

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МИКРОСТРУКТУР РАН

На правах рукописи



Чигинев Александр Валерьевич

**Резонансное взаимодействие движущихся
джозефсоновских вихрей и собственных мод массивов
распределенных контактов**

01.04.07 – Физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Курин Владислав Викторович

Содержание

Введение	3
Глава 1. Динамика вихрей в узких длинных джозефсоновских контактах с полосковой линией	22
1.1. Введение	22
1.2. Контакт с полосковой линией	23
1.3. Численный эксперимент: вольт-амперные характеристики	35
1.4. Заключение	43
Глава 2. Синфазный режим движения вихрей в стеке из длинных джозефсоновских контактов, встроенном в полосковую линию	45
2.1. Введение	45
2.2. Основные уравнения. Учет влияния внешней волноведущей системы.	47
2.3. Анализ устойчивости прямоугольной вихревой решетки	51
2.4. Численный эксперимент	60
2.5. Заключение	65
Глава 3. Взаимодействие линейных волн и движущихся решеток джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках	66
3.1. Введение	66
3.2. Феноменологическое описание джозефсоновской динамики слоистого ВТСП. Гидродинамический подход.	69
3.3. Дисперсионные характеристики линейных волн.	81
3.4. Численный эксперимент	86
3.5. Заключение	99
Общее заключение	100
Список публикаций автора по теме диссертации	101
Литература	103

Введение

Эффект Джозефсона [1, 2] представляет собой туннельный эффект в сверхпроводниках, заключающийся в формировании когерентного состояния сверхпроводящих электронов, находящихся по обе стороны потенциального барьера. Проявлением данного эффекта является протекание сверхпроводящего тока через два сверхпроводника, разделенных тонкой диэлектрической прослойкой. Его основными особенностями являются малые характерные времена, ограниченные величиной энергетической щели в сверхпроводниках, и высокая чувствительность к внешним электромагнитным полям. Устойчивый интерес к эффекту Джозефсона связан с его применением в генераторах электромагнитного излучения, в устройствах для измерения слабых магнитных полей, в элементах стандарта напряжения, в элементах логических схем. Обсуждается возможность применения эффекта Джозефсона в логических элементах устройств квантовой обработки информации.

Джозефсоновский контакт представляет собой структуру, состоящую из двух сверхпроводящих обкладок, разделенных диэлектрической прослойкой. Если хотя бы один из размеров такой структуры в плоскости прослойки является достаточно большим, то такую структуру называют распределенным, или длинным джозефсоновским контактом. Динамика распределенных контактов является существенно более сложной по сравнению с динамикой точечных контактов из-за появления пространственно-неоднородных решений. Многообразие решений, возникающих в распределенных джозефсоновских системах, может быть описано на языке взаимодействия линейных волн и джозефсоновских вихрей, поэтому изучение особенностей такого взаимодействия является актуальным с фундаментальной точки зрения. Кроме того, исследование взаимодействия вихрей и линейных волн важно для практических применений в связи с возможностью создания генераторов и усилителей на основе распределенных джозефсоновских переходов.

Динамика джозефсоновских вихрей и линейных волн является сложной и разнообразной в случае, когда распределенные джозефсоновские контакты объединены в многослойные структуры и способны взаимодействовать между собой. Существующая к настоящему моменту технология позволяет изготавливать такие структуры с высоким качеством и небольшим разбросом параметров. Кроме того, интерес к динамике джозефсоновских вихрей в многослойных структурах в значительной мере связан с тем, что некоторые высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) с сильной анизотропией обладают внутрен-

ним эффектом Джозефсона, и являются в этом смысле естественными джозефсоновскими сверхрешетками.

Многослойные джозефсоновские структуры могут служить основой для построения генераторов электромагнитного излучения, верхний предел по частоте которых ограничен величиной энергетической щели в сверхпроводниках и составляет величину порядка 1 ТГц для искусственных структур на основе ниобия и порядка 10 ТГц для слоистых ВТСП. Для обеспечения эффективной генерации электромагнитных волн из слоистых структур необходима синхронизация отдельных контактов системы, и в этой связи актуальной является проблема устойчивости движущихся решеток джозефсоновских вихрей в многослойных сверхпроводящих структурах.

В последнее время наблюдается возрождение интереса к исследованию динамики джозефсоновских вихревых решеток в слоистых сверхпроводниках, связанное с недавним обнаружением генерации электромагнитных волн с частотой около 1 ТГц из структуры на основе $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ [3]. Несмотря на значительные усилия теоретиков, механизм данного излучения остается непонятным. Возможной причиной этого является несовершенство моделей, традиционно используемых для описания джозефсоновской динамики слоистых сверхпроводников. Поэтому развитие теории, описывающей динамику джозефсоновских вихрей в слоистых ВТСП, является актуальной задачей.

Настоящая диссертация посвящена исследованию эффектов взаимодействия движущихся джозефсоновских вихрей и линейных мод систем, основанных на распределенных переходах Джозефсона. В работе изучается возбуждение одиночными вихрями и вихревыми решетками линейных волн со сложной дисперсией, которая возникает как из-за наличия внешних электродинамических систем, так и из-за сложной кристаллической структуры исследуемых материалов. При рассмотрении этих задач используются простые представления для сверхпроводящего тока и тока квазичастиц, и основное внимание обращается на электромагнитное взаимодействие вихрей и линейных мод.

Ниже рассмотрены основные уравнения, описывающие эффект Джозефсона, и их важнейшие решения, и введены ключевые определения, используемые при описании джозефсоновских структур.

Сверхпроводящий ток, протекающий через джозефсоновский контакт, связан с θ — разностью фаз сверхпроводящего параметра порядка на берегах контакта. В рамках про-

стейшей модели эта связь записывается в виде

$$I = I_c \sin \theta, \quad (1)$$

где I_c — критический ток джозефсоновского перехода. Эффект протекания сверхпроводящего тока через джозефсоновский контакт получил название стационарного эффекта Джозефсона.

При превышении внешним током критического значения на обкладках контакта появляется напряжение. Величина этого напряжения связана с временной производной джозефсоновской фазы через комбинацию фундаментальных констант

$$U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\theta} \equiv \frac{\Phi_0}{2\pi c} \dot{\theta}, \quad (2)$$

где \hbar — постоянная Планка, e — заряд электрона. Данное явление называется нестационарным эффектом Джозефсона. Величина Φ_0 называется квантом магнитного потока и выражается через фундаментальные константы: $\Phi_0 = \pi \hbar c / e = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$.

Соотношения (1) и (2) являются основными в физике джозефсоновских переходов и называются джозефсоновскими соотношениями.

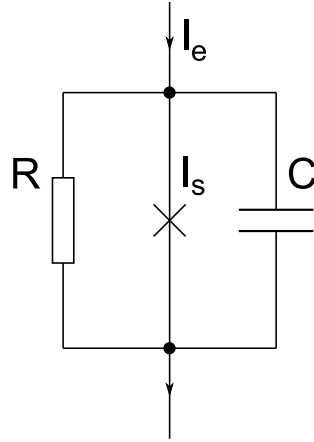


Рис. 1. Эквивалентная схема точечного джозефсоновского контакта в резистивно-шунтированной модели.

Для описания динамики точечных джозефсоновских контактов широко используется резистивно-шунтированная модель [1, 2]

$$\frac{\hbar}{2e} C \ddot{\theta} + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R} \dot{\theta} + I_c \sin \theta = I_e. \quad (3)$$

Здесь C — емкость контакта, R — сопротивление контакта, I_e — внешний ток. Данная модель учитывает, помимо джозефсоновского сверхтока, ток смещения в контакте, и ква-

зичастичный ток. Эквивалентная схема точечного контакта в резистивно-шунтированной модели представлена на рис. 1.

Рассмотрим одиночный распределенный джозефсоновский переход, представляющий собой классическую схему для изучения динамики солитонов и эффекта Джозефсона. Примеры распределенных джозефсоновских переходов показаны на рис. 2.

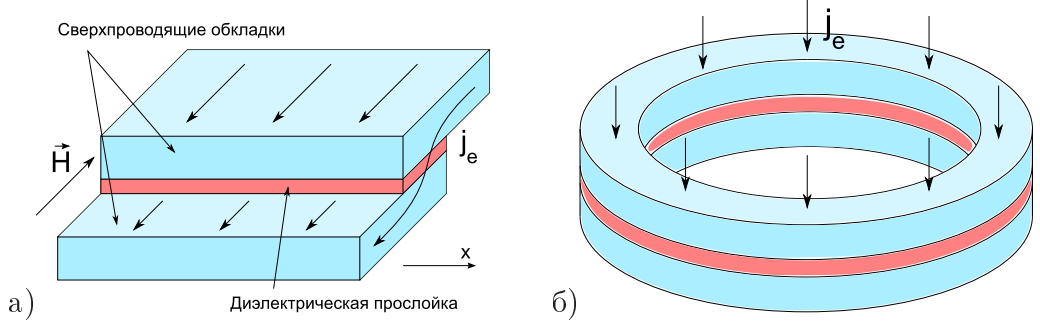


Рис. 2. Схематическое изображение распределенного джозефсоновского контакта а) — в линейной геометрии с перекрытием, б) — в кольцевой геометрии.

Описание динамики распределенного джозефсоновского контакта основано на дифференциальном уравнении в частных производных

$$\frac{1}{\omega_j^2} \theta_{tt} - \lambda_j^2 \theta_{xx} + \sin \theta = 0, \quad (4)$$

которое называется уравнением синус-Гордона. Величина $\theta(x, t)$ в уравнении (4) называется джозефсоновской разностью фаз; λ_j — это джозефсоновская глубина проникновения магнитного поля в переход (в направлении x). В случае, когда толщина берегов контакта значительно превышает λ — лондоновскую глубину проникновения магнитного поля в берега, выражение для λ_j принимает вид

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c (d + 2\lambda)}}.$$

Здесь d — толщина диэлектрической прослойки контакта, j_c — критическая плотность тока контакта. Далее, величина ω_j называется джозефсоновской плазменной частотой и равна

$$\omega_j = \sqrt{\frac{8\pi^2 j_c c d}{\varepsilon \Phi_0}}.$$

Электрическое и магнитное поля в контакте выражаются через производные джозефсоновской разности фаз

$$E = \frac{\Phi_0}{2\pi c d} \frac{1}{d} \theta_t, \quad B = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{d + 2\lambda} \theta_x. \quad (5)$$

Уравнение (4) подразумевает одномерную модель распределенного джозефсоновского контакта, в которой джозефсоновская фаза зависит только от координаты, направленной вдоль контакта. Это справедливо, если ширина контакта много меньше λ_j .

Для решения дифференциальное уравнение в частных производных (4) должно быть дополнено граничными условиями. Они зависят от геометрии задачи. В линейной геометрии с перекрытием (рис. 2, а), когда толщина берегов много больше λ , граничные условия записываются в следующем виде

$$\theta_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \frac{2\pi}{\Phi_0}(d + 2\lambda)H, \quad (6)$$

где L — длина системы, H — внешнее магнитное поле.

Для перехода в кольцевой геометрии (рис. 2, б) граничные условия записываются в виде

$$\theta(L, t) = \theta(0, t) + 2\pi R, \quad \theta_x(L, t) = \theta_x(0, t). \quad (7)$$

Здесь R — число вихрей, захваченных в переход, L — длина окружности кольца. В настоящей работе исследуются распределенные контакты и структуры на их основе в кольцевой геометрии.

При теоретическом описании распределенных джозефсоновских переходов широко используются нормированные единицы. В качестве единицы длины обычно используется джозефсоновская глубина проникновения магнитного поля λ_j , а в качестве единицы времени — обратная джозефсоновская плазменная частота ω_j^{-1} . В нормированных единицах уравнение синус-Гордона записывается следующим образом

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} + \sin \theta = 0, \quad (8)$$

где $t \rightarrow \omega_j t$, $x \rightarrow x/\lambda_j$.

Уравнения синус-Гордона имеет нелинейные решения в виде джозефсоновских вихрей. Простейшим решением такого типа является одиночный джозефсоновский вихрь (рис. 3):

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \exp \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (9)$$

где u — скорость вихря. Характерным размером джозефсоновского вихря является λ_j . Магнитный поток одного вихря равен Φ_0 — кванту магнитного потока. Множитель $(1 - u^2)^{-1/2}$ в показателе экспоненты описывает лоренцево сокращение джозефсоновского вихря при его движении. Предельная скорость джозефсоновского вихря равна $\bar{c} = \omega_j \lambda_j$ и называется скоростью Свихарта.

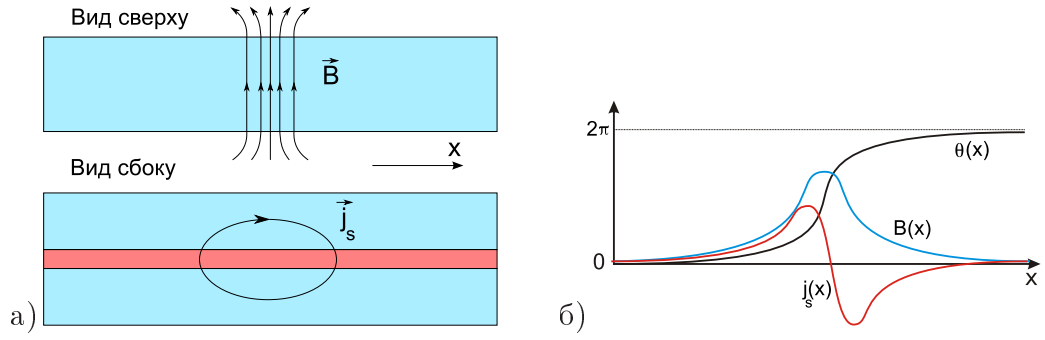


Рис. 3. Джозефсоновский вихрь в распределенном контакте. а) схематическое изображение магнитного поля и тока вихря, б) распределение джозефсоновской разности фаз $\theta(x)$, магнитного поля $B(x)$, и сверхпроводящего тока вихря $j_s(x)$.

При наложении на распределенный контакт внешнего магнитного поля в нем формируется цепочка джозефсоновских вихрей. Решение, описывающее движущуюся периодическую цепочку вихрей Джозефсона, выражается через эллиптические функции и имеет следующий вид:

$$\sin \frac{\theta - \pi}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{x - ut}{\varkappa \sqrt{1 - u^2}}, \varkappa \right) \quad (10)$$

где u — скорость цепочки вихрей, \varkappa — модуль эллиптической функции, связанный с периодом l вихревой цепочки соотношением

$$l = 2\varkappa K(\varkappa) \sqrt{1 - u^2}, \quad (11)$$

где $K(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. В пределе слабого внешнего магнитного поля $\varkappa \rightarrow 1$ выражение (10) переходит в выражение, описывающее одиночный джозефсоновский вихрь (9). В пределе сильного внешнего магнитного поля $\varkappa \rightarrow 0$ решение (10) переходит в решение, описывающее плотную вихревую цепочку

$$\theta = h(x - ut) - \frac{1}{h(1 - u^2)} \sin h(x - ut), \quad (12)$$

где h — безразмерное внешнее магнитное поле. Выражение (12) будет использовано нами в дальнейшем при анализе устойчивости прямоугольной вихревой решетки.

Решение вида

$$\sin \frac{\theta}{2} = \varkappa \operatorname{sn} \left(\frac{x - ut}{\sqrt{u^2 - 1}}, \varkappa \right) \quad (13)$$

описывает периодическую знакопеременную цепочку джозефсоновских вихрей. В пределе $\varkappa \rightarrow 0$ данное решение переходит в важный частный случай — линейные гармонические

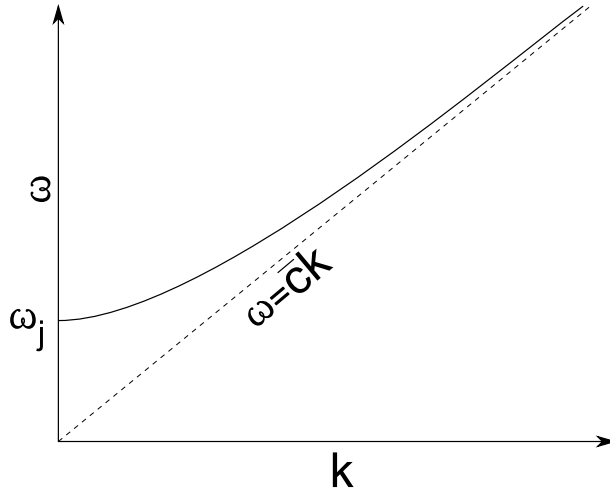


Рис. 4. Дисперсионная характеристика линейных волн в длинном джозефсоновском контакте.

волны малой амплитуды $\theta = A \exp(ikx - i\omega t)$, $|A| \ll 1$. Дисперсионная характеристика линейных волн записывается в виде

$$-\omega^2 + k^2 + 1 = 0. \quad (14)$$

Дисперсионная кривая имеет вид гиперболы (рис. 4) с минимальной частотой ω_j (в размерной записи) и с асимптотами, имеющими наклон \bar{c} . Видно, что фазовая скорость линейных волн в распределенном джозефсоновском контакте всегда превышает \bar{c} .

Из выражения (9) видно, что скорость джозефсоновского вихря не может превосходить скорость Свихарта \bar{c} . С другой стороны, как уже было отмечено выше, фазовая скорость линейных волн в длинном джозефсоновском контакте всегда больше \bar{c} . Данное обстоятельство делает невозможным черенковское излучение линейных волн джозефсоновским вихрем, поскольку необходимым условием такого излучения является равенство скорости источника и фазовой скорости излучаемой волны (условие черенковского синхронизма). Поэтому для того, чтобы обеспечить возможность черенковского излучения, дисперсия линейных волн в контакте должна быть соответствующим образом изменена. Это может быть достигнуто, например, соединением распределенного контакта с внешней электродинамической волноведущей системой. Исследование черенковского излучения джозефсоновского вихря в распределенном переходе, соединенном с волноведущей системой простейшего вида — полосковой линией, является одной из целей настоящей работы.

При приложении к длинному джозефсоновскому переходу внешнего тока джозефсоновский вихрь приходит в движение, разгоняясь до некоторой скорости. Эта скорость

зависит от величины внешнего тока и затухания в контакте, которые входят в уравнение синус-Гордона следующим образом:

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} + \sin \theta = j - \gamma \theta_t, \quad (15)$$

где $j = j_e/j_c$ — безразмерная плотность внешнего тока, выраженная в единицах критической плотности джозефсоновского сверхтока, $\gamma = \omega_j \Phi_0 / (2\pi r c j_c)$ — константа затухания в контакте, r — сопротивление контакта на единицу площади. При достаточной малости j и γ связь скорости вихря и внешнего тока находится методом возмущений [4] и имеет вид

$$\frac{\pi}{4} j = \frac{\gamma u}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (16)$$

Это выражение представляет собой, с точностью до постоянных множителей, участок

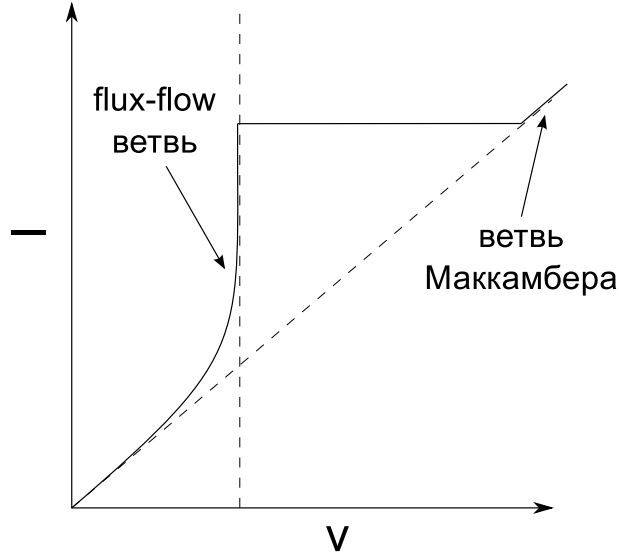


Рис. 5. Вольт-амперная характеристика длинного джозефсоновского перехода с вихрем.

вольт-амперной характеристики (ВАХ) длинного джозефсоновского перехода (рис. 5), соответствующий движению в переходе джозефсоновского вихря (flux-flow ветвь). Напряжение на контакте выражается через скорость вихря с помощью нестационарного джозефсоновского соотношения (2): $U = u \cdot \Phi_0 / (Lc)$, где L — длина системы. В настоящей работе, говоря о вольт-амперной характеристике, мы будем также подразумевать и зависимость скорости вихря (или вихревой решетки) от внешнего тока.

При внешнем токе, большем критического, контакт переходит в состояние с почти однородным по всей его длине ростом джозефсоновской фазы. В данном состоянии квазичастичный ток в переходе много больше по сравнению с джозефсоновским сверхтоком

и током смещения. При этом связь напряжения на контакте и внешнего тока приближенно выражается законом Ома $U = j_e r$. Соответствующая ветвь ВАХ называется ветвью Маккамбера (рис. 5), которая близка к омической ветви.

Вид вольт-амперной характеристики распределенного джозефсоновского перехода существенно зависит от формы джозефсоновского вихря в системе. Она может быть изменена под влиянием внешних электродинамических систем. В настоящей работе исследуется зависимость ВАХ длинного джозефсоновского перехода, соединенного с полосковой линией, от различных параметров системы.

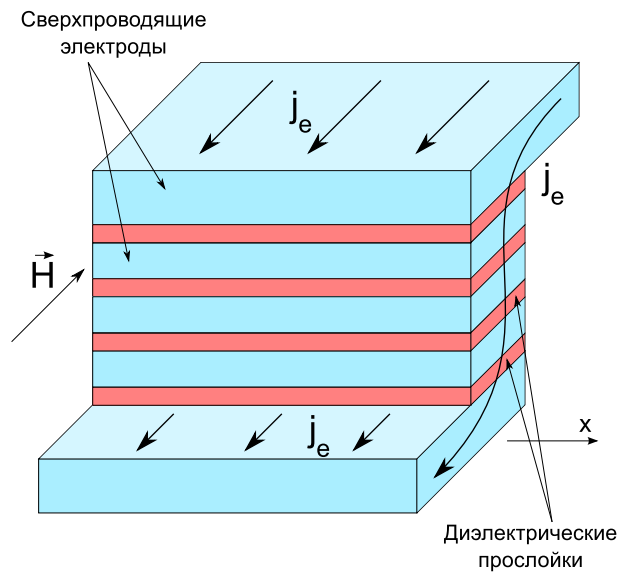


Рис. 6. Схематическое изображение многослойной распределенной джозефсоновской структуры из четырех контактов.

Пример многослойного распределенного джозефсоновского перехода показан на рис. 6. Данный переход состоит из чередующихся слоев сверхпроводника и диэлектрика и может рассматриваться как несколько распределенных контактов, каждый из которых имеет общие сверхпроводящие электроды с двумя соседними.

Открытие в 1986 году высокотемпературной сверхпроводимости в значительной степени стимулировало интерес исследователей к физике сверхпроводников и открыло большие перспективы технического применения сверхпроводящих материалов. Был открыт ряд соединений, таких как $YBaCuO$, $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}$, ... , обладающих критической температурой, превышающей температуру кипения жидкого азота. Все эти соединения имеют сложный химический состав, и характерной особенностью их строения является наличие CuO слоев, разделенных атомами других элементов, входящих в состав соединения

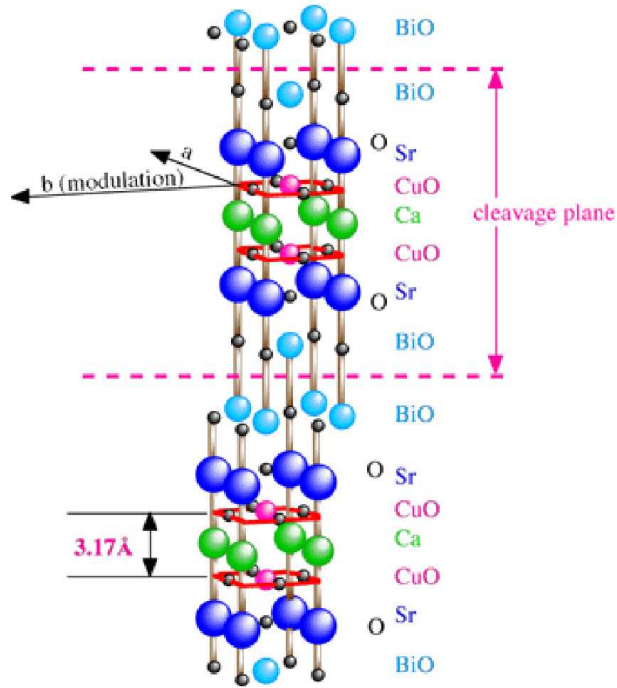


Рис. 7. Структура кристаллической решетки слоистого сверхпроводника (на примере $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$).

(рис. 7).

Высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) обладают анизотропией, которая сильно отличается у разных соединений. Так, например, фактор анизотропии наиболее известного ВТСП — YBaCuO — имеет значение порядка 7..10, в то время как у других соединений, например, у $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$, этот параметр может достигать значения порядка 1000. В таких сильноанизотропных соединениях при достаточно низких температурах длина когерентности в поперечном направлении станет меньше расстояния между CuO слоями. Такие сверхпроводники называют слоистыми. Характерной особенностью слоистых ВТСП является наличие в них внутреннего эффекта Джозефсона [5, 6]. Таким образом, слоистые сверхпроводники являются в этом смысле естественными многослойными джозефсоновскими переходами, и поэтому для объяснения свойств таких материалов совершенно необходим учет особенностей динамики джозефсоновских контактов.

Благодаря конечной толщине сверхпроводящих электродов между соседними распределенными контактами слоистой структуры имеется взаимодействие. Наиболее существенным механизмом такого взаимодействия является связь за счет проникновения магнитного поля джозефсоновского перехода в соседний контакт через тонкий сверхпроводящий слой. Этот тип взаимодействия соседних контактов в структуре называется магнитной, или ин-

дуктивной связью. Модель, описывающая динамику многослойного джозефсоновского перехода и учитывающая индуктивную связь, была предложена в работах [7, 8]. Согласно данной модели, слоистая сверхпроводящая структура с джозефсоновской связью между слоями описывается следующей системой уравнений типа синус-Гордона

$$\theta_{nxx} = \sum_m K_{nm}(\theta_{m tt} + \gamma\theta_{m t} + \sin\theta_m - j_e). \quad (17)$$

В данной системе $K_{n,n\pm 1} = s'$, $K_{nn} = d'$, все остальные элементы матрицы K равны нулю. Отличие недиагональных элементов матрицы от нуля учитывает эффект проникновения магнитного поля из одного джозефсоновского контакта структуры в соседний контакт через тонкий сверхпроводящий слой, толщина которого предполагается меньшей лондонской длины.

Система уравнений (17) широко используется для описания джозефсоновской динамики как многослойных распределенных джозефсоновских переходов, так и слоистых сверхпроводников.

В случае, когда рассматривается искусственная джозефсоновская структура, выражения для элементов матрицы \hat{K} принимают следующий вид [7, 9, 10]

$$d' = \frac{d \sinh t/\lambda + 2\lambda \cosh t/\lambda}{d \sinh t/\lambda + 2\lambda \cosh t/\lambda - 2\lambda}, \quad s' = -\frac{\lambda}{d \sinh t/\lambda + 2\lambda \cosh t/\lambda - 2\lambda}. \quad (18)$$

Здесь d — толщина диэлектрической прослойки между сверхпроводящими слоями, t — толщина сверхпроводящего слоя, λ — лондонская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводящий слой. Для простоты мы предположили, что данные параметры одинаковы для всех джозефсоновских контактов, входящих в состав многослойной структуры.

В случае, когда система (17) применяется для описания джозефсоновской динамики слоистого сверхпроводника, выражения для элементов матрицы \hat{K} удобно записывать в следующем виде

$$d' = 2 + \frac{s^2}{\lambda_{ab}^2}, \quad s' = -1, \quad (19)$$

где s — расстояние между CuO слоями в слоистом сверхпроводнике, λ_{ab} — длина экранировки магнитного поля сверхпроводящими токами, текущими вдоль CuO слоев. Джозефсоновская глубина проникновения магнитного поля в данном случае равна $\lambda_j = \Gamma s$, где Γ — фактор анизотропии слоистого сверхпроводника.

Система уравнений (17) имеет решение в виде линейных волн малой амплитуды, распространяющихся вдоль слоев многослойной джозефсоновской структуры. Дисперсионная характеристика таких волн записывается в следующем виде

$$-\omega^2 + v_q^2 k^2 + 1 = 0. \quad (20)$$

Здесь

$$v_q^2 = \frac{1}{d' + 2s' - 2s'(1 - \cos q)} \quad (21)$$

— скорость Свихарта q -й моды [11]. Индекс q характеризует зависимость моды от номера слоя: $\theta_q \sim \exp iqn$. Мода с индексом $q = 0$ устроена одинаково во всех слоях многослойной структуры и называется симметричной модой. Мода с $q = \pi$ распределена по слоям таким образом, что распределения в соседних слоях отличаются знаком, и называется, таким образом, антисимметричной модой. Дисперсионные кривые линейных мод разной симметрии показаны на рис. 8. Видно, что наибольшей характеристической скоростью обладает симметричная мода, в то время как антисимметричная мода является наиболее медленной.

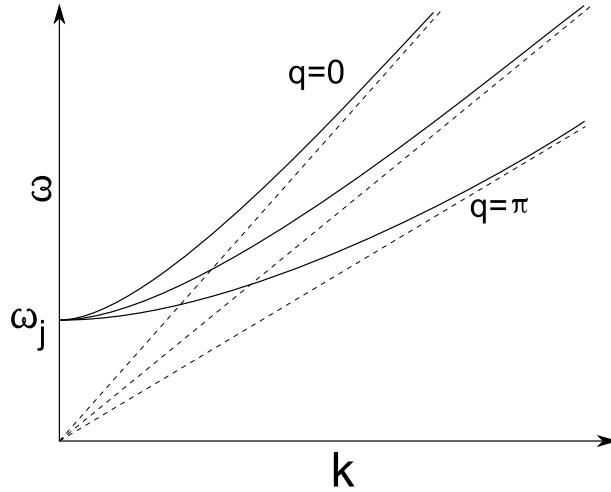


Рис. 8. Дисперсионные характеристики мод Свихарта разной поперечной симметрии в многослойных распределенных джозефсоновских переходах.

При приложении к многослойному джозефсоновскому переходу внешнего магнитного поля, ориентированного параллельно слоям, в структуре формируется решетка джозефсоновских вихрей (рис. 9). Она может быть приведена в движение с помощью внешнего тока, пропускаемого через структуру в направлении, перпендикулярном слоям. С практической точки зрения наиболее выгодным было бы взаимное расположение вихрей в виде

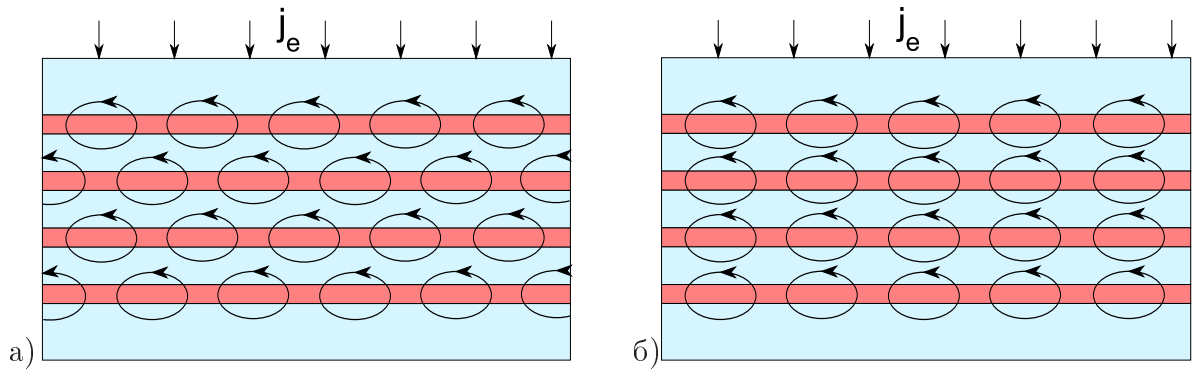


Рис. 9. Решетки джозефсоновских вихрей в многослойных переходах (схематическое изображение): а) треугольная решетка, б) прямоугольная решетка, или синфазный режим движения вихрей. Круговыми стрелками показаны линии тока вихрей.

прямоугольной решетки, когда вихри располагаются точно один над другим (рис. 9, б). Этот режим движения вихрей называют еще синфазным режимом. Он характеризуется большой амплитудой переменного электромагнитного поля и может в перспективе быть использован для генерации электромагнитных волн. Однако при небольших скоростях взаимное отталкивание вихрей, находящихся в соседних контактах структуры, приводит к разрушению синфазного режима и формированию других вихревых конфигураций. Исследования устойчивости джозефсоновских вихревых решеток, проведенные в ряде работ, показали возможность устойчивости синфазного режима при выполнении некоторых условий [12–14]. Однако в этих работах исследовалась устойчивость только по отношению к возмущениям с большой длиной волны, в то время как для полного ответа на вопрос о стабильности того или иного решения необходимо исследование устойчивости по отношению к возмущениям с любыми длинами волн.

Распределенные джозефсоновские переходы в кольцевой геометрии представляют собой удобную систему для изучения динамики джозефсоновских вихрей, так как не возникает деформации вихрей при их взаимодействии с торцами контакта. Излучение, возникающее при движении джозефсоновских вихрей в кольцевых контактах, может быть выведено различными способами. Обычно для вывода излучения используются микрополосковые отводы или антенны. Кроме того, следует учесть, что при движении вихрей в кольцевом контакте излучение будет возникать снаружи перехода на расстоянии от центра, на котором линейная скорость перемещения распределения электромагнитного поля, создаваемого вихрем, станет больше скорости света. Это расстояние называется радиусом

светового цилиндра и находится по формуле $r = R \cdot c/u \equiv c/\Omega$, где R — радиус внешнего края кольцевого перехода, u — скорость джозефсоновского вихря на внешнем крае перехода, Ω — угловая скорость вихря.

Система уравнений (17) не учитывает всех возможных механизмов связи между соседними внутренними джозефсоновскими контактами в слоистых сверхпроводниках. Помимо магнитной связи, в слоистых ВТСП имеет место зарядовая связь из-за проникновения перпендикулярного электрического поля через тонкие сверхпроводящие слои. Такой тип взаимодействия был впервые учтен в модели, предложенной в [15]. В данной модели предполагается, что радиус Дебая сверхпроводящих слоев больше толщины слоев, поэтому слой не экранирует электрическое поле полностью. Учет данного явления ведет к модификации джозефсоновского соотношения (2), которое в данной модели записывается в виде

$$\frac{\hbar}{2e} \dot{\theta}_n = sE_n + \eta(E_{n-1} - 2E_n + E_{n+1}), \quad (22)$$

где η — параметр зарядовой связи. Фактически, в работе [15] была впервые учтена пространственная дисперсия сверхпроводящих электронов. В последующих работах [16, 17] была предложена модель, объединяющая модели с магнитной и зарядовой связью между слоями. Однако учет пространственной дисперсии электронов в перечисленных работах произведен только в направлении, перпендикулярном слоям, и поэтому является неполным.

В работах [18–21] проведен учет квазичастичного разбаланса в слоистых сверхпроводниках и рассмотрена динамика джозефсоновских вихревых решеток с учетом квазичастичного разбаланса. Вопросы о влиянии нормального тока вдоль слоев на динамику джозефсоновских вихревых решеток в слоистых сверхпроводниках обсуждались в работах [13, 14, 22, 23].

Слоистые ВТСП имеют сложное строение (рис. 7), которое обуславливает наличие у данных материалов большого количества собственных мод, таких как электромагнитные, плазменные, фононные моды, и т. п. Все эти моды, в принципе, могут быть возбуждены джозефсоновскими вихрями в слоистом ВТСП, приводя к разного рода резонансам на ВАХ и формированию необычных вихревых конфигураций. Для изучения таких эффектов необходима модель, способная учитывать все линейные моды слоистого сверхпроводника и полноценным образом описывающая пространственную дисперсию электронов в слоистом ВТСП. Поэтому построение такой модели является актуальной задачей.

Таким образом,

целями диссертационной работы являются:

- исследование влияния внешних электродинамических систем на динамику вихрей в длинных джозефсоновских контактах и джозефсоновских свехрешетках;
- развитие теории, описывающей взаимодействие линейных волн и джозефсоновских вихрей в слоистых высокотемпературных сверхпроводниках;
- изучение влияния внутренних резонансов на динамику решеток джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках.

Практическая ценность работы

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для построения генераторов электромагнитного излучения терагерцового диапазона на основе слоистых сверхпроводников, для повышения мощности и улучшения спектральных характеристик существующих генераторов на основе распределенных джозефсоновских структур, а также для развития методов джозефсоновской спектроскопии сверхпроводящих высокотемпературных соединений.

Научная новизна работы

Проведено исследование черенковского излучения джозефсоновского вихря в длинном контакте, связанном с полосковой линией, без предположения о малости величины связи контакта и полосковой линии. Отсутствие малости данной связи приводит к изменению формы джозефсоновского вихря в контакте, которое было учтено в работе.

Впервые исследована устойчивость джозефсоновской вихревой решетки в слоистой структуре, связанной с пассивной областью, с учетом индуктивной связи между слоями. Это расширяет применимость результатов главы также на случай слоистых ВТСП, в которых величина индуктивной связи велика и является неизменяемой характеристикой материала.

Впервые построена модель гидродинамического типа, на равных основаниях описывающая взаимодействие различных типов линейных волн в слоистом ВТСП с джозефсоновскими вихрями. Использован оригинальный подход к построению модели, позволив-

ший учесть пространственную дисперсию электронов, и сохранить симметрию исходных уравнений в окончательной формулировке модели.

Впервые в численном эксперименте продемонстрировано возбуждение фононных и гибридных мод движущейся решеткой джозефсоновских вихрей в слоистом ВТСП.

Личный вклад диссертанта в данную работу

Равнозначный (совместно с научным руководителем В.В. Куриным, N. Flytzanis, N. Lazarides, J.-G. Caruto) в вывод интегро-дифференциального уравнения, описывающего динамику распределенного джозефсоновского перехода, связанного с полосковой линией, исследование дисперсионных характеристик исследуемой системы, разработку схемы численного моделирования [A1];

Равнозначный (совместно с научным руководителем В.В. Куриным) в вывод модели, описывающей динамику многослойного джозефсоновского перехода, связанного с внешней волноведущей системой, исследование устойчивости синфазного режима в исследуемой структуре, разработку схемы численного моделирования, и интерпретацию результатов численного эксперимента по расчету вольт-амперной характеристики исследуемой системы [A2, A3, A6-A10];

Определяющий в написание компьютерной программы для численного моделирования динамики решеток джозефсоновских вихрей в многослойном распределенном переходе Джозефсона, соединенном с внешней полосковой линией, и проведение с ее помощью численных расчетов вольт-амперной характеристики исследуемой системы [A3, A9, A10];

Равнозначный (совместно с научным руководителем В.В. Куриным) в вывод модели гидродинамического типа, описывающей совместную динамику джозефсоновских вихрей и линейных мод различной природы в слоистых высокотемпературных сверхпроводниках, анализ дисперсионных характеристик исследуемой системы, разработку схемы численного моделирования, и интерпретацию результатов проведенных численных расчетов [A4, A5, A11-A18];

Определяющий в написание компьютерной программы для численного моделирования совместной динамики решеток джозефсоновских вихрей и линейных волн в слоистых сверхпроводниках, и проведение на основе выведенной модели численных расчетов вольт-амперных характеристик слоистого сверхпроводника с движущейся решеткой джозефсоновских вихрей [A16-A18].

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Распределенный джозефсоновский контакт, электродинамически связанный с плосковой линией, описывается нелокальным во времени и пространстве уравнением типа синус-Гордона. Наличие пассивной области, электродинамически связанной с распределенным джозефсоновским переходом, приводит к такому изменению дисперсионной характеристики линейных волн в системе, что становится выполнимым условие синхронизма между движущимся вихрем и линейной волной. В результате при определенных скоростях вихря возникает черенковское излучение линейных волн вихрем, проявляющееся в появлении ступенек на вольт-амперной характеристике длинного контакта с пассивной областью.

2. Наличие замедляющей системы, электродинамически связанной с многослойной структурой, состоящей из распределенных джозефсоновских контактов, приводит к устойчивости и спонтанному установлению синфазного режима движения решетки джозефсоновских вихрей в определенном диапазоне скоростей вихревой решетки. При этом диапазон скоростей решетки, при которых достигается ее устойчивость, зависит от степени замедления электромагнитной волны замедляющей системой.

3. Взаимодействие решетки джозефсоновских вихрей, движущейся в слоистом сверхпроводнике, и различными его собственными модами, может быть описано в рамках предложенной единой модели гидродинамического типа. Влияние нормальных электронов и дополнительных степеней свободы, таких как фононы, учитывается в данной модели с помощью соответствующих выражений для диэлектрических восприимчивостей. Линейные моды возбуждаются движущейся вихревой решеткой, что приводит к появлению ступеней на ВАХ слоистых сверхпроводников с движущейся решеткой джозефсоновских вихрей.

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на 2-й международной конференции по сверхпроводящей электронике, Осака, Япония, 2001; на международной конференции по физике и применениям внутреннего эффекта Джозефсона, Поммерсфельден, Германия, 2002; на XII научной школе «Нелинейные волны – 2004», Нижний Новгород, Россия, 2004; на 2-й международной конференции “Frontiers of Nonlinear Physics”, Нижний Новгород

– Санкт-Петербург, Россия, 2004; на XIII научной школе «Нелинейные волны – 2006», Нижний Новгород, Россия, 2006; на X ежегодном симпозиуме «Нанопфизика и наноплектроника», Нижний Новгород, 2006; на 5-м международном симпозиуме по внутреннему эффекту Джозефсона в высокотемпературных сверхпроводниках, Лондон, Великобритания, 2006; на 2-й международной конференции «Фундаментальные проблемы сверхпроводимости ФПС-06», Звенигород, Россия, 2006; на международной конференции по теоретической физике “Dubna–Nano 2008”, Дубна, Россия, 2008; на XIII ежегодном симпозиуме «Нанопфизика и наноплектроника», Нижний Новгород, 2009.

Публикации

Основное содержание диссертационной работы отражено в пяти статьях в реферируемых научных журналах [A1–A5] и трудах научных конференций [A6–A18].

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка публикаций автора по теме диссертации, и списка цитированной литературы.

Во первой главе настоящей работы рассмотрена задача о динамике джозефсоновского вихря в длинном джозефсоновском контакте, связанном с внешней электродинамической системой простейшего вида — латеральной полосковой линией, допускающей простое математическое описание. Показано, что даже в таком простом случае внешняя система модифицирует дисперсию линейных волн таким образом, что это изменение приводит к появлению черенковского излучения джозефсоновских вихрей. Исследуемая структура описывается одномерным интегро-дифференциальным уравнением. Данное уравнение сводится к эволюционному с помощью квазистатического приближения. Проанализирована дисперсионная характеристика линейных волн в рассматриваемой системе, и показано, что черенковское излучение волн движущимся вихрем должно приводить к резонансам на ВАХ. Проведенные численные расчеты показали, что на вольт-амперных характеристиках системы с движущимся вихрем появляются ступени, вызванные черенковским излучением джозефсоновского вихря. Амплитуды ступеней при этом зависят от затухания в системе, а также от константы связи джозефсоновского контакта с полосковой линией.

Во второй главе работы исследовано влияние внешней электродинамической систе-

мы на динамику решеток джозефсоновских вихрей в слоистой распределенной джозефсоновской структуре. Как и в предыдущей главе, для упрощения рассмотрения в качестве внешней системы выбрана полосковая линия. Теоретическое исследование стабильности движущейся прямоугольной вихревой решетки показало, что она приобретает устойчивость при условии, что внешняя полосковая линия замедляет симметричную моду Свихарта в системе, делая ее самой медленной по сравнению с модами другой симметрии. Численно продемонстрировано спонтанное установление синфазного режима движения джозефсоновских вихрей в слоистой структуре, при приближении скорости вихрей к значению, соответствующему области устойчивости данного режима. В результате расчета было найдено, что установившийся синфазный режим характеризуется большой амплитудой переменного электромагнитного поля. Это указывает на то, что данный эффект перспективен для создания компактных генераторов излучения терагерцового диапазона на основе слоистых сверхпроводящих структур.

В третьей главе работы исследовано влияние внутренних степеней свободы на движение решеток джозефсоновских вихрей в слоистых ВТСП. Совместное описание динамики вихрей и линейных волн строится на предложенной в главе единой модели гидродинамического типа, являющейся полностью симметричной и учитывающей пространственную дисперсию электронов. На основе данной модели проведено численное моделирование динамики решетки джозефсоновских вихрей в слоистом ВТСП, демонстрирующее возбуждение мод Свихарта, плазменных, фононных и гибридных мод вихревой решеткой, приводящее к существенному усложнению структуры резистивного состояния материала.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

Динамика вихрей в узких длинных джозефсоновских контактах с полосковой линией

1.1. Введение

Распределенные джозефсоновские контакты обладают сложной динамикой, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями типа синус-Гордона. Многообразие решений, возникающих в распределенных контактах, сводится к комбинациям линейных волн и вихрей Джозефсона. Взаимодействие вихрей и линейных волн может играть ключевую роль в динамике распределенных контактов и, фактически, определять их электрические свойства. Особенно важными являются случаи сильного резонансного взаимодействия. Одним из видов такого взаимодействия является черенковское излучение [24, 25].

Однако, в одиночном длинном джозефсоновском контакте черенковское излучение движущегося вихря не возникает. Это происходит потому, что, с одной стороны, скорость вихря не может превышать скорости Свихарта, а с другой стороны, фазовая скорость линейной волны всегда больше скорости Свихарта. Отсюда следует, что выполнение условия синхронизма, необходимое для черенковского излучения, не может быть выполнено в длинном джозефсоновском контакте.

Для обеспечения возможности черенковского синхронизма между вихрем и линейной волной необходима соответствующая модификация дисперсии линейной волны, которая может быть достигнута разными способами. Примерами систем, в которых возможно черенковское излучение, являются слоистая структура, составленная из распределенных джозефсоновских контактов [26–28], щелевой контакт [24], джозефсоновский контакт, встроенный в периодическую линию передачи [25], широкий кольцевой контакт [29], линейный массив сосредоточенных контактов [30].

Целью данной главы является исследование динамики джозефсоновского вихря в длинном контакте, соединенном с внешней волноведущей системой простейшего вида — полосковой линией, или, как мы ее будем еще называть, пассивной областью. Такая система хороша тем, что допускает простое математическое описание и в то же время, как будет видно из дальнейшего, обеспечивает условие черенковского синхронизма. Кроме то-

го, простота модели позволяет учесть влияние пассивной области на форму и размеры вихря, что может быть важно для объяснения некоторых особенностей вольт-амперных характеристик (ВАХ) системы с вихрем.

С практической точки зрения изучение динамики вихрей в контактах с пассивной областью важно в связи с тем, что технология изготовления длинных джозефсоновских переходов предусматривает наличие такой области на краях контакта. Это позволяет избежать проблем, связанных с краями структуры, таких как плохое качество барьера на краю, изменение критической температуры, критического тока. Все вышеперечисленное позволяет утверждать, что исследование динамики джозефсоновских вихрей в контактах с пассивной областью представляет собой вполне актуальную задачу.

В данной главе исследуется динамика длинного джозефсоновского контакта с боковой пассивной областью. Рассматривается длинный контакт, узкий настолько, что джозефсоновская разность фаз мало меняется на поперечном размере контакта. Это справедливо, если поперечный размер контакта меньше джозефсоновской длины [31, 32]. В этом случае исходная задача (пара двумерных дифференциальных уравнений в частных производных, связанных граничными условиями на границе контакт-пассивная область) может быть сведена к одномерному интегро-дифференциальному уравнению.

Глава организована следующим образом. В первом разделе выведена нелокальная одномерная модель на основе уравнения синус-Гордона, описывающая динамику длинного джозефсоновского контакта с пассивной областью. Второй раздел посвящен исследованию дисперсионных характеристик линейных волн в длинном джозефсоновском контакте с пассивной областью. В третьем разделе описаны результаты численного эксперимента, проведенного на основе выведенной нелокальной модели. Получены серии ступенек на ВАХ контакта с движущимся джозефсоновским вихрем, связанных с черенковским излучением линейных волн движущимся вихрем.

1.2. Контакт с полосковой линией

1.2.1. Двумерная модель

Рассмотрим распределенный джозефсоновский контакт конечной длины с длиной ℓ , шириной w , с пассивной областью в плоскости контакта шириной w' (рис. 1.1). Все длины нормированы на λ_j — глубину проникновения магнитного поля в джозефсоновском кон-

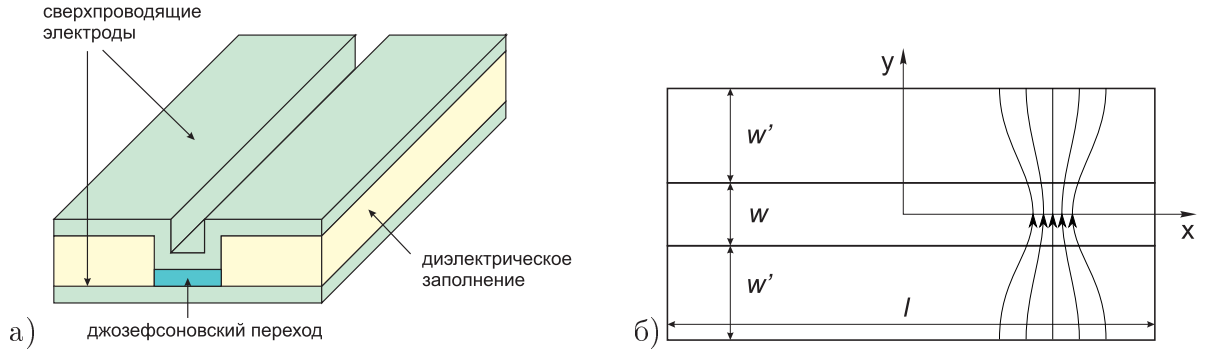


Рис. 1.1. Схематическое изображение распределенного джозефсоновского контакта, встроенного в полосковую линию: а) внешний вид, б) вид сверху и система координат. На рис. б) показаны магнитные силовые линии джозефсоновского вихря.

такте. Для простоты мы предполагаем систему симметричной по поперечной координате. Описание такой системы основывается на двух дифференциальных уравнениях в частных производных: двумерном уравнении синус-Гордона с затуханием для области джозефсоновского контакта, и двумерном волновом уравнении с затуханием для пассивной области, записанных в безразмерном виде

$$\theta_{tt} + \gamma\theta_t - \nabla^2\theta + \sin\theta = 0 \quad (1.1a)$$

$$\psi_{tt} + \Gamma\psi_t - c_I^2\nabla^2\psi = 0 \quad (1.1b)$$

где ∇^2 — лапласиан, θ и ψ — разности фаз соответственно в области контакта и в пассивной области, γ — квазичастичное затухание в контакте, Γ — затухание в пассивной области. Координата в уравнениях нормирована на λ_j , время — на ω_j^{-1} — обратную джозефсоновскую плазменную частоту. В уравнениях (1.1) мы предполагаем, что высокочастотные потери отсутствуют. Эти уравнения связаны условиями непрерывности фазы и поверхностного тока на границе контакта и пассивной области

$$\theta(y = \pm \frac{w}{2}) = \psi(y = \pm \frac{w}{2}) \quad (1.2)$$

$$\psi_y(y = \pm \frac{w}{2}) = \alpha\theta_y(y = \pm \frac{w}{2}) \quad (1.3)$$

$$\psi_y(y = \pm \frac{w_0}{2}) = \pm \frac{w}{2}\alpha j_e \quad (1.4)$$

где $\alpha = L_I/L_J$ — отношение индуктивностей на единицу площади в полосковой линии и джозефсоновском контакте, j_e — плотность внешнего тока, w_0 — ширина системы. Уравнение (1.4) описывает втекание внешнего тока в структуру через края полосковой линии.

Для простоты мы будем предполагать, что исследуемая система имеет кольцевую геометрию. Граничные условия, соответствующие такой геометрии, выглядят следующим образом

$$\psi_x(-\frac{\ell}{2}) = \psi_x(+\frac{\ell}{2}), \quad \theta_x(-\frac{\ell}{2}) = \theta_x(+\frac{\ell}{2}), \quad \theta(+\frac{\ell}{2}) - \theta(-\frac{\ell}{2}) = 2\pi R \quad (1.5)$$

где R — число солитонов в контакте. Введем новые переменные $\hat{\theta}$, $\hat{\psi}$ следующим образом:

$$\theta = \hat{\theta} + \frac{2\pi R}{\ell}x, \quad \psi = \hat{\psi} + \frac{2\pi R}{\ell}x. \quad (1.6)$$

Подставляя новые переменные, определенные в (1.6), в (1.1), получаем

$$\theta_{tt} + \gamma\theta_t - \Delta\theta + \sin(\theta + \frac{2\pi R}{\ell}x) = 0 \quad (1.7)$$

$$\psi_{tt} + \Gamma\psi_t - c_I^2\Delta\psi = 0 \quad (1.8)$$

где опущены шляпки над новыми переменными. Теперь данная система удовлетворяет периодическим граничным условиям в направлении x

$$\theta(+\frac{\ell}{2}) - \theta(-\frac{\ell}{2}) = 0. \quad (1.9)$$

Применяя преобразование Лапласа по времени согласно определению

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^{\infty} dt f(t)e^{i\omega t}, \quad Im\omega > 0, \quad (1.10)$$

$$\tilde{f}_t(\omega) = -f(0) - i\omega\tilde{f}(\omega) \quad (1.11)$$

$$\tilde{f}_{tt}(\omega) = -f_t(0) + i\omega f(0) - \omega^2\tilde{f}(\omega) \quad (1.12)$$

где $\tilde{f}_t(\omega)$ обозначает образ Лапласа от $f_t(t)$, и разложение в ряд Фурье по координате x согласно

$$f(x) = \frac{1}{\ell} \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_n)e^{ik_n x}, \quad \tilde{f}(k_n) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx f(x)e^{-ik_n x} \quad (1.13)$$

получаем

$$(k^2 - k_j^2)\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_{yy} + \sin(\theta + \frac{2\pi R}{\ell}x) = F(k, \omega, y) \quad (1.14)$$

$$(k^2 - k_p^2)\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_{yy} = G(k, \omega, y) \quad (1.15)$$

где $k = k_n = \frac{2\pi n}{\ell}$ — дискретная переменная, и $\tilde{\theta}(y; k, \omega)$, $\tilde{\psi}(y; k, \omega)$ — компоненты преобразования Фурье-Лапласа от функций Φ , ψ , функции

$$G(k, \omega, y) = \psi_t(t=0) - i(\omega - i\Gamma)\psi(t=0), \quad (1.16)$$

$$F(k, \omega, y) = \theta_t(t=0) - i(\omega - i\gamma)\theta(t=0) \quad (1.17)$$

содержат вклад от начальных условий. Введены также обозначения

$$k_j^2(\omega) = \omega(\omega + i\gamma), \quad k_p^2(\omega) = \frac{\omega(\omega + i\Gamma)}{c_1^2}. \quad (1.18)$$

Итак, мы сформулировали двумерную модель распределенного джозефсоновского контакта, встроенного во внешнюю полосковую линию. В следующем подразделе описана процедура сведения данной системы к одномерному уравнению.

1.2.2. Вывод интегрального уравнения

Уравнение (1.15), описывающее динамику пассивной области, является линейным с постоянными коэффициентами. Данное обстоятельство позволяет легко записать его решение. Записанное в виде

$$\tilde{\psi}(y; k, \omega) = A \cosh \kappa \left(y - \frac{w_0}{2} \right) + \frac{\alpha w \tilde{j}_e}{2\kappa} \sinh \kappa \left(y - \frac{w_0}{2} \right), \quad (1.19)$$

где A — константа, подлежащая определению, \tilde{j}_e — внешний ток, и

$$\kappa^2 \equiv \kappa_n^2 = k_n^2 - k_p^2,$$

оно удовлетворяет граничному условию (1.4) для ψ и является решением уравнения (1.15) при временах, больших по сравнению с временами затухания всех собственных мод.

Используя решение в виде (1.19), можно найти связь $\tilde{\psi}(y; k, \omega)$ и $\tilde{\psi}_y(y; k, \omega)$ при $y = \frac{w}{2}$. Из решения (1.19) при $y = \frac{w}{2}$ имеем

$$\tilde{\psi}(y = \frac{w}{2}; k, \omega) = A \cosh(\kappa w') - \frac{\alpha w \tilde{j}_e}{2\kappa} \sinh(\kappa w'), \quad (1.20)$$

$$\tilde{\psi}_y(y = \frac{w}{2}; k, \omega) = -\kappa A \sinh(\kappa w') + \frac{\alpha w \tilde{j}_e}{2} \cosh(\kappa w'), \quad (1.21)$$

где $w' = (w_0 - w)/2$ — ширина пассивной области. Исключая A из системы (1.20) и (1.21), получаем искомую связь

$$\tilde{\psi}_y\left(\frac{w}{2}\right) = -\tilde{\psi}\left(\frac{w}{2}\right)\kappa \tanh(\kappa w') + \frac{\alpha w \tilde{j}_e}{2 \cosh(\kappa w')}. \quad (1.22)$$

Данное выражение является основным для вывода одномерного интегрального уравнения.

Проинтегрируем уравнение (1.14) в направлении y по ширине w , которую мы предполагаем малой. По определению

$$\Phi(x) = \frac{1}{w} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \theta(x, y) dy. \quad (1.23)$$

Предположим также, что среднее значение от $\sin \theta$ близко к $\sin \Phi$ [33]. Это справедливо, если ширина джозефсоновского контакта меньше джозефсоновской глубины проникновения магнитного поля.

Усреднение уравнения (1.14) по поперечной координате приводит к одномерному уравнению

$$(k^2 - k_j^2)\tilde{\Phi} + [\widetilde{\sin(\Phi + \Psi)}] = \bar{F}(k, \omega) + \frac{1}{w}(\tilde{\theta}_y(y = w/2) - \tilde{\theta}_y(y = -w/2)), \quad (1.24)$$

где

$$\bar{F}(k, \omega) = \frac{1}{w} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} F(k, \omega; y) dy.$$

Затем, используя граничные условия для производных по координате y (1.2), (1.3), установим связь θ_y с ψ_y при $y = w/2$. Поскольку мы считаем задачу симметричной по отношению к замене $y \rightarrow -y$, можно положить $\theta_y(y = 0) = 0$ и написать формулы для $y > 0$. С учетом соотношения (1.22) получаем

$$\begin{aligned} (k^2 - k_j^2)\tilde{\Phi} + [\widetilde{\sin(\Phi + \frac{2\pi R}{\ell}x)}] &= \bar{F}(k, \omega) + \frac{2}{w}\tilde{\theta}_y(y = \frac{w}{2}) \\ &= \bar{F}(k, \omega) + \frac{1}{w} \left[-\frac{2}{\alpha}\tilde{\psi}(y = w/2)\kappa \tanh(\kappa w') + \frac{w\tilde{j}_e}{\cosh(\kappa w')} \right] \\ &= \bar{F}(k, \omega) + \frac{1}{w} \left[-\frac{2}{\alpha}\tilde{\Phi}\kappa \tanh(\kappa w') + \frac{w\tilde{j}_e}{\cosh(\kappa w')} \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь и далее использовано обозначение $\tilde{\psi}(y = w/2) = \tilde{\theta}(y = w/2) \equiv \tilde{\Phi}$. Окончательно имеем

$$(k^2 - k_j^2)\tilde{\Phi}_{k,\omega} + [\widetilde{\sin(\Phi + \frac{2\pi R}{\ell}x)}]_{k,\omega} + \frac{2\kappa}{\alpha w} \tanh(\kappa w')\tilde{\Phi}_{k,\omega} = \bar{F}(k, \omega) + \frac{j_{k,\omega}}{\cosh(\kappa w')}. \quad (1.26)$$

Здесь мы снова добавили индексы k, ω для напоминания того, что данное уравнение записано в представлении Лапласа-Фурье. Таким образом, мы свели двумерную систему уравнений (1.14), (1.15) к одномерному уравнению (1.26). Следующий подраздел посвящен записи полученного уравнения в квазистатическом приближении.

1.2.3. Квазистатическое приближение

Если сделать в уравнении (1.26) обратные преобразования Лапласа и Фурье, и таким образом записать его в (x, t) -представлении, получится уравнение, содержащее интегральный оператор, т. е. являющееся нелокальным во времени и пространстве. Численное

решение уравнений с временной нелокальностью вызывает определенные сложности, т. к. значение решения на данном временном шаге зависит, вообще говоря, от значений на всех предыдущих шагах. Чтобы свести уравнение (1.26) к эволюционному, мы сделаем так называемое квазистатическое приближение. Запишем уравнение (1.26) в виде

$$D_1(k, \omega)\Phi_{k, \omega} + [\sin(\Phi + \frac{2\pi R}{\ell}x)]_{k, \omega} = Q(k, \omega)j_{k, \omega} + \bar{F}(k, \omega), \quad (1.27)$$

где

$$D_1(k, \omega) = k^2 - k_j^2 + \frac{2\kappa}{\alpha\omega} \tanh(\kappa w'), \quad Q(k, \omega) = \frac{1}{\cosh(\kappa w')},$$

и

$$\bar{F}(k, \omega) = \Phi_t(t=0) - i(\omega - i\gamma)\Phi(t=0). \quad (1.28)$$

Приближение состоит в разложении оператора $D_1(k, \omega)$ в бесконечное произведение

$$D_1(\omega, k) = A(k) \prod_n (\omega^2 - \omega_n^2(k)), \quad (1.29)$$

где $\omega_n(k)$ — корни уравнения $D_1(k, \omega) = 0$, и учете некоторого ограниченного числа сомножителей в данном произведении. Мы используем следующее приближенное представление $D_1(k, \omega)$:

$$D_1(k, \omega) = A(k)(\omega - \omega_1(k))(\omega - \omega_1(-k)) \quad (1.30)$$

где $\omega_1(k)$ — нижняя ветвь решений уравнения $D_1(k, \omega) = 0$, $A(k)$ — функция, подлежащая определению. Выражение (1.30) означает, что мы преобразуем уравнение (1.26) к дифференциальному уравнению второго порядка по времени, и является справедливым, когда решение Φ предполагается достаточно медленным во времени. В принципе, можно учесть и более высокочастотные моды дисперсионной характеристики, тогда искомое уравнение будет более высокого порядка.

Разложим D_1, Q, \bar{F} в уравнении (1.27) в ряд Тейлора по частоте до членов второго порядка:

$$D_1(k, \omega) = D_1(k, 0) + \omega \partial_\omega D_1(k, \omega)|_{\omega=0} + \frac{\omega^2}{2} \partial_\omega^2 D_1(k, \omega)|_{\omega=0}, \quad (1.31)$$

$$Q(k, \omega) = Q(k, 0) + \omega \partial_\omega Q(k, \omega)|_{\omega=0} + \frac{\omega^2}{2} \partial_\omega^2 Q(k, \omega)|_{\omega=0}, \quad (1.32)$$

$$\bar{F}(k, \omega) = \bar{F}(k, 0) + \omega \partial_\omega \bar{F}(k, \omega)|_{\omega=0} + \frac{\omega^2}{2} \partial_\omega^2 \bar{F}(k, \omega)|_{\omega=0}, \quad (1.33)$$

Сравнивая выражение (1.31) с (1.30), записанном в виде

$$D_1(k, \omega) = A(k)\omega_1(k)\omega_1(-k) - A(k)\omega(\omega_1(k) + \omega_1(-k)) + A(k)\omega^2,$$

получаем

$$A(k) = \frac{1}{2} \partial_\omega^2 D_1(k, \omega)|_{\omega=0}.$$

Теперь мы подставляем выражение для $A(k)$ вместе с разложениями (1.32), (1.33) для Q, \bar{F} в уравнение (1.27) и получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 \Phi_{k,\omega} - \omega \lambda \Phi_{k,\omega} - \mu^2 \Phi_{k,\omega} = & \frac{1}{A(k)} \left(\bar{F}(k, 0) + \omega \partial_\omega \bar{F}(k, \omega)|_{\omega=0} + \frac{\omega^2}{2} \partial_\omega^2 \bar{F}(k, \omega)|_{\omega=0} \right) \\ & + \frac{j_{k,\omega}}{A(k)} \left(Q(k, 0) + \omega \partial_\omega Q(k, \omega)|_{\omega=0} + \frac{\omega^2}{2} \partial_\omega^2 Q(k, \omega)|_{\omega=0} \right) \\ & - \frac{1}{A(k)} \left[\sin\left(\Phi + \frac{2\pi R}{\ell} x\right) \right]_{k,\omega}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где

$$\lambda = \omega_1(k) + \omega_1(-k), \quad \mu^2 = -\omega_1(k)\omega_1(-k).$$

Найдем члены в правой части уравнения (1.34). При большой толщине диэлектрической прослойки в полосковой линии можно пренебречь в ней квазичастичным током и положить $\Gamma = 0$. Таким образом, $\kappa^2 = k^2 - \omega^2/c_I^2$ и

$$Q(k, 0) = \frac{1}{\cosh(kw')}, \quad \partial_\omega Q(k, \omega)|_{\omega=0} = 0,$$

и поскольку j_e не зависит от времени, последний член с $\partial_\omega^2 Q(k, \omega)|_{\omega=0}$ не даст вклада в правую часть уравнения (1.34). Далее, используя (1.28), получаем

$$\bar{F}(k, 0) = (\Phi_t)_k(t=0) + \gamma \Phi_k(t=0), \quad \partial_\omega \bar{F}(k, \omega)|_{\omega=0} = -i \Phi_k(t=0), \quad \partial_\omega^2 \bar{F}(k, \omega)|_{\omega=0} = 0.$$

С учетом всего этого уравнение (1.34) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \omega^2 \Phi_{k,\omega} - \omega \lambda \Phi_{k,\omega} - \mu^2 \Phi_{k,\omega} = & \frac{j_{k,\omega}}{A(k) \cosh(kw')} \\ & + \frac{1}{A(k)} \left((\Phi_t)_k(t=0) + \gamma \Phi_k(t=0) - i \omega \Phi_k(t=0) \right) - \frac{1}{A(k)} \left[\sin\left(\Phi + \frac{2\pi R}{\ell} x\right) \right]_{k,\omega} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Мы можем теперь сделать обратное преобразование Лапласа, используя правило $\partial_t \rightarrow -i\omega$, и получить окончательное уравнение

$$\partial_t^2 \Phi_k + i \lambda \partial_t \Phi_k + \mu^2 \Phi_k + A^{-1}(k) \left[\sin\left(\Phi + \frac{2\pi R}{\ell} x\right) \right]_k = \frac{j_{k,\omega}}{A(k) \cosh(kw')} \quad (1.36)$$

с новыми начальными условиями для $\Phi_k(0)$ и $\Phi_{kt}(0)$.

$$\chi_t(k, 0) = A^{-1}(k) \bar{F}(k, 0), \quad \chi(k, 0) = i A^{-1}(k) \partial_\omega \bar{F}(k, \omega)|_{\omega=0}. \quad (1.37)$$

Заметим, что мы получили уравнение, нелокальное в пространстве, но не во времени. Следующий раздел посвящен численному решению данного уравнения.

В описанном выше приближении можно вывести явные выражения для λ и $A(k)$ в формуле (1.36). Из разложения D в ряд Тейлора имеем $\partial_\omega D_1(k, \omega)|_{\omega=0} = -A(k)\lambda$. Поскольку

$$\partial_\omega D_1(k, \omega)|_{\omega=0} = -2\omega - i\gamma - \frac{2\omega}{\alpha w c_I^2} \left(\frac{\tanh(\kappa w')}{\kappa} + \frac{w'}{\cosh^2(\kappa w')} \right) |_{\omega=0} = -i\gamma \quad (1.38)$$

то $-i\lambda = A^{-1}(k)\gamma$. Подставляя выражение для $-i\lambda$ в (1.36), получаем окончательно

$$\partial_t^2 \Phi_k + \mu^2 \Phi_k = -A^{-1}(k) \left(\left[\sin\left(\Phi + \frac{2\pi R}{\ell} x\right) \right]_k + \gamma \partial_t \Phi_k - \frac{j_k}{\cosh(kw')} \right), \quad (1.39)$$

где

$$A(k) = - \left(1 + \frac{1}{w c_I^2} \left[\frac{\tanh(kw')}{k} + \frac{w'}{\cosh^2(kw')} \right] \right). \quad (1.40)$$

Уравнение (1.39) описывает динамику исследуемой системы в квазистатическом приближении.

1.2.4. Дисперсионное соотношение, черенковское излучение, и резонансы

Для записи дисперсионного соотношения положим в уравнении (1.26) $\gamma = \Gamma = j_e = 0$, и $\sin \theta \approx \theta$, предполагая $|\theta| \ll 1$. Подставив $\theta \sim \exp(ikx - i\omega t)$, получим дисперсионное уравнение вида

$$k^2 - \omega^2 + 1 + \frac{2\kappa}{\alpha w} \tanh(\kappa w') = 0. \quad (1.41)$$

Из-за временной нелокальности оно содержит бесконечное множество ветвей $\omega(k)$. В рамках сделанного нами квазистатического приближения мы будем интересоваться нижней ветвью $\omega(k)$, предполагая процессы, происходящие в системе, достаточно медленными.

На рис. 1.2 представлена нижняя ветвь дисперсионной характеристики для $w' = 0.5$ и двух различных значений скорости Свихарта в пассивной области, $c_I = 2$ и $c_I = 10$. Во всех вычислениях мы положили $w = 0.2$. При достаточно больших значениях c_I первая ветвь совершенно отделена от остальных. При $c_I \rightarrow +\infty$ имеется только одна ветвь $\omega^2 = 1 + k^2 + \frac{2\kappa}{w} \tanh(kw')$, все остальные при этом уходят на бесконечность. Увеличение ширины пассивной области до $w' = 1$ сближает различные ветви, хотя по-прежнему для $c_I = 10$ вторая ветвь находится достаточно далеко от нижней ветви. Заметим, что при $k = 0$ для расстояния между модами справедливо асимптотическое выражение $\Delta\omega =$

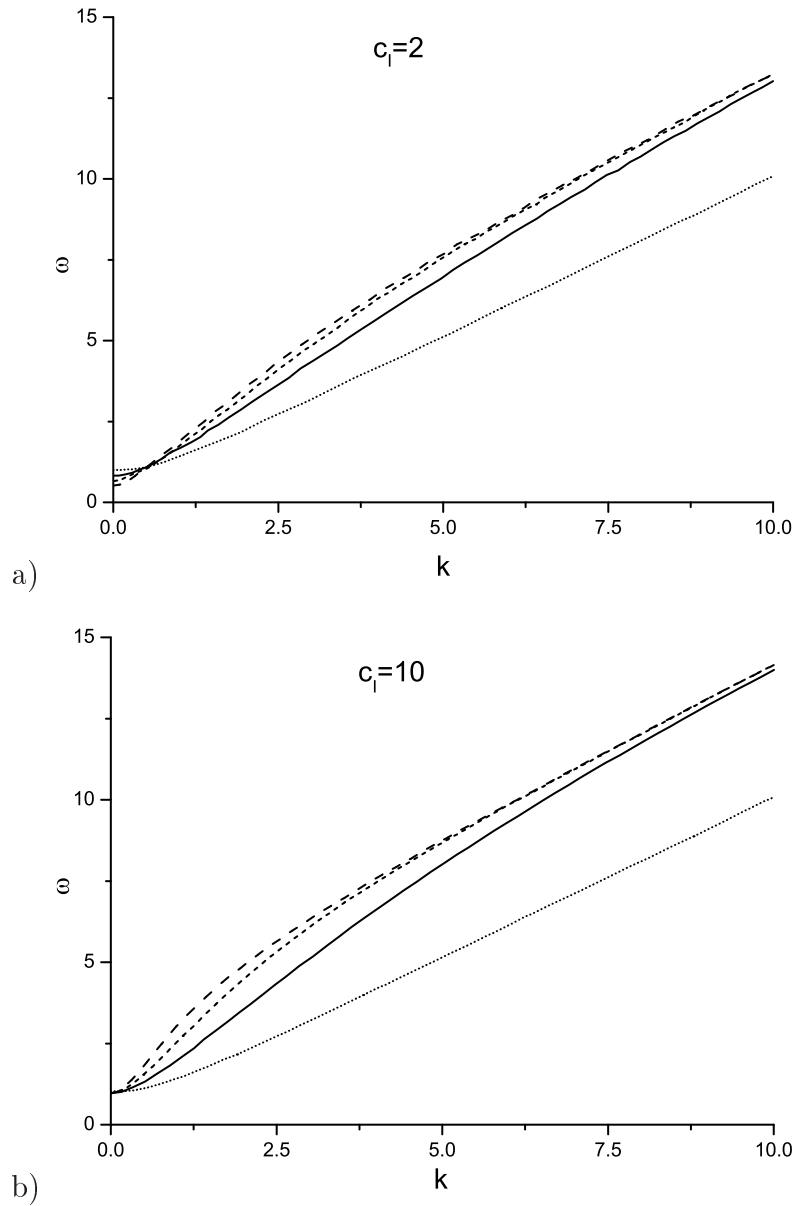


Рис. 1.2. Нижние ветви дисперсионных кривых при а) $c_I = 2$ и б) $c_I = 10$. Разные кривые соответствуют $w' = 0$ (точки), 0.2 (сплошная линия), 0.5 (пунктирная линия, короткий штрих), 1 (пунктирная линия, длинный штрих). Остальные параметры: $l = 18$, $w = 0.2$, $\alpha = 1$, и $\gamma = 0.1$.

$\frac{c_I}{w'}\pi$ для высоких мод. В случае $w' = 0$ видно, что остается одна ветвь, совпадающая с дисперсионной характеристикой обычного уравнения синус-Гордона.

Известно, что волновой объект, подобный частице, движущийся со фазовой скоростью электромагнитной моды волновода, испускает черенковское излучение с волновым числом k_r , определяемым из соотношения, которое называется условием черенковского синхронизма (рис. 1.3)

$$\text{phase velocity} \equiv \omega(k_r)/k_r = u \quad (1.42)$$

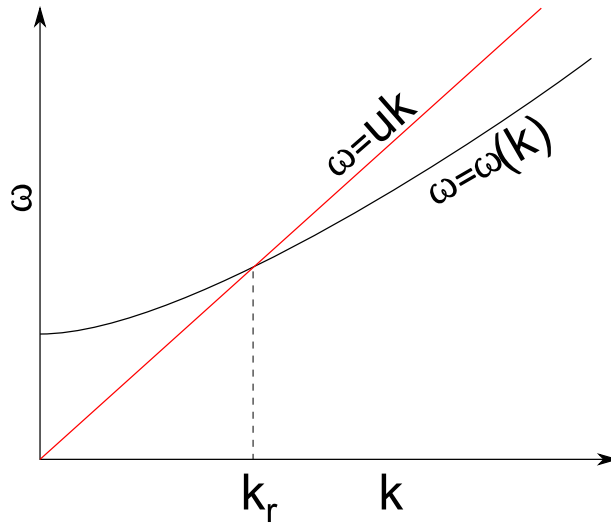


Рис. 1.3. Условие черенковского синхронизма.

где u — скорость солитона, $\omega(k)$ — частота линейной волны, k — ее волновое число. Для случая малого затухания (γ мало), $\omega(k)$ может быть найдено из уравнения

$$\omega^2(k) = k^2 + 1 + \frac{2\kappa}{w} \tanh(\kappa w'), \quad (1.43)$$

где $\kappa^2 = k^2 - \omega^2(k)/c_I^2$. В общем случае всегда можно численно решить дисперсионное уравнение для $\omega(k)$, но при $c_I \rightarrow \infty$ оно существенно упрощается, поскольку при этом $\kappa^2 \rightarrow k^2$, и уравнение (1.43) переходит в явное выражение для $\omega(k)$.

Волновое число излучаемой волны k_r может быть найдено как точка пересечения кривой $\omega(k)$, полученной из уравнения (1.43), и прямой линии $\omega = uk$. Для заданной скорости u в общем случае имеется множество корней k . Однако, поскольку мы используем квазистатическое приближение, нас интересует только корень, принадлежащий нижней ветви.

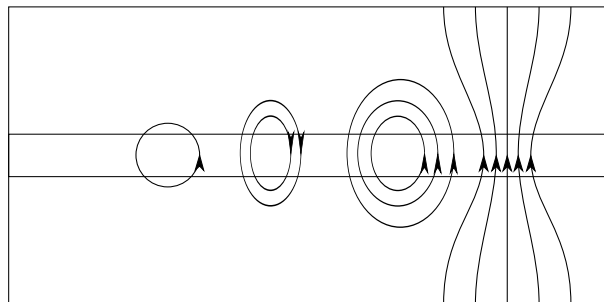


Рис. 1.4. Магнитные силовые линии джозефсоновского вихря с черенковским излучением (схематическое изображение).

При определенных резонансных условиях возможна синхронизация излучения с дви-

жущимся вихрем; сформированная таким образом структура имеет вид бегущей волны (рис. 1.4). Периодическим граничным условиям соответствует кольцевой джозефсоновский контакт с пассивной областью. В этом случае волновое число излучаемой волны k_r должно быть таким, чтобы решение в виде волны удовлетворяло периодическим граничным условиям. Для кольца длиной ℓ волновое число должно удовлетворять условию $k_r \equiv k_m = 2\pi m/\ell$, где m — целое число. Подставив данное выражение в уравнение (1.43), находим резонансные частоты (для очень больших c_I)

$$\omega_m^2 \equiv \omega^2(k_m) = 1 + \left(\frac{2\pi m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{4\pi m}{w\ell}\right) \tanh\left(\frac{2\pi m}{\ell}w'\right), \quad (1.44)$$

где $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ и резонансные скорости вихрей

$$u_m = \frac{\omega(k_m)}{k_m}, \quad (1.45)$$

при которых они эффективно возбуждают электромагнитные волны посредством черенковского механизма. Будучи захваченным этой волной, вихрь будет двигаться с ее фазовой скоростью. Проявлением этого обстоятельства будут ступени на вольт-амперной характеристике джозефсоновского контакта. Поскольку их происхождение связано с черенковским излучением, данные ступени можно назвать черенковскими ступенями. Они должны располагаться при напряжениях

$$2eV_m = 2\pi\hbar\frac{u_m}{\ell}. \quad (1.46)$$

Расстояние между соседними черенковскими ступенями $\Delta V_m = V_{m+1} - V_m$ определяется соотношением

$$2e\Delta V_m = \frac{2\pi\hbar}{\ell}(\Delta u_m), \quad (1.47)$$

где $\Delta u_m = u_{m+1} - u_m$. Для достаточно длинных контактов, и при достаточно больших m , Δu_m можно выразить через фазовую и групповую скорости резонансной волны:

$$\Delta u_m \approx \frac{\Delta k}{k}(v_g - v_{ph}) = \frac{1}{m}(v_g - v_{ph}), \quad (1.48)$$

где $\Delta k = k_{m+1} - k_m = 2\pi/\ell$,

$$v_g = \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_m}, \quad v_{ph} = \left.\frac{\omega}{k}\right|_{k=k_m}$$

— групповая и фазовая скорости резонансной волны. Следует отметить, что приведенное выше определение групповой скорости волны в ограниченной системе справедливо для

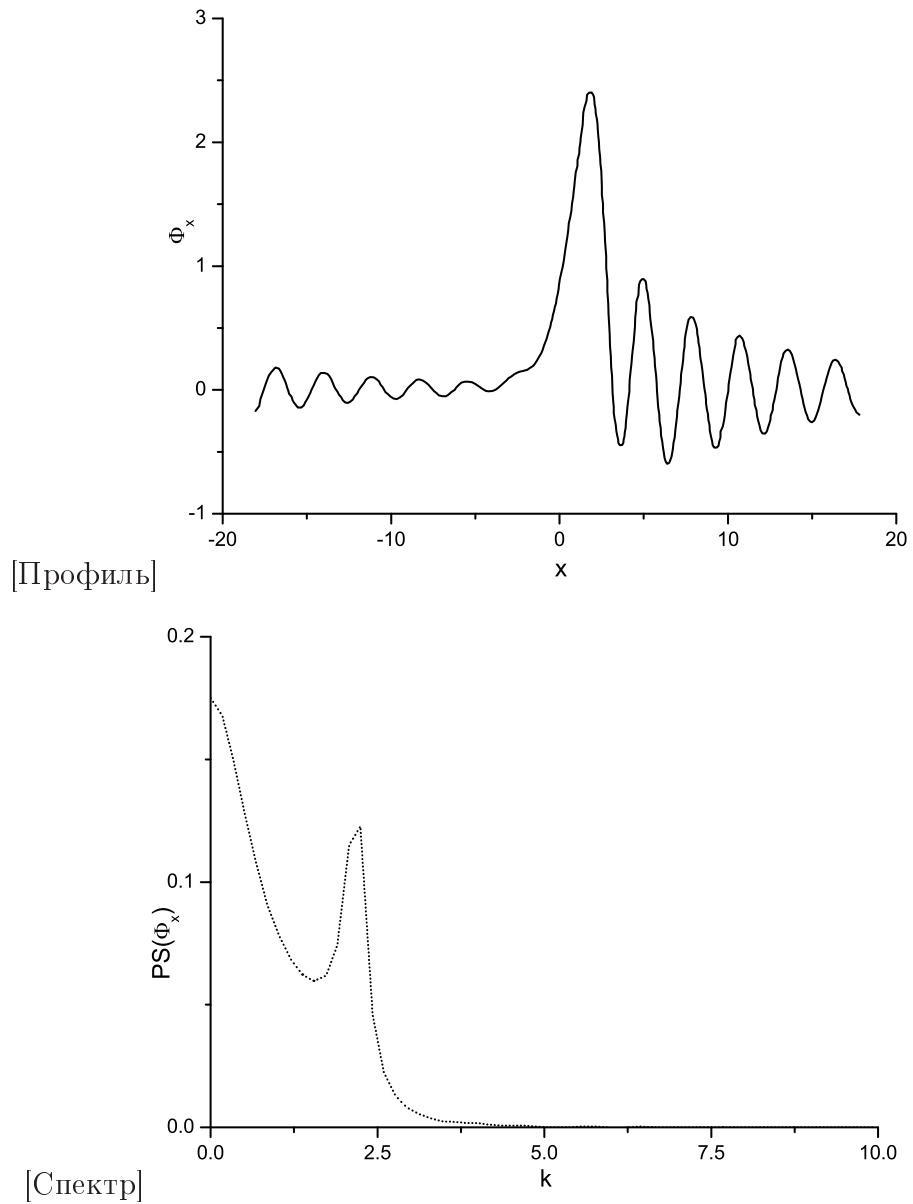


Рис. 1.5. а) Профиль Φ_x вихря с излучением и б) его спектр мощности. Хорошо виден пик, обусловленный излучением. Здесь $l = 36$, $\alpha = 0.1$, $w' = 0.5$, $w = 0.2$.

достаточно длинных контактов, точнее, когда резонансная частота $\omega(k_m)$ мало меняется при изменении m на единицу.

Исследование вольт-амперных кривых для разных параметров демонстрирует наличие резонансных скоростей движения бегущей волны. Существование таких скоростей говорит о том, что существуют предпочтительные волновые числа для излученных волн малой амплитуды. В [34, 35] приведен критерий для таких волновых чисел (хотя он сформулирован для дискретной задачи, он также применим и в нашем случае). На рис. 1.5, а показан профиль излучения вихря Φ_x для $w' = 0.5$, при скоростях, превышающих кри-

тическую $c_0 = 1$. Спектр мощности Φ_x (рис. 1.5, б) демонстрирует второй пик (первый обусловлен вихрем при $k = 0$) при $k = 2.225$, где мы и ожидали его обнаружить.

Поперечная структура излучаемой волны при взаимодействии вихря с модой, описываемой нижней ветвью дисперсионной характеристики, является экспоненциально спадающей от джозефсоновского перехода к краям полосковой линии. Характерный масштаб этого спада определяется поперечным волновым числом $\kappa = \sqrt{k_m^2 - \omega^2(k_m)/c_J^2}$.

1.3. Численный эксперимент: вольт-амперные характеристики

Вернемся к динамической задаче. Решим уравнение (1.36) для фурье-компонент Φ_k с периодическими граничными условиями. Запишем уравнение (1.36) в виде системы уравнений первого порядка

$$\partial_t \Phi_k = X_k \quad (1.49)$$

$$\partial_t X_k = -\mu^2 \Phi_k + A^{-1}(k) \left([\sin(\Phi + \Psi)]_k + \gamma X_k - \frac{j_k}{\cosh(kw')} \right). \quad (1.50)$$

Используем очень простую схему первого порядка для интегрирования уравнений (1.49, 1.50). Это простейший неявный метод Эйлера. Дискретизируем систему во времени ($t = n\tau$, где τ — шаг по времени) следующим образом

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = \tau X_{n+1}, \quad (1.51)$$

$$X_{n+1} - X_n = \tau(-\mu^2 \Phi_n + F_n). \quad (1.52)$$

Здесь мы опустили индекс k при Φ , X и F_n . Выражение

$$F_n = A^{-1}(k) \left([\sin(\Phi + \Psi)]_k + \gamma X_k - \frac{j_k}{\cosh(kw')} \right)$$

сосчитано в момент времени $n\tau$. Решая уравнения (1.51, 1.52) для Φ_{n+1} , X_{n+1} , получаем

$$\Phi_{n+1} = (1 - \tau^2 \mu^2) \Phi_n + \tau X_n + \tau^2 F_n, \quad (1.53)$$

$$X_{n+1} = X_n + \tau(F_n - \mu^2 \Phi_n) \quad (1.54)$$

Мы начинаем решать данные уравнения, начиная с $t = 0$ с шагом $\tau = 0.01$, с начальными условиями, полученными из решения статической задачи при соответствующих параметрах. Внешний ток увеличивается от нуля до единицы с шагом $\delta I = 0.005$. Чтобы исключить влияние переходного процесса при изменении I , в каждой точке производится интегрирование по большому временному интервалу $\Delta T = 150$. Мы также повторили

некоторые расчеты для уравнений (1.49), (1.50) с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка с теми же параметрами. Оба метода дали практически одинаковые результаты. Поскольку вычисления проводятся для Φ_k , т. е. в k -пространстве, на каждом временном шаге мы должны делать преобразование Φ_k в $\Phi(x)$ для вычисления члена $[\sin(\Phi + \Psi)]_k$, необходимого для следующей итерации. Это делается при помощи стандартной процедуры FFT — быстрого Фурье-преобразования. С использованием данной процедуры напряжение при каждом значении внешнего тока рассчитывается как среднее по временному интервалу ΔT и длине структуры ℓ . Установившийся режим для текущего шага используется в качестве начального условия для следующего шага. Таким образом

$$V = \langle \bar{\Phi}_t \rangle = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t(x_i, t) dt = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \frac{1}{T} (\Phi(x_i, 0) - \Phi(x_i, T)), \quad (1.55)$$

где $x_i = -\frac{\ell}{2} + (i - 1)\Delta x$, $\Delta x = \ell/N_x$, $i = 1, \dots, N_x$, N_x — число точек пространственной сетки. Поскольку период решения точно не известен, мы полагаем T большим временным интервалом. Таким образом, ошибка из-за того, что решение взято не на целом числе периодов, пренебрежимо мала.

Рис. 1.6 иллюстрирует зависимость ВАХ системы от ширины пассивной области при разных значениях c_I — скорости волны в пассивной области. Длина контакта составляет $\ell = 18$, соотношение индуктивностей $\alpha = 1$, и коэффициент затухания $\gamma = 0.1$. В данном случае в контакт захвачен один вихрь, поэтому напряжение на структуре связано со скоростью вихря соотношением $V = \frac{2\pi}{\ell}u$. Ступеньку на ВАХ, возникающую при движении одного вихря в системе, будем называть первой ступенькой нулевого поля.

Из рис. 1.6 видно, что предельная скорость вихря, определяемая напряжением на первой ступени нулевого поля, увеличивается с ростом ширины пассивной области. Данная зависимость имеет простое объяснение. При достаточно малой ширине пассивной области ядро нелокального оператора в уравнении (1.26) можно представить в виде $\tanh \kappa w' \approx \kappa w'$. Уравнение (1.26) при этом сводится к обычному уравнению синус-Гордона, только с перенормированными коэффициентами. Предельная скорость вихря в этом случае будет определяться выражением

$$v^2 = \frac{\alpha w + 2w'}{\alpha w + 2w'/c_I^2}.$$

Видно, что v возрастает с ростом w' при $c_I > 1$.

Из рис. 1.6 также видно, что наклон ВАХ при малых напряжениях уменьшается с ростом ширины пассивной области. Данное обстоятельство также можно объяснить пере-

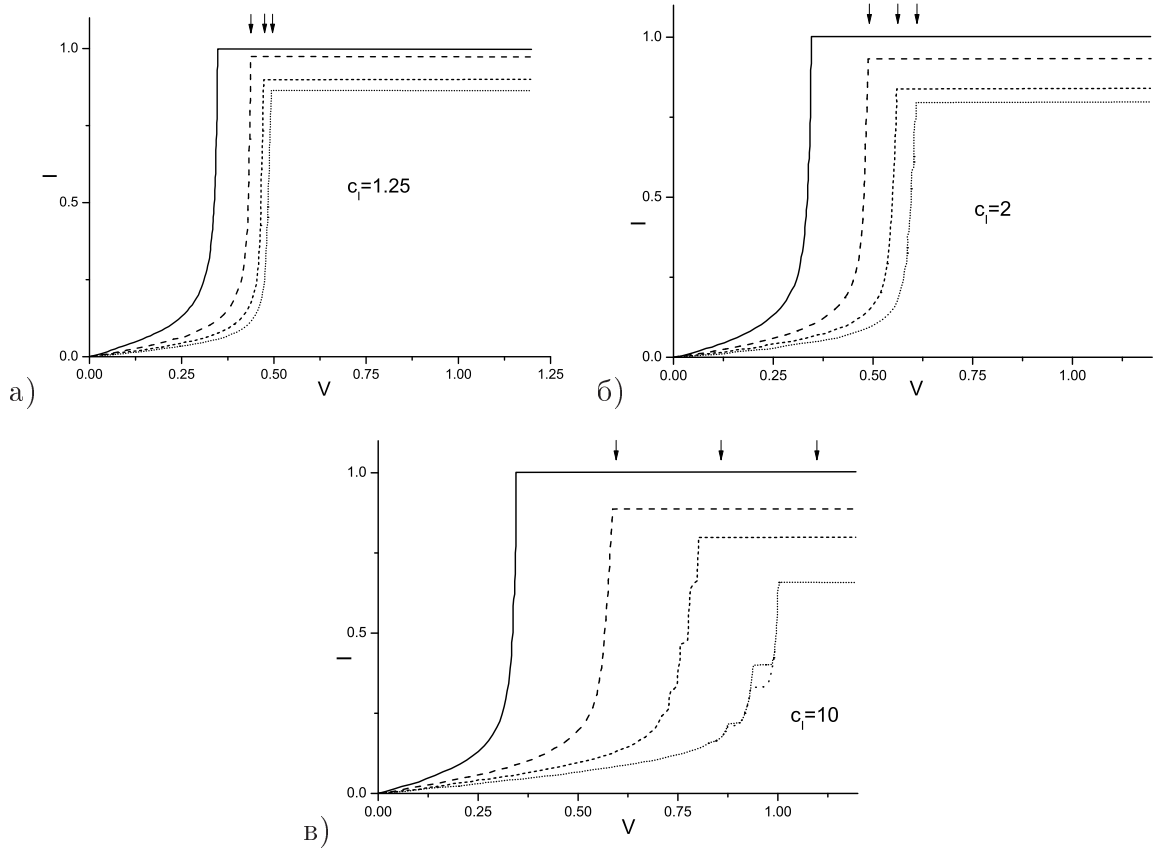


Рис. 1.6. Вольт-амперные кривые, построенные при различных значениях скорости электромагнитных волн в пассивной области: а) $c_I = 1.25$, б) $c_I = 2$, и в) $c_I = 10$. Использованы значения $w' = 0$ (сплошная линия), $w' = 0.2$ (пунктирная линия с длинным штрихом), $w' = 0.5$ (пунктирная линия с коротким штрихом), $w' = 1$ (точки). В последнем случае имеет место гистерезис. Остальные параметры: $l = 18$, $\gamma = 0.1$, и $\alpha = 1$.

нормировкой коэффициентов в уравнении (1.26) при достаточно малой w' . В этом случае при увеличении w' возрастает ширина джозефсоновского вихря. С другой стороны, наклон ВАХ вблизи нуля определяется скоростью вихря u , определяемой выражением

$$u = \frac{j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x dx}{\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x^2 dx} = \frac{2\pi j}{\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x^2 dx}$$

для бегущего вихря. В последнем выражении интеграл уменьшается с ростом ширины вихря. Следовательно, с ростом ширины пассивной области джоулевы потери уменьшаются, что ведет к уменьшению наклона ВАХ вблизи нуля.

Как видно из рис. 1.6, б, при увеличении c_I до 2.0, как и ожидается, кривые сдвигаются к более высоким предельным напряжениям, и интервал между кривыми также увеличивается. Стрелки сверху показывают положение максимальной скорости линейных волн, полученное путем нахождения эффективных индуктивности и емкости в активной

и пассивной областях [36, 37], даваемое формулой

$$c = \sqrt{\frac{2w' + w}{2w' + wc_I^2}} c_I \quad (1.56)$$

в единицах скорости Свихарта $c_0 = \sqrt{\frac{1}{L_J C_J}}$, где C_J — емкость на единицу длины в области контакта. Формула (1.56) предсказывает, что при $c_I = 1$ максимальная скорость составляет $c = 1$. Это становится понятным из того, что если исключить член $\sin \theta$ из уравнения (1.26), то оно будет описывать распространение волн во всей области. Вольт-амперные кривые будут сдвигаться вниз из-за уменьшенного затухания при увеличении w' , но будут совпадать при максимальном напряжении.

Яркой отличительной особенностью ВАХ, изображенных на рис. 1.6, является тонкая структура черенковских ступеней на первой ступени нулевого поля, которые были получены экспериментально [38] и становятся более выраженными при больших w' . Как видно из экспериментов [37], средняя скорость вихря не увеличивается непрерывно при подводимой посредством внешнего тока энергии, а испытывает скачки с одной ветви на другую и, таким образом, определенные значения скорости являются запрещенными. Это лучше видно на рис. 1.6, *в* при $c_I = 10$ с прежними значениями w' . Стрелки снова показывают предельную линейную скорость c , являющуюся верхним пределом скорости вихря. Данная скорость не может быть достигнута вихрем из-за резонансной структуры вольт-амперной кривой. На этом же рис. изображен обратный ход ВАХ при $w' = 1.0$; видно, что ВАХ испытывает гистерезис. При увеличении затухания гистерезис уменьшается, и при сравнительно большом затухании совсем исчезает. Резонансы удовлетворяют условию черенковского излучения $\omega(k) = uk$, где $\omega(k)$ — дисперсионное соотношение для волнораспространяющей системы [34, 39], и волновой вектор k принимает дискретный набор значений из-за периодичности системы.

Рис. 1.7 иллюстрирует влияние изменения длины контакта на ВАХ при $c_I = 2$ и 10. На рис. 1.7, *а* ($c_I = 2$) видно, что при увеличении длины до $\ell = 36$ напряжение изменяется на множитель $\frac{1}{2}$, поскольку $V = \langle \bar{\Phi}_t \rangle \sim \frac{u}{\ell}$. Фактически, если мы изменим масштаб V в 2 раза, графики для $\ell = 36$ и $\ell = 18$ совпадут. Таким образом, для длинных контактов зависимость формы ВАХ от длины контакта является слабой, поскольку излучение от вихря затухает на длине, меньшей периода контакта. Тем не менее, имеется небольшое различие при $\ell = 10$, потому что в этом случае излучение от вихря распространяется по всей длине системы и в значительной степени усиливается при высоких скоростях, приводя к

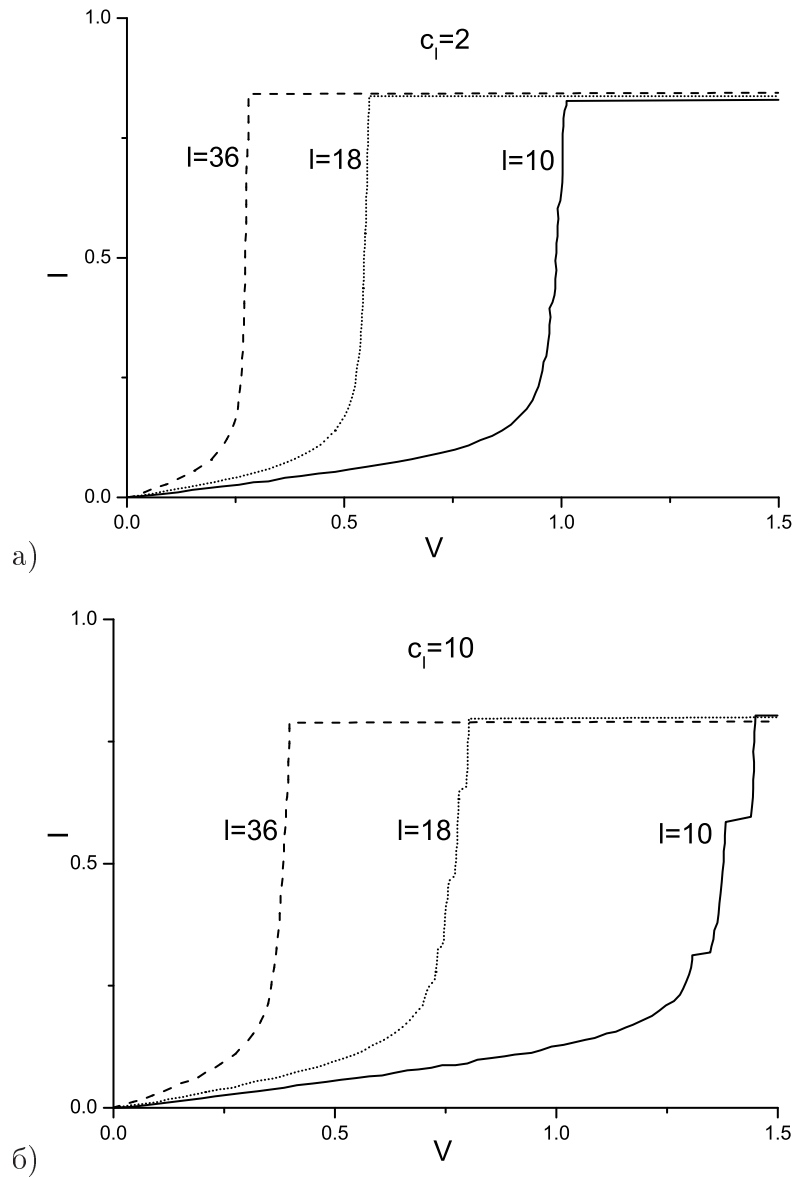


Рис. 1.7. Влияние длины контакта на вольт-амперные кривые, построенные при $l = 10$ (сплошная линия), $l = 18$ (точки), $l = 36$ (пунктирная линия) и при двух различных скоростях а) $c_I = 2$ и б) $c_I = 10$. Во всех случаях $w' = 0.5$, $\gamma = 0.1$, и $\alpha = 1$.

видимым слабым резонансам. При малых скоростях ширина вихря сравнительно велика и чувствительна к конечной длине системы из-за периодических граничных условий. Таким образом, амплитуда Φ_x растет при увеличении длины системы. Это увеличивает джоулевы потери и, следовательно, ток смещения, нужный для поддержания скорости вихря. В этом случае, если мы изменим напряжение пропорционально длине, мы обнаружим, что при $l = 10$ кривая идет выше двух других при малых скоростях. При больших скоростях ширина вихря сильно уменьшается с ростом скорости и почти независима от длины. Пропорционально измененные ВАХ совпадают, за исключением некоторых флуктуаций

из-за резонансов. При $c_I = 10$ видно, что при низких скоростях (напряжениях), как и ожидалось, нет зависимости от c_I , и соответствующие наклоны такие же, как и при $c_I = 2$. Вблизи критических скоростей резонансы отчетливо видны при $\ell = 18$ и остаются сильными при $\ell = 10$, в то время как при $\ell = 36$ резонансы не наблюдаются из-за затухания излучения.

Каждый резонанс характеризуется волновым вектором излучения $k_m = \frac{2\pi}{\ell} m$, где m — целое число. Для каждого m можно найти соответствующую резонансную скорость по формуле $u_m = \frac{\omega(k_m)}{k_m}$, т. е. резонансы на более высоких скоростях соответствуют увеличению длины волны. При низких скоростях излучение имеет малую длину волны и быстро затухает, поэтому резонансы не наблюдаются при низких скоростях. Можно также сказать, что при длине 2ℓ резонанс $k = k_m$ тот же, что $k = k_{2m}$ при длине ℓ . Тем не менее, есть небольшая разница из-за набега фазы волны на вихре. Кроме того, расстояние между резонансами растет с увеличением w'/w . Причина этого связана с видом дисперсионного отношения в точках пересечения. Если в точках излучения наклон дисперсионной характеристики не сильно отличается от скорости вихря, резонансы расположены близко друг к другу по напряжению.

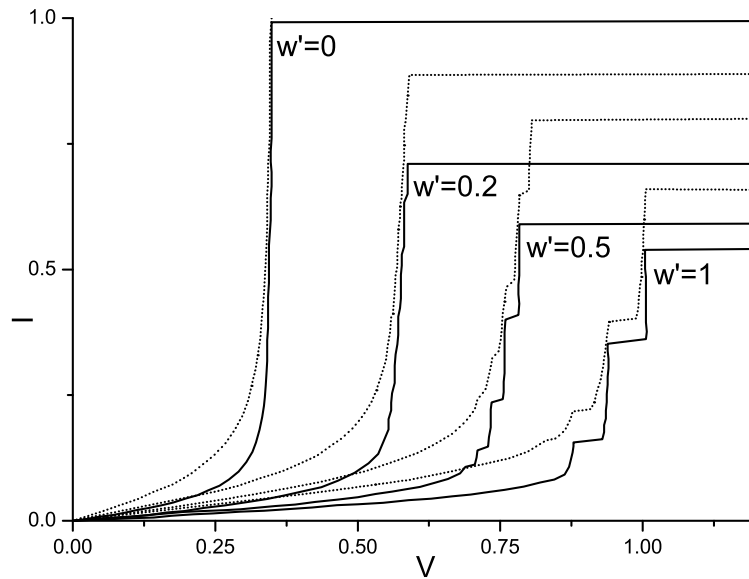


Рис. 1.8. Вольт-амперные кривые при $\gamma = 0.05$ (сплошная линия) и $\gamma = 0.1$ (точки) и при $w' = 0, 0.2, 0.5, 1$ слева направо. Всюду $c_I = 10, l = 18, \alpha = 1$.

На рис. 1.8 приведены ВАХ для двух разных значений затухания: $\gamma = 0.1$ (точки) и $\gamma = 0.05$ (сплошная линия). Видно, что при уменьшении затухания ВАХ сдвигается вниз, как и ожидалось. При малых скоростях данный сдвиг пропорционален константе

затухания. При больших скоростях достигается та же критическая скорость, и это справедливо только при относительно слабом затухании. Наиболее существенное изменение, однако, заключается в увеличении крутизны резонансов, или в их появлении там, где они были очень слабыми. При относительно большом затухании резонансы разглаживаются, и гистерезис не наблюдается.

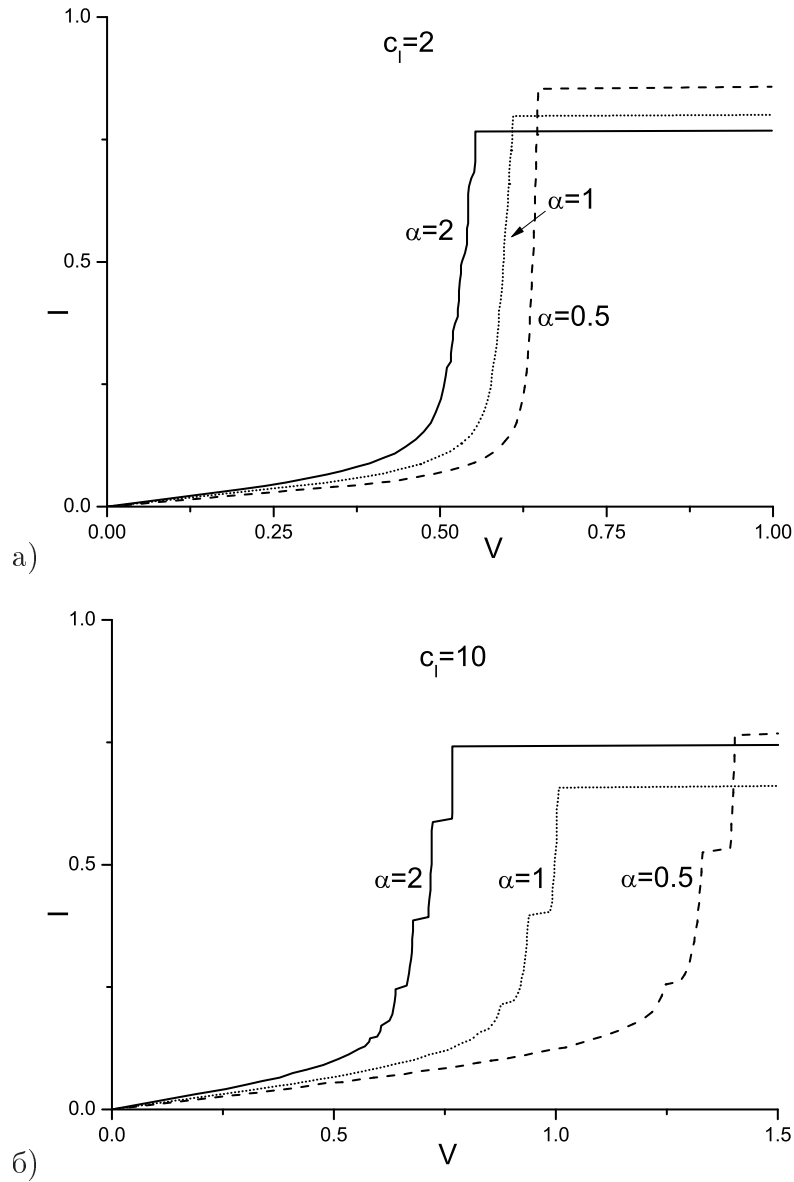


Рис. 1.9. Вольт-амперные кривые при $\alpha = 0.5$ (пунктирная линия), $\alpha = 1$ (точки), и при $\alpha = 2$ (сплошная линия), и при двух скоростях а) $c_I = 2$ и б) $c_I = 10$. Всюду $w' = 1$, $w = 0.2$, и $\gamma = 0.1$.

На рис. 1.9 показано влияние различия магнитной толщины в активной области по сравнению с пассивной областью, т. е. влияние изменения параметра $\alpha = \frac{L_I}{L_J}$. Данное сравнение проделано при скоростях $c_I = 2, 10$ и фиксированных остальных параметрах $w = 0.2$, $w' = 1.0$, $\ell = 18$, и $\gamma = 0.1$. Заметим, что при $c_I = 2$ в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$

кривые слегка смещены по отношению друг к другу вблизи критической скорости. Это легко увидеть из приближенного выражения для критической скорости

$$c = \sqrt{\frac{2w' + \alpha w}{2w' + \alpha w c_I^2}} c_I.$$

В этом случае соотношение критических скоростей при двух значениях $\alpha \frac{c(\alpha=1)}{c(\alpha=2)} = 1.16$, в то время как соответствующее соотношение при $c_I = 10$ равно 1.35, в хорошем соответствии с численными расчетами. При низких скоростях увеличивается наклон ВАХ при росте α . Это происходит из-за роста ширины вихря с увеличением α [31]. При низких скоростях результаты снова независимы от c_I и зависят только от α .

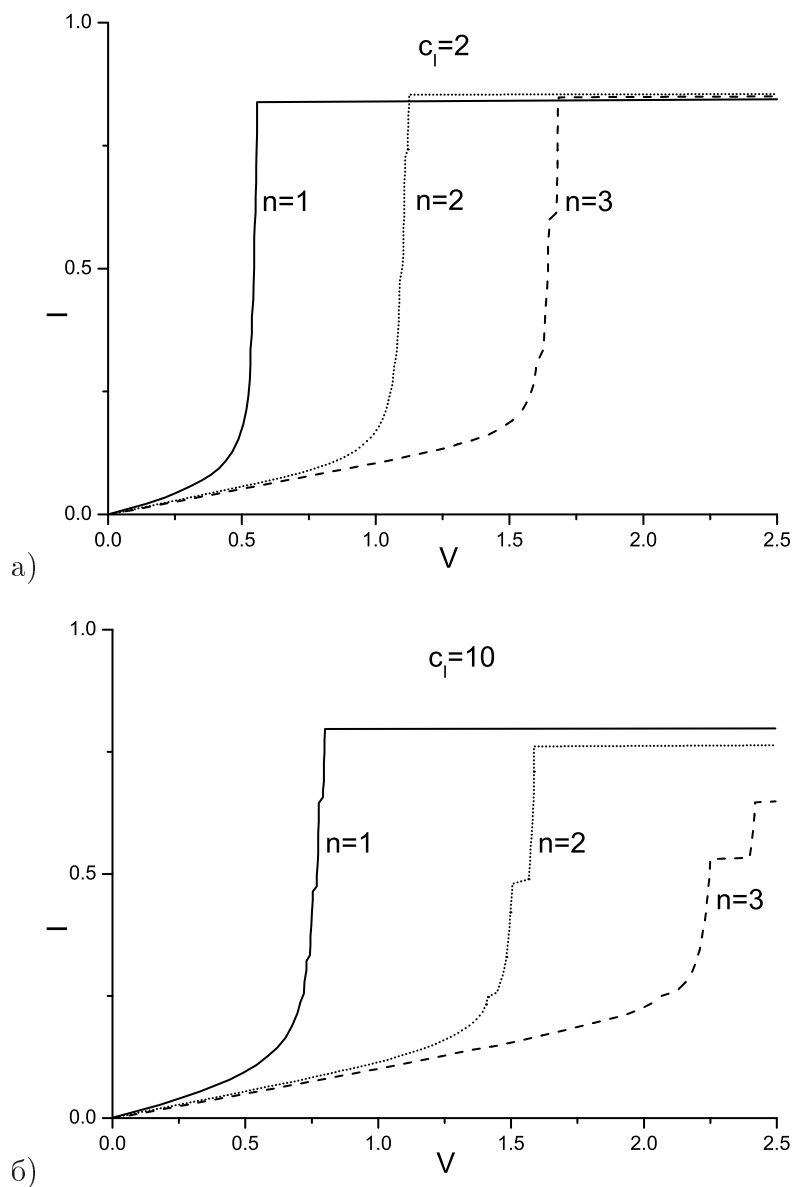


Рис. 1.10. Первые три ступени нулевого поля при а) $c_I = 2$ и б) $c_I = 10$. $w' = 0.5$, $l = 18$, и $\gamma = 0.1$.

На рис. 1.10 показаны рассчитанные первые три ступени нулевого поля для контакта

длины $\ell = 18$, $w = 0.2$, $w' = 0.5$, $\gamma = 0.1$, при двух разных значениях $c_I = 2$ (рис. 1.10, *a*), и $c_I = 10$ (рис. 1.10, *б*). Если разделить напряжение на n -й ступени на n , то можно увидеть, что полученная кривая будет очень близка к кривой для первой ступени нулевого поля. Видно, однако, что резонансная структура сильнее на более высоких ступенях нулевого поля. Причина этого заключается в том, что большее количество вихрей на более высоких ступенях осуществляет более равномерную накачку контакта излучением и, таким образом, линейная волна достигает большей амплитуды. Т. е. плотность вихрей играет в данном случае важную роль.

1.4. Заключение

Исследована динамика узкого распределенного джозефсоновского контакта с пассивной областью и получено нелокальное во времени и пространстве уравнение типа синус-Гордона для джозефсоновской фазы. Происхождение нелокальности в данном случае связано с распространением волн в пассивную область и их последующим отражением от края пассивной области обратно в контакт. С использованием квазистатического приближения построены ВАХ структуры и исследована их зависимость от геометрических, индуктивных, резистивных, и емкостных свойств пассивной области. Смысл квазистатического приближения состоит в данном случае в том, что из множества ветвей дисперсионной характеристики оставляется только самая нижняя ее ветвь. Более высокочастотные ветви при рассмотренных параметрах оказываются лежащими намного выше по частоте.

При малых скоростях динамика вихря определяется затуханием и индуктивными свойствами системы через зависимость ширины вихря от указанных факторов. При высоких скоростях вихря его поведение определяется главным образом скоростью распространения линейной волны в пассивной области.

Из-за измененной дисперсии вихрь, движущийся в контакте, излучает черенковское излучение на длине волны, определяемой условием черенковского синхронизма, когда фазовая скорость излученной волны совпадает со скоростью вихря. В зависимости от длины системы, затухания, и внешнего тока, излучение может заполнить всю длину системы и синхронизоваться с вихрем, образуя единую бегущую волновую структуру при определенных резонансных условиях. Данные резонансы возникают при определенных скоростях вихря и проявляются в виде скачков напряжения на ступеньках нулевого поля. Расстояние между резонансами сильно зависит от параметров системы из-за зависимости диспер-

сионного соотношения от параметров. При слабом затухании имеет место гистерезисное поведение ВАХ.

Синфазный режим движения вихрей в стеке из длинных джозефсоновских контактов, встроенном в полосковую линию

2.1. Введение

Идея использования эффекта Джозефсона для генерации высокочастотного электромагнитного излучения привлекала внимание многих исследователей со времени своего открытия в 1962 г. Основными аргументами в пользу перспективности данной идеи являются хорошая перестраиваемость джозефсоновского контакта, его малые размеры, и возможность работы на частотах порядка нескольких сотен ГГц [1]. Основным же препятствием на пути создания генератора на основе джозефсоновского контакта является малая мощность излучения одного контакта, недостаточная для большинства приложений. Объединение многих джозефсоновских контактов в массив с последующей их синхронизацией позволило бы существенно повысить мощность излучения генераторов на их основе. В качестве массивов джозефсоновских контактов можно использовать многослойные джозефсоновские структуры. Одним из возможных способов объединения контактов в массивы является формирование многослойных джозефсоновских структур. К настоящему времени хорошо отработана технология изготовления искусственных многослойных джозефсоновских структур на основе ниобия [40]. Интерес к многослойным джозефсоновским структурам еще более возрос после открытия внутреннего эффекта Джозефсона в некоторых ВТСП [5, 6]. Это открытие показало, что ВТСП с сильной анизотропией могут рассматриваться как естественные многослойные джозефсоновские структуры.

Одним из способов синхронизации стеков длинных джозефсоновских контактов является формирование решетки джозефсоновских вихрей и приведение ее в движение с помощью внешнего тока. Генерация при этом возникает при взаимодействии вихрей с краем контакта. Особенно эффективным является режим генерации при расположении вихрей в виде прямоугольной решетки, т. к. мощность излучения на основной гармонике в этом случае пропорциональна N^2 , где N — число слоев в структуре. Было проведено большое количество теоретических исследований устойчивости регулярных вихревых

структур в слоистых системах, и в некоторых работах была показана возможность достижения синфазного режима движения вихревой структуры в стеках [12] либо режима, близкого к синфазному [13, 14]. Однако никаких экспериментальных подтверждений реализации такого режима в многослойных структурах получено не было. Как нам кажется, это связано с разнообразием физических механизмов связи между контактами в стеке и невозможностью учесть все эти механизмы в рамках одной конкретной модели. Невозможность достижения синфазного режима движения вихрей в многослойных системах заставляет обеспечивать дополнительную стабильность прямоугольной решетки вихрей в стеках. Один из возможных путей решения этой задачи — соединение стека с внешней электромагнитной системой.

В данной главе описано исследование устойчивости прямоугольной вихревой решетки в стеке, встроенном в полосковую линию. Такая система обладает рядом привлекательных особенностей. Во-первых, она может быть сравнительно легко реализована в эксперименте. Во-вторых, как мы покажем далее, она может быть описана простой моделью — системой связанных уравнений типа синус-Гордона, дополненной «глобальной» связью за счет внешней волноведущей системы. Используя эту модель, мы установили, что одним из важнейших факторов, влияющих на устойчивость вихревой конфигурации того или иного типа, является соотношение характеристических скоростей различных мод возмущений в системе. В частности, для устойчивости прямоугольной решетки необходимо, чтобы симметричная мода возмущений была самой медленной по сравнению со всеми другими модами. Мы показали, что при этом условии в определенном диапазоне внешних токов синфазный режим устойчив и, более того, происходит спонтанное установление синфазного режима в данном диапазоне токов.

Глава организована следующим образом. Во втором разделе главы представлен вывод системы уравнений, описывающей стек, связанный с полосковой линией. Третий раздел посвящен аналитическому исследованию устойчивости синфазного режима движения вихрей в рассматриваемой системе. В четвертом разделе описаны методика и результаты численного эксперимента, проведенного с целью проверки результатов аналитических расчетов. Наконец, в заключении сформулированы основные результаты работы.

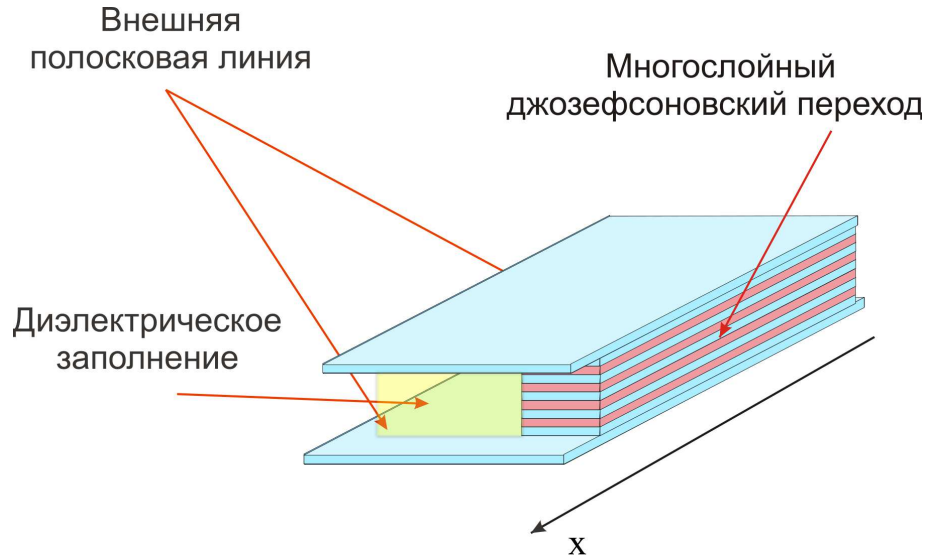


Рис. 2.1. Схематическое изображение джозефсоновской многослойной структуры, связанной с внешней полосковой линией

2.2. Основные уравнения. Учет влияния внешней волноведущей системы.

Рассмотрим многослойную структуру из распределенных джозефсоновских контактов, встроенную во внешнюю волноведущую систему. Для простоты в качестве волноведущей системы выберем полосковую линию. Схематическое изображение данной структуры показано на рис. 2.1.

Для описания динамики многослойных джозефсоновских структур обычно используется система уравнений типа синус-Гордона, дополненная членами, ответственными за связь между слоями. Данная связь обеспечивается различными механизмами, такими как магнитная связь [7, 8], зарядовая связь [15], квазичастичный разбаланс [18–21], и т. д. В настоящей работе мы используем модель с магнитной связью, в которой учтен поперечный квазичастичный ток через диэлектрическую прослойку и для простоты пренебрежено квазичастичным током в сверхпроводящих слоях [13, 14].

В предположении, что слоистая структура является однородной в том смысле, что ее параметры не зависят от номера слоя, выпишем описывающую ее систему уравнений [7, 8]

$$\sum_{m=1}^N K_{mn} \{ \partial_t^2 \theta_m + \gamma \partial_t \theta_m + \sin \theta_m - j \} = \partial_x^2 \theta_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

В данной системе θ_k — джозефсоновская разность фаз в k -м контакте структуры, символы $\partial_{t,x}$ обозначают соответственно частные производные по времени и координате, γ — коэф-

фициент затухания, j — плотность тока, втекающего в джозефсоновскую структуру из внешней волноведущей системы. Безразмерные время t и координата x нормированы соответственно на обратную джозефсоновскую плазменную частоту ω_J и джозефсоновскую длину λ_J , определенную как

$$\omega_J^2 = \frac{8\pi e d' j_c}{\hbar \epsilon} \quad \text{and} \quad \lambda_J = V_s / \omega_J,$$

где

$$V_s = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \left[\frac{d' \sinh t/\lambda}{d' \sinh t/\lambda + 2\lambda(\cosh t/\lambda - 1)} \right]^{1/2}$$

— скорость Свихарта, c — скорость света, d' и t' — толщины диэлектрического и сверхпроводящего слоев соответственно, λ — лондоновская глубина проникновения магнитного поля. Матрица $K_{k,l}$ размерности $N \times N$ с элементами

$$K_{ii} = 1 - 2s, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad K_{11} = K_{NN} = 1 - s \quad K_{i,i\pm 1} = s, \quad (2.2)$$

где

$$s = -\frac{\lambda}{d' \sinh t/\lambda + 2\lambda(\cosh t/\lambda - 1)},$$

характеризует магнитную связь между слоями джозефсоновской структуры. Специальный выбор элементов матрицы в виде (2.2) обусловлен двумя причинами. Во-первых, только при таком выборе возможно существование решения, устроенного одинаково во всех слоях и движущегося с постоянной скоростью. Во-вторых, как будет показано ниже, это условие позволяет легко найти собственные числа и собственные вектора матрицы (2.2), а значит, и легко диагонализировать ее.

Ток с плотностью j , втекающий из полосковой линии, определяется суммарным напряжением на джозефсоновской структуре $U = \partial_t \sum_k \theta_k$ соотношением $j = \hat{Y}U$, где \hat{Y} — проводимость внешней электродинамической системы, и внешним током смещения j_{ext} , прикладываемым к краю полосковой линии

$$j = \hat{H}j_{ext} - \hat{G} \sum_{k=1}^N \theta_k. \quad (2.3)$$

Здесь \hat{G} — оператор, связывающий ток с суммой разностей джозефсоновских фаз, и пропорциональный проводимости электродинамической системы $\hat{Y} = \partial_t \hat{G}$. Оператор \hat{H} описывает растекание тока по полосковой линии.

Выведем выражения для операторов \hat{G} и \hat{H} для случая, когда внешняя электродинамическая система является полосковой линией. При выводе мы будем следовать процедуре, описанной в главе 1 настоящей работы, а также в [A1], [36, 41]. Введем систему

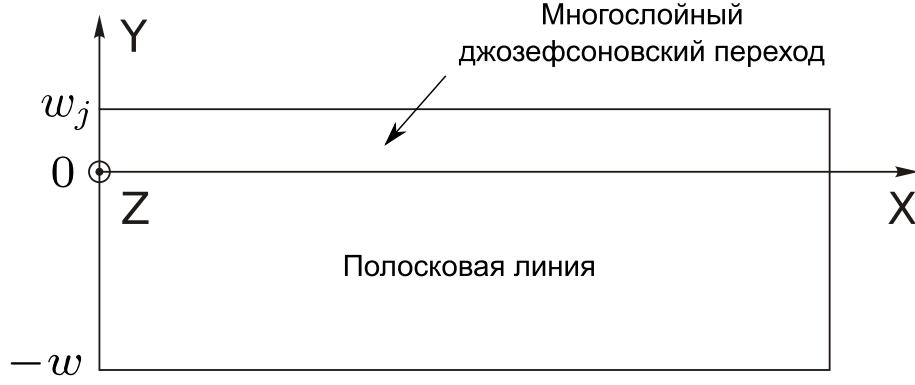


Рис. 2.2. К выводу системы уравнений (2.14). Вид сверху на многослойную структуру, соединенную с полосковой линией. Показана система координат.

декартовых координат как показано на рис. 2.2. Распределения тока $\mathbf{I}(x, y, t)$ и напряжения $U(x, y, t)$ в полосковой линии описываются обычными телеграфными уравнениями

$$L \partial_t \mathbf{I} + \nabla U = 0 \quad (2.4)$$

$$C \partial_t U + \text{div} \mathbf{I} = 0, \quad (2.5)$$

где L, C — безразмерные индуктивность и емкость полосковой линии на единицу площади, нормированные на соответствующие величины в джозефсоновских контактах. Вводя новую переменную ψ с помощью соотношения $U = \partial_t \psi$, мы приходим к выражению для тока $\mathbf{I} = L^{-1} \nabla \psi$ и двумерному волновому уравнению для ψ

$$v^{-2} (\partial_t^2 + \Gamma \partial_t) \psi - \partial_x^2 \psi - \partial_y^2 \psi = 0, \quad (2.6)$$

где v и Γ — соответственно безразмерная скорость и затухание электромагнитных волн в полосковой линии. На границах полосковой линии со свободным пространством $y = -w$ и с джозефсоновской многослойной структурой $y = 0$ справедливы условия непрерывности тока и напряжения

$$L^{-1} \partial_y \psi|_{y=-w} = j_e w_j, \quad L^{-1} \partial_y \psi|_{y=0} = j w_j, \quad \psi|_{y=0} = \sum_{k=1}^N \theta_k. \quad (2.7)$$

Мы предполагаем, что внешний ток прикладывается к краю $y = -w$ полосковой линии. Решив линейное уравнение (2.6) с граничными условиями (2.7), мы найдем связь тока j , втекающего в многослойную структуру, с джозефсоновскими фазами θ_k . Для решения уравнения (2.6) воспользуемся преобразованием Фурье

$$\psi(x, y, t) = \int e^{-i\omega t + iqx} \psi_{\omega, q}(y) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dq}{2\pi}, \quad (2.8)$$

сводящим данное уравнение к одномерному дифференциальному уравнению для $\psi_{\omega,q}(y)$

$$\partial_y^2 \psi - \varkappa^2 \psi = 0, \quad (2.9)$$

где мы ввели обозначение $\varkappa(\omega, q) = \sqrt{q^2 - \omega(\omega + i\Gamma)/v^2}$ и опустили для краткости индексы ω, q . Общее решение уравнения (2.9) мы записываем в виде

$$\psi = A \cosh \varkappa(y + w) + B \sinh \varkappa(y + w), \quad (2.10)$$

откуда, удовлетворяя граничным условиям (2.7) и находя A, B , приходим к соотношениям

$$j(\omega, q) = H(\omega, q)j_e(\omega, q) - G(\omega, q) \sum_{k=1}^N \theta_k(\omega, q), \quad (2.11)$$

выражающим зависимость тока j , втекающего в джозефсоновскую структуру, от суммы разностей фаз $\sum \theta_k$ и тока j_e , подаваемого к краю полосковой линии. Функции $G(\omega, q), H(\omega, q)$ определяются следующим образом

$$H(\omega, q) = \frac{1}{\cosh \varkappa w}, \quad G(\omega, q) = \frac{w}{w_j L} \frac{\varkappa}{w} \tanh \varkappa w. \quad (2.12)$$

Возвращаясь в (2.12) в (x, t) -представление с помощью обратного Фурье-преобразования, мы находим выражение для $j(x, t)$ через $j_e(x, t)$ и $\sum \theta_k(x, t)$. Заметим, что для случая узкой полосковой линии, когда выполнено условие $\varkappa w \ll 1$, оператор \hat{H} обращается в единицу, а оператор \hat{G} — в волновой оператор

$$\hat{G} = \alpha(v^{-2}\partial_t^2 + v^{-2}\Gamma\partial_t - \partial_x^2). \quad (2.13)$$

Параметр $\alpha = w/(w_j L)$ определяет силу связи между джозефсоновской сверхрешеткой и внешней полосковой линией. Далее мы будем пользоваться выражением (2.13) для оператора \hat{G} .

Таким образом, джозефсоновская многослойная структура, связанная с внешней полосковой линией, описывается следующей системой уравнений

$$\sum_{m=1}^N K_{mn} \{ \partial_t^2 \theta_m + \gamma \partial_t \theta_m + \sin \theta_m - j_e + \hat{G} \sum_k \theta_k \} = \partial_x^2 \theta_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.14)$$

где оператор \hat{G} определяется соотношением (2.13). Уравнения, описывающие внутренние связи другой природы, например, зарядовую и квазичастичную связи, и учитывающие нормальный ток вдоль слоев, могут быть выведены аналогичным способом.

2.3. Анализ устойчивости прямоугольной вихревой решетки

В данном разделе описано аналитическое исследование устойчивости решения системы уравнений (2.14), соответствующего синфазному режиму движения вихрей в системе.

Система (2.14) имеет решение в виде прямоугольной вихревой решетки (рис. 9, б), которое в пределе большого внешнего магнитного поля можно записать в виде

$$\theta^0 = h(x - ut) + \text{Im} \frac{e^{i(x-ut)}}{L}, \quad (2.15)$$

где h — безразмерное внешнее магнитное поле и

$$L = -h^2[(1 - u^2) + \alpha N(1 - u^2/c_e^2)] + i h u \gamma_e. \quad (2.16)$$

При этом скорость движения вихревой решетки u зависит от внешнего тока посредством условия энергетического баланса [4]

$$j_e + h u \gamma_e = \frac{1}{2} \text{Im} \frac{1}{L}. \quad (2.17)$$

Еще раз отметим, что решение в виде (2.15) существует только при условии специального выбора элементов матрицы \hat{K} (2.2).

Для исследования устойчивости решения θ^0 будем искать решение системы (2.14) в виде

$$\theta_n(x, t) = \theta^0 + \psi_n(x, t), \quad (2.18)$$

где $|\psi_n| \ll 1$. Система уравнений для возмущений ψ_n запишется в следующем виде

$$\partial_x^2 \psi_n = \sum_{m=1}^N K_{mn} (\partial_t^2 \psi_n + \gamma \partial_t \psi_n + \cos \theta^0 \psi_n + \hat{G} \sum_{k=1}^N \psi_k), \quad (2.19)$$

где $\cos \theta^0 \approx \cos h(x - ut) - \text{Re}(1 - \exp 2ik(x - ut))/2L$.

Выбор элементов матрицы \hat{K} в виде (2.2) позволяет применить cos-преобразование для ее диагонализации. Применяя cos-преобразование

$$\psi_n = N^{-1} (\chi_1 + 2 \sum_{q=2}^N \chi_q \cos(n - \frac{1}{2})(q - 1) \frac{\pi}{N}), \quad (2.20a)$$

$$\chi_q = \sum_{n=1}^N \psi_n \cos(n - \frac{1}{2})(q - 1) \frac{\pi}{N} \quad (2.20b)$$

к системе уравнений (2.19), получаем N независимых уравнений для χ_q

$$(1 + \alpha N) \partial_x^2 \chi_1 = (1 + \frac{\alpha N}{c_e^2}) \partial_t^2 \chi_1 + \gamma_e \partial_t \chi_1 + \cos \theta^0 \chi_1, \quad (2.21a)$$

$$v_q^2 \partial_x^2 \chi_q = \partial_t^2 \chi_q + \gamma \partial_t \chi_q + \cos \theta^0 \chi_q, \quad q = 2, \dots, N. \quad (2.21b)$$

Уравнения (2.21a) и (2.21b) — гиперболического типа. Уравнение (2.21a) описывает эволюцию возмущений, устроенных одинаково во всех слоях, т. е. симметричных возмущений. Характеристическая скорость в уравнении (2.21a)

$$v_1^2 = \frac{1 + \alpha N}{1 + \alpha N/c_e^2} \quad (2.22)$$

зависит от параметров внешней полосковой линии. Остальные $N - 1$ уравнений (2.21b) описывают эволюцию асимметричных возмущений. Характеристические скорости асимметричных возмущений описываются формулой

$$v_q^2 = \frac{1}{1 - 2s(1 - \cos(q-1)\pi/N)}, \quad q = 2, \dots, N. \quad (2.23)$$

Изменяя параметры внешней полосковой линии, мы можем управлять характеристиче-

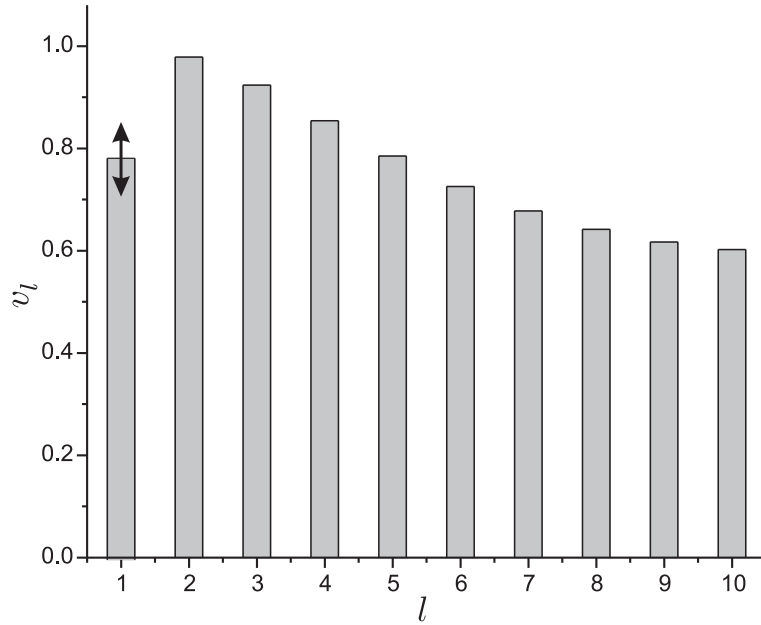


Рис. 2.3. Спектр характеристических скоростей линейных возмущений для случая $N = 10$. Изменяя параметры внешней полосковой линии, мы можем управлять характеристической скоростью симметричных возмущений v_1 , не затрагивая скоростей других мод.

ской скоростью симметричных возмущений v_1 , в то время как характеристические скорости асимметричных возмущений $v_q, q = 2, \dots, N$ будут оставаться неизменными. На рис. 2.3 показан спектр характеристических скоростей линейных мод. Благодаря тому, что система уравнений для возмущений распалась на N независимых, мы можем исследовать устойчивость решения θ^0 по отношению к каждому типу возмущений χ_q в отдельности. Для исследования устойчивости будем пользоваться методом, описанным в [A2].

2.3.1. Симметричные возмущения

Сначала займемся исследованием устойчивости решения по отношению к симметричным возмущениям χ_1 , которые описываются уравнением (2.21a). Для решения (2.21a) мы будем использовать преобразование Лоренца со скоростью, не превышающей v_1 , поскольку оно не меняет вид волнового оператора $v_1^2 \partial_x^2 - \partial_t^2$. В зависимости от того, как соотносятся v_1 и скорость решения u , мы будем переходить в систему отсчета, в которой параметр в уравнении (2.21a) зависит или только от координаты (при $u < v_1$), или только от времени ($u > v_1$).

«Досветовой» случай

Рассмотрим сначала случай $0 < u < v_1$. Сделаем в уравнении (2.21a) преобразование Лоренца (с изменением масштабов координаты и времени)

$$\xi = \frac{h}{2}(x - ut), \quad (2.24a)$$

$$\tau = \frac{h}{2}\left(t - \frac{u}{v_1^2}x\right). \quad (2.24b)$$

Уравнение в новых переменных записывается в виде

$$\chi_{1\xi\xi} - v_1^{-2}\chi_{1\tau\tau} = \frac{2}{h} \frac{\gamma_e}{1 + \alpha N} \frac{1}{1 - u^2/v_1^2} (\chi_{1\tau} - u\chi_{1\xi}) + \frac{4}{h^2} \frac{1}{1 - u^2/v_1^2} \frac{1}{1 + \alpha N} \left(\cos 2\xi - \frac{1}{2}\text{Re}\frac{1}{L}\right)\chi_1. \quad (2.25)$$

В этом уравнении параметр зависит только от новой координаты ξ . Поскольку коэффициенты в уравнении (2.25) не зависят от τ , то можно разложить χ_1 в интеграл Фурье и переписать уравнение в виде

$$\tilde{\chi}'' + \frac{\omega^2}{v_1^2}\tilde{\chi} = \frac{2}{h} \frac{\gamma_e}{1 + \alpha N} \frac{1}{1 - u^2/v_1^2} (-i\omega\tilde{\chi} - u\tilde{\chi}') + \frac{4}{h^2} \frac{1}{1 - u^2/v_1^2} \frac{1}{1 + \alpha N} \left[\cos 2\xi - \frac{1}{2}\text{Re}\frac{1}{L}\right]\tilde{\chi}, \quad (2.26)$$

где $\theta(\omega, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1(\tau, \xi) \exp(i\omega\tau) d\tau$. Перепишем это уравнение в других обозначениях

$$\theta'' + 2\delta\theta' - \mu \cos 2\xi \cdot \theta = \Omega^2\theta, \quad (2.27)$$

где $\mu = 4h^{-2}(1 - u^2/v_1^2)^{-1}(1 + \alpha N)^{-1}$, $\delta = h^{-1}\gamma_e(1 + \alpha N)^{-1}u(1 - u^2/v_1^2)^{-1}$, $\Omega^2 = \omega^2 v_1^{-2} + 2i\omega\delta u^{-1} + (\mu/2)\text{Re}L^{-1}$. Решение этого уравнения, согласно теореме Блоха, имеет вид $\theta(\xi) = U_{\varkappa}(\xi) \exp i\kappa\xi$, где $U_{\varkappa}(\xi)$ — функция с периодом π и \varkappa — квазиимпульс. Рассматривая параметр μ в этом уравнении как малое возмущение, замечаем, что решение вдали от

брэгговских резонансов имеет вид гармонической функции и спектр собственных значений таков

$$\Omega^2(\varkappa) = \varkappa^2 - 2i\delta. \quad (2.28)$$

Вблизи середины первой зоны Бриллюэна ищем решение в виде

$$\theta(\xi) = e^{i\varkappa\xi}(\theta_0 + \theta_2 e^{2i\xi} + \theta_{-2} e^{-2i\xi}), \quad (2.29)$$

где $\theta_{0,\pm 2}$ — константы. Спектр собственных значений приближенно равен

$$\Omega^2 = \varkappa^2 - 2i\delta - \frac{\mu^2}{8} \frac{1}{1 - (\varkappa - i\delta)^2}. \quad (2.30)$$

Вблизи края первой зоны Бриллюэна ищем решение в виде

$$\theta(\xi) = e^{i\varkappa\xi}(\theta_1 e^{i\xi} + \theta_{-1} e^{-i\xi}), \quad (2.31)$$

где $\theta_{\pm 1}$ — константы. Спектр собственных значений имеет вид

$$\Omega_{1,2}^2 = 1 + \varkappa^2 - 2i\delta \pm 2\sqrt{(\varkappa - i\delta)^2 + \frac{\mu^2}{16}}. \quad (2.32)$$

Зависимость собственных значений ω от квазиимпульса \varkappa показана на рис. 2.4. Из это-

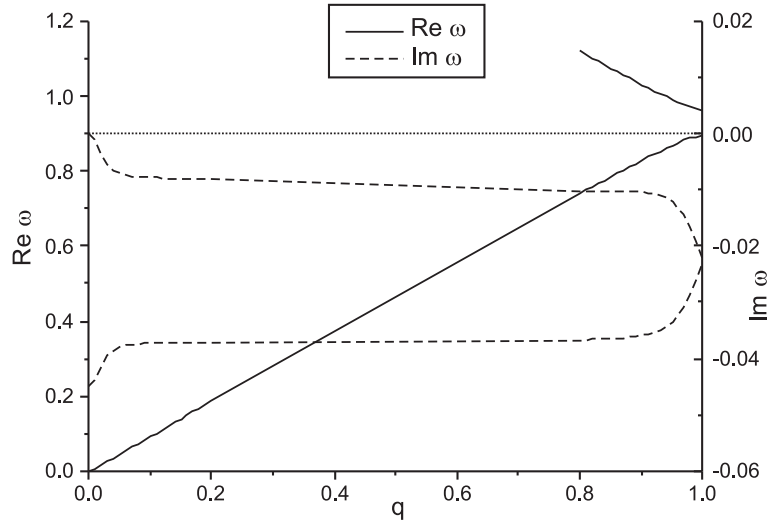


Рис. 2.4. Спектр $\omega(\varkappa)$ собственных симметричных возмущений в «досветовом» случае

го рисунка видно, что ни при каком значении \varkappa мнимая часть частоты ω не принимает положительных значений, следовательно, не существует собственных решений, экспоненциально растущих во времени. Таким образом, прямоугольная вихревая решетка в «досветовом» случае является устойчивой по отношению к симметричным возмущениям.

«Сверхсветовой» случай

Теперь рассмотрим случай $u > v_1$. Как и раньше, сделаем в уравнении (2.21a) преобразование Лоренца, но теперь со скоростью v_1^2/u (которая, очевидно, меньше v_1)

$$\xi = \frac{hu}{2}\left(x - \frac{v_1^2}{u}t\right), \quad (2.33a)$$

$$\tau = \frac{hu}{2}\left(t - \frac{x}{u}\right). \quad (2.33b)$$

Уравнение в новых переменных приобретает вид

$$v_1^2 \chi_{1\xi\xi} - \chi_{1\tau\tau} = \frac{2}{h} \frac{\gamma_e}{1 + \alpha N} \frac{u}{u^2/v_1^2 - 1} \left(\chi_{1\tau} - \frac{v_1^2}{u} \chi_{1\xi}\right) + \frac{4}{h^2} \frac{1}{u^2/v_1^2 - 1} \frac{1}{1 + \alpha N} \left(\cos 2\tau - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{L}\right) \chi_1. \quad (2.34)$$

В этом уравнении параметр зависит только от нового времени τ . Разложим возмущение χ_1 в интеграл Фурье по ξ и получим уравнение

$$-k^2 v_1^2 \tilde{\chi} - \tilde{\chi}'' = \frac{2}{h} \frac{\gamma_e}{1 + \alpha N} \frac{u}{u^2/v_1^2 - 1} \left(\tilde{\chi}' - \frac{v_1^2}{u} ik \tilde{\chi}\right) + \frac{4}{h^2} \frac{1}{u^2/v_1^2 - 1} \frac{1}{1 + \alpha N} \left(\cos 2\tau - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{L}\right) \tilde{\chi}, \quad (2.35)$$

где $\theta(k, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1(\xi, \tau) \exp(-ik\xi) d\xi$. Перепишем это уравнение в других обозначениях

$$\theta'' + 2\delta\theta' + \mu \cos 2\tau = -Q^2\theta, \quad (2.36)$$

где $\mu = 4h^{-2}(u^2/v_1^2 - 1)^{-1}(1 + \alpha N)^{-1}$, $\delta = h^{-1}\gamma_e(1 + \alpha N)^{-1}u(u^2/v_1^2 - 1)^{-1}$, $Q^2 = k^2v_1^2 - 2ik\delta v_1^2 u^{-1} - \mu/2\operatorname{Re}L^{-1}$.

Решение этого уравнения имеет вид $\theta(\tau) = U_\varepsilon(\tau) \exp i\varepsilon\tau$, где $U_\varepsilon(\tau)$ — функция с периодом π и ε — квазиэнергия. Действуя так же, как и в досветовом случае, получаем спектр собственных значений вдали от брэгговских резонансов

$$Q^2 = \varepsilon^2 + 2i\delta\varepsilon, \quad (2.37)$$

вблизи середины первой зоны Бриллюэна

$$Q^2 = \varepsilon^2 + 2i\delta\varepsilon - \frac{\mu^2}{8} \frac{1}{1 - (\varepsilon + i\delta)^2}, \quad (2.38)$$

и вблизи края первой зоны Бриллюэна

$$\varepsilon_{1,2}^2 + 2i\delta\varepsilon = 1 + Q^2 \pm 2\sqrt{Q^2 + \frac{\mu^2}{16}}. \quad (2.39)$$

Если скорость u ненамного больше v_1 , качественный вид спектра квазиэнергии ε в зависимости от волнового числа k выглядит как на рис. 2.5. Из графика видно, что существует

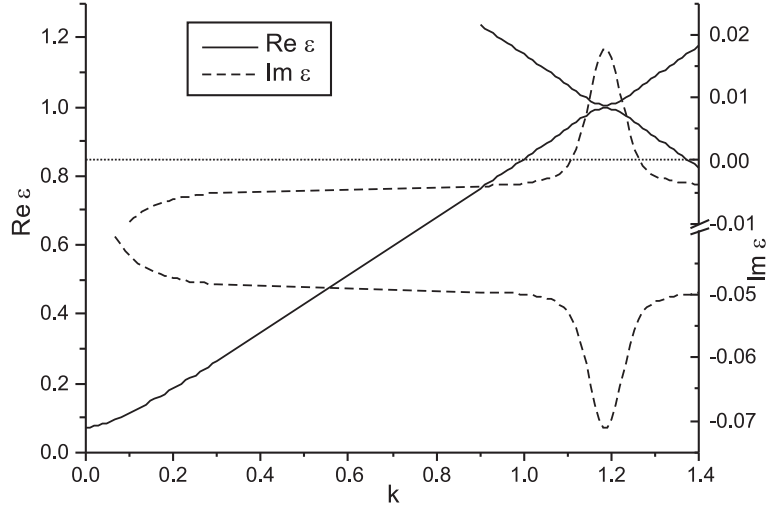


Рис. 2.5. Спектр $\varepsilon(k)$ собственных возмущений в «сверхсветовом» случае при $v_1 < u < v^*$.

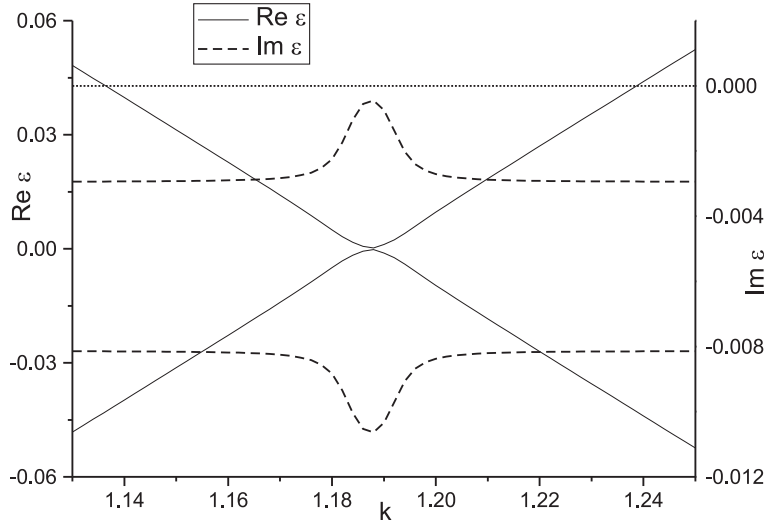


Рис. 2.6. Участок спектра $\varepsilon(k)$ собственных возмущений вблизи края зоны Бриллюэна в «сверхсветовом» случае при $u > v^*$.

область значений k , при которых мнимая часть квазиэнергии положительна. Это означает, что при $u > v_1$ синфазный режим неустойчив. Поскольку периодический коэффициент в уравнении (2.35) зависит только от времени, данная неустойчивость является параметрической.

Из формулы (2.39) следует, что при увеличении скорости u решения качественного вид спектра $\varepsilon(k)$ меняется. Участок спектра, соответствующий окрестности первой зоны Бриллюэна, показан на рис. 2.6. Из него видно, что область значений k , соответствующая $\text{Im} \varepsilon > 0$, исчезла. Это соответствует подавлению параметрической неустойчивости. В работе [A2] показано, что это подавление происходит при условии $hu\gamma \gtrsim 1$. Отсюда следует

оценка скорости, при превышении которой параметрическая неустойчивость подавляется

$$v^* \simeq (h\gamma)^{-1}. \quad (2.40)$$

Таким образом, при $v_1 < u < v^*$ решение, описывающее синфазный режим, параметрически неустойчиво по отношению к симметричным возмущениям, а при $u > v^*$ прямоугольная решетка приобретает устойчивость благодаря подавлению параметрической неустойчивости.

2.3.2. Асимметричные возмущения

Оставшиеся $N-1$ уравнений (2.21b) для асимметричных возмущений $\chi_q, q = 2, \dots, N$ имеют такую же структуру, как (2.21a), поэтому анализируются аналогично уравнению (2.21a) для симметричных возмущений. Характеристической скоростью уравнений (2.21b) являются $v_q, q = 2, \dots, N$. В «досветовом» случае ($u < v_q$) уравнение (2.21b) сводится к уравнению (2.27) с параметрами

$$\mu = 4h^{-2}(v_q^2 - u^2)^{-1}, \quad (2.41)$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{v_q^2} + i\omega \frac{2\delta}{u} + \frac{\mu}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{L}, \quad (2.42)$$

$$\delta = \frac{1}{h} \frac{\gamma u}{v_q^2 - u^2}, \quad (2.43)$$

а в «сверхсветовом» случае — к уравнению (2.36) с параметрами

$$\mu = 4h^{-2}(u^2 - v_q^2)^{-1}, \quad (2.44)$$

$$Q^2 = k^2 v_q^2 + ik \frac{2\delta v_q^2}{u} + \frac{\mu}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{L}, \quad (2.45)$$

$$\delta = \frac{1}{h} \frac{\gamma u}{u^2 - v_q^2}. \quad (2.46)$$

Решения уравнений (2.27) и (2.36) и спектры возмущений описываются формулами (2.28, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32) и (2.37, 2.38, 2.39) (с учетом новых выражений для параметров).

Анализируя спектр собственных частот $\omega(\varkappa)$ в «досветовом» случае, мы приходим к следующему результату. При условии, что симметричные возмущения являются самыми медленными в системе ($v_1 < v_q, q = 2, \dots, N$), качественный вид спектра $\omega(\varkappa)$ зависит от скорости вихревой решетки u . Существует пороговое значение скорости v' , и если $u < v'$, то спектр имеет вид, показанный на рис. 2.7. При малых значениях \varkappa наблюдается область положительных значений $\operatorname{Im}\omega$, свидетельствующих о наличии длинноволновых

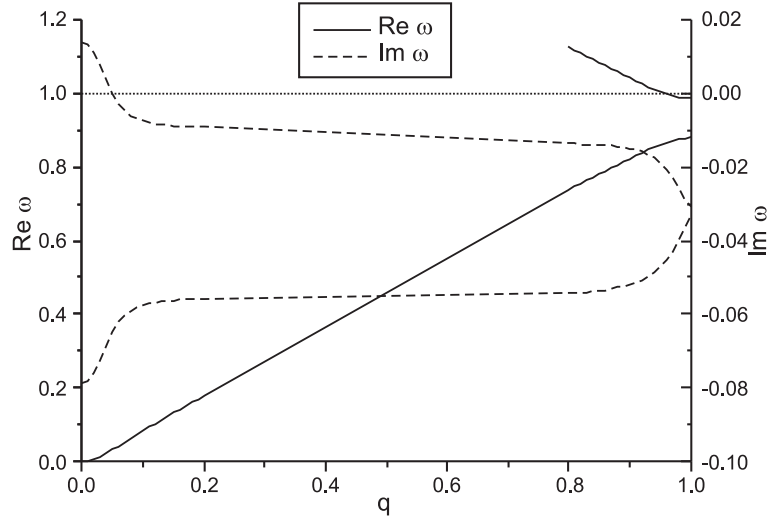


Рис. 2.7. Спектр $\omega(q)$ собственных асимметричных возмущений в «досветовом» случае при $u < v'$

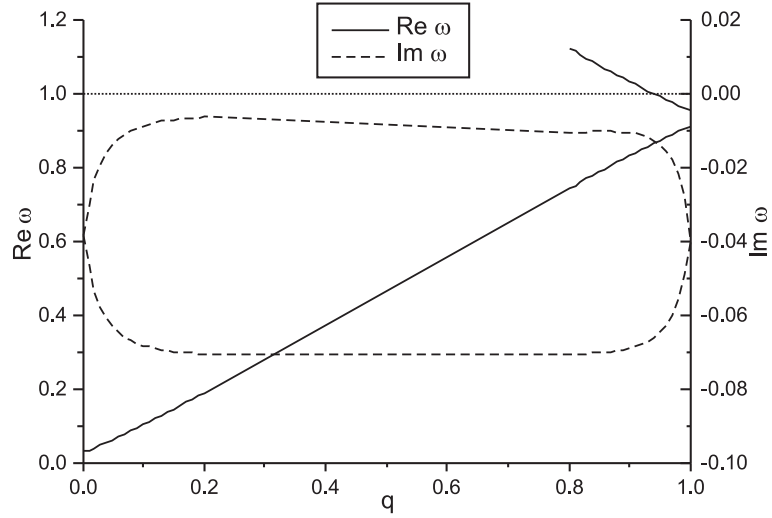


Рис. 2.8. Спектр $\omega(q)$ собственных асимметричных возмущений в «досветовом» случае при $u > v'$

неустойчивостей в системе. Таким образом, прямоугольная вихревая решетка неустойчива при $u < v'$ — вихревые цепочки в соседних слоях сдвигаются друг относительно друга, формируя решетку, отличную от прямоугольной. Если же скорость вихревой решетки превышает пороговую ($u > v'$), то спектр $\omega(q)$ приобретает другой вид (рис. 2.8). В этом случае все собственные возмущения в системе являются затухающими, и прямоугольная вихревая решетка устойчива по отношению к асимметричным возмущениям. Пороговое значение v' , при которой происходит смена знака $\text{Im}\omega$, может быть найдено аналитически в пределе малого затухания

$$v'^2 = v_1^2 - \frac{(v_{min}^2 - v_1^2)(v_1^2 - c_e^2)}{1 - v_1^2}, \quad (2.47)$$

где v_{min} — наименьшая из характеристических скоростей асимметричных мод $v_q, q =$

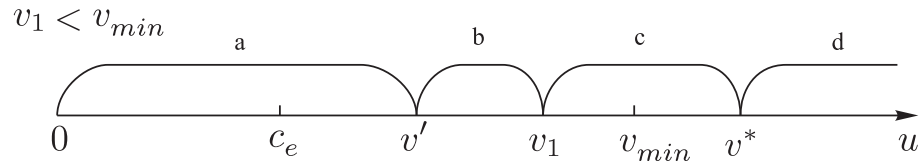


Рис. 2.9. Диаграмма устойчивости синфазного режима при $v_1 < v_{min}$. Буквами обозначены: а — область длинноволновой неустойчивости, б — область абсолютной устойчивости, с — область параметрической неустойчивости, д — область с подавленной параметрической неустойчивостью.

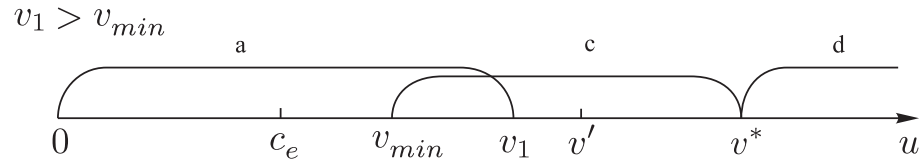


Рис. 2.10. Диаграмма устойчивости синфазного режима при $v_1 > v_{min}$. Обозначения различных областей устойчивости как на рис. 2.9

$2, \dots, N$. Из этой формулы очевидно, что значение v' попадает в область устойчивости синфазного режима по отношению к симметричным возмущениям $0 < u < v_1$ при условии $v_1 < v_q, q = 2, \dots, N$. Это означает, что только при этом условии имеется область скоростей $v' < u < v_1$, при которой прямоугольная вихревая решетка является устойчивой по отношению ко всем возмущениям в системе.

В «сверхсветовом» случае спектр квазиэнергии асимметричных возмущений, так же как и для симметричных возмущений, зависит от скорости решения. При $v_q < u < v^*, q = 2, \dots, N$ вид спектра качественно совпадает с изображенным на рис. 2.5, то есть имеет место параметрическая неустойчивость решения. При $u > v^*$ участок спектра вблизи края зоны Бриллюэна выглядит как на рис. 2.6, и параметрическая неустойчивость синфазного режима по отношению к асимметричным возмущениям оказывается подавленной.

2.3.3. Вывод

Суммируя аналитические результаты, полученные выше, мы приходим к следующему выводу. При условии, что симметричная мода является самой медленной, устойчивость синфазного режима зависит от скорости решетки как показано на рис. 2.9. При скорости решетки $0 < u < v'$ синфазный режим неустойчив по отношению к длинноволновым возмущениям, что приводит к формированию треугольной вихревой решетки. При скорости $v' < u < v_1$ синфазный режим устойчив по отношению ко всем возмущениям в системе. При $u > v_1$ в системе развивается коротковолновая параметрическая неустойчивость,

которая, однако, подавляется при дальнейшем увеличении скорости. Если же симметричная мода не является самой медленной в системе, то, как показано на рис. 2.10, область абсолютной устойчивости синфазного режима исчезает, а области длинноволновой и параметрической неустойчивостей перекрываются. Таким образом, при этом синфазный режим является неустойчивым до тех пор, пока скорость решения недостаточно велика для подавления параметрической неустойчивости.

2.4. Численный эксперимент

В предыдущем разделе мы аналитически показали, что синфазный режим движения вихревой решетки может быть устойчив при определенных условиях. С точки зрения приложений было бы интересно выяснить, устанавливается ли этот режим спонтанным образом при изменении параметров системы. Чтобы это проверить, недостаточно пользоваться линейной теорией возмущений, а необходимо решать нелинейную задачу. Для этого мы провели численный эксперимент, методика и результаты которого описаны ниже. Кроме того, с помощью численного моделирования оказывается возможным выяснить, к каким изменениям наблюдаемой картины полей приводит развитие неустойчивостей в системе.

2.4.1. Методика

Кратко опишем методику численного эксперимента. Для простоты система предполагается замкнутой в кольцо длиной L . Это означает, что фаза в каждом контакте удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\theta_n(L) = \theta_n(0) + 2\pi R_n, \quad (2.48)$$

где R_n — число вихрей в n -м контакте стека. Вводя новые переменные $\phi_n(x) = \theta_n(x) - 2\pi R_n x/L$, удовлетворяющие периодическим граничным условиям $\phi_n(L) = \phi_n(0)$, мы приходим к следующей системе уравнений для ϕ_n

$$\sum_{m=1}^N K_{mn} \left\{ \partial_t^2 \phi_m + \gamma \partial_t \phi_m + \sin\left(\phi_m + \frac{2\pi R_m}{L} x\right) - j + \hat{G} \sum_{k=1}^N \phi_k \right\} = \partial_x^2 \phi_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.49)$$

Применяя к этой системе \cos -преобразование (2.20a), (2.20b), получаем

$$(1 + \alpha N) \partial_x^2 \psi_1 = \left(1 + \frac{\alpha N}{c_e^2}\right) \partial_t^2 \psi_1 + \gamma_e \partial_t \psi_1 + f_1 - Nj, \quad (2.50a)$$

$$v_q^2 \partial_x^2 \psi_q = \partial_t^2 \psi_q + \gamma \partial_t \psi_q + f_q, \quad q = 2, \dots, N, \quad (2.50b)$$

где f_q — связаны cos-преобразованием (2.20a), (2.20b) с $\sin(\phi_m + 2\pi R_m x/L)$. Применяя затем к полученной системе Фурье-преобразование по координате, получаем систему уравнений в обыкновенных производных по времени

$$-k^2(1 + \alpha N)\tilde{\psi}_{1,k} = \left(1 + \frac{\alpha N}{c_e^2}\right)\ddot{\tilde{\psi}}_{1,k} + \gamma_e \dot{\tilde{\psi}}_{1,k} + \tilde{f}_{1,k} - NLj\delta(k), \quad (2.51a)$$

$$-k^2 v_q^2 \tilde{\psi}_{q,k} = \ddot{\tilde{\psi}}_{q,k} + \gamma \dot{\tilde{\psi}}_{q,k} + \tilde{f}_{q,k}. \quad (2.51b)$$

Для вычисления Фурье-преобразования используется стандартный алгоритм быстрого преобразования Фурье (FFT). Полученную систему уравнений мы сводим к системе уравнений первого порядка по времени и решаем последнюю методом Рунге-Кутты 4-го порядка. В результате решения этой системы мы построили вольт-амперную характеристику (рис. 2.11) и распределения поля θ_{qx} в зависимости от координаты x и номера слоя n .

2.4.2. Результаты

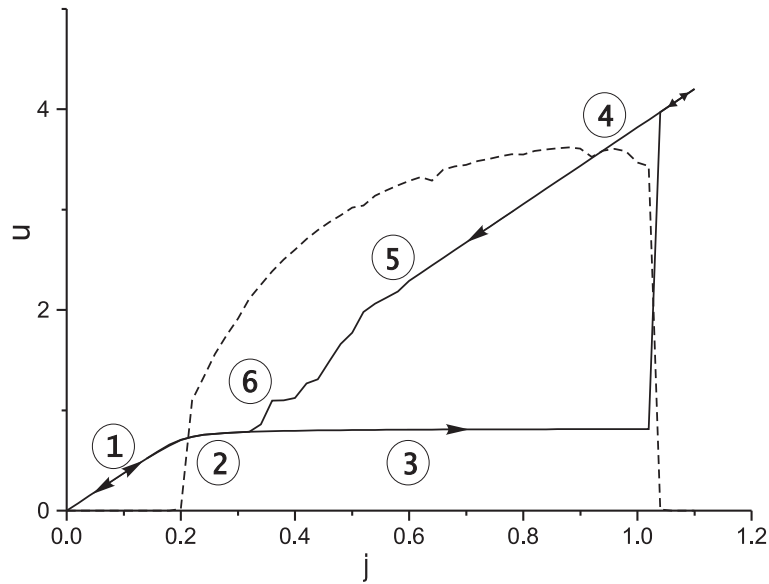


Рис. 2.11. ВАХ системы из четырех слоев. Параметры см. в тексте. Цифрами обозначены участки ВАХ, соответствующие разным режимам движения вихрей (см. рис. 2.12-2.17). Пунктирной линией показана зависимость амплитуды первой гармоники напряжения на стеке в зависимости от внешнего тока.

На рис. 2.11 показана ВАХ, найденная нами в результате численного эксперимента. Мы измеряли скорость вихревой решетки в зависимости от тока смещения j , который менялся в интервале от 0 до 1.1 с шагом 0.02 туда и обратно. При расчете были использованы следующие значения параметров: число слоев $N = 4$, число квантов потока в слое

$R = 10$, длина системы $L = 24$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $\Gamma = 0$, $s = -0.07$, $c_e = 0.6$. Параметры системы подобраны так, чтобы характеристическая скорость симметричной моды v_1 была меньше всех характеристических скоростей асимметричных мод v_q , $q = 2, \dots, N$.

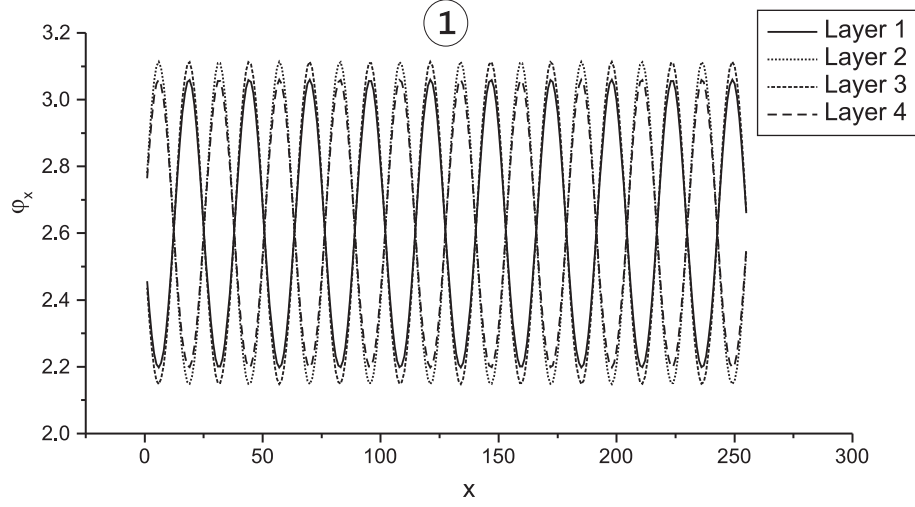


Рис. 2.12. Распределение поля θ_{nx} , $n = 1, \dots, 4$ в зависимости от координаты при $j = 0$. Вихри образуют треугольную вихревую решетку. Здесь и на следующих рис. цифра над графиком обозначает участок ВАХ, на котором имеет место данное распределение поля (см. рис. 2.11).

Рассмотрим ВАХ системы из четырех слоев (рис. 2.11). При $j = 0$ (в начале измерения) устанавливается статическая треугольная вихревая решетка (рис. 2.12). В точке $j = 0.22$ происходит переход к синфазному режиму (рис. 2.13). Скорость вихревой решетки в этой точке ВАХ равна примерно $u = 0.737$, что хорошо согласуется с аналитической формулой (2.47). Как показано на рис. 2.11, амплитуда первой гармоники в синфазном режиме резко возрастает. Заметим, что амплитуда осцилляций поля составляет примерно половину от среднего значения поля (рис. 2.13), что говорит о высокой эффективности АС/DC преобразования в этом режиме. При дальнейшем ходе ВАХ (по flux-flow ступеньке) качественная картина распределения поля не меняется, за исключением того, что вихри испытывают Лоренцево сокращение (рис. 2.14), и коэффициент АС/DC преобразования остается высоким вплоть до точки перехода на резистивную ветвь. При $j = 1$ система переходит в состояние с быстрым ростом фазы. Картина распределения поля в стеке при этом качественно не меняется, но амплитуда первой гармоники напряжения резко падает (рис. 2.11 и 2.15). При обратном ходе по резистивной ветви ВАХ амплитуда осцилляций постепенно повышается с сохранением синфазного режима. В точке $j = 0.6$ ВАХ испытывает небольшой излом. Распределение полей в этой точке обладает нарушен-

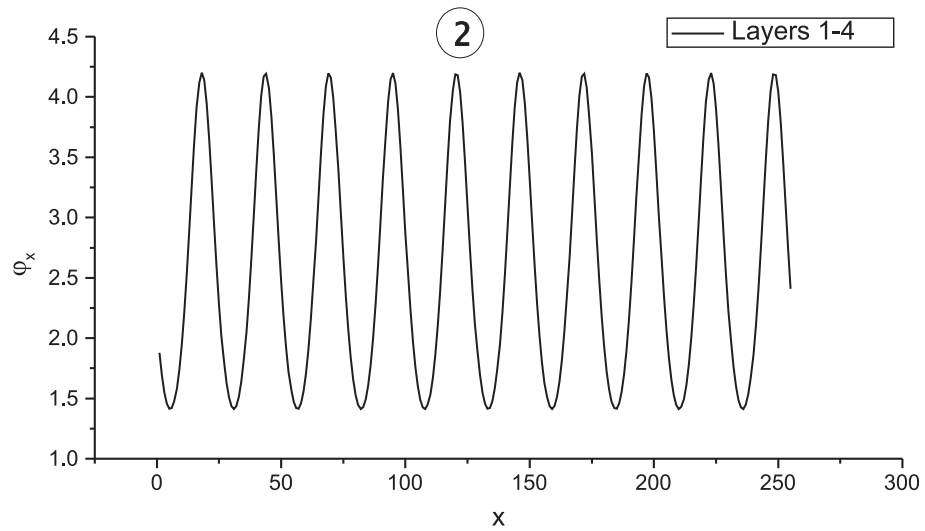


Рис. 2.13. Распределение поля $\theta_{nx}, n = 1, \dots, 4$ в зависимости от координаты при $j = 0.22$. Синфазный режим с большой амплитудой переменной составляющей поля.

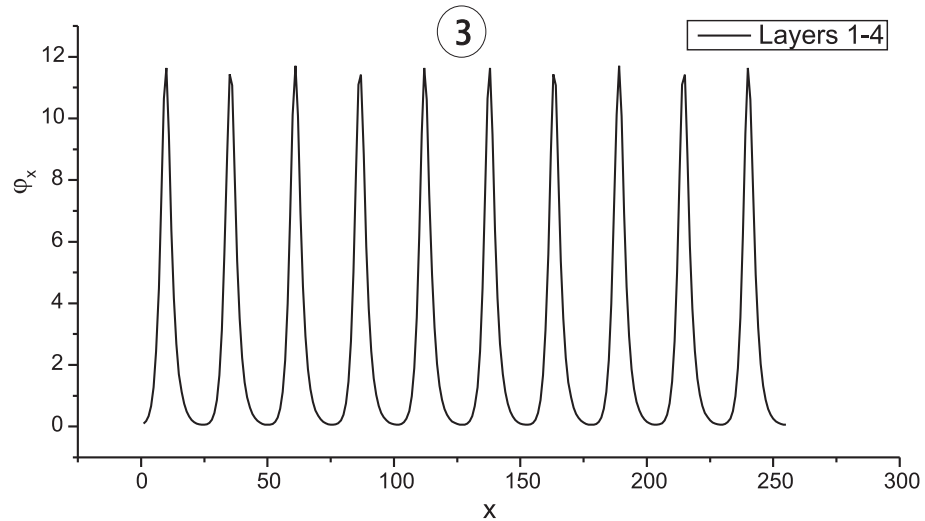


Рис. 2.14. Распределение поля $\theta_{nx}, n = 1, \dots, 4$ в зависимости от координаты при $j = 0.6$. Лоренцево сокращение джозефсоновских вихрей.

ной периодичностью (рис. 2.16), что объясняется развитием неустойчивостей в системе. При дальнейшем уменьшении тока смещения j амплитуда осцилляций растет. В точке $j = 0.36$ из картины распределения полей (рис. 2.17) отчетливо видно, что распределение имеет 12 максимумов, хотя в каждый контакт стека заключено по 10 квантов магнитного потока. Это означает, что в результате развития коротковолновых неустойчивостей произошло рождение пары вихрь-антивихрь. По мере дальнейшего уменьшения j происходит аннигиляция пары, установление синфазного режима, возврат на flux-flow ступеньку, и, после прохождения точки $u = v'$, синфазный режим сменяется треугольной решеткой.

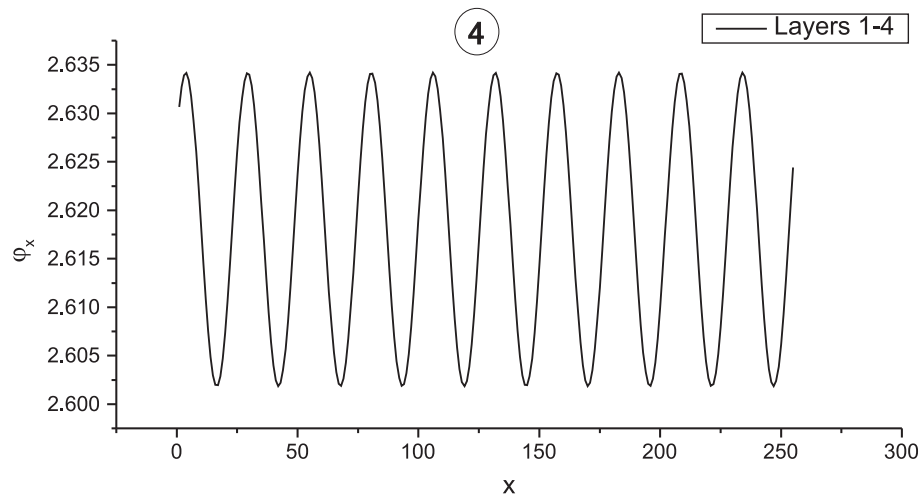


Рис. 2.15. Распределение поля $\theta_{nx}, n = 1, \dots, 4$ в зависимости от координаты при $j = 0.96$ (обратный ход). Синфазный режим с малой амплитудой осцилляций поля.

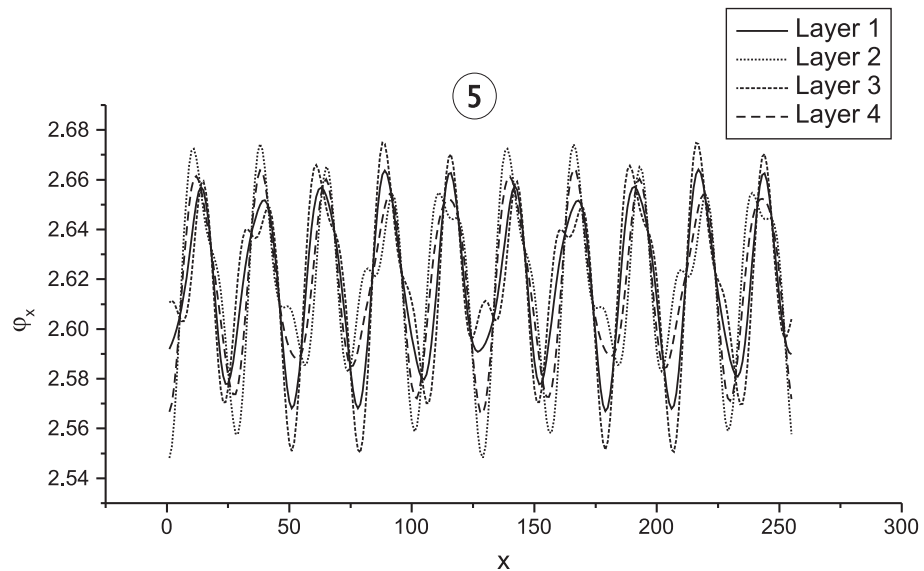


Рис. 2.16. Распределение поля $\theta_{nx}, n = 1, \dots, 4$ в зависимости от координаты при $j = 0.6$ (обратный ход). Развитие коротковолновых неустойчивостей.

Из проведенного нами численного эксперимента можно сделать несколько выводов. Во-первых, синфазный режим движения вихрей устанавливается при условии, что симметричная мода возмущений в системе является самой медленной, и это установление происходит при скорости, вычисляемой по формуле (2.47). Во-вторых, при относительно большой скорости вихревой решетки в системе развивается коротковолновая неустойчивость, проявляющаяся в рождении пар вихрь-антивихрь. Оба этих вывода подтверждают правильность аналитических результатов, полученных в предыдущем разделе. В-третьих, при большой скорости прямоугольная вихревая решетка является устойчивой из-за подав-

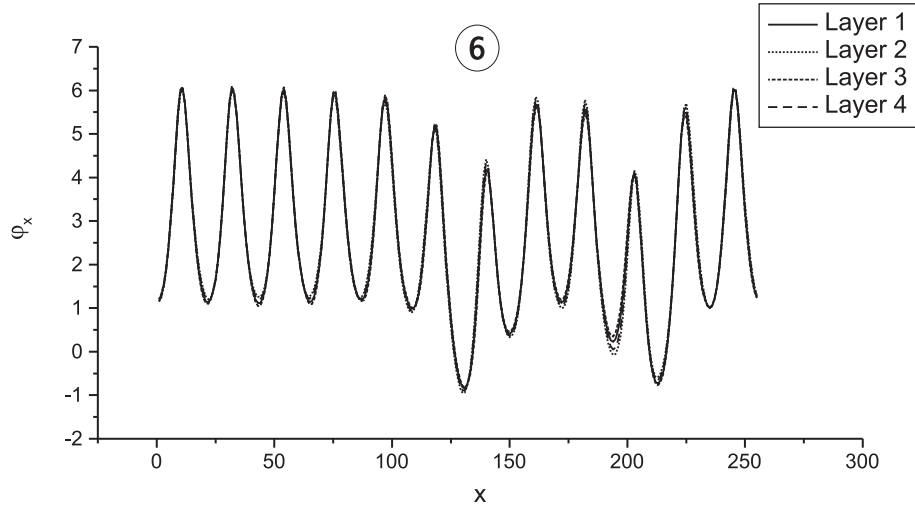


Рис. 2.17. Распределение поля θ_{nx} , $n = 1, \dots, 4$ в зависимости от координаты при $j = 0.36$ (обратный ход). Рождение пары вихрь-антивихрь.

ления параметрической неустойчивости. Однако этот режим не является перспективным для приложений, так как амплитуда переменной составляющей поля при этом мала.

2.5. Заключение

Для того, чтобы добиться устойчивости синфазного режима движения решетки джозефсоновских вихрей в многослойной структуре, обладающего высокой эффективностью АС/ДС преобразования, необходимо замедлять симметричную моду возмущений в системе. Это замедление должно быть таким, чтобы симметричная мода обладала наименьшей характеристической скоростью по сравнению с асимметричными модами. При этом синфазный режим оказывается абсолютно устойчивым в некотором интервале скоростей от v' , даваемой в пределе малого затухания формулой (2.47), до v_1 — характеристической скорости симметричной моды.

Взаимодействие линейных волн и движущихся решеток джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках

3.1. Введение

На протяжении многих лет высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) с сильной анизотропией были и остаются объектом интенсивных исследований. Слоистое строение, внутренний эффект Джозефсона, и сложный химический состав соединений данного типа обеспечивают множество интересных физических свойств этих материалов. В частности, значительное внимание уделяется исследованию джозефсоновской динамики таких соединений.

В настоящее время большое внимание уделяется проблеме генерирования микроволнового излучения из структур, основанных на слоистых ВТСП. Сравнительно недавно было получено излучение с частотой 0.85 ТГц и мощностью 0.5 мкВт из структуры на основе $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ [3]. Один из механизмов генерации электромагнитного излучения устроен следующим образом. При приложении к слоистому ВТСП внешнего магнитного поля, параллельного слоям, в сверхпроводнике формируется решетка джозефсоновских вихрей. Эта решетка может двигаться вдоль слоев под действием внешнего тока, приложенного в направлении, перпендикулярном слоям. При столкновении движущейся решетки джозефсоновских вихрей с краем структуры генерируются электромагнитные волны. Микроволновое излучение из $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ структуры во внешнем магнитном поле наблюдалось экспериментально в работе [42]. Описанный выше принцип генерации может быть применен для создания компактных и эффективных источников электромагнитного излучения, частота которых ограничена сверху шириной энергетической щели в ВТСП и составляет величину порядка 10 ТГц. Источники электромагнитных волн терагерцового диапазона востребованы в астрофизике, медицине, биологии, и других областях науки. Поэтому исследование джозефсоновской динамики слоистых сверхпроводников представляет собой актуальную задачу.

Слоистый ВТСП представляет собой сложную физическую систему с широким спектром собственных волн, включающим электромагнитные, плазменные волны, различные

фононные моды, мода Карлсона-Гольдмана [43] и др. Все эти моды, вообще говоря, взаимодействуют с джозефсоновскими вихрями и могут возбуждаться движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. Возбужденные волны, в свою очередь, воздействуют на решетку джозефсоновских вихрей, приводя к изменению формы вихрей и их взаимного расположения в решетке. Эти изменения приводят к особенностям на ВАХ слоистого сверхпроводника и влияют на интенсивность излучения. Таким образом, взаимодействие линейных мод и движущихся вихрей может быть практически использовано для управления дисперсионными свойствами собственных волн внешним магнитным полем, для диагностики собственных мод методом джозефсоновской спектроскопии [44], и для управления свойствами электромагнитного излучения из слоистого сверхпроводника.

Модель, адекватно описывающая динамику джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках, должна учитывать взаимодействие вихрей со всеми линейными модами, обладающими слабым затуханием. Однако, построение такой теории является непростой задачей. Основным препятствием на этом пути является нелокальность материальных уравнений слоистого сверхпроводника, или, другими словами, пространственная дисперсия. Даже в гидродинамическом приближении, когда динамические уравнения являются дифференциальными, последовательный подход к построению модели требует решения дифференциальных уравнений для поля и среды в областях однородности, и последующей сшивки решений на границах этих областей. Если число собственных мод в системе велико, то точное описание сведется к сложной задаче на собственные числа и собственные вектора матрицы переноса высокой размерности. Пример применения расчетов такого рода для несверхпроводящей слоистой среды содержится в работе [45]. Описание слоистой среды может быть значительно упрощено путем рассмотрения длинноволнового предела, в рамках которого рассматриваются уравнения для динамических переменных, усредненных по периоду слоистой среды. Целью данной главы является развитие теории такого рода для слоистых сверхпроводников с внутренним эффектом Джозефсона. Мы предлагаем сравнительно простую усредненную модель гидродинамического типа, учитывающую широкий спектр собственных волн, а также вихри. Данная модель может быть легко расширена путем включения в нее новых линейных мод и механизмов их возбуждения.

К настоящему моменту известно много моделей, описывающих джозефсоновскую динамику слоистых ВТСП. Наиболее известная и часто используемая модель учитывает только индуктивную связь между соседними контактами структуры. Она использу-

ется для описания как искусственных многослойных джозефсоновских структур [7], так и для слоистых сверхпроводников с внутренним эффектом Джозефсона [8]. Зарядовая связь между соседними контактами в слоистом сверхпроводнике была впервые рассмотрена в работе [15] для однородного распределения джозефсоновской фазы вдоль слоев. Попытки объединения моделей с магнитной и зарядовой связью были предприняты в работах [16, 17]. В предыдущей главе рассматривалась «глобальная» связь контактов структуры через внешнюю волноведущую систему [A3]. В ряде работ изучалось влияние неравновесных эффектов, таких как квазичастичный разбаланс, на джозефсоновскую динамику внутренних контактов в слоистых сверхпроводниках [18–21]. В работах [13, 14, 22] рассматривалось влияние продольного квазичастичного тока на динамику джозефсоновских вихрей в слоистых ВТСП. Роль фононов в джозефсоновской динамике слоистых ВТСП исследовалась в [46, 47] для непосредственного возбуждения фононов электрическим полем джозефсоновских осцилляций, в [48, 49] — для случая возбуждения фононов посредством механизма туннелирования с участием фонона. Все эти модели и эффекты могут быть учтены в рамках единой теории, описывающей линейные волны и джозефсоновские вихри в слоистых ВТСП.

В данной главе предложена всеобъемлющая теория, учитывающая взаимодействие джозефсоновских вихрей с линейными волнами различной физической природы, и объединяющая описанные выше модели. Для вывода предлагаемой модели слоистый сверхпроводник сначала рассматривается как сплошная анизотропная среда, содержащая сверхпроводящие и нормальные электроны, и несколько сортов ионов. Для описания динамики такой среды используются уравнения Максвелла совместно с уравнениями двухжидкостной гидродинамики для электронов, и уравнениями движения ионов в адиабатическом приближении Борна-Оппенгеймера. Однако в таком виде данная модель описывает только линейные свойства слоистого сверхпроводника в длинноволновом пределе. В частности, джозефсоновские вихри не могут быть описаны такой моделью. Для того, чтобы сделать возможным описание вихрей, проводится дискретизация уравнений с одновременным восстановлением нелинейного члена с синусоидальной зависимостью поперечного сверхтока от джозефсоновской разности фаз. Полученная в итоге система уравнений в различных частных случаях сводится к моделям, рассмотренным ранее. Выведенная модель используется для численного моделирования резистивного состояния в слоистом ВТСП, помещенном во внешнее магнитное поле. Продемонстрировано возбуждение мод Свихарта в

слоистом сверхпроводнике движущейся решеткой джозефсоновских вихрей, вызывающее перегруппировку вихрей в решетке и появление резонансных ступеней на ВАХ слоистого сверхпроводника. Показано, что движущаяся вихревая решетка возбуждает также фоновые моды и гибридные моды фонон-волна Свихарта, также вызывающие появление ступеней на ВАХ. Также продемонстрировано, что при ненулевой зарядовой связи вихревые цепочки в разных слоях движутся с разными скоростями, что ведет к существенному усложнению динамики решеток джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках.

Глава организована следующим образом. Раздел 4.2 посвящен выводу эффективной усредненной модели, описывающей совместно линейные волны и джозефсоновские вихри в слоистых ВТСП с внутренним эффектом Джозефсона, и оценке эффективных параметров модели. В разделе 4.3 описан численный эксперимент, проведенный на основе выведенной модели, и демонстрирующий влияние возбуждения линейных волн движущейся решеткой джозефсоновских вихрей, на ее динамику. В заключении сформулированы основные результаты, полученные в данной главе.

3.2. Феноменологическое описание джозефсоновской динамики слоистого ВТСП. Гидродинамический подход.

В данном разделе мы выводим систему уравнений, описывающую джозефсоновскую динамику слоистого сверхпроводника, рассматривая его как непрерывную анизотропную среду. Сначала записывается система уравнений Максвелла и анизотропные уравнения гидродинамики, описывающие сверхпроводящий конденсат, нормальные электроны, и фоновые степени свободы. В результате получается система, описывающая линейные волны в слоистом ВТСП, в длинноволновом пределе. Затем, заменяя производные по координате, перпендикулярной слоям, конечными разностями, и одновременно восстанавливая нелинейное выражение для джозефсоновского сверхтока $j_s = j_c \sin \theta_n$, мы получаем искомую систему уравнений.

В данной главе используется широко известный подход, заключающийся в том, что слоистый ВТСП может быть рассмотрен как последовательность сверхпроводящих слоев, связанных туннельным эффектом через диэлектрические слои таким образом, что между сверхпроводящими слоями есть джозефсоновский сверхток и ток нормальных электронов. Такая структура с выбранной системой координат показана на рис. 3.1. Ось x выбрана

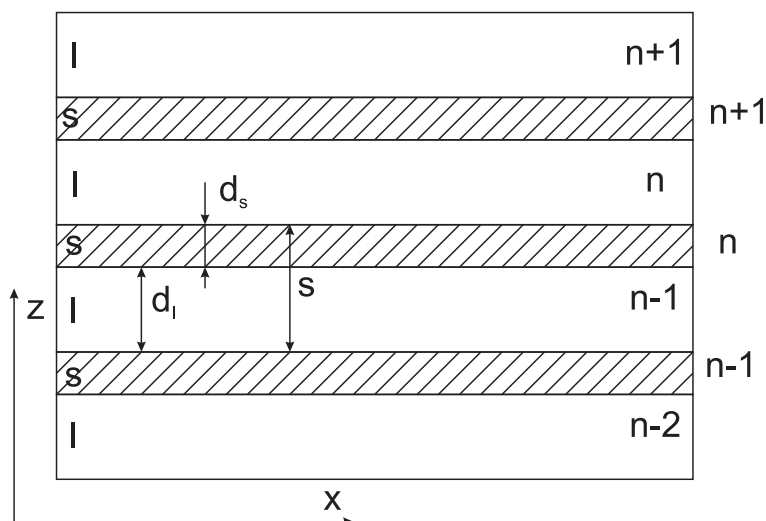


Рис. 3.1. Вид сбоку на многослойную джозефсоновскую структуру. Показана нумерация сверхпроводящих и изолирующих слоев, а также используемая система координат.

таким образом, что она лежит в плоскости ab сверхпроводника, который мы предполагаем изотропным в данной плоскости. Направление оси y совпадает с направлением внешнего магнитного поля, которое также лежит в плоскости слоев и имеет только одну компоненту для постоянной и переменной составляющих. Ось z направлена перпендикулярно слоям вдоль оси c слоистого сверхпроводника. При описанной ориентации внешнего магнитного поля, электрическое поле и другие динамические переменные задачи не будут зависеть от y и, таким образом, задача будет двумерной. Сверхпроводящие и соседние с ними диэлектрические слои пронумерованы номером n , как показано на рис. 3.1.

Мы начинаем вывод в предположении, что, во-первых, характерный масштаб решений в направлении оси c много больше, чем период слоистой структуры, и, во-вторых, что модуль джозефсоновской разности фаз на каждом из контактов структуры много меньше единицы. Данные предположения позволяют нам рассмотреть слоистый сверхпроводник как непрерывную среду и, таким образом, сформулировать искомую модель в континуальном пределе. Затем, проведя процедуру дискретизации, мы допустим наличие ненулевого скачка фазы параметра порядка, и окончательно получим искомую систему уравнений.

В качестве основных уравнений мы используем систему уравнений Максвелла совместно с гидродинамическими уравнениями, описывающими вклады от сверхпроводящих и нормальных электронов, и фононов. Вывод материальных уравнений для построения искомой модели описан в последующих подразделах.

3.2.1. Уравнения для полей и сверхпроводящих электронов

В данном подразделе мы выводим феноменологическую систему уравнений, описывающую джозефсоновскую динамику слоистого сверхпроводника в континуальном пределе. Для этого мы используем уравнения Максвелла совместно с анизотропными гидродинамическими уравнениями для сверхпроводящих электронов. Затем мы дополним полученную систему материальными уравнениями, описывающими вклады нормальных электронов и фононов, вывод которых описан в последующих подразделах.

В качестве отправной точки мы используем выражение для сверхпроводящего импульса, который мы обозначаем \mathbf{p} , через фазу χ сверхпроводящего параметра порядка

$$\mathbf{p} = \hbar \nabla \chi + \frac{2e}{c} \mathbf{A}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал электромагнитного поля. Это выражение явным образом учитывает отрицательный заряд электрона.

Присутствие в сверхпроводнике магнитных вихрей приводит к топологическим особенностям сверхпроводящего параметра порядка. Они связаны с тем, что набег фазы параметра порядка по контуру, охватывающему вихрь, не равен нулю, т. е. $[\nabla \times \nabla \chi] = 2\pi \sum_n s_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$, где \mathbf{r}_n — координата вихря, $s_n = \pm 1$ в зависимости от знака вихря [50]. На данном этапе вывода мы предполагаем, что в материале нет вихрей, поэтому $[\nabla \times \nabla \chi] = 0$. С учетом этого

$$\mathbf{B} = \frac{c}{2e} [\nabla \times \mathbf{p}]. \quad (3.2)$$

Подставляя это выражение в уравнение Максвелла $[\nabla \times \mathbf{B}] = 4\pi c^{-1} \mathbf{j}_{tot} + c^{-1} \dot{\mathbf{E}}$, получаем эволюционное уравнение для \mathbf{E}

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{c}{2e} [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{p}]] - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{tot}. \quad (3.3)$$

Полный ток \mathbf{j}_{tot} в (3.3) является суммой сверхтока \mathbf{j}_s , тока нормальных электронов \mathbf{j}_n , и тока ионов \mathbf{j}_i . Сверхток связан со скоростью электронов обычным выражением $\mathbf{j}_s = -en_0 \mathbf{v}$, в то время как в анизотропной модели Гинзбурга-Ландау импульс связан со скоростью формулой $\mathbf{p} = 2\hat{m}_s \mathbf{v}$, где \hat{m}_s — тензор эффективной массы. Этот тензор мы записываем в виде $\hat{m}_s = \text{diag}(m/\Gamma_s, m\Gamma_s)$, где $m = (m_{xx}m_{zz})^{1/2}$ — геометрическое среднее эффективных масс сверхпроводящих электронов в направлениях вдоль и поперек слоев. Множитель $\Gamma_s = (m_{xx}/m_{zz})^{1/2}$ является фактором анизотропии слоистого сверхпроводника. Используя

выражение для сверхтока, мы переписываем (3.3) в компонентах

$$\frac{1}{c}\dot{E}_x = \frac{c}{2e} \left(\frac{\partial^2 p_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 p_x}{\partial z^2} \right) - \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{en_0\Gamma_s}{2m} p_x + j_{n_x} + j_{i_x} \right), \quad (3.4a)$$

$$\frac{1}{c}\dot{E}_z = \frac{c}{2e} \left(-\frac{\partial^2 p_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_x}{\partial x \partial z} \right) - \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{en_0}{2m\Gamma_s} p_z + j_{n_z} + j_{i_z} - j_{ext} \right). \quad (3.4b)$$

Несмотря на то, что мы предположили, что от координаты y ничего не зависит, необходимо принять во внимание, что в уравнении (3.4b) z -компонента $[\nabla \times \mathbf{B}]$ на самом деле состоит из двух членов

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \equiv \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{4\pi}{c} j_{ext};$$

последний член в данном выражении пропорционален внешнему току j_{ext} . Уравнения (3.4a), (3.4b) должны быть дополнены эволюционными уравнениями для \mathbf{p} .

Дифференцируя уравнение (3.1) по времени и вводя в рассмотрение химический потенциал сверхпроводящих электронов $2\mu = \hbar\dot{\chi} - 2e\varphi$, получаем уравнение гидродинамического типа

$$\hat{m}\dot{\mathbf{v}} + \nabla\mu = -e\mathbf{E}. \quad (3.5)$$

Далее мы делаем модельное предположение, что химический потенциал сверхпроводящих электронов определяется формулой для вырожденного Ферми-газа $\mu = \varepsilon_F$, где $\varepsilon_F = \hbar^2(3\pi^2 n)^{2/3}/2m$ — энергия Ферми и n — концентрация сверхпроводящих электронов. Предполагая, что отклонение концентрации n_s от ее равновесного значения n_0 мало, линеаризуем уравнение (3.5), что дает

$$\hat{m}_s \dot{\mathbf{v}}_s + \frac{2}{3} \varepsilon_{F,s} \frac{n_s}{n_0} = -e\mathbf{E}, \quad (3.6)$$

где $\varepsilon_{F,s} = \varepsilon_F(n = n_0)$ — энергия Ферми для невозмущенной концентрации сверхпроводящих электронов. Далее, исключая отклонение концентрации n_s из гидродинамических уравнений, и используя уравнение Максвелла в форме $(\nabla \cdot \mathbf{D}) = 4\pi\rho_s \equiv -4\pi en_s$, мы приходим к эволюционному уравнению для \mathbf{p}

$$\frac{1}{2e}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{E} - r_d^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}), \quad (3.7)$$

или, в компонентах

$$-\frac{1}{2e}\dot{p}_x = E_x - r_d^2 \left(\frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_z}{\partial x \partial z} \right), \quad (3.8a)$$

$$-\frac{1}{2e}\dot{p}_z = E_z - r_d^2 \left(\frac{\partial^2 D_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 D_z}{\partial z^2} \right). \quad (3.8b)$$

Здесь $r_d = (2/3)^{1/2} v_F / \omega_p$ — длина экранировки продольного электрического поля, $v_F^2 = 2\varepsilon_F / m$ и $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 m^{-1}$ — соответственно средняя Ферми-скорость и плазменная частота, определяемые следующим образом: $v_F^2 = (v_{Fx}^2 v_{Fz}^2)^{1/2}$, $\omega_p^2 = (\omega_{px}^2 \omega_{pz}^2)^{1/2}$. Вектор электрической индукции \mathbf{D} определен таким образом, что он включает в себя заряды нормальных электронов и ионов в качестве связанных зарядов, т. е.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_n + 4\pi \mathbf{P}_i \equiv (\hat{I} + 4\pi \hat{\chi}_n + 4\pi \hat{\chi}_i) \mathbf{E}. \quad (3.9)$$

Здесь \mathbf{P}_n и \mathbf{P}_i — вектора поляризации, связанные соответственно с зарядами нормальных электронов и ионов, так что $(\nabla \cdot \mathbf{P}_{n,i}) = -\rho_{n,i}$. Тензоры $\hat{\chi}_n$, $\hat{\chi}_i$ являются соответственно тензорами электрической восприимчивости нормальных электронов и ионов.

Система уравнений (3.4a), (3.4b), (3.8a), (3.8b) описывает линейную динамику электромагнитного поля и сверхпроводящего конденсата с слоистом сверхпроводнике в длинноволновом пределе. Другие степени свободы, такие как нормальные квазичастицы и фононы различных типов, выражены в уравнениях (3.4a), (3.4b) через внешние токи \mathbf{j}_n , \mathbf{j}_i , и в уравнениях (3.8a), (3.8b) — через вектор электрической индукции \mathbf{D} . В следующих подразделах мы находим вклады квазичастиц и фононов в восприимчивость и тем самым делаем искомую систему уравнений полной.

3.2.2. Вклад от нормальных электронов

Для описания нормальных электронов мы предположим, что они образуют вырожденный Ферми-газ, и применим гидродинамический подход Томаса-Ферми, дающий следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{n}_n + n_{0n} (\nabla \cdot \mathbf{v}_n) &= 0, \\ \hat{m}_n (\dot{\mathbf{v}}_n + \hat{\nu} \mathbf{v}_n) + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{n_{0n}} \nabla n_n &= e \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В уравнениях (3.10) $\hat{m}_n = \text{diag}(m/\Gamma_n, m\Gamma_n)$ — тензор масс нормальных электронов, Γ_n — параметр анизотропии, n_{0n} — невозмущенная концентрация электронов, n_n — отклонение электронной концентрации от невозмущенного значения, \mathbf{v}_n — скорость электрона, $\varepsilon_{F,n} = \varepsilon_F(n = n_{0n})$ — энергия Ферми нормальных электронов, и тензор $\hat{\nu} = \text{diag}(\nu_x, \nu_z)$ характеризует частоты электронных столкновений. Для сверхпроводников обычно выполняется условие $\omega \ll \nu_{x,z}$, позволяющее несколько упростить уравнения путем пренебрежения члена $\dot{\mathbf{v}}$ по сравнению с $\hat{\nu} \mathbf{v}$. Решая полученные гидродинамические уравнения, находим

связь нормального тока \mathbf{j}_n с электрическим полем \mathbf{E} . В (ω, \mathbf{k}) -представлении эта связь записывается в виде

$$\mathbf{j}_n = \frac{\omega_{p_n}^2}{4\pi\Delta} \begin{pmatrix} 3i\omega\nu_z\Gamma_n - 2v_{F_n}^2 k_z^2 & 2v_{F_n}^2 k_x k_z \\ 2v_{F_n}^2 k_x k_z & 3i\omega\nu_x/\Gamma_n - 2v_{F_n}^2 k_x^2 \end{pmatrix} \mathbf{E} \equiv -i\omega\hat{\chi}_n\mathbf{E}. \quad (3.11)$$

Здесь $\omega_{p_n}^2 = 4\pi e^2 n_{0n}/m$ — плазменная частота, $v_{F_n} = (\varepsilon_F/m)^{1/2}$ — скорость Ферми, относящиеся к нормальным электронам, $\Delta = 3i\omega\nu_x\nu_z - 2\nu_x\Gamma_n^{-1}v_{F_n}^2 k_z^2 - 2\nu_z\Gamma_n v_{F_n}^2 k_x^2$. В пренебрежении пространственной дисперсией нормальных электронов, т. е. при $v_{F_n} = 0$, данное уравнение переходит в обычный анизотропный закон Ома

$$\mathbf{j}_n = \hat{\sigma}\mathbf{E}, \quad \hat{\sigma} = \text{diag}(\sigma_{xx}, \sigma_{zz}), \quad (3.12)$$

где $\sigma_{xx} = \omega_{p_n}^2 \Gamma_n / (4\pi\nu_x)$, $\sigma_{zz} = \omega_{p_n}^2 / (4\pi\nu_z\Gamma_n)$ — нормальная проводимость соответственно вдоль и поперек слоев. Следует заметить, что такая локальная модель нормальной проводимости использовалась в работах [13, 14, 22], посвященных исследованию влияния нормальной проводимости вдоль слоев на динамику и стабильность джозефсоновских вихревых решеток в слоистых ВТСП. Предложенный нами подход естественным образом учитывает пространственную дисперсию, причиной которой является ненулевое давление нормальных электронов.

3.2.3. Вклад фононов

Данный подраздел посвящен учету фононов в нашей феноменологической модели, описывающей джозефсоновскую динамику слоистого сверхпроводника. Мы учитываем только непосредственное возбуждение инфракрасных фононов электрическим полем джозефсоновских осцилляций. Здесь мы фактически обобщаем подход, использованный в работах [46, 47], на случай пространственно-неоднородных решений в распределенных джозефсоновских системах. Нелинейное взаимодействие между джозефсоновскими колебаниями и фононами, возникающее из-за эффекта туннелирования с участием фононов, и рассмотренное в работах [48, 49], в данном разделе не рассматривается. Ниже, после того как будет выписаны окончательные уравнения, будет показано, как нелинейные механизмы возбуждения фононов могут быть учтены в данной модели.

Для нахождения фононного вклада в диэлектрическую проницаемость используется стандартный подход (см., например, [51]). Выпишем классические уравнения движения

ионов в адиабатическом приближении Борна-Оппенгеймера

$$M_\nu \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{N}}^\nu = - \sum_{\mu, \mathbf{M}} \hat{G}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu} \mathbf{z}_{\mathbf{M}}^\mu + q_\nu \mathbf{E}_{\mathbf{N}}^\nu. \quad (3.13)$$

В данном выражении $\mathbf{z}_{\mathbf{N}}^\nu$ — вектор смещения иона из положения равновесия, ν — индекс иона в элементарной ячейке, $\mathbf{N} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3$ — индекс элементарной ячейки, $\mathbf{a}_{1,2,3}$ — периоды решетки, $\hat{G}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu}$ — «затравочный» силовой тензор, возникающий из взаимодействия между ионами посредством валентных электронов, q_ν — заряд иона, M_ν — масса иона, $\mathbf{E}_{\mathbf{N}}^\nu$ — микроскопическое электрическое поле в точке нахождения иона. Взаимодействие ионов и электронов проводимости описывается последним членом в правой части уравнения (3.13). В уравнении (3.13) и далее используется общее обозначение для внутреннего произведения тензора и вектора $\hat{A}\mathbf{x}$, которое записывается в компонентах как $(\hat{A}\mathbf{x})_i = \sum_j A_{ij} x_j$, где индексы i, j принимают значения x, y, z . Микроскопическое электрическое поле и среднее макроскопическое электрическое поле связаны между собой тензором Лоренца $\hat{L}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu}$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{N}}^\nu = \mathbf{E}_{\mathbf{N}} + 4\pi \sum_{\mu, \mathbf{M}} \hat{L}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu} \mathbf{P}_{\mathbf{M}}^\mu, \quad (3.14)$$

где $\mathbf{P}_{\mathbf{M}}^\mu = q_\mu \mathbf{z}_{\mathbf{M}}^\mu$ — дипольный момент μ -го иона в \mathbf{M} -й ячейке. С учетом различия между микроскопическим и средним макроскопическим электрическими полями уравнение движения ν -го иона принимает вид

$$M_\nu \ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{N}}^\nu = - \sum_{\mu, \mathbf{M}} \hat{F}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu} \mathbf{z}_{\mathbf{M}}^\mu + q_\nu \mathbf{E}_{\mathbf{N}}, \quad (3.15)$$

где $\hat{F}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu} = \hat{G}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu} - 4\pi q_\nu \hat{L}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu} q_\mu$ — перенормированный силовой тензор.

Вклад ионов в диэлектрическую проницаемость ϵ может быть найден из выражения для плотности тока ионов

$$\mathbf{j}_{\mathbf{N}} = \frac{1}{V} \sum_{\nu} q_\nu \dot{\mathbf{z}}_{\mathbf{N}}^\nu, \quad (3.16)$$

где V — объем элементарной ячейки. Выполнив преобразования, получаем выражение для плотности тока ионов в виде

$$\mathbf{j}_i = -\frac{i\omega}{V} \sum_{a=1}^{3L} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_{ph}^2(\mathbf{k}, a)} \frac{\sum_{\nu, \mu} q_\nu q_\mu \mathbf{e}_\nu(\mathbf{e}_\mu^*, \mathbf{E})}{\sum_{\nu} M_\nu \mathbf{e}_\nu^* \mathbf{e}_\nu} \equiv -i\omega \hat{\chi}_i \mathbf{E}, \quad (3.17)$$

где a — индекс фононной моды, L — число ионов в элементарной ячейке, $\omega_{ph}(\mathbf{k}, a)$ — частота фонона, $\mathbf{e}_\nu(\mathbf{k}, a)$ — вектор поляризации фонона. $\omega_{ph}(\mathbf{k}, a)$ и $\mathbf{e}_\nu(\mathbf{k}, a)$ определяются

из уравнения на собственные числа и собственные вектора матрицы $\hat{F}^{\nu\mu}(\mathbf{k})$

$$\sum_{\mu} \hat{F}^{\nu\mu}(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{\mu}(\mathbf{k}, a) = M_{\nu} \omega_{ph}^2(\mathbf{k}, a) \mathbf{e}_{\nu}(\mathbf{k}, a), \quad (3.18)$$

где $\hat{F}^{\nu\mu}(\mathbf{k})$ — Фурье-образ тензора $\hat{F}_{\mathbf{N}-\mathbf{M}}^{\nu\mu}$:

$$\hat{F}^{\nu\mu}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{N}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{N}} \hat{F}_{\mathbf{N}}^{\nu\mu}. \quad (3.19)$$

Выражение (3.17) представляет собой хорошо известную формулу, описывающую фоновый вклад в диэлектрическую проницаемость. Точное определение фоновых частот и векторов поляризации для слоистых сверхпроводников требует детальных спектроскопических или численных исследований. Пример расчета характеристик фононов типичного слоистого сверхпроводника с внутренним эффектом Джозефсона может быть найден в [52].

Таким образом, мы нашли вклады нормальных электронов и фононов в диэлектрическую проницаемость и таким образом определили вектор электрического смещения $\mathbf{D} = (\hat{I} + 4\pi\hat{\chi}_n + 4\pi\hat{\chi}_i)\mathbf{E} \equiv \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ с помощью выражений (3.11) и (3.17) для восприимчивостей $\hat{\chi}_n$ и $\hat{\chi}_i$.

Уравнения (3.4a), (3.4b), (3.8a), (3.8b) совместно с соотношениями (3.11) и (3.17) представляют собой полную систему, описывающую, в принципе, все линейные волны в длинноволновом пределе. Однако, данная система не описывает джозефсоновские вихри, поскольку, во-первых, она является линейной, и, во-вторых, она не допускает ненулевых скачков фазы параметра порядка. В следующем подразделе мы покажем, как преобразовать данную модель таким образом, чтобы она допускала решения в виде джозефсоновских вихрей и, таким образом, выведем нелинейную модель описывающую как джозефсоновские вихри, так и линейные волны в слоистом сверхпроводнике. Мы сравним ее с некоторыми известными моделями и выведем соотношения, связывающие параметры континуальной модели и параметры слоистых сверхпроводников.

3.2.4. Дискретизация модели

В данном разделе мы займемся преобразованием системы уравнений в континуальном пределе к форме, допускающей решения в виде вихрей, способных двигаться вдоль слоев слоистого ВТСП. Для этого мы разобьем сплошную среду на последовательность слоев толщиной s , равной периоду слоев в ВТСП, и ориентированных перпендикулярно

оси s слоистого сверхпроводника. Мы вводим новые переменные для соответствующих полей в момент времени t , и в некоторой точке слоя с номером n и с координатой x . Это возможно при условии, что распределения полей внутри слоя являются достаточно гладкими. С помощью такой дискретизации мы допускаем наличие ненулевого скачка фазы параметра порядка между слоями, что позволит нам в дальнейшем восстановить нелинейное выражение для джозефсоновского сверхтока.

Прежде всего разделим все динамические переменные задачи на две группы так, чтобы каждая из групп переменных была определена на двух решетках, сдвинутых по отношению друг к другу. Мы предполагаем, что узлы этих решеток располагаются в середине сверхпроводящих и диэлектрических слоев, соответственно. Сверхпроводящий и соседний с ним диэлектрический слой обозначены номером периода n . Переменные $E_x, D_x, j_x^{n,s,i}, v_x^{n,s,i}$ определены на решетке, узлы которой располагаются на сверхпроводящих слоях, а $E_z, D_z, j_z^{n,s,i}, v_z^{n,s,i}$ — на решетке, узлы которой располагаются на диэлектрических слоях. Затем мы заменяем в системе (3.4a), (3.4b), (3.8a), (3.8b), (3.11), (3.17) производные по координате, перпендикулярной слоям, конечными разностями согласно правилу

$$s \frac{\partial V}{\partial z} \rightarrow \pm V_{n\pm 1} \mp V_n, \quad s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \rightarrow V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \equiv \Delta_n V_n. \quad (3.20)$$

Здесь под V_n подразумевается одна из динамических переменных задачи, верхний знак используется для переменных из первого набора, а нижний знак — для переменных из второго набора. Данное правило дискретизации следует из интегральной формы уравнений Максвелла и гидродинамических уравнений, и обеспечивает требуемую симметрию уравнений в конечных разностях. Для демонстрации работы данной процедуры применим ее к известным телеграфным уравнениям, описывающим электромагнитные волны в линиях передач:

$$L\dot{I} + U_x = 0, \quad C\dot{U} + I_x = 0. \quad (3.21)$$

Здесь U, I — напряжение и ток в линии, L, C — линейные плотности индуктивности и емкости, соответственно. Относя напряжение и ток к разным наборам переменных и заменяя пространственные производные конечными разностями, в соответствии с нашим правилом получаем систему уравнений

$$sL\dot{I}_n + U_n - U_{n-1} = 0, \quad sC\dot{U}_n + I_{n+1} - I_n = 0, \quad (3.22)$$

представляющую собой законы Кирхгофа для дискретной L, C -цепочки. Вернемся теперь

к нашей задаче. Применяя описанную выше процедуру к системе уравнений в континуальном пределе, получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_{xn} = \frac{c}{2es} \frac{\partial}{\partial x} (p_{zn} - p_{zn-1}) - \frac{c}{2es^2} \Delta_n p_{xn} - \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{en_0 \Gamma_s}{2m} p_{xn} + j_{xn}^n + j_{xn}^i \right), \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_{zn} = -\frac{c}{2e} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_{zn} - \frac{c}{2es} \frac{\partial}{\partial x} (p_{xn+1} - p_{xn}) + \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{en_0}{2m\Gamma_s} p_{zn} + j_{zn}^n + j_{zn}^i - j_{ext} \right), \quad (3.24)$$

$$-\frac{1}{2e} \frac{\partial}{\partial t} p_{xn} = E_{xn} - r_d^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{xn} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x} (D_{zn} - D_{zn-1}) \right), \quad (3.25)$$

$$-\frac{1}{2e} \frac{\partial}{\partial t} p_{zn} = E_{zn} - r_d^2 \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x} (D_{xn+1} - D_{xn}) + \frac{1}{s^2} \Delta_n D_{zn} \right), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}^{n,i} = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\chi}_{n,i} \mathbf{E}), \quad \hat{\varepsilon} = \hat{I} + 4\pi \hat{\chi}_n + 4\pi \hat{\chi}_i. \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) данной системы учитывает вклады нормальных электронов и фононов, которые выражаются формулами (3.11) и (3.17) для соответствующих тензоров восприимчивостей. В общем случае, при наличии пространственной дисперсии, эти тензоры содержат волновые вектора, направленные поперек слоев. Поэтому процедура дискретизации, описанная выше, должна также быть применена и к уравнению (3.27), с учетом конкретных выражений для вкладов нормальных электронов и фононов в диэлектрическую проницаемость.

После дискретизации система уравнений допускает ненулевые скачки физических переменных, но она по-прежнему остается линейной и, следовательно, не описывает джозефсоновские вихри. Для возможности описания джозефсоновских вихрей мы должны учесть джозефсоновскую нелинейность в выражении для сверхтока, текущего поперек слоев. Для этого мы применим следующую процедуру. Проинтегрировав выражение для z -компоненты сверхпроводящего импульса по z от n -го до $n+1$ -го слоя, найдем джозефсоновскую разность фаз

$$\theta_n = -\frac{1}{\hbar} \int_{ns + \frac{ds}{2}}^{(n+1)s + \frac{ds}{2}} p_z dz = \chi_n - \chi_{n+1} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{ns + \frac{ds}{2}}^{(n+1)s + \frac{ds}{2}} A_z dz. \quad (3.28)$$

Теперь мы должны правильным образом подставить θ_n в систему уравнений. Поскольку сверхток в направлении поперек слоев имеет джозефсоновскую природу, мы должны сделать замену $p_{zn} \rightarrow -\hbar s^{-1} \sin \theta_n$ в последнем члене уравнения (3.24). Остальные члены с p_{zn} в уравнениях (3.23) и (3.24) являются, фактически, компонентами $[\nabla, \mathbf{B}]$, поэтому в них $p_{zn} \rightarrow -\hbar s^{-1} \theta_n$. Уравнение (3.26) при $r_d = 0$ является джозефсоновским соотношением $\hbar \dot{\theta} = 2eU$, поэтому в формуле (3.26) также делается замена $p_{zn} \rightarrow -\hbar s^{-1} \theta_n$. При $r_d \neq 0$

уравнение (3.26) описывает нарушение джозефсоновского соотношения из-за зарядовых эффектов. Влияние этих эффектов на джозефсоновскую динамику слоистого сверхпроводника мы рассмотрим позже, в разделе, посвященном численному эксперименту.

Теперь перепишем систему (3.23), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), вводя эффективные параметры, которые используются при описании объемных сверхпроводников

$$j_c = \frac{\Phi_0}{8\pi^2 cs} \frac{\omega_{ps}^2}{\Gamma_s}, \quad \lambda_{ab}^2 = \frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c s \Gamma_s^2} = \frac{c^2}{\Gamma_s \omega_{ps}^2}, \quad r_d^2 = \frac{v_{Fs}^2 d_s}{\omega_{ps}^2 s}.$$

Здесь j_c — критический ток в направлении оси c , λ_{ab} — глубина проникновения для сверхпроводящих токов, текущих в плоскости ab , r_d — глубина проникновения Дебая в объемном материале. В результате получаем систему следующего вида

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_{xn} = -\frac{\Phi_0}{2\pi s^2} \frac{\partial}{\partial x} (\theta_n - \theta_{n-1}) + \frac{4\pi}{c} \frac{\lambda_{ab}^2}{s^2} \Delta_n j_{xn}^s - \frac{4\pi}{c} (j_{xn}^s + j_{xn}^n + j_{xn}^i), \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_{zn} = \frac{\Phi_0}{2\pi s} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta_n - \frac{4\pi \lambda_{ab}^2}{cs} \frac{\partial}{\partial x} (j_{xn+1}^s - j_{xn}^s) - \frac{4\pi}{c} (j_c \sin \theta_n + j_{zn}^n + j_{zn}^i - j_{ext}), \quad (3.30)$$

$$\frac{4\pi \lambda_{ab}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} j_{xn}^s = E_{xn} - \frac{sr_d^2}{d_s} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{xn} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x} (D_{zn} - D_{zn-1}) \right), \quad (3.31)$$

$$\frac{\Phi_0}{2\pi cs} \frac{\partial}{\partial t} \theta_n = E_{zn} - \frac{sr_d^2}{d_s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial x} (D_{xn+1} - D_{xn}) + \frac{1}{s^2} \Delta_n D_{zn} \right). \quad (3.32)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}^{n,i} = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\chi}_{n,i} \mathbf{E}), \quad \hat{\varepsilon} = \hat{I} + 4\pi \hat{\chi}_n + 4\pi \hat{\chi}_i. \quad (3.33)$$

Модель, представленная уравнениями (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33), описывает взаимодействие джозефсоновских вихрей с электромагнитными волнами, плазмонами, фононами, и др., на равных основаниях. Данная система имеет необходимую симметрию по отношению к перестановке координат x и z , и описывает пространственную дисперсию, вызванную электронными и ионными степенями свободы в системе. Кроме того, данная система позволяет описывать влияние линейных волн любой природы на динамику джозефсоновских вихрей в слоистом сверхпроводнике, путем включения соответствующих восприимчивостей в выражение для диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$. Например, как выяснилось, в недавно открытых сверхпроводниках на основе FeAs [53–55] магнитные степени свободы могут играть важную роль. Предложенный нами подход позволяет включить эти степени свободы в нашу общую схему.

Предложенная нами модель содержит в качестве предельных случаев теории, предложенные ранее для описания джозефсоновской динамики слоистых ВТСП, такие как модель с магнитной связью между слоями [7, 8], с зарядовой связью [15], модель, учитывающая квазичастичный ток вдоль слоев [22], инфракрасные фононы, поляризованные

поперек слоев [46, 47], и т. д. Результаты работ [16, 17], в которых сделана попытка объединения моделей с магнитной и зарядовой связью, также воспроизводятся в рамках нашей модели. Кроме того, предложенная модель содержит дополнительные члены в уравнениях (3.31) и (3.32), содержащие $\partial/\partial x$, и отсутствующие в [16, 17]. Хотя эти члены и малы вдали от резонансов, их роль может быть существенной при приближении джозефсоновской частоты к частоте фонона или плазмона.

Система (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33) содержит единственный нелинейный член, описывающий джозефсоновскую нелинейность. В процессе вывода искомой системы мы пренебрегли гидродинамическими нелинейностями, такими как нелинейная зависимость давления от концентрации, разницей между лагранжевым и эйлеровским описаниями, нелинейностью выражения для плотности тока, и т. д. Учет этих членов позволил бы описать комбинационные процессы, такие как комбинационное рассеяние и рассеяние Мандельштама-Бриллюэна. Из-за сильной анизотропии слоистых ВТСП, наиболее существенные эффекты такого рода — это эффекты, возникающие при учете зависимости от концентрации транспортных и упругих свойств материала в направлении c , таких как джозефсоновский критический ток j_c , нормальная проводимость поперек слоев σ_{zz} , и т. д. Учет этих зависимостей мог бы позволить описать такой эффект, как туннелирование с участием фононов, возникающее из-за взаимодействия электронов с рамановскими фононами. Эти эффекты были рассмотрены в [49] для акустических фононов, и позднее в [48] для внутреннего эффекта Джозефсона. Можно ожидать подобных эффектов и для плазмонов. В данной работе мы считаем эти эффекты несущественными.

Рассмотрим теперь примеры того, как некоторые хорошо известные модели могут быть получены из нашей системы. Например, если мы положим фононный ток, ток смещения, и нормальные токи вдоль слоев равными нулю ($j_{x,zph} = \partial E_{xn}/\partial t = j_{xn}^n = 0$), предположим, что нормальный ток поперек слоев имеет чисто омический характер ($j_{zn} = \sigma_{zz} E_{zn}$), и пренебрежем ненулевой длиной экранировки продольного электрического поля ($r_d = 0$), мы получим

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{\lambda_j^2} \Delta_n + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \left(\omega_j^2 \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial t^2} + \sigma_{zz} \frac{\Phi_0}{2\pi cs} \frac{\partial \theta_n}{\partial t} + \sin \theta_n - \frac{j_{ext}}{j_c} \right). \quad (3.34)$$

Здесь $\lambda_j = \Gamma_s s$, $\lambda_c = \Gamma_s \lambda_{ab}$, $\omega_j^2 = (8\pi^2 j_c cs)/\Phi_0$. Данная система уравнений была впервые предложена в статьях [7, 8]; она описывает джозефсоновскую динамику многослойных систем распределенных джозефсоновских контактов и слоистых сверхпроводников с магнитной связью между слоями. В другом случае, когда размеры системы вдоль слоев пред-

полагаются малыми по сравнению с джозефсоновской длиной, так что можно пренебречь пространственной производной $\partial/\partial x = 0$, а также если пренебречь наличием фононов, и положить $j_{zn} = \sigma_{zz}E_{zn}$, получаем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial t^2} = -\frac{1}{\lambda_c^2} (1 - \eta \Delta_n) \left(\sin \theta_n - \frac{j_{ext}}{j_c} \right) - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial \theta_n}{\partial t}. \quad (3.35)$$

Здесь $\eta = r_d^2/(sd_s)$ — параметр зарядовой связи. Данная система уравнений была впервые рассмотрена в [15], и описывает динамику слоистого сверхпроводника с зарядовой связью между слоями. Другие примеры рассмотренных ранее моделей могут быть получены из нашей системы аналогичным образом.

3.3. Дисперсионные характеристики линейных волн.

В слоистых ВТСП имеется широкий спектр собственных волн, которые, в принципе, могут излучаться движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. Линейные моды, излученные вихревой решеткой, в свою очередь, могут влиять на форму и взаимное расположение вихрей в решетке. Возбуждение линейных волн вихревой решеткой вызывает появление резонансных ступеней на вольт-амперных кривых, при этом частоты этих ступеней совпадают с частотами излучаемых мод. Для того, чтобы идентифицировать резонансы на ВАХ, необходимо знать дисперсионные характеристики линейных волн в слоистом ВТСП, которые могут дать информацию о собственных модах в материале, и условиях их возбуждения.

Следует заметить, что дисперсия линейных волн в слоистом сверхпроводнике с приложенным внешним магнитным полем и внешним током отличается от дисперсии в мейснеровском состоянии. Внешнее магнитное поле приводит к проникновению вихрей в материал. Присутствие вихревых цепочек во внутренних джозефсоновских контактах вызывает появление вихревых акустикоподобных мод в спектре линейных волн [56]. В то же время, периодичность вихревых цепочек приводит к тому, что спектр линейных волн становится зонным, и к появлению щели на границе зоны Бриллюэна [56]. Вихревые моды могут взаимодействовать с модами мейснеровского состояния, что может приводить к существенному усложнению спектра собственных волн слоистого ВТСП. Вихревые моды можно сравнительно просто учесть в случае, если вихревая решетка в слоистой структуре является прямоугольной. В случае другого взаимного расположения вихрей в решетке анализ линейных мод существенно усложняется [13, 14], поскольку порядок системы урав-

нений, описывающей линейные моды, увеличивается. Однако, для интерпретации нашего численного эксперимента вихревые моды и щель в спектре линейных волн несущественны, поэтому в данной главе мы ими пренебрегаем.

Для построения дисперсионной характеристики мы линеаризуем систему уравнений (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33), предполагая $|\theta_n| \ll 1$, так что $\sin \theta_n \approx \theta_n$, и кладем ток смещения равным нулю. Мы также пренебрегаем диссипацией в системе ($\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$), имея в виду, что ее можно учесть позднее по теории возмущений. Полагая, что все динамические переменные зависят от координат в времени по гармоническому закону $\sim \exp(ikx + iqz - i\omega t)$, где $k = k_x$ — продольное волновое число, $q = k_z s$ — безразмерное поперечное волновое число, и приравнивая детерминант полученной линейной алгебраической системы уравнений нулю, получаем искомую дисперсионную характеристику. В континуальном пределе ее можно записать в стандартном виде уравнения Френеля

$$\det \left\| \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + k_i k_j - k^2 \delta_{ij} \right\| = 0. \quad (3.36)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ содержит линейные вклады от сверхпроводящих и нормальных электронов, и от фононов, индексы i и j пробегают значения x и z . Для краткости мы не будем выписывать данное уравнение в явном виде, поскольку оно является труднообозримым. Мы будем также предполагать, что фононная восприимчивость описывается простым модельным выражением

$$\hat{\chi}_{ph} = -\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{\Omega_x^2}{\omega^2 + i\omega\gamma_{phx} - \omega_{0x}^2} & 0 \\ 0 & \frac{\Omega_z^2}{\omega^2 + i\omega\gamma_{phz} - \omega_{0z}^2} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Данная формула описывает две оптические фононные моды: одна из них поляризована вдоль слоев (x -фонон), и другая — поперек слоев (z -фонон). Здесь ω_{0x} и ω_{0z} — частоты соответственно x -фонона и z -фонона, γ_{phx} и γ_{phz} — коэффициенты затухания этих мод, Ω_x^2 и Ω_z^2 — силы фононных осцилляторов. Для простоты мы предполагаем, что $\omega_{0x,z}$, $\gamma_{phx,z}$ и $\Omega_{x,z}$ не зависят от квазиимпульса, т. е. «чистые» фононные моды не имеют пространственной дисперсии. Более того, в данном разделе мы пренебрегаем затуханием фононов ($\gamma_{phx,z} = 0$), предполагая, что его можно в случае необходимости учесть по теории возмущений. Мы вернемся к ненулевым $\gamma_{phx,z}$ позднее, в численном эксперименте.

Дисперсионные кривые линейных мод слоистого ВТСП схематически показаны на рис. 3.2. На данном рис. приведены электромагнитные, плазменные, и фононные моды. Данные характеристики построены для определенных направлений в зоне Бриллюэна.

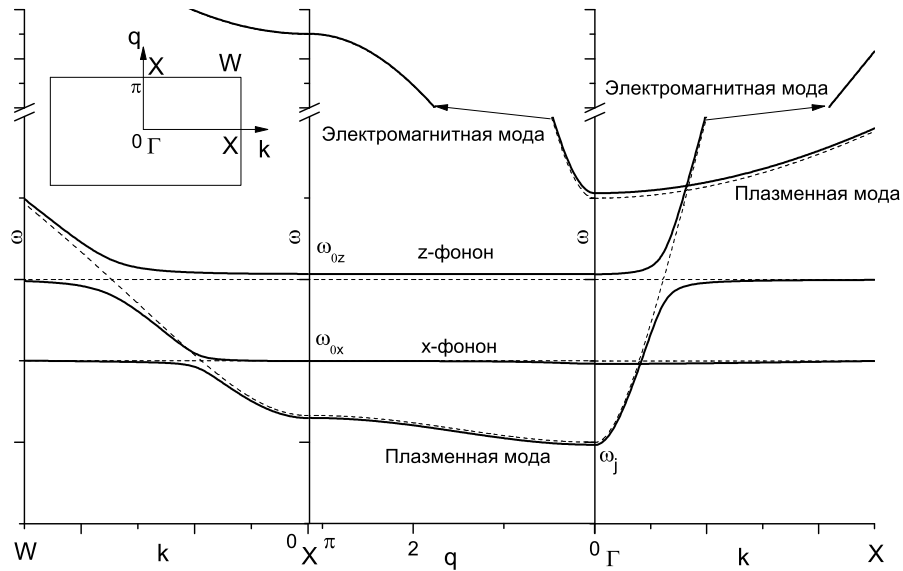


Рис. 3.2. Схематическое изображение дисперсионной характеристики линейных волн в слоистом сверхпроводнике. Пунктирными линиями показаны дисперсионные кривые в отсутствие взаимодействия электромагнитной и плазменной волн с фоновыми модами. На вставке показан фрагмент зоны Бриллюэна слоистой структуры.

Кривые в правой части рисунка построены для направления $\Gamma - X$ (рост k), в центральной части рисунка — для направления $\Gamma - X$ (рост q), и в левой части рисунка — для направления $X - W$ (рост k , край зоны Бриллюэна). Используются стандартные обозначения Γ, X, W для характерных точек зоны Бриллюэна: Γ — центр зоны Бриллюэна ($k = 0, q = 0$), X — точка, расположенная в середине края зоны Бриллюэна ($k = 0, q = \pi$ и $k \rightarrow \infty, q = 0$), и W — угол зоны Бриллюэна ($k \rightarrow \infty, q = \pi$). Дисперсионные кривые в отсутствие взаимодействия электромагнитных и плазменных волн с фоновыми модами, т. е. при нулевых силах фоновых осцилляторов ($\Omega_{x,z} = 0$), показаны пунктирными линиями. Хотя мы предполагаем, что тензор фоновой восприимчивости в (ω, k) -представлении не зависит от волнового вектора, тем не менее видно, что при ненулевых силах фоновых осцилляторов фоновые моды имеют такую зависимость и, следовательно, обладают пространственной дисперсией. При этом максимальное расщепление дисперсионных кривых имеет место вблизи точек пересечения «чистых» кривых. Пространственная дисперсия фоновых мод связана с ненулевым давлением сверхпроводящих и нормальных электронов.

В отсутствие фононов и затухания дисперсионная характеристика анизотропной плазмы состоит из двух ветвей с разными частотами и поляризациями. Рассмотрим ниж-

ную (при $\mathbf{k} = 0$) ветвь. Если направление волнового вектора в данной моде почти параллельно слоям, электрическое поле моды почти перпендикулярно волновому вектору, поэтому данная мода является электромагнитной. Если же волновой вектор данной моды направлен почти перпендикулярно слоям, электрическое поле такой моды почти параллельно волновому вектору, и данная мода является плазменной. Для высокочастотной моды ситуация обратная, т. е. волна с $q \approx 0$ является плазменной модой, и волна с $k \approx 0$ — электромагнитная мода. При произвольном направлении волнового вектора электрическое поле и волновой вектор образуют угол от 0 до $\pi/2$.

Частота нижней ветви дисперсионной характеристики, соответствующая точке Γ ($k = 0, q = 0$), равна ω_j . Это частота джозефсоновского плазменного резонанса. Она связана с параметрами гидродинамической модели соотношением $\omega_j = \omega_{ps}/\sqrt{\Gamma_s}$. Типичные значения ω_j для слоистых ВТСП составляют величину порядка 100 ГГц. Что касается частот верхней ветви дисперсионной характеристики, то при значениях параметров, соответствующих слоистым сверхпроводникам, они лежат в оптической области. Поэтому влияние данной моды на динамику джозефсоновских вихревых решеток мало и им можно пренебречь.

Одной из наиболее важных линейных мод в слоистом ВТСП является волна Свихарта. Данная мода принадлежит нижней ветви дисперсионной характеристики. Ее дисперсионное уравнение записывается следующим образом

$$\omega^2(k, q) = \omega_j^2(q) + \bar{c}^2(q)k^2, \quad (3.38)$$

где $\omega_j^2(q) = \omega_j^2(1 + 2\eta(1 - \cos q)\varepsilon_{zz})$. Наклон асимптот кривой $\omega(k, q)$ определяет скорость Свихарта:

$$\bar{c}^2(q) = \mu \frac{\varepsilon_{zz}^{-1} + 2\eta(1 - \cos q)}{1 + 2\mu(1 - \cos q)}, \quad (3.39)$$

где $\mu = \lambda_{ab}^2/s^2$ — параметр, характеризующий величину магнитной связи, $\eta = r_d^2/(sd_s)$ — параметр зарядовой связи. Видно, что антисимметричная ($q = \pi$) мода Свихарта является наиболее медленной, и симметричная ($q = 0$) мода является наиболее быстрой. Мы будем использовать формулу (3.39) для анализа результатов численного эксперимента.

Проанализируем изменение формы поверхности волновых векторов дисперсионной характеристики вблизи фононных частот в континуальном пределе. В случае отсутствия пространственной дисперсии электронов ($v_F/c \rightarrow 0$) дисперсионное уравнение (3.36) волн

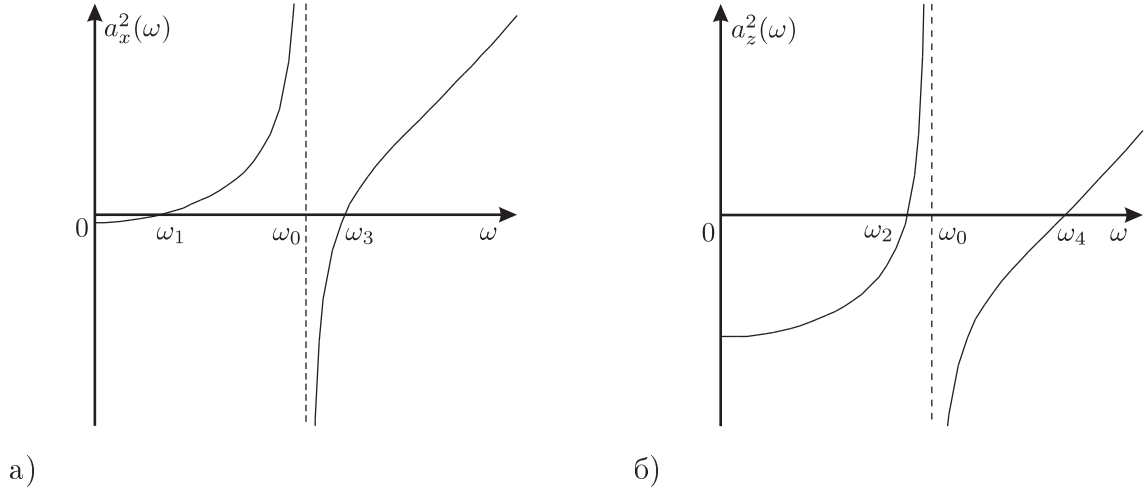


Рис. 3.3. Зависимости коэффициентов а) a_x^2 и б) a_z^2 в уравнении (3.40) линии уровня дисперсионной характеристики от частоты ω .

в среде может быть переписано в виде уравнения кривой второго порядка в k -пространстве

$$\frac{k_x^2}{a_x^2(\omega)} + \frac{k_z^2}{a_z^2(\omega)} = 1, \quad (3.40)$$

где

$$a_x^2(\omega) = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\Gamma} - \Omega_{pz}^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \right), \quad (3.41)$$

$$a_z^2(\omega) = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \Gamma \omega_p^2 - \Omega_{px}^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \right) \quad (3.42)$$

— параметры кривой. Дисперсионное уравнение (3.40) хорошо описывает линейные волны для всех направлений \mathbf{k} , кроме направлений, близких к оси z . При заданной частоте ω уравнение (3.40) описывает поверхности волновых векторов $\omega(k_x, k_z) = \text{const}$ на плоскости (k_x, k_z) , или линии уровня ω . Зависимости a_x^2, a_z^2 от частоты ω приведены на рис. 3.3. В зависимости от знаков $a_x^2(\omega), a_z^2(\omega)$ линии уровня принимают вид эллипсов или гипербол. Частоты, при которых $a_x^2(\omega), a_z^2(\omega)$ обращаются в нуль, обозначены $\omega_{1,2,3,4}$ и равны

$$\omega_{1,3}^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_p^2/\Gamma + \Omega_{pz}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2 + \omega_p^2/\Gamma + \Omega_{pz}^2)^2}{4} - \frac{\omega_p^2}{\Gamma} \omega_0^2}, \quad (3.43)$$

$$\omega_{2,4}^2 = \frac{\omega_0^2 + \Gamma \omega_p^2 + \Omega_{px}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2 + \Gamma \omega_p^2 + \Omega_{px}^2)^2}{4} - \Gamma \omega_p^2 \omega_0^2}, \quad (3.44)$$

при этом значение частоты $\omega_s, s = 1, 2, 3, 4$, растет с ростом ее номера.

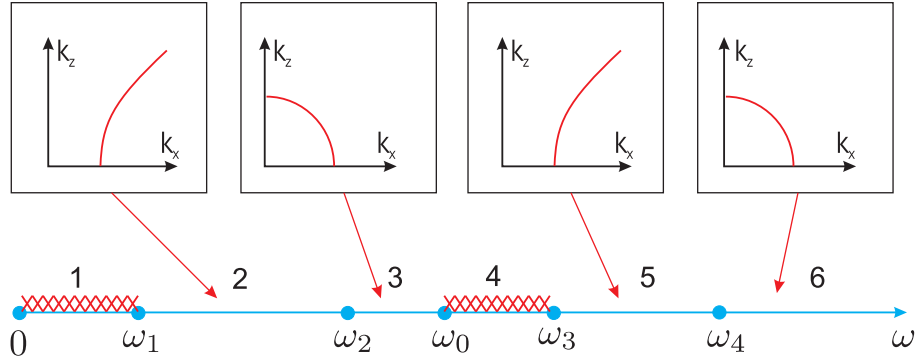


Рис. 3.4. Изменение формы линии постоянной частоты в зависимости от частоты ω . Штриховкой показаны области, где нет решений для действительных k_x, k_z .

Опишем последовательность бифуркаций поверхности волновых векторов уравнения (3.36) с увеличением частоты (рис. 3.4). Вначале идет область 1, в которой нет решений дисперсионного уравнения для действительных k_x, k_z . Затем, начиная с частоты порядка плазменной частоты электронов поперек слоев $\Gamma^{-1/2}\omega_p$, идет область 2, в которой линии постоянной частоты являются гиперболами. Вблизи фононной частоты ω_0 есть узкая область 3, в которой изочастоты имеют форму эллипсов. При дальнейшем повышении частоты последовательно идут область 4, где нет решения для действительных k_x, k_z , область 5 с гиперболическими поверхностями волновых векторов, и, наконец, при частотах, больших плазменной частоты электронов вдоль слоев $\Gamma^{1/2}\omega_p$, вновь появляется область 6 с эллиптическими линиями постоянной частоты.

3.4. Численный эксперимент

Применим выведенную нами систему (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33) для численного исследования динамики джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках, с учетом взаимодействия вихрей с различными линейными модами. Движущаяся решетка джозефсоновских вихрей, вообще говоря, возбуждает линейные волны в слоистом ВТСП, которые в общем случае оказывают влияние на вихревую решетку, приводя к искажениям формы вихрей и изменениям в их взаимном расположении. Возбужденные моды проявляются в виде резонансов на вольт-амперных кривых слоистого ВТСП с движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. В данном разделе мы исследуем возбуждение линейных волн движущейся вихревой решеткой, учитывая возможные изменения формы вихрей и их взаимного расположения.

В численном эксперименте мы используем периодические граничные условия как в направлении слоев, так и в поперечном направлении, для всех динамических переменных. Однако, для джозефсоновской разности фаз граничные условия в x -направлении модифицируются следующим образом:

$$\theta_n(L) = \theta_n(0) + 2\pi R_n, \quad (3.45)$$

где R_n — число вихрей, захваченных в n -й контакт структуры, L — длина системы в продольном направлении. Вместо θ_n мы вводим новую переменную $\theta'_n = \theta_n - 2\pi R_n x/L$, удовлетворяющую периодическим граничным условиям в направлении вдоль слоев. С учетом этого мы переписываем выражение для джозефсоновского сверхтока в виде $j_c \sin(\theta'_n + 2\pi R_n x/L)$. Данные граничные условия выбраны для упрощения численного решения системы. Однако использование таких граничных условий обеспечивает учет только объемных эффектов и не дает возможности исследовать влияние границ на динамику джозефсоновских вихрей.

Для численного решения системы (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33) мы преобразуем ее к системе уравнений в обыкновенных временных производных с использованием экспоненциального преобразования Фурье при помощи алгоритма двумерного FFT. Полученную систему мы решаем по схеме Кранка-Никольсона. Похожий подход к численному эксперименту использован в предыдущей главе данной работы [A3].

Периодические граничные условия вдоль слоев подразумевают, что число вихрей, захваченных в каждый контакт системы, постоянно. В нашем расчете мы полагаем, что число вихрей в каждом контакте одинаково, и обозначаем его R .

В численном эксперименте мы используем значения параметров, типичные для $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$: $j_c = 150 \text{ А/см}^2$, $\lambda_{ab} = 1700 \text{ \AA}$, $s = 15 \text{ \AA}$, $\sigma_{ab} = 5 \cdot 10^4 \text{ (Ом} \cdot \text{см)}^{-1}$, $\sigma_c = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (Ом} \cdot \text{см)}^{-1}$, $\varepsilon_{zz} = 12$, $\eta = 0.1$. Значения параметров фононов взяты из экспериментальных данных, полученных методом спектральной эллипсометрии [57]. В дальнейшем мы будем подразумевать, что длина системы L измеряется в единицах джозефсоновской длины $\lambda_j = \Gamma_s s$, и что плотность тока смещения измеряется в единицах критической плотности джозефсоновского сверхтока j_c . Мы также подразумеваем, что частоты и напряжения измеряются в единицах $\omega_p \Gamma_s^{-1/2}$. В расчетах используется значение L , соответствующее типичным латеральным размерам образцов, т. е. порядка 30 мкм. Число вихрей в слое мы выбирает так, что при заданном L оно соответствует внешнему магнитному полю, используемому в экспериментах, т. е. порядка 1 Т.

В расчете мы используем число слоев, равное четырем. Причина такого выбора заключается в следующем. В случае двухслойной системы поперечными волновыми числами ее мод являются лишь $q = 0, \pi$, в то время как было бы интересно выяснить, влияют ли моды с другой поперечной структурой на динамику вихревых решеток. В свою очередь, трехслойная система (при периодических граничных условиях по поперечной координате), не допускает важного частного решения, описывающего треугольную вихревую решетку. Таким образом, $N = 4$ является минимальным нетривиальным выбором.

3.4.1. Результаты

В данном подразделе описаны результаты численного моделирования динамики решеток джозефсоновских вихрей в слоистом ВТСП, проведенного на основе выведенной выше системы уравнений. Вначале, для проверки эффективности используемого численного метода, мы исследуем простейший случай, пренебрегая пространственной дисперсией, фононами, и всеми видами связи между слоями, кроме магнитной. Затем мы постепенно усложняем модель, вводя фононную восприимчивость и зарядовую связь, и исследуем вопрос о том, к каким эффектам приводят эти усложнения.

Простейший случай — магнитная связь в отсутствие фононов и пространственной дисперсии.

Мы начинаем с расчетов ВАХ слоистого сверхпроводника с движущейся решеткой джозефсоновских вихрей, в отсутствие пространственной дисперсии, фононов, и квазичастичных токов вдоль слоев. Нормальный ток в направлении поперек слоев будем считать чисто омическим. Данное приближение соответствует модели с магнитной связью между слоями, впервые рассмотренной в [7, 8].

Типичная ВАХ слоистого сверхпроводника с движущейся вихревой решеткой имеет несколько ступеней, связанных с течением магнитного потока. Это продемонстрировано на рис. 3.5, на котором изображена ВАХ для случая $R = 6$, соответствующего типичному значению внешнего магнитного поля. На данной ВАХ имеется две ступени — первая при $u = 0.18$, обозначенная цифрой 1, и вторая при $u = 40$, обозначенная цифрой 2. Первая ступенька связана с возбуждением антисимметричной моды Свихарта движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. На всем протяжении ступени 1 вихри образуют треугольную решетку наподобие той, что наблюдается в статике ($j_{ext} = 0$, см. рис. 3.6). Форма

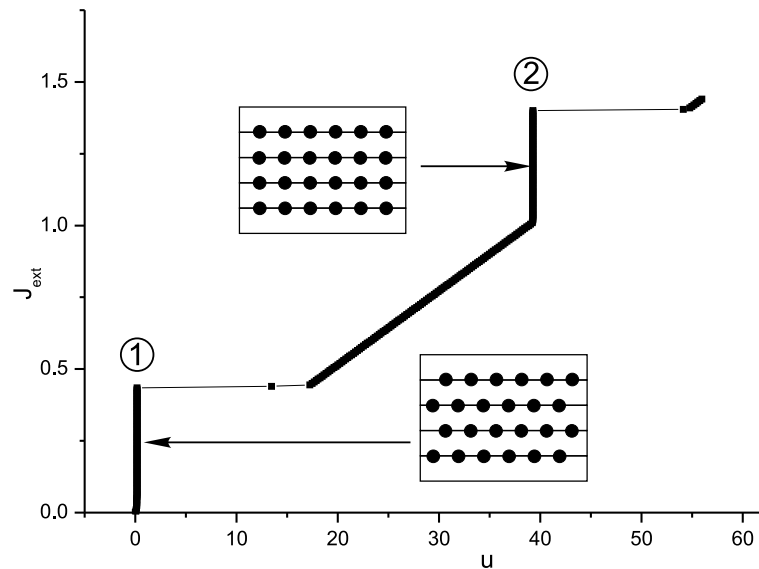


Рис. 3.5. ВАХ слоистого ВТСП с движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. Ступени на ВАХ пронумерованы в порядке возрастания частот. На вставке схематически показаны взаимные расположения вихрей на разных ступеньках.

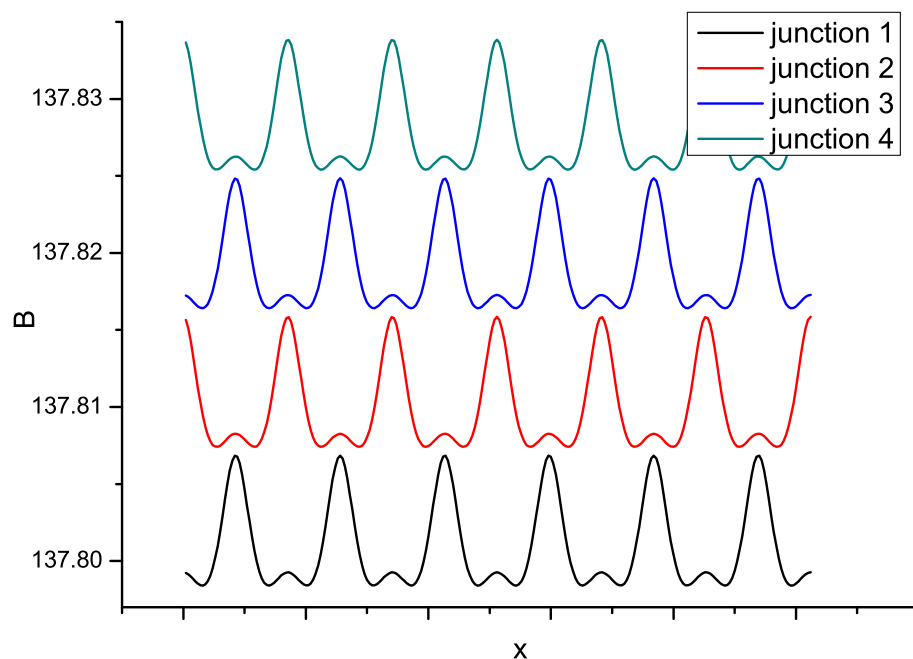


Рис. 3.6. Распределение магнитного поля, соответствующее статической вихревой решетке ($j_{ext} = 0$). Для удобства восприятия здесь и на последующих рисунках добавлены константы к распределениям магнитного поля в разных контактах структуры. Действительное значение постоянной составляющей магнитного поля такое же, как и для контакта 1.

вихрей испытывает специфические искажения из-за резонансного роста гармоник с $q = \pi$, амплитуда которых возрастает с увеличением внешнего тока.

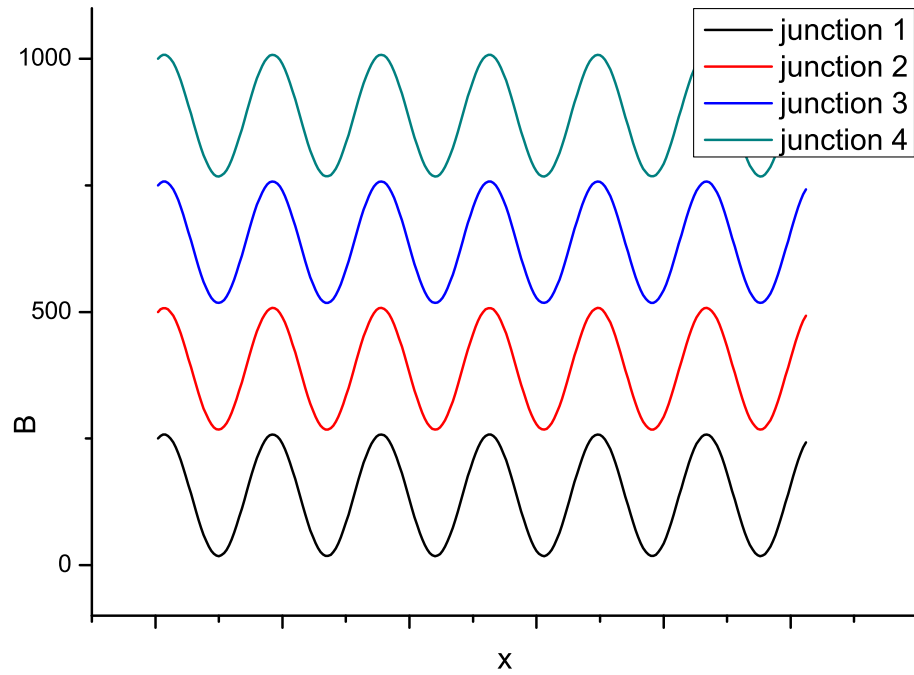


Рис. 3.7. Распределение магнитного поля, соответствующее концу ступеньки 2 на рис. 3.5. Здесь $j_{ext} = 1.4$. Гигантская амплитуда переменного электромагнитного поля.

Вторая ступенька на ВАХ возникает из-за возбуждения симметричной моды Свихарта движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. Взаимное расположение вихрей на этой ступеньке является прямоугольным. Данный режим движения вихрей характеризуется гигантской амплитудой переменного электромагнитного поля (рис. 3.7). Эта амплитуда намного больше, чем в случае треугольной вихревой решетки (рис. 3.6), так как в последнем случае «образы» вихрей [28] в соседних слоях подавляют переменную составляющую электромагнитного поля, в то время как в прямоугольной решетке «образы» вихрей усиливают переменное поле. Таким образом, в данном режиме движения вихрей генерация электромагнитной волны наиболее эффективна.

Часть вольт-амперной кривой между резонансами и выше второго резонанса близка к омической ветви, и характеризуется распределением магнитного поля в виде прямоугольной вихревой решетки с малой амплитудой переменного электромагнитного поля.

Хотя линейные моды с промежуточными значениями поперечного волнового числа $q = \pm\pi/2$ существуют в четырехслойной системе, они, как выяснилось в ходе численного эксперимента, не возбуждаются движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. Поэтому на вольт-амперных кривых отсутствуют ступени, связанные с этими модами. Причина этого заключается в том, что из-за большой величины параметра магнитной связи в слоистых ВТСП фазовые скорости промежуточных мод слабо отличаются от фазовой скорости

антисимметричной моды (см. уравнение (3.39)), и поэтому трудно обеспечить выполнение условия синхронизма моды и вихревой решетки. Однако, если специальным образом увеличивать и уменьшать внешний ток, можно добиться того, что скорость вихревой решетки совпадет с фазовой скоростью промежуточной моды, и, таким образом, условие синхронизма, необходимое для возбуждения моды, будет выполнено.

Вольт-амперные кривые, полученные в наших расчетах, аналогичны кривым, полученным для двухслойной структуры, состоящей из длинных джозефсоновских контактов [58]. Единственное отличие заключается в том, что на кривой, полученной в нашем эксперименте, напряжения на ступеньках отличаются друг от друга на два порядка. Причиной такой разницы напряжений является то, что величина параметра магнитной связи в слоистых ВТСП обычно существенно больше, чем в искусственных многослойных джозефсоновских структурах.

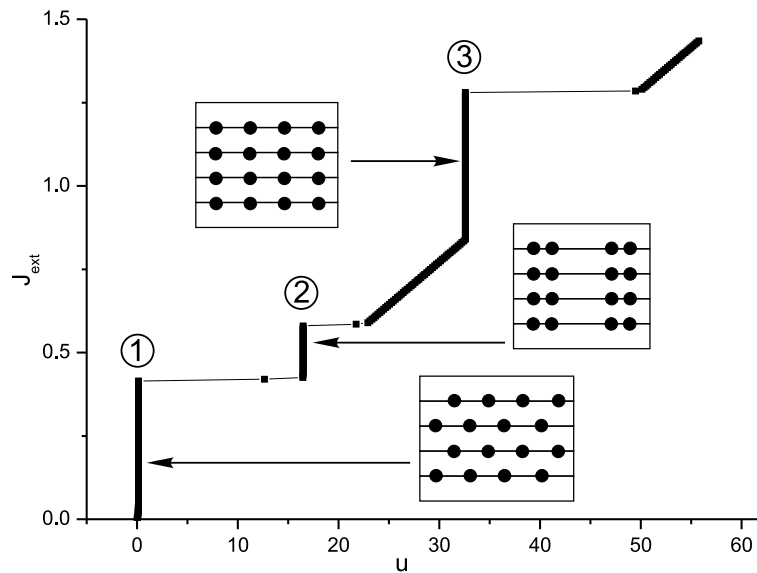


Рис. 3.8. ВАХ слоистого сверхпроводника с движущейся решеткой джозефсоновских вихрей для случая более слабого магнитного поля.

Даже в простейшем случае, когда учтена только магнитная связь между слоями, могут возникать более сложные вихревые структуры, приводящие к дополнительным ступенькам на ВАХ. Это иллюстрирует рис. 3.8, на котором показана ВАХ для случая, когда внешнее магнитное поле несколько меньше, чем для кривой на рис. 3.5. Видно, что в дополнение к ступенькам 1 и 3, соответствующим резонансам с антисимметричной модой Свихарта ($u = 0.14$), и с симметричной модой Свихарта ($u = 32$), соответственно, появилась ступенька 2 с частотой, составляющей половину частоты резонанса на симметричной

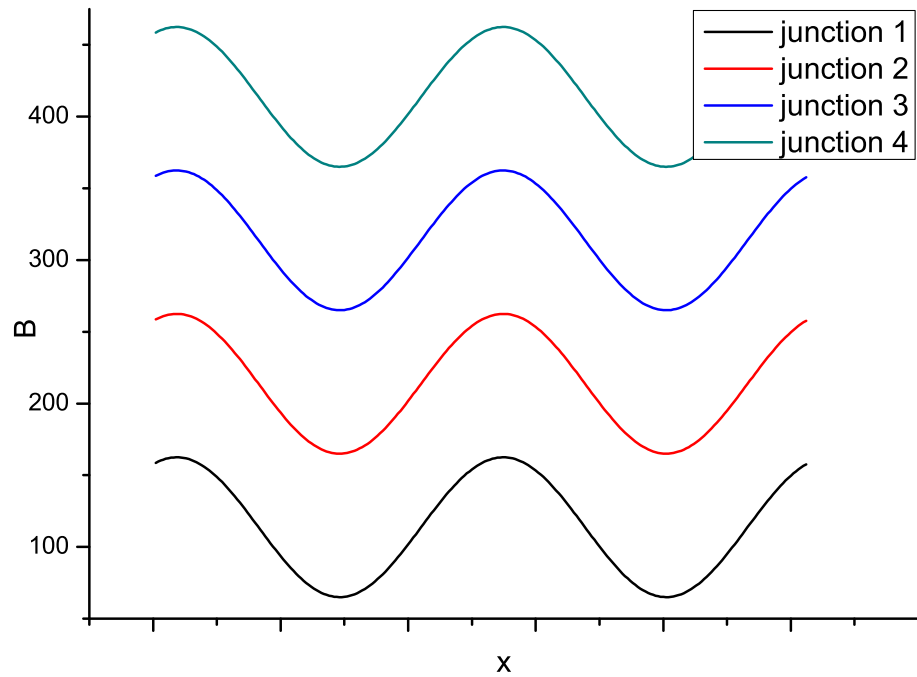


Рис. 3.9. Распределение магнитного поля, соответствующее ступеньке 2 на рис. 3.8. Здесь $j_{ext} = 0.58$.

моды Свихарта. Распределение магнитного поля, соответствующее ступеньке 2, показано на рис. 3.9. Видно, что на период системы приходится по две осцилляции магнитного поля, хотя в каждый контакт структуры захвачено по четыре вихря. Данный режим также отличается большой амплитудой переменного электромагнитного поля. Реализация такой вихревой конфигурации представляет собой, фактически, бифуркацию удвоения пространственного периода, и является динамическим аналогом перехода Пайерлса в физике твердого тела. Такой режим движения вихрей возникает из-за того, что движущаяся вихревая решетка возбуждает симметричную моду Свихарта с $k = k_{lattice}/2$, где $k_{lattice} = 2\pi RL^{-1}$ — продольное волновое число основной гармоники вихревой решетки. Данная мода перегруппировывает вихри в решетке, делая ее пространственный период равным периоду моды.

Распределения магнитного поля и взаимное расположение вихрей на ступеньках 1 и 3 и между резонансами аналогичны тем, что наблюдались в предыдущем случае (см. рис. 3.5, 3.6, 3.7).

Возбуждение фононов движущейся решеткой джозефсоновских вихрей.

Большое число атомов в элементарной ячейке слоистого ВТСП приводит к большому количеству фононных мод в этих материалах. Среди этих мод есть «мягкие» фононы, имеющие частоты порядка нескольких ТГц, меньшие частоты энергетической щели в слоистых ВТСП. Это делает возможным возбуждение таких фононов движущейся решеткой джозефсоновских вихрей в слоистом сверхпроводнике, рассмотренное в данном подразделе.

Для расчетов мы слегка усложнили модель, описанную в предыдущем подразделе, путем добавления фононной восприимчивости в виде упрощенного выражения (3.37). Параметры фононов, использованные в расчетах, взяты из статьи [57].

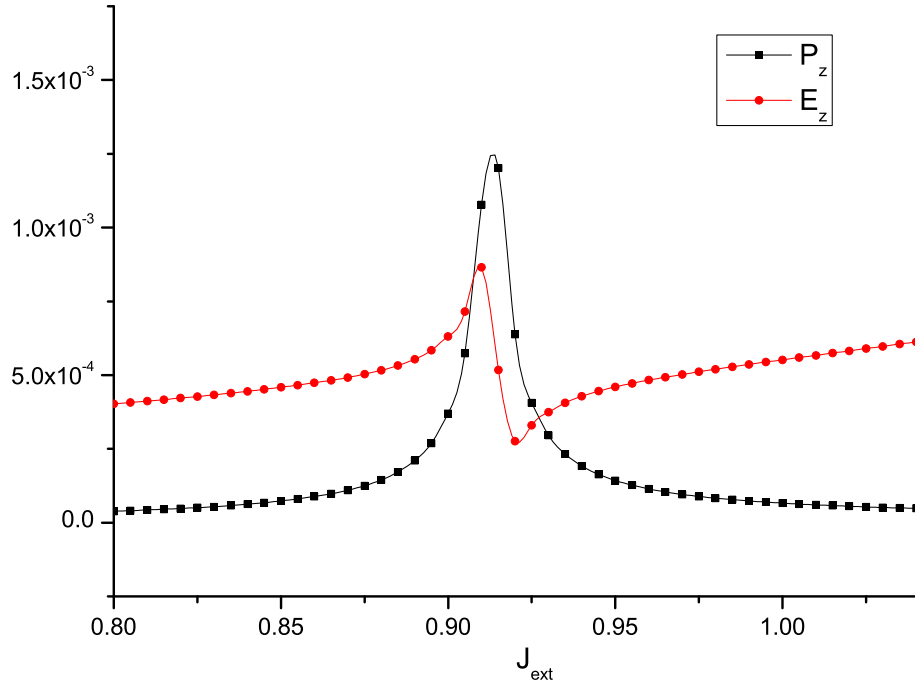


Рис. 3.10. Амплитуды переменных составляющих электрического поля и поляризации в зависимости от внешнего тока в окрестности частоты фонона.

Рис. 3.10 и 3.11 иллюстрируют возбуждение z -фонона движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. Частота фонона при этом находится в области между двумя ступеньками на ВАХ, связанными с модами Свихарта, на омической ветви. На рис. 3.10 показана зависимость модулей комплексных амплитуд гармоник P_z и E_z с волновыми числами $q = 0$ и $k = k_{lattice}$, от внешнего тока. Здесь P_z — z -компонента поляризации, связанной с фононами. Пик на зависимости $P_z(j_{ext})$ появляется из-за возбуждения фононной моды при значении j_{ext} , обеспечивающем частоту следования вихрей решетки, равную ча-

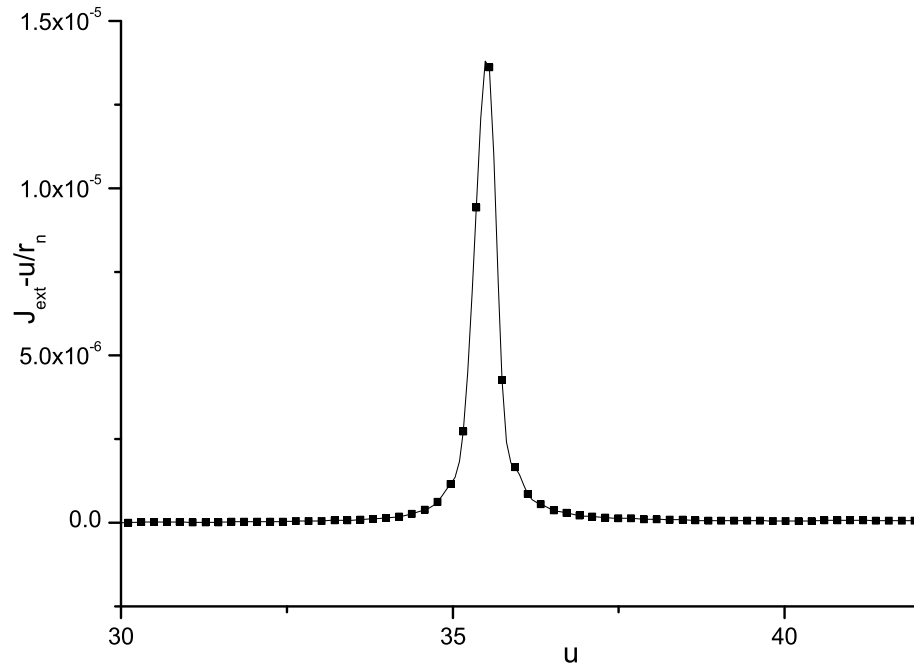


Рис. 3.11. Вклад в ВАХ из-за возбуждения фонона в ВТСП.

стоте фонона. Рис. 3.11 демонстрирует пик на зависимости вклада в ВАХ, возникающий из-за затраты дополнительной энергии источника внешнего тока, требуемой для возбуждения фонона. Непосредственное возбуждение фононов джозефсоновскими осцилляциями исследовалось ранее [46, 47] для случаев точечного джозефсоновского контакта и цепочек точечных контактов. Новизна нашей модели по сравнению используемой в [47] состоит в том, что предложенная нами модель способна описывать возбуждение фононов в распределенных джозефсоновских системах пространственно-неоднородными источниками, например, джозефсоновскими вихрями.

Высота пика на рис. 3.11 является малой, поэтому для его наблюдения в эксперименте требует специальных методов обработки сигналов. В нашем численном эксперименте, чтобы пронаблюдать фононный пик на ВАХ, мы вычитали из вольт-амперной кривой прямую линию, представляющую собой омическую ВАХ, совпадающую с частью исходной ВАХ между двумя ступенями, связанными со свихартовскими модами.

В наших расчетах мы не наблюдали возбуждения x -фононы движущейся вихревой решеткой. Причиной этого является то, что при относительно слабом магнитном поле и при скоростях вихревой решетки, соответствующих частоте фононов, вихревая решетка является прямоугольной. Как видно из уравнений (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), для решений, однородных в поперечном направлении, данная система разделяется на две независимых системы уравнений: уравнения (3.29), (3.31), и уравнения (3.30), (3.32). Первая система

линейна, содержит члены с диссипацией, и не содержит внешнего источника, поэтому она имеет нулевое установившееся решение. Поэтому x -фонон не возбуждается прямоугольной решеткой джозефсоновских вихрей, так как по причине, описанной выше, в такой решетке $E_x = 0$. Однако, если тензор фононной восприимчивости имеет недиагональные компоненты, возбуждение x -фонона возможно z -компонентой электрического поля движущейся вихревой решетки.

В данном подразделе мы рассмотрели возбуждение фононной моды вихревой решеткой, у которой $k_{lattice}$ имеет значение, далекое от k точки пересечения «чистой» фононной моды и моды Свихарта. Ниже рассмотрена ситуация, когда значение $k_{lattice}$ близко к k , соответствующему данной точке пересечения.

Возбуждение гибридной моды фонон-Свихарт движущейся решеткой джозефсоновских вихрей.

С помощью изменения внешнего магнитного поля, приложенного к структуре, можно подстроить значение $k_{lattice}$ таким образом, чтобы оно было близко к точке пересечения дисперсионных кривых «чистой» фононной кривой и моды Свихарта. Рис. 3.13 демонстрирует вклад в ВАХ в окрестности значения внешнего тока, обеспечивающего частоту следования вихрей, равную частоте, соответствующей точке пересечения упомянутых выше дисперсионных кривых. Два пика, расположенных близко друг к другу, и имеющих приблизительно одинаковую высоту, возникают из-за возбуждения мод с близкими частотами. Для объяснения данного эффекта рассмотрим фрагмент дисперсионной характеристики линейных волн слоистого ВТСП в окрестности точки взаимодействия фононной и свихартовской мод (рис. 3.12). В отсутствие взаимодействия дисперсионные кривые имели бы вид, изображенный пунктирными линиями; здесь наклонной линией изображена дисперсионная характеристика моды Свихарта и горизонтальной линией — дисперсионная характеристика фононной моды.

Когда две эти моды взаимодействуют, что происходит при $\Omega_x, \Omega_z \neq 0$, дисперсионные характеристики принимают вид, изображенный сплошными линиями на рис. 3.12. Величина расщепления дисперсионных кривых определяется силой осциллятора фононной моды (Ω_x или Ω_z , в зависимости от поляризации моды, взаимодействующей с модой Свихарта). Точки пересечения вертикальной прямой, обозначающей $k_{lattice}$, и дисперсионных кривых, соответствуют частотам возбуждаемых мод.

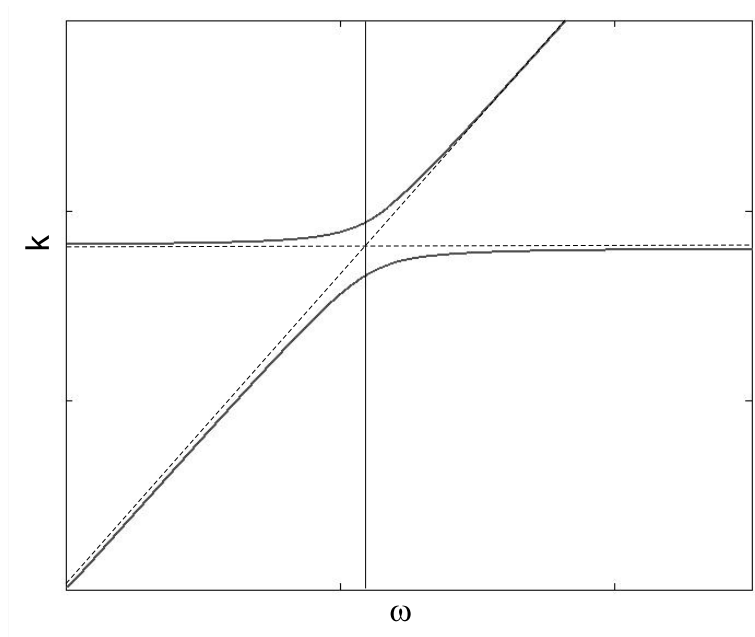


Рис. 3.12. Дисперсионная характеристика симметричной моды Свихарта и фоновой моды в области их взаимодействия.

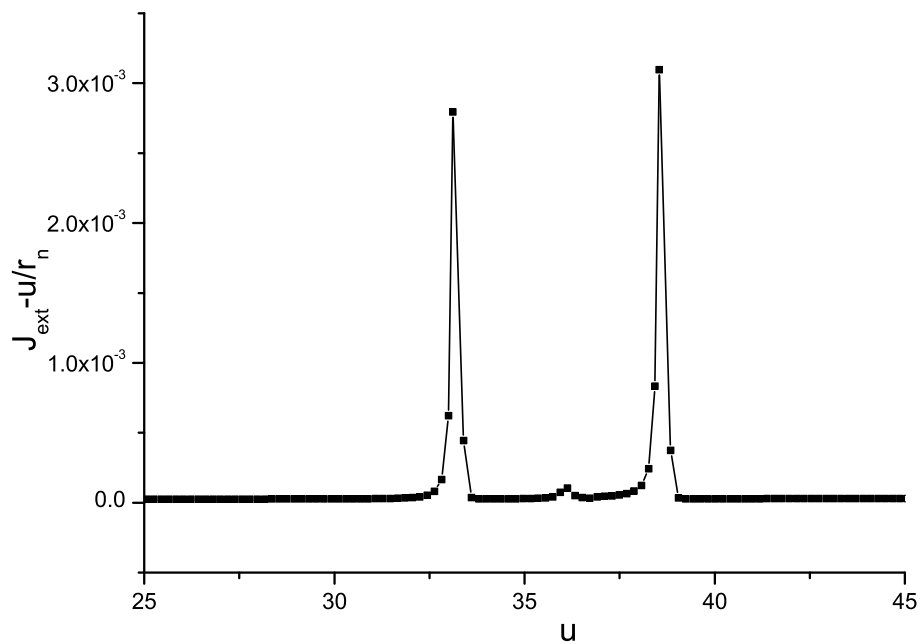


Рис. 3.13. Вклад в ВАХ из-за возбуждения гибридных мод фоновой моды Свихарта.

На рис. 3.13 показан вклад в ВАХ из-за возбуждения гибридных мод фоновой моды Свихарта. Расстояние между двумя пиками равно разности частот возбуждаемых мод, получаемой из рассмотрения дисперсионных характеристик. Следует заметить, что высота пиков на рис. 3.13 на два порядка выше, чем высота пика, вызванного возбуждением чисто фоновой моды (рис. 3.11). Данный факт может быть в перспективе использован

для развития метода фононной диагностики в слоистых сверхпроводниках с внутренним эффектом Джозефсона.

Нарушение джозефсоновского соотношения — разделение зарядов нормальных электронов движущейся решеткой джозефсоновских вихрей.

Обычно считается, что зарядовые эффекты оказывают незначительное влияние на динамику джозефсоновских вихревых решеток в слоистых ВТСП, потому что параметр зарядовой связи $\eta = r_d^2/(s \cdot d_s)$ в них мал и составляет величину порядка 0.1. Однако, поскольку данный параметр стоит при членах, которые в континуальном пределе содержат пространственные производные высшего порядка, его роль может быть значительной. Данная ситуация в некотором смысле аналогична той, что возникает в динамических дифференциальных уравнениях, когда малый параметр при старшей производной приводит к появлению быстрых решений. В нашем случае ненулевой параметр зарядовой связи вызывает появление пространственно «быстрых», другими словами, мелкомасштабных мод, способных усложнить режимы движения вихрей. В данном подразделе мы продемонстрируем роль зарядовых эффектов в динамике джозефсоновской вихревой решетки в слоистом ВТСП. Снова стартуя от простейшей модели с магнитной связью, мы теперь будем предполагать, что параметр зарядовой связи не равен нулю $\eta \neq 0$, и выясним разницу в динамике джозефсоновской вихревой решетки по сравнению со случаем $\eta = 0$, рассмотренным выше.

На первый взгляд, вольт-амперная кривая для случая ненулевой зарядовой связи (рис. 3.14, сплошная линия) выглядит очень похоже на кривую для случая нулевой зарядовой связи (рис. 3.5). В самом деле, на рис. 3.14 видны две ступени, возникающие, как и раньше, из-за возбуждения мод Свихарта различной симметрии. Положение левой на рис. ступеньки, вызванной резонансом с антисимметричной модой Свихарта, соответствует формуле $\omega_{res} = \bar{c}(q)2\pi RL^{-1}$, где $\bar{c}(q)$ определяется выражением (3.39). В случае ненулевой зарядовой связи данная ступенька смещается в сторону более высоких напряжений. Однако на этом сходство заканчивается. Во-первых, положение правой на рис. ступеньки теперь не соответствует приведенной выше формуле. Во-вторых, амплитуда правой ступеньки намного меньше, чем в случае нулевой зарядовой связи. На рис. 3.14 приведены зависимости скоростей роста фазы или, что то же самое, скоростей вихревых цепочек в разных контактах, от внешнего тока (пунктирные линии). Видно, что скорости

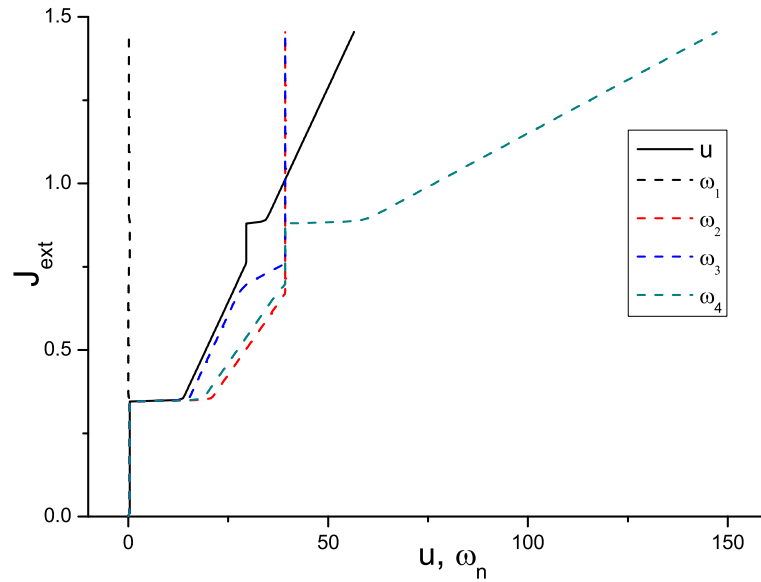


Рис. 3.14. ВАХ слоистого ВТСП с движущейся решеткой джозефсоновских вихрей в случае ненулевой зарядовой связи ($\eta \neq 0$). Все остальные параметры, включая внешнее магнитное поле, такие же, как и для рис. 3.5. Пунктирные линии показывают зависимость скорости роста фазы в разных джозефсоновских контактах структуры, от внешнего тока.

роста фаз различаются в разных контактах, хотя в то же самое время напряжения на разных контактах одинаковы. Согласно уравнению (3.32), это демонстрирует нарушение джозефсоновского соотношения. Анализ данных, полученных в ходе численного эксперимента, показывает, что это нарушение возникает из-за разделения заряда нормальных электронов движущейся решеткой джозефсоновских вихрей. Из рис. 3.14 также видно, что только два или три контакта из четырех возможных находятся в синхронизме с правым резонансом на ВАХ. Поэтому диапазон внешних токов, в котором система остается на резонансной ступеньке, меньше, чем в случае нулевой зарядовой связи, когда в синхронизме находятся все контакты.

Исследование динамики джозефсоновских вихревых решеток в слоистых сверхпроводниках с учетом зарядовых и неравновесных эффектов проводились в работе [21]. Влияние динамики квазичастичного разбаланса в этой работе исследовалось на основе модели, полученной из кинетических уравнений для функции распределения квазичастиц [20]. Однако, модель, использованная в [20], в отличие от нашей, не учитывает пространственную дисперсию и нормальный ток в продольном направлении. Данными различиями можно объяснить разницу между нашими результатами и результатами работы [21].

3.5. Заключение

Мы предложили феноменологическую модель гидродинамического типа, описывающую динамику неоднородных распределений джозефсоновской разности фаз в слоистых ВТСП, т. е. движущихся джозефсоновских вихрей и линейных волн. В качестве предельных случаев предложенная модель содержит все ранее рассмотренные феноменологические описания джозефсоновской динамики слоистых сверхпроводников. Основываясь на выведенной модели, мы провели численный эксперимент, продемонстрировавший возбуждение линейных волн решеткой джозефсоновских вихрей, движущейся под действием приложенного внешнего тока. На ВАХ слоистых структур наблюдались резонансы, вызванные возбуждением мод Свихарта разной поперечной симметрии, и вихревые решетки с одной и двумя вихрями в элементарной ячейке. Резонанс с симметричной модой Свихарта характеризуется сильным электромагнитным излучением, сопровождающим движущуюся решетку. Используя простейшую модель фононной восприимчивости, мы наблюдали ступеньку на ВАХ, вызванную излучением фононной моды движущейся вихревой решеткой. Мы также наблюдали пики на ВАХ, вызванные излучением гибридных мод фонон-мода Свихарта, и выяснили, что высота этих пиков на два порядка больше высоты пика, вызванного излучением чисто фононной моды. Мы обнаружили, что зарядовая связь играет существенную роль в динамике джозефсоновских вихрей в слоистом сверхпроводнике, несмотря на слабость данного вида связи.

Общее заключение

В заключении сформулируем основные результаты настоящей работы.

1. Рассмотрена динамика джозефсоновского вихря в распределенном джозефсоновском контакте с пассивной областью. Показано, что наличие пассивной области приводит к тому, что уравнение, описывающее динамику такой системы, является нелокальным во времени и в пространстве. Путем численного эксперимента показано наличие ступеней на ВАХ рассматриваемой системы, обусловленных наличием черенковского излучения движущегося джозефсоновского вихря. Исследованы зависимости положений и амплитуд данных ступеней от параметров системы.
2. Проведено аналитическое исследование устойчивости прямоугольной решетки джозефсоновских вихрей в многослойной структуре из распределенных джозефсоновских контактов, электродинамически связанных с замедляющей системой в виде полосковой линии. Показано, что устойчивость прямоугольной вихревой решетки достигается при условии, что скорость электромагнитной волны в пассивной области меньше характеристической скорости симметричной свихартовской моды в слоистой структуре.
3. Путем численного эксперимента показано, что при достаточном замедлении электромагнитной волны во внешней полосковой линии происходит спонтанное установление синфазного режима движения джозефсоновских вихрей в многослойной структуре из длинных контактов. Данный режим характеризуется большой амплитудой переменного электромагнитного поля и может быть использован для генерации электромагнитного излучения.
4. Предложена модель гидродинамического типа, описывающая совместно джозефсоновские вихри и линейные волны любой природы в слоистых сверхпроводниках. Данная модель объединяет описания, предложенные ранее в литературе, и может быть сведена к ним в предельных случаях. Численный расчет, выполненный на основе предложенной модели, продемонстрировал наличие ступеней на ВАХ, связанных с возбуждением волн Свихарта, фононных и гибридных мод решеткой джозефсоновских вихрей, движущейся под действием внешнего тока в слоистом сверхпроводнике.

Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. Flytzanis N., Lazarides N., Chiginev A. et al. Dynamics of fluxons in narrow window junctions // J. Appl. Phys. 2000. Vol. 88. P. 4201.
- A2. Chiginev A. V., Kurin V. V. Instability of a rectangular vortex lattice in a stack of two long Josephson junctions // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. P. 052510.
- A3. Chiginev A. V., Kurin V. V. In-phase vortex flow and superradiance in a Josephson superlattice embedded in a waveguide // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 70. P. 214523.
- A4. Курин В. В., Чигинев А. В. Взаимодействие оптических фононов и джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках // Известия РАН. Серия физическая. 2007. Т. 71. С. 16–20.
- A5. Chiginev A. V., Kurin V. V. Interaction between optical phonons and Josephson vortices in layered superconductors // Supercond. Sci. Tech. 2007. Vol. 20. P. S34.
- A6. Kurin V. V., Chiginev A. V., Shereshevsky I. A. et al. Superradiation in Josephson superlattice coupled in a slow wave system // 8th International Superconductive Electronics Conference, Osaka, Japan, Extended Abstracts. Osaka, Japan: 2001. — June. Pp. 437–438.
- A7. Chiginev A. V., Kurin V. V. Vortex motion in multilayer Josephson structure coupled with external waveguide // Abstracts of Euroconference on the Physics and Applications of the Intrinsic Josephson Effect. Pommersfelden, Germany: 2002. — June.
- A8. Chiginev A. V., Kurin V. V. Moving vortex lattices in a stack of long Josephson junctions connected with a stripline: theory and simulation // 6th EUCAS book of abstracts (2003). 2003.
- A9. Чигинев А. В. Синфазный режим движения джозефсоновских вихрей в многослойной сверхпроводящей структуре, соединенной с полосковой линией // Тезисы докладов конференции молодых ученых «Нелинейные волновые процессы» в рамках XII научной школы «Нелинейные волны – 2004». Н. Новгород: 2004. — февраль.
- A10. Kurin V. V., Chiginev A. V. Dynamic phase transitions in lattices of Josephson vortices moving in layered superconductors // “Frontiers of Nonlinear Physics”, Proceedings of the 2nd International Conference. N. Novgorod-St. Petersburg, Russia: 2004. — July.

- A11. Курин В. В., Чигинев А. В. Динамика джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках // Труды XIII научной школы «Нелинейные волны - 2006». Н. Новгород: 2006. — март.
- A12. Курин В. В., Чигинев А. В. Взаимодействие оптических фононов и джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках // Материалы X ежегодного симпозиума «Нанопизика и наноэлектроника». Н. Новгород: 2006. — март. С. 73–76.
- A13. Kurin V. V., Chiginev A. V. Role of Optical Phonons in Vortex Dynamics in High-Temperature Superconductors with Intrinsic Josephson Effect // Plasma-2006: 5-th International Symposium on the Intrinsic Josephson Effect in High-Tc superconductors, Programme and Abstracts. London: 2006. — July. Pp. 15–16.
- A14. Курин В. В., Чигинев А. В. Влияние оптических фононов на динамику джозефсоновских вихревых решеток в слоистых сверхпроводниках // Труды Второй международной конференции «Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости ФПС-06». Звенигород: 2006. — октябрь. С. 176–177.
- A15. Chiginev A. V., Kurin V. V. Interaction between optical phonons and Josephson vortices in layered superconductors // Abstracts of the Applied Superconductivity Conference “ASC-2006”. Seattle: 2006. — August. P. 77.
- A16. Kurin V. V., Chiginev A. V. Vortex motion and wave excitation in layered superconductors with intrinsic Josephson effect // Proceedings of the International conference on Theoretical Physics “Dubna-Nano2008”. Dubna: 2008. — July.
- A17. Курин В. В., Чигинев А. В. Взаимодействие линейных волн и движущихся решеток джозефсоновских вихрей в слоистых сверхпроводниках // Труды Третьей международной конференции «Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости ФПС-08». Звенигород: 2008. — октябрь. С. 100–101.
- A18. Курин В. В., Чигинев А. В. Возбуждение линейных волн в слоистых сверхпроводниках движущимися решетками джозефсоновских вихрей // Материалы XIII ежегодного симпозиума «Нанопизика и наноэлектроника». Н. Новгород: 2009. — март. С. 157–158.

Литература

1. Бароне А., Патерно Д. Эффект Джозефсона: физика и применения, пер. с англ. Москва, Мир, 1984.
2. Лихарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. Москва, 1985.
3. Ozyuzer L., Koshelev A. E., Kurter C. et al. Emission of Coherent THz Radiation from Superconductors // Science. 2007. Vol. 318. P. 1291.
4. McLaughlin D. W., Scott A. C. Perturbation analysis of fluxon dynamics // Phys. Rev. A. 1978. Vol. 18. P. 1652.
5. Kleiner R., Steinmeyer F., Kunkel G., Müller P. Intrinsic Josephson effects in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ single crystals // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. P. 2394.
6. Kleiner R., Müller P. Intrinsic Josephson effects in high- T_c superconductors // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49. P. 1327.
7. Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 73. P. 2411.
8. Bulaevskii L. N., Zamora M., Baeriswyl D. et al. Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in Josephson-coupled layered superconductors // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50. P. 12831.
9. Pedersen N. F., Ustinov A. V. Fluxons in Josephson transmission lines: new developments // Supercond. Sci. Tech. 1995. Vol. 8. P. 389.
10. Ustinov A. V. Josephson vortex dynamics in layered structures // NATO Science Series E. 1999. Vol. 356. P. 465.
11. Sakai S., Ustinov A. V., Kohlstedt H. et al. Theory and experiment on electromagnetic-wave-propagation velocities in stacked superconducting tunnel structures // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50. P. 12905.
12. Volkov A. F., Glen V. A. Dynamics of fluxon lattice in two coupled Josephson junctions // J. Phys.: Condens. Matter. 1998. Vol. 10. P. L563.

13. Koshelev A. E., Aranson I. S. Resonances, Instabilities, and Structure Selection of Driven Josephson Lattice in Layered Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 3938.
14. Koshelev A. E., Aranson I. Dynamic structure selection and instabilities of driven Josephson lattice in high-temperature superconductors // *Phys. Rev. B.* 2001. Vol. 64. P. 174508.
15. Koyama T., Tachiki M. I-V characteristics of Josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations // *Phys. Rev. B.* 1996. Vol. 54. P. 16183.
16. Ju H. Kim, Pokharel J. Collective Josephson vortex dynamics in long Josephson junction stacks // *Physica C.* 2003. Vol. 384. P. 425.
17. Machida M., Sakai S. Unified theory for magnetic and electric field coupling in multistacked Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* 2004. Vol. 70. P. 144520.
18. Ryndyk D. A. Quasiparticle dynamics and phase locking in a S-I-S multilayer Josephson junction // *Письма в ЖЭТФ.* 1997. Vol. 65. P. 755.
19. Ryndyk D. A. Collective Dynamics of Intrinsic Josephson Junctions in High- T_c Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 3376.
20. Рындык Д. А. Неравновесный эффект Джозефсона в системах туннельных сверхпроводниковых контактов и в слоистых сверхпроводниках // *ЖЭТФ.* 1999. Т. 116. С. 1798.
21. Ryndyk D. A., Pozdnjakova V. I., Shereshevskii I. A., Vdovicheva N. K. Dynamics and transformations of the Josephson vortex lattice in layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 2001. Vol. 64. P. 052508.
22. Koshelev A. E. Role of in-plane dissipation in dynamics of a Josephson vortex lattice in high-temperature superconductors // *Phys. Rev. B.* 2000. Vol. 62. P. R3616.
23. Yu. I. Latyshev, Koshelev A. E., Pavlenko V. N. et al. Novel features of Josephson flux flow in Bi-2212: contribution of in-plane dissipation, coherent response to mm-wave radiation, size eff // *Physica C.* 2002. Vol. 367. P. 365.
24. Mints R. G., Snapiro I. B. Josephson-vortex Cherenkov radiation // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 52. Pp. 9691–9696.

25. Kurin V. V., Yulin A. V. Radiation of linear waves by solitons in a Josephson transmission line with dispersion // *Phys. Rev. B*. 1997. Vol. 55. Pp. 11659–11669.
26. Kivshar Y. S., Malomed B. A. Dynamics of fluxons in a system of coupled Josephson junctions // *Phys. Rev. B*. 1988. Vol. 37. Pp. 9325–9330.
27. Goldobin E., Wallraf A., Thyssen N., Ustinov A. V. Cherenkov radiation in coupled long Josephson junctions // *Phys. Rev. B*. 1998. Vol. 57. P. 130.
28. Goldobin E., Wallraf A., Ustinov A. V. Cherenkov Radiation from Fluxon in a Stack of Coupled Long Josephson Junctions // *J. Low Temp. Phys.* 2000. Vol. 119. P. 589.
29. Kurin V. V., Yulin A. V., Shereshevsky I. A., Vdovicheva N. K. Cherenkov Radiation of Vortices in a Two-Dimensional Annular Josephson Junction // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. Pp. 3372–3375.
30. Ustinov A. V., Cirillo M., Malomed B. A., Kivshar Y. S. Fluxon motion in one-dimensional Josephson junction arrays // *Physica B: Condensed Matter*. 1994. Vol. 194-196. P. 1765.
31. Caputo J. G., Flytzanis N., Devoret M. Dressed fluxon in a Josephson window junction // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50. P. 6471.
32. Caputo J. G., Flytzanis N., Vavalis E. Effect of geometry on fluxon width in a Josephson junction // *Int. J. Mod. Phys. C*. 1996. Vol. 7. Pp. 191–216.
33. Eilbeck J. C., Lomdahl P. S., Olsen O. H., Samuelsen M. R. Comparison between one-dimensional and two-dimensional models for Josephson junctions of overlap type // *J. Appl. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 861.
34. Celli V., Flytzanis N. Motion of a Screw Dislocation in a Crystal // *J. Appl. Phys.* 1970. Vol. 41. P. 4443.
35. Peyrard M., Kruskal M. D. Kink dynamics in the highly discrete sine-Gordon system // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1984. Vol. 14. P. 88.
36. Lee G. S. Analysis of linear resonances in modern Josephson geometries // *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 1991. Vol. 1. P. 121.

37. Monaco R., Costabile G., Martucciello N. Influence of the idle region on the dynamic properties of window Josephson tunnel junctions // *J. Appl. Phys.* 1995. Vol. 77. P. 2073.
38. Thyssen N., Ustinov A. V., Kohlstedt H. et al. // *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Superconducting Devices and High- T_c Materials* / Ed. by R. D. Parmentier, N. F. Pedersen. Singapore: World Scientific, 1994.
39. Flytzanis N. // *Nonlinear Structure and Dynamics in Condensed Matter* / Ed. by A. Bishop, T. Schneider. New York: Springer, 1980. P. 166.
40. Kohlstedt H., Hallmanns G., Nevirkovets I. P. et al. Preparation and properties of Nb/Al- AlO_x /Nb multilayers // *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 1993. Vol. 3. P. 2197.
41. Lee G. S., Barfknecht A. Geometric and material dispersion in Josephson transmission lines // *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 1992. Vol. 2. P. 67.
42. Hechtfisher G., Kleiner R., Schlenga K. et al. Collective motion of Josephson vortices in intrinsic Josephson junctions in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+y}$ // *Phys. Rev. B.* 1997. Vol. 55. P. 14638.
43. Karlson R. V., Goldman A. M. Propagating Order-Parameter Collective Modes in Superconducting Films // *Phys. Rev. Lett.* 1975. Vol. 34. P. 11.
44. Пономарев Я. Г. Туннельная и андреевская спектроскопия высокотемпературных сверхпроводников // *УФН.* 2002. Т. 172. С. 705.
45. Mochán W. L., del Castillo-Mussot M., Barrera R. G. Effect of plasma waves on the optical properties of metal-insulator superlattices // *Phys. Rev. B.* 1987. Vol. 35. P. 1088.
46. Helm C., Preis C., Forsthofer F. et al. Coupling between Phonons and Intrinsic Josephson Oscillations in Cuprate Superconductors // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 737.
47. Helm C., Preis C., Walter C., Keller J. Theory for the coupling between longitudinal phonons and intrinsic Josephson oscillations in layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 2000. Vol. 62. P. 6002.
48. Maksimov E. G., Arseyev P. I., Maslova N. S. Phonon assisted tunneling in Josephson junctions // *Solid State Comm.* 1999. Vol. 111. P. 391.

49. Иванченко Ю. М., Медведев Ю. В. Возбуждение звука в джозефсоновском контакте // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 2274.
50. Blatter G., Feigel'man M. V., Geshkenbein V. B. et al. Vortices in high-temperature superconductors // Rev. of Mod. Phys. 1994. Vol. 66. P. 1125.
51. Займан Д. Принципы теории твердого тела. Мир, Москва, 1974.
52. Prade J., Kulkarni A. D., de Wette F. W. et al. Calculation of Raman- and infrared-active modes of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 39. P. 2771.
53. Садовский М. В. Высокотемпературная сверхпроводимость в слоистых соединениях на основе железа // УФН. 2008. Т. 178. С. 1243.
54. Ивановский А. Л. Новые высокотемпературные сверхпроводники на основе оксиарсенидов редкоземельных и переходных металлов и родственных фаз: синтез, свойства и моделирование // УФН. 2008. Т. 178. С. 1273.
55. Изюмов Ю. А., Курмаев Э. З. Новый класс высокотемпературных сверхпроводников в FeAs-системах // УФН. 2008. Т. 178. С. 1307.
56. Lebowitz P., Stephen M. J. Properties of Vortex Lines in Superconducting Barriers // Phys. Rev. 1967. Vol. 163. P. 376.
57. Kovaleva N. N., Boris A. V., Holden T. et al. c-axis lattice dynamics in Bi-based cuprate superconductors // Phys. Rev. B. 2004. Vol. 69. P. 054511.
58. Petraglia A., Ustinov A. V., Pedersen N. F., Sakai S. Numerical study of fluxon dynamics in a system of two-stacked Josephson junctions // J. Appl. Phys. 1995. Vol. 77. P. 1171.