

Дмитриев Артемий Владимирович

**Управляемое демпфирование колебаний  
высокодобротных механических резонаторов**

01.04.01 – Приборы и методы экспериментальной физики

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

Митрофанов Валерий Павлович

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Обзор литературы</b> . . . . .	12
1.1. Управляемое демпфирование высокочастотных механических осцилляторов . . . . .	12
1.2. Интерферометрические гравитационно-волновые детекторы и проблема демпфирования струнных мод колебаний подвесов их пробных масс . . . . .	23
<b>Глава 2. Разработка и реализация системы демпфирования струнных мод колебаний кварцевых нитей для подвесов пробных масс гравитационно-волновых детекторов</b> . . . . .	28
2.1. Модель кварцевого подвеса . . . . .	28
2.2. Демпфирование через промежуточный осциллятор . . . . .	30
2.3. Демпфирование с использованием оптического сенсора и электростатического актюатора . . . . .	38
2.4. Результаты измерений. . . . .	45
2.5. Исследование возможностей применения различных способов нанесения на поверхность нити электрического заряда . . . . .	48
2.6. Заключение . . . . .	56
<b>Глава 3. Моды колебаний дисковых резонаторов с большим значением углового индекса</b> . . . . .	58
3.1. Резонансные частоты и форма мод колебаний акустических дисковых резонаторов с большим значением углового индекса . . . . .	58
3.2. Изгибные моды колебаний кремниевых дисковых резонаторов . . . . .	90

<b>Глава 4. Трехмодовая электромеханическая система управляемого демпфирования изгибных мод колебаний дисковых резонаторов</b> . . . . .	103
4.1. Теоретическое описание . . . . .	103
4.2. Экспериментальная установка . . . . .	110
4.3. Результаты и выводы . . . . .	112
<b>Заключение</b> . . . . .	115
<b>Литература</b> . . . . .	117

# Введение

## Актуальность темы исследования

Управляемое демпфирование высокочастотных механических мод колебаний физических систем используется в различных областях физики и техники. В частности можно отметить управление добротностью рабочей механической моды кантилеверов в атомно-силовой микроскопии для повышения скорости сканирования в режиме амплитудной модуляции [1]; управление добротностью детектирующей моды микроэлектромеханических гироскопов для увеличения их чувствительности [2]; компенсацию температурной зависимости добротности и резонансной частоты в механических устройствах, работающих в широком диапазоне температур [3]; создание фононных лазеров [4]. Особо можно выделить создание систем холодного демпфирования колебаний механических осцилляторов, не вносящих дополнительных шумов в демпфируемый осциллятор. Таким образом удастся значительно снизить эффективную шумовую температуру механического осциллятора. В качестве примеров можно привести демпфирование струнных мод колебаний подвесов пробных масс интерферометрических гравитационно-волновых детекторов [5]; холодное демпфирование колебаний зеркал лазерных интерферометров [6]; различные реализации холодного демпфирования колебаний механических осцилляторов в микро- и нанoeлектромеханических системах (МЭМС и НЭМС) для их охлаждения вплоть до состояний, близких к основному квантовому [7, 8] и приготовления сжатых состояний МЭМС-осцилляторов [9].

В основе принципа работы существующих систем управляемого демпфирования, как правило, лежит силовое воздействие на демпфируемый осциллятор на его резонансной частоте со стороны некоторой демпфирующей подсистемы. Это воздействие эквивалентно внесению в осциллятор дополнительной жесткости и дополнительного затухания, величины которых зависят

от амплитуды и фазы демпфирующей силы. Такие системы можно разделить на две группы:

1. Системы, основанные на использовании цепей обратных связей. В них сигнал сенсора, регистрирующего колебания осциллятора, подается на актюатор силового воздействия через цепь обратной связи (она может быть пассивной или активной), в которой выполняется соответствующее преобразование сигнала.
2. Системы, принцип действия которых основан на обратном динамическом влиянии сенсора на демпфируемый осциллятор. В результате такого воздействия в осциллятор вносятся дополнительные жесткость и затухание, знак и величина которых зависят от параметров сенсора и режима его работы.

С точки зрения практической реализации основное различие между системами первого и второго типов заключается в том, что в первых сенсор и актюатор силового воздействия, вообще говоря, разделены физически, и механизмы их взаимодействия с демпфируемым осциллятором могут иметь различную физическую природу. В системах же второго типа для измерения динамических характеристик и оказания силового воздействия на демпфируемый осциллятор используется одно и то же взаимодействие, сенсор и актюатор в таких системах совмещены.

Среди других известных реализаций систем управляемого демпфирования можно отметить непосредственное изменение величины угла потерь в материале упругого элемента демпфируемого осциллятора, — например, с помощью лазерной накачки гетероперехода в полупроводниковых пьезоэлектрических кантилеверах [10].

В данной работе предложены, проанализированы и реализованы схемы управляемого демпфирования колебаний в двух различных высокочастотных

механических системах.

### **Цель диссертационной работы**

1. Разработка и экспериментальная реализация системы управляемого демпфирования на основе обратной связи высокочастотных струнных мод колебаний кварцевых подвесов пробных масс лазерных интерферометрических гравитационно-волновых детекторов.
2. Разработка и экспериментальная реализация системы демпфирования колебаний кремниевых дисковых резонаторов, основанной на обратном динамическом влиянии емкостного сенсора, регистрирующего колебания.

### **Задачи диссертационной работы**

1. Разработка сенсора и актюатора для системы управляемого демпфирования струнных мод колебаний кварцевых подвесов и экспериментальная реализация такой системы.
2. Исследование акустических мод колебаний с большими значениями углового индекса в кремниевых дисковых резонаторах.
3. Разработка и экспериментальная реализация схемы управляемого демпфирования изгибных мод колебаний в кремниевых дисковых резонаторах, основанной на обратном влиянии емкостного сенсора с увеличенной эффективностью преобразования механических колебаний в электрический сигнал.

### **Практическая значимость**

Ключевым элементом подвесов пробных масс интерферометрических гравитационно-волновых детекторов второго поколения (например, Advanced LIGO) являются нити из плавленого кварца. Малые собственные потери в плавленом

кварце и возможность сварки кварцевой пробной массы с нитями подвеса в монолитную конструкцию позволяют добиться крайне малой величины механического затухания в подвесах и, в соответствии с флуктуационно-диссипационной теоремой, низкого уровня их теплового шума [11]. Однако большое (несколько суток) время затухания колебаний в струнных модах колебаний этих нитей, а также возможный переход системы в режим параметрической неустойчивости при большой мощности оптической накачки делают необходимым демпфирование этих мод колебаний. Применение традиционных схем демпфирования для такого специфического объекта, как нить из плавленого кварца, затруднено ввиду трудности осуществления эффективного бесконтактного взаимодействия тонкой оптически прозрачной диэлектрической нити с электрической, оптической или магнитной демпфирующей системой. Таким образом, для осуществления эффективного демпфирования струнных мод колебаний таких нитей требуется разработка систем демпфирования со специальными сенсорами и актюаторами.

Другая система демпфирования, разработанная и экспериментально реализованная в данной работе, предназначена для демпфирования колебаний в дисковых резонаторах, изготовленных из монокристаллического кремния. Детальное исследование структуры мод колебаний дисковых резонаторов с большими значениями углового индекса и потерь в таких модах, также составляющее часть данной работы, было выполнено в рамках исследований по созданию интерферометрических гравитационно-волновых детекторов третьего поколения. В настоящий момент наиболее перспективным материалом для изготовления пробных масс и их подвесов в таких детекторах считается монокристаллический кремний [12], при этом предполагается, что подвесы будут представлять собой тонкие полоски из монокристаллического кремния. Для проектирования таких подвесов необходимы исследования механической диссипации в тонких кремниевых полосках. Для этих исследований используют

ся моды колебаний дисковых резонаторов с большими значениями углового индекса, поскольку в таких модах колебания локализованы в узком слое, прилегающем к боковой поверхности диска, что позволяет уменьшить влияние потерь в креплении резонатора, если оно осуществляется в центре диска. Кроме того, акустические моды, образованные поверхностными акустическими волнами, и моды шепчущей галереи колебаний дисковых резонаторов с большими значениями углового индекса имеют перспективы применения в телекоммуникациях (в качестве фильтров), как био- и химические сенсоры вследствие потенциально высоких значений добротности таких мод.

### **Научная новизна**

1. Впервые разработана и экспериментально реализована система управляемого демпфирования струнных мод колебаний кварцевой нити с использованием оптического сенсора и электростатического актюатора, работающего на основе взаимодействия управляющего электрического поля с локально нанесенным на поверхность нити электрическим зарядом. Продемонстрировано управление добротностью струнных мод колебаний нити из плавленого кварца (макета подвеса пробной массы гравитационно-волнового детектора) при помощи этой системы в диапазоне от  $1,2 \times 10^7$  до  $2 \times 10^4$ .
2. Впервые теоретически изучена структура мод колебаний с большими значениями углового индекса в акустических дисковых резонаторах со сравнимыми величинами толщины и диаметра, получены дисперсионные кривые и распределения амплитуд смещения. Результаты подтверждены экспериментально для мод квазирэлеевского, квазилэмбовского и квазиклинового типов, а также мод шепчущей галереи.
3. Впервые предложена, проанализирована и экспериментально реализована трехмодовая система демпфирования механических колебаний, в

которой механический осциллятор взаимодействует с двумя связанными радиочастотными электрическими колебательными контурами. Осуществлено демпфирование изгибных мод колебаний дискового резонатора из монокристаллического кремния с использованием этой системы.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Использование специально разработанного оптического сенсора и электростатического актюатора, осуществляющего силовое воздействие на электрически заряженный участок поверхности кварцевой нити подвеса пробной массы гравитационно-волнового детектора, позволяет осуществить управляемое демпфирование струнной моды колебаний этой нити в диапазоне значений добротности от  $1,2 \times 10^7$  до  $2 \times 10^4$ .
2. Для нанесения электрического заряда на поверхность кварцевой нити можно использовать различные методы: контактную электризацию, электронную бомбардировку, перераспределение электрического заряда в электростатическом поле при нагреве нити. Наибольшая плотность заряда ( $7 \times 10^{-11}$  Кл/см для нити диаметром  $\approx 240$  мкм) достигается при использовании последнего метода.
3. Использование аналитического метода решения уравнения движения для мод колебаний свободных дисковых резонаторов с большими значениями углового индекса, в котором часть граничных условий удовлетворяется точно, а остальные удовлетворяются приближенно с точностью до некоторого члена разложения решения по набору базисных функций, позволяет рассчитывать собственные частоты этих мод колебаний с точностью  $\approx 1\%$ .
4. Добротность изгибных мод колебаний, возбуждаемых в дисковом резонаторе, представляющем собой стандартную пластину из монокристал-

лического кремния с двусторонней полировкой поверхности, закрепленную в центре, ограничена потерями в креплении для мод колебаний с малым угловым индексом  $k$ , термоупругими потерями в промежуточной области значений  $k$  и поверхностными потерями для больших значений  $k$ .

5. Система демпфирования изгибных мод колебаний дисковых резонаторов из монокристаллического кремния с использованием параметрического емкостного преобразователя и двух связанных радиочастотных электрических колебательных контуров позволяет значительно усилить эффективность взаимодействия между механическим осциллятором и электрической подсистемой.

**Достоверность результатов, полученных в работе**, подтверждается многократной их проверкой с использованием современной аппаратуры и экспериментальной техники, сравнением с теоретическими расчетами и результатами численного моделирования, а также их соответствием результатам, полученным другими исследователями.

### **Апробация работы**

Результаты работы были представлены на конференциях:

- «13-я российская гравитационная конференция — международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике» (RUSGRAV-13), Москва, 2008 г.;
- «XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, 2009 г.;
- LSC-Virgo March 2009 Meeting, Caltech, Аркадия, США, 2009 г.;
- 445th Wilhelm and Else Heraeus Seminar: Quantum Measurement and Metrology with Solid State Devices, Бад Хоннеф, Германия, 2009 г.;

- LSC-Virgo September 2010 Meeting, Краков, Польша, 2010 г.;
- IX Международный семинар «Физико-математическое моделирование систем» (ФММС-9), Воронеж, 2012 г.;
- LSC-Virgo September 2013 meeting, Ганновер, Германия, 2013 г.

### **Публикации**

Материалы диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых журналах из перечня ВАК [13–16], а также в материалах и сборниках тезисов международных конференций [17–22].

### **Личный вклад автора**

Все представленные в диссертационной работе оригинальные результаты получены лично автором. Постановка задач, обработка и анализ результатов, подготовка публикаций по теме работы осуществлялась совместно с соавторами, причем вклад автора был определяющим.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация включает в себя введение, четыре главы, заключение, список опубликованных работ автора и список цитированной литературы. Текст диссертации изложен на 127 страницах, включающих 42 рисунка. Список цитированной литературы включает 87 наименований.

# Глава 1

## Обзор литературы

### 1.1. Управляемое демпфирование высокодобротных механических осцилляторов

#### 1.1.1. Общее теоретическое описание демпфирования механического осциллятора

**Механический осциллятор с затуханием.** Рассмотрим гармонический осциллятор с затуханием, находящийся под воздействием некоторых внешних сил, равнодействующую которых будем обозначать  $F(t)$ . Смещение такого осциллятора в спектральном представлении<sup>1</sup>

$$\tilde{x}(\Omega) = \chi_{osc}(\Omega)\tilde{F}(\Omega), \quad (1.1)$$

где  $\chi_{osc}(\Omega)$  – обобщенная восприимчивость гармонического осциллятора

$$\chi_{osc}(\Omega) = \frac{1}{m[\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\Gamma\Omega]}. \quad (1.2)$$

Здесь  $m$  – масса осциллятора,  $\Omega_0$  – его резонансная частота, а  $\Gamma = \frac{H}{m} = 2\gamma = \Omega_0/Q$  – коэффициент затухания,  $Q$  – добротность осциллятора. Согласно флуктуационно-диссипационной теореме [23], спектральная плотность ланжевеновой силы тепловых флуктуаций, действующей на осциллятор, равна

$$S_{F_T}(\Omega) = \frac{k_b T}{\pi\Omega} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\chi_{osc}(\Omega)} \right] = \frac{1}{\pi} k_b T \Gamma m = \frac{1}{\pi} k_b T H. \quad (1.3)$$

Спектральная плотность тепловых колебаний осциллятора имеет лоренцеву форму:

$$S_x^T(\Omega) = |\chi_{osc}(\Omega)|^2 S_{F_T}(\Omega) = \frac{k_b T}{\pi m} \frac{\Gamma}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}. \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup> Здесь и далее используются обозначения для фурье-преобразований вида  $F[x(t)](\Omega) = \tilde{x}(\Omega)$ .

Интегрируя это выражение по всем частотам<sup>2</sup>, получим выражение для дисперсии координаты осциллятора  $\sigma_x$ , удовлетворяющее теореме о равномерном распределении:

$$\frac{m\Omega_0^2\sigma_x^2}{2} = \frac{k_b T}{2}. \quad (1.5)$$

Дисперсия тепловых колебаний осциллятора зависит только от температуры и *не зависит* от коэффициента затухания  $\Gamma$  (потому что коэффициент затухания входит как в выражение для спектральной плотности силы тепловых колебаний Ланжевена, так и в обобщенную восприимчивость осциллятора). От коэффициента затухания зависит распределение тепловых колебаний по частотам: чем меньше затухание, тем более тепловые колебания сосредоточены вблизи резонансной частоты и тем менее их среднеквадратичная амплитуда вдали от резонанса, что и обуславливает, в частности, использование высокочастотных кварцевых нитей в качестве подвесов пробных масс лазерных интерферометрических гравитационно-волновых детекторов.

**Влияние демпфирующей силы.** Пусть на осциллятор со стороны некоторой *демпирующей системы* действует сила  $F_{fb}$ , пропорциональная скорости осциллятора  $i\Omega\tilde{x}(\Omega)$  и направленная в сторону, противоположную скорости. Величину этой силы можно записать в виде

$$\tilde{F}_{fb} = -im\Gamma\Omega g\tilde{x}(\Omega), \quad (1.6)$$

где  $g$  есть безразмерный коэффициент, обозначающий степень демпфирования<sup>3</sup>. Смещение осциллятора можно записать как

$$\tilde{x}(\Omega) = \chi_{osc}(\Omega) \left[ \tilde{F}_T(\Omega) + \tilde{F}_{fb}(\Omega) \right] = \chi_{osc}^1(\Omega) F_T(\Omega), \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup> И учитывая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2} d\Omega = \frac{\pi}{\Gamma \Omega_0^2}$ .

<sup>3</sup> Для простоты рассмотрение ограничивается случаем  $g > 0$ .

где

$$\chi_{osc}^1(\Omega) = \frac{1}{m [\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\Gamma(1+g)\Omega]} \quad (1.8)$$

есть обобщенная восприимчивость эквивалентного гармонического осциллятора массой  $m$ , с собственной частотой  $\Omega$  и с коэффициентом затухания  $\Gamma(1+g) = \Gamma_{eff}$ .

Спектральная плотность тепловых флуктуаций координаты осциллятора в этом случае

$$S_x^1(\Omega) = |\chi_{osc}^1(\Omega)|^2 S_{F_T}(\Omega) = \frac{k_b T}{\pi m} \frac{\Gamma}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2(1+g)^2 \Omega^2}. \quad (1.9)$$

Для дисперсии координаты осциллятора получаем выражение

$$\frac{m\Omega_0^2\sigma_x^2}{2} = \frac{k_b T}{2(1+g)} = \frac{k_b T_{eff}}{2}, \quad (1.10)$$

где  $T_{eff} = T/(1+g)$  – эффективная температура эквивалентного осциллятора, причем  $T_{eff} < T$ .

При этом спектральная плотность силы тепловых флуктуаций, действующей на осциллятор, по-прежнему есть

$$S_{F_T}(\Omega) = \frac{1}{\pi} k_b T \Gamma m = \frac{1}{\pi} k_b T_{eff} \Gamma_{eff} m. \quad (1.11)$$

Такое понижение эффективной температуры осциллятора, при котором в систему не вносятся дополнительные тепловые флуктуации, называется *холодным демпфированием* осциллятора [6, 24]<sup>4</sup>.

Введем также коэффициент подавления теплового шума координаты осциллятора

$$R(\Omega) = \sqrt{\frac{S_x^T(\Omega)}{S_x^1(\Omega)}} = \left| \frac{\Omega_0^2 - \Omega + i\Gamma_{eff}\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\Gamma\Omega} \right|. \quad (1.12)$$

---

<sup>4</sup> В англоязычной литературе понятие холодного демпфирования (cold damping) относится, как правило, исключительно к силовой схеме демпфирования.

Заметим, что вдали от резонанса этот коэффициент стремится к единице, а на резонансной частоте достигает своего максимального значения

$$R_r = R(\Omega_0) = 1 + g. \quad (1.13)$$

### 1.1.2. Силовое управляемое демпфирование механических колебаний

В настоящем подразделе описываются силовые линейные схемы демпфирования механических колебаний, основанные на использовании цепей обратных связей. В них сигнал сенсора, регистрирующего колебания осциллятора, подается на актюатор силового воздействия через цепь обратной связи (она может быть пассивной или активной), в которой выполняется соответствующее преобразование сигнала.

**Силовое демпфирование механического осциллятора.** Пусть гармонический осциллятор с обобщенной восприимчивостью вида (1.2) охвачен демпфирующей цепью обратной связи, в которой осуществляется измерение координаты осциллятора, а на осциллятор с ее стороны действует сила, регулярная составляющая  $F_{fb}$  которой описывается соотношением (1.6). Действие такой цепи обратной связи изменяет обобщенную восприимчивость системы, которую можно записать как

$$\chi_{osc}^{fb}(\Omega) = \frac{\chi_{osc}(\Omega)}{1 - \eta_{fb}(\Omega)\chi_{osc}(\Omega)} = \chi_{osc}^1(\Omega), \quad (1.14)$$

где

$$\eta_{fb}(\Omega) = -im\Gamma\Omega g \quad (1.15)$$

есть коэффициент передачи в цепи обратной связи:

$$\tilde{F}_{fb}(\Omega) = \eta_{fb}(\Omega)\tilde{x}(\Omega). \quad (1.16)$$

Предположим, что шум цепи обратной связи, приведенный к ее входу, не коррелирован с тепловым шумом осциллятора. Тогда спектральную плотность суммарной случайной силы, действующей на осциллятор, можно записать как

$$S_F^{fb}(\Omega) = S_F^T(\Omega) + |\eta_{fb}(\Omega)|^2 S_x^{fbN}(\Omega). \quad (1.17)$$

Здесь  $S_x^{fbN}(\Omega)$  – спектральная плотность шумов в цепи обратной связи, приведенная к ее входу. Спектральная плотность флуктуаций координаты осциллятора в данном случае

$$S_x^{fb}(\Omega) = |\chi_{osc}^{fb}(\Omega)|^2 \left[ S_F^T(\Omega) + |\eta_{fb}(\Omega)|^2 S_x^{fbN}(\Omega) \right]. \quad (1.18)$$

Коэффициент подавления теплового шума на резонансной частоте

$$R_r = R(\Omega_0) = \frac{1 + g}{\sqrt{1 + g^2 \frac{S_x^{fbN}(\Omega_0)}{S_x^T(\Omega_0)}}}. \quad (1.19)$$

Предположим теперь, что цепь обратной связи является источником только теплового шума на диссипативном элементе с коэффициентом затухания  $g\Gamma$ , обусловленного флуктуационно-диссипационной теоремой (1.3). Тогда

$$|\eta_{fb}(\Omega)|^2 S_x^{fbN}(\Omega) = \frac{1}{\pi} k_b T_{fb} g \Gamma m, \quad (1.20)$$

где  $T_{fb}$  – температура цепи обратной связи<sup>5</sup>. Представим дисперсию координаты осциллятора  $\sigma_x^2$  в виде суммы дисперсий тепловых колебаний, обусловленных собственным тепловым шумом осциллятора  $(\sigma_x^T)^2$  и тепловым шумом в цепи обратной связи  $(\sigma_x^{fb})^2$ , причем будем считать, что эти шумы не коррелированы:

$$(\sigma_x^T)^2 = \frac{k_b}{m\Omega_0^2} \frac{T}{1 + g}, \quad (1.21)$$

$$(\sigma_x^{fb})^2 = \frac{k_b}{m\Omega_0^2} \frac{gT_{fb}}{1 + g}. \quad (1.22)$$

---

<sup>5</sup> Очевидно, любым белым шумам (не только тепловым) в цепи обратной связи можно сопоставить некоторую шумовую температуру  $T_{fb}$ , определяемую формулой (1.20).

В случае, если  $T = T_{fb}$ , суммарная дисперсия

$$\sigma_x^2 = (\sigma_x^T)^2 + (\sigma_x^{fb})^2 = \frac{k_b}{m\Omega_0^2}T \quad (1.23)$$

не отличается от дисперсии тепловых колебаний осциллятора при отсутствии цепи обратной связи. Если же  $T_{fb} \neq T$ , то дисперсию можно записать в виде  $\sigma_x^2 = \frac{k_b}{m\Omega_0^2}T_{eff}$ , где

$$T_{eff} = T \left( \frac{1 + g \frac{T_{fb}}{T}}{1 + g} \right) \quad (1.24)$$

есть эквивалентная шумовая температура осциллятора, причем если  $T_{fb} < T$ , то и  $T_{eff} < T$  (что соответствует холодному демпфированию). По этой причине холодное демпфирование иногда [25] называют методом *частичного охлаждения* осциллятора. Случай  $T_{fb} = 0$  соответствует идеальному холодному демпфированию (1.10).

**Силовое демпфирование одной из мод колебаний механического резонатора.** Рассмотрим механический резонатор с дискретным набором резонансных частот, обобщенную восприимчивость  $\chi_{osc}(\Omega)$  которого в некоторой окрестности демпфируемой моды с частотой  $\Omega_0$  можно представить в виде соотношения (1.2). Предположим, что в этом диапазоне частот спектральную плотность  $S_x^b$  тепловых колебаний, связанных с другими модами колебаний, можно считать не зависящей от частоты  $\Omega$  и не коррелированной с тепловым шумом, относящимся к рассматриваемой моде, спектральная плотность которого  $S_x^{T(0)}(\Omega)$  имеет лоренцеву форму кривой и описывается выражением (1.4). Тогда общая спектральная плотность тепловых колебаний в отсутствие цепи обратной связи

$$S_x^T(\Omega) = S_x^{T(0)}(\Omega) + S_x^b. \quad (1.25)$$

При наличии цепи обратной связи колебания осциллятора можно представить в виде

$$\tilde{x}(\Omega) = \chi_{osc}(\Omega) \left[ \tilde{F}_T(\Omega) + \tilde{F}_{fb}(\Omega) \right] + \Delta\tilde{x}_b, \quad (1.26)$$

где  $F_{fb}(\Omega)$  – сила, действующая на резонатор со стороны цепи обратной связи (1.6), а  $\Delta\tilde{x}_b$  – флуктуации, которым соответствует спектральная плотность  $S_x^b$ . Мы считаем, что наличие цепи обратной связи не влияет на колебания  $S_x^b$ , так как, во-первых, вдали от резонанса обратная связь слабо изменяет вид спектральной плотности тепловых колебаний (1.9), а во-вторых, все реализации цепи обратной связи, которые будут рассматриваться в этой работе, имеют ограниченную полосу пропускания, расположенную в области частоты  $\Omega_0$ .

Таким образом, спектральная плотность колебаний демпфированного осциллятора

$$S_x^{fb}(\Omega) = |\chi_{osc}^{fb}(\Omega)|^2 S_F^T(\Omega) + \left| \frac{1}{1 + \chi_{osc}(\Omega)\eta_{fb}(\Omega)} \right|^2 S_x^b = S_x^{fb(0)}(\Omega) + \frac{1}{|R(\Omega)|^2} S_x^b. \quad (1.27)$$

Здесь  $\chi_{osc}^{fb}(\Omega)$  есть обобщенная восприимчивость системы с обратной связью вблизи частоты  $\Omega_0$  (1.14),  $S_x^{fb(0)}$  – спектральная плотность колебаний демпфированного осциллятора в отсутствии шумов  $S_x^b$  (1.9), а

$R(\Omega) = \sqrt{S_x^{T(0)}(\Omega)/S_x^{fb(0)}(\Omega)}$  – коэффициент подавления теплового шума (1.12). Учитывая (1.25), можно записать

$$S_x^{fb}(\Omega) = \frac{1}{|R(\Omega)|^2} S_x^T(\Omega). \quad (1.28)$$

Таким образом, при наличии теплового шума на других модах колебаний механического резонатора цепь обратной связи по-прежнему осуществляет холодное демпфирование колебаний вблизи резонансной частоты демпфируемой моды колебаний с коэффициентом подавления *суммарного* теплового шума (1.12).

Спектральную плотность (1.27) можно переписать в виде

$$S_x^{fb}(\Omega) = S_x^{fb(0)}(\Omega) \left[ 1 - g(2+g)\varepsilon_b \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \right] + S_x^b, \quad (1.29)$$

где  $\varepsilon_b = S_b/S_x^{T(0)}(\Omega_0)$ ,  $S_x^{T(0)}(\Omega_0)$  – спектральная плотность тепловых колебаний демпфируемой моды на ее резонансной частоте. Интегрируя первое слагаемое в правой части этого выражения<sup>6</sup>, получим выражение для дисперсии тепловых колебаний, соответствующих демпфируемой моде колебаний резонатора:

$$\sigma_x^2 = \frac{k_b T_{eff}}{m \Omega_0^2}, \quad (1.30)$$

где  $T_{eff}$  есть эффективная шумовая температура демпфируемой моды колебаний

$$T_{eff} = \frac{T}{1+g} \left[ 1 - \varepsilon_b g(2+g) \sqrt{1 + \frac{2\Omega_0^2 \left( \sqrt{1 + \frac{\Gamma^2(1+g)^2}{2\Omega_0^2}} - 1 \right)}{4\Omega_0^2 - \Gamma^2(1+g)^2}} \right] \approx T \frac{1 - \varepsilon_b g(2+g)}{1+g}. \quad (1.31)$$

Заметим, что определенная подобным образом эффективная шумовая температура может оказаться отрицательной при достаточно больших значениях  $g$ . При этом в окрестности демпфируемой частоты наблюдается уменьшение уровня теплового шума по сравнению с уровнем тепловых колебаний, соответствующих другим модам резонатора [6]

---

<sup>6</sup> Собственно интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^2 d\Omega}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma_{eff}^2 \Omega^2} = \frac{\pi}{\Gamma_{eff}} \sqrt{1 + \frac{2\Omega_0^2 \left( \sqrt{1 + \frac{\Gamma_{eff}^2}{2\Omega_0^2}} - 1 \right)}{4\Omega_0^2 - \Gamma_{eff}^2}} \approx \frac{\pi}{\Gamma_{eff}} \sqrt{\frac{4\Omega_0^2 - \frac{\Gamma_{eff}^2}{2}}{4\Omega_0^2 - \Gamma_{eff}^2}} \approx \frac{\pi}{\Gamma_{eff}}.$$

Второе равенство получается при использовании двух первых членов разложения  $\sqrt{1 + \frac{\Gamma_{eff}^2}{2\Omega_0^2}} = 1 + \frac{\Gamma_{eff}^2}{4\Omega_0^2} + O\left[\frac{\Gamma_{eff}^2}{2\Omega_0^2}\right]^3$ , третье – при использовании только первого члена.

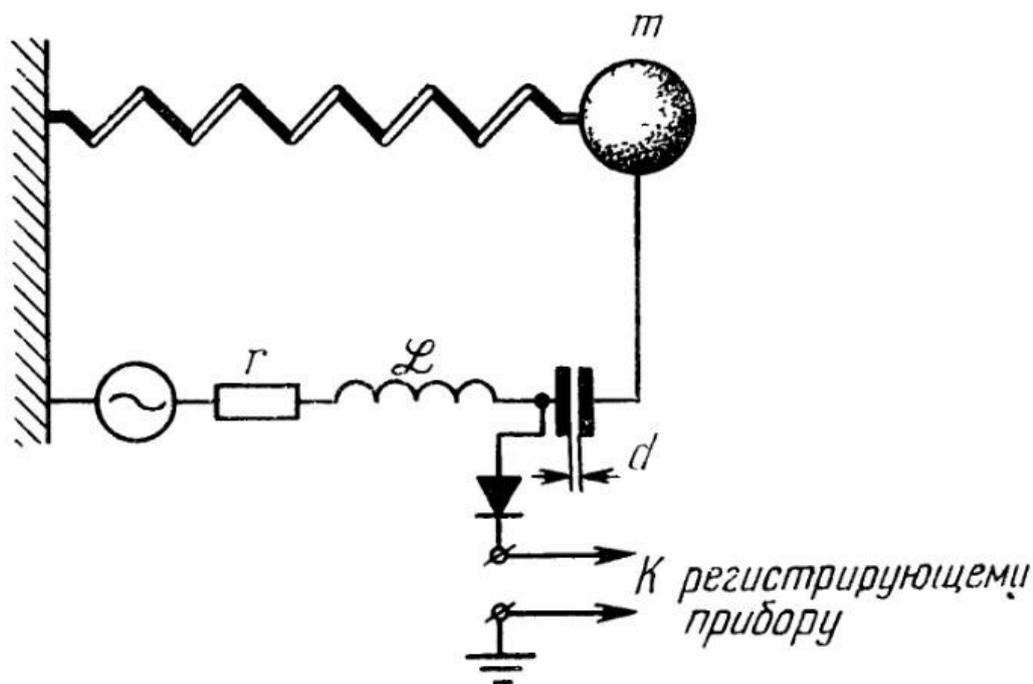


Рис. 1.1. Емкостный датчик смещений [26].

### 1.1.3. Параметрическое демпфирование механических колебаний

Способ внесения в механический осциллятор дополнительного затухания, в котором используется обратное влияние на осциллятор емкостного преобразователя на радиочастотном электрическом колебательном контуре, подробно описан в [26]. В системах этого типа ширина полосы электрического контура много больше механической частоты.

Рассмотрим механизм работы такой схемы. На рис. 1.1 (рисунок взят из [26]) представлен емкостный датчик смещений, в котором изменение расстояния  $d$  между пластинами электрического конденсатора приводит к изменению амплитуды и фазы колебаний в радиочастотном электрическом колебательном контуре с резонансной частотой  $\nu_e$ . Частота включенного в контур радиочастотного генератора (частота накачки)  $\omega$  выбирается близкой к значениям  $\nu_e \pm \Gamma_e/2$ , т.е. накачка осуществляется в области максимального наклона резонансной кривой электрического контура. В этой области емкостный

датчик обладает наибольшей чувствительностью: небольшим изменениям резонансной частоты электрического контура соответствуют существенные изменения амплитуды колебаний на нем. При этом пластины конденсатора притягиваются с силой

$$F = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}. \quad (1.32)$$

Здесь  $S$  — площадь пластин конденсатора,  $V$  — напряжение на них. Движение механического осциллятора модулирует колебания напряжения на электрическом контуре: если частота радиочастотного генератора, включенного в контур, равна  $\omega$ , то колебания механического осциллятора с частотой  $\Omega_m$  приводят к появлению в спектре колебаний контура т.н. антистоксовой и стоксовой компонент с частотами  $\omega + \Omega_m$  и  $\omega - \Omega_m$ . В выражении для силы, действующей на осциллятор (пропорциональной квадрату напряжения  $V$ ), появляются компоненты с частотой, равной частоте механических колебаний, которые оказывают существенное влияние на движение осциллятора. Отметим, что амплитуды этих компонент тем больше, чем больше чувствительность датчика. Действие на осциллятор этих компонент силы приводит к эффективному изменению его жесткости и коэффициента затухания.

Уравнения движения для рассматриваемой системы можно записать в виде

$$\ddot{q} + \Gamma_e \dot{q} + \nu_e^2 q - \frac{\nu_e^2 \beta}{d} q x = \frac{1}{2} u_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (1.33)$$

$$\ddot{x} + \Gamma_m \dot{x} + \Omega_m^2 x = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S m}, \quad (1.34)$$

где  $q$  — величина электрического заряда на конденсаторе,  $\Gamma_e = r/L$  и  $u_0 = U_0/L$ ,  $U_0$  — амплитуда колебаний напряжения на радиочастотном генераторе. Решая эту систему методом разложения по малому параметру  $x_0/d$ , где  $x_0$  — амплитуда механических колебаний, в приближении  $\Omega_m \ll \Gamma_e$ , можно получить выражение для вносимого в осциллятор дополнительного фактора

механических потерь

$$\Delta Q_m^{-1} \simeq \frac{SU_0^2 \varepsilon_0 Q_e^4}{4d_0^3 \nu_e \Omega_m} \quad (1.35)$$

в случае оптимальной настройки системы, когда чувствительность емкостного датчика близка к максимальной.

В современных оптомеханических системах демпфирование механических мод колебаний осуществляется посредством создания параметрической связи с оптическим резонатором, который накачивается сигналом с частотой, отличающейся от резонансной на величину резонансной частоты механической моды. Если полоса пропускания оптического резонатора много меньше механической частоты, то реализуется т.н. режим демпфирования с разрешенной боковой полосой (resolved sideband damping)[27, 28]. Системы этого типа используются для охлаждения механических осцилляторов до состояний, близких к основному квантовому [7, 8, 29].

Поведение электромеханических аналогов таких систем тоже можно описать уравнениями (1.33,1.34), но в приближении  $\Omega_m \gg \Gamma_e$ . Частота  $\omega$  напряжения генератора в контуре в этом случае выбирается такой, чтобы выполнялось соотношение  $\omega = \nu - \Omega_m$  (или  $\omega = \nu + \Omega_m$ ). В этом случае можно считать, что в электрическом контуре осуществляется резонансное усиление антистоксовой (или стоксовой) компоненты, что приводит к внесению в осциллятор дополнительного положительного (или отрицательного) фактора механических потерь. Его величина в случае оптимальной настройки

$$\Delta Q_m^{-1} \simeq \frac{SU_0^2 \varepsilon_0 Q_e \nu_e^2}{16d^3 m \Omega_m^4}. \quad (1.36)$$

Модификация этого метода, в которой за счет дополнительного электрического контура осуществляется резонансное усиление как антистоксовой (или стоксовой) компоненты сигнала, так и компоненты на частоте накачки, предложена в главе 4 настоящей работы.

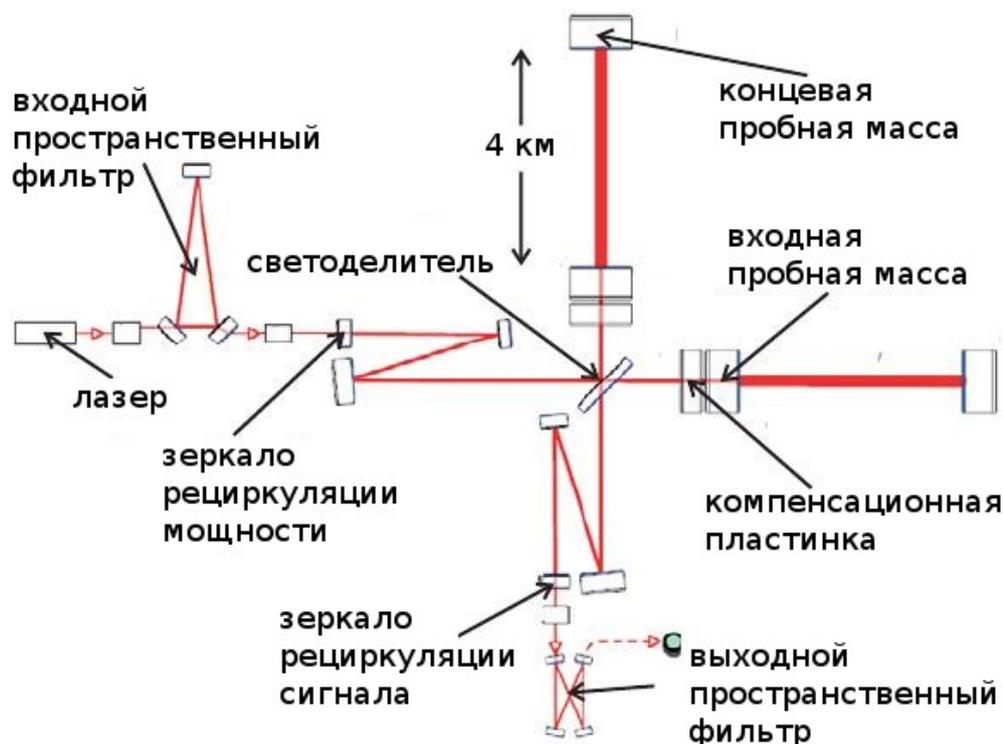


Рис. 1.2. Схема гравитационно-волнового интерферометрического детектора Advanced LIGO [11].

## 1.2. Интерферометрические гравитационно-волновые детекторы и проблема демпфирования струнных мод колебаний подвесов их пробных масс

### 1.2.1. Подвесы пробных масс гравитационно-волновых детекторов

Современные лазерные интерферометрические детекторы гравитационных волн — так называемые детекторы второго поколения — представляют собой интерферометры типа Майкельсона с интерферометрами Фабри-Перо в каждом из плечей [11]. Длина плечей интерферометров Advanced LIGO составляет 4 км. (см. рис. 1.2).

Подвес каждой из пробных масс детектора Advanced LIGO состоит из четырех ступеней [5, 30]. Конечная из них, пробная масса — цилиндр из



Рис. 1.3. Подвес пробной массы Advanced LIGO [30].

плавленого кварца массой 40 кг (диаметром 34 см и толщиной 20 см), с отражающими покрытиями на основаниях — подвешен на четырех нитях, изготовленных также из плавленого кварца и присоединенных одним своим концом к пробной массе, а другим — к промежуточной массе предпоследней ступени, тоже кварцевой (рис. 1.3). Эта промежуточная масса, в свою очередь, соединена с верхними металлическими ступенями подвеса с помощью стальных нитей. Кварцевая часть подвеса является квази-монолитной: кварцевые нити приварены к дополнительным кварцевым согласующим деталям («ушкам»), которые приклеены к кварцевым массам с помощью технологии гидроксидного каталитического соединения.

Кварцевые нити, применяемые в подвесах Advanced LIGO, изготовлены с помощью специально разработанной машины на основе CO<sub>2</sub>-лазера [31] из стержней диаметром 3 мм. Основная часть нитей имеет диаметр 400 мкм и длину около 600 мм, концы нитей имеют сложную структуру, используемую для минимизации термоупругих потерь. Резонансная частота основной струнной моды колебаний подвеса составляет около 500 Гц, ее добротность — око-

ло  $6 \times 10^8$ . Частота вертикальной моды колебаний нити при этом составляет около 9 Гц, а полный горизонтальный тепловой шум смещения — около  $1 \times 10^{-19}$  м/ $\sqrt{\text{Гц}}$  на частоте 10 Гц на пробную массу, что удовлетворяет требованиям, предъявляемым к шумовым свойствам подвесов пробных масс Advanced LIGO.

На расстоянии 5 мм от подвеса каждой из пробных масс расположены практически идентичные подвесам конструкции, которые используются как платформы для размещения различных актюаторов силового воздействия, с помощью которых осуществляется управление и настройка интерферометра. Для воздействия на промежуточные кварцевую и металлическую массы используются магнитные актюаторы, для воздействия на пробную массу — электростатические.

### 1.2.2. Способы демпфирования

В работе [32] предложена конструкция блока детектирования струнных мод колебаний нитей кварцевого подвеса пробной массы детектора Advanced LIGO, в котором применяются специальные теневые сенсоры механических колебаний. Стоит отметить, что эта работа была опубликована позже статьи [13], содержание которой изложено в главе 2 настоящей диссертации. Для каждой из нитей подвеса используется отдельный источник света (светодиод ближнего ИК-диапазона, длина волны 890 нм). Регистрация смещения тени от кварцевой нити осуществляется с помощью секционированного фотодиода. Параметры сенсоров подобраны таким образом, чтобы чувствительность к смещениям нити на частотах основных струнных мод колебаний (около 500 Гц) была велика, а чувствительность к маятниковым модам колебаний нити (частоты около 0,6 Гц) — низка. Общий вид готового блока детектирования приведен на рис. 1.4.



Рис. 1.4. Блок детектирования струнных мод колебаний подвесов пробных масс [32].

Эта система была установлена на модель подвеса пробной массы детектора Advanced LIGO, в которой вместо масс из плавленного кварца используются металлические массы. В экспериментах чувствительность сенсоров составила  $(6,9 \pm 1,3) \times 10^{-11}$  м/ $\sqrt{\text{Гц}}$  на частоте 500 Гц, коэффициент преобразования амплитуды механического смещения на частоте 500 Гц в электрический сигнал —  $(9,4 \pm 1,2) \times 10^6$  В/м.

Таким образом, в системе демпфирования струнных мод колебаний нитей подвесов Advanced LIGO может применяться описанная система детектирования колебаний. При этом корректирующее силовое воздействие на нить возможно осуществлять через промежуточный осциллятор — пробную или промежуточную массу — либо непосредственно с помощью электростатического актюатора, описанного в главе 2 настоящей работы.

Следует отметить, что в настоящее время в детекторах Advanced LIGO применяется комбинированный способ демпфирования струнных мод колебаний подвесов пробных масс: информация о колебаниях нити выделяется из выходного сигнала интерферометра, корректирующие сигналы через цепи обратной связи подаются на электростатические актюаторы, воздействующие на «промежуточные» массы. Система с использованием теневого сенсора,

описанная в этом разделе, и система с оптическим сенсором и электростатическими актюатором, взаимодействующим с электрическим зарядом, нанесенным на поверхность кварцевой нити, которая описана в главе 2, могут быть при необходимости внедрены в процессе дальнейших усовершенствований интерферометров Advanced LIGO.

## Глава 2

# Разработка и реализация системы демпфирования струнных мод колебаний кварцевых нитей для подвесов пробных масс гравитационно-волновых детекторов

### 2.1. Модель кварцевого подвеса

Основным элементом экспериментальной установки, использованной в экспериментах, описанных в настоящей главе, является модель кварцевого подвеса пробной массы интерферометрического гравитационно-волнового детектора, представляющая собой монолитную конструкцию, изготовленную из плавленного кварца, в которой исследуемым высокочастотным механическим резонатором является кварцевая нить длиной  $\approx 15$  см и диаметром  $\approx 240$  мкм. Нить была изготовлена методом вытягивания в пламени кислородной горелки из плавленного кварца КС-4В. Опорный блок был вырезан из заготовки размером  $(29 \times 6,5 \times 5,0)$  см<sup>3</sup> из плавленного кварца. Нить была

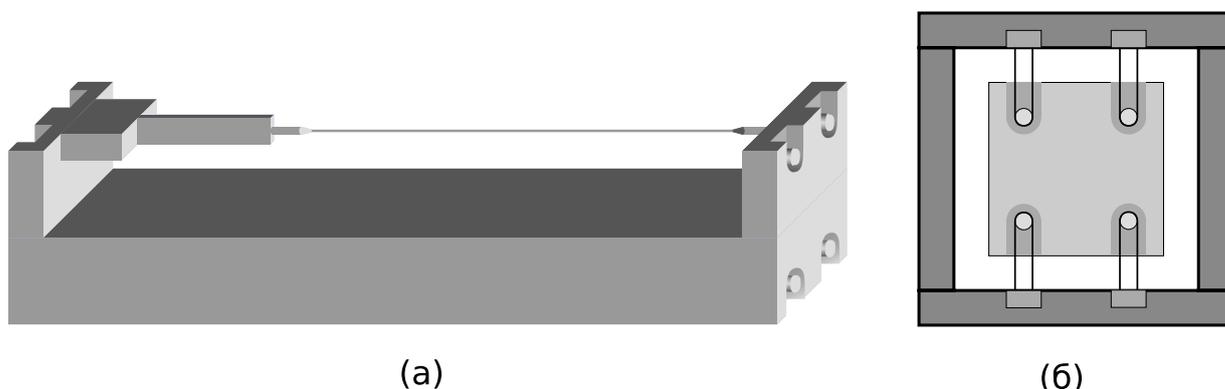


Рис. 2.1. Макет кварцевого подвеса пробной массы (а) и схема его подвешивания (б).

приварена к блоку как показано на рис. 2.1(а). Один из концов нити был приварен к пластине из плавленного кварца размером  $(40 \times 8 \times 2)$  мм<sup>3</sup>, которая использовалась как промежуточный элемент для возбуждения колебаний нити при помощи гребенчатых электродов. Также наличие данной пластины позволило разделить резонансные частоты струнных мод колебаний нити в перпендикулярных направлениях. Другой конец нити был приварен к опорному блоку, в процессе сварки нить была натянута. Натяжение нити определяет резонансные частоты струнных мод колебаний. Измеренные значения собственных частот первой и второй струнных мод<sup>1</sup> колебаний нити, а также основной изгибной моды вспомогательной пластины, равны, соответственно,  $f_{v_1} = 457$  Гц,  $f_{v_2} = 910$  Гц и  $f_{p_1} = 779$  Гц. Эффективные массы гармонических осцилляторов для этих мод<sup>2</sup> составляют, соответственно,  $m_{eff_{v_1}} = 6,55$  мг,  $m_{eff_{v_2}} = 6,61$  мг и  $m_{eff_{p_1}} = 352$  мг. Соответствующие величины эффективных жесткостей равны  $k_{eff_{v_1}} = 54$  Н/м,  $k_{eff_{v_2}} = 216$  Н/м и  $k_{eff_{p_1}} = 8,43 \times 10^3$  Н/м.

В опорном блоке было предусмотрено восемь точек подвеса, для чего на его боковых сторонах были вырезаны небольшие кольцеобразные полости. Они использовались для подвешивания опорного блока к массивной неподвижной металлической конструкции, установленной внутри вакуумной камеры на восьми шелковых нитях (см. рис. 2.1(б)). Данная конструкция позволила изолировать струнные колебания нитей от потерь в среду в достаточной

---

<sup>1</sup> Здесь и далее рассматриваются только моды колебаний нити с «горизонтальной» поляризацией, смещения в которых перпендикулярны плоскости вспомогательной пластины.

<sup>2</sup> Под эффективной массой и соответствующей ей эффективной жесткостью струнной моды колебаний нити подразумеваются масса и жесткость такого гармонического осциллятора, резонансная частота которого совпадает с частотой моды струны, а совершаемые им малые колебания с амплитудой, равной амплитуде смещения нити в некоторой ее точке, имеют энергию, равную энергии нити в процессе таких колебаний. Вообще говоря, определенные таким образом эффективные массы различны для различных точек струны. Здесь и далее в тексте, если это особо не оговорено, имеются в виду массы, определенные для точек струны с максимальной амплитудой смещения, т.е. пучностей.

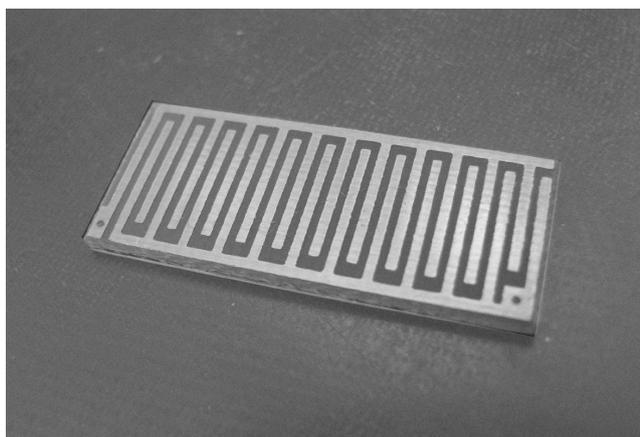


Рис. 2.2. Пластина с гребенчатыми электродами.

для получения высоких значений добротности степени. Откачивание воздуха из вакуумной камеры осуществлялось турбомолекулярным и магниторазрядным насосами.

## 2.2. Демпфирование через промежуточный осциллятор

В работе была реализована система демпфирования струнных мод колебаний кварцевой нити, основанная на электростатическом взаимодействии промежуточного осциллятора — кварцевой пластинки с резонансной частотой, близкой к резонансной частоте демпфируемой моды колебаний нити, — с электрическим контуром посредством емкостного преобразователя. Преобразователь представляет собой плоскую пластину с парой гребенчатых электродов, устанавливаемую параллельно кварцевой пластинке на малом расстоянии от нее.

Общая схема представлена на рис. 2.3. На электроды подается постоянное электрическое напряжение через резистор  $R$ . При колебаниях кварцевой пластинки изменяется емкость пары гребенчатых электродов, что приводит к возникновению тока перезарядки в электрическом контуре. Энергия колебаний рассеивается на резисторе.

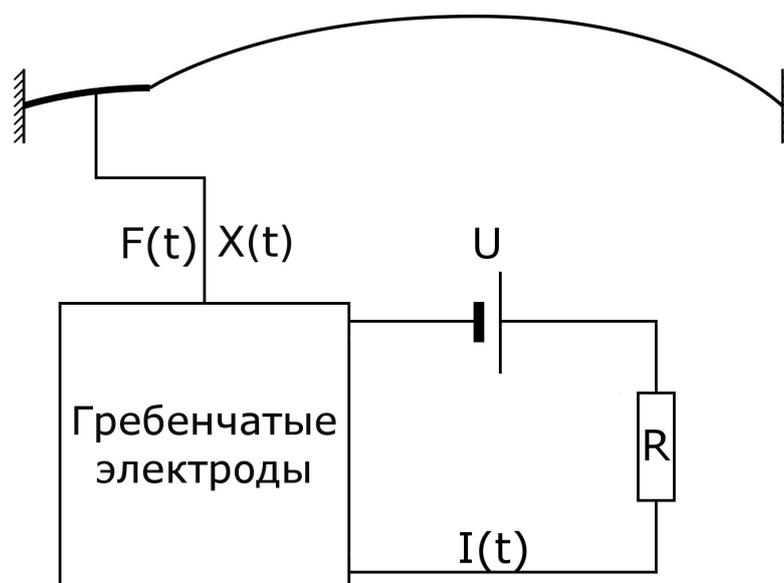


Рис. 2.3. Схема демпфирования через промежуточный осциллятор с совмещенными сенсором и актюатором.

### **Фактор потерь, вносимых в механическую систему электрической подсистемой, и эффективная шумовая температура.**

Общее выражение для силы, действующей со стороны гребенчатого электрода на диэлектрическую пластинку [33]:

$$F = \frac{1}{2} \left| \frac{dC}{dx} \right| U^2, \quad (2.1)$$

где  $C$  - емкость электродов,  $x$  - расстояние между электродами и кварцевой пластинкой,  $U$  - напряжение на электродах.

Для системы, в которой конденсатор образован плоским электродом и проводящим покрытием, нанесенным на механический осциллятор (рис. 2.4), т.е. в случае плоского конденсатора, это соотношение также справедливо. Поэтому выражения для фактора вносимых в механическую подсистему потерь и для спектральной плотности флуктуационной силы, действующей на механическую подсистему и обусловленную тепловым шумом на сопротивлении  $R$ , будут аналогичны формулам, полученным при рассмотрении системы,

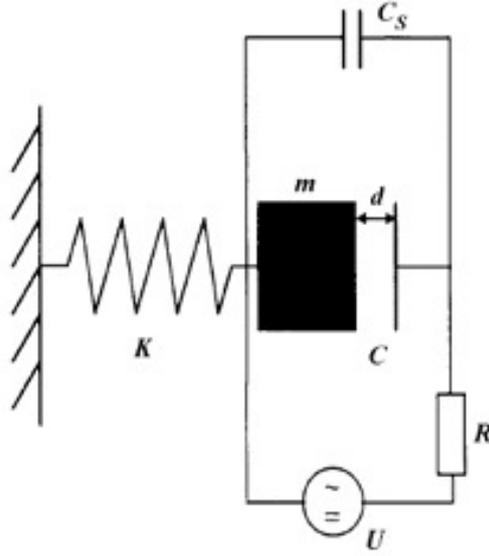


Рис. 2.4. Эквивалентная система с плоским конденсатором

показанной на рис. 2.4. Расчет этих величин был выполнен, например, в [34]:

$$Q_e^{-1} = \left( \frac{U_0}{\sqrt{2}d_0} \right)^2 \frac{RC_0^2\Omega_0}{k_{eqv}} \frac{1 + (\Omega_0 RC_1)^2 - (pRC_1)^2}{[1 + (pRC_1)^2][1 + (p + \Omega_0)^2 R^2 C_1^2][1 + (p - \Omega_0)^2 R^2 C_1^2]}, \quad (2.2)$$

$$S_F(\Omega) = 4k_B T_R \frac{U_0^2 RC_0^2}{2d_0^2} \frac{1 + (\Omega RC_1)^2 + (pRC_1)^2}{[1 + (pRC_1)^2][1 + (p + \Omega)^2 R^2 C_1^2][1 + (p - \Omega)^2 R^2 C_1^2]}. \quad (2.3)$$

Здесь  $C_1 = C_0 + C_s$ ,  $d = d_0 + x$ ,  $d_0$  и  $C_0$  — соответственно расстояние между обкладками и емкость конденсатора  $C$ , когда осциллятор находится в положении равновесия,  $U = U(t) = U_0 e^{ipt}$ . Для  $U = U_0 = const$  получаем

$$Q_e^{-1} = \frac{U^2 RC_0^2 \Omega_0}{4d_0^2 k_{eqv}}, \quad (2.4)$$

$$T_{eff} = \frac{T_{H_0} H_0 + T_R \frac{U^2 RC_0^2}{4d^2}}{H_0 + \frac{U^2 RC_0^2}{4d^2}}, \quad (2.5)$$

где  $T_{eff}$  — эффективная шумовая температура механического осциллятора,  $T_{H_0}$  и  $T_R$  — соответственно температуры механического осциллятора и электрического сопротивления.

## Отношение дополнительных факторов потерь струнной моды нити и изгибной моды пластинки

Одним из основных параметров рассматриваемой механической системы является отношение изменений факторов потерь второй струнной моды нити и изгибной моды пластинки  $\alpha = \partial Q_{v2}^{-1} / \partial Q_{p1}^{-1}$ . В экспериментальной установке частоты этих мод достаточно близки ( $f_{p1} = 779$  Гц и  $f_{v2} = 910$  Гц).

Добротности рассматриваемых мод для нити и пластинки по определению есть

$$Q_{v2,p1} = \frac{\Omega_{v2,p1} W_{v2,p1}}{P_{v2,p1}(\Omega_{v2,p1})}, \quad (2.6)$$

где  $P_{v2,p1}(\Omega)$  — мощности потерь, а  $W_{v2,p1}$  — полные энергии колебаний в струне и пластинке соответственно.

Будем считать, что затухание колебаний в нити вызывается исключительно оттоком энергии в пластинку, т.е. что внутренние механизмы диссипации в струне отсутствуют, и  $P_{v2}(\Omega) \equiv P_{p1}(\Omega)$ . Такое приближение возможно, поскольку добротность первой гармоники струнной моды нити превышает добротность изгибной моды пластинки приблизительно на один порядок величины. Также, поскольку  $f_{v2}/f_{p1} \sim 1$ , предположим, что мощность потерь в пластинке на обеих частотах одинакова:  $P_{p1}(\Omega_{p1}) = P_{p1}(\Omega_{v2})$ . Из сделанных предположений следует, что

$$P_{v2}(\Omega_{v2}) = P_{p1}(\Omega_{p1}). \quad (2.7)$$

Тогда для отношения коэффициентов потерь получим выражение

$$\alpha = Q_{v2}^{-1} / Q_{p1}^{-1} = \frac{\Omega_{p1} W_{p1}}{\Omega_{v2} W_{v2}}. \quad (2.8)$$

Энергии колебаний нити и пластинки можно представить в виде [35]

$$W_{v2,p1} = A_{v2,p1}^2 \frac{m_{eff,v2,p1} \Omega_{v2,p1}^2}{2}, \quad (2.9)$$

где  $A_{v2,p1}$  — максимальные амплитуды колебаний нити и пластинки, а  $m_{eff,v2,p1}$  — значения эффективной массы, которая в рассматриваемом случае для второй струнной моды колебаний нити равна половине ее полной массы, а для изгибной моды колебаний пластинки — четверти массы пластинки.

Проекцию силы, с которой нить действует на пластинку в точке их соединения, на перпендикулярную плоскости пластинки ось можно записать в виде

$$F_y \simeq A_0 \Omega_{v2} \sqrt{T\varepsilon} \cos \Omega_{v2} t. \quad (2.10)$$

Здесь  $T$  — сила натяжения нити,  $\varepsilon$  — ее линейная плотность. Механический импеданс стержня для данной точки приложения силы равен [35]

$$Z_m = i m_{eff,p1} \left( \frac{\Omega^2 - \Omega_{p1}^2}{\Omega} \right). \quad (2.11)$$

Поэтому отношение амплитуды колебаний точки соединения нити и пластинки и максимальной амплитуды колебаний нити равно

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{F_y}{-i \Omega_{v2} Z_m A_0} = \frac{\Omega_{v2} \sqrt{T\varepsilon}}{m_{eff,p1} (\Omega_{v2}^2 - \Omega_{p1}^2)}. \quad (2.12)$$

Подставив соотношения (2.9) в (2.8) (считаем, что энергия колебаний стержня на частотах  $\Omega_{v2}$  и  $\Omega_{p1}$  имеет одинаковую зависимость от амплитуды колебаний), с учетом (2.12) окончательно получим

$$\alpha = \frac{2T}{l_v m_{eff,p1}} \frac{\Omega_{v2} \Omega_{p1}}{(\Omega_{v2}^2 - \Omega_{p1}^2)^2}, \quad (2.13)$$

где  $l_v = 2m_{eff,v2}/\varepsilon$  — длина нити.

В экспериментах определялись факторы механических потерь для системы, в которой возбуждались колебания на какой-либо из рассматриваемых нормальных частот (соответствующих изгибной моде пластинки и второй струнной моды нити) как при наличии, так и при отсутствии внешнего постоянного электрического поля, подаваемого на гребенчатые электроды.

Экспериментальное значение коэффициента  $\alpha$  определялось как

$$\alpha = \frac{\tilde{Q}_{v2}^{-1} - Q_{v2}^{-1}}{\tilde{Q}_{p1}^{-1} - Q_{p1}^{-1}}, \quad (2.14)$$

где  $Q_{p1}^{-1}$  и  $Q_{v2}^{-1}$  обозначают факторы потерь для пластинки и нити соответственно в случае отсутствия электрического поля, аналогичные символы с «волной» относятся к случаю поданного на гребенчатые электроды постоянного напряжения.

## Описание эксперимента

При параллельно расположенных кварцевой пластинке и пластине с электродами емкость при небольших зазорах ( $< 100$  мкм) линейно уменьшается с расстоянием между электродами и пластинкой. В ходе работы была экспериментально получена зависимость емкости от этого расстояния. Характерное значение  $dC/dx$  составило

$$\left| \frac{dC}{dx} \right| = 2,5 \text{ нФ/м.}$$

Пластина с гребенчатыми электродами была установлена параллельно кварцевой пластинке с зазором около 100 мкм на то же кварцевое основание. Для контроля величины зазора была использована зависимость добротности струнной моды кварцевой нити от расстояния между кварцевой пластинкой и пластиной с электродами при атмосферном давлении. Эта зависимость была получена экспериментально перед окончательной установкой электродов на образец, для чего пластинка с электродами приклеивалась к подвижному основанию, положение которого относительно образца регулировалось с помощью микрометрического винта.

Эксперименты по демпфированию проводились при остаточном давлении в вакуумной камере  $p \approx 3 \cdot 10^{-6}$  Торр. На электроды подавалось постоянное электрическое напряжение через резистор с сопротивлением  $R = 9$  МОм.

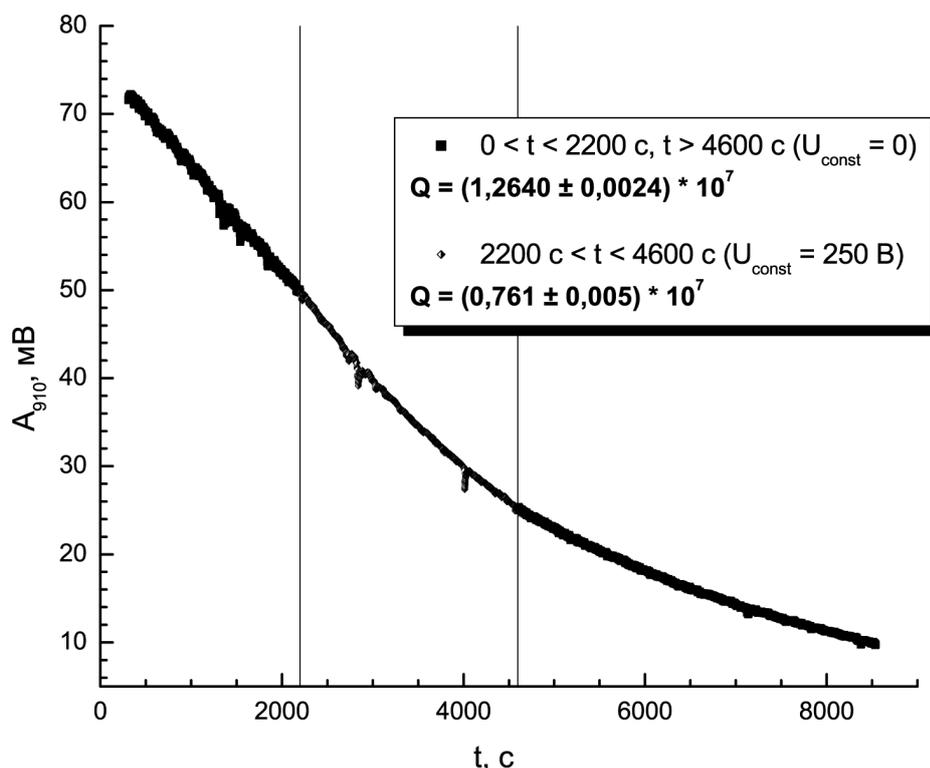


Рис. 2.5. Затухание колебаний второй струнной моды кварцевой нити.

Возбуждение начальных колебаний в системе осуществлялось с помощью той же пары гребенчатых электродов, на которые в этом случае через трансформатор подавалось переменное напряжение с прецизионного генератора низкочастотных гармонических колебаний (ГЗ-110). Частота сигнала «раскачки» выбиралась равной половине частоты возбуждаемой моды колебаний.

## Результаты

В процессе измерений были получены кривые затухания амплитуды колебаний системы с частотами  $f_{v_2}$  и  $f_{p_1}$  при отключенном демпфирующем контуре, а также кривые затухания амплитуды колебаний с частотами  $f_{v_2}$  и  $f_{p_1}$  при поданном на гребенчатые электроды напряжении  $U = 250$  В (см. рис. 2.5). На основе полученных кривых затухания были рассчитаны добротности соответствующих мод.

1. При отключенной системе демпфирования ( $U = 0$ ):

$$Q_{v_2} \approx 1,3 \cdot 10^7,$$

$$Q_{p_1} \approx 1,0 \cdot 10^6.$$

2. При включенной системе демпфирования ( $U = 250$  В):

$$\tilde{Q}_{v_2} \approx 0,8 \cdot 10^7,$$

$$\tilde{Q}_{p_1} \approx 0,7 \cdot 10^6.$$

Полученное экспериментально (по формуле (2.14)) значение коэффициента отношения дополнительных факторов механических потерь второй струнной моды кварцевой нити и изгибной моды кварцевой пластинки  $\alpha = 0,09$ ; расчетное значение этого коэффициента по формуле (2.13)  $\alpha = 0,03$ . Различие между этими величинами в основном, по-видимому, обусловлено геометрическими приближениями, сделанными при теоретическом расчете (использованная в эксперименте кварцевая нить неоднородна по толщине, форма кварцевой пластинки отлична от идеальной формы параллелепипеда).

Преимуществом подобной схемы демпфирования является совмещение сенсора и актюатора. Основная техническая проблема, возникшая при реализации этого метода — необходимость установки пластины с электродами на малом расстоянии ( $\lesssim 100$  мкм) от кварцевой пластинки. Пластины должны быть установлены параллельно с высокой точностью без использования какого-либо устройства тонкой юстировки, использование которого привело бы к появлению дополнительных механизмов потерь. Поэтому дополнительное затухание, вносимое в струнные моды колебаний нити в рассматриваемом варианте установки, достаточно мало.

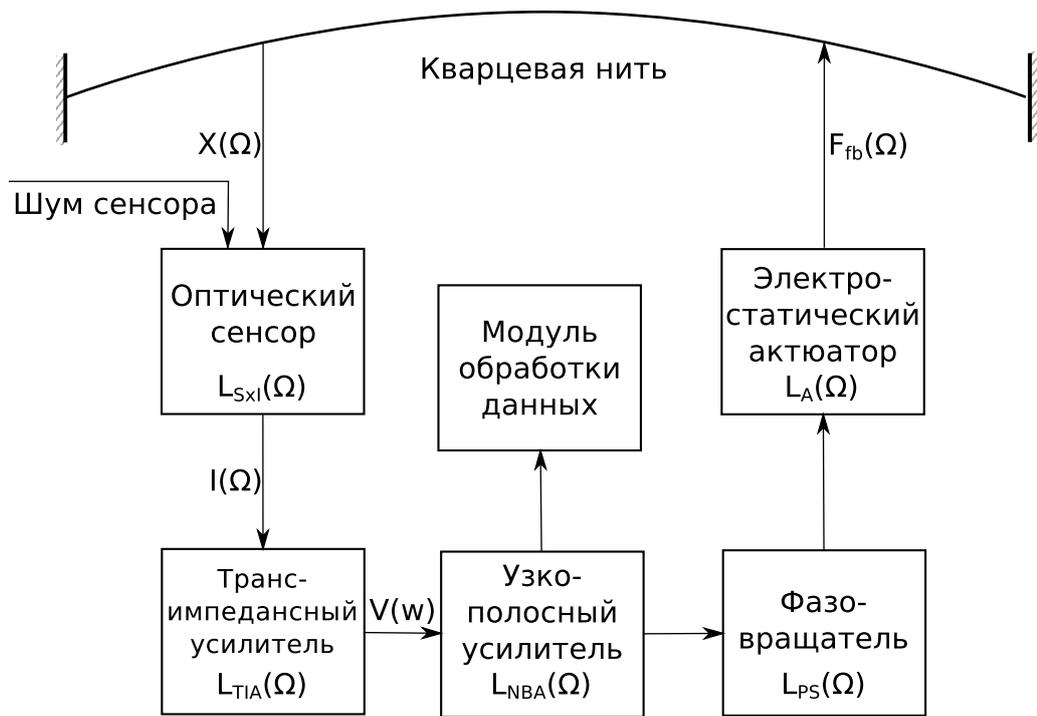


Рис. 2.6. Схематическое изображение нити и элементов цепи обратной связи.

## 2.3. Демпфирование с использованием оптического сенсора и электростатического актюатора

Необходимость управления добротностью струнных мод колебаний кварцевой нити в широком диапазоне потребовало разработки специальной системы демпфирования колебаний нити. В разработанной и экспериментально реализованной системе использовались оптический сенсор, электрическая цепь обратной связи и электростатический актюатор, осуществлявший силовое воздействие на электрически заряженный участок поверхности нити.

### 2.3.1. Схема эксперимента

Схематическое изображение нити и элементов цепи обратной связи представлено на рис. 2.6. Цепь обратной связи включает в себя оптический сенсор с коэффициентом передачи  $L_{SxI}(\Omega)$  смещения нити  $x(\Omega)$  в выходной ток  $I(\Omega)$ ,

трансимпедансный усилитель, преобразующий ток фотодиода  $I(\Omega)$  в выходное напряжение  $V(\Omega)$  с коэффициентом передачи  $L_{TIA}(\Omega)$  (далее для упрощения формул под коэффициентом передачи сенсора будет подразумеваться величина  $L_S(\Omega) = L_{SxI}(\Omega)L_{TIA}(\Omega)$ ), узкополосный усилитель с коэффициентом усиления  $L_{NVA}(\Omega)$ , фазовращатель с коэффициентом передачи  $L_{PS}(\Omega)$  и актюатор, преобразующий напряжение на электродах в силу  $F_{fb}(\Omega)$ , действующую на нить, с коэффициентом передачи  $L_A(\Omega)$ . Область, в которой измеряется смещение нити и область, в которой на нить действует сила, смещены относительно центральной точки нити. Это обстоятельство учитывается при сравнении измеренных и расчетных величин смещения и силы.

Узкополосный усилитель настраивался на резонансную частоту демпфируемой струнной моды колебаний кварцевой нити, его полоса усиления имела ширину около 6 Гц. В качестве узкополосного усилителя использовался частотно-селективный вольтметр Unipan 237. Показания вольтметра, несущие информацию об амплитуде колебаний кварцевой нити, через мультиметр с интерфейсом RS232 передавались на ПК, с помощью которого осуществлялись обработка и запись результатов экспериментов.

Для того, чтобы обеспечить возможность подбора оптимальной фазы (при которой величина вносимого в демпфируемую моду нити затухания максимальна), была предусмотрена возможность настройки фазовращателя.

Поскольку в подвесах пробных масс возможны только сравнительно малые колебания нитей, для описания движения нити допустимо использовать простейшую классическую линейную теорию (более подробно см. раздел 1.1). Нелинейные эффекты, как правило, наблюдаются при достаточно большой амплитуде колебаний нитей [36]. Каждой струнной моде колебаний нити можно поставить в соответствие некоторый эффективный гармонический осциллятор. При отключенной цепи обратной связи основная струнная мода коле-

баний нити характеризуется механической восприимчивостью

$$K_{\text{osc}}(\Omega) = \frac{1}{m(\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\Gamma\Omega)}, \quad (2.15)$$

описывающей характер зависимости смещения колеблющейся нити в частотном представлении от силы, действующей на нить на частоте  $\Omega$ . Здесь  $m$  — эффективная масса моды,  $\Omega_0 = \Omega_{v1}$  — ее резонансная частота и  $\Gamma = \Omega_0/Q$  — коэффициент собственных механических потерь в моде.

При наличии цепи обратной связи механическая восприимчивость осциллятора описывается уже не соотношением (2.15), а формулой

$$K_{\text{osc}}^{\text{fb}}(\Omega) = \frac{K_{\text{osc}}(\Omega)}{1 - J_{\text{fb}}(\Omega)K_{\text{osc}}(\Omega)}, \quad (2.16)$$

где  $J_{\text{fb}}(\Omega) = L_S(\Omega)L_{\text{NBA}}(\Omega)L_{\text{PS}}(\Omega)L_A(\Omega)$ .

При помощи фазовращателя можно таким образом подобрать фазу действующей на нить силы  $F_{\text{fb}}$ , чтобы эта сила была пропорциональна скорости движения нити,

$$F_{\text{fb}} = -im\Gamma g\Omega x, \quad (2.17)$$

где  $g = |J_{\text{fb}}(\Omega_0)|/m\Omega_0\Gamma$  — безразмерный коэффициент, определяемый коэффициентом усиления цепи обратной связи.

В этом случае действие цепи обратной связи сводится к увеличению коэффициента затухания осциллятора  $\Gamma$  в  $(1 + g)$  раз и соответствующему уменьшению добротности системы  $Q_{\text{fb}} = Q_0/(1 + g)$ . Механическая восприимчивость в этом случае равна

$$K_{\text{osc}}^{\text{fb}}(\Omega) = \frac{1}{m[\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\Gamma(1 + g)\Omega]}. \quad (2.18)$$

Спектральная плотность  $S_x^{\text{fb}}(\Omega)$  шумовых колебаний нити может быть записана в виде (для упрощения рассматривается только шум, соответствующий выбранной основной струнной моде колебаний нити)

$$S_x^{\text{fb}}(\Omega) = |K_{\text{osc}}^{\text{fb}}(\Omega)|^2 \left( S_F^{\text{T}}(\Omega) + |J_{\text{fb}}(\Omega)|^2 S_x^{\text{S}}(\Omega) \right). \quad (2.19)$$

Спектральная плотность тепловой шумовой силы  $S_F^T(\Omega) = 4k_B T \Gamma m$  описывает флуктуации силы, возникающие вследствие связи с термостатом в соответствии с флуктуационно-диссипационной теоремой [23]. Величина  $S_x^S(\Omega)$  описывает шум оптического сенсора, приведенный к его входу. Таким образом,  $S_x^S(\Omega) = S_V^S(\Omega) / |L_S(\Omega)|^2$ , где  $S_V^S(\Omega)$  есть спектральная плотность шумовых колебаний напряжения на выходе оптического сенсора. Шумы сенсора как правило можно считать некоррелированными с тепловыми шумами нити.

На резонансной частоте основной струнной моды колебаний нити

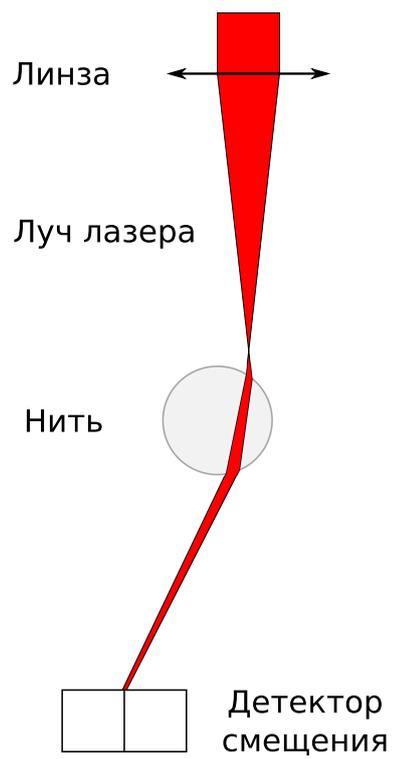
$$S_x^{\text{fb}}(\Omega_0) = \frac{S_x^T(\Omega_0)}{(1+g)^2} + \frac{g^2}{(1+g)^2} S_x^S(\Omega_0), \quad (2.20)$$

где спектральная плотность теплового шума *свободной* нити на резонансной частоте  $S_x^T(\Omega_0)$  равна

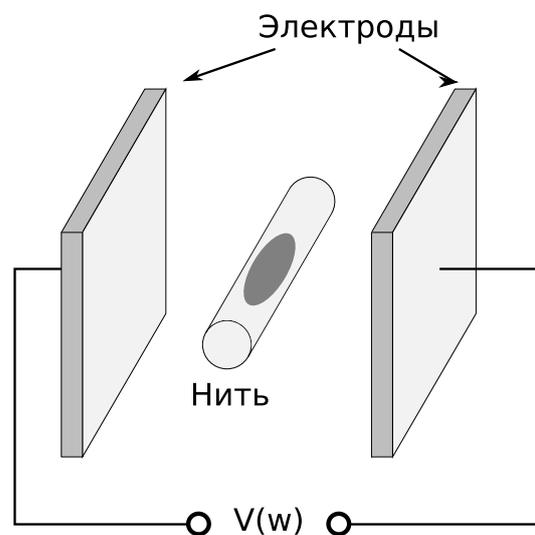
$$S_x^T(\Omega_0) = |K_{\text{osc}}(\Omega_0)|^2 S_F^T(\Omega_0) = \frac{4k_B T}{\Gamma m \Omega_0^2}. \quad (2.21)$$

Таким образом, в системе осуществляется холодное демпфирование, если шум сенсора  $S_x^S(\Omega_0)$  меньше, чем «собственный» тепловой шум нити  $S_x^T(\Omega_0)$ .

Демпфирование выбранной струнной моды колебаний нити не сопровождалось возбуждением других мод колебаний нити в связи со следующими обстоятельствами. Во-первых, воздействие на нить осуществлялось в узком диапазоне частот, что обуславливалось соответствующей настройкой ширины полосы и центральной частоты узкополосного усилителя, а также соответствующим выбором мест расположения сенсора и актюатора вдоль нити. Во-вторых, изготовленные по технологии вытягивания в пламени кварцевые нити имеют неэквидистантные спектры струнных мод колебаний, поскольку толщина таких нитей в середине, как правило, меньше, чем на их концах. Это обстоятельство предотвращало возбуждение мод колебаний высших порядков, которое может возникнуть из-за нелинейности элементов цепи обратной связи.



(а)



(б)

Рис. 2.7. Схема оптического сенсора (а) и электростатического актюатора (б).

### 2.3.2. Оптический сенсор

Для регистрации колебаний кварцевой нити использовался специально разработанный оптический сенсор, принцип действия которого основан на эффекте преломления светового луча в кварцевой нити. В качестве источника непрерывного оптического излучения использовался гелий-неоновый лазер (ЛГН-302) с рабочей длиной волны излучения  $\lambda = 633$  нм. Лазерное излучение вводилось в вакуумную камеру с помощью обычного световода и фокусировалось асферической линзой с фокусным расстоянием 4,2 мм в точке, близкой к поверхности нити (рис. 2.7(б)). Полная падающая на нить оптическая мощность  $P_{laser} \approx 33$  мкВт. Дважды преломляясь на поверхностях нити (которую в данном случае можно рассматривать как цилиндрическую линзу), луч вторично фокусировался на поверхности фотодетектора, работающего по методу оптического ножа и щели (использовался кремниевый фотодиод Thorlabs FDS1010).

Горизонтальное смещение нити  $\Delta x$  приводило к смещению положения лазерного пятна  $\Delta s$  на детекторе:

$$\Delta s \approx \frac{d\theta}{dx} l \Delta x,$$

где  $l$  — расстояние от кварцевой до поверхности фотодетектора,  $\theta$  — полный угол отклонения луча при прохождении через нить. При увеличении расстояния от прямой, вдоль которой на нить падал лазерный луч, до центра нити коэффициент передачи  $\Delta s/\Delta x$  увеличивается. Однако при этом увеличиваются ширина фокального пятна (в основном из-за оптических aberrаций) и мощность отраженного от нити излучения. В экспериментах смещение луча относительно центра было равно приблизительно 0.5 радиуса нити, что давало оптимальное соотношение между чувствительностью сенсора и шириной его линейного динамического диапазона.

### 2.3.3. Электростатический актюатор

Для осуществления силового воздействия на нить два параллельных плоских медных электрода были приклеены к опорному блоку из плавленого кварца таким образом, чтобы нить проходила внутри зазора между электродами (см. рис. 2.7(б)). Расстояние  $d$  между электродами было равно приблизительно 1 мм. На поверхность участка нити, расположенного между электродами, наносился электрический заряд  $q_0$ .

В экспериментах, описываемых в настоящем разделе, нанесение заряда осуществлялось посредством касания нити пучком из пяти человеческих волос для минимизации механического воздействия на нить. Более сильное воздействие на нить может повредить ее поверхность и привести к существенному уменьшению напряжения на разрыв и механической добротности. Как правило, полная величина нанесенного на нить описанным способом электрического заряда составляла примерно  $10^{-12}$  Кл. Отдельно была исследована возможность применения других способов нанесения на поверхность нити электрического заряда (см. раздел 2.5).

Нанесение заряда производилось в вакууме при помощи специального манипулятора. Нанесенный на поверхность нити электрический заряд сохранялся на ней в течение длительного времени вследствие очень малой проводимости плавленого кварца (время релаксации нанесенного на плавленый кварц электрического заряда в вакууме превышает 1 год [37]).

При приложении к электродам напряжения  $V$  в промежутке между ними возникало электрическое поле  $E \approx V/d$  (в более точном расчете принимается во внимание наличие в этом промежутке участка диэлектрической нити), которое воздействовало на электрический заряд  $q_0$  с силой  $F = Eq_0$ . Эта сила воздействовала на небольшой по сравнению с общей длиной нити ее участок и поэтому может рассматриваться как точечная. Поэтому коэффициент пе-

редачи актюатора можно записать в виде  $L_A = dF/dV \approx q_0/d$ .

## 2.4. Результаты измерений.

Калибровка оптического сенсора осуществлялась при атмосферном давлении в два этапа. Колебания основной струнной моды возбуждались при помощи электростатического актюатора, в котором синусоидальное напряжение с частотой, равной резонансной частоте моды, подавалось на электроды. Сначала сравнительно большие (от  $1 \times 10^{-5}$  м до  $5 \times 10^{-5}$  м) амплитуды колебаний нити измерялись при помощи видеомикроскопа (СТ-2200USB). На рис. 2.8(а) показана зависимость амплитуды колебаний нити от амплитуды переменного напряжения, приложенного к электродам актюатора. Затем амплитуда переменного возбуждающего напряжения уменьшалась. Это приводило к соответствующему уменьшению амплитуды колебаний нити. На рис. 2.8(б) показана зависимость амплитуды выходного напряжения трансимпедансного усилителя от амплитуды напряжения, приложенного к электродам актюатора. Линейный отклик оптического сенсора наблюдался в диапазоне смещений около 2 мкм.

Чувствительность сенсора нормируется на оптическую мощность падающего излучения:  $\mathfrak{R}_0 = P_{\text{in}}^{-1}(dP_{\text{out}}/dx)$ . Для оптической мощности  $P_{\text{in}} \approx 3 \mu\text{W}$  измеренная величина чувствительности составила  $\mathfrak{R}_0 \approx 0.15 \text{ мкм}^{-1}$ . Здесь  $dP_{\text{out}}$  — изменение оптической мощности, падающей на чувствительный элемент фотодетектора при изменении смещения нити  $dx$ .

Фототок детектора усиливается трансимпедансным усилителем с коэффициентом усиления  $L_{\text{TIA}}(\Omega) \approx 0.1 \text{ МОм}$ . Таким образом, полный коэффициент преобразования смещения нити в выходное напряжение сенсора  $|L_S(\Omega_0)| = (1.6 \pm 0.1) \times 10^4 \text{ В/м}$ .

Широкополосный шум на выходе оптического сенсора в основном порож-

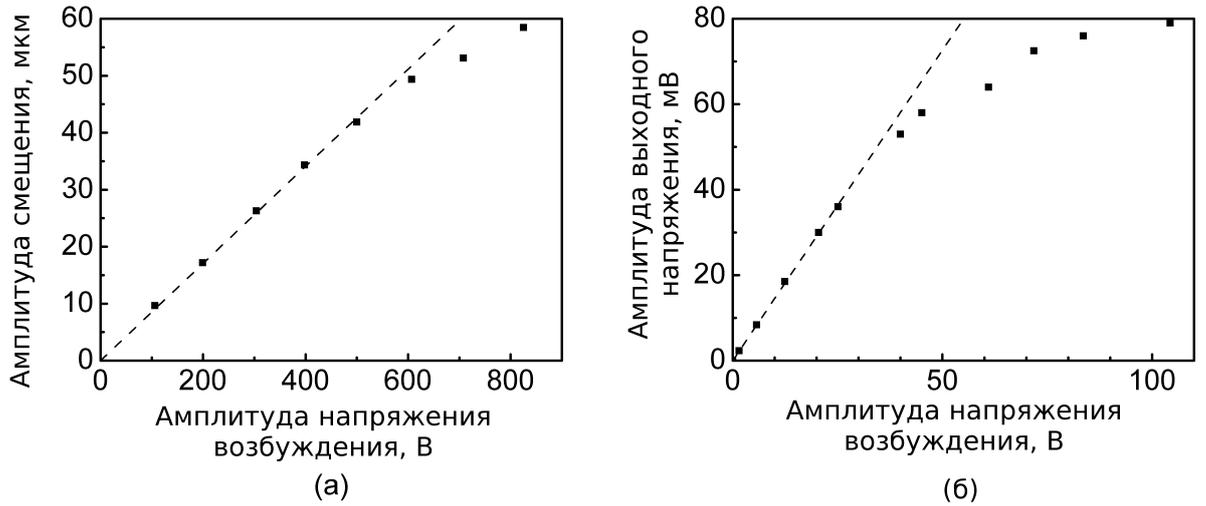


Рис. 2.8. Зависимость амплитуды смещения в основной струнной моде колебаний нити (а) и амплитуды выходного напряжения трансимпедансного усилителя (б) от амплитуды переменного напряжения, приложенного к электродам актюатора.

дался флуктуациями интенсивности излучения лазера, шумом фотодетектора и сейсмическим шумом. В эксперименте шумы оптического сенсора были сильными, поскольку не применялись какие-либо системы сейсмической изоляции опорного блока нити, лазерное излучение не было стабилизировано по интенсивности. Шумы сенсора могут быть описаны спектральной плотностью  $S_V^S(\Omega)$  и приведенной спектральной плотностью шумов смещения нити  $S_x^S(\Omega) = S_V^S(\Omega) / |L_S(\Omega)|^2$ . Значение  $S_x^S(\Omega)$  составило  $2.2 \times 10^{-19} \text{ м}^2/\text{Гц}$  в диапазоне частот вблизи резонансной частоты основной струнной моды колебаний нити. Шумы сенсора увеличивались с уменьшением частоты. Спектральная плотность шумов сенсора была близка к спектральной плотности тепловых шумов нити  $S_x^T(\Omega_0) = 1.5 \times 10^{-19} \text{ м}^2/\text{Гц}$ , рассчитанной для основной моды свободной нити в соответствии с (2.21).

Было измерено время затухания свободных колебаний основной струнной моды кварцевой нити. Начальное возбуждение колебаний осуществлялось посредством той же цепи обратной связи с дополнительным сдвигом фазы на  $\pi$ . В этом случае вносимое в нить затухание становится отрицатель-

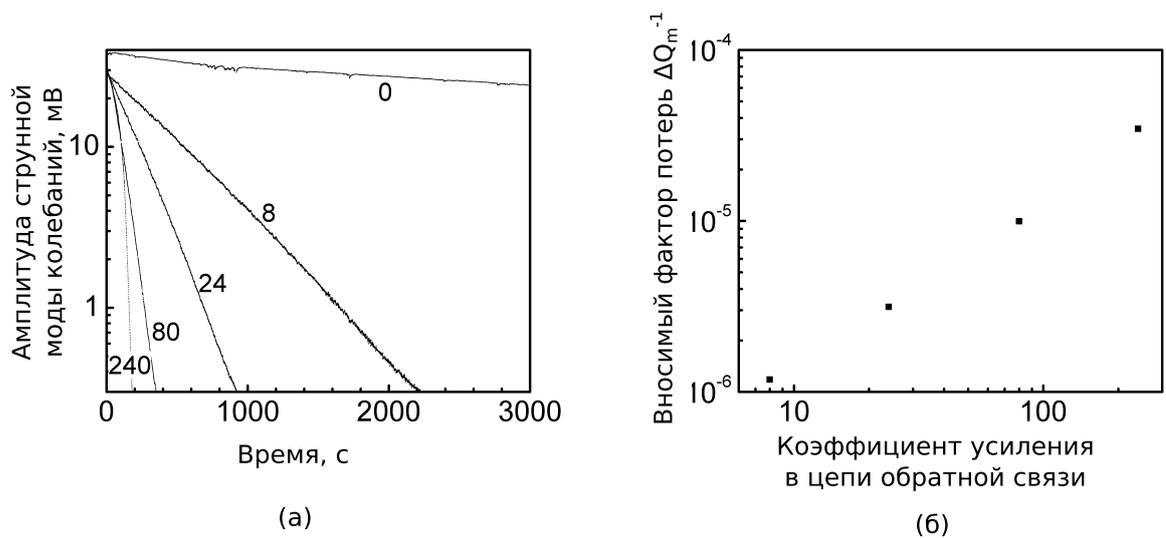


Рис. 2.9. Кривые затухания амплитуды колебаний нити, измеренные для различных значений коэффициента передачи узкополосного усилителя (значения коэффициента представлены рядом с кривыми) (а) и зависимость вносимого фактора механических потерь от коэффициента передачи узкополосного усилителя (б).

ным и амплитуда колебаний возрастает с течением времени. Кривые затухания колебаний для различных значений коэффициента передачи узкополосного усилителя приведены на рис. 2.9(а). Зависимости логарифмической амплитуды колебаний, отложенной вдоль оси ординат, от времени представляют собой линейные зависимости вплоть до малых значений амплитуды, что соответствует экспоненциальному затуханию с временем затухания  $\tau^*$ , зависящим от коэффициента усиления в цепи обратной связи. Вносимый фактор механических потерь  $Q_{in}^{-1}$  как функция коэффициента передачи узкополосного усилителя  $L_{НВА}$  определяется как разность между факторами потерь при включенной и отключенной цепи обратной связи. График этой функции представлен на рис. 2.9(б).

Отметим, что сенсор и актюатор были расположены оптимально для измерения и управления колебаниями нити в горизонтальной плоскости. Для осуществления демпфирования колебаний в вертикальной плоскости может

быть использована аналогичная система, повернутая на угол  $90^\circ$ .

## **2.5. Исследование возможностей применения различных способов нанесения на поверхность нити электрического заряда**

### **2.5.1. Контактная электризация**

Несмотря на то, что явление электрической зарядки различных диэлектриков при осуществлении непосредственного механического контакта между ними известно со времен античности, в настоящее время отсутствуют теории, позволяющие количественно описывать это явление, главным образом вследствие большого количества поверхностных и объемных эффектов, влияющих на процесс зарядки [38–41].

В условиях гравитационно-волновых детекторов контактная электризация является наименее предпочтительным способом нанесения электрического заряда на поверхность кварцевых нитей в подвесах пробных масс, поскольку контакт кварцевых нитей с твердыми телами существенно снижает прочность нитей [42] и уменьшает добротность мод их колебаний [43].

В экспериментах (см. раздел 2.3.3) методом контактной электризации человеческим волосом (толщиной 40–50 мкм) с использованием специального вакуумного манипулятора удавалось нанести на участок нити длиной 1 см отрицательный электрический заряд величиной не более  $10^{-12}$  Кл. Электрический заряд необходимо наносить в вакууме, поскольку при откачке вакуумной камеры его величина уменьшается вследствие пашеновского пробоя. В экспериментах максимальная величина электрического заряда на поверхности нити достигалась после совершения около 50 касаний волосом.

## 2.5.2. Электронная бомбардировка

В рамках настоящей работы производилось исследование возможностей нанесения на кварцевую нить электрического заряда при помощи бомбардировки поверхности нити пучком электронов, испускаемых термокатодом и ускоряемых электрическим полем.

Несмотря на то, что теоретическое описание процессов, происходящих при бомбардировке диэлектриков (в частности, плавленого кварца), является существенно более полным, чем для явления контактной электризации, в теоретических разработках в основном рассматриваются механизмы зарядки плоских диэлектрических мишеней при их бомбардировке узкими (фокусированными) электронными пучками в электронной микроскопии. Тем не менее, некоторые результаты возможно перенести и на рассматриваемую в настоящей работе конфигурацию.

Как правило, в литературе рассматриваются различные разновидности модели динамического двойного слоя. Предполагается, что под воздействием первичного пучка электронов тонкая приповерхностная область диэлектрика заряжается положительно за счет вторичной эмиссии электронов с поверхности, в то время как более глубоко расположенный слой заряжается отрицательно за счет захвата электронов из падающего пучка. Величина коэффициента полной эмиссии (суммы коэффициента вторичной эмиссии и коэффициента отражения) определяет направление электрической зарядки диэлектрика: если в диэлектрик за единицу времени попадает больше электронов, чем покидает его, то он заряжается отрицательно, в противном случае — положительно. Этот принцип лежит в основе различных теоретических моделей [44–47] и методов численного моделирования [48–50].

Для незаряженного плавленого кварца (и вообще большинства поликристаллических диэлектриков) значение коэффициента полной эмиссии больше

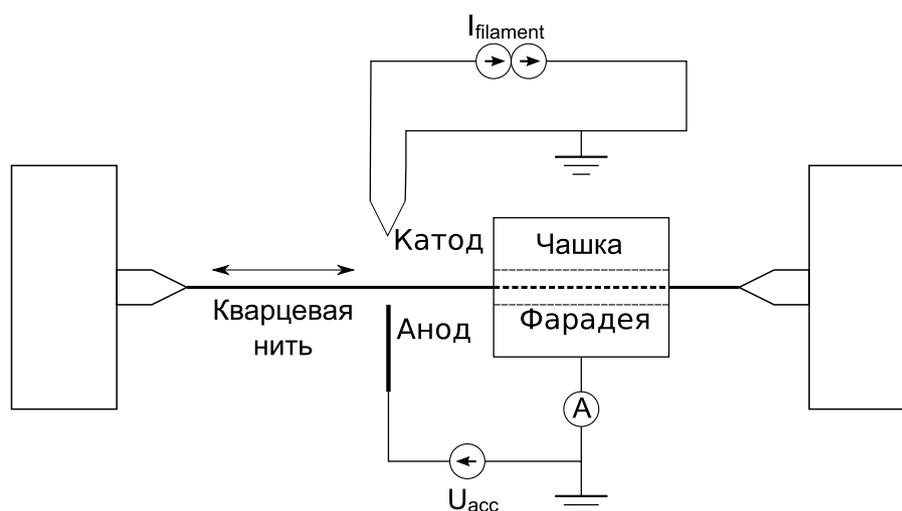


Рис. 2.10. Схема установки для нанесения на нить электрического заряда и измерения его величины.

единицы (положительная зарядка) в диапазоне энергий первичного пучка электронов, лежащем между двумя значениями энергии, называемыми кроссоверными, и меньше единицы для энергий, не входящих в этот диапазон. Для плавленого кварца значение первой кроссоверной энергии — около 50 эВ, второй — около 4,4 кэВ [45]. В экспериментах участок поверхности кварцевой нити заряжался положительно при облучении электронным пучком с энергиями от 100 эВ до 3,1 кэВ.

Для реализации электронной бомбардировки поверхности кварцевой струны в настоящей работе использовалась специальная экспериментальная установка, в которой кварцевая нить<sup>3</sup> натягивалась между двумя опорами, жестко прикрепленными к оптическому столику (см. рис. 2.10). Оптический столик мог совершать поступательное движение параллельно металлическому основанию, на котором он закреплялся, под действием моторизованного актюатора Thorlabs, управление которым осуществлялось дистанционно с по-

<sup>3</sup> В экспериментах по нанесению на нить электрического заряда использовалась вспомогательная кварцевая нить, а не модель кварцевого подвеса, описанная в разд. 2.1 и использованная в экспериментах, описанных в остальных разделах настоящей главы.

мощью ПК. На этом же металлическом основании были жестко закреплены термоэлектрический вольфрамовый катод и анод, на который подавалось ускоряющее электроны напряжение. Кроме того, на этом же основании был закреплен электрод из дюралюминия размерами  $(30 \times 20 \times 16)$  мм<sup>3</sup>, в цилиндрическое отверстие диаметром 3 мм внутри которого была продета кварцевая нить. Этот электрод использовался в качестве чашки Фарадея при измерении величины электрического заряда на участке нити: под действием моторизованного актюатора облученный участок нити вдвигался в область, расположенную внутри электрода, создавая при этом ток в цепи электрода, измерение и последующее интегрирование которого позволяло установить величину электрического заряда на кварцевой нити. Измерение тока в цепи электрода производилось пикоамперметрами Keithley 5487 и 6517A либо электрометром ВК2-16, соединенным через усилитель постоянного тока (В2-36) с платой АЦП NI USB-6009, подключенной к ПК.

Катод и анод закреплялись в плоскости, параллельной металлическому основанию и проходящей через кварцевую нить. Анод, изготовленный из молибденовой проволоки диаметром 1 мм, располагался на расстоянии около 1 мм от кварцевой нити, катод — на расстоянии около 12 мм (при более близком расположении катода становится затруднительно отделить эффект зарядки под действием электронной бомбардировки от температурных эффектов, поскольку нить нагревается под действием теплового излучения катода — см. следующий раздел).

Электрический заряд на кварцевой нити достигал наибольших величин при длительном облучении электронами с энергией порядка 3,1 кэВ. На рис. 2.11 представлена зависимость величины электрического заряда на нити от времени облучения при токе анода  $\approx 1$  мкА. Зависимость тока чашки Фарадея при помещении облученного участка кварцевой нити внутрь и наружу чашки для наибольшего значения  $\approx 7,9 \times 10^{-12}$  Кл (время облучения 1800 с) приведена

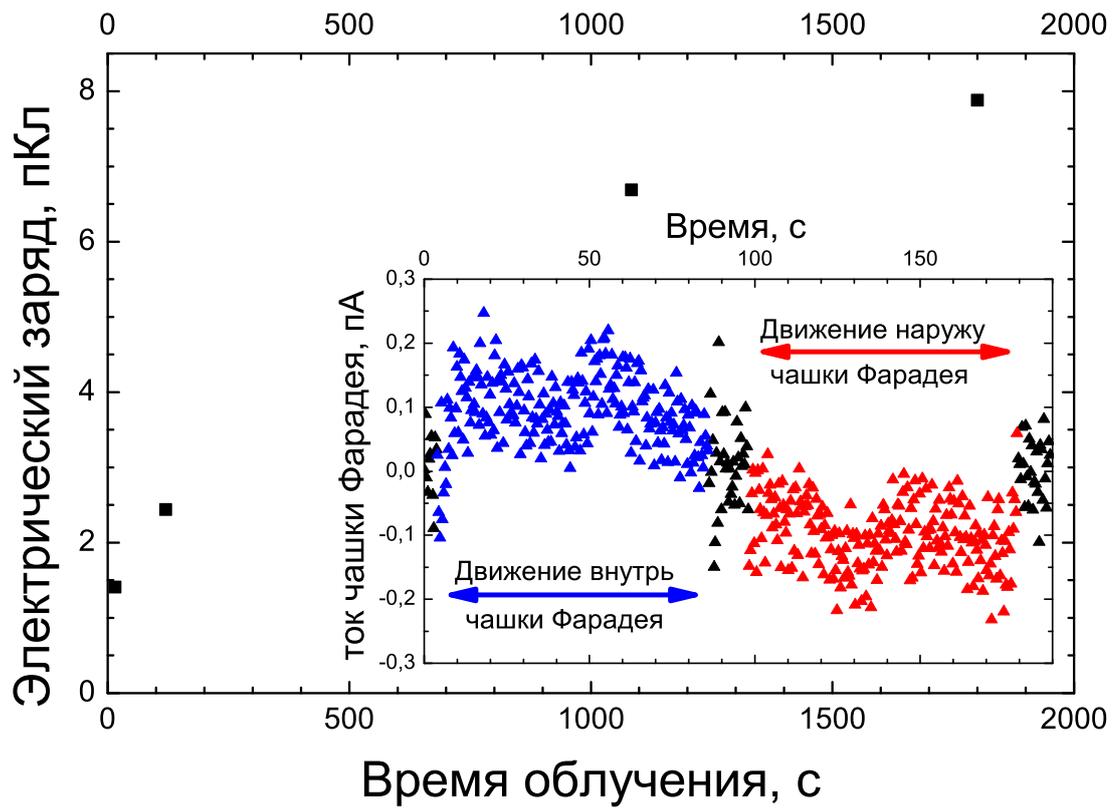


Рис. 2.11. Зависимость величины электрического заряда на нити от времени облучения пучком электронов с энергией 3,1 кэВ при токе анода  $\approx 1$  мкА. Врезка: зависимость тока чашки Фарадея при помещении облученного участка кварцевой нити внутрь и наружу чашки для наибольшего значения  $q \approx 7,9 \times 10^{-12}$  Кл (время облучения 1800 с)

на врезке рис. 2.11.

### **2.5.3. Перераспределение электрического заряда в кварцевой нити под действием электрического поля при повышенной температуре**

Поскольку удельное электрическое сопротивление плавленого кварца значительно уменьшается с ростом температуры [51], возможно осуществление зарядки участка кварцевой нити за счет термоэлектретного эффекта при нагреве и последующем охлаждении в сильном электростатическом поле.

Для экспериментального изучения этого механизма использовалась та же установка, что и в предыдущем разделе. В качестве нагревательного элемента использовался термоэлектрический катод, в качестве управляющего электрода — «анод», на который в данном случае подавалось высокое постоянное напряжение (как правило,  $-3,7$  кВ), отрицательное относительно катода для исключения эффектов, связанных с электронным облучением кварцевой нити. При одновременно включенных нагревательном элементе и источнике высокого постоянного напряжения, подключенного к управляющему электроду, на кварцевой нити вблизи электрода индуцировался положительный электрический заряд.

На рис. 2.12 представлена характерная экспериментальная кривая величины тока в цепи фарадеевского зонда при медленном вдвигании заряженного участка нити в его внутреннюю область. Величина полного электрического заряда на кварцевой нити в этом эксперименте равна  $4,8 \times 10^{-11}$  Кл. На рис. 2.13 штриховой линией показана соответствующая зависимость электрического заряда на чашке Фарадея от взаимного расположения центра заряженного участка кварцевой нити и края чашки Фарадея, полученная интегрированием кривой на рис. 2.12; точками на том же рисунке показана анало-

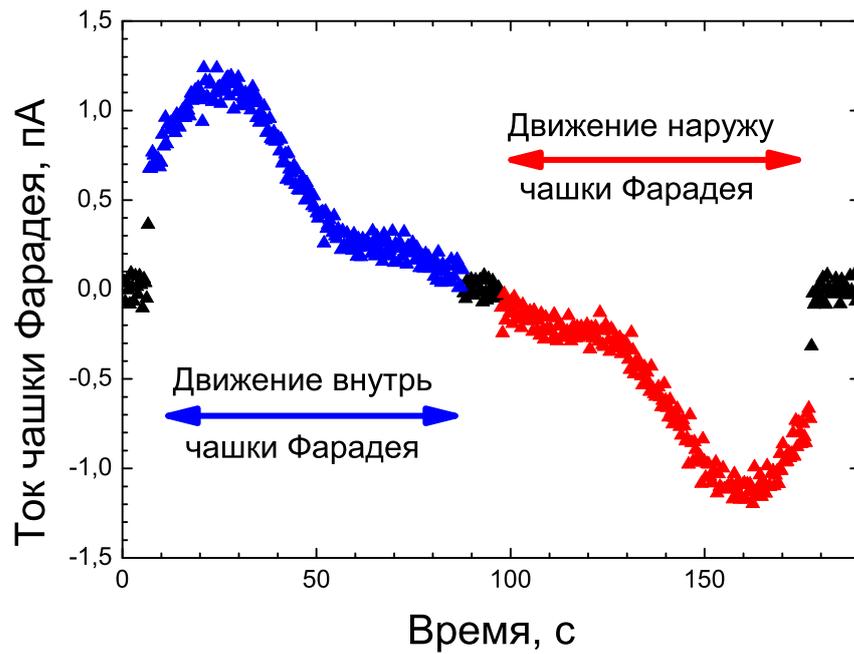


Рис. 2.12. Экспериментальная кривая тока в цепи чашки Фарадея при перемещении заряженного участка кварцевой нити внутрь и наружу чашки.

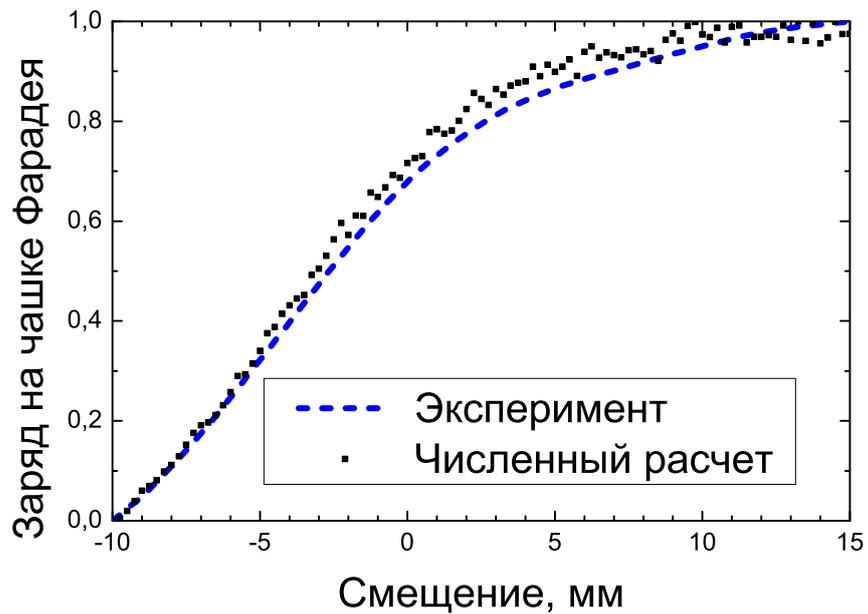


Рис. 2.13. Зависимость величины электрического заряда на чашке Фарадея от положения центра заряженного участка кварцевой нити относительно чашки: результат численного моделирования (точки) и экспериментальная кривая (штриховая линия).

гичная зависимость, полученная с помощью конечноэлементного численного моделирования в два этапа: сначала моделировалось распределение поверхностного электрического заряда на нити в электростатическом поле управляющего электрода, при этом предполагалось, что нить — проводящая (что соответствует случаю нагретой нити). Затем полученное распределение электрического заряда на нити фиксировалось и вычислялась полная величина электрического заряда на чашке Фарадея для различных взаимных расположений чашки и заряженной нити. Видно, что экспериментальная и расчетная кривые совпадают с хорошей точностью.

Максимальная величина электрического заряда, нанесенного на поверхность кварцевой нити указанным способом, равна  $2,6 \times 10^{-10}$  Кл. Следует отметить, что эта величина была получена при использовании в качестве управляющего электрода сравнительно тонкой (диаметром 1 мм) молибденовой проволоки, расположенной перпендикулярно кварцевой нити. Соответственно, электрический заряд был нанесен на сравнительно короткий участок нити длиной несколько миллиметров. Очевидно, использование вытянутых вдоль нити электродов может позволить добиться больших величин полного нанесенного на поверхность нити электрического заряда.

Этот метод также использовался для нейтрализации нанесенного на поверхность кварцевой нити электрического заряда (при заземленном управляющем электроде).

Преимуществом использования описанного метода нанесения электрического заряда при работе с электростатическим актюатором, описанным в разделе 2.3.3, является также конструктивная простота: в качестве управляющих электродов возможно использовать электроды актюатора, конструкцию необходимо дополнить лишь нагревательным элементом. Кроме того, величина электрического заряда, в широком диапазоне пропорциональна прикладываемому к электродам высокому напряжению и может быть легко рассчита-

на при помощи численного моделирования — чего нельзя сказать о величине электрического заряда, наносимого с помощью электронной бомбардировки или контактной электризации.

## 2.6. Заключение

Была разработана монолитная конструкция из плавленного кварца, моделирующая нить кварцевого подвеса интерферометрического детектора гравитационных волн. Добротности основных струнных мод колебаний нити превышали величину  $10^7$ . Для демпфирования струнных мод колебаний макета была использована система демпфирования, основанная на активной цепи обратной связи. Для измерения смещений нити использовался специальный оптический сенсор. Управляемое силовое воздействие на нить осуществлялось посредством электростатического актюатора. Использование демпфирующей системы позволило изменять величину фактора механических потерь колебаний нити в широком диапазоне. Шум, вносимый демпфирующей системой, главным образом определяется шумом оптического сенсора. Шум сенсора может быть уменьшен при использовании системы стабилизации интенсивности лазерного излучения и увеличении оптической мощности. Снижение уровня шума оптического сенсора позволит уменьшить полный тепловой шум колебаний нити и реализовать холодное демпфирование струнных мод колебаний нити подвеса.

Полученные результаты, изложенные в этой главе, позволяют заключить, что наиболее простым способом демпфирования струнных мод колебаний кварцевых нитей из изученных является силовое демпфирование, в котором силовое воздействие на нить осуществляется электростатически. При этом электрическое поле, величина которого пропорциональна скорости движения нити, воздействует на электрический заряд, нанесенный на поверх-

ность нити. При использовании этого метода возможно получить максимальные значения дополнительного фактора механических потерь, вносимого в струнные моды колебаний нитей.

## Глава 3

# Моды колебаний дисковых резонаторов с большим значением углового индекса

### 3.1. Резонансные частоты и форма мод колебаний акустических дисковых резонаторов с большим значением углового индекса

Резонаторы упругих колебаний на поверхностных акустических волнах (ПАВ) нашли широкое применение как элементы стабилизации частоты задающих генераторов и фильтры в радиотехнических передающих и приемных устройствах, а также как сенсоры различных физических, химических и биологических величин [52]. Наибольшее распространение имеют резонаторы, изготовленные на основе пьезоэлектрических материалов. Базовая конструкция такого резонатора состоит из пьезоэлектрической подложки, на которую нанесены электроды встречноштыревых преобразователей.

В материалах, не обладающих пьезоэлектрическими свойствами, поверхностные акустические волны, как правило, возбуждают термоупругими методами посредством коротких лазерных импульсов. [53, 54]. Различные типы ПАВ, включая рэлеевские волны и волны шепчущей галереи, распространяющиеся вдоль цилиндрических поверхностей, изучались теоретически и экспериментально [55].

В настоящем разделе приведены результаты теоретического и экспериментального исследования различных поверхностных акустических мод, электростатически возбуждаемых в изотропных дисках, изготовленных, в общем случае, из материала, не обладающего пьезоэффектом. В качестве такого

материала был взят дюралюминий. Поверхностные волны распространяются вдоль цилиндрической образующей диска, так что упругие деформации локализованы вблизи его боковой поверхности. Целочисленные значения углового индекса  $k$  соответствуют резонансу, при котором волна, совершившая полный оборот вокруг цилиндра, приходит в точку в той же фазе. При больших значениях углового индекса добротность таких резонаторов ограничена в основном потерями упругой энергии в материале, из которого изготовлен диск, и в его поверхностном слое. Можно ожидать, что использование таких материалов, как сапфир, кремний, плавленый кварц и других, имеющих малые акустические потери, позволит создать дисковые резонаторы, добротность которых значительно превосходит добротность традиционных резонаторов на поверхностных акустических волнах.

Для расчета собственных частот и распределений вектора смещения (формы колебаний) в колеблющихся цилиндрах применяются различные методы. Среди численных методов наиболее широко распространен метод Ритца [56], который, в том числе, в последнее время был использован для расчета симметричных по  $r$  мод колебаний коротких цилиндров (дисков) [57], изгибных мод колебаний нагруженных цилиндров для значения углового индекса  $k = 1$  [58] и колебаний цилиндров с треугольными пазами и узкими радиальными трещинами [59]. Трехмерный конечноразностный метод применялся для решения задачи возбуждения и частотного отклика МШГ в дисковых резонаторах [60].

Для расчета собственных частот и распределений вектора смещения в модах колебаний свободных круговых цилиндров применяется аналитический метод, разрабатывавшийся различными авторами [61, 62]. Хатчинсон [62] получил частотный спектр мод колебаний цилиндров с отношением толщины к диаметру  $0 < h < 2$  для значений углового индекса  $k$  от 0 до 4. Этот метод также использовался в недавней работе Тамуры [63], в которой были изучены

колебания круговых цилиндров для больших значений  $k$ . В этой работе в основном рассматривались цилиндры с  $h \sim 1$ , но также был кратко рассмотрен случай тонкого диска с  $h = 0,05$ . В частности, были рассчитаны собственные частоты и формы колебаний в модах с  $k = 20$  и наименьшим значением собственной частоты. Также недавно был предложен ряд модификаций данного метода: для расчета спектра колебаний цилиндров с произвольным заданным распределением симметричной относительно оси  $z$  возбуждающей силы, приложенной к поверхностям цилиндра [64] и для расчета колебаний полых цилиндров со свободными и частично зафиксированными границами [65].

В расчетах использовался метод, предложенный Хатчинсоном. Этот метод заключается в построении решений уравнения движения в виде линейных комбинаций трех последовательностей решений, в точности удовлетворяющих уравнению движения и трем из шести граничных условий. Оставшиеся три граничных условия затем удовлетворяются наложением требования ортогональности соответствующих компонент тензора напряжения на границах некоторым полным базисным набором функций на этих границах. В результате получается однородная система линейных алгебраических уравнений, решение которой дает значения собственных частот и распределения компонент вектора смещения в диске. Точность полученного решения зависит от числа функций базисного набора, взятых при наложении требования ортогональности.

Таким образом, результат вычислений представляет собой точное решение исходного уравнения движения, приближенно удовлетворяющее граничным условиям. Тем не менее, некоторые авторы [62] классифицируют данный метод решения как «точный», поскольку он позволяет построить точное (аналитическое) решение в виде бесконечного ряда.

### 3.1.1. Метод расчета

Рассмотрим однородный диск (круговой цилиндр) радиусом  $a$ , толщиной  $2H$  и свободными границами.

Уравнение движения для вектора смещения  $\mathbf{U}$  в изотропной упругой среде есть

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}), \quad (3.1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе, а  $\rho$  — плотность материала среды.

Введем безразмерные (отнесенные к радиусу диска  $a$ ) компоненты вектора смещения  $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$  и координаты  $r, z$ ; безразмерные (отнесенные к модулю сдвига  $\mu$ ) компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ ; безразмерные (умноженные на радиус диска  $a$ ) волновые числа  $\alpha, \beta$  и  $\delta$ ; безразмерную угловую частоту  $\omega = \Omega a / v_t$ , где  $\Omega$  — угловая (размерная) частота,  $v_t = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость распространения поперечных волн; безразмерный геометрический фактор (отношение толщины диска к его диаметру)  $h = H/a$ .

Искомое решение должно удовлетворять шести граничным условиям для свободного диска

$$\sigma_{zr}(r, \theta, \pm h) = 0, \quad (3.2a)$$

$$\sigma_{z\theta}(r, \theta, \pm h) = 0, \quad (3.2b)$$

$$\sigma_{zz}(r, \theta, \pm h) = 0, \quad (3.2c)$$

$$\sigma_{rr}(1, \theta, z) = 0, \quad (3.2d)$$

$$\sigma_{r\theta}(1, \theta, z) = 0, \quad (3.2e)$$

$$\sigma_{rz}(1, \theta, z) = 0. \quad (3.2f)$$

Выбирается вид решения, в точности удовлетворяющий трем граничным условиям (3.2a), (3.2b) и (3.2f). Такой выбор является произвольным, единственное ограничение используемого метода заключается в том, что невоз-

можно точно удовлетворить одновременно трем граничным условиям на *одной и той же* границе.

Решение берется в виде линейной комбинации базовых решений [62]:

$$v(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^{N_z} A_i v_{A_i}(r, \theta, z) + \sum_{j=1}^{N_r} B_j v_{B_j}(r, \theta, z) + \sum_{i=1}^{N_z} C_i v_{C_i}(r, \theta, z), \quad (3.3)$$

где  $v$  обозначает одну из компонент вектора смещения  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$  или одну из компонент тензора напряжения  $\sigma_{\mu\nu}$  с одинаковыми тремя последовательностями констант  $A_i$ ,  $B_j$  и  $C_i$ . Зависимость от времени исключается: предполагается, что все компоненты вектора смещения и все компоненты тензора напряжений изменяются во времени по гармоническому закону с одной и той же частотой и фазой.

Радиальная компонента вектора смещения берется в следующем виде:

$$u_{r_{A_i}} = [2(\beta_{A_i}^2 - \alpha_{A_i}^2) \chi_n(\beta_{A_i}) \chi_n(\delta_{A_i} r) + 4\alpha_{A_i}^2 \chi_n(\delta_{A_i}) \chi_n(\beta_{A_i} r)] \times \\ \times r^{k-1} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_{A_i} z) / \cos(\alpha_{A_i} h) \\ \sin(\alpha_{A_i} z) / \sin(\alpha_{A_i} h) \end{array} \right\} \cos k\theta, \quad (3.4)$$

$$u_{r_{B_j}} = \left[ 2(\alpha_{B_j}^2 - \beta_{B_j}^2) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta_{B_j} z) \text{sinc}(\beta_{B_j} h) \\ \text{sinc}(\delta_{B_j} z) \cos(\beta_{B_j} h) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. + 4 \left\{ \begin{array}{l} \delta_{B_j}^2 \cos(\beta_{B_j} z) \text{sinc}(\delta_{B_j} h) \\ \beta_{B_j}^2 \text{sinc}(\beta_{B_j} z) \cos(\delta_{B_j} h) \end{array} \right\} \right] \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} h \\ z \end{array} \right\} r^{k-1} \frac{\chi_n(\alpha_{B_j} r)}{\phi_n(\alpha_{B_j})} \cos k\theta, \quad (3.5)$$

$$u_{r_{C_i}} = [-4\chi_n(\delta_{C_i}) \phi_n(\beta_{C_i} r) + 2\phi_n(\beta_{C_i}) \chi_n(\delta_{C_i} r)] \times \\ \times kr^{k-1} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_{C_i} z) / \cos(\alpha_{C_i} h) \\ \sin(\alpha_{C_i} z) / \sin(\alpha_{C_i} h) \end{array} \right\} \cos k\theta; \quad (3.6)$$

компонента вектора смещения по оси  $z$  берется в виде (здесь и далее для упрощения восприятия опущены индексы  $i$  и  $j$ ; они относятся к членам  $u$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  аналогично предыдущим трем уравнениям)

$$u_{z_A} = [2(\beta_A^2 - \alpha_A^2)\chi_n(\beta_A)\phi_n(\delta_A r) - 4\beta_A^2\chi_n(\delta_A)\phi_n(\beta_A r)] \times \\ \times \alpha_A r^k \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\alpha_A z)/\cos(\alpha_A h) \\ \cos(\alpha_A z)/\sin(\alpha_A h) \end{array} \right\} \cos k\theta, \quad (3.7)$$

$$u_{z_B} = \left[ 2(\alpha_B^2 - \beta_B^2) \left\{ \begin{array}{l} \text{sinc}(\delta_B z)\text{sinc}(\beta_B h) \\ \cos(\delta_B z)\cos(\beta_B h) \end{array} \right\} - \right. \\ \left. - 4\alpha_B^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{sinc}(\delta_B h)\text{sinc}(\beta_B z) \\ \cos(\delta_B h)\cos(\beta_B z) \end{array} \right\} \right] \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} -\delta_B^2 h z \\ 1 \end{array} \right\} r^k \frac{\phi_n(\alpha_B r)}{\phi_n(\alpha_B)} \cos k\theta, \quad (3.8)$$

$$u_{z_C} = 2k\phi_n(\beta_C)\phi_n(\delta_C r)\alpha_C r^k \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\alpha_C z)/\cos(\alpha_C h) \\ \cos(\alpha_C z)/\sin(\alpha_C h) \end{array} \right\} \cos k\theta; \quad (3.9)$$

наконец, для углового смещения

$$u_{\theta_A} = - [2(\beta_A^2 - \alpha_A^2)\chi_n(\beta_A)\phi_n(\delta_A r) + 4\alpha_A^2\chi_n(\delta_A)\phi_n(\beta_A r)] \times \\ \times k r^{k-1} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_A z)/\cos(\alpha_A h) \\ \sin(\alpha_A z)/\sin(\alpha_A h) \end{array} \right\} \sin k\theta, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta_B} = & - \left[ 2(\alpha_B^2 - \beta_B^2) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta_B z) \operatorname{sinc}(\beta_B h) \\ \operatorname{sinc}(\delta_B z) \cos(\beta_B h) \end{array} \right\} + \right. \\
& \left. + 4 \left\{ \begin{array}{l} \delta_B^2 \cos(\beta_B z) \operatorname{sinc}(\delta_B h) \\ \beta_B^2 \operatorname{sinc}(\beta_B z) \cos(\delta_B h) \end{array} \right\} \right] \times \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} h \\ z \end{array} \right\} k r^{k-1} \frac{\phi_n(\alpha_B r)}{\phi_n(\alpha_B)} \sin k\theta, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta_C} = & [4\chi_n(\delta_C)\chi_n(\beta_C r) - 2k^2\phi_n(\beta_C)\phi_n(\delta_C r)] \times \\
& \times r^{k-1} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_C z) / \cos(\alpha_C h) \\ \sin(\alpha_C z) / \sin(\alpha_C h) \end{array} \right\} \sin k\theta. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Для волновых чисел  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  и частоты  $\omega$  выполняются соотношения

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2, \quad (3.13)$$

$$\alpha^2 + \delta^2 = \omega^2 \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)} = \left( \frac{\omega}{\eta} \right)^2, \quad (3.14)$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона и  $\eta = v_l/v_t$ .

Функции  $\phi_n$  и  $\chi_n$ , входящие в уравнения (3.4)–(3.12), определяются как

$$\phi_n(x) = \frac{J_k(x)}{x^k}, \quad (3.15)$$

$$\chi_n(x) = \frac{J'_k(x)}{x^{k-1}}. \quad (3.16)$$

Здесь  $J_k(x)$  — функция Бесселя. Как видно из (3.13) и (3.14), аргументы этих функций могут принимать либо действительные, либо чисто мнимые значения, поскольку значения  $\alpha$  действительны (см. ниже уравнения (3.19), (3.20)). Удобство такого определения заключается в том, что в обоих случаях значения функций действительны: для мнимых значений аргумента  $\phi_n(ix) = I_k(x)/x^k$ ,  $\chi_n(ix) = I'_k(x)/x^{k-1}$  (а также  $\operatorname{sinc}(ix) = \operatorname{sh}(x)/x$ ,  $\cos(ix) = \operatorname{ch}(x)$ ), где  $I_k$  — функция Инфельда. Для случая  $x = 0$  имеем  $\phi_n(0) = 1/(2^k k!)$ ,  $\chi_n(0) = 1/[2^k (k-1)!]$  и  $\operatorname{sinc}(0) = 1$ .

Члены в фигурных скобках в уравнениях (3.4)—(3.12) представляют два разных набора решений. Следуя другим авторам [62, 63], будем называть верхние и нижние решения «четными» и «нечетными» соответственно. Этот выбор достаточно произволен, поскольку для верхнего набора решений  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{r\theta}$  являются четными функциями  $z$ , в то время как  $u_z$ ,  $\sigma_{rz}$  и  $\sigma_{z\theta}$  являются нечетными функциями  $z$ .

Компоненты тензора напряжений можно получить из уравнений (3.4)—(3.12):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma + 2) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} & \frac{\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \gamma \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \gamma \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) & \frac{\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & (\gamma + 2) \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

где  $\gamma = \lambda/\mu$ . Нетрудно убедиться, что для выбранной формы решений (3.4)—(3.12) члены с коэффициентами  $B$  в  $\sigma_{zr}$  и  $\sigma_{z\theta}$  равны нулю при  $z = \pm h$ , а члены с коэффициентами  $A$  и  $C$  в  $\sigma_{rz}$  равны нулю при  $r = 1$ .

В последовательностях с коэффициентами  $A$  и  $C$  значения  $\alpha$  выбираются в виде

$$\alpha_{Ai} = \alpha_{Ci} = \begin{cases} (i-1)\pi/h \\ (2i-1)\pi/(2h) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N_z, \quad (3.19)$$

что приводит к обнулению членов с коэффициентами  $A$  и  $C$  в  $\sigma_{zr}$  и  $\sigma_{z\theta}$  при  $z = \pm h$ . В последовательностях с коэффициентами  $B$   $\alpha_{Bj}$  задается как  $j$ -й положительный корень уравнения

$$J'_k(x) = 0, \quad (3.20)$$

поэтому члены с коэффициентами  $B$  в  $\sigma_{rz}$  равны нулю при  $r = 1$ .

Таким образом, построенные решения в точности удовлетворяют граничным условиям (3.2a), (3.2b) и (3.2f). Три оставшихся граничных условия

(3.2c), (3.2d) и (3.2e) удовлетворяются приближенно посредством наложения условий ортогональности.

Условие (3.2d) может быть удовлетворено тогда и только тогда, когда  $\sigma_{rr}$  ортогональна полному набору функций, определенных на отрезке  $-h \leq z \leq h$ . Выберем в качестве таких наборов функции  $\cos(\alpha_{Ai}z)$  и  $\sin(\alpha_{Ai}z)$  для четных и нечетных решений соответственно, причем  $\alpha_{Ai}$  определяется как в (3.19); тогда

$$\int_{-h}^h \sigma_{rr}(1, \theta, z) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_{Ai}z) \\ \sin(\alpha_{Ai}z) \end{Bmatrix} dz = 0. \quad (3.21)$$

Интегрирование приводит к следующим уравнениям:

$$M_{ii}^{A1} A_i + \sum_{j=1}^{N_r} M_{ij}^{B1} B_j + M_{ii}^{C1} C_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_z, \quad (3.22)$$

где

$$M_{ii}^{A1} = 2h \begin{Bmatrix} 1 + \delta_{1i} \\ 1 \end{Bmatrix} [(\beta_A^2 - \alpha_A^2) \chi_n(\beta_A) \phi_n(\delta_A) \times \\ \times [k^2 - 1 + \alpha_A^2 - \omega^2/2 - \psi_n(\delta_A)] + 2\alpha_A^2 \chi_n(\delta_A) \phi_n(\beta_A) [k^2 - 1 - \beta_A^2 - \psi_n(\beta_A)]], \quad (3.23)$$

$$M_{ij}^{B1} = 4 \left[ (k^2 + \delta_B^2 - \omega^2/2) \frac{\alpha_B^2 - \beta_B^2}{\delta_B^2 - \alpha_A^2} + 2\beta_B^2 \frac{k^2 - \alpha_B^2}{\beta_B^2 - \alpha_A^2} \right] \times \\ \times \begin{Bmatrix} \delta_B^2 h^2 \text{sinc}(\delta_B h) \text{sinc}(\beta_B h) \\ -\cos(\delta_B h) \cos(\beta_B h) \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$M_{ii}^{C1} = 2hk \begin{Bmatrix} 1 + \delta_{1i} \\ 1 \end{Bmatrix} \phi_n(\beta_A) [-2\chi_n(\delta_A) \psi_n(\beta_A) + \\ + \phi_n(\delta_A) (k^2 - 1 + \alpha_A^2 - \omega^2/2 - \psi_n(\delta_A))], \quad (3.25)$$

где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Здесь и далее опущены индексы  $i$  при  $\alpha_A, \beta_A, \delta_A$  и индексы  $j$  при  $\alpha_B, \beta_B$  и  $\delta_B$ . Функция

$$\psi_n(x) = x \frac{J'_k(x)}{J_k(x)} - 1 = x \frac{J_{k-1}(x)}{J_k(x)} - k - 1. \quad (3.26)$$

Заметим что для чисто мнимых значений аргумента

$$\psi_n(ix) = x I_{k-1}(x)/I_k(x) - k - 1,$$

а для случая  $x = 0$   $\psi_n(0) = k - 1$ .

Условие (3.2с) удовлетворяется, если и только если  $\sigma_{zz}$  ортогональна полному набору функций, определенных на отрезке  $0 \leq r \leq 1$ . Выберем эти функции в виде  $J_k(\alpha_{Bj}r)$ , где  $\alpha_{Bj}$  определяется как в (3.20). Интегрируя формулу

$$\int_0^1 \sigma_{zz}(r, \theta, h) J_k(\alpha_{Bj}r) r dr = 0 \quad (3.27)$$

с учетом того, что

$$\int_0^1 J_k(\alpha_{Bi}r) J_k(\alpha_{Bj}r) r dr = \frac{\delta_{ij}}{2} \left[ 1 - \frac{k^2}{\alpha_{Bj}^2} \right] J_k^2(\alpha_{Bj}), \quad (3.28)$$

$$\int_0^1 J_k(\epsilon r) J_k(\alpha_{Bj}r) r dr = \frac{\epsilon}{\alpha_{Bj}^2 - \epsilon^2} J'_k(\epsilon) J_k(\alpha_{Bj}), \quad (3.29)$$

получаем

$$\sum_{i=1}^{N_z} M_{ji}^{A2} A_i + M_{jj}^{B2} B_j + \sum_{i=1}^{N_z} M_{ji}^{C2} C_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_r, \quad (3.30)$$

где

$$M_{ji}^{A2} = 2\chi_n(\beta_A)\chi_n(\delta_A) \left[ (2\delta_A^2 - \omega^2) \frac{\beta_A^2 - \alpha_A^2}{\alpha_B^2 - \delta_A^2} + 4 \frac{\alpha_A^2 \beta_A^2}{\alpha_B^2 - \beta_A^2} \right], \quad (3.31)$$

$$M_{jj}^{B2} = \left[ (\alpha_B^2 - \beta_B^2)^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{sinc}(\beta_B h) \cos(\delta_B h) \\ \text{sinc}(\delta_B h) \cos(\beta_B h) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. + 4\alpha_B^2 \left\{ \begin{array}{l} \delta_B^2 \text{sinc}(\delta_B h) \cos(\beta_B h) \\ \beta_B^2 \text{sinc}(\beta_B h) \cos(\delta_B h) \end{array} \right\} \right] h \left[ 1 - \frac{k^2}{\alpha_B^2} \right], \quad (3.32)$$

$$M_{ji}^{C2} = 2k\phi_n(\beta_A)\chi_n(\delta_A) \frac{2\delta_A^2 - \omega^2}{\alpha_B^2 - \delta_A^2}. \quad (3.33)$$

Наконец, потребуем, чтобы  $\sigma_{r\theta}$  была ортогональна полному набору функций на отрезке  $-h \leq z \leq h$ . Выберем такие же функции, как для граничного условия на  $\sigma_{rr}$ :

$$\int_{-h}^h \sigma_{r\theta}(1, \theta, z) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_{Ai} z) \\ \sin(\alpha_{Ai} z) \end{array} \right\} dz = 0. \quad (3.34)$$

Интегрирование дает

$$M_{ii}^{A3} A_i + \sum_{j=1}^{N_r} M_{ij}^{B3} B_j + M_{ii}^{C3} C_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_z, \quad (3.35)$$

где

$$M_{ii}^{A3} = -[(\beta_A^2 - \alpha_A^2)\chi_n(\beta_A)\phi_n(\delta_A)\psi_n(\delta_A) + 2\alpha_A^2\chi_n(\delta_A)\phi_n(\beta_A)\psi_n(\beta_A)] \times \\ \times 2hk \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_{1i} \\ 1 \end{array} \right\}, \quad (3.36)$$

$$M_{ij}^{B3} = 4k \left[ \frac{\alpha_B^2 - \beta_B^2}{\delta_B^2 - \alpha_A^2} + \frac{2\beta_B^2}{\beta_B^2 - \alpha_A^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} \delta_B^2 h^2 \text{sinc}(\delta_B h) \text{sinc}(\beta_B h) \\ -\cos(\delta_B h) \cos(\beta_B h) \end{array} \right\}, \quad (3.37)$$

$$M_{ii}^{C3} = [2\chi_n(\delta_A) [k^2 - 1 - \beta_A^2/2 - \psi_n(\beta_A)] - k^2\phi_n(\delta_A)\psi_n(\delta_A)] \times \\ \times 2h \left\{ \begin{array}{l} 1 + \delta_{1i} \\ 1 \end{array} \right\} \phi_n(\beta_A). \quad (3.38)$$

Уравнения (3.22), (3.30) и (3.35) могут быть записаны в матричном виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{\mathbf{A}1} & \mathbf{M}^{\mathbf{B}1} & \mathbf{M}^{\mathbf{C}1} \\ \mathbf{M}^{\mathbf{A}2} & \mathbf{M}^{\mathbf{B}2} & \mathbf{M}^{\mathbf{C}2} \\ \mathbf{M}^{\mathbf{A}3} & \mathbf{M}^{\mathbf{B}3} & \mathbf{M}^{\mathbf{C}3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.39)$$

где  $\mathbf{M}$  — блочная квадратная матрица размером  $(2N_z + N_r) \times (2N_z + N_r)$ ,  $\mathbf{D}$  — блочный вектор размером  $(2N_z + N_r)$ , составленный из векторов коэффициентов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ . Собственные частоты даются корнями уравнения

$$\det \mathbf{M} = 0.$$

Вместо непосредственного вычисления определителя  $\det \mathbf{M}$  возможно осуществить преобразование матрицы  $\mathbf{M}$  в матрицу размером  $N_r \times N_r$ , сохраняющее корни определителя матрицы. Ввиду того, что матрицы  $\mathbf{M}^{\mathbf{A}1}$ ,  $\mathbf{M}^{\mathbf{C}1}$ ,  $\mathbf{M}^{\mathbf{A}3}$ ,  $\mathbf{M}^{\mathbf{C}3}$  и  $\mathbf{M}^{\mathbf{B}2}$  диагональны, такое преобразование не требует вычисления обратных матриц, за исключением тривиальных вычислений обратных диагональных матриц. Выражая  $\mathbf{C}$  из уравнения (3.35), получим

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{M}^{\mathbf{C}3})^{-1} [\mathbf{M}^{\mathbf{A}3}\mathbf{A} + \mathbf{M}^{\mathbf{B}3}\mathbf{B}]. \quad (3.40)$$

Подстановка  $\mathbf{C}$  в (3.22) и (3.30) дает

$$\mathbf{m}^{\mathbf{A}1}\mathbf{A} + \mathbf{m}^{\mathbf{B}1}\mathbf{B} = 0, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{m}^{\mathbf{A}2}\mathbf{A} + \mathbf{m}^{\mathbf{B}2}\mathbf{B} = 0. \quad (3.42)$$

Здесь

$$\mathbf{m}^{\mathbf{A}1} = \mathbf{M}^{\mathbf{A}1} - \mathbf{M}^{\mathbf{C}1} (\mathbf{M}^{\mathbf{C}3})^{-1} \mathbf{M}^{\mathbf{A}3}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{m}^{\mathbf{A}2} = \mathbf{M}^{\mathbf{A}2} - \mathbf{M}^{\mathbf{C}2} (\mathbf{M}^{\mathbf{C}3})^{-1} \mathbf{M}^{\mathbf{A}3}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{m}^{\mathbf{B}1} = \mathbf{M}^{\mathbf{B}1} - \mathbf{M}^{\mathbf{C}1} (\mathbf{M}^{\mathbf{C}3})^{-1} \mathbf{M}^{\mathbf{B}3}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{m}^{\mathbf{B}2} = \mathbf{M}^{\mathbf{B}2} - \mathbf{M}^{\mathbf{C}2} (\mathbf{M}^{\mathbf{C}3})^{-1} \mathbf{M}^{\mathbf{B}3}. \quad (3.46)$$

Выражая  $\mathbf{A}$  из (3.41):

$$\mathbf{A} = - (\mathbf{m}^{\mathbf{A1}})^{-1} \mathbf{m}^{\mathbf{B1}} \mathbf{B}, \quad (3.47)$$

и подставляя в (3.42), получим

$$\mathbf{NB} = 0, \quad (3.48)$$

где

$$\mathbf{N} = \mathbf{m}^{\mathbf{B2}} - \mathbf{m}^{\mathbf{A2}} (\mathbf{m}^{\mathbf{A1}})^{-1} \mathbf{m}^{\mathbf{B1}}. \quad (3.49)$$

Размер матрицы  $\mathbf{N}$  есть  $N_r \times N_r$ . Собственные частоты диска являются корнями уравнения

$$\det \mathbf{N} = 0. \quad (3.50)$$

Алгоритм поиска собственных частот, использованный нами, заключается в следующем. Вначале задаются значения  $\sigma$  и  $h$ . Далее вычисляются элементы матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{m}^{\mathbf{A1}}$ ,  $\mathbf{m}^{\mathbf{A2}}$ ,  $\mathbf{m}^{\mathbf{B1}}$ ,  $\mathbf{m}^{\mathbf{B2}}$  и  $\mathbf{N}$  и определитель  $\det \mathbf{N}$  для возрастающих значений частоты до тех пор, пока  $\det \mathbf{N}$  не изменяет знак. Далее методом деления отрезка пополам (вместе с проверкой на возможные разрывы функции  $\det \mathbf{N}$ ) значение собственной частоты вычисляется с любой требуемой точностью.

Для расчета смещений при колебаниях на заданной собственной частоте далее из системы уравнений (3.48) находятся значения  $\mathbf{B}$ , после чего значения  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  вычисляются из уравнений (3.47) и (3.40), соответственно. Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  вычисляются по формулам (3.4)–(3.12).

### 3.1.2. Результаты расчета

Были изучены моды колебаний диска из дюралюминия с отношением толщины к диаметру  $h = 0,08864$ , равным отношению толщины к диаметру дюралюминиевого дискового резонатора, который использовался в экспериментах (см. далее). Для расчета были взяты значения плотности и скоро-

стей продольных и поперечных волн, типичные для дюралюминия Д16:  $\rho = 2,78 \text{ г/см}^3$ ,  $v_l = 6,375 \times 10^5 \text{ см/с}$  и  $v_t = 3,150 \times 10^5 \text{ см/с}$ , соответственно. При этом значение коэффициента Пуассона  $\sigma = (v_l^2 - 2v_t^2) / [2(v_l^2 - v_t^2)] = 0,3385$ .

Для проверки работы алгоритма также были воспроизведены некоторые результаты, полученные другими авторами [62, 63]; получено полное совпадение.

Как было показано в [62], оптимальное соотношение между числом членов в последовательностях  $N_r$  и  $N_z$  есть

$$N_r \sim N_z/h. \quad (3.51)$$

В расчетах при  $h = 0,0833$  использовались значения  $N_z = 5$  и  $N_r = 25$ .

В настоящем разделе приводятся результаты только для четных решений, поскольку в эксперименте изучались моды колебаний, возбужденные силовым полем, симметричным относительно плоскости  $z = 0$  (см. далее), и поэтому нечетные моды не возбуждались.

В основном рассматривались четные моды с большими значениями углового индекса  $k \gtrsim 10$ . Зависимости частот  $\omega_k$  семи наиболее низко лежащих ветвей мод, отнесенных к угловому индексу  $k$  от  $k$  показаны на рис. 3.1 точками с заливкой. Напомним, что частоты  $\omega$  в расчетах безразмерны, поэтому значения по оси ординат являются фазовыми скоростями волн  $v_k$ , отнесенными к скорости поперечных волн  $v_t$ :

$$\frac{\omega_k}{k} = \frac{\Omega_k a}{k v_t} = \frac{\Omega_k \lambda_k}{2\pi v_t} = \frac{v_k}{v_t}, \quad (3.52)$$

где  $\lambda_k$  и  $\Omega_k$  — длина волны и собственная (размерная) частота моды соответственно.

Крестиками и точками без заливки на рис. 3.1 обозначены спектры мод колебаний бесконечно длинного цилиндра радиусом  $a$  (что соответствует случаю  $h \rightarrow \infty$ ), для которых компоненты вектора смещения  $u_r$  и  $u_\theta$ , вообще

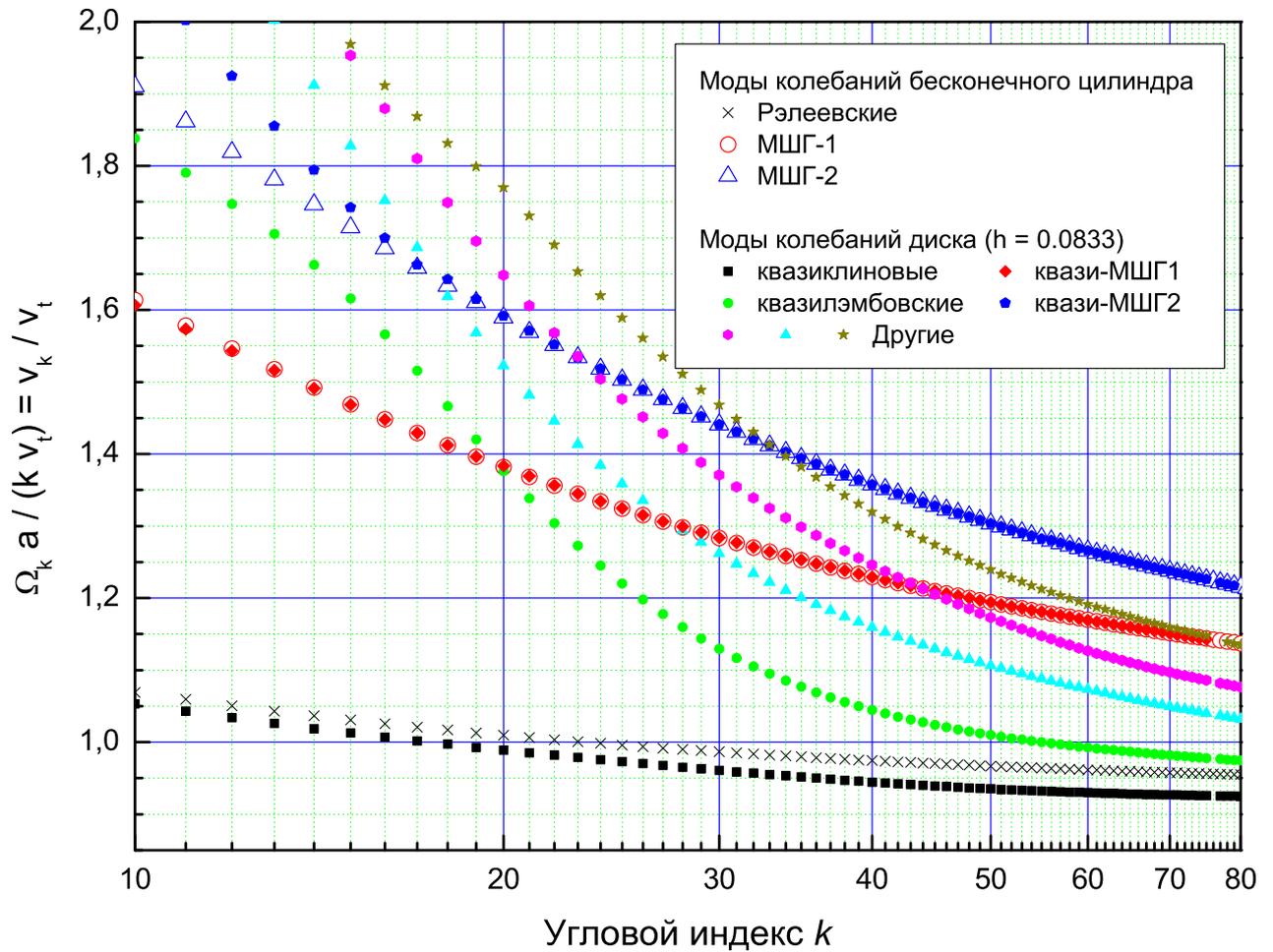


Рис. 3.1. Зависимость расчетных значений нормированных собственных частот от углового индекса  $k$  в диске из дюралюминия с отношением толщины к диаметру  $h = 0,0833$ . Разные ветви мод отмечены точками разной формы с заливкой. Представлены только низколежащие четные решения. Крестиками отмечены собственные частоты рэлеевских мод на поверхности бесконечно длинного цилиндра того же радиуса  $a$ . Моды шепчущей галереи такого цилиндра отмечены точками без заливки.

говоря, отличны от нуля, а компонента  $u_z$  тождественно равна нулю. Собственные частоты для этого случая даются корнями уравнения [66]

$$\begin{aligned} & [J_{k+2}(\omega/\eta) + J_{k-2}(\omega/\eta) - 2(\eta^2 - 1)J_k(\omega/\eta)] [J_{k+2}(\omega) + J_{k-2}(\omega)] - \\ & - [J_{k+2}(\omega/\eta) - J_{k-2}(\omega/\eta)] [J_{k+2}(\omega) - J_{k-2}(\omega)] = 0, \quad (3.53) \end{aligned}$$

где  $\eta = v_l/v_t = 2,024$  для дюралюминия Д16.

Данное уравнение имеет бесконечное число корней для любого заданного индекса  $k$ . Решение с наименьшим значением собственной частоты  $\omega_k^{(R)}$  (крестики на рис. 3.1) соответствуют рэлеевским модам колебаний на бесконечной цилиндрической поверхности. Все остальные корни  $\omega_k^{(WG1)}$ ,  $\omega_k^{(WG2)}$  и т.д. соответствуют модам шепчущей галереи (МШГ) различных порядков.

Нетрудно убедиться, что некоторые части спектров мод колебаний диска во многом воспроизводят характер спектров рэлеевских мод и МШГ бесконечно длинного цилиндра того же радиуса  $a$ . Был осуществлен анализ формы колебаний (т.е. распределений компонент вектора смещения в объеме диска) в модах. Подробности приведены в разделе 3.1.3. Формы колебаний в наиболее низко лежащей ветви мод (черные квадраты с заливкой на рис. 3.1) близки к формам колебаний рэлеевских мод на поверхности бесконечного цилиндра для относительно небольших значений  $k$  ( $k \lesssim 20$ ) в проанализированном диапазоне, в то время как для больших значений  $k$  колебания локализуются во все более узкой области, прилегающей к линии соединения боковой поверхности и оснований. При этом форма колебаний стремится к форме колебаний угловых мод, описанных в работе [63] для цилиндра с  $h = 0,5$ . В пределе больших  $k$  и  $a$  колебания в этих модах стремятся к колебаниям в угловых модах [67] бесконечного прямоугольного клина.

С увеличением  $k$  колебания во всех модах, рассматриваемых в настоящем разделе, локализуются во все более узком цилиндрическом слое вблизи боковой поверхности диска. Одна из возможных интерпретаций этого факта

заключается в том, что эти колебания «выдавливаются» к боковой поверхности под воздействием центробежной силы.

Зелеными кругами с заливкой на рис. 3.1 представлена ветвь мод колебаний, которые в области  $15 \lesssim k \lesssim 30$  могут рассматриваться как моды, сформированные волнами типа лэмбовских, распространяющихся вдоль боковой поверхности диска в цилиндрическом слое, прилегающем к этой поверхности. При дальнейшем увеличении  $k$  (для  $k \gtrsim 30$ ) колебания в этих модах начинают приобретать вид, характерный для колебаний в рэлеевских модах на поверхности цилиндра.

Распределения компонент вектора смещения в ветвях мод, обозначенных красными ромбами и синими пятиугольниками с заливкой на рис. 3.1, свидетельствуют о том, что эти моды возможно рассматривать как МШГ первого и второго порядка, соответственно.

Формы колебаний в ветвях мод, обозначенных шестиугольниками, треугольниками и звездочками с заливкой, несколько более сложны, хотя во многом «похожи» на формы колебаний в лэмбовских модах пластинки.

## Эффективный объем мод

Важной характеристикой моды колебаний диска является ее эффективный объем  $V_{eff}$ , определяемый как

$$V_{eff} = \frac{\int_{V_0} \mathbf{u}^2(V) dV}{\mathbf{u}_{\max}^2}. \quad (3.54)$$

Интегрирование здесь производится по всему объему диска  $V_0 = 2\pi a^3 h$ . В модах колебаний с небольшим эффективным объемом деформации сконцентрированы в небольших областях диска, что увеличивает эффективность нелинейных взаимодействий между различными механическими модами, а также взаимодействий между механическими и электромагнитными модами колебаний в диэлектрических дисках. Расчетные значения эффективных объемов

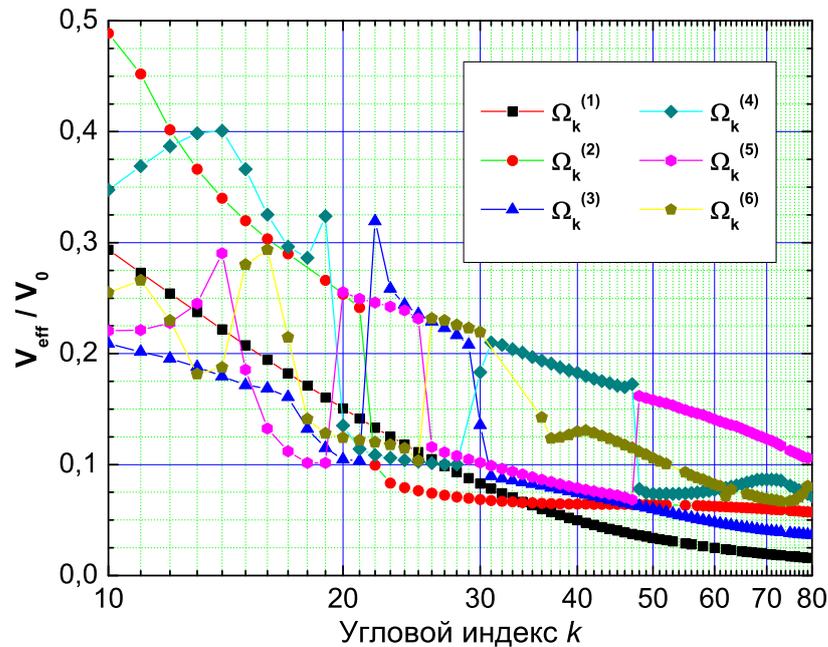


Рис. 3.2. Зависимость эффективного объема мод колебаний (в единицах полного объема диска  $V_0$ ) от величины углового индекса  $k$ . На графике представлены величины эффективных объемов для шести нижних четных ветвей мод  $\Omega_k^{(1)-(6)}$ .

для шести наиболее низко лежащих ветвей мод колебаний диска показаны на рис. 3.2.

### 3.1.3. Распределение компонент вектора смещения в дисковых резонаторах

Распределения компонент вектора смещения были рассчитаны по формулам (3.4)-(3.12). В настоящем разделе приводятся расчетные двумерные графики распределений амплитуд компонент вектора смещения (формы колебаний) в некоторых модах колебаний дискового резонатора с большим значением углового индекса  $k$ . Более строго говоря, приводимые в данном разделе

иллюстрации являются 2D-графиками функций

$$\hat{u}_r(r, z) = u_r(r, \theta, z) / \cos k\theta, \quad (3.55)$$

$$\hat{u}_\theta(r, z) = u_\theta(r, \theta, z) / \sin k\theta, \quad (3.56)$$

$$\hat{u}_z(r, z) = u_z(r, \theta, z) / \cos k\theta. \quad (3.57)$$

Для каждой моды колебаний наибольшее из максимальных значений  $\hat{u}_r$ ,  $\hat{u}_\theta$ ,  $\hat{u}_z$  принимается равным единице.

Форма колебаний в наиболее низко лежащем семействе четных мод для  $k = 10$  приведена на рис. 3.3. Нетрудно видеть, что распределения  $u_r$  и  $u_\theta$  в этих модах для небольших значений  $k$  ( $k \lesssim 15$ ) близки к соответствующим распределениям компонент смещения в рэлеевских модах цилиндра бесконечной длины, а компонента  $u_z$  относительно мала.

В самом деле, ненулевые компоненты вектора смещения в рэлеевских модах и МШГ бесконечно длинного цилиндра с собственными частотами, заданными (3.53), равны [66]

$$u_r = A_V \left[ \frac{\omega_k}{\eta} J'_k \left( \frac{\omega_k}{\eta} r \right) - k f(\omega_k) J_k(\omega_k r) \right] \cos k\theta, \quad (3.58)$$

$$u_\theta = A_V \left[ \frac{k}{r} J_k \left( \frac{\omega_k}{\eta} r \right) - f(\omega_k) \omega_k J'_k(\omega_k r) \right] \sin k\theta, \quad (3.59)$$

где  $A_V$  — некоторая постоянная, и

$$f(\omega) = \frac{1}{\eta^2} \frac{J_{k-2}(\omega/\eta) - J_{k+2}(\omega/\eta)}{J_{k-2}(\omega) + J_{k+2}(\omega)}. \quad (3.60)$$

Расчетные распределения  $\hat{u}_r(r, h)$  и  $\hat{u}_\theta(r, h)$  для диска, а также  $\hat{u}_r^{(R)}(r) = u_r / \cos k\theta$  и  $\hat{u}_\theta^{(R)} = u_\theta / \sin k\theta$  для бесконечно длинного цилиндра приведены на рис. 3.4.

При больших значениях  $k$  колебания диска в модах с наименьшей собственной частотой сосредоточены в небольших областях вблизи линий соединения боковой поверхности диска и его оснований (рис. 3.5), и компонента

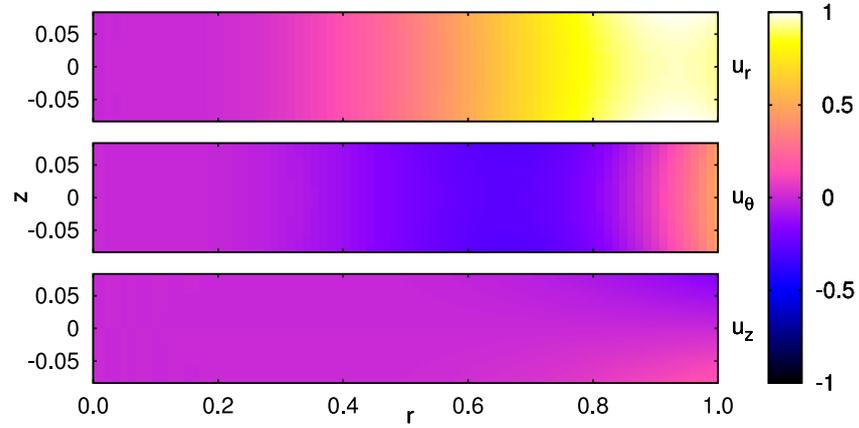


Рис. 3.3. Амплитуды компонент смещения в наиболее низко лежащей четной моде колебаний диска при  $k = 10$  (мода рэлеевского типа).

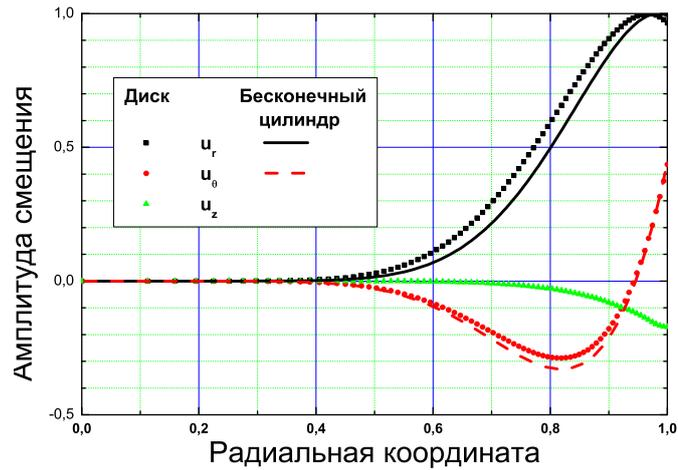


Рис. 3.4. Амплитуды компонент смещения  $u_r$  (черные квадраты),  $u_\theta$  (красные кружки) и  $u_z$  (зеленые треугольники) вдоль радиального направления на верхнем основании диска ( $z = h$ ) в моде колебаний рэлеевского типа при  $k = 10$ . Сплошной черной и штриховой красной линиями обозначены соответственно амплитуды  $u_r$  и  $u_\theta$  в поверхностной рэлеевской моде колебаний цилиндра бесконечной длины при  $k = 10$ .

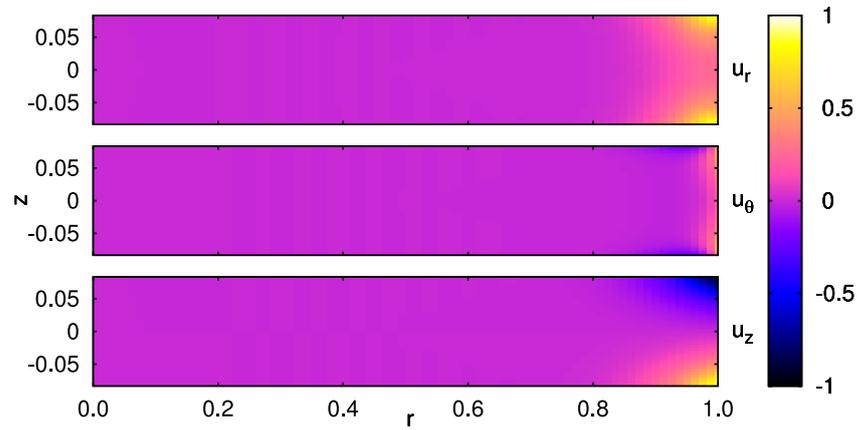


Рис. 3.5. Амплитуды компонент смещения в наиболее низко лежащей четной моде колебаний диска при  $k = 80$  (мода клинового типа).

смещения  $u_\theta$  становится малой по сравнению с  $u_r$  и  $u_z$ . В работе Тамуры [63] было показано, что такие моды относятся к клиновым модам. Колебания в этих модах формируются волнами, переходящими в пределе больших  $k$  и  $a$  в волны, распространяющиеся вдоль линии соединения поверхностей бесконечного прямоугольного клина.

Как можно видеть, во всем приведенном на рис. 3.1 диапазоне угловых волновых чисел  $k$  для каждого значения  $k$  существуют моды (обозначенные на рисунке красными ромбами с заливкой), собственные частоты которых близки к частотам МШГ первого порядка  $\omega_k^{(WG1)}$  бесконечно длинного цилиндра (красные кружки без заливки). Ниже частоты этой последовательности мод обозначаются через  $\omega_k^{(WG1-like)}$ . Распределение амплитуд компонент вектора смещения для этих мод на примере случая  $k = 15$  приведено на рис. 3.6. На рис. 3.7 приведено распределение амплитуд компонент смещения в этой моде на основании диска ( $z = h$ ) и в соответствующей МШГ первого порядка (расчет по формулам (3.58), (3.59)) бесконечно длинного цилиндра. Сравнение этих распределений позволяет сделать вывод, что рассматриваемое семейство мод в действительности является семейством мод типа шепчущей галереи первого порядка для диска.

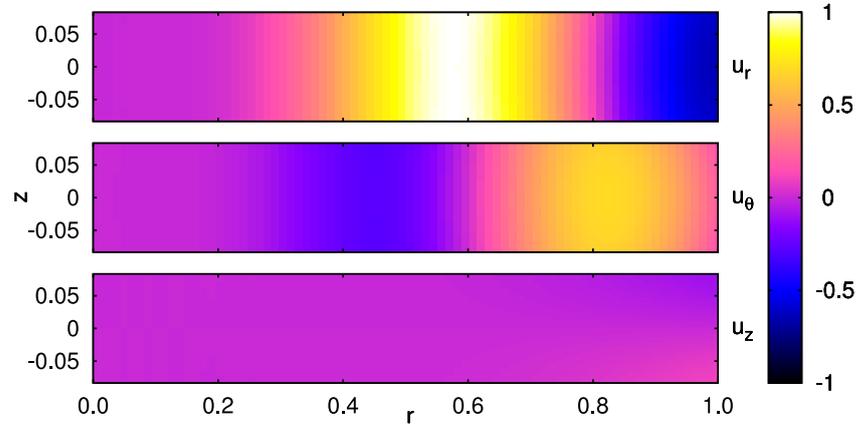


Рис. 3.6. Амплитуды компонент смещения в моде колебаний диска с собственной частотой  $\omega_{15}^{(WG1-like)}$ .

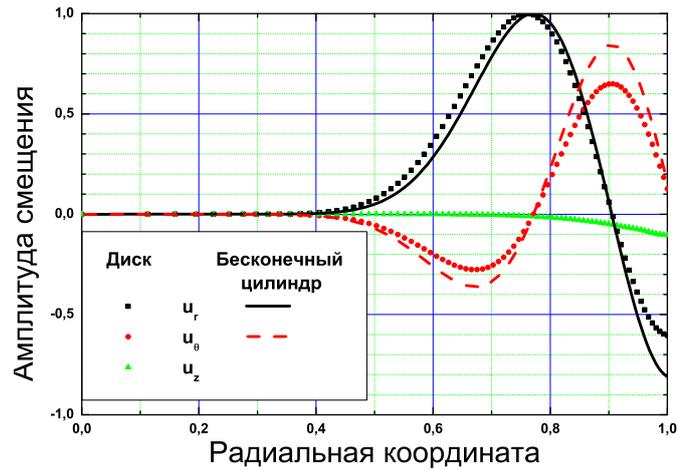


Рис. 3.7. Амплитуды компонент смещения  $u_r$  (черные квадраты),  $u_\theta$  (красные кружки) и  $u_z$  (зеленые треугольники) вдоль радиального направления на верхнем основании диска ( $z = h$ ) в моде колебаний типа шепчущей галереи первого порядка при  $k = 15$ . Сплошной черной и штриховой красной линиями обозначены соответственно амплитуды  $u_r$  и  $u_\theta$  в МШГ первого порядка цилиндра бесконечной длины при  $k = 15$ .

Проведенное аналогичным образом сравнение компонент смещений в МШГ второго порядка бесконечно длинного цилиндра и в семействе мод диска, обозначенном синими пятиугольниками с заливкой на рис. 3.1, показывает, что последнее является семейством мод типа шепчущей галереи второго порядка в диске (см. рис. 3.8). Собственные частоты мод колебаний этого семейства далее будем обозначать  $\omega_k^{(WG2-like)}$ .

Для всех рассмотренных значений  $k$  распределения амплитуд компонент  $u_r$  и  $u_\theta$  вектора смещения в модах типа шепчущей галереи для диска  $\omega_k^{(WG1-like)}$  и  $\omega_k^{(WG2-like)}$  остаются качественно неизменными и близкими к соответствующим распределениям для МШГ бесконечно длинного цилиндра. Колебания в  $z$ -направлении при этом сравнительно малы.

Помимо семейств мод рэлеевского типа и МШГ на рис. 3.1 виден набор семейств мод колебаний, скорости распространения волн в которых уменьшаются с возрастанием  $k$  сильнее, чем в семействах мод рэлеевского типа и МШГ. Колебания в наиболее низко лежащем семействе этих мод (отмеченном зелеными кружками с заливкой на рис. 3.1) близки по форме к колебаниям в низших лэмбовских модах бесконечной пластины толщиной  $2H$  [66] в диапазоне  $15 \lesssim k \lesssim 30$ , так что данные моды допустимо идентифицировать как моды колебаний, сформированные волнами лэмбовского типа, распространяющимися вдоль боковой поверхности диска в близком к нему цилиндрическом слое. Собственные частоты мод колебаний этого типа в указанном диапазоне  $k$  близки к частотам лэмбовских волн в бесконечной пластине той же толщины. В модах колебаний этого типа амплитуды компонент вектора смещения  $u_z$  и  $u_\theta$  велики по сравнению с амплитудой компоненты  $u_r$ . Распределение этих амплитуд приведено на рис. 3.9.

С последующим увеличением  $k$  (при  $k \gtrsim 30$ ) колебания в данном семействе мод начинают приобретать свойства, характерные для поверхностных мод колебаний рэлеевского типа. Распределения амплитуд компонент векто-

ра смещения в этом семействе при  $k = 80$  показаны на рис. 3.10. Форма колебаний в этих модах отличается от формы колебаний описанных выше мод колебаний рэлеевского типа в наиболее низко лежащей ветви четных мод: распределение компонент смещения в рассматриваемом случае близко к соответствующему распределению для мод рэлеевского типа только в областях, расположенных близко к плоскости  $z = 0$ , в то время как вблизи линий соединения поверхностей диска (при  $z \approx \pm h$  и  $r \approx 1$ ) амплитуда компоненты  $u_z$  больше, чем амплитуды  $u_\theta$  и  $u_r$ ; более того, в этих областях компонента  $u_r$  близка к нулю. Таким образом, можно утверждать, что этот тип мод колебаний обладает свойствами мод рэлеевского типа вблизи центральной плоскости  $z = 0$  и свойствами лэмбовских мод колебаний вблизи линий соединения поверхностей диска. Это соответствует результатам Тамуры [63], согласно которым в пределе  $h \rightarrow \infty$  собственные частоты такого (второго снизу) семейства мод колебаний цилиндра сходятся к собственным частотам поверхностных мод рэлеевского типа в цилиндре бесконечной длины.

Колебания в остальных семействах мод, обозначенных треугольниками, шестиугольниками и звездами с заливкой на рис. 3.1, имеют несколько более сложный вид, но тоже обладают сходством с колебаниям в лэмбовских модах пластины. Собственные частоты этих мод будут обозначаться как  $\omega_k^{(L2-like)}$ ,  $\omega_k^{(L3-like)}$  и  $\omega_k^{(L4-like)}$ , соответственно. Распределения амплитуд компонент вектора смещения в моде колебаний с частотой  $\omega_{35}^{(L2-like)}$  приведены на рис. 3.11. Можно видеть, что амплитуда компоненты  $u_z$  в данных модах также велика, хотя компонента  $u_r$  вблизи линий соединения поверхностей диска также имеет сравнительно большую амплитуду.

Формы колебаний в модах, расположенных вблизи «пересечений графиков»<sup>1</sup> различных семейств мод на рис. 3.1, вообще говоря, могут иметь весьма

---

<sup>1</sup> Конечно, результаты расчета, приведенные на рис. 3.1, представляют собой дискретные наборы частот, поэтому ни о каких «пересечениях графиков», строго говоря, рассуждать нельзя. В то же время

сложную структуру, в особенности если собственные частоты мод близки. Распределения амплитуд компонент вектора смещения в двух модах колебаний, принадлежащих к семействам, графики которых «пересекаются» вблизи значения  $k = 23$  (а именно  $\omega_{23}^{(WG2-like)}$  и  $\omega_{23}^{(L3-like)}$ ) приведены на рис. 3.12, 3.13. Величина относительной разности собственных частот указанных мод колебаний  $\approx 8 \times 10^{-4}$ .

---

данный метод расчета может быть обобщен на все действительные неотрицательные значения  $k$ , что соответствует рассмотрению бегущих вдоль поверхности диска волн с произвольным значением углового индекса; полуплоскость  $\theta = 0$  в этом случае рассматривается как поверхность ветвления бесконечного порядка, а наборы дискретных значений ветвей мод колебаний переходят в непрерывные дисперсионные кривые.

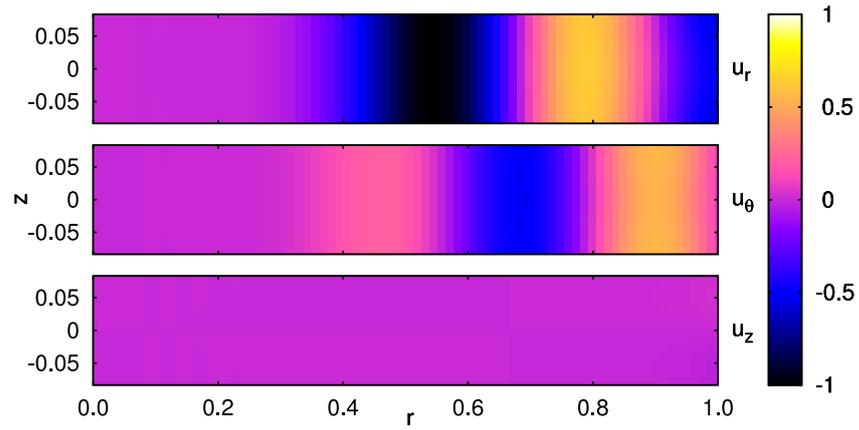


Рис. 3.8. Амплитуды компонент смещения в моде колебаний диска с собственной частотой  $\omega_{28}^{(WG2-like)}$ .

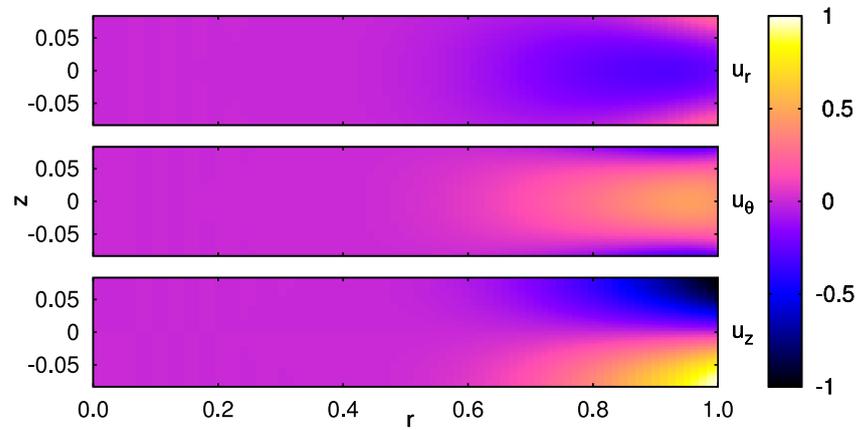


Рис. 3.9. Амплитуды компонент смещения в четной моде колебаний диска со второй снизу собственной частотой при  $k = 25$  (мода лэмбовского типа).

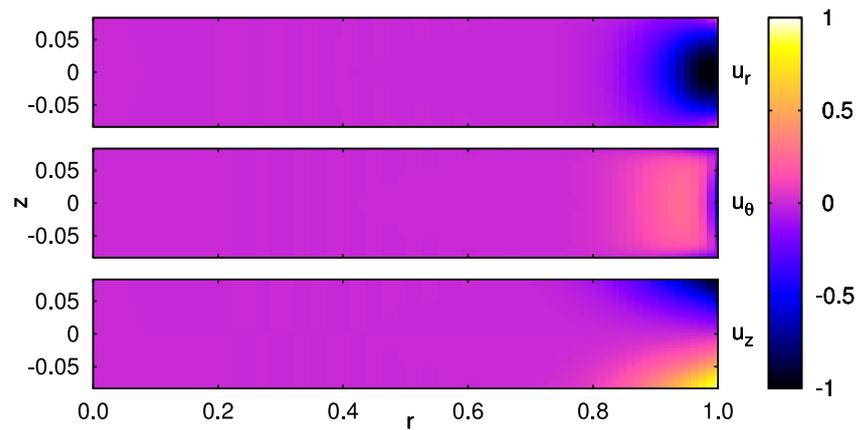


Рис. 3.10. Амплитуды компонент смещения в четной моде колебаний диска со второй снизу собственной частотой при  $k = 80$  (мода рэлеевского типа).

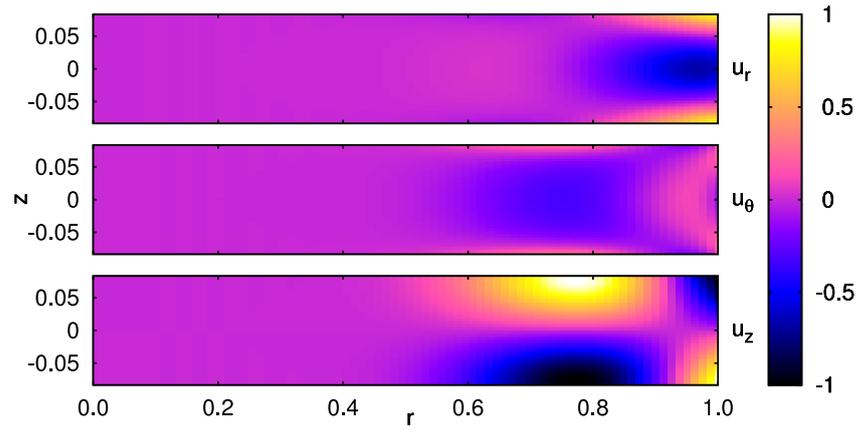


Рис. 3.11. Амплитуды компонент смещения в моде колебаний диска с собственной частотой  $\omega_{35}^{(L2-like)}$ .

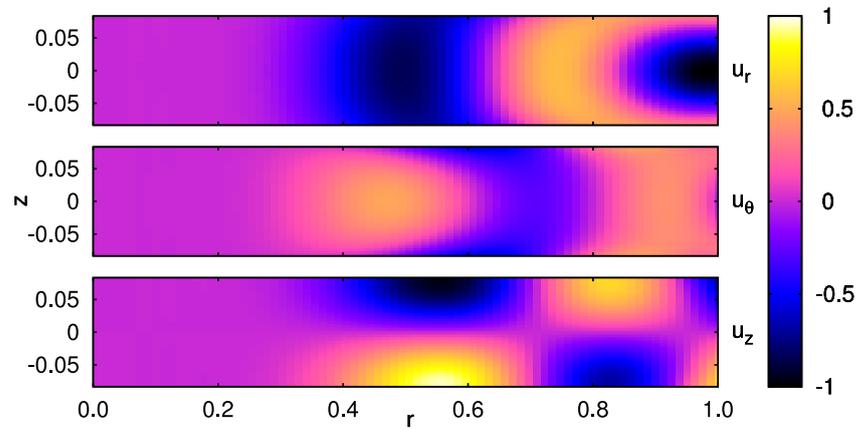


Рис. 3.12. Амплитуды компонент смещения в моде колебаний диска с собственной частотой  $\omega_{23}^{(WG2-like)}$  (вблизи «пересечения графиков» ветвей мод).

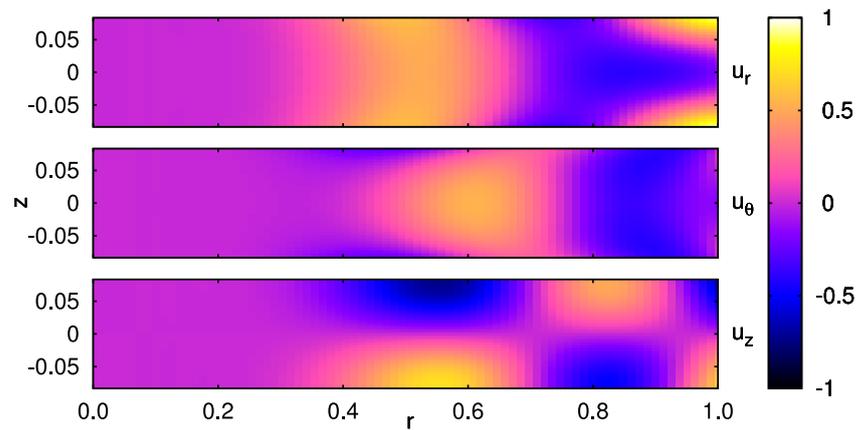


Рис. 3.13. Амплитуды компонент смещения в моде колебаний диска с собственной частотой  $\omega_{23}^{(L3-like)}$  (вблизи «пересечения графиков» ветвей мод).

### 3.1.4. Схема эксперимента

Использованный в экспериментах дисковый резонатор, а также системы возбуждения и регистрации колебаний схематически изображены на рис. 3.14. Диск диаметром  $2a = 180,5$  мм и толщиной  $2H = 16$  мм изготовлен из дюралюминия Д16. В центре диск зажат между двумя фторопластовыми стержнями диаметром 20 мм.

Гребенчатые электроды, используемые для электростатического возбуждения колебаний в диске, установлены на передвижной столик таким образом, чтобы ширина зазора между элементами электрода и боковой поверхностью диска составляла около 50 мкм. Электроды состояли из трех или двух элементов. Ширина электрода была равна толщине диска (16 мм) для эффективного возбуждения четных мод колебаний дискового резонатора.

Для возбуждения колебаний в диске на электрод подавалось переменное напряжение  $U_a = U_0 \cos \Omega t$ , которое создавало электростатическую силу  $F$  между электродом и заземленным диском

$$F = \frac{1}{2} \frac{dC}{dr} U_a^2 = \frac{U_0^2}{4} \frac{dC}{dr} (1 + \cos 2\Omega t), \quad (3.61)$$

которая содержала компоненту на резонансной частоте  $2\Omega$ , где  $dC/dr$  — изменение электрической емкости между электродом и резонатором на единицу радиального смещения. При величине  $U_0 = 300$  В каждый элемент электрода создает силу амплитудой  $\sim 10^{-3}$  Н. Подобная конструкция пригодна для возбуждения мод колебаний с существенным смещением в радиальном направлении. Условием оптимального возбуждения моды колебаний с угловым индексом  $k$  является равенство пространственного периода гребенчатого электрода величине  $2\pi a/k$ . Тем не менее, другие моды со значениями  $k$ , достаточно близкими к оптимальному, также возбуждаются таким электродом. В экспериментах возбуждались моды колебаний в диске со значениями углового индекса  $k$  от 17 до 37 с использованием двух гребенчатых электродов с



Рис. 3.14. Схема экспериментальной установки. Переменное напряжение требуемой частоты генерируется синтезатором частоты и подается через высоковольтный усилитель на гребенчатый электрод актюатора. Возбужденные в дисковом резонаторе колебания регистрируются посредством измерения изменения электрической емкости между дисковым резонатором и электродом сенсора с использованием емкостного преобразователя.

пространственными периодами 16 мм и 22 мм.

Радиальная компонента колебаний диска приводит к возникновению зависимости от времени емкости между диском и вторым (регистрирующим) электродом, который имеет форму и размеры, совпадающие с возбуждающим электродом. Эта емкость входит в состав  $LC$ -контура с резонансной частотой около 10 МГц. На контур подается переменное напряжение с частотой, соответствующей максимальному углу наклона его резонансной кривой. Изменение электрической емкости приводит к изменению амплитуды напряжения на электрическом контуре. Выходной сигнал демодулируется для получения информации об изменении резонансной частоты контура. Чувствительность датчика составила около  $0.1 \text{ нм}/\sqrt{\text{Гц}}$ .

### 3.1.5. Результаты измерений

Были определены резонансные частоты мод колебаний диска в диапазоне 130–200 кГц. Среди большого числа резонансов были отобраны те, которые формировали ветви мод колебаний в соответствии с теоретическим расчетом.

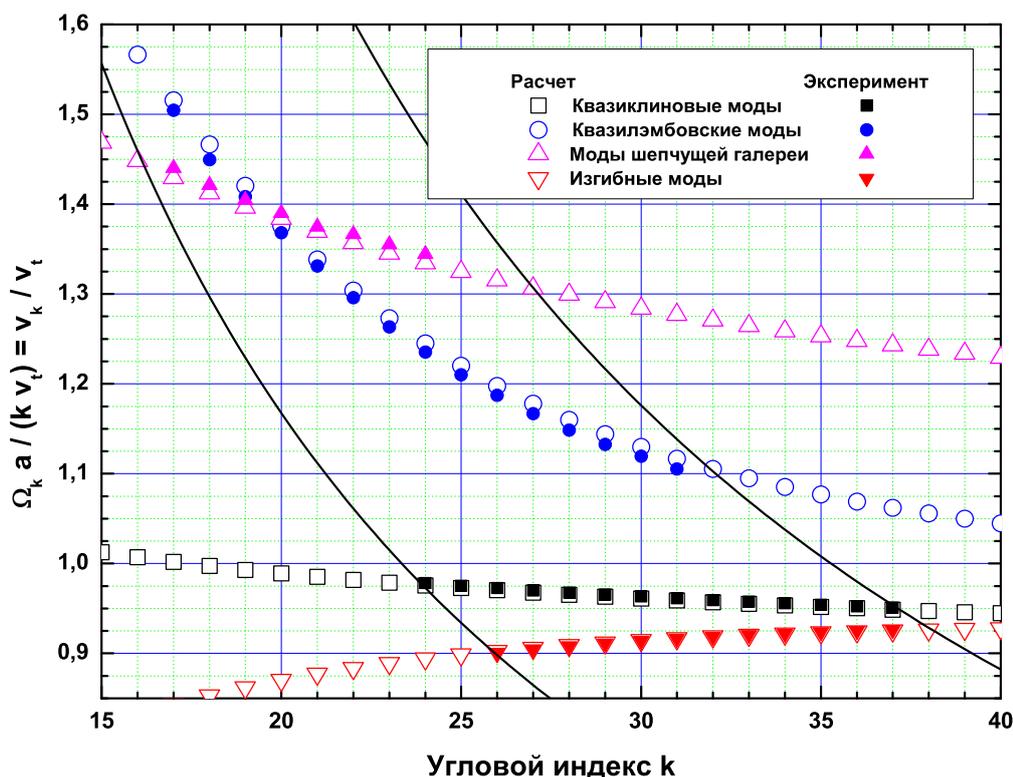


Рис. 3.15. Измеренные (точки с заливкой) и расчетные (точки без заливки) нормированные резонансные частоты дюралюминиевого диска с отношением толщины к диаметру  $h = 0,0833$ . Перевернутыми треугольниками отмечены расчетные и измеренные резонансные частоты наиболее низко лежащей ветви нечетных решений (изгибные моды). Сплошными линиями отмечены границы области, доступного для измерений в установке.

Соответствующие резонансные частоты показаны на рис. 3.15. Различие между расчетными и измеренными значениями резонансных частот мод колебаний диска не превышает 1%.

Для проверки того, что эти моды колебаний действительно принадлежат соответствующим семействам мод, были проведены измерения распределений вертикальной компоненты смещения диска  $u_z$  вблизи боковой поверхности на верхнем основании диска посредством дополнительного емкостного датчика, электрод которого размещался над поверхностью верхнего основания на высоте около 30 мкм. Типичное измеренное распределение вертикального смещения для одной из угловых мод показано на рис. 3.16. Из таких распре-

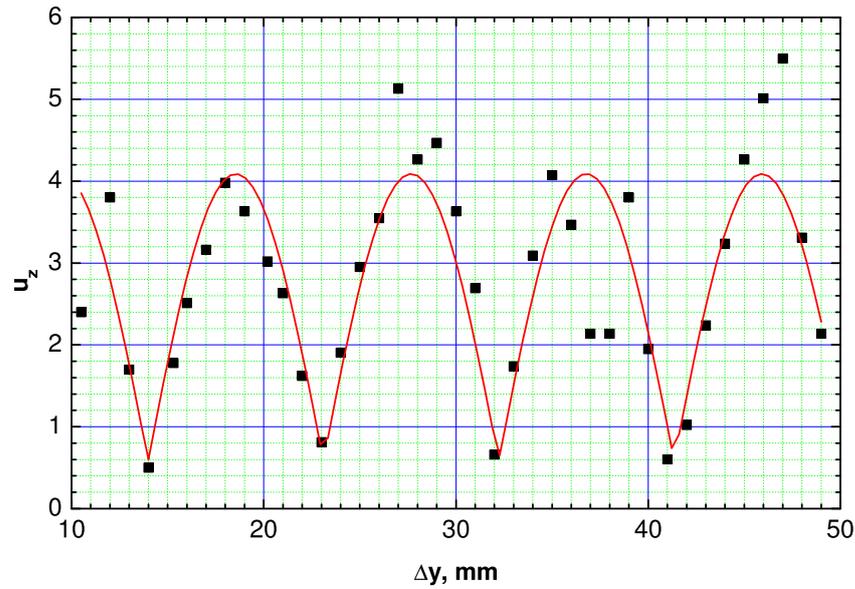


Рис. 3.16. Распределение вертикальной компоненты смещения  $u_z$  (в относительных единицах) вдоль боковой поверхности ( $\Delta y = a\Delta\theta$ ), измеренная для наиболее низко лежащей четной моды колебаний с  $k = 31$  (точки) и ее аппроксимация (сплошная линия). Аппроксимация дает значение углового индекса  $k = 31.1 \pm 0.4$ .

делений вычислялось значение углового индекса  $k$  исследуемых мод. Тем же методом были проведены измерения вертикальной компоненты смещения на верхнем основании диска вдоль радиуса для определения типов мод. Для измерения характеристик мод колебаний с относительно малыми амплитудами компоненты вектора смещения  $u_r$  на боковой поверхности (например, ветви лэмбовских мод) использовался дополнительный электрод возбуждения, который размещался над верхним основанием цилиндра вблизи от боковой поверхности. Также это позволило возбудить некоторые из нечетных (антисимметричных) мод колебаний. Наиболее низко лежащая ветвь нечетных мод также показана на рис. 3.15 (красные перевернутые треугольники). Эти моды аналогичны изгибным модам, описанным в работе [63].

Измерения форм резонансных кривых показало расщепление некоторых мод. Определить, расщеплена ли мода, возможно в случае, если расщепление больше или порядка ширины ее резонансной кривой. Такое расщепление на-

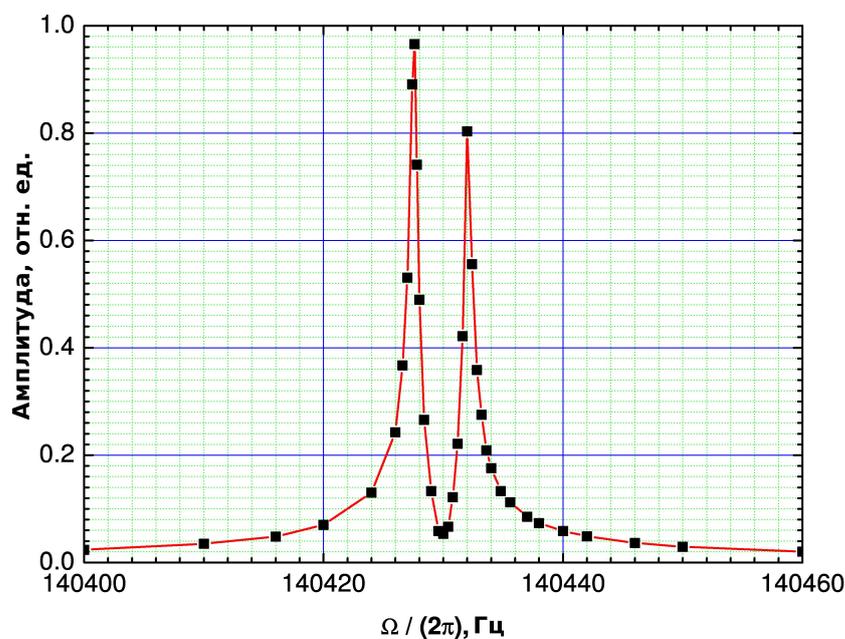


Рис. 3.17. Резонансная кривая наиболее низко лежащей четной моды с  $k = 26$ .

блюдалось приблизительно для половины всех обнаруженных мод колебаний. Типичная форма расщепленной резонансной кривой показана на рис. 3.17. Расщепление частот, по всей видимости, обусловлено неоднородностью диска, которая нарушает симметрию и приводит к формированию стоячих волн, симметричных и антисимметричных по угловой координате.

Добротности мод определялись по резонансным кривым, измеренным в вакууме при остаточном давлении около  $10^{-4}$  Торр. Резонансные кривые мод колебаний без заметного расщепления аппроксимировались лоренцевой кривой, что позволяло рассчитать добротность. Значения всех измеренных добротностей мод лежали в диапазоне  $(2...3) \times 10^5$ . Эти значения характерны для дюралюминиевых механических резонаторов в ультразвуковом диапазоне частот [68]. Добротность, по всей видимости, определяется потерями вследствие зернограничного трения в поликристаллическом дюралюминии.

Результаты расчетов и результаты экспериментов сравнивались для случая дюралюминиевого диска сравнительно большого размера. Это упростило идентификацию наблюдаемых мод колебаний и сравнение расчетных и экспе-

риментальных результатов. В будущем полученные результаты могут быть использованы для разработки высокочастотных дисковых механических микрорезонаторов.

### **3.2. Изгибные моды колебаний кремниевых дисковых резонаторов**

В настоящий момент наиболее перспективным материалом для изготовления пробных масс и их подвесов в детекторах гравитационных волн третьего поколения считается монокристаллический кремний [12], при этом предполагается, что подвесы будут представлять собой тонкие полоски из монокристаллического кремния. Для проектирования таких подвесов необходимы исследования механической диссипации в тонких кремниевых полосках. Для этих исследований используются моды колебаний дисковых резонаторов с большими значениями углового индекса. Среди изученных мод колебаний дисков наименьшее значение эффективной массы имеют изгибные моды. Поэтому в качестве демпфируемого объекта для системы демпфирования были выбраны изгибные моды колебаний дисковых резонаторов — тонких пластин из монокристаллического кремния, что потребовало дополнительного их изучения — в частности, были исследованы собственные потери в таких модах колебаний при комнатной температуре.

Минимизация потерь в креплении необходима для разработки высокочастотных механических резонаторов, и для этого используются различные методы [69, 70]. Изгибные моды колебаний дисковых резонаторов с большими значениями углового индекса демонстрируют значительный уровень геометрической нелинейности. Такая нелинейность в различных задачах может быть как нежелательным фактором, ограничивающим линейный динамический диапазон устройств [71], так и играть существенную роль в принци-

пе их работы. В частности, связь между механическими модами колебаний, возникающая вследствие нелинейности, используется в различных приложениях [72]. Нелинейность используется для стабилизации частоты резонаторов [73], приготовления наномеханических осцилляторов в неклассических состояниях [74].

### 3.2.1. Схема эксперимента

В качестве исследуемого дискового резонатора использовалась стандартная коммерческая пластина из монокристаллического кремния  $n$ -типа, легированного сурьмой (удельное электрическое сопротивление  $0,02 \text{ Ом}\times\text{см}$ ). Пластина была полирована с двух сторон и имела ориентацию кристаллографических осей (111). Диаметр пластины  $2a = 76,2 \text{ мм}$ , толщина  $2H = 0,34 \text{ мм}$ . Пластина зажималась между двумя цилиндрическими шайбами из фторопласта диаметром  $10 \text{ мм}$  каждая (рис. 3.18). Начальное возбуждение колебаний в пластине осуществлялось электростатически при помощи гребенчатого электрода, который устанавливался на подвижную платформу таким образом, чтобы расстояние между его рабочей поверхностью и поверхностью пластины составляло около  $100 \text{ мкм}$ . На электрод подавалось переменное напряжение  $U_0 \cos \Omega t$ , что создавало силу электростатического притяжения между электродом и пластиной, содержащую компоненту, осциллирующую с частотой  $2\Omega$ , которая возбуждала колебания в пластине на этой частоте. Для величины  $U_0 = 300 \text{ В}$  амплитуда силы притяжения, создаваемой на каждом из штырьков электрода, составляла около  $10^{-3} \text{ Н}$ . Для оптимального возбуждения моды колебаний с угловым индексом  $k$  пространственный период гребенчатого электрода должен быть равен  $2\pi a/k$ ; моды колебаний с близкими значениями углового индекса также возбуждаются таким электродом. В эксперименте использовался электрод с пространственным периодом  $10 \text{ мм}$ ,

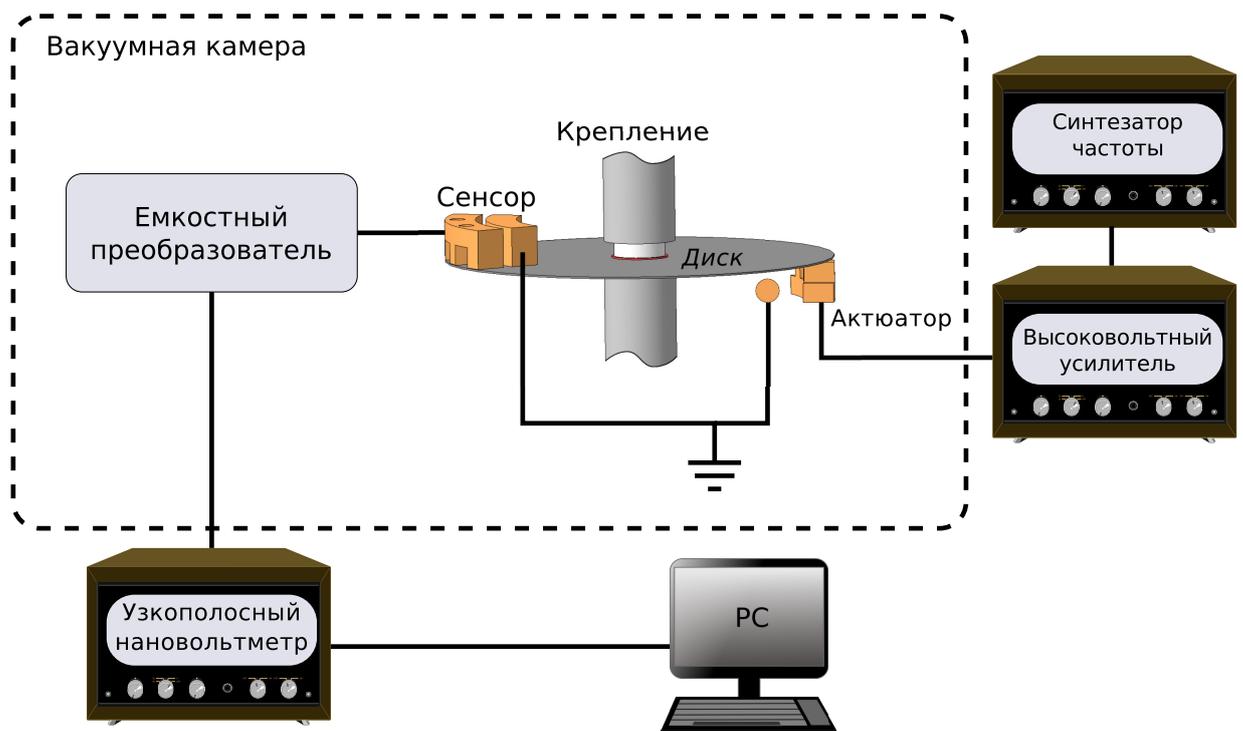


Рис. 3.18. Схема экспериментальной установки.

что позволяло регистрировать моды колебаний диска со значениями углового индекса  $2 \leq k \leq 30$ , наибольшая эффективность возбуждения наблюдалась в области  $k = 23$ .

Регистрация изгибных колебаний пластины осуществлялась при помощи емкостного преобразователя. Изгибные колебания пластины приводили к изменению взаимной емкости пластины и гребенчатого электрода сенсора, который имел такую же форму, как и электрод актюатора. Указанная емкость была включена в радиочастотный электрический колебательный контур. Изменение резонансной частоты контура при движении пластины регистрировалось посредством демодуляции выходного сигнала контура. Чувствительность сенсора составила около  $0,1 \text{ нм}/\sqrt{\text{Гц}}$ .

Измерения проводились в вакууме при остаточном давлении порядка  $10^{-4}$  торр при комнатной температуре.

### 3.2.2. Резонансные частоты и форма изгибных мод колебаний в линейном режиме

Изгибные колебаний свободных тонких дисков являлись предметом теоретического рассмотрения во многих исследованиях от Кирхгофа до наших дней. В случае малых колебаний тонкого ( $H \ll a$ ) идеального диска, изготовленного из однородного изотропного материала плотностью  $\rho$ , модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , линейное уравнение движения, описывающее смещение  $W(r, \theta, t)$  в направлении, перпендикулярном плоскости диска, имеет следующий вид [75]:

$$D\nabla^2\nabla^2W + \rho 2H\frac{\partial^2W}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial W}{\partial t} + g(r, \theta, t), \quad (3.62)$$

где  $D = E(2H)^3/[12(1 - \nu^2)]$  — так называемый коэффициент изгибной жесткости диска,  $\mu$  — коэффициент затухания,  $g$  — плотность внешней силы, направленной нормально к поверхности диска. Решения однородного ( $g \equiv 0$ ) уравнения (3.62) с соответствующими граничными условиями описывают моды колебаний такого диска<sup>2</sup>. Решение разделяется относительно переменных  $r$ ,  $\theta$  и  $t$ . Временная часть решения описывается синусоидальной зависимостью от времени. Пространственная часть решения имеет вид

$$\Phi_{kn}(r, \theta) = [A_{kn}J_k(\lambda_{kn}r) + B_{kn}I_k(\lambda_{kn}r)] \times \\ \times [C_{kn}\cos(k\theta) + D_{kn}\sin(k\theta)]. \quad (3.63)$$

Здесь через  $J_k$  и  $I_k$  обозначены соответственно функции Бесселя и Инфельда  $k$ -го порядка. Константы  $A_{kn}$ ,  $B_{kn}$ ,  $C_{kn}$ ,  $D_{kn}$  определяются из граничных условий, соответствующих свободному диску. Собственные значения  $\lambda_{kn}^2 =$

---

<sup>2</sup> В случае  $H \ll a$  метод, описанный в разделе 3.1.1, требует учета очень большого количества элементов ортогонального базиса  $N_r$ , поэтому здесь используется указанное приближенное уравнение движения для изгибных колебаний тонких пластин, допускающее точное решение.

$\Omega_{kn}\sqrt{\rho 2H/D}$  даются решением характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{[a^2\lambda^2+k(k+1)(\nu-1)]J_k(a\lambda)-a\lambda(\nu-1)J_{k-1}(a\lambda)}{[a^2\lambda^2-k(k+1)(\nu-1)]I_k(a\lambda)+a\lambda(\nu-1)I_{k-1}(a\lambda)} &= \\ &= \frac{a\lambda[a^2\lambda^2-k^2(\nu-1)]J_{k-1}(a\lambda)-k[a^2\lambda^2-k(k+1)(\nu-1)]J_k(a\lambda)}{a\lambda[a^2\lambda^2+k^2(\nu-1)]I_{k-1}(a\lambda)-k[a^2\lambda^2+k(k+1)(\nu-1)]I_k(a\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Приведенное уравнение имеет бесконечное количество решений для каждого заданного  $k$ . При этом  $n$ -й корень этого уравнения (начиная с наименьшего) представляет собой собственную частоту изгибной моды колебаний с числом узловых диаметров (угловым индексом)  $k$  и числом узловых окружностей (радиальным индексом)  $n$ . В настоящем разделе рассмотрены только изгибные моды колебаний с ненулевым числом узловых диаметров и нулевым числом узловых окружностей (т.е.  $k > 0$ ,  $n = 0$ ).

Расчеты резонансных частот мод колебаний выполнены для случая изотропного диска, в то время как монокристаллический кремний представляет собой анизотропный материал. Тем не менее, для идеальной пластины с ориентацией кристаллографических осей (111) компоненты упругих параметров в плоскости пластины изотропны. В реальных коммерческих кремниевых (111)-пластинах анизотропия параметров  $E$  и  $\nu$  в плоскости пластины составляет около 6% [76]. В расчетах использовались значения  $E = 169$  ГПа и  $\nu = 0,262$ .

Анализ формы мод колебаний, описываемых уравнением (3.63), показывает, что энергия колебаний сосредоточена в основном в области пластины, прилегающей к ее внешнему краю. Это дает основания считать, что, поскольку диаметр зажима мал по сравнению с диаметром пластины, результаты расчета для свободной пластины будут отличаться от результатов для пластины, зажатой подобным образом, лишь незначительно.

Каждому собственному значению частоты для идеального однородного изотропного диска соответствуют две вырожденные моды колебаний, отличающиеся лишь фазой колебаний на величину фазового сдвига в  $\pi/2$  [75]. В

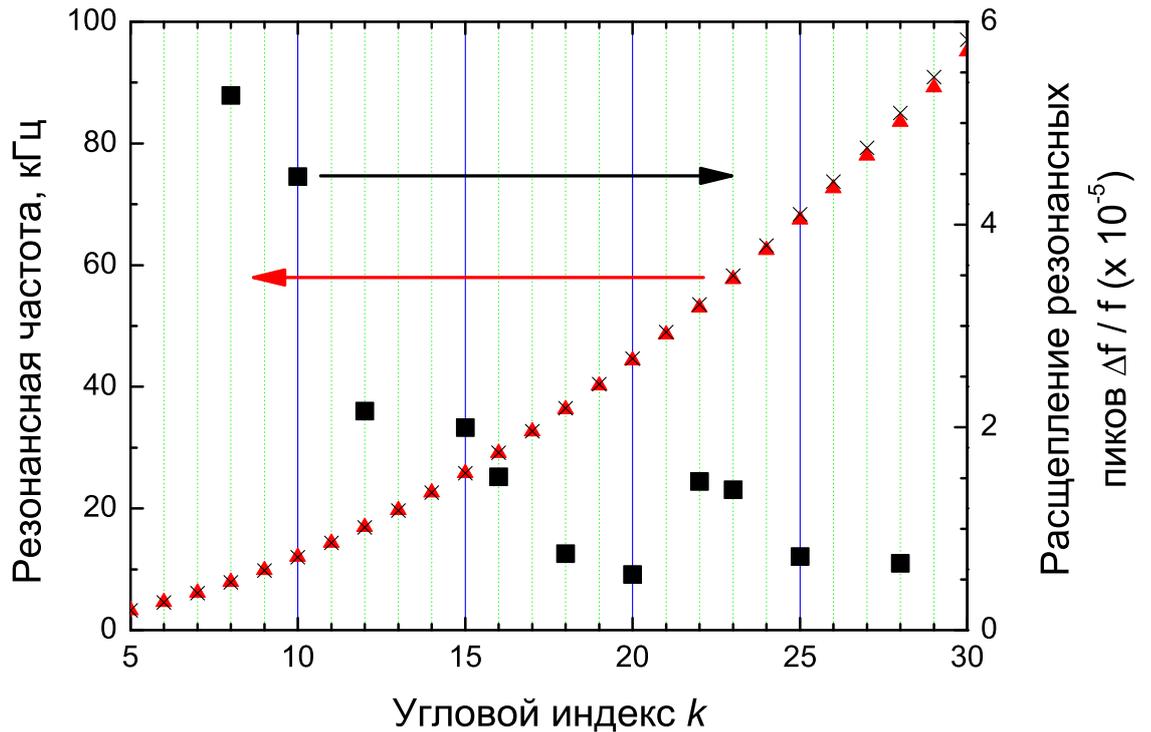


Рис. 3.19. Расчетные (левая шкала, крестики) и полученные в эксперименте (левая шкала, треугольники) значения резонансных частот  $f_{k0}$  изгибных мод колебаний кремниевого дискового резонатора; относительные величины расщепления резонансных кривых  $\Delta f/f$ , если наблюдались (правая шкала, квадраты).

реальной пластине за счет различных неоднородностей вырождение снимается: резонансные частоты мод несколько отличаются, появляется дополнительный сдвиг фаз между модами. Если сенсор размещен в области нулевого диаметра одной моды из такой пары, то с помощью него возможно зарегистрировать будут только колебания другой моды.

Результаты расчета собственных частот  $f_{k0} = \Omega_{k0}/(2\pi)$  мод колебаний кремниевой пластины, а также их значения, измеренные в эксперименте, представлены на рис. 3.19. Можно отметить хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов.

При измерении резонансных частот мод колебаний на электрод актюато-

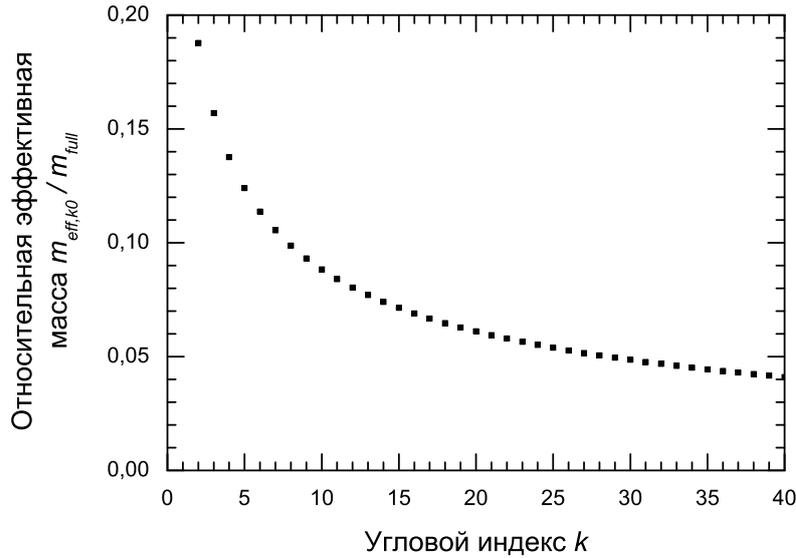


Рис. 3.20. Эффективная масса для различных изгибных мод колебаний кремниевого дискового резонатора.

ра подавалось переменное напряжение сравнительно низкой амплитуды для обеспечения линейного режима колебаний пластины. Приблизительно для половины из изученных в эксперименте изгибных мод колебаний пластины наблюдалось расщепление резонансных частот на относительную величину  $\Delta f_{k0}/f_{k0}$  от  $5 \times 10^{-5}$  для мод колебаний с низкими резонансными частотами до  $7 \times 10^{-6}$  для более высоких частот. Для остальных мод колебаний такое расщепление не наблюдалось, что может быть следствием выбранной формы и расположения электродов сенсора и актюатора, приводящего к слабым эффектам возбуждения и регистрации одной невырожденной моды колебаний из пары относительно другой. Значения относительной величины расщепления частоты мод колебаний также приведены на рис. 3.19.

Важным параметром, характеризующим моды колебаний диска, является их эффективная масса  $m_{eff,kn}$ , которая может быть рассчитана для извест-

ной нормированной формы моды колебаний как

$$m_{eff, kn} = \rho 2H \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a [\Phi_{kn}(r, \theta)]^2 r dr d\theta}{[\Phi_{kn}(r, \theta)]_{max}^2}. \quad (3.65)$$

Эта величина (в сочетании с соответствующей эффективной жесткостью  $k_{eff, kn} = m_{eff, kn} \Omega_{kn}^2$ ) описывает движение осциллятора с сосредоточенными параметрами, соответствующего выбранной моде колебаний механического резонатора. Результаты расчета эффективной массы, отнесенные к полной массе пластины  $m_{full} = 2\pi a^2 H \rho$ , приведены на рис. 3.20.

### 3.2.3. Затухание колебаний в изгибных модах

Среди различных механизмов потерь в механических резонаторах отметим фундаментальный механизм термоупругих потерь, вызываемых потоками тепла между сжатыми и растянутыми областями упругой среды вследствие их нагревания и охлаждения, соответственно. Такие тепловые потоки возникают и в случае изгибных колебаний дискового резонатора. Первая аналитическая модель этого процесса для изгибных колебаний прямоугольных механических брусков была предложена Зенером [77]. Лифшиц и Роукс [78] предложили более точную модель для брусков, в которой выражение для фактора механических потерь имеет вид

$$Q_{LR}^{-1} = \frac{E\alpha^2 T_0}{C} \left( \frac{6}{\xi^2} - \frac{6 \operatorname{sh} \xi + \sin \xi}{\xi^3 \operatorname{ch} \xi + \cos \xi} \right), \quad (3.66)$$

где  $\xi = 2H\sqrt{\Omega/2\chi}$ ;  $\alpha$ ,  $\chi$  и  $C$  — соответственно коэффициент теплового расширения, коэффициент теплопроводности и объемная теплоемкость материала бруска при постоянном давлении,  $T_0$  — температура.

Позднее этот метод был распространен на изгибные моды колебаний дисковых механических резонаторов [79, 80].

Фактор термоупругих потерь для изгибных мод колебаний свободной кремниевой пластины, описываемых функцией распределения амплитуд смещения  $\Phi(r, \theta)$  был рассчитан в соответствии со следующим выражением, полученным в [80]:

$$Q^{-1} = Q_{LR}^{-1} \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \times \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a (\nabla^2 \Phi)^2 r \, dr \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ (\nabla^2 \Phi)^2 + 2(1 - \nu)K[\Phi] \right\} r \, dr \, d\theta}, \quad (3.67)$$

где  $K[\Phi]$  — гауссова кривизна

$$\left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

а фактор потерь  $Q_{LR}^{-1}$  рассчитывается по модели Лифшица-Роукса в соответствии с (3.66).

В настоящей работе было проведено сравнение экспериментально измеренных величин факторов потерь в изгибных модах колебаний кремниевой пластины и значений, рассчитанных для термоупругих потерь в соответствии с выражением (3.67). Амплитуда возбуждения колебаний пластины выбиралась достаточно низкой для обеспечения линейного режима. Факторы потерь вычислялись как параметры аппроксимации резонансных кривых мод колебаний, в которых не наблюдалось расщепление резонансных частот, лоренцевой формой (рис. 3.21). Было обнаружено, что фактор механических потерь  $Q^{-1}$  монотонно уменьшается с увеличением углового индекса  $k$  вплоть до  $k \approx 26$  (резонансная частота  $\approx 70$  кГц). Фактор потерь для мод с угловым индексом  $6 \lesssim k \lesssim 26$  близок к значениям, рассчитанным для термоупругого механизма потерь.

Поскольку смещения в рассматриваемых модах колебаний сосредоточены в прилегающей к краю пластины области, эффективная ширина которой имеет величину порядка длины стоячей волны  $2\pi a/k$ , можно считать,

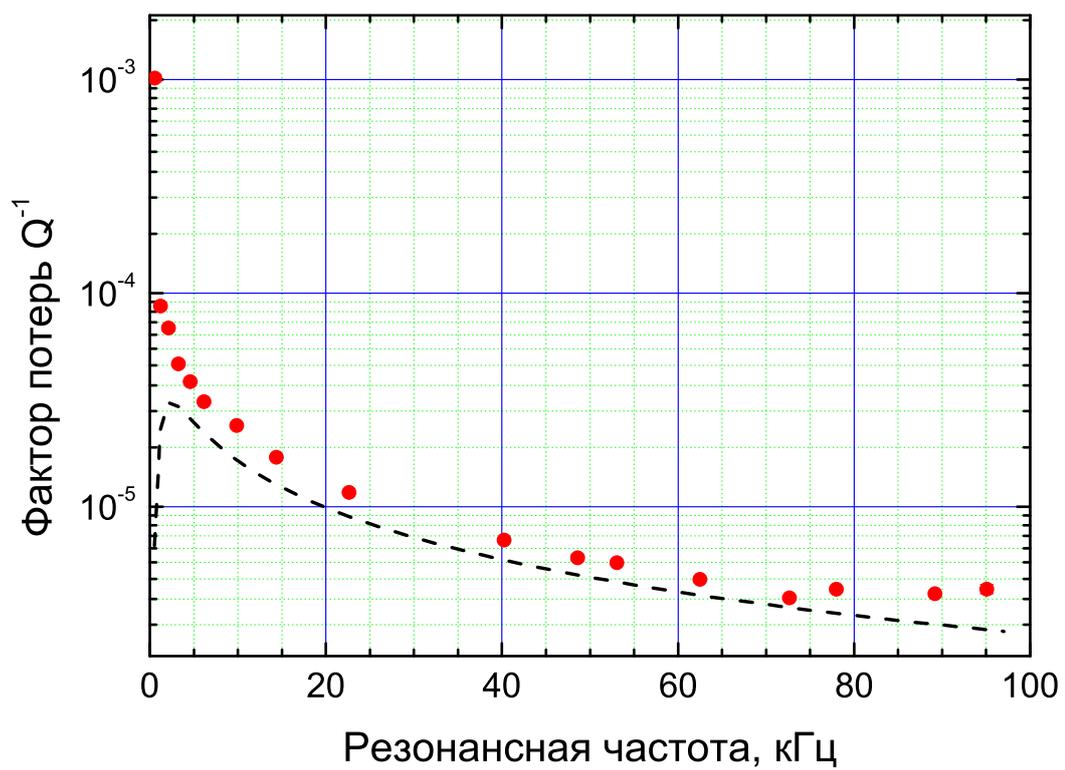


Рис. 3.21. Зависимость измеренного фактора потерь в модах колебаний от их резонансных частот (точки). Расчетный уровень термоупругих потерь для таких мод колебаний (штриховая линия).

что потери в креплении уменьшаются при увеличении  $k$ . Поэтому можно предположить, что потери в креплении являются причиной избыточного затухания для  $k \lesssim 6$ . При больших значениях  $k$  предположительно определяющее значение имеют поверхностные потери, которые в механических резонаторах обычно считаются практически не зависящими от частоты. Поскольку механизм поверхностных потерь достаточно сложен и во многом до сих пор не изучен, этот вид потерь затруднительно моделировать теоретически. Измеренные величины фактора потерь  $\approx 4 \times 10^{-6}$  для мод колебаний с  $k \gtrsim 26$  соответствуют уровню поверхностных потерь для кремниевых резонаторов близких поперечных размеров [81].

### **3.2.4. Нелинейность вынужденных колебаний кремниевых дисковых резонаторов**

При увеличении амплитуды возбуждения на частотах, близких к резонансным частотам мод колебаний пластины, наблюдается нелинейный режим колебаний. Данная нелинейность имеет в основном геометрическую природу. Уравнения движения тонкого диска с учетом деформаций его средней плоскости были проанализированы и решены в [75]. Полная картина нелинейных колебаний включает множество типичных явлений, таких как гистерезис и скачкообразные изменения амплитуды, нелинейная связь между различными модами колебаний, генерация третьей гармоники и хаотическое поведение при больших амплитудах. В экспериментах были получены нелинейные резонансные кривые мод колебаний пластины, для которых не наблюдалось расщепления резонансных частот, при относительно небольших амплитудах колебаний. В данном случае допустимо пренебречь нелинейной связью между различными модами колебаний пластины и использовать уравнения, описы-

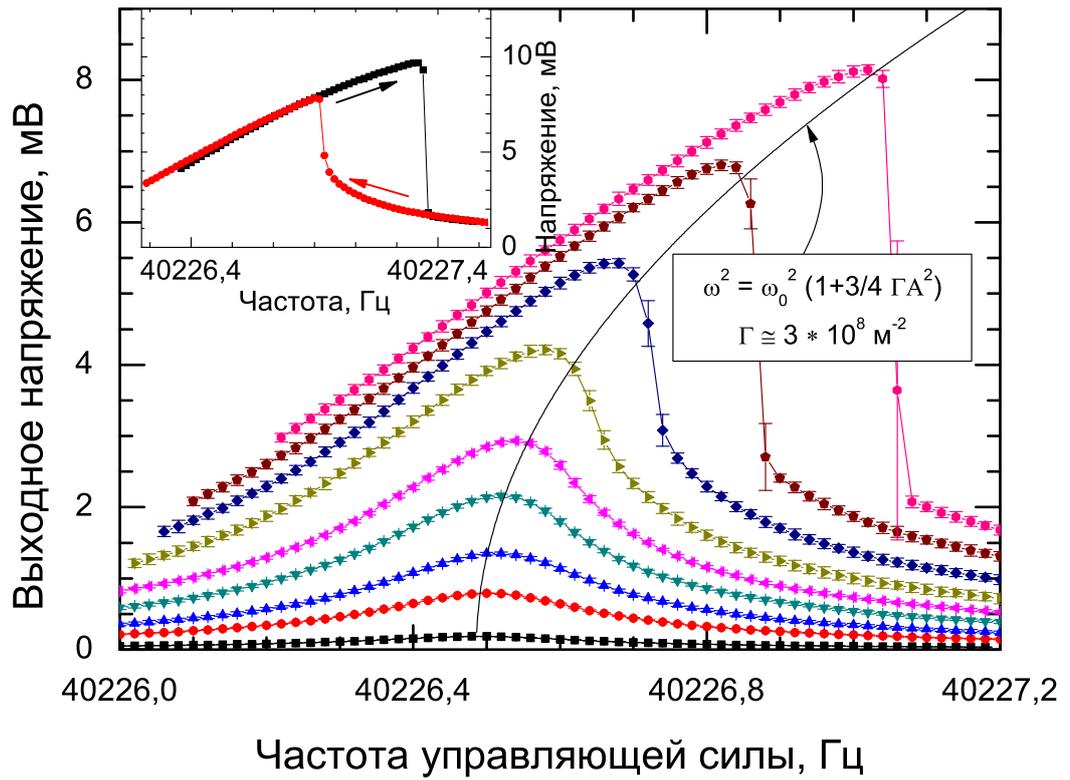


Рис. 3.22. Полученные в эксперименте резонансные кривые моды колебаний с  $k = 19$  и  $n = 0$  в нелинейном режиме. Различные кривые соответствуют различным амплитудам управляющего напряжения. Кривые были получены при положительном направлении сканирования по частоте. На врезке показаны резонансные кривые для той же моды колебаний и фиксированной амплитуде управляющего напряжения, полученные при положительном и отрицательном направлениях сканирования по частоте.

вающие только возбуждаемую моду колебаний [75]:

$$W(r, \theta, t) = R(r)q(t) \cos k\theta, \quad (3.68)$$

где  $q(t)$  определяется из уравнения

$$\ddot{q}(t) + 2\mu\dot{q}(t) + \Omega_0^2 q(t) [1 + \Gamma q^2(t)] = G_0 \cos \Omega t. \quad (3.69)$$

Здесь  $G_0 \cos \Omega t$  — приведенная внешняя сила,  $\mu$  — коэффициент затухания,  $\Omega_0$  — резонансная частота рассматриваемой моды колебаний,  $\Gamma$  — коэффициент, определяющий величину нелинейности, величина которого может быть получена из измеренных резонансных кривых. Полученные в эксперименте резонансные кривые моды колебаний с  $k = 19$  и  $n = 0$  приведены на рис. 3.22. Различные кривые соответствуют различным амплитудам напряжения на актюаторе, все приведенные кривые были получены при увеличении частоты этого напряжения. Резонансные кривые той же моды колебаний, полученные при увеличении и уменьшении частоты напряжения на актюаторе, показаны на врезке рис. 3.22. Амплитуда колебаний  $A$  оценивалась в соответствии с результатами калибровки емкостного сенсора. Для осциллятора Дуффинга, описываемого уравнением (3.69), значение коэффициента нелинейности  $\Gamma$  может быть получено как параметр аппроксимации скелетной кривой, определяемой положениями максимальных значений амплитуды колебаний резонансных кривых

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \Gamma A^2 \right), \quad (3.70)$$

а также из экспериментально измеренных частот, на которых скачкообразно уменьшается и увеличивается амплитуда колебаний [82]. Значения  $\Gamma$ , полученные с помощью обоих указанных методов, составляют около  $3 \times 10^8 \text{ м}^{-2}$ .

# Трехмодовая электромеханическая система управляемого демпфирования изгибных мод колебаний дисковых резонаторов

### 4.1. Теоретическое описание

Трехмодовые системы, образованные двумя оптическими модами и механической модой колебаний, в настоящее время активно исследуются в оптомеханике [83–85]. В частности, изучаются перспективы возможного проведения макроскопических квантовых экспериментов с такими системами [86, 87].

В этом разделе предложена трехмодовая система управляемого демпфирования изгибных мод колебаний дисковых резонаторов — на примере пластин из монокристаллического кремния, описанных в предыдущей главе. В основе предлагаемой системы лежит параметрическое взаимодействие между механическим осциллятором с резонансной частотой  $\Omega_m$  и системой из двух индуктивно связанных между собой электрических радиочастотных колебательных контуров, осуществляемое посредством емкостного преобразователя.

Система представлена на рис. 4.1. Механический осциллятор с приведенными параметрами — массой  $m$ , угловой резонансной частотой  $\Omega_m$  и коэффициентом затухания  $\Gamma_m = \Omega_m/Q_m$  — соединяется параметрической связью с радиочастотным электрическим колебательным контуром, образованным емкостью  $C_{1T}$ , индуктивностью  $L_1$  и сопротивлением  $R_1$  с резонансной частотой  $\nu_1 = 1/\sqrt{C_{1T}L_1}$ . В контур включен источник переменного напряжения  $U = 1/2(U_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.})$ .

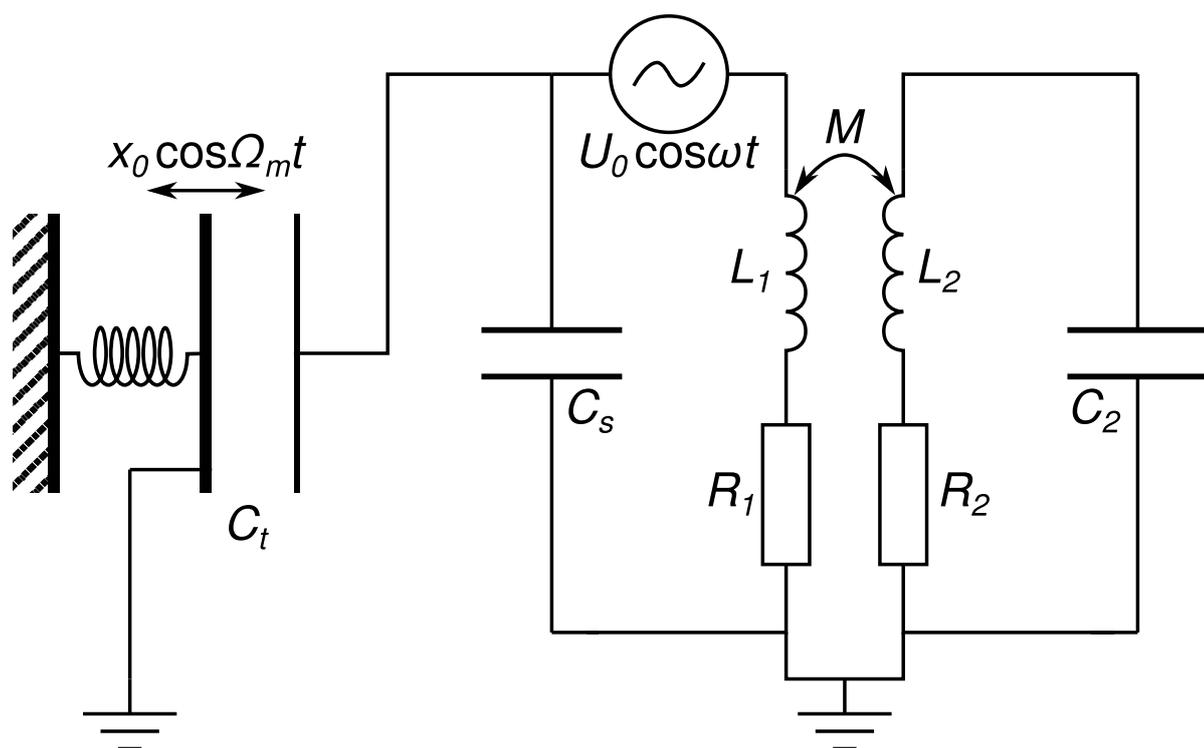


Рис. 4.1. Схема трехмодовой системы демпфирования, основанной на взаимодействии механического осциллятора с двумя связанными электрическими колебательными контурами.

Полная емкость электрического контура  $C_{1T}$  может быть представлена в виде суммы «рабочей» емкости плоскопараллельного емкостного преобразователя  $C_t$  и паразитной емкости  $C_s$ . Емкость  $C_t$  между жестко закрепленной пластиной преобразователя и подвижной пластиной, закрепленной на колеблющейся массе, при движении осциллятора модулируется его смещением  $x(t)$  и может быть записана в виде  $C_t = C_t^{(0)}/(1 - x(t)/d)$ , где  $C_t^{(0)} = \varepsilon_0 S/d$  и  $d$  — соответственно емкость преобразователя и расстояние между пластинами в отсутствие механического движения,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная и  $S$  — площадь пластины преобразователя.

Полагая амплитуду колебаний осциллятора малой по сравнению с расстоянием между электродами  $d$ , введем малый параметр  $\alpha = x_0/d \ll 1$ , так что  $x = x_0\xi(t) = \alpha d\xi(t)$ , где  $|\xi(t)| \leq 1$ . Раскладывая полную емкость электрического контура по степеням  $\alpha$ , получим с точностью до членов, пропорциональных  $\alpha^2$ , выражение

$$C_{1T} \simeq \frac{C_1}{1 - \beta\alpha\xi(t)},$$

где  $C_1 = C_t^{(0)} + C_s$  и  $\beta = C_t^{(0)}/(C_t^{(0)} + C_s)$ .

Электрически заряженные до величины заряда  $q_t$  пластины емкостного преобразователя  $C_t$  притягиваются с силой  $F = q_t^2/(2\varepsilon_0 S)$ .

Описанный выше электрический колебательный контур (будем в дальнейшем называть его первичным) индуктивно связан с другим, вторичным, контуром с угловой резонансной частотой  $\nu_2$ , емкостью  $C_2$ , индуктивностью  $L_2$ , сопротивлением  $R_2$ . Взаимная индуктивность между двумя контурами равна  $M$ .

Уравнения движения для такой системы можно записать в следующем

виде:

$$\ddot{q}_1 + \Gamma_1 \dot{q}_1 + \nu_1^2 q_1 + \kappa_1 \ddot{q}_2 - \frac{\nu_1^2 \beta}{d} q_1 x = \frac{1}{2} u_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (4.1)$$

$$\ddot{q}_2 + \Gamma_2 \dot{q}_2 + \nu_2^2 q_2 + \kappa_2 \ddot{q}_1 = 0, \quad (4.2)$$

$$\ddot{x} + \Gamma_m \dot{x} + \Omega_m^2 x = \frac{\beta^2 q_1^2}{2\varepsilon_0 S m}, \quad (4.3)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — величины электрического заряда конденсаторов  $C_{1T}$  и  $C_2$  соответственно,  $\kappa_{1,2} = M/L_{1,2}$  — константы связи,  $\Gamma_{1,2} = R_{1,2}/L_{1,2}$  и  $u_0 = U_0/L_1$ .

Учитывая малость параметра  $\alpha$ , решение будем искать в виде разложения по степеням  $\alpha$ , пренебрегая всеми членами, пропорциональными  $\alpha^n$  для  $n \geq 2$ :

$$q_1 = \frac{1}{2} [q_{10} + \alpha q_{11}(t)] e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (4.4)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} [q_{20} + \alpha q_{21}(t)] e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (4.5)$$

$$x = \frac{1}{2} \alpha d e^{i\Omega_m t} + \text{к.с.} \quad (4.6)$$

Подставляя (4.4-4.6) в (4.1-4.3), приравнивая члены с одинаковыми степенями  $\alpha$  и принимая во внимание, что амплитуды  $q_{11}$  и  $q_{21}$  можно рассматривать как медленно меняющиеся (т.е. пренебречь членами, пропорциональными  $\ddot{q}_{i1}$  и  $\Gamma_i \dot{q}_{i1}$ ,  $i = 1, 2$ ), получим следующую систему уравнений:

$$[-\omega^2 + i\omega\Gamma_1 + \nu_1^2] q_{10} - \kappa_1 \omega^2 q_{20} = u_0; \quad (4.7)$$

$$[-\omega^2 + i\omega\Gamma_2 + \nu_2^2] q_{20} - \kappa_2 \omega^2 q_{10} = 0; \quad (4.8)$$

$$2i\omega \dot{q}_{11} + [-\omega^2 + i\omega\Gamma_1 + \nu_1^2] q_{11} - \kappa_1 \omega^2 q_{21} = \frac{1}{2} \beta \nu_1^2 q_{10} [e^{i\Omega_m t} + e^{-i\Omega_m t}]; \quad (4.9)$$

$$2i\omega \dot{q}_{21} + [-\omega^2 + i\omega\Gamma_2 + \nu_2^2] q_{21} - \kappa_2 \omega^2 q_{11} = 0. \quad (4.10)$$

Первая пара уравнений описывает стационарное решение для электрической подсистемы при отсутствии механического смещения осциллятора. Ре-

шая эти уравнения, получим для  $q_{10}$  выражение

$$q_{10} = u_0 \omega^{-2} \chi(\omega) e^{i\Psi(\omega)}, \quad (4.11)$$

где

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{eff}^2(\omega) + \theta_{eff}^2(\omega)}},$$

$$\text{tg } \Psi(\omega) = -\theta_{eff}(\omega)/\Delta_{eff}(\omega),$$

$\Delta_{eff}$  и  $\theta_{eff}$  выражаются следующим образом:

$$\Delta_{eff}(\omega) = -\Delta_1(\omega) + \frac{\kappa_1 \kappa_2 \Delta_2(\omega)}{\Delta_2^2(\omega) + \theta_2^2(\omega)}, \quad (4.12)$$

$$\theta_{eff}(\omega) = \theta_1(\omega) + \frac{\kappa_1 \kappa_2 \theta_2(\omega)}{\Delta_2^2(\omega) + \theta_2^2(\omega)}. \quad (4.13)$$

Здесь были введены безразмерные функции расстройки  $\Delta_{1,2}(\omega) = 1 - \nu_{1,2}^2/\omega^2$  и безразмерные коэффициенты затухания  $\theta_{1,2}(\omega) = \Gamma_{1,2}/\omega$ .

Подставляя (4.11) в (4.9), получим следующее решение второй пары уравнений:

$$q_{11} = q_{11+} e^{i\Omega_m t} + q_{11-} e^{-i\Omega_m t}, \quad (4.14)$$

$$q_{11\pm} = \frac{1}{2} \frac{\beta \nu_1^2 u_0}{\omega^2 (\omega \pm \Omega_m)^2} \chi(\omega) \chi(\omega \pm \Omega_m) e^{i[\Psi(\omega) + \Psi(\omega \pm \Omega_m)]}. \quad (4.15)$$

Запишем выражение для квадрата  $q_1(t)$ , которому пропорциональна сила, действующая на механический осциллятор со стороны электрической системы:

$$q_1^2(t) = \frac{\alpha}{4} \beta \nu_1^2 u_0^2 \omega^{-4} \chi^2(\omega) \times$$

$$\times \left\{ \left[ \frac{\chi(\omega + \Omega_m)}{(\omega + \Omega_m)^2} \cos \Psi(\omega + \Omega_m) + \frac{\chi(\omega - \Omega_m)}{(\omega - \Omega_m)^2} \cos \Psi(\omega - \Omega_m) \right] e^{i\Omega_m t} + \right.$$

$$\left. + i \left[ \frac{\chi(\omega + \Omega_m)}{(\omega + \Omega_m)^2} \sin \Psi(\omega + \Omega_m) - \frac{\chi(\omega - \Omega_m)}{(\omega - \Omega_m)^2} \sin \Psi(\omega - \Omega_m) \right] e^{i\Omega_m t} \right\} + \text{к.с.}, \quad (4.16)$$

где были опущены члены, соответствующие колебаниям на частотах порядка  $\omega$  и члены, пропорциональные  $\alpha^2$ , как не оказывающие существенного влияния на движение осциллятора.

Первое слагаемое в выражении (4.16) представляет собой фазовую компоненту силы, действующей на осциллятор; воздействие этой компоненты на его движение аналогично внесению дополнительной жесткости, сдвигающей резонансную частоту осциллятора  $\Omega_m$  на величину  $\Delta\Omega_m$ :

$$\Delta\Omega_m = \frac{SU_0\beta^3\varepsilon_0}{8d^3m} \frac{\nu_1^6}{\Omega_m\omega^4} \chi^2(\omega) \times \left[ \frac{\chi(\omega + \Omega_m)}{(\omega + \Omega_m)^2} \cos \Psi(\omega + \Omega_m) + \frac{\chi(\omega - \Omega_m)}{(\omega - \Omega_m)^2} \cos \Psi(\omega - \Omega_m) \right] \quad (4.17)$$

Второе слагаемое описывает квадратурную компоненту силового воздействия емкостного преобразователя на механический осциллятор, которому соответствует внесение в осциллятор дополнительного затухания:

$$\Delta Q_m^{-1} = \frac{SU_0\beta^3\varepsilon_0}{4d^3m} \frac{\nu_1^6}{\Omega_m^2\omega^4} \chi^2(\omega) \times \left[ \frac{\chi(\omega - \Omega_m)}{(\omega - \Omega_m)^2} \sin \Psi(\omega - \Omega_m) - \frac{\chi(\omega + \Omega_m)}{(\omega + \Omega_m)^2} \sin \Psi(\omega + \Omega_m) \right]. \quad (4.18)$$

Рассмотрим случай идентичных радиочастотных контуров с сильной связью  $\kappa_{1,2} \gg \Gamma_{1,2}/\nu_{1,2}$ , причем константу связи между ними будем считать подобранной таким образом, чтобы разность нормальных частот была равна резонансной частоте механического осциллятора, т.е.  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $Q_{e1} = Q_{e2} = Q_e$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa = \Omega_m/\nu$ . В этом случае вносимое в механический осциллятор дополнительное затухание максимально при частоте накачки электрических контуров, равной нижней из нормальных частот,  $\omega \simeq \nu/\sqrt{1+\kappa} \simeq \nu - \Omega_m/2$ . Тогда

$$\Delta Q_m^{-1} \simeq \frac{SU_0^2\beta^3\varepsilon_0 Q_e^3}{32d^3m\Omega_m^2}, \quad (4.19)$$

если система работает в т.н. режиме «разрешенной боковой полосы» (resolved sideband), т.е. выполняется соотношение  $Q_e \gg \nu/\Omega_m$ . Если частота накач-

ки равна верхней из нормальных частот связанной системы контуров,  $\omega \simeq \nu/\sqrt{1-\kappa} \simeq \nu + \Omega_m/2$ , то в механический осциллятор вносится отрицательное дополнительное затухание, а величина соответствующего фактора механических потерь также описывается выражением (4.19).

При использовании стандартной одноконтурной схемы демпфирования в режиме разрешенной боковой полосы (когда механическая мода колебаний осциллятора связывается с одномодовым электрическим контуром с добротностью  $Q_e \gg \nu/\Omega_m$ ) максимальное значение вносимого затухания достигается на частоте накачки  $\omega = \nu - \Omega_m$ . Для его расчета можно использовать формулы (4.12-4.13) и (4.18), формально положив в них константы связи равными нулю,  $\kappa_{1,2} \equiv 0$  (см. также (1.36)). При выполнении соотношения  $Q_e^{-1}\nu \ll \Omega_m$  приближенное выражение для максимального вносимого в осциллятор фактора потерь имеет вид

$$\Delta Q_m^{-1} \simeq \frac{SU_0^2 \beta^3 \varepsilon_0 Q_e \nu^2}{16d^3 m \Omega_m^4}. \quad (4.20)$$

Сравнение формул (4.19) и (4.20) показывает, что трехмодовая схема демпфирования позволяет достичь величины фактора механических потерь, вносимого в осциллятор, в  $(\Omega_m Q_e)^2/(2\nu^2)$  раз превышающей величину вносимого фактора потерь, которой можно добиться в стандартной двухмодовой схеме демпфирования в режиме разрешенной боковой полосы.

Рассмотренная трехмодовая система может использоваться для преобразования амплитуды колебаний механического осциллятора в электрический сигнал. Как следует из уравнений (4.4-4.5) и (4.14-4.15), амплитуды стоксовой и антистоксовой мод пропорциональны амплитуде механических колебаний. Увеличение коэффициента передачи преобразователя по сравнению со стандартной двухмодовой схемой достигается за счет одновременного резонансного усиления как управляющего сигнала на частоте накачки, так и стоксовой или антистоксовой компоненты.

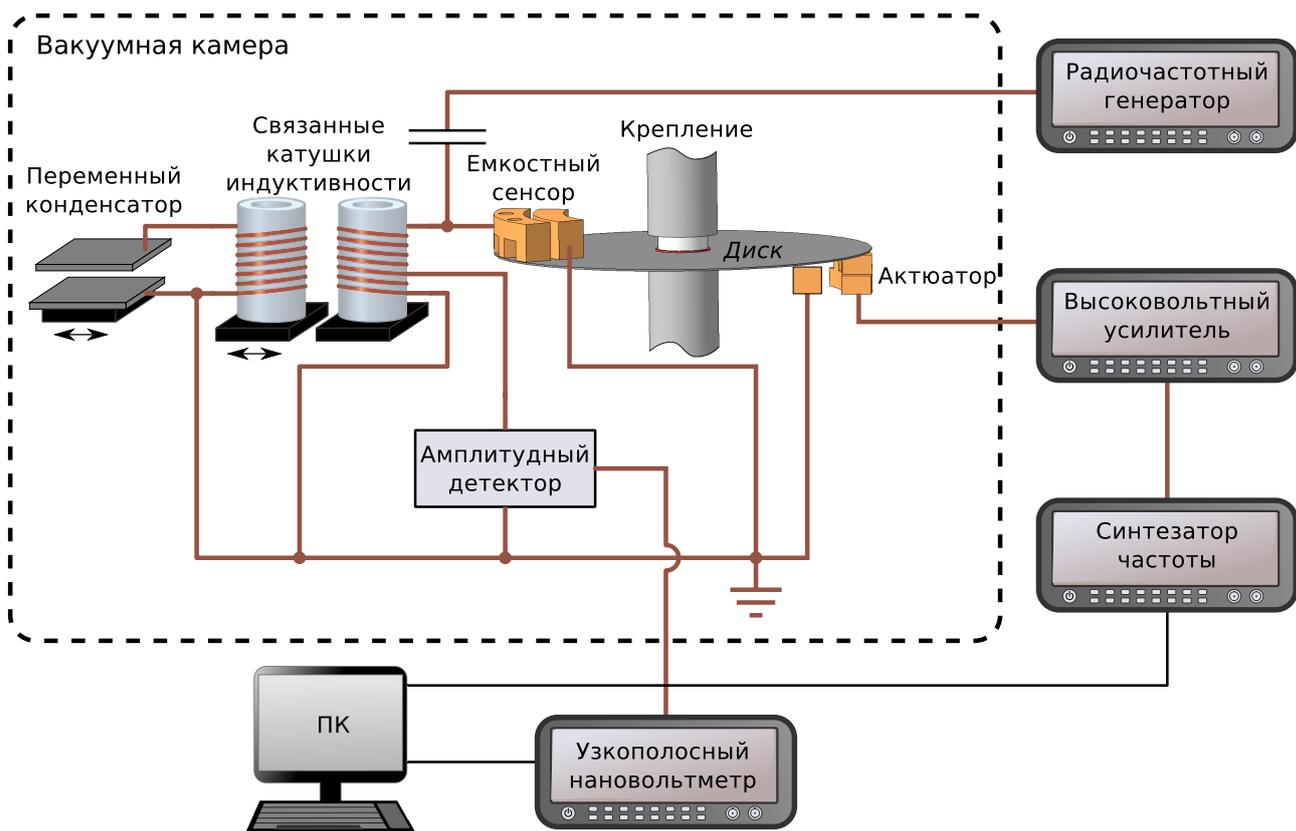


Рис. 4.2. Схема экспериментальной установки.

## 4.2. Экспериментальная установка

Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 4.2. В качестве демпфируемой моды использовалась мода колебаний  $(21,0)$  дискового резонатора из монокристаллического кремния, аналогичного описанному в разделе 3.2. Диаметр кремниевой пластины составлял  $2a = 76,2$  мм, толщина  $h = 0,34$  мм, удельное сопротивление  $0,02$  Ом $\times$ см. Резонансная частота моды  $(21,0)$  —  $46478$  Гц, собственная добротность  $1,0 \times 10^5$ .

Поскольку реальный механический осциллятор представлял собой одну из мод колебаний механического резонатора с распределенными параметрами, а в качестве емкостного преобразователя использовалась система более сложная, чем плоскопараллельный конденсатор, для сравнения экспериментальных результатов с теоретическими были введены и рассчитаны эффективные параметры сосредоточенного механического осциллятора,

эквивалентного рассматриваемой моде колебаний кремниевого диска. Эффективная масса моды колебаний (21,0) для такого резонатора составляет  $m_{eff} = 0,06 \times m_{tot} = 2,6 \times 10^{-4}$  кг в соответствии с формулой 3.65.

Для возбуждения колебаний использовалось переменное напряжение с частотой, равной половине резонансной частоты возбуждаемой моды колебаний, которое прикладывалось к электродам электростатического актюатора, размещенного под пластиной как показано на рис. 4.2.

Гребенчатый четырехштырьковый электрод емкостного преобразователя размещался над кремниевой пластиной напротив актюатора. Величина пространственного периода гребенчатого электрода была равен 10 мм, что близко к длине стоячей волны, возбуждаемой в пластине ( $\approx 11$  мм). Полная площадь рабочей поверхности электрода  $S_{tot} = 8,8 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>. Ближе к центру пластины был установлен вспомогательный электрод — таким образом, чтобы его рабочая поверхность лежала в той же плоскости, что и рабочая поверхность гребенчатого электрода. Такая конструкция емкостного преобразователя позволяет избежать необходимости прямого электрического контакта с кремниевой пластиной.

Конденсатор емкостного преобразователя, включенный параллельно с катушкой индуктивности  $L_1 = 96$  мкГн и паразитной емкостью  $C_s$  образовывали первичный радиочастотный электрический колебательный контур с резонансной частотой около 2,86 МГц. В качестве источника рабочего переменного напряжения для этого контура использовался ВЧ-генератор Г4-102, связанный с катушкой индуктивности посредством емкостной связи. Величина паразитной емкости  $C_s = 13,1$  пФ определялась измерением резонансной частоты данного контура в отсутствие кремниевой пластины.

Изменение величины электрической емкости между основным и вспомогательным электродами сенсора, вызываемое колебаниями кремниевой пластины, может быть приближенно сведено к изменению емкости эквивалентно-

го плоскопараллельного конденсатора с эффективной площадью электродов  $S_{eff} = \iint_{S_{tot}} w(r,\theta) r dr d\theta \simeq 0,32 \times S_{tot} \simeq 2,8 \times 10^{-5} \text{ м}^2$ , где  $w(r,\theta)$  — нормированная функция формы моды колебаний (см. раздел 3.2). Величина эффективного расстояния между пластинами конденсатора  $d_{eff} \simeq 28 \text{ мкм}$  была рассчитана при помощи конечноэлементного моделирования полной емкости системы.

Второй радиочастотный электрический контур состоял из катушки индуктивности  $L_2$ , идентичной катушке, использованной в первичном контуре, и перестраиваемого конденсатора. Катушка  $L_2$  устанавливалась на подвижную платформу, движение которой позволяло изменять величину взаимной индуктивности между двумя электрическими контурами посредством изменения расстояния между катушками  $L_1$  и  $L_2$ .

Добротность каждого контура составляла  $Q_e \approx 390$ .

Регистрация амплитуды колебаний кремниевой пластины осуществлялась посредством демодуляции радиочастотного сигнала первичного электрического контура на диодном детекторе, частично включенном в цепь первичного контура посредством автотрансформаторной связи.

Измерения производились в вакууме при остаточном давлении около  $10^{-4}$  торр.

### 4.3. Результаты и выводы

Величина дополнительного фактора потерь  $\Delta Q_m^{-1}$ , вносимого в механический осциллятор, рассчитывалась как разность фактора потерь  $Q_m^{-1}$  при заданной амплитуде накачки первичного электрического контура  $U$  и фактора потерь  $Q_{m0}^{-1}$ , измеренного при накачке первичного контура напряжением с исчезающе малой амплитудой. Величины добротности рассчитывались как параметры аппроксимации измеренных резонансных кривых лоренцевой кри-

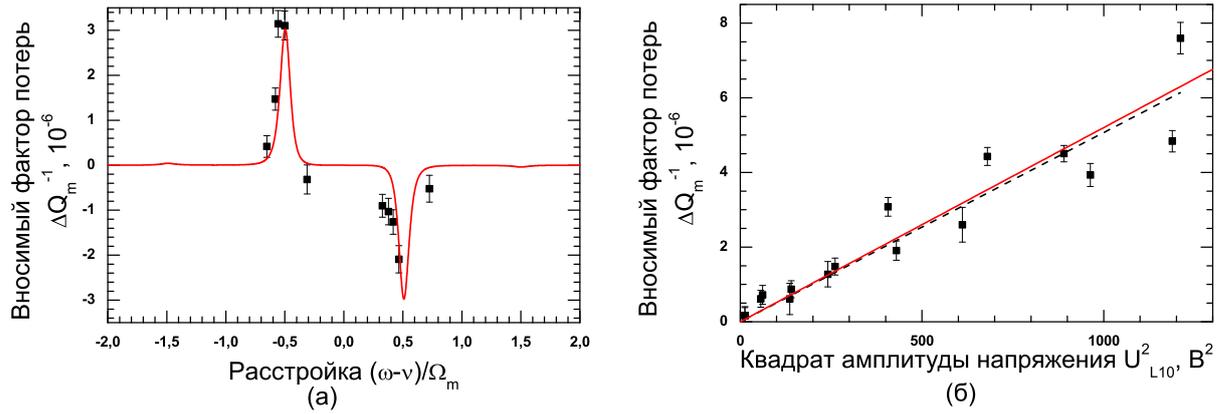


Рис. 4.3. (а): Расчетная зависимость вносимого фактора механических потерь  $\Delta Q_m^{-1}$  для изгибной моды кремниевого дискового резонатора от безразмерной расстройки  $(\omega - \nu)/\Omega_m$  (сплошная кривая). Экспериментальные значения вносимого фактора механических потерь (точки). (б): Зависимость  $\Delta Q_m^{-1}$  от квадрата амплитуды напряжения на индуктивности  $L_1$ , рассчитанная (сплошная кривая) и полученная в эксперименте (точки) при оптимальной настройке трехмодовой системы. Штриховой линией обозначена линейная аппроксимация экспериментальных данных.

вой. В экспериментах погрешность таких аппроксимаций не превышала 4%.

В соответствии с результатами теоретического анализа дополнительное затухание максимально, когда разность нормальных частот системы электрических контуров равна резонансной частоте механической моды колебаний пластины. В эксперименте сначала устанавливалась такая емкость конденсатора  $C_2$ , чтобы амплитуды напряжения на обоих контурах были равны (это соответствует равенству парциальных частот контуров  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , если равны индуктивности катушек  $L_1$  и  $L_2$ ). Затем изменением константы связи между контурами  $\kappa$  устанавливалось требуемое значение разности нормальных частот (эта величина поддерживалась равной резонансной частоте механического осциллятора). Расчетные значения вносимого в осциллятор дополнительного фактора механических потерь  $\Delta Q_m^{-1}$  в зависимости от безразмерной расстройки  $(\omega - \nu)/\Omega_m$  изображены на рис. 4.3(а). Отрицательные значения этой величины соответствуют режиму регенерации колебаний. Точ-

ками на рисунке изображены значения дополнительного фактора механических потерь, полученные в эксперименте.

В случае, когда частота радиочастотного сигнала накачки контуров равна нижней из нормальных частот системы электрических контуров, вносимое затухание положительно, что соответствует увеличению полного фактора потерь механической моды колебаний. Если частота накачки равна верхней нормальной частоте системы контуров, то вносимое затухание отрицательно, что соответствует уменьшению полного фактора потерь механической моды колебаний. На рис. 4.3(б) показана зависимость модуля вносимого фактора потерь для этих двух случаев от квадрата амплитуды ВЧ-напряжения на катушках индуктивности  $U_{L_{10}} = U_{L_{20}} \simeq U_0 Q_e / 2$ . Аналогичная зависимость, рассчитанная в соответствии с (4.19), также приведена на рис. 4.3(б) (сплошная линия). Можно отметить хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов.

# Заключение

Результаты и выводы работы:

1. Экспериментально реализована система управляемого демпфирования колебаний кварцевой нити, в которой использовались специально разработанные оптический сенсор и электростатический актюатор, осуществлявший силовое воздействие на электрически заряженный участок поверхности нити. Использование этой системы позволяет управлять добротностью струнных мод колебаний нити из плавленого кварца (макета подвеса пробной массы гравитационно-волнового детектора) в диапазоне от  $2 \times 10^4$  до  $1,2 \times 10^7$ . Также проанализирована и экспериментально реализована система демпфирования струнных мод колебаний кварцевой нити с использованием промежуточного осциллятора — изгибной моды колебаний кварцевой пластины с резонансной частотой, близкой к резонансной частоте демпфируемой моды колебаний кварцевой нити. Показано, что эта система имеет меньшую эффективность по сравнению с системой демпфирования, включающей оптический сенсор и электростатический актюатор.
2. Экспериментально реализованы различные методы нанесения на участок кварцевой нити поверхностного электрического заряда: посредством контактной электризации, электронной бомбардировки, а также путем перераспределения электрического заряда в электростатическом поле при нагреве нити. Максимальная линейная плотность нанесенного электрического заряда была получена последним из указанных методов, ее величина составила  $2,6 \times 10^{-12}$  Кл/см для нити диаметром  $\approx 240$  мкм.
3. Получено приближенное аналитическое решение уравнения движения

и проанализирована структура различных мод колебаний с большими значениями углового индекса в свободных акустических дисковых резонаторах, рассчитаны их собственные частоты и пространственные распределения амплитуд вектора смещения. Полученные результаты подтверждены экспериментально для квазирэлеевских, квазилэмбовских и квазиклиновых мод колебаний, а также мод шепчущей галереи в дисковом резонаторе из дюралюминия.

4. Экспериментально получен спектр изгибных мод колебаний для значений углового индекса  $2 \leq k \leq 30$  в дисковом резонаторе из монокристаллического кремния. Показано, что для использовавшегося в экспериментах кремниевого дискового резонатора в диапазоне значений  $k \lesssim 6$  основной вклад в фактор механических потерь вносят потери в креплении резонатора, при  $6 \lesssim k \lesssim 26$  преобладающими становятся термоупругие потери, а при  $k \gtrsim 26$  — поверхностные потери. Показано, что при увеличении амплитуды колебаний в этих модах преобладает геометрическая нелинейность, измеренная величина коэффициента нелинейности для моды колебаний с  $k = 19$  составила  $3 \times 10^8 \text{ м}^{-2}$ .
5. Предложена, теоретически проанализирована и экспериментально реализована схема демпфирования изгибных мод колебаний дисковых резонаторов из монокристаллического кремния с использованием параметрического емкостного преобразователя с двумя радиочастотными электрическими колебательными контурами. Применение этой схемы позволило значительно усилить взаимодействие между механическими и электрическими модами колебаний. Полученные экспериментальные данные хорошо согласуются с результатами расчетов.

## Литература

- [1] *T. Sulchek, G.G. Yaralioglu, C.F. Quate, S.C. Minne.* Characterization and optimization of scan speed for tapping-mode atomic force microscopy // *Review of Scientific Instruments.* — 2002. — Vol. 73, no. 8. — P. 2928.
- [2] *C. Jeong, S. Seok, B. Lee et al.* A study on resonant frequency and Q factor tunings for MEMS vibratory gyroscopes // *Journal of Micromechanics and Microengineering.* — 2004. — Vol. 14, no. 11. — Pp. 1530–1536.
- [3] *G. Ctistis, E.H. Frater, S.R. Huisman et al.* Controlling the quality factor of a tuning-fork resonance between 9 and 300 K for scanning-probe microscopy // *Journal of Physics D: Applied Physics.* — 2011. — Vol. 44, no. 37. — P. 375502.
- [4] *I.S. Grudinin, H. Lee, O. Painter, K.J. Vahala.* Phonon laser action in a tunable two-level system // *Physical Review Letters.* — 2010. — Vol. 104, no. 8. — P. 083901.
- [5] *N.A. Robertson, G. Cagnoli, D.R.M. Crooks et al.* Quadruple suspension design for advanced LIGO // *Classical and Quantum Gravity.* — 2002. — Vol. 19, no. 15. — Pp. 4043–4058.
- [6] *M. Pinard, P.F. Cohadon, T. Briant, A. Heidmann.* Full mechanical characterization of a cold damped mirror // *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics.* — 2001. — Vol. 63, no. 1. — Pp. 013808–013801.
- [7] *J.D. Teufel, T. Donner, D. Li et al.* Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state // *Nature.* — 2011. — Vol. 475, no. 7356. — Pp. 359–363.

- [8] *J. Chan, T.P.M. Alegre, A.H. Safavi-Naeini et al.* Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state // *Nature*. — 2011. — Vol. 478, no. 7367. — Pp. 89–92.
- [9] *J. Suh, M.D. Lahaye, P.M. Echternach et al.* Parametric amplification and back-action noise squeezing by a qubit-coupled nanoresonator // *Nano Letters*. — 2010. — Vol. 10, no. 10. — Pp. 3990–3994.
- [10] *H. Okamoto, K. Onomitsu, T. Sogawa, H. Yamaguchi.* Optical control of nanomechanical vibration in GaAs resonators // *NTT Technical Review*. — 2011. — Vol. 9, no. 2.
- [11] *G.M. Harry (for the LIGO Scientific collaboration).* Advanced LIGO: The next generation of gravitational wave detectors // *Classical and Quantum Gravity*. — 2010. — Vol. 27, no. 8. — P. 084006.
- [12] *G.D. Hammond, A.V. Cumming, J. Hough et al.* Reducing the suspension thermal noise of advanced gravitational wave detectors // *Classical and Quantum Gravity*. — 2012. — Vol. 29, no. 12. — P. 124009.
- [13] *A.V. Dmitriev, S.D. Mescheriakov, K.V. Tokmakov, V.P. Mitrofanov.* Controllable damping of high-Q violin modes in fused silica suspension fibers // *Classical and Quantum Gravity*. — 2010. — Vol. 27, no. 2. — P. 025009.
- [14] *A.V. Dmitriev, D.S. Gritsenko, V.P. Mitrofanov.* Surface vibrational modes in disk-shaped resonators // *Ultrasonics*. — 2014. — Vol. 54, no. 3. — Pp. 905–913.
- [15] *A.V. Dmitriev, D.S. Gritsenko, V.P. Mitrofanov.* Non-axisymmetric flexural vibrations of free-edge circular silicon wafers // *Physics Letters A*. — 2014. — Vol. 378, no. 9. — Pp. 673–676.

- [16] *A. V. Dmitriev, V.P. Mitrofanov.* Enhanced interaction between a mechanical oscillator and two coupled resonant electrical circuits // *Review of Scientific Instruments.* — 2014. — Vol. 85, no. 8. — P. 085005.
- [17] *А.В. Дмитриев.* Холодное демпфирование струнных мод кварцевых подвесов пробных масс гравитационно-волновых детекторов // 13-я российская гравитационная конференция — международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике: тезисы докладов. — Москва: РУДН, 2008. — С. 146–147.
- [18] *А.В. Дмитриев.* Управляемое демпфирование высокочастотных струнных кварцевых осцилляторов // Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». — Москва: МАКС Пресс, 2009.
- [19] *A. V. Dmitriev, S.D. Mescheryakov, K.V. Tokmakov, V.P. Mitrofanov.* Variant of violin mode damping system for fused silica fiber suspension. — Документ LIGO G0900183-v2. — 2009. — <http://dcc.ligo.org>.
- [20] *A. V. Dmitriev.* Damping of high-Q violin modes in fused silica suspension fibers. — Документ LIGO G1000875-v1. — 2010. — <http://dcc.ligo.org>.
- [21] *А.В. Дмитриев, Д.С. Гриценко, В.П. Митрофанов.* Поверхностные моды упругих колебаний в тонких дисках // Физико-математическое моделирование систем: материалы IX Междунар. семинара. Часть 1. — Воронеж: ФГБОУ ВПО ВГТУ, 2012. — С. 37–43.
- [22] *A. V. Dmitriev, V.P. Mitrofanov.* Measurements of mechanical losses in silicon wafers. — Документ LIGO G1300987-v1. — 2013. — <http://dcc.ligo.org>.
- [23] *H B Callen, T A Welton* // *Physical Review.* — 1951. — Vol. 83, no. 1. — Pp. 34–40.

- [24] *J M W Milatz, J J Van Zolingen, B B Van Iperen // Physica.* — 1953. — Vol. 19, no. 1-12. — Pp. 195–202.
- [25] *YT Chen, BC Tan.* Electrical damping of a torsion balance // *Physics Letters A.* — 1991. — Vol. 152, no. 8. — Pp. 377–380.
- [26] *В.Б. Брагинский, А.Б. Манукин.* Измерение малых сил в физических экспериментах. — Москва: Наука, 1974.
- [27] *T. J. Kippenberg, K. J. Vahala.* Cavity opto-mechanics // *Optics Express.* — 2007. — Vol. 15, no. 25. — Pp. 17172–17205.
- [28] *A. Schliesser, R. Rivière, G. Anetsberger et al.* Resolved-sideband cooling of a micromechanical oscillator // *Nature Physics.* — 2008. — Vol. 4, no. 5. — Pp. 415–419.
- [29] *T. Rocheleau, T. Ndukum, C. Macklin et al.* Preparation and detection of a mechanical resonator near the ground state of motion // *Nature.* — 2010. — Vol. 463, no. 7277. — Pp. 72–75.
- [30] *AV Cumming, AS Bell, L Barsotti et al.* Design and development of the advanced LIGO monolithic fused silica suspension // *Classical and Quantum Gravity.* — 2012. — Vol. 29, no. 3. — P. 035003.
- [31] *A Heptonstall, MA Barton, A Bell et al.* CO<sub>2</sub> laser production of fused silica fibers for use in interferometric gravitational wave detector mirror suspensions // *Review of Scientific Instruments.* — 2011. — Vol. 82, no. 1. — P. 011301.
- [32] *NA Lockerbie, L Carbone, B Shapiro et al.* First results from the «Violin-Mode» tests on an advanced LIGO suspension at MIT // *Classical and Quantum Gravity.* — 2011. — Vol. 28, no. 24. — P. 245001.

- [33] *S. Grasso, C. Altucci, F. Barone et al.* Electrostatic systems for fine control of mirror orientation in interferometric GW antennas // *Physics Letters A*. — 1998. — Vol. 244. — Pp. 360–370.
- [34] *И. А. Елкин, В. П. Митрофанов.* Затухание в электромеханической колебательной системе, обусловленное процессами в электрической подсистеме // *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия*. — 1999. — Т. 3. — С. 31–34.
- [35] *Ф. Морз.* Колебания и звук. — Москва: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1949.
- [36] *R J Hanson, H K Macomber, A C Morrison, M A Boucher.* Primarily non-linear effects observed in a driven asymmetrical vibrating wire // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 2005. — Vol. 117, no. 1. — Pp. 400–412.
- [37] *P E Khramchenkov, L G Prokhorov, V P Mitrofanov* // *Physics Letters A*. — 2007. — Vol. 366, no. 1-2. — Pp. 145–149.
- [38] *A Chowdry, CR Westgate.* The role of bulk traps in metal-insulator contact charging // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1974. — Vol. 7, no. 5. — P. 713.
- [39] *J Lowell.* The electrification of polymers by metals // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1976. — Vol. 9, no. 11. — P. 1571.
- [40] *J Lowell.* Contact electrification of silica and soda glass // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1990. — Vol. 23, no. 8. — P. 1082.
- [41] *BA Kwetkus, Klaus Sattler.* Analysis of repeated-contact electrification curves // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1992. — Vol. 25, no. 10. — P. 1400.

- [42] *Charles R Kurkjian, Prabhat K Gupta, Richard K Brow.* The strength of silicate glasses: what do we know, what do we need to know? // *International Journal of Applied Glass Science.* — 2010. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 27–37.
- [43] *Alastair Heptonstall, Mark Barton, Caroline Cantley et al.* Investigation of mechanical dissipation in CO2 laser-drawn fused silica fibres and welds // *Classical and Quantum Gravity.* — 2010. — Vol. 27, no. 3. — P. 035013.
- [44] *Gerald F Dionne.* Origin of secondary-electron-emission yield-curve parameters // *Journal of Applied Physics.* — 1975. — Vol. 46, no. 8. — Pp. 3347–3351.
- [45] *A Melchinger, S Hofmann.* Dynamic double layer model: Description of time dependent charging phenomena in insulators under electron beam irradiation // *Journal of Applied Physics.* — 1995. — Vol. 78, no. 10. — Pp. 6224–6232.
- [46] *Jacques Cazaux.* Some considerations on the secondary electron emission,  $\delta$ , from e- irradiated insulators // *Journal of Applied Physics.* — 1999. — Vol. 85, no. 2. — Pp. 1137–1147.
- [47] *EI Rau, S Fakhfakh, MV Andrianov et al.* Second crossover energy of insulating materials using stationary electron beam under normal incidence // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms.* — 2008. — Vol. 266, no. 5. — Pp. 719–729.
- [48] *M Kotera, H Suga.* A simulation of keV electron scatterings in a charged-up specimen // *Journal of Applied Physics.* — 1988. — Vol. 63, no. 2. — Pp. 261–268.
- [49] *JP Ganachaud, C Attard, R Renoud.* Study of the space charge induced by an electron beam in an insulating target // *Physica Status Solidi (b).* — 1997. — Vol. 199, no. 1. — Pp. 175–184.

- [50] *R Renoud, F Mady, JP Ganachaud.* Monte Carlo simulation of the charge distribution induced by a high-energy electron beam in an insulating target // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2002. — Vol. 14, no. 2. — P. 231.
- [51] *А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.* Физические величины: справочник. — Москва: Энергоатомиздат, 1991.
- [52] *K. Yamanaoka, N. Nakaso, D. Sim, T. Fukiura.* Principle and application of ball surface acoustic wave (SAW) sensor // *Acoustical Science and Technology.* — 2009. — Vol. 30, no. 1. — Pp. 2–6.
- [53] *W. Hu, M. Qian, J.H. Cantrell.* Thermoelastic generation of cylindrical Rayleigh waves and whispering gallery modes by pulsed-laser excitation // *Applied Physics Letters.* — 2004. — Vol. 85, no. 18. — Pp. 4031–4033.
- [54] *T. Tachizaki, O. Matsuda, A.A. Maznev, O.B. Wright.* Acoustic whispering-gallery modes generated and dynamically imaged with ultrashort optical pulses // *Physical Review B.* — 2010. — Vol. 81, no. 16. — P. 165434.
- [55] *D. Clorennec, D. Royer.* Analysis of surface acoustic wave propagation on a cylinder using laser ultrasonics // *Applied Physics Letters.* — 2003. — Vol. 82, no. 25. — Pp. 4608–4610.
- [56] *A.W. Leissa, J. So.* Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analyses // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1995. — Vol. 98. — P. 2122.
- [57] *F.J. Nieves, F. Gascon, A. Bayón.* An analytical, numerical, and experimental study of the axisymmetric vibrations of a short cylinder // *Journal of Sound and Vibration.* — 2008. — Vol. 313, no. 3. — Pp. 617–630.

- [58] *A. Bayón, F. Gascón, R. Medina et al.* On the flexural vibration of cylinders under axial loads: Numerical and experimental study // *Journal of Sound and Vibration*. — 2012. — Vol. 331, no. 10. — Pp. 2315–2333.
- [59] *OG McGee, JW Kim.* Three-dimensional vibrations of cylindrical elastic solids with V-notches and sharp radial cracks // *Journal of Sound and Vibration*. — 2010. — Vol. 329, no. 4. — Pp. 457–484.
- [60] *S. Kaproulias, MM Sigalas.* Whispering gallery modes for elastic waves in disk resonators // *AIP Advances*. — 2011. — Vol. 1, no. 4. — P. 041902.
- [61] *S.N. Rasband.* Resonant vibrations of free cylinders and disks // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 1975. — Vol. 57, no. 4. — Pp. 899–905.
- [62] *J.R. Hutchinson.* Vibrations of solid cylinders // *Journal of Applied Mechanics*. — 1980. — Vol. 47, no. 4. — Pp. 901–907.
- [63] *S.-I. Tamura.* Vibrational cavity modes in a free cylindrical disk // *Physical Review B*. — 2009. — Vol. 79, no. 5. — P. 054302.
- [64] *DD Ebenezer, K. Ravichandran, C. Padmanabhan.* Forced vibrations of solid elastic cylinders // *Journal of sound and vibration*. — 2005. — Vol. 282, no. 3. — Pp. 991–1007.
- [65] *MR Mofakhami, H.H. Toudeshky, S.H. Hashemi.* Finite cylinder vibrations with different end boundary conditions // *Journal of sound and vibration*. — 2006. — Vol. 297, no. 1. — Pp. 293–314.
- [66] *I. A. Viktorov.* Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications. — New York, NY: Plenum Press, 1967.
- [67] *A.A. Maradudin, R.F. Wallis, D.L. Mills, R.L. Ballard.* Vibrational edge

modes in finite crystals // *Physical Review B*. — 1972. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 1106–1111.

- [68] *A. De Waard, G. Frossati, J. P. Zendri et al.* New technique to measure the mechanical quality factor of metals using spherical samples // *Physica B: Condensed Matter*. — 2000. — Vol. 280, no. 1-4. — Pp. 535–536.
- [69] *J.A. Judge, D.M. Photiadis, J.F. Vignola et al.* Attachment loss of micromechanical and nanomechanical resonators in the limits of thick and thin support structures // *Journal of Applied Physics*. — 2007. — Vol. 101, no. 1. — P. 013521.
- [70] *R. Nawrodt, C. Schwarz, S. Kroker et al.* Investigation of mechanical losses of thin silicon flexures at low temperatures // *Classical and Quantum Gravity*. — 2013. — Vol. 30, no. 11. — P. 115008.
- [71] *H.W.Ch. Postma, I. Kozinsky, A. Husain, M.L. Roukes.* Dynamic range of nanotube-and nanowire-based electromechanical systems // *Applied Physics Letters*. — 2005. — Vol. 86, no. 22. — P. 223105.
- [72] *H.J.R. Westra, M. Poot, H.S.J. Van Der Zant, W.J. Venstra.* Nonlinear modal interactions in clamped-clamped mechanical resonators // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 105, no. 11. — P. 117205.
- [73] *D. Antonio, D.H. Zanette, D. López.* Frequency stabilization in nonlinear micromechanical oscillators // *Nature Communications*. — 2012. — Vol. 3. — P. 806.
- [74] *S. Rips, M. Kiffner, I. Wilson-Rae, M.J. Hartmann.* Steady-state negative Wigner functions of nonlinear nanomechanical oscillators // *New Journal of Physics*. — 2012. — Vol. 14. — P. 023042.

- [75] *C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne.* Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 1: Theory // *Journal of Sound and Vibration.* — 2002. — Vol. 258, no. 4. — Pp. 649–676.
- [76] *D.R. França, A. Blouin.* All-optical measurement of in-plane and out-of-plane Young’s modulus and Poisson’s ratio in silicon wafers by means of vibration modes // *Measurement Science and Technology.* — 2004. — Vol. 15, no. 5. — Pp. 859–868.
- [77] *C. Zener.* Internal friction in solids. I. Theory of internal friction in reeds // *Physical Review.* — 1937. — Vol. 52, no. 3. — Pp. 230–235.
- [78] *R. Lifshitz, M.L. Roukes.* Thermoelastic damping in micro-and nanomechanical systems // *Physical Review B.* — 2000. — Vol. 61, no. 8. — Pp. 5600–5609.
- [79] *Y. Sun, M. Saka.* Thermoelastic damping in micro-scale circular plate resonators // *Journal of Sound and Vibration.* — 2010. — Vol. 329, no. 3. — Pp. 328–337.
- [80] *P. Li, Y. Fang, R. Hu.* Thermoelastic damping in rectangular and circular microplate resonators // *Journal of Sound and Vibration.* — 2012. — Vol. 331, no. 3. — Pp. 721–733.
- [81] *X. Liu, J.F. Vignola, H.J. Simpson et al.* // *Journal of Applied Physics.* — 2005. — Vol. 97, no. 2. — P. 023524.
- [82] *M.J. Brennan, I. Kovacic, A. Carrella, T.P. Waters.* On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator // *Journal of Sound and Vibration.* — 2008. — Vol. 318, no. 4-5. — Pp. 1250–1261.
- [83] *J. M. Dobrindt, T. J. Kippenberg.* Theoretical Analysis of Mechanical Dis-

placement Measurement Using a Multiple Cavity Mode Transducer // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 104. — P. 033901.

- [84] *J. Fan, L. Zhu*. Enhanced optomechanical interaction in coupled microresonators // *Optics Express*. — 2012. — Vol. 20, no. 18. — Pp. 20790–20799.
- [85] *J. Liu, F. A. Torres, Y. Ma et al.* Near-self-imaging cavity for three-mode optoacoustic parametric amplifiers using silicon microresonators // *Applied Optics*. — 2014. — Vol. 53, no. 5. — Pp. 841–849.
- [86] *M. Ludwig, A. H. Safavi-Naeini, O. Painter, F. Marquardt*. Enhanced quantum nonlinearities in a two-mode optomechanical system // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, no. 6. — P. 063601.
- [87] *N. Aggarwal, A. B. Bhattacharjee*. Quantum dynamics of two-optical modes and a single mechanical mode optomechanical system: Selective energy exchange // *Optics Communications*. — 2014. — Vol. 310. — Pp. 204–211.