensional hole gases // Phys.Rev. B.– 1994.– Vol. 50.– P. 15221.