

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А.Ф. ИОФФЕ

Российской академии наук

---

*на правах рукописи*

**Дурнев Михаил Васильевич**

**СПИНОВЫЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ВАЛЕНТНОЙ ЗОНЫ  
В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КВАНТОВЫХ ЯМАХ  
И КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ**

**Специальность:**

01.04.10 - физика полупроводников

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

М. М. Глазов

Санкт-Петербург

2014

# Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| Введение  | 4         |
| <b>1 Спин-орбитальное расщепление дырочных подзон в квантовых ямах</b>                    | <b>10</b> |
| 1.1 Введение  | 10        |
| 1.2 Симметричный анализ   | 13        |
| 1.2.1 Объемный кристалл   | 14        |
| 1.2.2 Квантовые ямы ориентаций [001], [110] и [111]                                       | 15        |
| 1.3 14-зонная модель для объемного кристалла  | 18        |
| 1.4 Энергетический спектр и спиновые расщепления в квантовых ямах                         | 24        |
| 1.4.1 14-зонная модель и граничные условия  | 24        |
| 1.4.2 Энергетический спектр и волновые функции в $\Gamma$ -точке                          | 28        |
| 1.4.3 Дисперсии и спиновые расщепления  | 34        |
| 1.4.4 Сравнение аналитического и численного расчета спиновых расщеплений валентных подзон | 38        |
| 1.5 Краткие итоги   | 42        |
| <b>2 Гигантское зеемановское расщепление легкой дырки в квантовых ямах</b>                | <b>43</b> |
| 2.1 Введение  | 43        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2      | $g$ -фактор в резонансном приближении . . . . .                     | 45        |
| 2.3      | Выход за рамки резонансного приближения. Многоуровневая модель      | 50        |
| 2.4      | Роль интерфейсного смешивания и нелинейный эффект Зеемана . .       | 54        |
| 2.5      | Роль экситонных эффектов . . . . .                                  | 57        |
| 2.6      | Результаты и обсуждение . . . . .                                   | 60        |
| 2.6.1    | $g$ -фактор тяжелой дырки . . . . .                                 | 60        |
| 2.6.2    | Нелинейный эффект Зеемана и $g$ -фактор легкой дырки . . .          | 61        |
| 2.6.3    | Сопоставление теории с экспериментом . . . . .                      | 63        |
| 2.7      | Краткие итоги . . . . .   | 66        |
| <b>3</b> | <b>Тонкая структура экситонных состояний в тригональных кванто-</b> |           |
|          | <b>вых точках</b>   | <b>67</b> |
| 3.1      | Введение . . . . .  | 67        |
| 3.2      | Экспериментальные данные . . . . .                                  | 70        |
| 3.3      | Симметричный анализ . . . . .                                       | 72        |
| 3.3.1    | Тонкая структура энергетического спектра трионов . . . . .          | 75        |
| 3.3.2    | Тонкая структура нейтрального экситона . . . . .                    | 77        |
| 3.4      | Микроскопическая модель . . . . .                                   | 82        |
| 3.4.1    | Квантование движения дырки в квантовой точке формы тре-             |           |
|          | угольной пирамиды . . . . .   | 83        |
| 3.4.2    | Диагональная компонента тензора $g$ -фактора . . . . .              | 86        |
| 3.4.3    | Магнитоиндуцированное смешивание тяжелых дырок . . . . .            | 89        |
| 3.5      | Выход за рамки сферического приближения . . . . .                   | 91        |
| 3.6      | Обсуждение полученных результатов и сравнение с эксперименталь-     |           |
|          | ными данными . . . . .  | 93        |
| 3.7      | Краткие итоги . . . . .   | 95        |

|                   |     |
|-------------------|-----|
| Заключение        | 96  |
| Список литературы | 101 |

# Введение

Прогресс технологий за последние десятилетия сделал возможным синтез нового класса полупроводниковых систем – низкоразмерных или наноструктур – в которых движение носителей заряда ограничено в одном или нескольких пространственных направлениях. К низкоразмерным структурам относятся квантовые ямы, квантовые проволоки и точки, сверхрешетки на их основе, а также наносистемы на основе монослоев углерода (графен, нанотрубки), сульфидов и селенидов переходных металлов ( $\text{MoS}_2$ ,  $\text{WSe}_2$ ) [1]. Размерное квантование движения носителей заряда в таких объектах приводит к существенной модификации их энергетического спектра, проявляющейся в качественно новых физических эффектах. Пониженная симметрия низкоразмерных структур наиболее ярко выражается в спиновых явлениях, которые важны как с фундаментальной точки зрения, так и для возможных применений в приборах спинтроники, где спин электрона используется в так называемых кубитах, необходимых для реализации квантовых алгоритмов обработки информации [2]. В качестве возможных кандидатов на роль кубитов исследуются спиновые подуровни электронных состояний в низкоразмерных системах, управление которыми удобно осуществлять с помощью внешних полей.

Спин-зависимые эффекты в полупроводниковых наноструктурах связаны с тонкой структурой электронного спектра – это, прежде всего, расщепление спиновых подуровней во внешнем магнитном поле (эффект Зеемана) и спин-орбитальное расщепление электронных подзон в нулевом магнитном поле. Спиновые расщепления детально исследованы для электронов зоны проводимости [3, 4],

однако к настоящему времени они недостаточно изучены для дырок в валентной зоне. Это связано в первую очередь со сложной структурой валентной зоны в полупроводниках с решеткой цинковой обманки, в которых состояния дырки описываются гамильтонианом размерности  $4 \times 4$  в отличие от матрицы  $2 \times 2$  для электрона в зоне проводимости. Дополнительное влияние на энергетический спектр дырок оказывает пониженная симметрия интерфейсов низкоразмерных структур. В частности, сложная структура валентной зоны приводит к смешиванию состояний тяжелой и легкой дырок на интерфейсах, которое проявляется в качественном изменении их энергетического спектра и волновых функций [5, 6].

Изучение спиновых расщеплений валентной зоны позволяет получать информацию о микроскопических параметрах, описывающих энергетический спектр дырки, геометрической форме и размерах структуры, силе спин-орбитального взаимодействия, а также дает новый инструмент для изучения симметрии нанобъектов.

Сказанное выше обуславливает актуальность темы диссертации. Цель настоящего исследования заключается в теоретическом изучении спиновых расщеплений дырочных состояний в низкоразмерных полупроводниковых системах.

Научная новизна работы состоит в решении конкретных задач:

1. Построить теорию спиновых расщеплений валентных подзон в нулевом магнитном поле в симметричных квантовых ямах в рамках многозонной модели с учетом эффектов интерфейсного смешивания дырок.
2. Построить теорию эффекта Зеемана для легкой дырки в квантовых ямах с учетом интерфейсного смешивания дырок, а также проанализировать зеемановское расщепление экситона с легкой дыркой.
3. Построить теорию эффекта Зеемана для тяжелой дырки в тригональных квантовых точках, выращенных вдоль кристаллографического направления [111].

Практическая значимость работы состоит в том, что в ней впервые рассчитаны дисперсии и спиновые расщепления валентных подзон в квантовых ямах в рамках

14-зонной *kp*-модели с учетом интерфейсного смешивания дырок; построена теория эффекта Зеемана для легкой дырки с учетом кулоновского взаимодействия электрон-дырочной пары и интерфейсного смешивания тяжелых и легких дырок; построена теория эффекта магнитоиндуцированного смешивания тяжелых дырок продольным магнитным полем в квантовых точках, выращенных вдоль направления [111]. В работе разработаны методы расчета дырочных спектров в 14-зонной *kp*-модели, в частности, предложены граничные условия, учитывающие микроскопическую симметрию интерфейсов квантовой ямы. Особое внимание уделено получению аналитических результатов. Сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными позволило уточнить параметры используемых моделей зонной структуры и определить феноменологические константы, описывающие интерфейсные эффекты в рамках метода плавных огибающих.

**Основные положения выносимые на защиту:**

1. Спин-орбитальное расщепление валентных подзон в квантовых ямах типа GaAs/AlGaAs с барьерами конечной высоты может быть вычислено в 14-зонной *kp*-модели, учитывающей далекие зоны проводимости симметрии  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_7$ . Подход в рамках эффективного гамильтониана размерности  $4 \times 4$  не позволяет решить эту задачу.
2. Смешивание состояний тяжелой и легкой дырки на гетероинтерфейсах вносит основной вклад в линейное по волновому вектору расщепление валентных подзон в квантовых ямах с решеткой цинковой обманки, выращенных вдоль оси [001]. Это расщепление превосходит спин-орбитальное расщепление зоны проводимости.
3. Энергетическая близость основной подзоны легких дырок и первой возбужденной подзоны тяжелых дырок в квантовых ямах приводит к гигантской перенормировке *g*-фактора легкой дырки. Для количественного описания проявления эффекта Зеемана в междузонном поглощении света с участием этих подзон необходимо учесть эффекты интерфейсного смешивания дырок и кулоновского взаимодействия электрон-дырочной пары.

4. В квантовых точках, выращенных вдоль кристаллографической оси [111], продольное магнитное поле приводит к смешиванию состояний тяжелых дырок с проекциями спина  $\pm 3/2$  на эту ось. Основной вклад в эффект смешивания обусловлен тригональной симметрией  $C_{3v}$  геометрической формы рассматриваемых квантовых точек.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на рабочих семинарах ФТИ им. А. Ф. Иоффе и ИРЭ им. В. А. Котельникова, семинарах в университетах Клермон-Феррана и Тулузы во Франции, на XIII Всероссийской молодежной конференции по физике полупроводников и полупроводниковой оптики и наноэлектронике (Санкт-Петербург, 2011), Российской молодежной конференции по физике и астрономии (Санкт-Петербург, 2012), международной конференции «7th International Conference on Physics and Applications of Spin-Related Phenomena in Semiconductors» (Эйндховен, Голландия, 2012), международных школах «International School on Spin-Optronics» (Санкт-Петербург, 2012) и «New Materials and Renewable Energy» (Тбилиси, Грузия, 2012), международной конференции «Nanostructures: Physics and Technology» (Санкт-Петербург, 2013), XI Российской конференции по физике полупроводников (Санкт-Петербург, 2013), XVIII симпозиуме «Нанофизика и наноэлектроника» (Нижний Новгород, 2014), приняты на международную конференцию «8th International Conference on Quantum Dots» (Пиза, Италия, 2014), а также в качестве приглашенного доклада на международную конференцию «Single dopants» (Санкт-Петербург, 2014).

Публикации. По результатам исследований, представленных в диссертации, опубликовано 8 печатных работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Она содержит 116 страниц текста, включая 21 рисунок и 6 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 152 наименования. Во введении обоснована актуальность проведенных исследований, сформулированы цель и научная новизна работы, перечислены основные положения, выносимые



на защиту, а также кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе диссертации развита 14-зонная  $k_p$ -модель для расчета спиновых расщеплений Дрессельхауза дырочных подзон в квантовых ямах. Предложены граничные условия на 14-компонентную огибающую волновой функции, учитывающие интерфейсное смешивание состояний тяжелой и легкой дырок на атомно резком интерфейсе (001). Показано, что линейное по волновому вектору дырки спин-орбитальное расщепление основной подзоны тяжелых дырок ( $hh1$ ) в ямах GaAs/AlGaAs может быть сравнимым со спиновым расщеплением зоны проводимости даже в отсутствие интерфейсного смешивания дырок, а учет интерфейсного смешивания приводит к заметному (в несколько раз) увеличению спинового расщепления первых трех валентных подзон. Продемонстрировано, что спиновые расщепления возбужденных валентных подзон очень чувствительны к используемым параметрам многозонной модели.

Во второй главе диссертации развита теория зеемановского расщепления основного состояния легкой дырки ( $lh1$ ) в квантовых ямах. Показано, что его близость к первому возбужденному состоянию тяжелой дырки ( $hh2$ ) приводит к гигантской перенормировке  $g$ -фактора легкой дырки. Построена теория зеемановского расщепления пары уровней  $lh1$ ,  $hh2$  в присутствии интерфейсного смешивания этих состояний. Показано, что учет интерфейсного смешивания приводит к неаналитической зависимости эффекта Зеемана от магнитного поля. Построена теория  $g$ -фактора экситона с легкой дыркой с учетом кулоновского взаимодействия с электроном в условиях интерфейсного смешивания дырок.

Третья глава диссертации посвящена теории эффекта Зеемана для тяжелой дырки в квантовых точках, выращенных вдоль направления [111] и обладающих тригональной точечной симметрией  $C_{3v}$ . Развита теория магнитоиндуцированного смешивания состояний тяжелой дырки магнитным полем, направленным вдоль оси роста [111]. Предложен микроскопический механизм такого смешивания, и построена теория диагональной и недиагональной компонент тензора  $g$ -фактора тя-

желой дырки. Проанализирован механизм магнитоиндуцированного смешивания тяжелых дырок в квантовых ямах [111].

Каждая глава содержит вводный раздел, посвященный обзору современного состояния исследований по тематике главы.

В Заключении обобщены основные результаты работы.

Формулы и рисунки в диссертации нумеруются по главам, нумерация литературы единая для всего текста.

# Глава 1

## Спин-орбитальное расщепление дырочных подзон в квантовых ямах

### 1.1 Введение

Характерные особенности энергетических спектров электронных состояний в полупроводниках определяются двумя фундаментальными элементами симметрии: симметрией по отношению инверсии времени и пространственной симметрией. В частности при инверсии времени знак волнового вектора и спина электрона меняется на противоположный, в то время как при инверсии координат знак спина остается неизменным. Отсюда следует, что электронные состояния в центросимметричных системах вырождены по спиновому индексу. Однако в объемных полупроводниках и низкоразмерных системах, не обладающих центром пространственной инверсии, вырождение блоховских состояний электрона за исключением некоторых точек и направлений зоны Бриллюэна снимается. Отсутствие спинового вырождения возможно за счет пространственно асимметричного одночастичного гамильтониана  $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}})$ , включающего спин-орбитальное взаимодействие. На языке эффективного гамильтониана  $\mathcal{H}(\mathbf{k})$  спин-орбитальное взаимодействие проявляется в виде спин-зависимого вклада, нечетного по волновому вектору электрона  $\mathbf{k}$ . В полупроводниках и полупроводниковых гетероструктурах (квантовых ямах и квантовых проволоках), где движение электрона свободно хотя бы в одном направлении, имеются три вклада в спиновое расщепление энергетического

спектра. Эти вклады связаны с отсутствием центра пространственной инверсии в объемном материале (вклад Дрессельхауза или объемная инверсионная асимметрия, ВИА [7]), асимметрией гетеропотенциала или наличием электрических полей (вклад Рашбы или структурная инверсионная асимметрия, SIA [8, 9, 10]), а также наличием интерфейсов (интерфейсная инверсионная асимметрия, ИА). Спин-орбитальные расщепления электрона лежат в основе большого количества интересных эффектов, включая спиновую ориентацию и релаксацию, генерацию спиновых токов, спин-гальванический эффект и спиновый эффект Холла, слабую антилокализацию [2, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

В низкоразмерных структурах квантование движения свободного электрона приводит к качественной модификации его дисперсии. В частности в квантовых ямах зона проводимости представляет собой набор двумерных подзон, сдвинутых друг относительно друга вдоль энергетической оси. В отсутствие центра инверсии спин-орбитальное взаимодействие приводит к расщеплению подзон, которое описывается линейными и кубическими по  $\mathbf{k}$  членами в эффективном гамильтониане  $2 \times 2$  [4, 18]. Это расщепление в симметричных квантовых ямах включает в себя вклады ВИА, ИА, а также имеющий природу SIA вклад, связанный с флуктуациями спин-орбитального взаимодействия [19]. Слагаемые Дрессельхауза и Рашбы для электрона в двумерной зоне проводимости широко исследовались в последние годы как экспериментально, так и теоретически, см., например, [3, 9, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34], и на данный момент хорошо изучены.

Ситуация становится гораздо богаче в случае валентной зоны, состояния которой в объемных полупроводниках с решеткой цинковой обманки четырехкратно вырождены. Так, линейный по волновому вектору дырки  $\mathbf{k}$  вклад Дрессельхауза существует уже для объемной дырки, однако является пренебрежимо малым по сравнению с кубическими по  $\mathbf{k}$  слагаемыми [35, 36]. Эффект Рашбы для двумерных дырок изучался, например, в работах [3, 29], где было показано, что линейные

по  $\mathbf{k}$  слагаемые типа SIA для тяжелой дырки также не играют существенной роли. Спиновое расщепление Дрессельхауза основных подзон тяжелой и легкой дырок в квантовых ямах на основе полупроводников с решеткой цинковой обманки, выраженных вдоль оси [001], было впервые рассчитано Э. И. Рашбой и Е. Я. Шерманом [37]. Для расчета использовался эффективный гамильтониан объемной дырки (матрица  $4 \times 4$ ), состоящий из спин-независимого вклада, описываемого гамильтонианом Латтинжера, и кубических по волновому вектору спин-зависимых слагаемых. В качестве граничных условий использовались простейшие условия обращения в ноль четырех-компонентой волновой функции дырки на границах квантовой ямы, что соответствует приближению ямы с бесконечно высокими барьерами. Такое приближение позволяет получить аналитические выражения для линейных по  $\mathbf{k}$  членов в эффективных гамильтонианах двумерных дырочных подзон. Однако непосредственное применение процедуры, развитой в [37], для расчетов, учитывающих более сложные условия сшивки волновых функций на гетероинтерфейсах, оказывается невозможным из-за наличия члена  $\propto k_z^3$  в спин-зависимом слагаемом объемного гамильтониана  $4 \times 4$ . Наличие такого члена приводит к вкладам  $\propto k_z^2$  в операторе скорости  $\hat{v}_z$  и, следовательно, к сингулярности оператора потока через интерфейс.

Важным фактором, влияющим на дисперсию дырочных подзон в реалистичных квантовых ямах, является анизотропия химических связей на интерфейсах ямы, приводящая к смешиванию тяжелой и легкой дырки при нормальном падении на интерфейс [5, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. Анализ влияния микроскопической структуры интерфейса на спиновое расщепление зоны проводимости представлен в работах [32, 33, 34]. В частности в работе [32] получен вклад в слагаемое Дрессельхауза, пропорциональный феноменологическому параметру, описывающему интерфейсное смешивание тяжелой и легкой дырки, и показано, что такой вклад мал. Атомистические расчеты спин-орбитального расщепления дырок в квантовых ямах, выполненные в работе [44], предсказывают большие линейные по  $k$

слагаемые Дрессельхауза в дисперсии основного состояния тяжелой дырки ( $hh1$ ), однако не позволяют разделить роль объемного и интерфейсного вкладов в спиновое расщепление.

В данной главе развита 14-зонная  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  модель, позволяющая рассчитывать спиновые расщепления дырочных подзон в квантовых ямах и представляющая независимую альтернативу атомистическим расчетам [44, 45, 46]. Предложен вид граничных условий на 14-компонентную огибающую, которые естественным образом описывают интерфейсное смешивание валентных подзон. Расчеты в рамках развитой модели показывают, что линейное  $\mathbf{k}$  спиновое расщепление тяжелой дырки в ямах GaAs/AlGaAs может быть сравнимым с расщеплением зоны проводимости даже в отсутствие интерфейсного смешивания дырок. Учет интерфейсного смешивания приводит к существенному увеличению константы линейного по  $\mathbf{k}$  расщепления тяжелой дырки.

## 1.2 Симметричный анализ

Начнем эту главу с симметричного анализа спин-орбитальных слагаемых в валентной зоне объемных полупроводников с кристаллической решеткой цинковой обманки, а также квантовых ямах различной кристаллографической ориентации на основе таких полупроводников. Отметим, что всюду при описании 14-зонной модели будет использоваться электронное представление (энергии всех зон отсчитываются от дна зоны проводимости объемного материала), однако для удобства при записи эффективных гамильтонианов валентной зоны и вообще всюду, где употребляется термин «дырка», мы используем дырочное представление (ось энергий направлена вниз и имеет начало в вершине валентной зоны объемного материала).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Стоит отметить однако, что выбор представления не меняет значения спиновых расщеплений (это относится как к спин-орбитальным расщеплениям в нулевом магнитном поле, о которых речь идет в этой главе, так и к зеемановским расщеплениям, которые будут обсуждаться в следующих главах): это связано с тем, что смена представления меняет знак не только энергии носителя заряда, но и его спиновой переменной, которая входит в спин-зависимый гамильтониан

### 1.2.1 Объемный кристалл

Напомним, что в объемных полупроводниках с кристаллической структурой цинковой обманки разложение спин-зависимой части эффективного гамильтониана электрона в зоне проводимости  $\Gamma_6$  начинается с членов третьей степени по волновому вектору электрона, которые имеют вид [4, 18]

$$\mathcal{H}_c^{(3)} = \gamma_c (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varkappa}), \quad (1.1)$$

где  $\gamma_c$  – константа спинового расщепления,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  и  $\boldsymbol{\varkappa} = (\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_z)$  – псевдовекторы, составленные из матриц Паули в системе координат  $x \parallel [100]$ ,  $y \parallel [010]$ ,  $z \parallel [001]$ , и  $\varkappa_x = k_x(k_y^2 - k_z^2)$ , а остальные компоненты получаются циклической перестановкой индексов. Разложение эффективного  $4 \times 4$  гамильтониана дырки в зоне  $\Gamma_8$  начинается с линейного по волновому вектору вклада

$$\mathcal{H}_v^{(1)} = (4k_0/\sqrt{3}) \mathbf{V} \mathbf{k}, \quad (1.2)$$

где  $V_x = \{J_x, J_y^2 - J_z^2\}_s$ ,  $\{A, B\}_s = (AB + BA)/2$ ,  $J_\alpha$  – матрицы углового момента в базисе сферических гармоник  $Y_{3/2,m}$  [35, 36]. Коэффициент  $k_0 \approx -1.7$  мэВÅ для GaAs [35], поэтому линейные по  $\mathbf{k}$  слагаемые для объемной дырки становятся сравнимыми с кубическими при волновых векторах  $k \sim 5 \times 10^6$  см. Как будет показано ниже, объемный вклад (1.2) в линейные по  $\mathbf{k}$  расщепления валентных подзон в квантовых ямах GaAs пренебрежимо мал по сравнению с другими исследуемыми вкладами, поэтому при расчетах он учитываться не будет. Кубический по волновому вектору вклад в зоне  $\Gamma_8$  представляет собой сумму трех линейно независимых слагаемых, которые могут быть записаны в виде

$$\mathcal{H}_v^{(3)} = \gamma_v (\mathbf{J} \boldsymbol{\varkappa}) + \frac{1}{2} \delta\gamma_v \left[ a_2 \sum_{\alpha} J_{\alpha}^3 \varkappa_{\alpha} + a_3 \sum_{\alpha} V_{\alpha} k_{\alpha} \left( k_{\alpha}^2 - \frac{1}{3} k^2 \right) \right], \quad (1.3)$$

где для удобства два из трех коэффициентов представлены в виде произведений параметра  $\delta\gamma_v$ , имеющего размерность  $\gamma_c$  ( $\gamma_v$ ), и безразмерных множителей  $a_2/2$  в первой степени.

и  $a_3/2$  [35]. Отметим, что первое слагаемое имеет нерелятивистскую природу, – оно сохраняется в пределе нулевого спин-орбитального взаимодействия (для зоны  $\Gamma_{15}$ ); остальные слагаемые в (1.3) являются релятивистскими.

## 1.2.2 Квантовые ямы ориентаций [001], [110] и [111]

В этом разделе мы рассмотрим квантовые ямы, выращенные вдоль кристаллографических осей [001], [110] и [111]. Будут проанализированы структуры как с симметричным, так и несимметричным гетеропотенциалом. Координаты, используемые при анализе, удобно выбрать в виде  $x \parallel [100]$ ,  $y \parallel [010]$ ,  $z \parallel [001]$  или  $x_1 \parallel [1\bar{1}0]$ ,  $y_1 \parallel [110]$ ,  $z_1 \parallel [001]$  для ориентации [001],  $x_2 \parallel [1\bar{1}0]$ ,  $y_2 \parallel [001]$ ,  $z_2 \parallel [110]$  для ориентации [110] и  $x_3 \parallel [11\bar{2}]$ ,  $y_3 \parallel [\bar{1}10]$ ,  $z_3 \parallel [111]$  для ориентации [111]. Базисные функции зоны  $\Gamma_8$  в  $\Gamma$ -точке ( $k_{x_j} = k_{y_j} = 0$ ) записываются в виде

$$\begin{aligned}\psi_{hh}^{(1)} &\equiv |\Gamma_8, -3/2\rangle = \downarrow (\mathcal{X}_j - i\mathcal{Y}_j)/\sqrt{2}, \\ \psi_{hh}^{(2)} &\equiv |\Gamma_8, 3/2\rangle = -\uparrow (\mathcal{X}_j + i\mathcal{Y}_j)/\sqrt{2}\end{aligned}\quad (1.4)$$

и

$$\begin{aligned}\psi_{lh}^{(1)} &\equiv |\Gamma_8, 1/2\rangle = [2\uparrow \mathcal{Z}_j - \downarrow (\mathcal{X}_j + i\mathcal{Y}_j)]/\sqrt{6}, \\ \psi_{lh}^{(2)} &\equiv |\Gamma_8, -1/2\rangle = [2\downarrow \mathcal{Z}_j + \uparrow (\mathcal{X}_j - i\mathcal{Y}_j)]/\sqrt{6}.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Здесь  $\uparrow, \downarrow$  – двухкомпонентные столбцы, соответствующие состояниям с проекциями спина  $+1/2$  и  $-1/2$  на ось роста структуры ( $z_j$ ),  $\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j$  и  $\mathcal{Z}_j$  – блоховские функции в координатном базисе  $x_j, y_j, z_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

### Ориентация [001]

Симметричная квантовая яма, выращенная вдоль направления [001], имеет точечную симметрию  $D_{2d}$ . В такой яме состояния тяжелой дырки в подзонах  $hh1, hh3 \dots$  и легкой дырки в подзонах  $lh2, lh4 \dots$  преобразуются по представлению  $\Gamma_6$  группы  $D_{2d}$ , в то время как состояния  $lh1, lh3 \dots$  и  $hh2, hh4 \dots$  относятся к представлению  $\Gamma_7$ . В методе инвариантов [47, 36] матрица эффективного гамильтониана  $2 \times 2$



в каждой дырочной подзоне представляется в виде линейной комбинации четырех базисных матриц. Поскольку прямые произведения  $\Gamma_6 \times \Gamma_6$  и  $\Gamma_7 \times \Gamma_7$  распадаются на одинаковые суммы неприводимых представлений  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_5$ , базисные матрицы могут быть выбраны одинаковыми для всех дырочных подзон  $hh\nu$ ,  $lh\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3 \dots$ ). Если базисные функции спиновых представлений выбраны в форме (1.4), (1.5), то базисные матрицы включают в себя единичную матрицу (представление  $\Gamma_1$ ), спиновую матрицу  $\sigma_{z_1}$  (представление  $\Gamma_2$ ) и две спиновые матрицы  $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}$ , преобразующиеся так же, как и проекции волновых векторов  $k_{y_1}, k_{x_1}$  (представление  $\Gamma_5$ ). Это позволяет записать линейное по  $\mathbf{k}$  слагаемое в эффективном гамильтониане в виде

$$\mathcal{H}_n^{[001]} = \beta_1^{(n)}(\sigma_{x_1}k_{y_1} + \sigma_{y_1}k_{x_1}) = \beta_1^{(n)}(\sigma_x k_x - \sigma_y k_y), \quad (1.6)$$

где  $n = hh\nu$  или  $lh\nu$ ,  $\nu = 1, 2 \dots$ , и  $\beta_1^{(n)}$  – константы спиновых расщеплений. Стоит подчеркнуть, что одинаковая форма эффективного гамильтониана для тяжелой и легкой дырок связана с порядком блоховских функций в (1.4) и (1.5).

Приложение электрического поля вдоль оси роста квантовой ямы [001] или наличие неэквивалентных интерфейсов приводит к понижению симметрии структуры до  $C_{2v}$ . В этой точечной группе состояния подзон  $hh\nu$ ,  $lh\nu$  отвечают спинорному представлению  $\Gamma_5$ , в то время как компоненты  $k_{x_1}$  и  $k_{y_1}$  преобразуются в соответствии с представлениями  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_4$ . Прямое произведение  $\Gamma_5 \times \Gamma_5 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  содержит как  $\Gamma_2$ , так и  $\Gamma_4$  – как результат, спиновое расщепление описывается двумя независимыми константами  $\beta_1$  и  $\beta_2$

$$\mathcal{H}_n^{[001],\text{asym}} = \beta_1^{(n)}\sigma_{x_1}k_{y_1} + \beta_2^{(n)}\sigma_{y_1}k_{x_1}. \quad (1.7)$$

Этот же гамильтониан в кубическом базисе  $x, y, z$  имеет вид

$$\mathcal{H}_n^{[001],\text{asym}} = \tilde{\beta}_1^{(n)}(\sigma_x k_x - \sigma_y k_y) + \tilde{\beta}_2^{(n)}(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x), \quad (1.8)$$

с новыми константами  $\tilde{\beta}_1^{(n)} = (\beta_1^{(n)} + \beta_2^{(n)})/2$  и  $\tilde{\beta}_2^{(n)} = (\beta_1^{(n)} - \beta_2^{(n)})/2$ . Из уравнения (1.8) видно, что эффективный гамильтониан содержит два различных по

симметрии вклада: первый из них соответствует спиновому расщеплению Дресельхауза, второй – спиновому расщеплению Рашбы.

Кубические по волновому вектору вклады в спиновое расщепление дырки в ямах [001] записываются в виде [48]

$$\mathcal{H}_{n,3}^{[001]} = \gamma_1^{(n)} \sigma_{x_1} k_{y_1}^3 + \gamma_2^{(n)} \sigma_{y_1} k_{x_1}^3 + \gamma_3^{(n)} \sigma_{x_1} k_{x_1}^2 k_{y_1} + \gamma_4^{(n)} \sigma_{y_1} k_{y_1}^2 k_{x_1} \quad (1.9)$$

с четырьмя независимыми коэффициентами  $\gamma_i^{(n)}$ . В симметричной яме  $\gamma_1^{(n)} = \gamma_2^{(n)}$ , и  $\gamma_3^{(n)} = \gamma_4^{(n)}$ . Отметим, что гамильтониан в форме (1.7), (1.9) также описывает спиновое расщепление электрона в зоне проводимости.

### Ориентация [110]

В симметричных квантовых ямах ориентации [110] состояния как тяжелой, так и легкой дырки преобразуются по представлению  $\Gamma_5$  точечной группы  $C_{2v}$ . Среди компонент  $k_{x_2}, k_{y_2}, \sigma_{\alpha_j}$  только  $k_{x_2}$  и  $\sigma_{z_2}$  преобразуются по одинаковым представлениям. Как результат, линейный по  $\mathbf{k}$  вклад в спиновое расщепление валентных подзон имеет вид

$$\mathcal{H}_n^{[110]} = \beta_3^{(n)} \sigma_{z_2} k_{x_2}. \quad (1.10)$$

Несимметричные ямы, выращенные вдоль направления [110], имеют низкую симметрию  $C_s$ , в этом случае помимо слагаемого (1.10), спиновое расщепление содержит еще два независимых вклада, описываемых коэффициентами  $\beta_4^{(n)}$  и  $\beta_5^{(n)}$

$$\mathcal{H}_n^{[110],\text{asym}} = \beta_3^{(n)} \sigma_{z_2} k_{x_2} + \beta_4^{(n)} \sigma_{x_2} k_{y_2} + \beta_5^{(n)} \sigma_{y_2} k_{x_2}. \quad (1.11)$$

Так же, как и в случае электрона в зоне проводимости, дырочное слагаемое Рашбы в квантовых ямах [110] описывается двумя параметрами [49]. Спиновое расщепление в форме (1.11) характерно также для ям ориентации  $[h h k]$  при  $h \neq k$ ,  $h \neq 0$ ,  $k \neq 0$ .

### Ориентация [111]

Интересной особенностью ям ориентации [111] является тот факт, что независимо от формы гетеропотенциала структура обладает точечной симметрией  $C_{3v}$ . Таким

образом, слагаемые Дрессельхауза и Рашбы в ямах [111] имеют одинаковый вид. Пара функций (1.4) и состояния  $hh\nu$  преобразуются в этом случае по приводимому представлению  $\Gamma_5 + \Gamma_6$  группы  $C_{3v}$  (подробный симметричный анализ структур  $C_{3v}$  приведен в главе 3). Прямое произведение  $(\Gamma_5 + \Gamma_6) \times (\Gamma_5 + \Gamma_6) = 2\Gamma_1 + 2\Gamma_2$  не содержит представления  $\Gamma_3$ , таким образом, линейные по волновому вектору слагаемые в спиновом расщеплении тяжелой дырки запрещены. Первый исчезающий спин-зависимый вклад в эффективный гамильтониан подзон тяжелой дырки является кубическим по  $\mathbf{k}$  и имеет вид [50]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{hh\nu}^{[111]} = & \gamma_5^{(\nu)} \sigma_{x_3} k_{y_3} (k_{y_3}^2 - 3k_{x_3}^2) \\ & + \gamma_6^{(\nu)} \sigma_{y_3} k_{x_3} (k_{x_3}^2 - 3k_{y_3}^2) + \gamma_7^{(\nu)} \sigma_{z_3} k_{y_3} (k_{y_3}^2 - 3k_{x_3}^2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

с тремя независимыми параметрами  $\gamma_5^{(\nu)}$ ,  $\gamma_6^{(\nu)}$  и  $\gamma_7^{(\nu)}$ . Линейные по  $\mathbf{k}$  слагаемые, с другой стороны, не запрещены в дисперсии подзон легкой дырки. В самом деле, функции (1.5) и состояния легкой дырки  $lh\nu$  преобразуются по двумерному представлению  $\Gamma_4$ . Произведение  $\Gamma_4 \times \Gamma_4 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  содержит представление  $\Gamma_3$ , как результат, спиновое расщепление легкой дырки описывается вкладом

$$\mathcal{H}_{lh\nu}^{[111]} = \beta_6^{(\nu)} (\sigma_{x_3} k_{y_3} - \sigma_{y_3} k_{x_3}) . \quad (1.13)$$

Аналогичную форму в ямах [111] имеет и спиновое расщепление зоны проводимости [51, 52].

### 1.3 14-зонная модель для объемного кристалла

В данном разделе представлена 14-зонная  $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -модель <sup>2</sup> для расчета спиновых расщеплений валентной зоны. Ее преимущество состоит в том, что она полностью воспроизводит симметрию  $T_d$  кристаллической решетки цинковой обманки и, следовательно, детально описывает дисперсию электронных зон вблизи  $\Gamma$ -точки зоны Бриллюэна [4, 35, 53, 54, 55, 56, 57]. Модель включает в себя 14 зон, а именно, валентные зоны симметрии  $\Gamma_{8v}$  и  $\Gamma_{7v}$ , сформированные орбитальными блоховскими

<sup>2</sup>встречаются также названия 5-зонная  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  модель или расширенная модель Кейна

функциями  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$  (представление  $\Gamma_{15}$  в координатной системе  $x, y, z$ ), нижнюю зону проводимости  $\Gamma_{6c}$ , сформированную сферически симметричной орбитальной функцией  $\mathcal{S}$  (представление  $\Gamma_1$ ), и далекие зоны проводимости  $\Gamma_{8c}$  и  $\Gamma_{7c}$ , сформированные орбитальными функциями  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{Y}'$ ,  $\mathcal{Z}'$  и преобразующиеся так же, как и состояния валентных зон. Введем следующие обозначения для спинорных блоховских функций в  $\Gamma$ -точке  $|N\rangle$  ( $N = 1 \dots 14$ ):

$$|\Gamma_{6c}, m\rangle, |\Gamma_{8v}, m'\rangle, |\Gamma_{7v}, m\rangle, |\Gamma_{8c}, m'\rangle, |\Gamma_{7c}, m\rangle, \quad (1.14)$$

где  $m = \pm 1/2$  и  $m' = \pm 1/2, \pm 3/2$ . Базисные функции зоны  $\Gamma_6$  записываются в виде  $\uparrow\mathcal{S}$ ,  $\downarrow\mathcal{S}$ , для описания зон  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_7$  используется канонический базис (1.4), (1.5). Модель содержит следующие 8 параметров (см. рис. 1.1): ширину запрещенной зоны  $E_g$ , энергетический зазор  $E'_g$  между зонами  $\Gamma_{7c}$  и  $\Gamma_6$ , спин-орбитальные расщепления  $\Delta$  и  $\Delta'$  валентной зоны и высокой зоны проводимости, три ненулевых межзонных матричных элемента оператора импульса

$$\begin{aligned} P &= i\frac{\hbar}{m_0} \langle \mathcal{S} | \hat{p}_x | \mathcal{X} \rangle, \\ P' &= i\frac{\hbar}{m_0} \langle \mathcal{S} | \hat{p}_x | \mathcal{X}' \rangle, \\ Q &= i\frac{\hbar}{m_0} \langle \mathcal{X}' | \hat{p}_y | \mathcal{Z} \rangle, \end{aligned} \quad (1.15)$$

и, наконец, межзонный матричный элемент спин-орбитального взаимодействия между валентной зоной и далекой зоной проводимости

$$\Delta^- = 3\langle \Gamma_{8c}, m' | \mathcal{H}_{so} | \Gamma_{8v}, m' \rangle = -\frac{3}{2} \langle \Gamma_{7c}, m | \mathcal{H}_{so} | \Gamma_{7v}, m \rangle, \quad (1.16)$$

где  $\mathcal{H}_{so} = \hbar^2([\boldsymbol{\sigma} \times \nabla U(\mathbf{r})]\mathbf{p})/4m_0^2c^2$  – гамильтониан спин-орбитального взаимодействия,  $U(\mathbf{r})$  – периодический потенциал решетки,  $c$  – скорость света, и  $m_0$  – масса свободного электрона. Отметим, что отсутствие центра пространственной инверсии в решетке цинковой обманки воспроизводится в 14-зонной модели наличием ненулевых матричных элементов  $P'$  и  $\Delta^-$ .

Здесь и далее мы пренебрегаем разницей между обобщенным оператором импульса  $\boldsymbol{\pi}$  и оператором  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  в силу того, что поправка  $\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p})$  в исследуемых полупроводниках пренебрежимо мала [58]. Гамильтониан 14-зонной модели записывается в виде имеющей размерность  $14 \times 14$  матрицы  $\mathcal{H}_{N'N}^{(14)}$ , на диагонали которой стоят энергии экстремумов зон  $E_N^0$ , а вне диагонали – элементы, линейные либо по  $\Delta^-$ , либо по  $\mathbf{k}$ . Мы пренебрегаем диагональным вкладом, содержащим дисперсию свободного электрона  $(\hbar^2 k^2 / 2m_0) \delta_{N'N}$ , а также вкладами других далеких зон [4], что позволяет в случае квантовой ямы сократить количество граничных условий с 28 до 14 и существенно упростить вычисления.

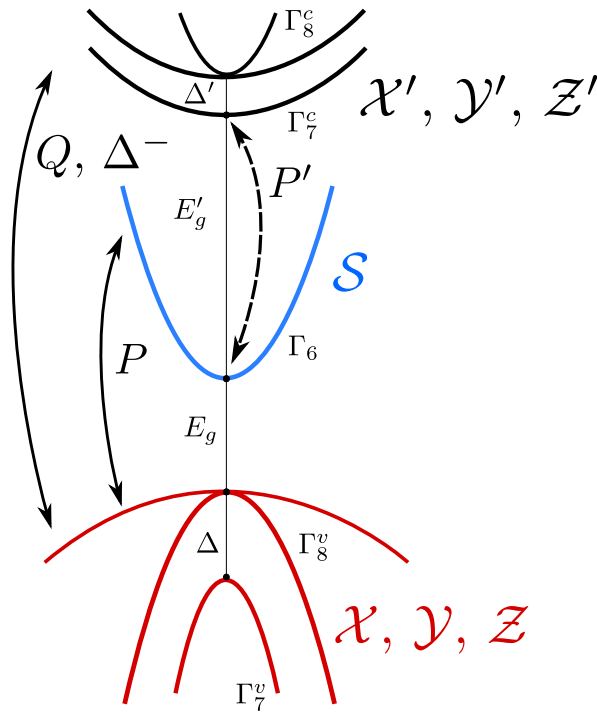


Рис. 1.1: Схематическое изображение 14-зонной модели, см. пояснения в тексте.

Диагонализация 14-зонного гамильтониана дает энергетический спектр электрона в объемном полупроводнике. В непосредственной близости от  $\Gamma$ -точки этот спектр может быть получен с помощью стандартной теории возмущений. В частности, второй порядок теории возмущений по  $\mathbf{k}$  осуществляет переход от 14-зонной модели к эффективным спин-независимым гамильтонианам каждой зоны в от-

дельности. Например, для электрона в зоне  $\Gamma_6$  такой гамильтониан имеет размерность  $2 \times 2$  и записывается в виде единичной матрицы  $(\hbar^2 k^2 / 2m_e) \delta_{LL'}$ , где  $m_e$  – эффективная масса электрона. Электрон в зоне  $\Gamma_{8v}$  описывается гамильтонианом Латтинжера  $4 \times 4$  [18]:

$$\mathcal{H}_{\Gamma_8} = \begin{pmatrix} F & H & I & 0 \\ H^* & G & 0 & I \\ I^* & 0 & G & -H \\ 0 & I^* & -H^* & F \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 - 2\gamma_2) k_z^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 + \gamma_2) (k_x^2 + k_y^2), \\ G &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 + 2\gamma_2) k_z^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} (\gamma_1 - \gamma_2) (k_x^2 + k_y^2), \\ H &= \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0} \gamma_3 k_z (k_x - ik_y), \quad I = \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{2m_0} \gamma_2 (k_x^2 - k_y^2) - i \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0} \gamma_3 k_x k_y. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_i$  – параметры Латтинжера.

Параметры Латтинжера  $\gamma_i$  и эффективная масса электрона в зоне  $\Gamma_6$  выражаются через параметры 14-зонной модели с использованием второго порядка теории возмущений, см. табл. 1.1. В этой главе будут использоваться три различные параметризации 14-зонной модели, представленные в работах [35, 56, 59], которые для удобства сведены в табл. 1.2. Видно, что выбранные параметризации дают близкие значения эффективной массы электрона и параметров Латтинжера, однако, как будет показано ниже, сильно отличающиеся значения спин-орбитальных расщеплений.

Следуя работе [35] запишем коэффициенты  $\gamma_c$  и  $\gamma_v$  в уравнениях (1.1) и (1.3) в виде сумм  $\gamma_c = \gamma_{c0} + \delta\gamma_c$  и  $\gamma_v = \gamma_{v0} + a_1 \delta\gamma_v / 2$ . Такая запись позволит нам отделить вклады третьего порядка  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  теории возмущений ( $\gamma_{c0}, \gamma_{v0}$ ) от вкладов четвертого порядка ( $\delta\gamma_c, \delta\gamma_v$ ), которые содержат в себе множитель  $\Delta^-$ . Вклады третьего порядка были рассчитаны в [35] и записываются в виде

$$\gamma_{c0} = -\frac{4}{3} P P' Q \frac{\Delta(E'_g + \Delta') + \Delta' E_g}{E_g E'_g (E_g + \Delta)(E'_g + \Delta')}, \quad (1.18)$$

$$\gamma_{v0} = \frac{4}{3} P P' Q \frac{E_g + E'_g + \Delta' / 2}{E_g (E_g + E'_g)(E_g + E'_g + \Delta')}. \quad (1.19)$$

Таблица 1.1: Аналитические выражения для эффективной массы электрона в зоне проводимости  $\Gamma_6$  и параметров Латтинжера  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  для зоны  $\Gamma_{8v}$  в рамках 14-зонной модели [4].

$$\begin{aligned}
 \frac{m_0}{m_e} &= \frac{2m_0P^2}{\hbar^2E_g} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta}{E_g + \Delta}\right) - \frac{2m_0P'^2}{\hbar^2E'_g} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\Delta'}{E'_g + \Delta'}\right) \\
 \gamma_1 &= \frac{2m_0}{3\hbar^2} \left( \frac{P^2}{E_g} + \frac{Q^2}{E_g + E'_g} + \frac{Q^2}{E_g + E'_g + \Delta'} \right) \\
 \gamma_2 &= \frac{m_0}{3\hbar^2} \left( \frac{P^2}{E_g} - \frac{Q^2}{E_g + E'_g} \right) \\
 \gamma_3 &= \frac{m_0}{3\hbar^2} \left( \frac{P^2}{E_g} + \frac{Q^2}{E_g + E'_g} \right)
 \end{aligned}$$

Таблица 1.2: Три используемые в литературе параметризации 14-зонной  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  модели для GaAs. Энергии и матричные элементы  $P$ ,  $P'$  и  $Q$  имеют размерности эВ и эВÅ, соответственно. Эффективная масса электрона в зоне проводимости и параметры Латтинжера рассчитаны с использованием выражений, приведенных в табл. 1.1.

| Пар-ры    | $E_g$ | $\Delta$ | $E'_g$ | $\Delta'$ | $\Delta^-$ | $P$   | $P'$ | $Q$  | $m_e/m_0$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ |
|-----------|-------|----------|--------|-----------|------------|-------|------|------|-----------|------------|------------|------------|
| (I)[59]   | 1.52  | 0.341    | 3.02   | 0.2       | -0.17      | 9.88  | 0.41 | 8.68 | 0.063     | 8.51       | 2.08       | 3.53       |
| (II)[35]  | 1.52  | 0.34     | 2.93   | 0.17      | -0.1       | 10.3  | 3.3  | 6    | 0.062     | 7.51       | 2.7        | 3.4        |
| (III)[56] | 1.52  | 0.341    | 2.97   | 0.17      | -0.061     | 10.31 | 3    | 7.7  | 0.061     | 8.42       | 2.48       | 3.63       |

Отметим, что отличие приведенных здесь выражений для  $\gamma_{c0}$  и  $\gamma_{v0}$  от формул (18) и (20) работы [35] связано с тем, здесь используется противоположный знак для  $Q$ , в определение  $P$  и  $P'$  включается множитель  $i\hbar/m_0$ , а также  $E'_g$  отсчитывается от зоны  $\Gamma_{8c}$ , а не от  $\Gamma_{7c}$ . Вклад четвертого порядка в зоне  $\Gamma_6$  имеет вид

$$\delta\gamma_c = \frac{4}{9} \Delta^- Q \frac{P^2(3E'_g + 2\Delta') + P'^2(3E_g + \Delta)}{E_g E'_g (E_g + \Delta)(E'_g + \Delta')}. \quad (1.20)$$

Вклады четвертого порядка  $\delta\gamma_v a_i/2$  в валентной зоне  $\Gamma_8$  удобно представить в виде  $(a_i^{(0)} + \delta a_i)\delta\gamma_v/2$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где

$$\delta\gamma_v = -\frac{4}{9} \frac{\Delta^- P^2 Q [\Delta + 2\Delta' + 3(E_g + E'_g)]}{\Delta E_g (E_g + E'_g + \Delta)(\Delta' + E_g + E'_g)}. \quad (1.21)$$

и

$$a_1^{(0)} = \frac{13}{4}, \quad a_2^{(0)} = -1, \quad a_3^{(0)} = 1. \quad (1.22)$$

Слагаемые, пропорциональные  $a_i^{(0)}$ , содержат множитель  $\Delta^- P^2 Q$ . Такие слагаемые были получены в [35], при этом уравнение (1.21) отличается от уравнения (21a) в [35] дополнительным слагаемым  $\Delta$  в числителе и знаменателе дроби. В дополнение к  $a_i^{(0)}$  есть также вклады, пропорциональные  $\Delta^- Q^3$ , которые не учитывались в [35]. Они имеют вид

$$\delta a_i = c_i \frac{Q^2 E_g}{P^2 (E_g + E'_g)}, \quad (1.23)$$

$$c_1 = \frac{41}{12}, \quad c_2 = -\frac{5}{3}, \quad c_3 = -1.$$

В силу того, что значения  $P$  и  $Q$  сравнимы, вклады (1.23) могут играть существенную роль. Дополнительные вклады  $\propto \Delta^- P^2 Q$  здесь и далее не учитываются, так как они пренебрежимо малы по сравнению с вкладами (1.23).

Диагонализация эффективного гамильтониана зоны  $\Gamma_8$  (1.3) для  $\mathbf{k} \parallel [110]$  дает кубические по волновому вектору спиновые расщепления тяжелой и легкой дырки  $\Delta_{hh, lh}(k) = \gamma_{hh, lh} k^3$ , где

$$\gamma_{hh} = \frac{1}{2} \left| \gamma_v \left( 1 - \frac{3\xi - 1}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \delta\gamma_v \left[ \left( 1 - \frac{2\xi}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \frac{1}{2} \delta a_1 \left( 1 - \frac{3\xi - 1}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \frac{1}{8} \delta a_2 \left( 7 - \frac{21\xi - 13}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \frac{1}{4} \delta a_3 \left( 1 + \frac{\xi}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) \right] \right|, \quad (1.24a)$$

$$\gamma_{lh} = \frac{1}{2} \left| \gamma_v \left( 1 + \frac{3\xi - 1}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \delta\gamma_v \left[ \left( 1 + \frac{2\xi}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \frac{1}{2} \delta a_1 \left( 1 + \frac{3\xi - 1}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \frac{1}{8} \delta a_2 \left( 7 + \frac{21\xi - 13}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) + \frac{1}{4} \delta a_3 \left( 1 - \frac{\xi}{\sqrt{1 + 3\xi^2}} \right) \right] \right|, \quad (1.24b)$$

а отношение  $\xi = \gamma_3/\gamma_2$  характеризует гофрировку валентной зоны. В табл. 1.3 приведены значения констант спиновых расщеплений для зоны проводимости и



валентных подзон, рассчитанные для различных параметризаций 14-зонной модели. Видно, что вклады четвертого порядка сравнимы и даже превосходят вклады третьего порядка. Более того учет поправок  $\delta a_i$  в (1.24) приводит к значительному увеличению спинового расщепления тяжелой дырки. Так в рамках параметризации (I) расчет без учета поправок дает  $\gamma_{hh} \approx 4.6 \text{ эВ\AA}^3$ , в то время как значение расщепления с учетом  $\delta a_i$  больше почти в три раза.

Таблица 1.3: Константы спин-орбитальных расщеплений, рассчитанные с использованием уравнений (1.18)–(1.21) (в  $\text{эВ\AA}^3$ ), поправки к параметрам  $a_j$  рассчитанные на основе уравнений (1.23), и коэффициенты (1.24) для  $\mathbf{k} \parallel [110]$  (в  $\text{эВ\AA}^3$ ) для трех различных параметризаций, перечисленных в табл. 1.2.

| Пар-ры | $\gamma_{c0}$ | $\delta\gamma_c$ | $\gamma_c$ | $\gamma_{v0}$ | $\delta\gamma_v$ | $\delta a_1$ | $\delta a_2$ | $\delta a_3$ | $\gamma_{lh}$ | $\gamma_{hh}$ |
|--------|---------------|------------------|------------|---------------|------------------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| (I)    | -2.39         | -22.0            | -24.4      | 6.65          | 76.7             | 0.883        | -0.431       | -0.258       | 96.4          | 13.2          |
| (II)   | -13.9         | -10.6            | -24.5      | 39.5          | 34.7             | 0.396        | -0.193       | -0.116       | 79.3          | 5.84          |
| (III)  | -16.0         | -8.13            | -24.1      | 45.7          | 26.9             | 0.645        | -0.315       | -0.189       | 80.5          | 8.79          |

## 1.4 Энергетический спектр и спиновые расщепления в квантовых ямах

### 1.4.1 14-зонная модель и граничные условия

Применим теперь 14-зонную модель для расчета энергетического спектра в симметричных квантовых ямах, выращенных вдоль направления  $z \parallel [001]$ . В случае квантовых ям удобно вместо канонического базиса (1.14) использовать базис  $|l, s\rangle$  ( $l = 1 \dots 7, s = \pm 1/2$ ), где  $|l, 1/2\rangle = \uparrow \mathcal{R}_l$  для спина  $s = 1/2$  и  $|l, -1/2\rangle = \downarrow \mathcal{R}_l$  для  $s = -1/2$ , а  $\mathcal{R}_l$  – орбитальные блоховские функции  $\mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}'$ , поскольку именно в этом базисе граничные условия на гетероинтерфейсах ямы принимают наиболее простой вид. В рамках 14-зонной модели электронное состояние в квантовой яме описывается волновой функцией  $\Psi_{nj}$ , которая представляет собой сумму произведений блоховских функций  $|l, s\rangle$  и плавных огибающих  $f_{nj,ls}$

$$\Psi_{nj} = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\rho}}{\sqrt{S}} \sum_{ls} f_{nj,ls}(z) |l, s\rangle . \quad (1.25)$$

Здесь  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y)$  и  $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$  – волновой вектор и координата в плоскости ямы,  $S$  – нормировочная площадь, индекс  $n$  обозначает номер подзоны, например,  $n = e1, hh1, lh1 \dots$ , спиновый индекс  $j$  нумерует два состояния в подзоне  $n$ , вырожденные по энергии в  $\Gamma$ -точке (при  $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$ ). Энергетический спектр  $E_{nj}(\mathbf{k}_{\parallel})$  в  $n$ -ой электронной подзоне в  $\mathbf{k}$ -пространстве получается с помощью численного решения уравнения Шредингера

$$\mathcal{H}^{(14)}(\mathbf{k}_{\parallel}, \hat{k}_z) \Psi_{nj} = E_{nj}(\mathbf{k}_{\parallel}) \Psi_{nj}, \quad (1.26)$$

где введен дифференциальный оператор  $\hat{k}_z = -i\partial/\partial z$ , действующий на огибающие  $f_{nj,ls}(z)$ .

Уравнение (1.26) должно быть дополнено граничными условиями, основное требование к которым заключается в сохранении  $z$ -компоненты потока частиц через интерфейс. Вектор плотности потока записывается в виде

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\hbar} \sum_{l's'ls} f_{l's'}^* \frac{\partial \mathcal{H}_{l's',ls}^{(14)}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} f_{ls}, \quad (1.27)$$

в частности, его  $z$ -компонента

$$S_z = \frac{i}{\hbar} \left[ P \left( \hat{f}_z^\dagger \hat{f}_s - \hat{f}_s^\dagger \hat{f}_z \right) + P' \left( \hat{f}_{z'}^\dagger \hat{f}_s - \hat{f}_s^\dagger \hat{f}_{z'} \right) + Q \left( \hat{f}_{x'}^\dagger \hat{f}_y - \hat{f}_y^\dagger \hat{f}_{x'} + \hat{f}_{y'}^\dagger \hat{f}_x - \hat{f}_x^\dagger \hat{f}_{y'} \right) \right]. \quad (1.28)$$

Здесь для краткости введены двухкомпонентные спиноры

$$\hat{f}_l = \begin{bmatrix} f_{l,1/2} \\ f_{l,-1/2} \end{bmatrix}.$$

Поскольку в  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -гамильтониан входят только члены первого порядка по  $k_z$ , достаточно поставить одно граничное условие на каждую огибающую  $f_{nj,ls}$ . Далее мы предполагаем, что матричные элементы  $P$ ,  $P'$ ,  $Q$ , и  $\Delta^-$  имеют одинаковые значения в яме и барьерных областях, и только диагональные элементы гамильтониана  $E_N^0$  испытывают разрывы на интерфейсах. В этом случае наиболее простые и естественные граничные условия представляют собой непрерывность всех

огибающих на интерфейсах. Однако такие граничные условия не учитывают пониженной  $C_{2v}$  симметрии одиночного интерфейса, которая является следствием анизотропии химических связей и приводит к смешиванию состояний тяжелой и легкой дырки [38, 5, 39, 60]. Напомним, что в рамках 4-зонной модели, описываемой гамильтонианом Латтинжера (1.17), такое смешивание учитывается с помощью дополнительного члена в граничных условиях на четырех-компонентную огибающую  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \Phi_B, \\ \hat{M}_A^{-1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_A &= \hat{M}_B^{-1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_B + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t_{l-h}}{a_0 m_0} \{J_x J_y\}_s \Phi, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где матрица  $\hat{M}$  диагональна и содержит значения эффективных масс в направлении оси  $z$  тяжелой,  $m_{hh} = m_0/(\gamma_1 - 2\gamma_2)$ , и легкой,  $m_{lh} = m_0/(\gamma_1 + 2\gamma_2)$ , дырок,  $a_0$  – постоянная решетки, и  $t_{l-h}$  – вещественный параметр. Для того чтобы включить эффекты интерфейсного смешивания в 14-зонную модель, мы используем минимальное обобщение условий непрерывности на огибающие  $f_{nj,ls}$ , а именно: сохраняем непрерывность десяти огибающих, отвечающих  $\mathcal{R}_l = \mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  и  $\mathcal{Z}'$ , а для оставшихся огибающих записываем граничные условия в виде

$$\begin{aligned} \left( \hat{f}_{nj, \mathcal{X}'} \right)_A &= \left( \hat{f}_{nj, \mathcal{X}'} \right)_B + \tilde{t} \left( \hat{f}_{nj, \mathcal{X}} \right)_B, \\ \left( \hat{f}_{nj, \mathcal{Y}'} \right)_A &= \left( \hat{f}_{nj, \mathcal{Y}'} \right)_B + \tilde{t} \left( \hat{f}_{nj, \mathcal{Y}} \right)_B, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $\tilde{t}$  – вещественный безразмерный параметр. Видно, что предложенные условия (1.30) сохраняют непрерывность потока. Граничные условия в 4-зонной модели могут быть получены из уравнений (1.30) с учетом того, что внедиагональные матричные элементы  $Qk_z$  в 14-зонном гамильтониане смешивают состояния  $\hat{f}_{nj, \mathcal{X}'}$  с  $\hat{f}_{nj, \mathcal{Y}}$  и состояния  $\hat{f}_{nj, \mathcal{Y}'}$  с  $\hat{f}_{nj, \mathcal{X}}$ . Таким образом, параметр  $t_{l-h}$  во втором граничном условии в (1.29) выражается через параметр  $\tilde{t}$  с помощью

$$t_{l-h} \equiv \frac{2m_0 a_0}{\sqrt{3}\hbar^2} Q\tilde{t}. \quad (1.31)$$

В дальнейшем мы будем использовать  $t_{l-h}$  в качестве независимого параметра нашей теории, а формулу (1.31) – для вычисления  $\tilde{t}$ . Стоит отметить, что предложенные граничные условия наиболее простым образом учитывают интерфейсное смешивание тяжелой и легкой дырки – учет дополнительных членов в граничных условиях 14-зонной модели приводит к более сложным граничным условиям 4-зонной модели, см., например, [61].

Состояния  $lh1$  и  $hh2$  в 4-зонной модели могут смешиваться не только интерфейсными слагаемыми (1.29), но и оператором  $V_z \hat{k}_z^3$ , входящим в гамильтониан (1.3). Действительно матрица  $V_z$  смешивает состояния  $|\Gamma_8, 3/2\rangle$  и  $|\Gamma_8, -1/2\rangle$ , а также состояния  $|\Gamma_8, -3/2\rangle$  и  $|\Gamma_8, 1/2\rangle$ . Однако в отличие от граничных условий (1.29) включение такого слагаемого в эффективный гамильтониан 4-зонной модели делает задачу неразрешимой даже в случае бесконечно высоких барьеров, когда огибающие обнуляются на интерфейсах ямы. Это связано, во-первых, с тем, что строго говоря порядок дифференциальных уравнений увеличивается и появляются дополнительные нефизические решения. Во-вторых, попытка использовать оператор  $V_z \hat{k}_z^3$  в качестве возмущения упирается в проблему неэрмитовости оператора  $\hat{k}_z^3$ , а именно  $\langle hh2 | \hat{k}_z^3 | lh1 \rangle \neq \langle lh1 | \hat{k}_z^3 | hh2 \rangle^*$  в пространстве огибающих (1.32), обращаясь в ноль на интерфейсах. Стоит отметить, что при  $k_{||} \neq 0$  этот же самый оператор приводит к конечным линейным по  $\mathbf{k}$  поправкам в энергетическом спектре подзон  $hh\nu, lh\nu$  в модели бесконечных барьеров [37]. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим в качестве примера подзону  $hh1$ . Ее спиновое расщепление содержит симметризованные комбинации  $\langle hh1 | k_z^3 | lh\nu \rangle^* + \langle lh\nu | k_z^3 | hh1 \rangle$ , которые имеют смысл для огибающих, обращаясь в ноль на интерфейсе. С случае же барьеров конечной высоты проблема, связанная с оператором  $V_z \hat{k}_z^3$ , не может быть устранена ни при расчете положения подзон в  $\Gamma$ -точке, ни при расчете линейных по  $\mathbf{k}$  вкладов в дисперсию дырки. Таким образом, последовательный расчет энергетического спектра двумерных дырок вблизи  $\Gamma$ -точки в 4-зонной модели с учетом спин-зависимых вкладов в эффективный гамильтониан невозможен. Преимуще-

ство 14-зонной модели заключается в том, что она содержит только операторы не выше первой степени по  $\hat{k}_z$ , а также имплицитно включает в себя спин-зависимые вклады, связанные с нецентросимметричностью кристалла, что позволяет использовать ее для расчета спиновых расщеплений в ямах с конечными барьерами (а в более широком применении – и для любых профилей квантующего потенциала).

Как упоминалось выше, в численных расчетах мы задаем одинаковые значения параметров  $P$ ,  $P'$ ,  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta'$  и  $\Delta^-$  в яме и барьерных слоях, в то время как ширина запрещенной зоны твердого раствора  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  задается квадратичным законом [62]  $E_g(x) = E_g(0) + 1.04x + 0.46x^2$ . Для разрывов зон  $\Gamma_{8v}$  и  $\Gamma_{6c}$  ( $\Delta E_v$  и  $\Delta E_c$ , соответственно) использовалось стандартное отношение  $2/3$ , разрыв высокой зоны проводимости  $\Delta E_{c'}$  выбирался равным  $-\Delta E_v$ , так как значение суммы  $E_g + E'_g$  практически не меняется при переходе от GaAs к AlAs для всех используемых параметризаций. Стоит отметить, что учет разрывов межзонных параметров на гетероинтерфейсах может привести к дополнительным вкладом в спиновые расщепления как электрона, так и дырок [33]. Для численного решения системы дифференциальных уравнений (1.26) использовался метод конечных разностей. При этом особое внимание уделялось устранению нефизических решений («spurious solutions»), отвечающих лежащим за пределами зоны Бриллюэна значениям волнового вектора дырки [63].

## 1.4.2 Энергетический спектр и волновые функции в $\Gamma$ -точке

Прежде, чем перейти к расчету спиновых расщеплений, сопоставим энергии валентных подзон в  $\Gamma$ -точке, найденные в рамках 14-зонной и 4-зонной моделей при отсутствии интерфейсного смешивания,  $t_{l-h} = 0$ . В 4-зонной модели, описываемой гамильтонианом Латтинжера, огибающие тяжелой и легкой дырок и энергии  $\varepsilon_{hh\nu}$ ,  $\varepsilon_{lh\nu}$  ( $\nu = 1, 2 \dots$ ) в  $\Gamma$ -точке можно определить из следующих уравнений

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m_{hh}} \frac{\partial}{\partial z} + V(z) \right] \Phi_{hh\nu} &= \varepsilon_{hh\nu} \Phi_{hh\nu}, \\ \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m_{lh}} \frac{\partial}{\partial z} + V(z) \right] \Phi_{lh\nu} &= \varepsilon_{lh\nu} \Phi_{lh\nu}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

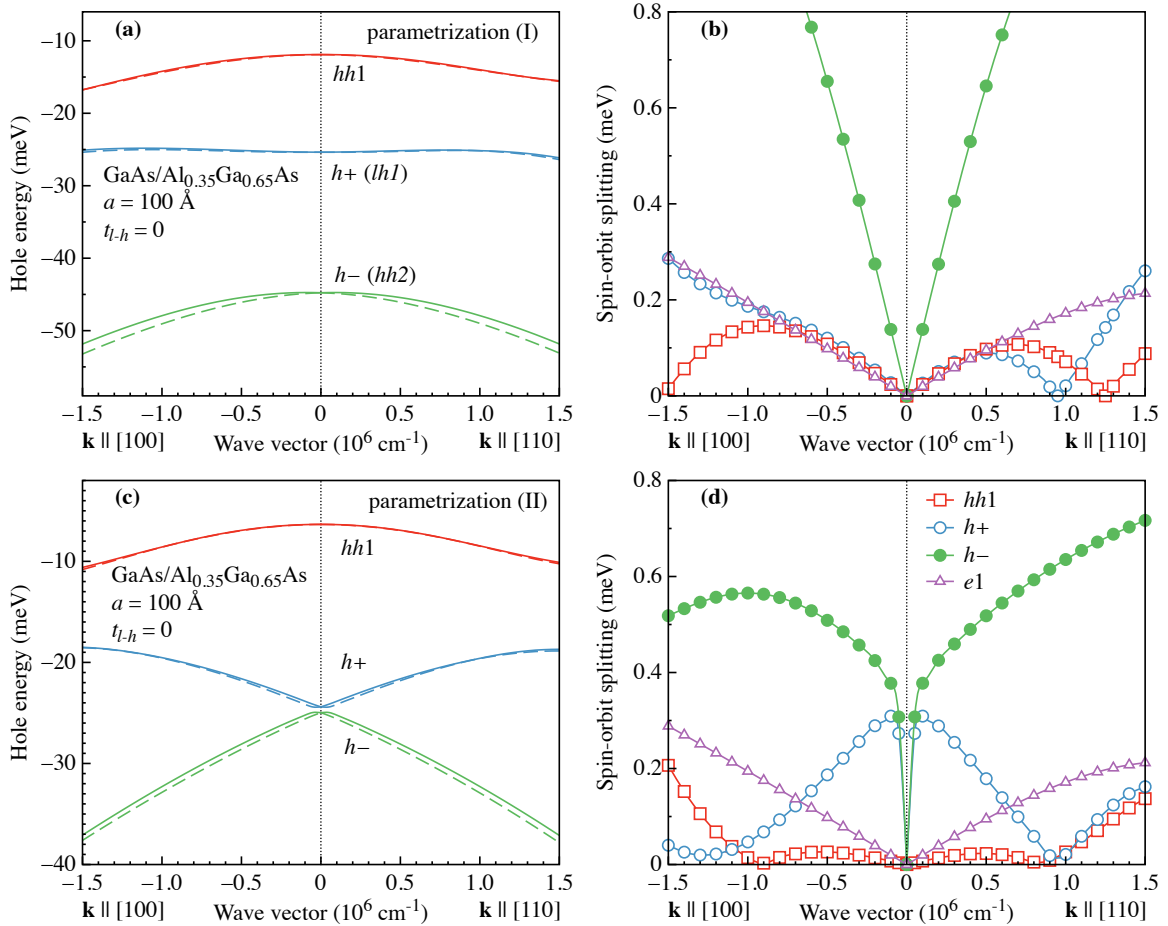


Рис. 1.2: Дисперсии (а, с) и спиновые расщепления (b, d) валентных подзон в квантовой яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As при  $t_{l-h} = 0$ . Расчет выполнен для двух параметризаций (см. табл. 1.2): (I) [панели (а) и (b)] и (II) [панели (с) и (d)]. Для сравнения спиновое расщепление зоны проводимости  $e1$  приведено на панелях (b) и (d).

где  $V(z)$  – квантующий потенциал, определяемый разрывами валентной зоны, и функции  $\Phi(z)$  удовлетворяют граничным условиям Бастарда, см. уравнения (1.30) при  $t_{l-h} = 0$ . Расчет показывает, что энергии первых трех валентных подзон, полученные из (1.32), согласуются с энергиями, полученными в рамках 14-зонной модели с погрешностью  $\leq 5\%$ . Как видно из рис. 1.2(а) и 1.2(с), несмотря на относительно небольшое различие параметров Латтинжера ( $\lesssim 30\%$ ), параметризации (I) и (II) дают существенно различные положения двух нижних подзон ( $lh1$  и  $hh2$ ) при  $k_{\parallel} = 0$ . Набор параметров (II) дает значительно более близкие энергии, чем набор (I). Как будет показано ниже, даже при  $t_{l-h} = 0$  подзоны  $lh1$  и  $hh2$  смешиваются слагаемым  $\propto k_z^3$  в спин-зависимом гамильтониане (1.3), поэтому в дальнейшем мы будем использовать обозначения  $h+$ ,  $h-$  вместо  $lh1$  и  $hh2$ , соответственно.

На рис. 1.3 построены квадраты модулей огибающих, входящих в 14-компонентный столбец  $\Psi_{nj}$ , см. (1.25), для  $n = hh1$  и  $n = lh1$  в квантовой яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As шириной 100 Å. Для наглядности вместо огибающих  $f_{nj,ls}$  на рисунке представлены их линейные комбинации  $f_{nj,N}^{(\pm)}$ , соответствующие каноническому базису блоховских функций (1.14). Верхний индекс  $\pm$  отвечает линейным комбинациям огибающих, соответствующих противоположным значениям спиновых индексов  $m$  и  $m'$ , например,

$$f_{nj,\Gamma_{8v},3/2}^{(\pm)} = \frac{1}{2} (f_{nj,\Gamma_{8v},+3/2} \pm f_{nj,\Gamma_{8v},-3/2}) ,$$

$$f_{nj,\Gamma_{8v},1/2}^{(\pm)} = \frac{1}{2} (f_{nj,\Gamma_{8v},+1/2} \pm f_{nj,\Gamma_{8v},-1/2})$$

и т.д. При  $k_{\parallel} = 0$  энергетические уровни двукратно вырождены по спиновому индексу  $j$ , поэтому в этом случае он выбирался произвольным образом. При  $k_{\parallel} \neq 0$  мы выбирали индекс  $j$ , соответствующий состоянию, нижнему по энергии. Видно, что состояние  $hh1$  при  $k_{\parallel} = 0$  образовано преимущественно функциями  $|\Gamma_{8v}, \pm 3/2\rangle$  и функциями далекой зоны проводимости. В то же время состояние  $lh1$  при  $k_{\parallel} = 0$  состоит в основном из функций  $|\Gamma_{8v}, \pm 1/2\rangle$  и  $|\Gamma_6, \pm 1/2\rangle$ . Движение дырки в плоскости ( $k_{\parallel} \neq 0$ ) смешивает состояния тяжелой и легкой дырки, в частности, в

состоянии  $n = hh1$  присутствует вклад, описываемый огибающей  $f_{hh1,j,\Gamma_{8v},1/2}^{(\pm)}$ , а в состоянии  $n = lh1$  – вклад  $f_{lh1,j,\Gamma_{8v},3/2}^{(\pm)}$  (см. рис. 1.3).

Положения уровней  $h+$  и  $h-$  при наличии интерфейсного смешивания дырок могут быть рассчитаны в рамках гамильтониана Латтинжера с использованием обобщенных граничных условий (1.29). Член с  $t_{l-h}$  в условиях (1.29) эквивалентен следующей поправке в 4-зонный гамильтониан

$$\mathcal{H}_{l-h} = \pm t_{l-h} \left( \hbar^2 / \sqrt{3} m_0 a_0 \right) \{J_x J_y\}_s \delta(z - z_i), \quad (1.33)$$

которая смешивает состояния  $lh1$  и  $hh2$  при  $k_{\parallel} = 0$  [5]. Здесь  $z_i$  обозначает координату правого интерфейса ямы. Энергии смешанных состояний равны

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\varepsilon_{hh2} + \varepsilon_{lh1}}{2} \mp \frac{\Delta}{2}, \quad (1.34)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(\varepsilon_{hh2} - \varepsilon_{lh1})^2 + \Delta_{lh}^2}, \quad (1.35a)$$

$$\Delta_{lh} = 2 \langle lh1, \pm 1/2 | \mathcal{H}_{l-h} | hh2, \mp 3/2 \rangle = 2 \frac{t_{l-h} \hbar^2}{m_0 a_0} \Phi_{hh2}(z_i) \Phi_{lh1}(z_i). \quad (1.35b)$$

В критической точке, когда  $\varepsilon_{hh2} = \varepsilon_{lh1}$ , расщепление между состояниями  $h+$  и  $h-$  равно  $\Delta_{lh}$ , и каждое из состояний состоит в равных долях из  $hh2$  и  $lh1$  (подробнее см. главу 2). Сравнение рисунков 1.2(с) и 1.5(с) показывает, что для параметризации (II) уже упоминавшееся «объемное» смешивание состояний  $hh2$  и  $lh1$  матричным элементом  $\propto k_z^3$  (которое не может быть учтено аналитически при расчете энергий  $h\pm$  в  $\Gamma$ -точке) на порядок меньше, чем интерфейсное смешивание при  $t_{l-h} = 0.5$ . Таким образом, энергии состояний  $h\pm$  при  $k_{\parallel} = 0$ , рассчитанные в рамках 14-зонной модели и 4-зонной модели (1.34), совпадают с высокой точностью.

На рис. 1.4 построены квадраты модулей огибающих состояния  $h+$  в квантовой яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As шириной 100 Å при наличии интерфейсного смешивания ( $t_{l-h} = 0.5$ ). В этом случае для наглядности мы используем базис  $f_{nj,N}^{(x,y)}$ , который



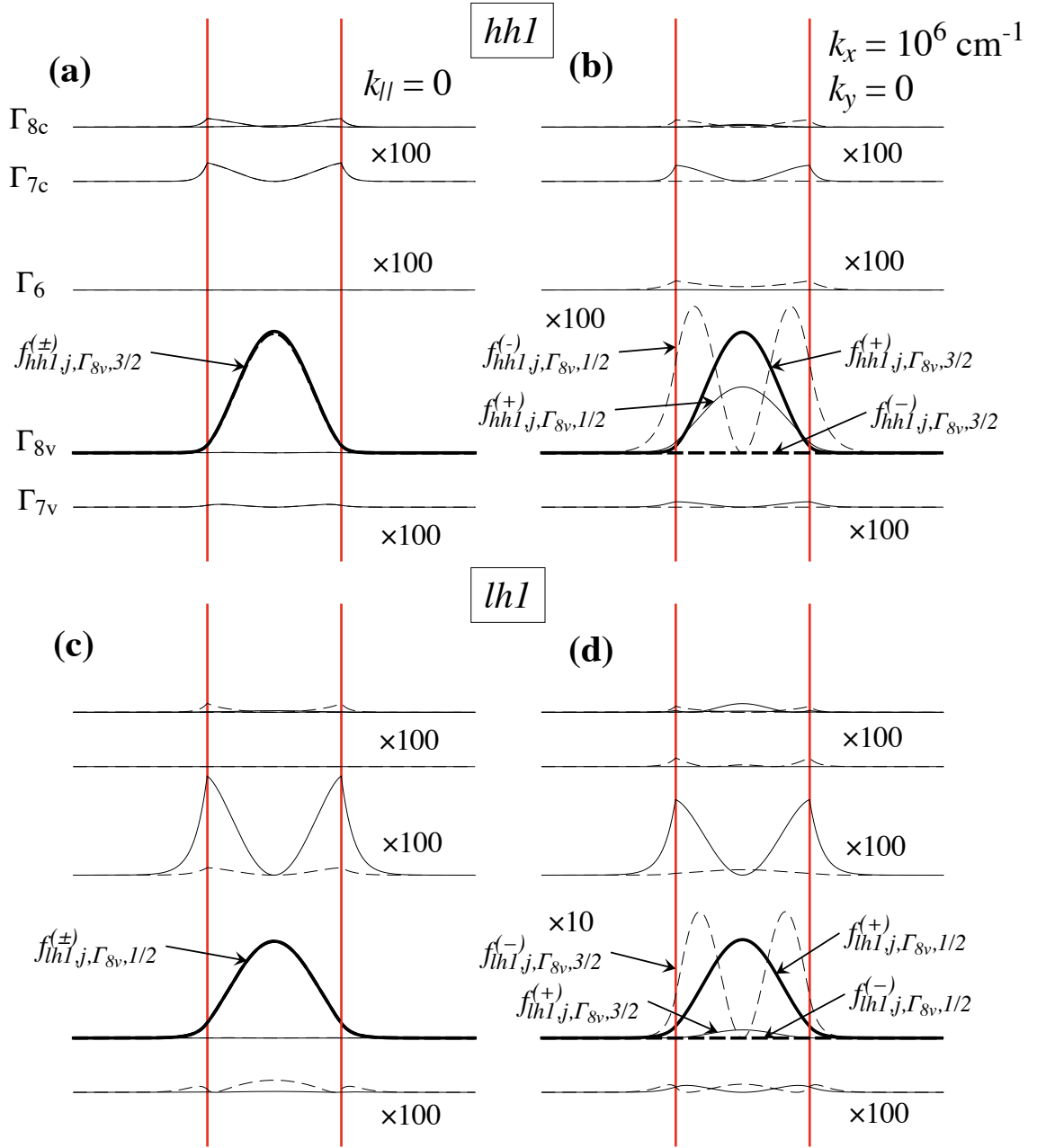


Рис. 1.3: Плавные огибающие волновых функций  $|f_{nj,N}^{(+)}|^2$  (сплошные линии) и  $|f_{nj,N}^{(-)}|^2$  (штриховые линии) для  $n = hh1$  (а, б) и  $n = lh1$  (с, д) в яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As шириной 100 Å ( $t_{l-h} = 0$ ). Результаты представлены для  $k_{\parallel} = 0$  (а, с) и  $k_x = 10^6$  см<sup>-1</sup>,  $k_y = 0$  (б, д) и параметризации (I).

в частном случае  $\Gamma_{8v}, \pm 3/2$  имеет вид

$$\begin{aligned} f_{nj,\Gamma_{8v},3/2}^{(x)} &= \frac{1}{2} (f_{nj,\Gamma_{8v},+3/2} + i f_{nj,\Gamma_{8v},-3/2}) , \\ f_{nj,\Gamma_{8v},3/2}^{(y)} &= \frac{1}{2} (f_{nj,\Gamma_{8v},+3/2} - i f_{nj,\Gamma_{8v},-3/2}) . \end{aligned} \quad (1.36)$$

Расчет приведен для параметризации (II), для которой ширина  $100 \text{ \AA}$  очень близка к критической. Из рис. 1.4 видно, что при такой ширине состояние  $h+$  сформировано в основном четными огибающими  $f_{h+,j,\Gamma_{8v},1/2}^{(x,y)}$  и нечетными огибающими  $f_{h+,j,\Gamma_{8v},3/2}^{(x,y)}$ , соответствующими функциям  $\Phi_{lh1}$  и  $\Phi_{hh2}$  в 4-зонной модели. Стоит также отметить, что, как уже упоминалось выше, граничные условия (1.30) при  $\tilde{t} \neq 0$  не сохраняют непрерывность огибающих в верхней зоне проводимости на интерфейсе. Этот факт проиллюстрирован на вставке к рис. 1.4 для двух огибающих.

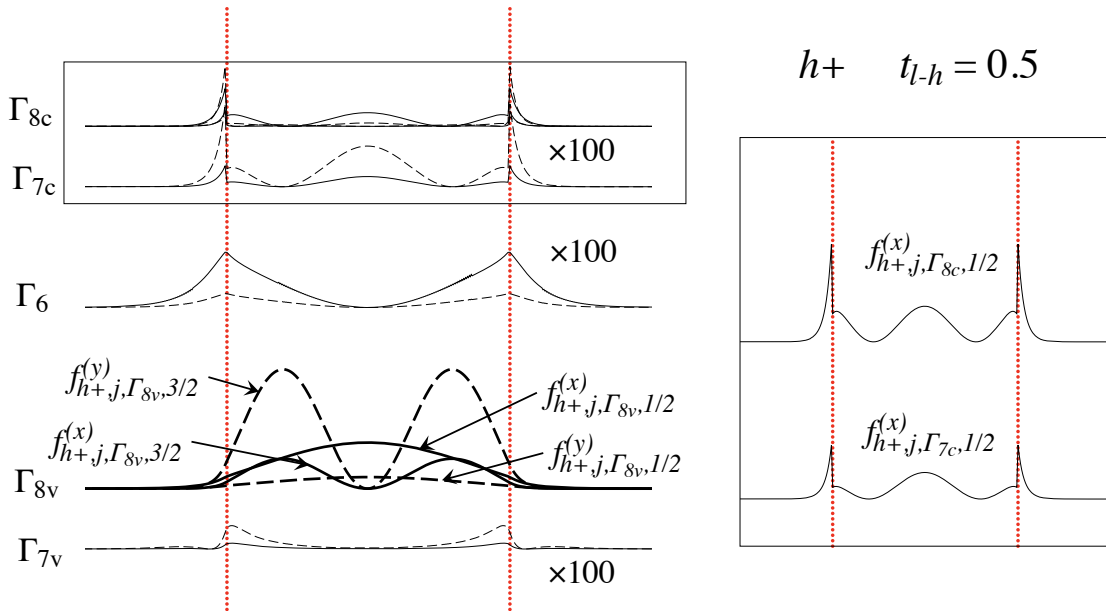


Рис. 1.4: Плавные огибающие волновых функций  $|f_{nj,N}^{(x)}|^2$  (сплошные линии) и  $|f_{nj,N}^{(y)}|^2$  (штриховые линии) подзоны  $n = h+$  в яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As шириной  $100 \text{ \AA}$  при  $t_{l-h} = 0.5$ . Результаты представлены для  $k_{\parallel} = 0$  и параметризации (II). На правой панели приведены увеличенные изображения двух огибающих верхней зоны проводимости.

### 1.4.3 Дисперсии и спиновые расщепления

Перейдем теперь к анализу расчетов дисперсий и спиновых расщеплений, представленных на рисунках 1.2 и 1.5. На панелях (а, с) и (b, d) рисунков 1.2 и 1.5 представлены, соответственно, энергетические дисперсии и спиновые расщепления первых трех дырочных подзон в яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As шириной  $a = 100 \text{ \AA}$ . Расчеты приведены для двух направлений волнового вектора в плоскости ямы  $\mathbf{k}_{\parallel} \parallel [100]$  и  $\mathbf{k}_{\parallel} \parallel [110]$ . При  $k_{\parallel} \lesssim 10^6 \text{ см}^{-1}$  спиновые расщепления линейны по волновому вектору и изотропны. Из рисунка 1.2 (b,d) видно, что даже в отсутствие интерфейсного смешивания линейное по  $\mathbf{k}$  расщепление подзоны  $hh1$  сравнимо с расщеплением зоны проводимости  $e1$  (показано треугольниками). Следует также отметить гигантское линейное по  $\mathbf{k}$  расщепление подзон  $lh1$  и  $hh2$  (или  $h+$  и  $h-$ ), которое особенно выражено для набора параметров (II), для которого эти состояния близки по энергии. Для этого набора параметров линейные члены в подзонах  $h_{\pm}$  заметно превосходят расщепления подзон  $e1$  и  $hh1$ . Учет интерфейсного смешивания состояний тяжелой и легкой дырок в яме с конечными барьерами приводит к существенному увеличению спинового расщепления всех валентных подзон (см. рис. 1.5). Для сравнения спиновое расщепление электрона  $e1$  для  $t_{l-h} = 0$  и  $t_{l-h} = 0.5$  представлено на рис. 1.6; видно, что индуцированная интерфейсным смешиванием поправка в спиновое расщепление электрона не превосходит 10% в узких ямах. Детальный анализ влияния смешивания дырок на вклад ПА в спиновое расщепление зоны проводимости выходит за рамки данной работы [32, 33, 34].

С целью дальнейшего анализа интерфейсного смешивания на рис. 1.7 представлены абсолютные значения константы линейного расщепления  $|\beta_1^{(hh1)}|$  [см. (1.6)] в зависимости от параметра  $t_{l-h}$  для квантовой ямы GaAs/AlAs 85  $\text{\AA}$ . Константа  $\beta_1^{(hh1)}$  обращается в ноль при значениях  $t_{l-h} \approx 0.2$  и  $0.5$  для параметризаций (II) и (I), соответственно; для этих  $t_{l-h}$  вклады в спиновое расщепление, связанные с объемной и интерфейсной инверсионной асимметрией, компенсируют друг друга. Отметим, что эффект компенсации имеет место для положительных значений

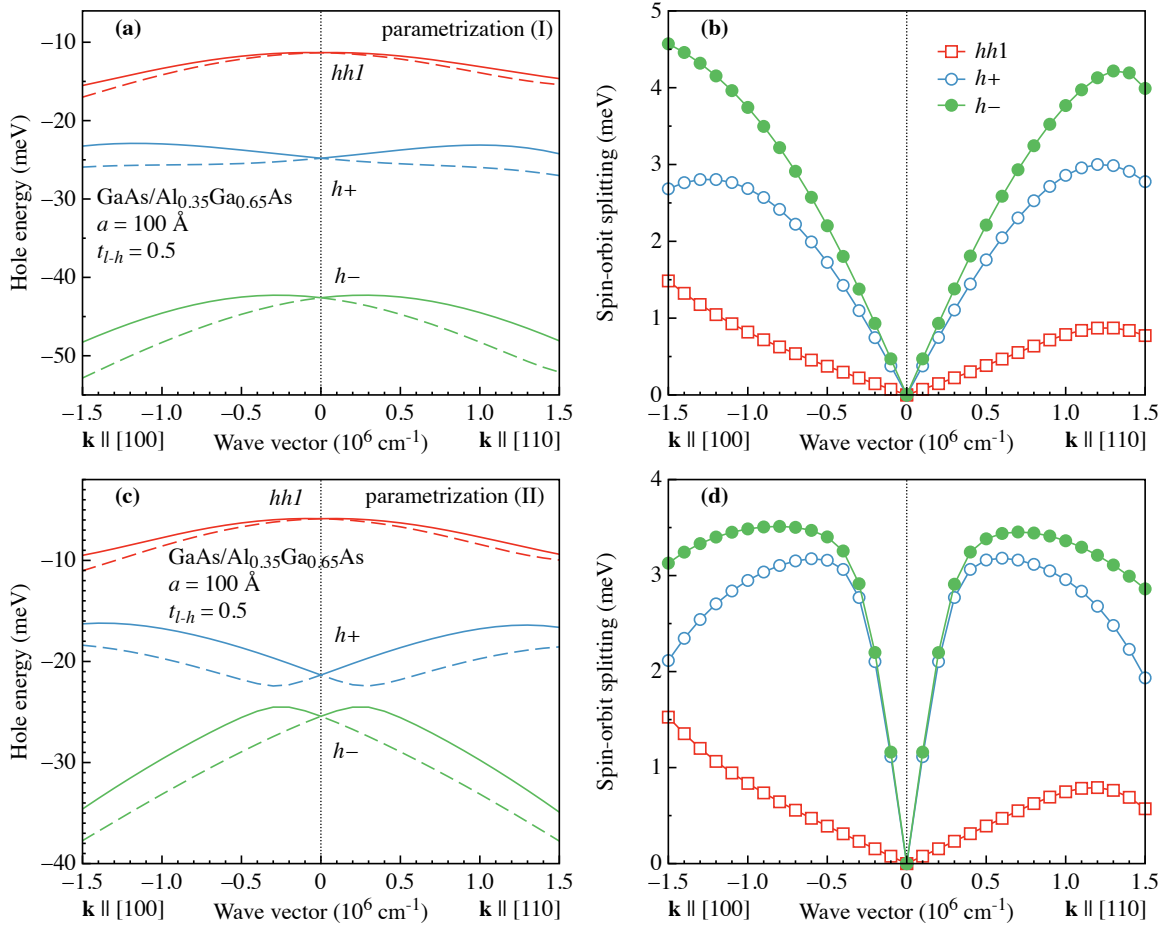


Рис. 1.5: Дисперсии (а, с) и спиновые расщепления (b, d) валентных подзон в квантовой яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As при  $t_{l-h} = 0.5$ . Расчет выполнен для двух параметризаций (см. табл. 1.2): (I) [панели (а) и (b)] и (II) [панели (с) и (d)].

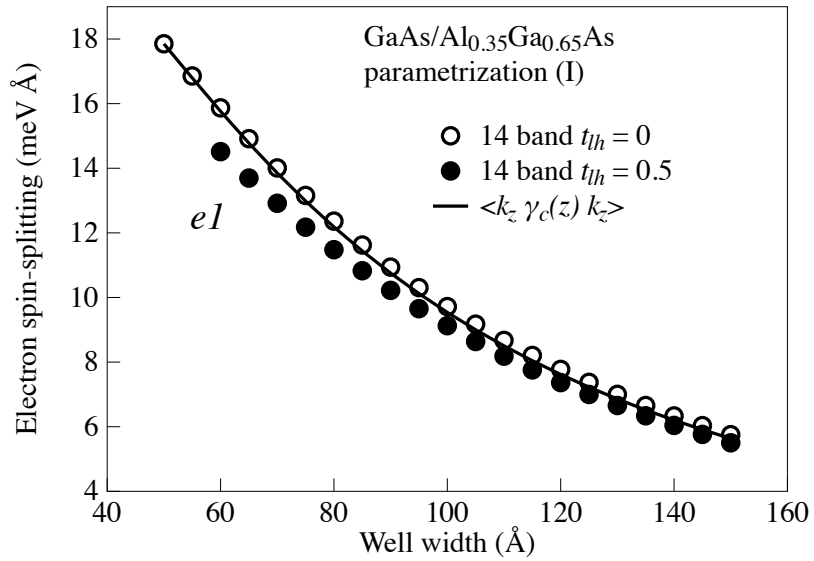


Рис. 1.6: Линейное по  $\mathbf{k}$  спиновое расщепление зоны проводимости  $e1$ . Открытыми и сплошными кругами представлены расчеты в рамках 14-зонной модели для  $t_{l-h} = 0$  и  $t_{l-h} = 0.5$ , соответственно. Сплошной линией показан аналитический расчет в приближении эффективной массы.

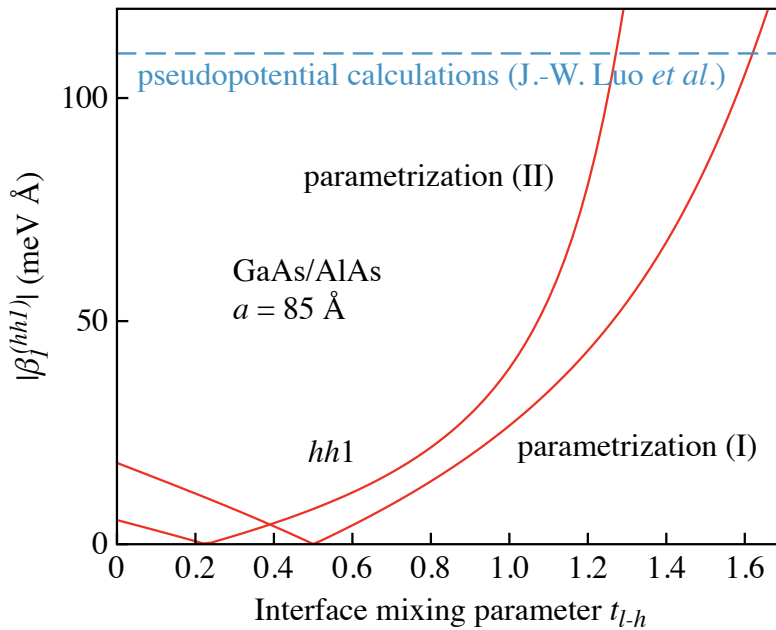


Рис. 1.7: Результаты расчета спинового расщепления тяжелой дырки ( $hh1$ ) в зависимости от силы интерфейсного смешивания для ямы GaAs/AlAs  $85 \text{ \AA}$ . Штриховой линией показаны результаты расчетов методом псевдопотенциала, полученные для той же ямы в работе [44].

$t_{l-h}$ , в то время как при  $t_{l-h} < 0$  абсолютное значение расщепления увеличивается с ростом  $|t_{l-h}|$ . Анализ знака  $t_{l-h}$  выходит за рамки данной работы. Атомистические расчеты спин-орбитального расщепления, выполненные в [44], предсказывают большие значения  $\beta_1^{(hh1)}$  в подзоне  $hh1$ , которые достигают 115 мЭВÅ для ямы GaAs/AlAs шириной 85 Å (см. штриховую горизонтальную линию на рис. 1.7). Расчеты в рамках 14-зонной модели для этой конкретной структуры дают аналогичные значения  $\beta_1^{(hh1)}$  для  $t_{l-h} = 1.2$  [параметризация(II)] и  $t_{l-h} = 1.6$  [параметризация(I)]. Относительно большие значения параметра интерфейсного смешивания в случае ямы GaAs/AlAs соответствуют ожиданиям монотонного роста  $t_{l-h}$  с увеличением концентрации  $x$  алюминия в гетеропаре GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As.

Зависимости констант  $\beta_1^{(n)}$  для трех подзон  $n = hh1, h+$  и  $h-$  при  $t_{l-h} = 0$  от ширины квантовой ямы GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As представлены на рис. 1.8 и 1.9. Стоит отметить существенные различия в поведении констант  $\beta_1^{(h+)}$  и  $\beta_1^{(h-)}$  для параметризаций (I) и (II) (ср. рис. 1.8a и 1.8b): в первом случае наблюдается почти монотонный рост  $\beta_1^{(h\pm)}$  с уменьшением ширины ямы, в то время как во втором случае появляется характерный резкий пик, смещающийся в область более узких ям при росте концентрации  $x$  (подробнее о природе этих пиков см. раздел 1.4.4). В приведенном диапазоне  $a$  коэффициент  $\beta_1^{(hh1)}$  является монотонной функцией ширины ямы, однако при дальнейшем уменьшении  $a$  этот коэффициент достигает максимума и далее падает по мере увеличения проникновения волновой функции в барьеры. Такой спад прослеживается для коэффициента  $\beta_1^{(h+)}$ , рассчитанного в параметризации (I) (см. рис. 1.8a).

Выше мы рассмотрели линейные по  $\mathbf{k}$  спиновые расщепления валентных подзон. Однако из расчетов в 14-зонной модели, представленных на рис. 1.2(b, d) и рис. 1.5(b, d), следует, что при  $k_{\parallel} \sim 10^6$  см<sup>-1</sup> кубические по волновому вектору слагаемые начинают играть заметную роль и приводят к анизотропии спиновых расщеплений. Константы  $\gamma_1^{(n)} = \gamma_2^{(n)}$  и  $\gamma_3^{(n)} = \gamma_4^{(n)}$ , извлеченные из численных расчетов для ямы GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As,  $a = 100$  Å, представлены в табл. 1.4. Видно,

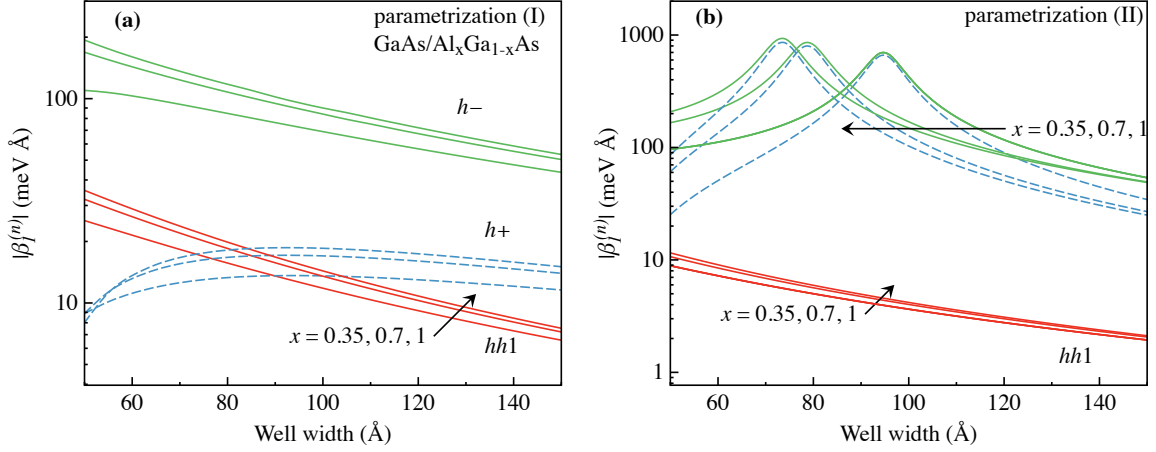


Рис. 1.8: Спин-орбитальная константа  $\beta_1^{(n)}$  для  $n = hh1, h+$  и  $h-$  при  $t_{l-h} = 0$  в ямах GaAs/Al $_x$ Ga $_{1-x}$ As. На рисунке приведены кривые для  $x = 0.35, 0.7$  и  $1$  (направление возрастания  $x$  показано стрелками), а также двух параметризаций [панели (a) и (b)].

что интерфейсное смешивание вносит существенный вклад не только в линейные, но и в кубические по  $\mathbf{k}$  расщепления валентных подзон.

Таблица 1.4: Линейные и кубические по  $\mathbf{k}$  спиновые расщепления валентных подзон в яме GaAs/Al $_{0.35}$ Ga $_{0.65}$ As шириной  $100 \text{ \AA}$ .

|                 | $n$   | $\beta_1^{(n)}$ (мэВÅ) | $\gamma_1^{(n)}$ (эВÅ <sup>3</sup> ) | $\gamma_3^{(n)}$ (эВÅ <sup>3</sup> ) |
|-----------------|-------|------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $t_{l-h} = 0$   | $hh1$ | 12.2                   | -82                                  | -31                                  |
|                 | $h+$  | 13.5                   | -153                                 | 54                                   |
|                 | $h-$  | 67                     | -140                                 | -78                                  |
| $t_{l-h} = 0.5$ | $hh1$ | 36                     | 55                                   | 29                                   |
|                 | $h+$  | 186                    | -412                                 | -677                                 |
|                 | $h-$  | 230                    | -475                                 | -475                                 |

#### 1.4.4 Сравнение аналитического и численного расчета спиновых расщеплений валентных подзон

Численные расчеты спинового расщепления зоны  $hh1$  можно описать в простой аналитической модели, учитывающей три вклада в линейные по  $\mathbf{k}$  члены. Первый из них, присутствующий также в зоне проводимости, в случае подзоны  $hh1$  происходит из членов  $\sum_{\alpha} J_{\alpha}^3 \mathcal{Z}_{\alpha}$  и  $(V_x k_x + V_y k_y) k_z^2$  в спин-зависимом гамильтониане зоны

$\Gamma_{8v}$  (1.3), усредненных по движению вдоль оси  $z$ , и имеет вид

$$\beta_{1;1}^{(hh1)} = \frac{1}{8} \langle k_z [\delta\gamma_v (-3a_2 + a_3)] k_z \rangle, \quad (1.37)$$

где

$$\langle k_z [\delta\gamma_v (-3a_2 + a_3)] k_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{hh1}(z) \hat{k}_z \delta\gamma_v (-3a_2 + a_3) \hat{k}_z \Phi_{hh1}(z).$$

Второй вклад возникает за счет слагаемого  $\propto V_z k_z^3$  в (1.3) при учете смешивания состояний  $hh\nu$  и  $lh\nu$  внедиагональными элементами  $H$  гамильтониана Латтинжера. Волновая функция состояния  $hh1$  при  $k_{\parallel} \neq 0$  в первом порядке по  $k_{\parallel}$  записывается в виде [64] (см. также [65])

$$\Phi_{\pm}^{(hh1)} = \Phi_{hh1}(z) |\Gamma_{8v}, \pm 3/2\rangle \pm i(k_x \pm ik_y) S_h(z) |\Gamma_{8v}, \pm 1/2\rangle, \quad (1.38)$$

где огибающая  $\Phi_{hh1}$  является решением (1.32), а функция  $S_h$  находится из <sup>3</sup>

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m_{lh}} \frac{\partial}{\partial z} + V(z) - \varepsilon_{hh1} \right] S_h(z) = -\frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0 a_0} \left\{ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right\}_s \Phi_{hh1}(z). \quad (1.39)$$

При расчете этого вклада мы сталкиваемся с «опасной» комбинацией матричных элементов оператора  $\delta\gamma_v \hat{k}_z^3$

$$\int dz \Phi_{hh1}(z) \delta\gamma_v \hat{k}_z^3 S_h(z) + \int dz S_h(z) \delta\gamma_v \hat{k}_z^3 \Phi_{hh1}(z).$$

Первая трудность при расчете таких интегралов связана с симметризацией оператора  $\delta\gamma_v \hat{k}_z^3$  при учете разных значений константы  $\delta\gamma_v$  в материале ямы и барьера, которая не может быть выполнена однозначно в силу того, что в оператор входит третья производная по координате  $z$ , и сам оператор  $\hat{k}_z^3$  неэрмитов. Вторая проблема заключается в наличии сингулярности у оператора  $\hat{k}_z^3$  при действии на функции, у которых первая производная терпит разрыв на интерфейсах ямы (последнее связано с разрывом параметров Латтинжера  $\gamma_i$  на интерфейсах). В силу сказанного выше последовательный расчет приведенной суммы может быть выполнен только в приближении бесконечных барьеров. Результат получен в работе [37] и имеет вид:

$$\beta_{1;2}^{(hh1)} = -\frac{1}{2} \delta\gamma_v \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 a_3 \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \left( 1 + \frac{2\sqrt{\nu} \nu + 1}{\pi \nu - 1} \cot \frac{\pi\sqrt{\nu}}{2} \right), \quad (1.40)$$

<sup>3</sup> Аналитические выражения для функций  $\Phi_{hh1}$  и  $S_h$  приведены в главе 2.



где  $\nu = m_{lh}/m_{hh} = (\gamma_1 - 2\gamma_2)/(\gamma_1 + 2\gamma_2)$ . Отметим, что в [37] было положено  $a_3 = a_3^{(0)}$  (см. (1.22) и (1.23)). Для общности приведем также здесь выражения для суммы первых двух вкладов в спиновое расщепление подзон  $lh1$  и  $hh2$  в приближении бесконечных барьеров

$$\beta_1^{(lh1)} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left| \gamma_v + \frac{1}{2} \delta\gamma_v \left[ a_1 + \frac{5}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 + a_3 \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\nu}} \frac{\nu+1}{\nu-1} \cot \frac{\pi}{2\sqrt{\nu}} \right) \right] \right|, \quad (1.41a)$$

$$\beta_1^{(hh2)} = 2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \delta\gamma_v \left| -\frac{3}{4} a_2 + \frac{1}{4} a_3 + a_3 \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\nu}}{\pi} \frac{\nu+1}{\nu-1} \tan \pi\sqrt{\nu} \right) \right|. \quad (1.41b)$$

Третий вклад в линейное по  $\mathbf{k}$  расщепление  $hh1$  индуцирован интерфейсным смешиванием тяжелой и легкой дырок и становится доминирующим при  $|t_{l-h}| \gtrsim 1$ . Он может быть получен при расчете матричного элемента оператора (1.33) на волновых функциях (1.38) и имеет следующий вид [40, 41, 66]

$$\beta_{1;\text{int}}^{(hh1)} = \frac{2t_{l-h}\hbar^2}{m_0 a_0} a \Phi_{hh1}(z_i) S_h(z_i). \quad (1.42)$$

Индукцированный интерфейсами вклад в расщепление подзон  $h\pm$  может быть посчитан в простом резонансном приближении, которое учитывает только подзоны  $h\pm$ . В этом случае константа спинового расщепления записывается в виде [43]

$$\beta_{1;\text{int}}^{(h\pm)} = \pm \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0} \frac{\Delta_{lh}}{\Delta} \left| \langle lh1 \left| \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\}_s \right| hh2 \rangle \right|, \quad (1.43)$$

где

$$\langle lh1 \left| \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\}_s \right| hh2 \rangle = \int \Phi_{lh1}(z) \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\}_s \Phi_{hh2}(z) dz,$$

и энергетические параметры  $\Delta$ ,  $\Delta_{lh}$  введены в (1.35).

Результаты аналитических расчетов перечисленных выше вкладов для подзоны  $hh1$  представлены на рис. 1.9. На панели (b) приведены два набора кривых: первый набор из трех нижних кривых соответствует «объемному» вкладу, рассчитанному в приближении бесконечных барьеров [сумма вкладов (1.37) и (1.40)]; второй набор из двух верхних кривых представляет интерфейсный вклад, рассчитанный по формуле (1.42) для  $t_{l-h} = 0.5$  и конечных барьеров, соответствующих яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As. Для расчетов «объемного» вклада (нижние штриховая

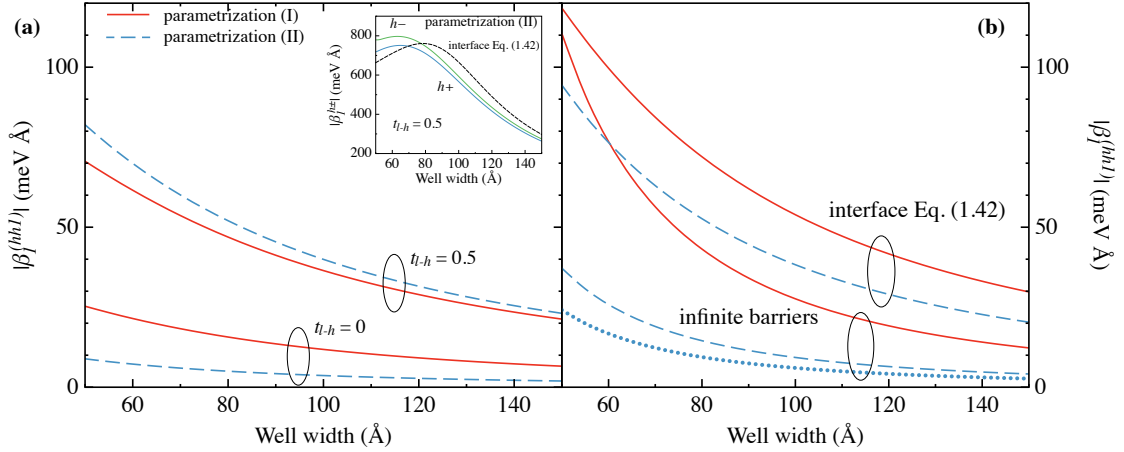


Рис. 1.9: Константа  $\beta_1^{(n)}$  линейного по  $\mathbf{k}$  спинового расщепления подзоны  $hh1$  в квантовой яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As. (a) Численные расчеты в рамках 14-зонной модели для двух наборов параметров (сплошные и штриховые линии) и двух значений параметра интерфейсного смешивания:  $t_{l-h} = 0$  и  $t_{l-h} = 0.5$ . На вставке сплошными линиями приведены результаты расчетов для подзон  $h+$  и  $h-$  при  $t_{l-h} = 0.5$  с использованием параметризации (II). Штриховой линией приведен расчет в резонансном приближении по формуле (1.43). (b) Аналитический расчет  $\beta_1^{(hh1)}$ . Три нижние кривые получены в приближении бесконечно высоких барьеров по формуле (8) работы [37]: сплошная кривая соответствует параметризации (I), точечная и штриховая линии рассчитаны для параметризации (II), соответственно, без учета и с учетом поправок  $\delta a_i$  в (1.23). Две верхние кривые изображают вклад, связанный с интерфейсным смешиванием дырок, рассчитанный по формуле (1.42) при  $t_{l-h} = 0.5$ .

и сплошная линии) использовались параметры  $a_i$  с учетом поправок (1.23). Для сравнения точечная кривая на рис. 1.9(b) рассчитана при  $a_i = a_i^{(0)}$  в соответствии с формулой (8) работы [37] для набора параметров (II). Сравнивая нижние кривые на рис. 1.9(a) и рис. 1.9(b), можно сделать вывод, что модель бесконечных барьеров сильно переоценивает «объемный» вклад в спиновое расщепление, рассчитанный в 14-зонной модели при  $t_{l-h} = 0$ . Это связано, во-первых, с сильно завышенными значениями оператора  $\hat{k}_z^2$ , усредненного с огибающими  $\Phi_{hh1}$ , в случае бесконечных барьеров в сравнении с конечными барьерами, и во-вторых, с переоценкой вклада, связанного с  $V_z k_z^3$ . На вставке к рис. 1.9(a) сплошными линиями показаны константы спинового расщепления подзон  $h\pm$ , рассчитанные в 14-зонной модели для  $t_{l-h} = 0.5$  и параметризации (II). Для сравнения штриховой

линией показан расчет  $\beta_{1;\text{int}}^{(h\pm)}$  по формуле (1.43). Видно, что аналитический расчет в рамках резонансной модели, учитывающей только интерфейсный вклад, дает близкие к численному расчету значения – расхождение связано в первую очередь с неучтенным вкладом  $V_z k_z^3$ , который главным образом приводит к изменению энергий подзон  $h\pm$  при  $k_{\parallel} = 0$  и, соответственно, энергетического знаменателя в (1.43).

## 1.5 Краткие итоги

В Главе 1 получены следующие результаты:

- Развита 14-зонная ***kp*** модель для расчета спиновых расщеплений дырочных подзон в квантовых ямах. Предложены простейшие граничные условия, учитывающие анизотропию химических связей на интерфейсах и приводящие к смешиванию тяжелых и легких дырок.
- Рассчитаны энергетические дисперсии и спиновые расщепления валентных подзон. Показано, что линейное по волновому вектору дырки  $\mathbf{k}$  спин-орбитальное расщепление основной подзоны тяжелых дырок ( $hh1$ ) в ямах GaAs/AlGaAs может быть сравнимым с линейным по  $\mathbf{k}$  расщеплением зоны проводимости даже в отсутствии интерфейсного смешивания дырок.
- Показано, что учет интерфейсного смешивания тяжелых и легких дырок приводит к заметному увеличению линейных по  $\mathbf{k}$  членов в валентных подзонах. Большие значения спинового расщепления тяжелой дырки,  $\beta_1^{(hh1)} \approx 115$  мэВÅ, предсказанные в [44] для ямы GaAs/AlAs на основе атомистических расчетов, могут быть получены в рамках 14-зонной модели с учетом существенного ( $t_{l-h} \sim 1.5$ ) интерфейсного смешивания тяжелой и легкой дырок в этой системе.

## Глава 2

# Гигантское зеемановское расщепление легкой дырки в квантовых ямах

### 2.1 Введение

Гиромагнитное отношение, фактор Ланде или  $g$ -фактор является фундаментальным параметром, который связывает магнитный момент частицы с ее спином и определяется расщеплением спиновых подуровней частицы в магнитном поле. Небольшое отклонение  $g$ -фактора свободного электрона от 2 связано с квантово-электродинамическими поправками [67, 68, 69]. Гораздо более существенная перенормировка  $g$ -фактора обусловлена спин-орбитальным взаимодействием, проявляющимся как для электрона, локализованного на атомных оболочках [70], так и для электрона в полупроводниковом кристалле [71]. В последнем случае значение  $g$ -фактора электрона в зоне проводимости может сильно отличаться от  $g$ -фактора свободного электрона, варьируясь в широком диапазоне от больших по модулю отрицательных значений в узкозонных полупроводниках (например,  $g_e \approx -50$  в InSb) до близких к 2 значениям в таких материалах, как Si. Спин-орбитальное взаимодействие в объемных полупроводниках с выделенной кристаллографической осью (например, решетка вюрцита) приводит к анизотропной перенормировке  $g$ -фактора электрона, см., например, [72]. В структурах с квантовыми ямами

размерное квантование приводит к дополнительной перенормировке  $g$ -фактора электрона, которая в частности отвечает за изменение знака  $g$ -фактора при вариации ширины квантовой ямы GaAs/AlGaAs, а также анизотропию его компонент [73, 74].  $g$ -фактор электрона в низкоразмерных структурах хорошо исследован как экспериментально, так и теоретически, см., например, [75, 76, 77], а также литературу, цитируемую в книге [18]. Что касается валентной зоны, то ее сложная структура в полупроводниках с решеткой цинковой обманки, а также размерное квантование делают расчет  $g$ -фактора дырки нетривиальной задачей.

Эффект Зеемана для дырочных подзон  $hh\nu$ ,  $lh\nu$  можно представить в виде

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mu_B \sigma_\alpha B_\beta, \quad (2.1)$$

где  $g_{\alpha\beta}$  – компоненты тензора  $g$ -фактора,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  – магнитное поле,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  – вектор, составленный из матриц Паули, и  $\mu_B$  – магнетон Бора. Для тяжелых дырок теоретический расчет продольной компоненты  $g$ -фактора  $g_{zz}$ , где  $z$  – ось роста ямы, в симметричных квантовых ямах и сверхрешетках, а также его сравнение с экспериментами были выполнены в работах [62, 78]. В работе [79] теоретически предсказана большая перенормировка  $g_{zz}$  для подзоны  $hh1$  в гибридной деформированной яме в присутствии электрического поля, когда состояния  $lh1$  и  $hh1$  близки по энергии. В работе [80] экспериментально наблюдалось изменение продольной компоненты  $g$ -фактора тяжелой дырки в квантовых точках SiGe при изменении внешнего электрического поля, которое связывалось с магнитоиндуцированным подмешиванием состояний легкой дырки  $lh\nu$ .

Большие значения продольного  $g$ -фактора легкой дырки ( $g_{lh1}$ ) в квантовых ямах наблюдались в ряде экспериментов, включающих в себя измерения спектров магнитофотолюминесценции [81, 82, 83], квантовых биений между спиновыми подуровнями экситона [84], дифференциальную спектроскопию магнитопротускания [85] и магнитоотражения [86], а также измерения магнито-оптического эффекта Керра [87]. Полученные в перечисленных работах значения  $g_{lh1}$  (см. табл. 2.1) существенно превышают значения  $g$ -фактора тяжелой дырки и электрона, наблю-

даемые в ямах типа GaAs/AlGaAs. Теоретический расчет  $g$ -фактора легких дырок в структурах с квантовыми ямами проводился, однако, только для компонент  $g_{xx} = g_{yy}$  в плоскости ямы (латеральный, или поперечный, эффект Зеемана) [88], в то время как теоретический анализ продольной компоненты  $g_{zz}$  отсутствует.

В данной главе развита теория эффекта Зеемана для состояний легкой дырки в квантовых ямах в продольном магнитном поле. Показано, что близость основного состояния легкой дырки ( $lh1$ ) и первого возбужденного состояния тяжелой дырки ( $hh2$ ) приводит к гигантской перенормировке  $g$ -фактора легкой дырки, подобно существенному увеличению линейных по  $\mathbf{k}$  членов в дисперсии этих подзон, рассмотренных в главе 1. Построена теория зеемановского расщепления пары уровней  $lh1$ ,  $hh2$  в присутствии интерфейсного смешивания этих состояний, которая предсказывает наличие нелинейного по магнитному полю вклада в эффект Зеемана. Развита теория зеемановского эффекта на экситоне с легкой дыркой с учетом смешивания дырочных состояний на интерфейсах. Показано, что кулоновское взаимодействие между электроном и дыркой приводит к линейному по магнитному полю расщеплению спиновых подзон экситона даже в ямах с критической шириной. Результаты расчетов, учитывающих экситонные эффекты, удовлетворительно описывают данные экспериментов в квантовых ямах GaAs/AlGaAs, InGaAs/InP и CdTe/CdMgTe.

## 2.2 $g$ -фактор в резонансном приближении

В главе 1 было указано, что в полупроводниках с решеткой цинковой обманки состояния электрона в вершине валентной зоны преобразуются по четырехмерному спиновому представлению  $\Gamma_8$  точечной группы  $T_d$ , а соответствующие базисные функции при операциях симметрии выражаются друг через друга аналогично волновым функциям полного момента  $J = 3/2$ . В рамках такого подхода зеемановское взаимодействие дырки с магнитным полем  $\mathbf{B}$  в объемном материале описывается

Таблица 2.1: Экспериментальные данные по  $g$ -фактору легкой дырки, анализируемые в этой главе

| Структура                                     | Ширина ямы | $g_{lh1}$ | Ссылка   |
|---|------------|-----------|----------|
| GaAs/Al <sub>0.3</sub> Ga <sub>0.7</sub> As   | 30 Å       | 1.4*      | [84]     |
|   | 120 Å      | 2.9*      | [84]     |
|   | 150 Å      | 4*        | [81]     |
| GaAs/Al <sub>0.36</sub> Ga <sub>0.64</sub> As | 20 ÷ 180 Å | 2 ÷ 6     | [86]     |
|   | 180 Å      | -9.4      | [83]     |
| GaAs/Al <sub>0.33</sub> Ga <sub>0.67</sub> As | 43 ÷ 140 Å | 6 ÷ 9     | [87]     |
| In <sub>0.53</sub> Ga <sub>0.47</sub> As/InP  | 100 Å      | 8.9 ± 1.2 | [85]     |
| CdTe/Cd <sub>0.74</sub> Mg <sub>0.26</sub> Te | 75 Å       | -3        | [82, 89] |

\* Абсолютное значение  $g_{lh1}$

матричным оператором [47]

$$\mathcal{H}_0 = -2\mu_B[\varkappa(\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) + q(J_x^3 B_x + J_y^3 B_y + J_z^3 B_z)]. \quad (2.2)$$

Здесь оси  $x||[100]$ ,  $y||[010]$ ,  $z||[001]$ ,  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  – вектор, составленный из матриц момента  $J = 3/2$ ,  $\mu_B$  – магнетон Бора,  $\varkappa$  и  $q$  – параметры зонной структуры. В дальнейшем малый вклад, пропорциональный константе  $q$  [90] и ответственный за анизотропное зеемановское расщепление, не учитывается. Константа  $\varkappa$  связана с параметрами Латтинжера  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) [91, 92]:

$$\varkappa = \frac{1}{3}(2\gamma_2 + 3\gamma_3 - \gamma_1 - 2) \quad (2.3)$$

или в 14-зонной  $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -модели (см. табл. 1.1)

$$\varkappa = \frac{1}{3} \left[ \frac{m_0}{\hbar^2} \left( \frac{P^2}{E_g} - \frac{Q^2}{E_g + E'_g} \right) - 2 \right]. \quad (2.4)$$

В кристалле GaAs  $\varkappa = 1.2$  [36].

При одноосной деформации объемного кристалла или в случае размерного квантования в квантовой яме состояния тяжелых и легких дырок (с проекциями  $\pm 3/2$  и  $\pm 1/2$  углового момента на ось деформации или ось роста ямы) в  $\Gamma$ -точке расщепляются. Согласно (2.2) зеемановское расщепление этих состояний

составляет  $-6\kappa\mu_B B$  и  $-2\kappa\mu_B B$ , соответственно, так что легкие дырки характеризуются эффективным  $g$ -фактором  $g_{\text{eff}} = -2\kappa$ . В этой главе будет показано, что  $g$ -фактор легких дырок  $lh1$  существенно отличается от величины  $-2\kappa$ , где параметр  $\kappa$  усреднен по распределению огибающей волновой функции дырки в материалах квантовой ямы и примыкающих барьеров. Причина гигантской перенормировки  $g_{lh1}$  связана с тем, что в квантовых ямах типа GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As подзоны  $lh1$  и  $hh2$  в  $\Gamma$ -точке близки по энергии (см. подробнее раздел 1.4.2). Эти подзоны смешиваются за счет недиагональных компонент  $H = -\sqrt{3}\hbar^2\gamma_3\hat{k}_z(k_x - ik_y)/m_0$  и  $H^*$  гамильтониана Латтинжера (1.17) (здесь и далее мы работаем в дырочном представлении), где  $\hat{k}_z = -i\partial/\partial z$ . В магнитном поле  $\mathbf{B} \parallel z \parallel [001]$  циклические компоненты волнового вектора  $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$ , входящие в операторы  $H$  и  $H^*$ , должны быть записаны в виде  $k_{\pm} - |e|/(c\hbar)A_{\pm}$ , где  $A_{\pm} = A_x \pm iA_y$ ,  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал поля,  $e$  – заряд электрона и  $c$  – скорость света. Учет поправки, пропорциональной  $\mathbf{A}$ , приводит к магнитоиндуцированному смешиванию состояний  $lh1$  и  $hh2$  и вкладу в  $g$ -фактор легкой дырки. Отметим, что в отличие от тонкой структуры спиновых подуровней дырки в нулевом магнитном поле, рассмотренной в главе 1, анализируемые ниже вклады в спиновое расщепление дырок в магнитном поле имеют место и в средах с центром пространственной инверсии. Отсюда следует, что для их описания не требуется использование 14-зонной модели, и достаточно ограничиться 4-зонной моделью, описываемой гамильтонианом Латтинжера <sup>1</sup>.

В этом разделе мы будем использовать резонансное приближение, считая, что расстояние между уровнями размерного квантования  $lh1$  и  $hh2$  много меньше, чем расстояние до других уровней  $lh\nu$  и  $hh\nu$ . Мы также ограничимся рассмотрением достаточно малых магнитных полей – таких, что зеемановское расщепление уровней  $lh1$  и  $hh2$  не превосходит расстояния между ними (выход за рамки этих приближений будет рассмотрен в разделах 2.3 и 2.4). Смешиванием подзон  $lh1$  и  $hh2$  кубическими членами  $V_z k_z^3$ , обсуждавшимися в разделах 1.4.1 и 1.4.4, здесь и

---

<sup>1</sup>Более того, возможно даже использование сферического приближения  $\gamma_2 = \gamma_3$ .



далее пренебрегается. Во втором порядке  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  теории возмущений зеемановский сдвиг подуровней легкой дырки с проекцией углового момента  $\pm 1/2$  записывается как

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{lh1,+1/2} &= \frac{\langle lh1, +1/2 | H^* | hh2, +3/2 \rangle \langle hh2, +3/2 | H | lh1, +1/2 \rangle}{\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2}}, \\ \Delta\varepsilon_{lh1,-1/2} &= \frac{\langle lh1, -1/2 | -H | hh2, -3/2 \rangle \langle hh2, -3/2 | -H^* | lh1, -1/2 \rangle}{\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $|lh1\rangle \equiv \Phi_{lh1}$  и  $|hh2\rangle \equiv \Phi_{hh2}$  – волновые функции размерного квантования дырки вдоль оси роста  $z$ ,  $\varepsilon_{lh1}$  и  $\varepsilon_{hh2}$  – энергии размерного квантования состояний  $lh1$  и  $hh2$  в квантовой яме при  $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$  (в дырочном представлении  $\varepsilon_{lh1}, \varepsilon_{hh2}$  положительны). Используя явное выражение для оператора  $H$ , а также калибровку  $\mathbf{A} = 1/2 [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]$  для векторного потенциала, получим следующее выражение для  $g$ -фактора легкой дырки  $lh1$

$$g_{lh1} = -2\kappa + \frac{\Delta\varepsilon_{lh1,+1/2} - \Delta\varepsilon_{lh1,-1/2}}{\mu_B B_z} = -2\kappa + 12 \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{\left| \langle hh2 \left| \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\}_s \right| lh1 \rangle \right|^2}{\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2}}. \quad (2.6)$$

При выводе этого выражения учитывались только линейные по магнитному полю слагаемые, а также использовались следующие коммутационные соотношения между циклическими компонентами координаты и волнового вектора  $r_+ k_- - k_+ r_- = 2i - 2i [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]_z$ . Выражение (2.6) легко обобщается для расчета  $g$ -фактора тяжелых дырок  $hh1$  для гибридной деформированной квантовой ямы, рассмотренной в работе [79], в которой в резонансе могут оказаться состояния  $lh1$  и  $hh1$ . При этом матричный элемент  $\langle hh1 | \gamma_3 \hat{k}_z | lh1 \rangle$  отличен от нуля за счет асимметрии структуры или внешнего электрического поля, приложенного вдоль оси роста. Отметим также, что эффективный  $g$ -фактор подзоны тяжелых дырок  $hh2$  записывается в виде

$$g_{hh2} = -6\kappa + 12 \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{\left| \langle hh2 \left| \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\}_s \right| lh1 \rangle \right|^2}{\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2}}. \quad (2.7)$$

Примечательно, что (2.7) получается из (2.6) заменой  $\kappa$  на  $3\kappa$ , а знак вклада, обусловленного смешиванием дырок, при этом не меняется.

Отметим, что в отличие от рассматриваемой здесь геометрии  $\mathbf{B} \parallel z$ , магнитное поле, приложенное в плоскости ямы, может быть описано векторным потенциалом  $\mathbf{A} = (B_y z, -B_x z, 0)$ , пропорциональным  $z$ . В этом случае компонента  $H$  гамильтониана Латтинжера инвариантна к замене  $z \rightarrow -z$ , в симметричной яме состояния  $lh1$  и  $hh2$  не смешиваются магнитным полем, и резонансный вклад в латеральный  $g$ -фактор в симметричных ямах отсутствует.

В частном случае ямы с бесконечно высокими барьерами имеем

$$\varepsilon_{lh1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_0 a^2} (\gamma_1 + 2\gamma_2), \quad \varepsilon_{hh2} = \frac{4\hbar^2 \pi^2}{2m_0 a^2} (\gamma_1 - 2\gamma_2),$$

где  $a$  – ширина ямы, а матричный элемент

$$\langle hh2 | \gamma_3 \hat{k}_z | lh1 \rangle = \frac{2}{a} \left\langle \sin \frac{2\pi z}{a} \left| \gamma_3 \hat{k}_z \right| \cos \frac{\pi z}{a} \right\rangle = \frac{8i\gamma_3}{3a}.$$

Из формулы (2.6) следует, что в этом приближении  $g$ -фактор не зависит от ширины ямы и равен

$$g_{lh1} = -2\kappa + \frac{512}{3\pi^2} \frac{\gamma_3^2}{10\gamma_2 - 3\gamma_1}. \quad (2.8)$$

Расчеты  $g$ -фактора легкой дырки чрезвычайно чувствительны к параметризации гамильтониана Латтинжера, поэтому здесь, также как и в главе 1, мы будем использовать две различные параметризации для GaAs, сведенные в табл. 2.2. Оценка по формуле (2.8) дает  $g_{lh1} \approx -48$  для параметризации (A) и  $g_{lh1} \approx 42$  для параметризации (B), таким образом, небольшое изменение параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  приводит к существенному изменению  $g_{lh1}$ .

В этом разделе продемонстрировано, что энергетическая близость возбужденной подзоны тяжелой дырки и основной подзоны легкой дырки приводит к существенному увеличению их зеемановского расщепления. Подобный эффект для линейных по  $\mathbf{k}$  спин-зависимых членов в гамильтониане подзон  $h_{\pm}$  обсуждался в главе 1, см. рис. 1.9(a) и формулу (1.43). В реальных системах абсолютные величины и даже знак эффективного  $g$ -фактора существенно зависят от высоты барьера, ширины ямы, а также микроскопической симметрии интерфейсов. Кроме того, при больших значениях  $|g_{lh1}|$  зеемановское расщепление становится нели-

Таблица 2.2: Различные параметризации гамильтониана Латтинжера, используемые здесь в расчетах  $g$ -факторов. Величины  $\gamma_i$  для параметризаций А и В рассчитаны с использованием параметров 14-зонной модели, см. формулы в табл. 1.1. Для расчета  $\gamma_i$ ,  $\varkappa$  и ширины запрещенной зоны твердых растворов использовались, соответственно, линейная и параболическая интерполяции. Параметры Латтинжера раствора CdMgTe взяты такими же, как для CdTe.

| Пар-ры | Материал                                 | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ | $\Delta E_v$<br>(мэВ) | $\varkappa$ |
|--------|--|------------|------------|------------|-----------------------|-------------|
| A [59] | GaAs                                     | 8.5        | 2.08       | 3.53       | –                     | 1.2         |
| A [59] | Al <sub>0.35</sub> Ga <sub>0.65</sub> As | 7.17       | 1.52       | 2.9        | 168                   | 0.82        |
| B [35] | GaAs                                     | 7.5        | 2.7        | 3.4        | –                     | 1.2         |
| B [35] | Al <sub>0.35</sub> Ga <sub>0.65</sub> As | 6.19       | 2.04       | 2.71       | 168                   | 0.82        |
| C [93] | In <sub>0.53</sub> Ga <sub>0.47</sub> As | 13.7       | 5.95       | 5.95       | 354                   | 4.63        |
| C [93] | InP                                      | 5          | 1.84       | 1.84       | –                     | 0.97        |
| D [94] | CdTe                                     | 4.72       | 1.29       | 1.85       | –                     | 0.47        |
| D [94] | Cd <sub>0.74</sub> Mg <sub>0.26</sub> Te | 4.72       | 1.29       | 1.85       | 133                   | 0.47        |

нейной функцией магнитного поля уже в области умеренных полей. Эти эффекты последовательно обсуждаются в следующих разделах.

## 2.3 Выход за рамки резонансного приближения. Многоуровневая модель

В приближении ямы с бесконечно высокими барьерами возможно получить аналитическое выражение для  $g_{lh1}$  с учетом магнитоиндуцированного смешивания легкой дырки со всеми состояниями  $hh, 2n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

$$g_{lh1} = -2\varkappa + 12 \frac{\hbar^2}{m_0} \sum_n \frac{\left| \langle hh, 2n | \gamma_3 \hat{k}_z | lh1 \rangle \right|^2}{\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh,2n}} =$$

$$= -2\varkappa + 6 \frac{\gamma_3^2}{\gamma_2} \left( 1 + \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{\nu}}{1 - \nu} \cot \frac{\pi}{2\sqrt{\nu}} \right), \quad (2.9)$$

где  $\nu = (\gamma_1 - 2\gamma_2)/(\gamma_1 + 2\gamma_2)$ . Аналогичные выражения для подзон  $hh1$  и  $hh2$  имеют вид

$$\begin{aligned} g_{hh1} &= -6\kappa + 6\frac{\gamma_3^2}{\gamma_2} \left( 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{\nu}}{1-\nu} \cot \frac{\pi\sqrt{\nu}}{2} \right), \\ g_{hh2} &= -6\kappa + 6\frac{\gamma_3^2}{\gamma_2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\nu}}{1-\nu} \tan \pi\sqrt{\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Оценка по формулам (2.9) и (2.10) дает  $g_{lh1} \approx -48.7$ ,  $g_{hh1} \approx -2.3$ ,  $g_{hh2} \approx -45$  для параметризации (А) и  $g_{lh1} \approx 40$ ,  $g_{hh1} \approx -2.9$ ,  $g_{hh2} \approx 44$  для параметризации (В). Сравнивая оценки  $g_{lh1}$ , полученные по формулам (2.8) и (2.9), мы видим, что основной вклад в  $g$ -фактор вносит смешивание уровней  $lh1$  и  $hh2$  и, следовательно, применение резонансной модели в этом случае оправдано.

Продольная компонента  $g$ -фактора тесно связана с эффективной массой дырки при движении в плоскости ямы [85]. Поскольку перенормировка обоих параметров имеет одну и ту же микроскопическую природу,  $g_{lh1}$  и  $g_{hh1,2}$  могут быть связаны с массами  $m_{lh1}$  и  $m_{hh1,2}$  простыми соотношениями

$$g_{lh1} = 2 \left( -\kappa - \gamma_1 + \gamma_2 + \frac{m_0}{m_{lh1}} \right), \quad g_{hh1,2} = 2 \left( -3\kappa + \gamma_1 + \gamma_2 - \frac{m_0}{m_{hh1,2}} \right). \quad (2.11)$$

Перейдем теперь к рассмотрению ямы с конечными барьерами. В этом случае в сумме (2.9) нужно учитывать состояния как дискретного, так и непрерывного спектров. Существует однако более элегантный способ расчета  $g$ -фактора. Для этого сначала запишем волновые функции состояний  $lh1$  и  $hh1$  с учетом линейного по  $\mathbf{k}_{\parallel}$  смешивания элементами  $H$  и  $H^*$  гамильтониана Латтинжера (см. также главу 1)

$$\Phi_{\pm}^{(l)} = C_l(z) |\pm 1/2\rangle \mp i(k_{\mp} a) S_l(z) |\pm 3/2\rangle, \quad (2.12a)$$

$$\Phi_{\pm}^{(h)} = C_h(z) |\pm 3/2\rangle \pm i(k_{\pm} a) S_h(z) |\pm 1/2\rangle, \quad (2.12b)$$

где  $C_l(z) \equiv |lh1\rangle$  и  $C_h(z) \equiv |hh1\rangle$ . Функции  $C_{l,h}(z)$  удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_1 \pm 2\gamma_2) \frac{\partial}{\partial z} + V(z) \right] C_{l,h}(z) = \varepsilon_{l,h} C_{l,h}(z) \quad (2.13)$$

и имеют вид

$$C_{l,h}(z) = \mathcal{N}_{l,h} \begin{cases} \cos k_{l,h}z, & |z| < a/2 \\ \cos(k_{l,h}a/2) e^{-\varkappa_{l,h}(|z|-a/2)}, & |z| > a/2 \end{cases}, \quad (2.14)$$

где

$$k_{l,h} = \sqrt{\frac{2m_0\varepsilon_{l,h}}{\hbar^2(\gamma_1 \pm 2\gamma_2)}}, \quad \varkappa_{l,h} = \sqrt{\frac{2m_0(V_0 - \varepsilon_{l,h})}{\hbar^2(\gamma_1 \pm 2\gamma_2)}}.$$

Здесь  $\mathcal{N}_{l,h}$  – нормировочный множитель,  $\varepsilon_l \equiv \varepsilon_{lh1}$  и  $\varepsilon_h \equiv \varepsilon_{hh1}$  – энергии состояний  $|lh1\rangle$  и  $|hh1\rangle$ ,  $V(z) = 0$ , при  $|z| < a/2$  и  $V(z) = V_0$  при  $|z| > a/2$  – квантующий потенциал ямы. Высота барьера  $V_0$  равна разрыву валентной зоны на гетероинтерфейсе. Для шивки  $C_{l,h}$  и  $S_{l,h}$  на интерфейсах используется непрерывность столбцов  $\Phi_{\pm}^{(l,h)}$  и  $\hat{v}_z \Phi_{\pm}^{(l,h)}$ , где  $\hat{v}_z$  – оператор скорости. Для функции  $C_{l,h}$  такие условия с точностью до членов второго порядка по  $ka$  дают стандартные граничные условия Бастарда [95].

Нечетные по  $z$  функции  $S_{l,h}(z)$  удовлетворяют следующему уравнению

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_1 \mp 2\gamma_2) \frac{\partial}{\partial z} + V(z) - \varepsilon_{l,h} \right] S_{l,h}(z) = -\frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0a} \left\{ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right\}_s C_{l,h}(z). \quad (2.15)$$

Здесь верхний знак соответствует  $S_l$ , а нижний –  $S_h$ , фигурные скобки обозначают симметризованное произведение  $\left\{ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right\}_s = \frac{1}{2} (\gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \gamma_3)$ . С учетом (2.14) решения уравнения (2.15) могут быть представлены в виде

$$S_l = \begin{cases} A_1^{(l)} \sin(k_l z / \sqrt{\nu}) + A_2^{(l)} \sin k_l z, & |z| < a/2 \\ \left[ B_1^{(l)} e^{-\varkappa_l(|z|-a/2)/\sqrt{\nu}} + \right. \\ \left. + B_2^{(l)} \cos(k_l a/2) e^{-\varkappa_l(|z|-a/2)} \right] \text{sign}(z), & |z| > a/2 \end{cases}, \quad (2.16a)$$

$$S_h = \begin{cases} A_1^{(h)} \sin(k_h \sqrt{\nu} z) + A_2^{(h)} \sin k_h z, & |z| < a/2 \\ \left[ B_1^{(h)} e^{-\varkappa_h \sqrt{\nu}(|z|-a/2)} + \right. \\ \left. + B_2^{(h)} \cos(k_h a/2) e^{-\varkappa_h(|z|-a/2)} \right] \text{sign}(z), & |z| > a/2 \end{cases}, \quad (2.16b)$$

где  $\nu = (\gamma_1 - 2\gamma_2)/(\gamma_1 + 2\gamma_2)$ . Коэффициенты  $A_2^{(l,h)}$  и  $B_2^{(l,h)}$  находятся непосредственно из уравнения (2.15) и равны

$$A_2^{(l,h)} = -\frac{\sqrt{3}}{2k_{l,h}a} \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \mathcal{N}_{l,h}, \quad B_2^{(l,h)} = \frac{\sqrt{3}}{2\varkappa_{l,h}a} \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \mathcal{N}_{l,h}, \quad (2.17)$$

в то время как для поиска  $A_1^{(l,h)}$  и  $B_1^{(l,h)}$  используются условия сшивки  $S_{l,h}$  на гетероинтерфейсах. Из непрерывности  $\hat{v}_z \Phi_{\pm}^{(l,h)}$  следует, что (это же условие получается при интегрировании (2.15) вокруг интерфейса)

$$\left[ (\gamma_1 \mp 2\gamma_2) \frac{\partial}{\partial z} S_{l,h} + \frac{\sqrt{3}}{a} \gamma_3 C_{l,h} \right] \Big|_{z_i^-}^{z_i^+} = 0, \quad (2.18)$$

где  $z_i$  – координата интерфейса.

Также как при расчете зеемановского расщепления в резонансном приближении, в присутствии магнитного поля циклические компоненты волнового вектора  $k_{\pm}$  должны быть записаны в виде  $k_{\pm} = |e|/(c\hbar)A_{\pm}$ . С учетом этого матричные элементы операторов  $H$  и  $H^*$ , рассчитанные на состояниях (2.12), дают линейную по магнитному полю поправку в энергии состояний  $\Phi_{\pm}^{(l,h)}$ , которая описывается следующими  $g$ -факторами

$$g_{lh1} = -2\kappa + 4\sqrt{3}a \left\langle S_l(z) \left| \left\{ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right\}_s \right| C_l(z) \right\rangle, \quad (2.19a)$$

$$g_{hh1} = -6\kappa + 4\sqrt{3}a \left\langle S_h(z) \left| \left\{ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right\}_s \right| C_h(z) \right\rangle. \quad (2.19b)$$

Здесь и далее угловые скобки обозначают квантовомеханическое усреднение. Примечательно, что матричные элементы в угловых скобках в точности равны сумме следующих рядов теории возмущений [ср. с (2.9)]

$$\left\langle S_l(z) \left| \left\{ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right\}_s \right| C_l(z) \right\rangle = \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0 a} \sum_{\nu} \frac{\left| \langle hh, \nu | \{ \gamma_3 \hat{k}_z \}_s | lh1 \rangle \right|^2}{\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh\nu}}, \quad (2.20a)$$

$$\left\langle S_h(z) \left| \left\{ \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right\}_s \right| C_h(z) \right\rangle = \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0 a} \sum_{\nu} \frac{\left| \langle hh1 | \{ \gamma_3 \hat{k}_z \}_s | lh, \nu \rangle \right|^2}{\varepsilon_{lh\nu} - \varepsilon_{hh1}}, \quad (2.20b)$$

где индекс  $\nu$  нумерует состояния как дискретного, так и непрерывного спектра. Здесь и далее используется дырочное представление, в котором энергии размерного квантования  $\varepsilon_{lh\nu}$  и  $\varepsilon_{hh\nu}$  положительны. В рассматриваемом случае симметричной прямоугольной ямы в суммах (2.20) ненулевые матричные элементы оператора  $\{ \gamma_3 \hat{k}_z \}_s$  существуют только для четных  $\nu$ .

## 2.4 Роль интерфейсного смешивания и нелинейный эффект Зеемана

Как отмечалось выше, важным фактором, определяющим энергетический спектр подзон  $lh1$  и  $hh2$ , а также их спиновые расщепления в нулевом магнитном поле, является интерфейсное смешивание тяжелой и легкой дырок. В данном разделе будет развита теория эффекта Зеемана для подзон  $h+$  и  $h-$ , сформированных в результате смешивания состояний тяжелой и легкой дырок на гетероинтерфейсах квантовой ямы. Напомним, что такое смешивание описывается гамильтонианом [ср. с (1.33)]

$$\mathcal{H}_{l-h} = \pm t_{l-h} \left( \hbar^2 / \sqrt{3} m_0 a_0 \right) \{ J_x J_y \}_s \delta(z - z_i), \quad (2.21)$$

с безразмерным параметром смешивания  $t_{l-h}$ . Здесь мы ограничимся резонансным приближением, учитывающим только состояния дырки  $|lh1, \pm 1/2\rangle$  и  $|hh2, \mp 3/2\rangle$ . Наличие интерфейсного смешивания приводит к тому, что при  $k_{\parallel} = 0$  состояние дырки в квантовой яме описывается волновыми функциями  $\Psi_{\pm}^{(j)}$  ( $j = \pm 1$  – спиновый индекс), являющимися линейными комбинациями  $|lh1, \pm 1/2\rangle$  и  $|hh2, \mp 3/2\rangle$  с константами  $C_l$  и  $C_h$

$$\begin{aligned} \Psi_+^{(j)} &= C_l |lh1, 1/2j\rangle + i j C_h |hh2, -3/2j\rangle \\ \Psi_-^{(j)} &= C_h |lh1, 1/2j\rangle - i j C_l |hh2, -3/2j\rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В нулевом магнитном поле состояния  $\Psi_{\pm}^{(j)}$  вырождены по спину и имеют энергии  $\varepsilon_+ \equiv \varepsilon_+^{(j)}$  и  $\varepsilon_- \equiv \varepsilon_-^{(j)}$  (далее считается, что  $\varepsilon_- > \varepsilon_+$ ). Зависимости энергий  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_-$ , рассчитанные по формулам (1.34), от ширины ямы GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As приведены на рис. 2.1а. В параметризации (В) без учета интерфейсного смешивания уровни  $lh1$  и  $hh2$  пересекаются при некоторой критической ширине ямы  $a = a_{cr}$ , в то время как для параметризации (А) такого пересечения нет, и во всем диапазоне ширин  $\varepsilon_{hh2} > \varepsilon_{lh1}$ . Учет интерфейсного смешивания в случае параметризации (В) приводит к антипересечению дырочных уровней (ср. сплошные и пунктирные линии на рис. 2.1а), которые расщепляются в критической точке  $a = a_{cr}$  на величину

$\Delta_{lh}$ , см. (1.35b).

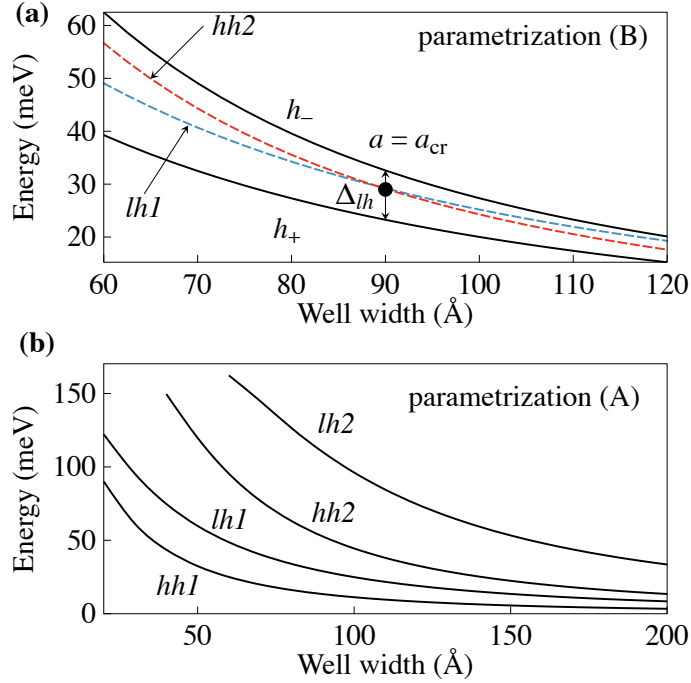


Рис. 2.1: Энергетический спектр дырок при  $k_{\parallel} = 0$  в квантовой яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As. (a) Расчет с использованием параметризации (B): показаны только уровни  $lh1$  и  $hh2$  при  $t_{l-h} = 0$  (пунктирные кривые) и энергии смешанных состояний  $\Psi_{\pm}$  при  $t_{l-h} = 1$  (сплошные кривые). (b) Расчет с использованием параметризации (A) при  $t_{l-h} = 0$ .

Зеемановское расщепление состояний  $\Psi_+$  и  $\Psi_-$  в продольном магнитном поле  $B_z$  может быть получено в рамках резонансной модели путем диагонализации эффективного гамильтониана  $4 \times 4$ , действующего на столбец  $(a_n |n\rangle, b_{n-1} |n-1\rangle, c_n |n\rangle, d_{n-1} |n-1\rangle)^T$ , записанный в базисе уровней Ландау  $|n\rangle$ ,  $n = 0, 1, \dots$  (ср. с [8]):

$$\mathcal{H}_B = \begin{pmatrix} \varepsilon_{hh2} & -i\alpha\sqrt{nB_z} & i\Delta_{lh}/2 & 0 \\ i\alpha\sqrt{nB_z} & \varepsilon_{lh1} & 0 & i\Delta_{lh}/2 \\ -i\Delta_{lh}/2 & 0 & \varepsilon_{lh1} & -i\alpha\sqrt{nB_z} \\ 0 & -i\Delta_{lh}/2 & i\alpha\sqrt{nB_z} & \varepsilon_{hh2} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

где

$$\alpha = 2\sqrt{3}\sqrt{\mu_B\hbar^2/m_0} \left| \langle hh2 | \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\}_s | lh1 \rangle \right|.$$

В итоговом ответе для зеемановского расщепления нас будут интересовать только первые два члена разложения по  $\sqrt{B_z}$ , поэтому в гамильтониане (2.23) мы не



учитываем диагональные циклотронные энергии, дающие вклады  $\propto B_z^{3/2}$  и  $\propto B_z^2$ . Далее мы также пренебрегаем линейным по полю вкладом, описывающим эффект Зеемана на объемной дырке (2.2), в силу его малости по сравнению с перенормировкой, индуцированной смешиванием валентных подзон. При  $n = 0$  собственные энергии (2.23) равны  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_-$  и отвечают энергиям состояний  $\Psi_+^{(j)}$  и  $\Psi_-^{(j)}$  в нулевом магнитном поле. При  $n > 0$  вырождение по спину снимается, и диагонализация (2.23) дает две пары уровней с энергиями

$$\begin{aligned}\varepsilon_+^{(j)}(n) &= -\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2})^2 + (\Delta_{lh} - 2j\alpha\sqrt{nB_z})^2} \\ \varepsilon_-^{(j)}(n) &= \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2})^2 + (\Delta_{lh} + 2j\alpha\sqrt{nB_z})^2}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Определим зеемановское расщепление  $n$ -ого уровня Ландау как разность  $\Delta E_{z,\pm}(n) = \varepsilon_{\pm}^{(+1)}(n+1) - \varepsilon_{\pm}^{(-1)}(n)$ , тогда зеемановское расщепление нулевого уровня  $\Delta E_{z,\pm} \equiv \Delta E_{z,\pm}(0)$  равно

$$\Delta E_{z,\pm} = \left| \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2})^2 + (\Delta_{lh} \pm 2\alpha\sqrt{B_z})^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2})^2 + \Delta_{lh}^2} \right|. \quad (2.25)$$

Как видно из полученной формулы, характер поведения расщепления с магнитным полем зависит от соотношения между энергиями  $\Delta_{lh}$  и  $\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2}$ . В частности, в критической точке имеем  $\Delta E_{z,\pm} \propto \sqrt{B_z}$ . В противоположном пределе  $\Delta_{lh} \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2} \neq 0$  зеемановское расщепление в малых полях линейно по полю и описывается  $g$ -фактором (2.19a), (2.20a), рассчитанном в резонансном приближении (в сумме (2.20a) остается только одно слагаемое с  $\nu = 2$ ). В случае, когда  $\Delta_{lh}$  и  $\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2}$  сопоставимы, эффект Зеемана в малых полях ( $B_z < \Delta^2/\alpha^2$ ) описывается формулой

$$\Delta E_{z,\pm} \approx \frac{\alpha\Delta_{lh}}{\Delta}\sqrt{B_z} + \frac{\alpha^2}{\Delta}B_z, \quad (2.26)$$

где  $\Delta = \varepsilon_- - \varepsilon_+$ , см. (1.35a), и представляет собой сумму линейного и корневого вкладов. Наличие не являющегося аналитической функцией магнитного поля корневого вклада объясняется тем, что при учете интерфейсного смешивания в

эффективном гамильтониане подзон  $h\pm$  появляются большие линейные по волновому вектору слагаемые (подробнее см. 1.4.3). Наличие таких слагаемых приводит к корневому спектру уровней Ландау [8, 96]. Переход между корневым и линейным режимами происходит при некотором критическом поле  $B^* = \Delta_{lh}^2/\alpha^2$ , таким образом, область корневого поведения расширяется с ростом  $t_{l-h}$ . Например, для ямы GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As при  $a = 70 \text{ \AA}$  и  $t_{l-h} = 1$  (см. рис. 2.1a) значения  $\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2} \approx -3.6 \text{ мэВ}$ ,  $\Delta_{lh} \approx 15 \text{ мэВ}$  и  $B^* \approx 11 \text{ Тл}$ . Стоит отметить, однако, что зеемановское расщепление в таком поле  $|\Delta E_{z,\pm}(B^*)| \approx 15 \text{ мэВ}$  и может быть сравнимо с расстояниями до других уровней размерного квантования – ситуация, когда резонансная модель неприменима. Наличие корневого слагаемого в (2.26) приводит к тому, что линейная аппроксимация зеемановского расщепления с использованием эффективного  $g$ -фактора

$$g_{\pm} = 12 \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{\left| \langle hh2 \left| \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\}_s \right| lh1 \rangle \right|^2}{\Delta} \quad (2.27)$$

является корректной только в некотором диапазоне полей при  $B^* < B_z < \Delta^2/\alpha^2$ .

## 2.5 Роль экситонных эффектов

Развитая выше теория эффекта Зеемана справедлива для дырок, свободно движущихся в плоскости квантовой ямы. Однако все экспериментальные данные, приведенные в табл. 2.2, получены методами оптической спектроскопии в области экситонных переходов, поэтому для количественного описания экспериментов необходим учет кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой. В нашем рассмотрении мы ограничимся случаем сильного размерного квантования вдоль оси  $z$  (боровский радиус трехмерного экситона больше, чем ширина квантовой ямы:  $a_B > a$ ) и резонансным приближением. Тогда с учетом интерфейсного смешивания волновая функция экситона, состоящего из электрона, находящегося на основном уровне размерного квантования ( $e1$ ), и дырки, записывается в виде

(ср. с [43])

$$|X_{\pm,l}(s; j)\rangle = \frac{e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}}{\sqrt{S}} \psi_l(\mathbf{r}) |e1, 1/2s\rangle \Psi_{\pm}^{(j)}. \quad (2.28)$$

Здесь  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{R}$  – волновой вектор и координата центра масс экситона,  $S$  – нормировочная площадь,  $|e1, 1/2s\rangle$  – волновая функция электрона,  $s = \pm 1$  – его спиновый индекс,  $\psi_l(\mathbf{r})$  – волновая функция относительного движения электрона и дырки в плоскости квантовой ямы, индекс  $l = 1s, 2s, 2p \dots$  нумерует состояния относительного движения. Волновые функции движения вдоль оси  $z$  свободной дырки  $\Psi_{\pm}^{(j)}$  определены в (2.22). Далее будет использоваться приближение двумерного экситона, которое позволяет получить аналитические выражения для  $\psi_l(\mathbf{r})$  и энергетического спектра экситона [97]. Точный расчет функции  $\psi_l(\mathbf{r})$  связан с необходимостью учета больших линейных по  $k$  членов энергетического спектра дырочных подзон и выходит за рамки данной работы [98]. В дальнейшем для определенности будем рассматривать нижнее по энергии состояние, описываемое волновой функцией  $|X_{+,l}(s; j)\rangle$ . Такое состояние оптически активно, когда спиновые индексы электрона и дырки совпадают, т.е. при  $s = j = 1$  и  $s = j = -1$ .

Магнитное поле действует только на относительное движение электрона и дырки, которое при учете кулоновского взаимодействия между ними квантуется. Это приводит к тому, что зеemanовское расщепление экситонных состояний линейно по магнитному полю даже при наличии интерфейсного смешивания дырок. Таким образом, расщепление между оптически активными состояниями  $X_{+,1s}$  описывается  $g$ -фактором

$$g(X_{+,1s}) = g^{(e)}(X_{+,1s}) + g^{(h)}(X_{+,1s}), \quad (2.29)$$

состоящим из электронного и дырочного вкладов. Электронная компонента  $g$ -фактора определяется в основном шириной и составом ямы [73, 76], и ее перенормировка за счет кулоновских эффектов незначительна.

Перенормировка дырочной компоненты, аналогично случаю свободной дырки, возникает благодаря смешиванию состояний  $X_{+,1s}$  и  $X_{\pm,\nu p}$  ( $\nu = 2, 3 \dots$ ) в рамках гамильтониана Латтинжера. Эти состояния разнесены по энергии, поэтому дыроч-

ный вклад в экситонный  $g$ -фактор может быть записан в виде следующего ряда теории возмущений

$$g^{(h)}(X_{+,1s}) = -2\kappa (|\mathcal{C}_l|^2 - 3|\mathcal{C}_h|^2) - 12 \frac{\hbar^2}{m_0 a^2} \zeta^2 C_x \times \\ \times \sum_{\nu} \left[ 4 |\mathcal{C}_l|^2 |\mathcal{C}_h|^2 \frac{\langle \psi_{1s} | k_- | \psi_{\nu p} \rangle \langle \psi_{\nu p} | r_+ | \psi_{1s} \rangle}{E(X_{+,1s}) - E(X_{+, \nu p})} + (|\mathcal{C}_l|^2 - |\mathcal{C}_h|^2)^2 \frac{\langle \psi_{1s} | k_- | \psi_{\nu p} \rangle \langle \psi_{\nu p} | r_+ | \psi_{1s} \rangle}{E(X_{+,1s}) - E(X_{-, \nu p})} \right]. \quad (2.30)$$

Здесь параметр  $\zeta = a \left\langle \hbar h 2 \left\{ \gamma_3 \hat{k}_z \right\} | l h 1 \right\rangle$ ,  $k_{\pm} = k_x \pm i k_y$  и  $r_{\pm} = x \pm i y$  – циклические компоненты волнового вектора и координаты относительного движения электрона и дырки в экситоне. Коэффициент  $C_x \sim 1$  определяется дисперсией электрон-дырочной пары и строением экситона вблизи  $k_{\parallel} = 0$ . Отметим, что суммирование по  $\nu$  распространяется как на дискретный, так и на непрерывный спектр двумерной кулоновской задачи. Выражение (2.30) можно упростить, используя соотношение  $\langle \psi_{1s} | k_- | \psi_{\nu p} \rangle = (i\mu/\hbar^2) \langle \psi_{1s} | r_- | \psi_{\nu p} \rangle (E_{1s} - E_{\nu p})$ , где  $\mu$  – приведенная масса экситона,  $E_{1s} \equiv E(X_{+,1s})$  и  $E_{\nu p} \equiv E(X_{+, \nu p})$ , и полноту набора  $\psi_l$ . С учетом этого  $g^{(h)}(X_{+,1s})$  записывается в виде

$$g^{(h)}(X_{+,1s}) = -2\kappa (|\mathcal{C}_l|^2 - 3|\mathcal{C}_h|^2) - 24 \zeta^2 C_x \frac{\hbar^2}{m_0 a^2 E_{1s}} \times \\ \times \left[ 4 |\mathcal{C}_l|^2 |\mathcal{C}_h|^2 |\langle \psi_{1s} | \bar{r}^2 | \psi_{1s} \rangle| + (|\mathcal{C}_l|^2 - |\mathcal{C}_h|^2)^2 \sum_{\nu} \frac{E_{1s} - E_{\nu p}}{E_{1s} - E_{\nu p} - \Delta} |\langle \psi_{1s} | \bar{r}_- | \psi_{\nu p} \rangle|^2 \right], \quad (2.31)$$

где использовалось соотношение  $E_{1s} = 2\hbar^2/\mu a_B^2$ , а также введены операторы безразмерной координаты  $\bar{r}^2 = r^2/a_B^2$  и  $\bar{r}_- = r_-/a_B$ .

Формула (2.31) описывает перенормировку  $g$ -фактора легкой дырки с учетом кулоновских эффектов. В случае  $\Delta_{lh} = 0$  и  $E_{1s} \ll \Delta$  (предел «свободной» дырки), и выражение (2.31) переходит в формулу для  $g_{lh1}$  в резонансном приближении (2.19а), (2.20а). При  $\Delta_{lh} \neq 0$ , в критической точке  $|\mathcal{C}_l|^2 = |\mathcal{C}_h|^2 = 1/2$ , второе слагаемое в (2.31) исчезает, и  $g$ -фактор принимает простой вид

$$g^{(h)}(X_{+,1s}) = 2\kappa - \frac{9}{2} \zeta^2 C_x \frac{\mu}{m_0} \left( \frac{a_B}{a} \right)^2. \quad (2.32)$$

В квантовой яме GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As при  $a = a_{cr}$  (см. рис. 2.1a),  $C_x = 1$  и  $E_{1s} = 10$  мэВ второе слагаемое в (2.32) можно оценить как  $\approx -21$ .

## 2.6 Результаты и обсуждение

Ниже мы проанализируем результаты расчетов зеемановского расщепления тяжелой и легкой дырок в различных приближениях, обсуждавшихся в предыдущих разделах, и сопоставим результаты расчетов с экспериментальными данными.

### 2.6.1 $g$ -фактор тяжелой дырки

Начнем анализ со случая свободной дырки в пренебрежении интерфейсными эффектами ( $t_{l-h} = 0$ ). Результаты расчетов  $g$ -фактора тяжелой дырки  $g_{hh1}$ , выполненные по формуле (2.19b), показаны на рис. 2.2a сплошными кривыми. Расчет был проведен для двух систем GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As и CdTe/Cd<sub>0.74</sub>Mg<sub>0.26</sub>Te с использованием параметров, указанных в табл. 2.2. Для структур на основе GaAs результаты приведены для двух параметризаций гамильтониана Латтинжера [параметризации (A), (B) в табл. 2.2], дающих похожие энергетические спектры тяжелой дырки  $hh1$  (см. также табл. 1.2). Для сравнения штриховыми кривыми на рис. 2.2a приведены результаты расчетов в рамках резонансного приближения, когда учитывается магнитоиндуцированное смешивание только двух ближайших дырочных подзон. Очевидно, что перенормировка  $g_{hh1}$  в ненапряженных ямах на основе полупроводников с решеткой цинковой обманки всегда положительна, т.к. для любого  $\nu$  разность  $\varepsilon_{lh,\nu} - \varepsilon_{hh1}$  положительна [см. (2.20b)]. Рисунок 2.2a свидетельствует о том, что наиболее существенное отличие многоуровневой и резонансной моделей для  $g_{hh1}$  наблюдается в области узких ям ( $a < 70$  Å): при уменьшении ширины ямы уровень  $lh2$  выталкивается вверх по энергии, попадая в достаточно узких ямах в непрерывный спектр. Расхождение двух подходов в широких квантовых ямах связано с локализацией в квантовой яме возбужденных состояний с большими  $\nu$ , которые не учитываются в рамках резонансной модели. Расчет по

формуле (2.19b) в рамках многоуровневого подхода количественно согласуется с расчетами для этих же систем, проведенных в работе [62] методом численной диагонализации 8-зонного гамильтониана в магнитном поле. Более того, как видно из рис. 2.2а,  $g$ -фактор тяжелой дырки проходит через нуль, что качественно согласуется с данными экспериментов (см. например, [99]) – ширина ямы, при которой происходит смена знака, определяется, однако, выбранной параметризацией.

### 2.6.2 Нелинейный эффект Зеемана и $g$ -фактор легкой дырки

Роль параметризации оказывается особенно важной при расчете  $g$ -фактора легкой дырки (рис. 2.2b). Это связано с тем, что перенормировка  $g_{lh1}$  может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от знака разности «резонансного» энергетического знаменателя  $\varepsilon_{lh1} - \varepsilon_{hh2}$ . Для иллюстрации на рис. 2.1 приведены положения уровней размерного квантования тяжелой и легкой дырок для ям различной толщины. В частности, для параметризации (А) уровень  $lh1$  лежит ниже по энергии, чем  $hh2$  для любой ширины ямы (рис. 2.1b), в то время как для параметризации (В) (рис. 2.1а) уровни пересекаются при некоторой критической ширине ямы  $a_{cr} \approx 90 \text{ \AA}$ . В этой точке  $g_{lh1}$ , рассчитанный по формуле (2.19а), обращается в бесконечность. На рис. 2.2b штриховыми линиями показаны результаты расчетов эффективного  $g$ -фактора легкой дырки, отвечающего линейному по полю слагаемому в (2.26), полученные по формуле (2.27). Показаны границы изменения  $g_{lh1}$  в ямах GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As и CdTe/Cd<sub>0.74</sub>Mg<sub>0.26</sub>Te при изменении  $t_{l-h}$  в диапазоне от 0 до 1. Как видно, включение интерфейсного смешивания приводит к существенному уменьшению абсолютного значения  $g$ -фактора за счет увеличения разности энергий  $\varepsilon_- - \varepsilon_+$ .

В разделе 2.4 было указано, что зеемановское расщепление легкой дырки при  $t_{l-h} \neq 0$  дается суммой линейного и корневого вкладов [см. (2.26)]. Это означает, что линейная аппроксимация с использованием эффективного  $g$ -фактора, приведенного на рис. 2.2b, имеет смысл только в некотором диапазоне полей при

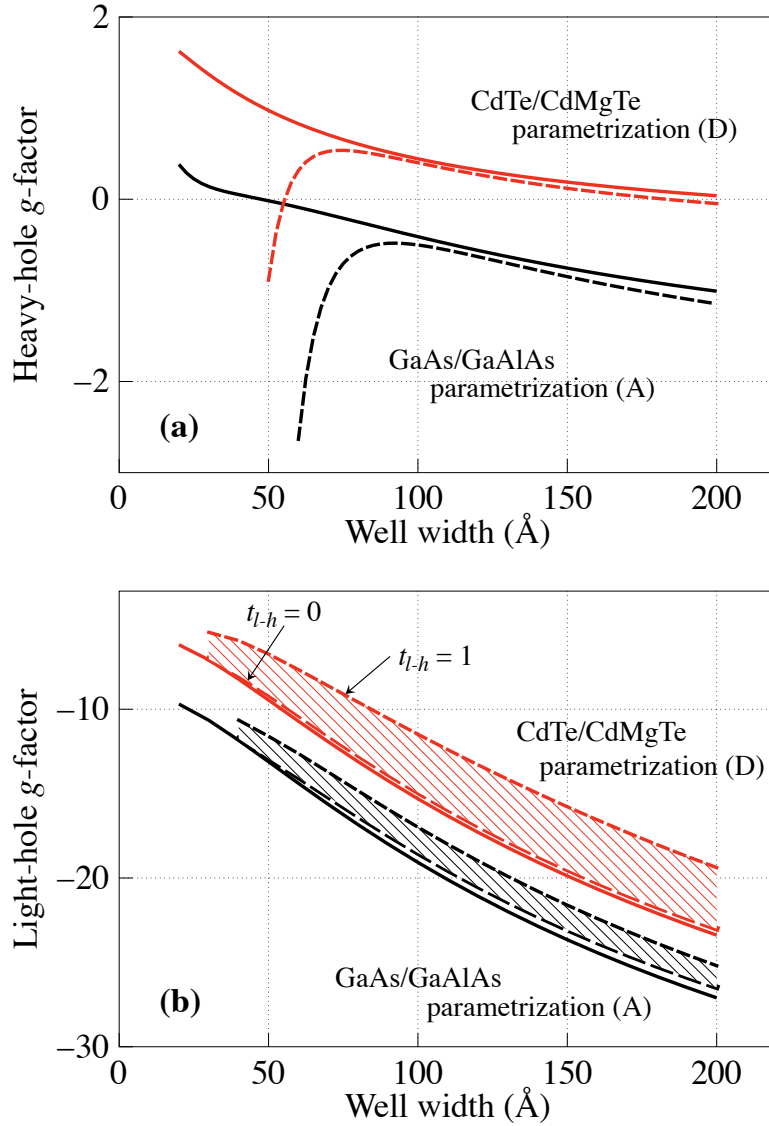


Рис. 2.2: Рассчитанные зависимости  $g$ -фактора тяжелой (а) и легкой (б) дырок от ширины квантовой ямы для двух материальных систем GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As и CdTe/Cd<sub>0.74</sub>Mg<sub>0.26</sub>Te. Сплошными линиями показаны зависимости, рассчитанные по формуле (2.19). Штриховые линии демонстрируют расчет в резонансном приближении для параметра  $t_{l-h} = 0$  (а) и  $t_{l-h} = 0$  и 1 (б).

$B^* < B_z < \Delta^2/\alpha^2$ . На рис. 2.3 приведено зеемановское расщепление, рассчитанное по общей формуле (2.25). Видно, что с ростом  $t_{l-h}$  увеличивается и значение  $B^*$  (рис. 2.3a), и соответственно, расширяется область, в которой линейная аппроксимация неприменима. В случае параметризации (B) при наличии интерфейсного смешивания ( $t_{l-h} = 1$ ) во всем диапазоне полей, используемых в эксперименте ( $B_z < 10$  Тл),  $\Delta E_{z,\pm} \propto \sqrt{B_z}$  (рис. 2.3b), поэтому использование линейной аппроксимации в этом случае невозможно.

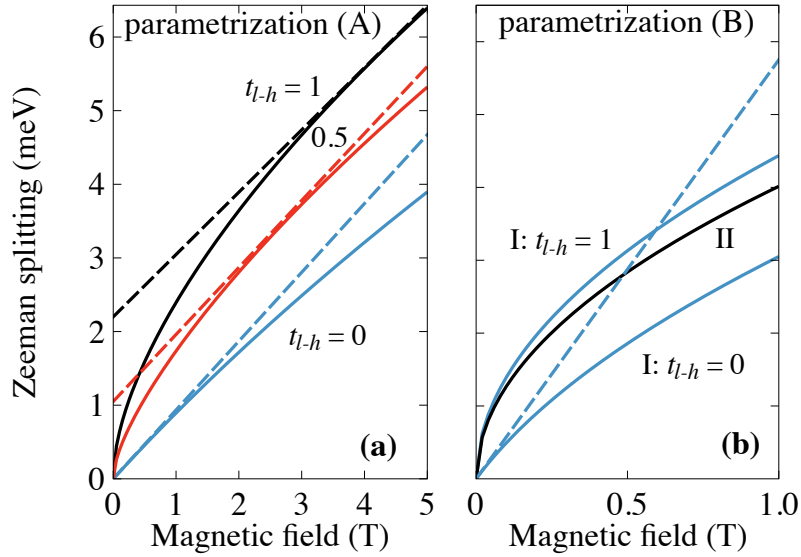


Рис. 2.3: Зеемановское расщепление состояния  $\Psi_+$ , рассчитанное по формуле (2.25). (a) Расчет для параметризации (A) при  $a = 100 \text{ \AA}$ . Значения критических полей  $B^* \approx 1.1$  Тл ( $t_{l-h} = 0.5$ ) и  $B^* \approx 4.6$  Тл ( $t_{l-h} = 1$ ). (b) Расчет для параметризации (B):  $a = 70 \text{ \AA} < a_{cr}$  (кривая I),  $a = a_{cr}$  (кривая II). Значение критического поля для кривой I ( $t_{l-h} = 1$ )  $B^* \approx 11$  Тл. Штриховыми кривыми изображена линейная аппроксимация (2.27).

### 2.6.3 Сопоставление теории с экспериментом

Применим теперь развитую теорию для описания экспериментальных данных. Данные экспериментов (табл. 2.1) и результаты теоретических расчетов для ям InGaAs/InP, CdTe/CdMgTe и GaAs/AlGaAs сведены на рис. 2.4. Результаты расчетов приведены штриховыми линиями для свободной дырки и сплошными ли-



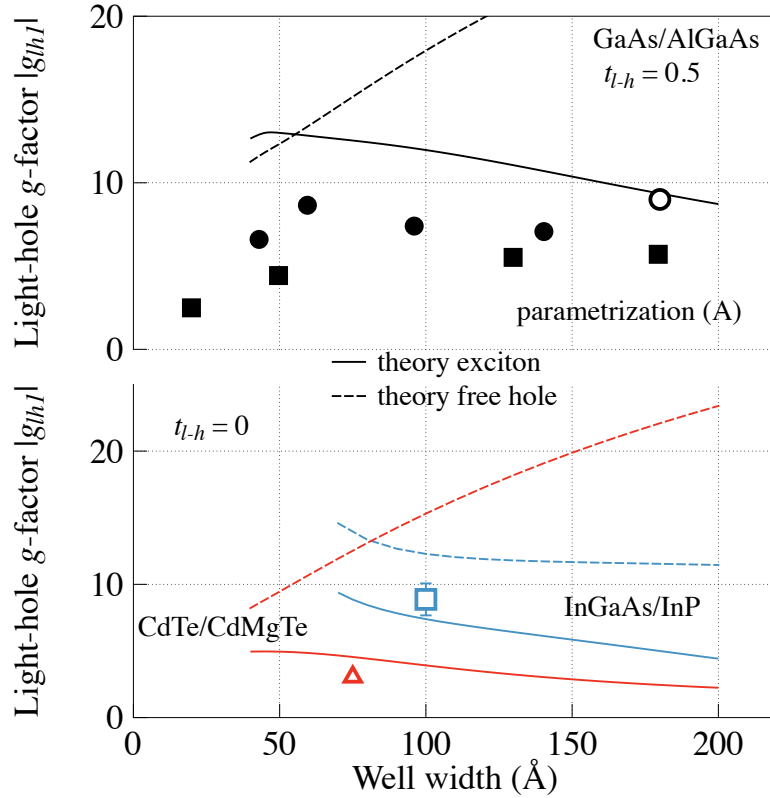


Рис. 2.4:  $g$ -фактор легкой дырки: сравнение эксперимента и теории. Точками показаны данные работы [87] (сплошные круги), данные [86] (сплошные квадраты), данные [83] (открытый круг), данные [85] (открытый квадрат) и данные [82] (открытый треугольник). Теоретические расчеты показаны линиями для квантовых ям GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As при  $t_{l-h} = 0.5$  (верхняя панель), In<sub>0.53</sub>Ga<sub>0.47</sub>As/InP и CdTe/Cd<sub>0.74</sub>Mg<sub>0.26</sub>Te при  $t_{l-h} = 0$  (нижняя панель). Кривые рассчитаны с учетом (сплошные линии) и без учета (штриховые линии) экситонных эффектов. Энергии связи экситонов, использованные в расчетах, см. в тексте.

ниями для дырки, связанной в экситоне.  $g$ -Фактор дырки в экситоне рассчитан по формуле (2.31) в предположении, что коэффициент  $C_x = 1$  и не зависит от ширины квантовой ямы. В качестве энергии экситона  $E_{1s}$  в расчете использовались значения энергии связи, отвечающие реальным ямам [100, 101]. Отметим, что такой выбор  $E_{1s}$  завышает второе слагаемое в (2.31).

Расчеты по формуле (2.19a) с использованием параметризации (C) и  $t_{l-h} = 0$  дают для ямы  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}/\text{InP}$   $g_{lh1} > 0$  и близкое к эксперименту абсолютное значение. Интересно, что в этой яме уровень  $lh1$  лежит выше по энергии, чем  $hh2$ , поэтому расчет в рамках многоуровневой модели дает заметно меньшие (и более близкие к эксперименту) значения  $g_{lh1}$ , чем в резонансном приближении. Учет экситонных эффектов ( $E_{1s} = 5$  мэВ [100]) приводит для этой ямы к уменьшению  $g$ -фактора примерно в 1.5 раза. Расчет для ямы  $\text{CdTe}/\text{Cd}_{0.74}\text{Mg}_{0.26}\text{Te}$  с использованием параметризации (D) предсказывает большие отрицательные значения  $g_{lh1}$ . Известно, однако, что экситонные эффекты в этой яме велики [101], расчет с использованием  $E_{1s} = 20$  мэВ дает существенно меньшие абсолютные значения  $g$ -фактора. На верхней панели рис. 2.4 приведены кривые, рассчитанные для ямы  $\text{GaAs}/\text{Al}_{0.35}\text{Ga}_{0.65}\text{As}$  при  $t_{l-h} = 0.5$  для параметризации (A). Расчет для свободной дырки выполнен по формуле (2.27) и, как видно, дает завышенные значения  $g$ -фактора по сравнению с экспериментом. Удовлетворительное согласие с экспериментальными данными в этом случае возможно только при учете экситонных эффектов ( $E_{1s} = 10$  мэВ). Отметим, что поскольку оба расчета для ямы  $\text{GaAs}$  выполнены в резонансном приближении, они не могут быть продолжены в область достаточно узких ям ( $a \lesssim 40 \text{ \AA}$ ), в которой уровень  $hh2$  попадает в непрерывный спектр. Количественное описание экспериментальных данных в приближении свободной дырки требует для ямы  $\text{GaAs}/\text{AlGaAs}$  больших значений параметра интерфейсного смешивания ( $t_{l-h} \approx 3$ ), при которых теория предсказывает корневое поведение зеемановского расщепления во всем диапазоне экспериментально используемых полей. Отметим, что параметризация (B) не дает качественного со-

гласия с экспериментальными данными ни для свободной дырки, ни для дырки в экситоне.

## 2.7 Краткие итоги

В Главе 2 получены следующие результаты:

- Построена теория эффекта Зеемана для состояний легкой дырки в квантовых ямах в продольном магнитном поле. Показано, что близость основного состояния легкой дырки ( $lh1$ ) и первого возбужденного состояния тяжелой дырки ( $hh2$ ) приводит к гигантскому увеличению абсолютной величины  $g$ -фактора легкой дырки.
- Получены аналитические выражения для  $g$ -факторов тяжелой и легкой дырки в случае ямы с конечными барьерами с учетом всех уровней размерного квантования дырки в яме.
- Построена теория зеемановского расщепления пары уровней  $lh1$ ,  $hh2$  в присутствии интерфейсного смешивания этих состояний, которая предсказывает наличие нелинейного по магнитному полю вклада в эффект Зеемана.
- Развита теория зеемановского эффекта на экситоне с легкой дыркой с учетом смешивания дырочных состояний на интерфейсах. Показано, что кулоновское взаимодействие между электроном и дыркой приводит к линейному по магнитному полю расщеплению спиновых подзон экситона даже в ямах с критической шириной. Результаты расчетов, учитывающих экситонные эффекты, удовлетворительно описывают данные экспериментов в квантовых ямах GaAs/AlGaAs, InGaAs/InP и CdTe/CdMgTe.

## Глава 3

# Тонкая структура экситонных состояний в тригональных квантовых точках

### 3.1 Введение

Экситоны – связанные кулоновским взаимодействием электрон-дырочные пары – играют определяющую роль в оптических свойствах полупроводников и полупроводниковых наноструктур [18, 36, 102, 103]. Электрон и дырка обладают полуцелым спином, поэтому суммарный спин электрон-дырочной пары – целый, и экситон является бозоном. Благодаря этому обстоятельству энергетический спектр свободных и локализованных экситонов имеет ряд существенных отличий от спектра независимых электронов и дырок [18]. Наиболее ярко это проявляется для нульмерных экситонов, локализованных в квантовых точках или на флуктуациях интерфейсов квантовых ям. В то время как согласно теореме Крамерса состояния локализованного электрона двукратно вырождены по спину, спиновое вырождение энергетического спектра нульмерного локализованного экситона может полностью снято [18]. Тонкая структура энергетического спектра экситонов определяется, в основном, обменным взаимодействием между электроном и дыркой. Рассмотрим в качестве примера экситон с тяжелой дыркой ( $e1 - hh1$ ) в структуре, обладающей симметрией  $C_{2v}$  (например, в квантовой яме, выращенной вдоль оси

$z \parallel [001]$  с несимметричным гетеропотенциалом, или в анизотропной квантовой точке с той же осью роста, обладающей основанием в форме эллипса или прямоугольника). В этом случае обменное взаимодействие между электроном и дыркой расщепляет квартет на радиационный дублет ( $m_z = \pm 1$ ) и два близкорасположенных синглета, соответствующих линейным комбинациям состояний с  $m_z = \pm 2$ , где  $m_z$  – проекция спина экситона на ось роста структуры. Энергетическое расщепление между оптически активными и неактивными состояниями,  $\delta_0$ , определяется, в основном, изотропным короткодействующим вкладом в обменное взаимодействие электрона и дырки [104]. Асимметрия структуры или анизотропия потенциала локализации приводит к (анизотропному) расщеплению радиационного дублета,  $\delta_1$ , на два состояния, активных в линейных поляризациях, соответствующих главным осям структуры, см. рис. 3.1. Расщепление радиационного дублета обусловлено, главным образом, дальнедействующим обменным взаимодействием электрона и дырки [105], величина расщепления связана с параметрами локализации электрона и дырки. Тонкая структура экситона в нулевом магнитном поле была изучена во множестве работ, см., например, [106, 107, 108] и ссылки, приведенные в них. Характерные величины  $\delta_0 \sim 100$  мкэВ, а  $\delta_1$  в зависимости от параметров точек варьируется от десятков до  $\sim 100$  мкэВ.

В последнее время полупроводниковые квантовые точки активно используются для генерации поляризационно-запутанных пар фотонов, излучаемых в процессе рекомбинации биэкситонного каскада [109, 110]. Анизотропное расщепление радиационного дублета экситона разрушает квантовомеханическую запутанность, поэтому были предложены различные методы подавления этого расщепления, включая применение полупроводниковых микрорезонаторов [111, 112], приложение внешнего электрического поля [113, 114], упругих напряжений [115], одновременно электрического поля и внешних напряжений [116], а также внешнего магнитного поля, влияющего на экситонные состояния посредством зеемановского [108, 117] и диамагнитного [118] эффектов. Примечательно, что даже изотропные точки,

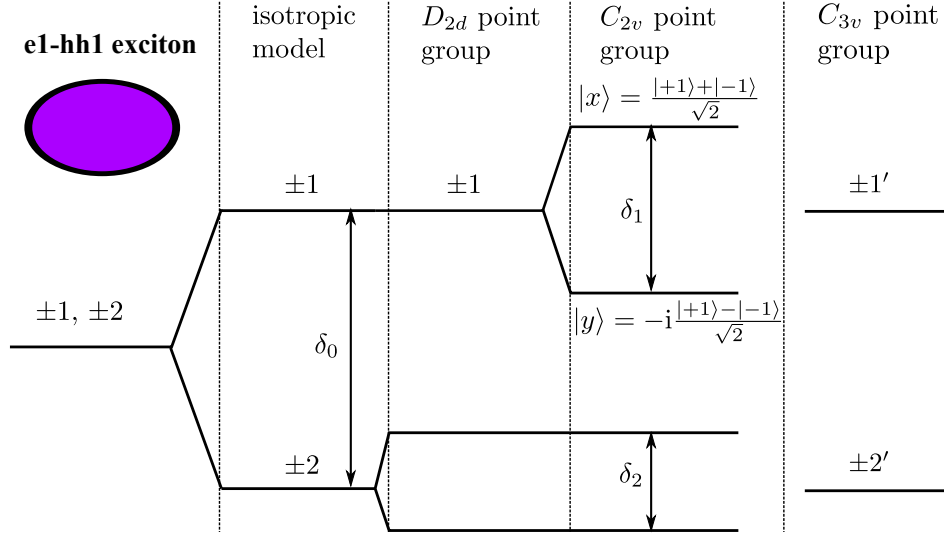


Рис. 3.1: Схематическая иллюстрация тонкой структуры энергетического спектра локализованного экситона ( $e1-hh1$ ) в полупроводниковой квантовой точке. Величина  $\delta_0$  обозначает расщепление светлых и темных состояний,  $\delta_1$  – анизотропное расщепление оптически активных состояний,  $\delta_2$  – темных состояний.

выращенные вдоль оси  $[001]$  (с основанием в форме круга или квадрата), могут не обладать симметрией  $D_{2d}$  при наличии неэквивалентных верхнего и нижнего интерфейсов, а также неоднородной деформации в плоскости [119, 120, 121].

Альтернативным экспериментальным подходом к генерации поляризационно-запутанных пар фотонов является использование образцов с квантовыми точками на основе арсенидов третьей группы, выращенных вдоль оси  $[111]$  (так называемые тригональные точки). Преимуществом структур, выращенных вдоль этой оси, является реализация микроскопически идентичных интерфейсов, что приводит к формированию системы, характеризуемой точечной группой симметрии  $C_{3v}$ . В отличие от структур с симметрией  $C_{2v}$  в таких квантовых точках расщепление анизотропного дублета запрещено [122, 123]. В ряде работ наблюдалось очень малое,  $\delta_1 \lesssim 10$  мкэВ, анизотропное расщепление в квантовых точках  $[111]$  непосредственно после роста (без дополнительной обработки) [124, 125, 126, 127], а также генерация пар запутанных фотонов [128, 129].

В данной главе диссертации построена микроскопическая теория дырочного

эффекта Зеемана и тонкой структуры энергетического спектра экситонов и трионов в тригональных квантовых точках, и дано объяснение неожиданным экспериментальным данным, полученным в группе Т. Амана, К. Мари и Б. Урбажека в университете г. Тулузы (Франция) [125].

### 3.2 Экспериментальные данные

Исследуемые образцы выращены методом капельной эпитаксии с использованием стандартной молекулярно-пучковой установки [124, 130, 131] на подложке GaAs(111)A с преобладанием атомов Ga на поверхности. Точки из GaAs помещены между двумя барьерными слоями из  $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$  толщиной 100 нм и 50 нм, соответственно, – такой выбор материалов позволяет избежать в этой структуре упругих напряжений [132]. Отметим также, что исследуемые точки высотой  $\simeq 3$  нм и размером в плоскости  $\simeq 15$  нм выращены без смачивающего слоя (см. [124]). На рис. 3.2 представлены изображения, полученные методами атомно-силовой микроскопии, которые свидетельствуют о тригональной,  $C_{3v}$ , симметрии основания квантовой точки.

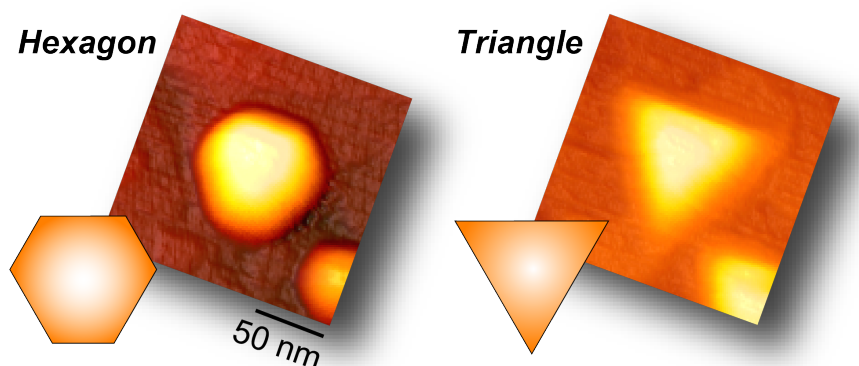


Рис. 3.2: Изображения квантовых точек GaAs, выращенных на подложке (111)A, полученные методом атомной силовой микроскопии, демонстрируют тригональную симметрию точек ( $C_{3v}$ ). В зависимости от температуры роста форма основания точек варьируется от неправильного шестиугольника до правильного треугольника.

На рисунках 3.3 и 3.4 представлены спектры фотолюминесценции (ФЛ) оди-

ночных квантовых точек. Основные линии в излучении в нулевом магнитном поле связаны с тремя экситонными комплексами: нейтральным экситоном  $X^0$ , отрицательно заряженным трионом  $X^-$ , состоящим из двух электронов в синглетном состоянии и одной дырки, и положительно заряженным трионом  $X^+$  (один электрон и две дырки в синглете). Эти комплексы идентифицированы на основе анализа тонкой структуры линий ФЛ и данных экспериментов по оптической ориентации [133]. Высокая симметрия точек [111] подтверждается малыми значениями расщепления линии  $X^0$  в двух линейных поляризациях ( $\delta_1$  порядка нескольких мкэВ [124]). Тригональная симметрия точек приводит к необычным эффектам, проявляющимся в спектрах ФЛ в продольном магнитном поле  $\mathbf{B} \parallel [111]$  (см. рис. 3.3d-f и левые панели рис. 3.4). При приложении магнитного поля вдоль оси роста [111] (геометрия Фарадея), в излучении всех трех экситонных комплексов наблюдается четыре линии: две из них активны в  $\sigma^+$  поляризации, а две другие – в  $\sigma^-$  поляризации. Этот результат контрастирует с экспериментальными данными по ФЛ в квантовых точках [001], которые в геометрии Фарадея демонстрируют только два оптически активных перехода в противоположных циркулярных поляризациях [134, 135]. Подчеркнем, что четыре линии в спектрах излучения нейтрального экситона и трионов наблюдались во всех исследуемых точках. На рис. 3.4а (правая панель) представлены положения линий в спектрах точки QD1 в поперечном магнитном поле ( $\mathbf{B} \parallel x \parallel [11\bar{2}]$ ): видно, что в спектрах  $X^+$  и  $X^-$  наблюдаются две линии, а не четыре, как это имеет место в точках с ориентацией [001] [134, 135].

В разделе 3.3 будет показано, что описанное выше необычное поведение спектров магнитолюминесценции обусловлено тригональной симметрией точек, характеризующейся точечной группой  $C_{3v}$ . В этой группе состояния тяжелой дырки смешиваются продольным магнитным полем, в то время как поперечный эффект Зеемана для этих состояний отсутствует.



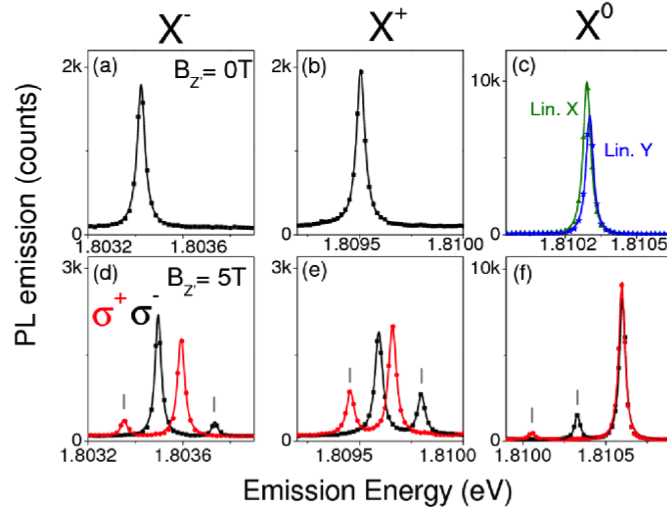


Рис. 3.3: Спектры излучения нейтрального экситона  $X^0$  и трионов  $X^\pm$ , наблюдаемые в ФЛ точки QD1 [125] (нумерация точек соответствует работам [125] и [A2]; см. также табл. 3.1). На панели (c) Lin. X и Lin. Y – линии, детектируемые в соответствующих линейных поляризациях.

### 3.3 Симметричный анализ

Общий анализ наноразмерных структур с кристаллической решеткой цинковой обманки, выращенных вдоль направления  $[111]$ , позволяет сделать вывод, что они имеют тригональную симметрию точечной группы  $C_{3v}$ . В этой главе будет использована система координат с осями  $x \parallel [11\bar{2}]$ ,  $y \parallel [\bar{1}10]$  и  $z \parallel [111]$ . Точечная группа симметрии  $C_{3v}$  включает в себя следующие элементы: единичный элемент  $E$ , ось вращения третьего порядка  $C_3$  и три плоскости отражения, содержащие ось вращения. Перечень неприводимых представлений группы  $C_{3v}$  и соответствующие базисные функции представлены в книге [136]. В согласии с книгой [136] фазы базисных функций тяжелой дырки  $|3/2\rangle$ ,  $|-3/2\rangle$  выбраны, как у функций  $-\uparrow(x + iy)$  и  $\downarrow(x - iy)$ , где  $\uparrow, \downarrow$  – спиноры, отвечающие  $s_z = \pm 1/2$ , см. также (1.4).

Точечная симметрия  $C_{2v}$  квантовых точек, выращенных вдоль направления  $[001]$ , запрещает смешивание тяжелых дырок с проекциями углового момента  $|\pm 3/2\rangle$  продольным магнитным полем  $\mathbf{B} \parallel [001]$ . Действительно, как отмечалось в разделе 1.2.2, в двойной группе  $C_{2v}$  эти два состояния формируют базис

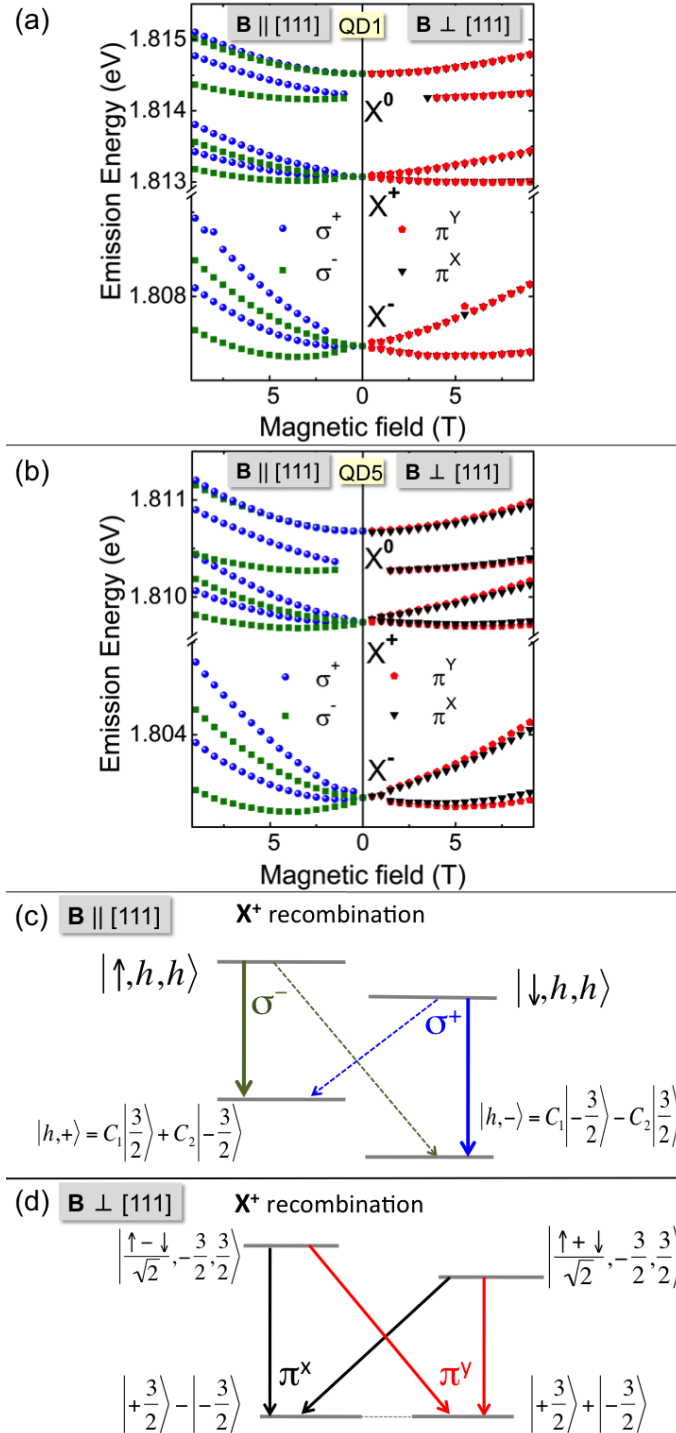


Рис. 3.4: (а) Экспериментально измеренные энергии оптических переходов в комплексах  $X^0$ ,  $X^+$  и  $X^-$  в зависимости от магнитного поля, приложенного в геометрии Фарадея ( $\mathbf{B} \parallel [111]$ , левая панель) и геометрии Фойхта ( $\mathbf{B} \perp [111]$ , правая панель) для квантовой точки **QD1**. (б) То же, что (а), для **QD5**. На панелях (с) и (д) приведены поляризационные правила отбора при излучательной рекомбинации  $X^+$ -триона в геометриях Фарадея и Фойхта, соответственно.

неприводимого спинорного представления  $\Gamma_5$ , в то время как компонента магнитного поля  $B_z$  преобразуется по представлению  $\Gamma_3$ . Прямое произведение  $\Gamma_5^* \times \Gamma_5$  разбивается на сумму четырех слагаемых  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ , которая содержит  $\Gamma_3$  только один раз. Действие магнитного поля, таким образом, сводится к зеемановскому расщеплению пары  $|\pm 3/2\rangle$  без смешивания состояний. Напротив, в точечной группе  $C_{3v}$  состояния  $|\pm 3/2\rangle$  образуют приводимое представление, которое является прямой суммой двух неприводимых представлений  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_6$ , в то время как  $z$ -компонента магнитного поля преобразуется по представлению  $\Gamma_2$ . Прямое произведение представлений

$$(\Gamma_5 + \Gamma_6) \times (\Gamma_5^* + \Gamma_6^*) = 2\Gamma_1 + 2\Gamma_2 \quad (3.1)$$

содержит представление  $\Gamma_2$  два раза, следовательно существует два независимых параметра, описывающие эффект продольного поля на состояния  $|\pm 3/2\rangle$  [125]. Иначе говоря, из компоненты  $B_z$  и компонент псевдовектора матриц момента  $3/2$  в каноническом базисе  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  можно составить два инварианта. Первый из них  $-J_z B_z$  – представляет собой стандартное зеемановское расщепление, в то время как второй  $-B_z (J_x^3 - 3\{J_x J_y^2\}_s)$  – имеет ненулевой матричный элемент между состояниями  $|3/2\rangle$  и  $|-3/2\rangle$ . Наличие такого дополнительного инварианта приводит к тому, что эффект Зеемана для тяжелой дырки описывается в базисе  $|3/2\rangle, |-3/2\rangle$  матрицей  $2 \times 2$ , содержащей как диагональные, так и недиагональные элементы

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2} \mu_B B_z \begin{bmatrix} g_{h1} & g_{h2} \\ g_{h2} & -g_{h1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mu_B B_z (g_{h1} \sigma_z + g_{h2} \sigma_x) . \quad (3.2)$$

Здесь  $\mu_B$  – магнетон Бора, а вещественные параметры  $g_{h1}$  и  $g_{h2}$  – эффективные  $g$ -факторы тяжелой дырки. Смешивание состояний тяжелой дырки продольным магнитным полем имеет место в тригональных точечных группах  $D_3$  и  $D_{3d} = D_3 \times C_i$ . В группах с более низкой симметрией –  $C_3$  и  $S_6 = C_3 \times C_i$  – эффект также возможен, однако в отличие от эффекта Зеемана, описываемого выражением (3.2), направление оси  $x$  в плоскости, перпендикулярной полю, не фиксировано. Во всех гексагональных группах, включая  $C_{3h}$  и  $D_{3h}$ , которые содержат в качестве

элемента плоскость отражения, параллельную  $(xy)$ , смешивание тяжелых дырок продольным полем запрещено, и  $g_{h2} \equiv 0$ . Как отмечалось ранее,  $g_{h2}$  равен нулю также в группах  $C_{2v}$  и  $D_{2d}$ . Подводя итог, смешивание тяжелых дырок продольным магнитным полем имеет место только в точках, геометрическая форма которых обладает осью вращения третьего порядка, а также не имеет зеркальной симметрии при отражении в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ .

В завершении рассмотрим эффект Зеемана в поперечном магнитном поле (поле, приложенном в геометрии Фойхта,  $\mathbf{B} \perp [111]$ ). Прямое произведение (3.1) не содержит представления  $\Gamma_3$ , по которому преобразуются компоненты поля  $B_x$  и  $B_y$ , таким образом, симметрия  $C_{3v}$  запрещает смешивание состояний  $|\pm 3/2\rangle$  поперечным магнитным полем. Примечательно, что в отличие от точки QD1 в спектрах точки QD5 наблюдается небольшое расщепление дублетов в двух линейных поляризациях (величина расщепления  $\Delta E_{\max} \approx 40$  мкэВ при 9 Тл, см. рис. 3.4b). Отличие от нуля поперечной компоненты  $g$ -фактора тяжелой дырки для этой точки связано с тем, что ее основание, по всей видимости, имеет небольшое отклонение от правильного треугольника, что приводит к понижению симметрии точки до  $C_s$ . Поперечный эффект Зеемана для тяжелой дырки отсутствует также в любой из 12 гексагональных и тригональных точечных групп. С другой стороны смешивание поперечным полем возможно в группах  $C_{2v}$  и  $D_{2d}$ : расчет и измерения поперечного  $g$ -фактора тяжелой дырки в квантовых ямах  $[001]$  приведены в работе [90].

В разделах 3.3.1 и 3.3.2 будут проанализированы особенности спектров оптических переходов в заряженных и нейтральных электрон-дырочных комплексах, обусловленные смешиванием тяжелых дырок, а в разделе 3.4 приведена микроскопическая теория эффективных  $g$ -факторов, входящих в (3.2).

### 3.3.1 Тонкая структура энергетического спектра трионов

Положительно ( $X^+$ ) и отрицательно ( $X^-$ ) заряженные трионы состоят из двух дырок (электронов) в синглетном состоянии и одного электрона (дырки) в основном состоянии. Схема излучательной рекомбинации  $X^+$  приведена для иллюстрации

на рис. 3.4с, d. Без магнитного поля состояния трионов двукратно вырождены по спину неспаренного носителя заряда, при приложении магнитного поля это вырождение снимается. С учетом смешивания собственные энергии тяжелой дырки в продольном магнитном поле записываются в виде  $E_{\pm} = \pm g_h \mu_B B_z / 2$ , где  $g_h = \sqrt{g_{h1}^2 + g_{h2}^2}$ , а собственные состояния  $|h, \pm\rangle$  являются линейной комбинацией базисных функций  $|\pm 3/2\rangle$

$$|h, +\rangle = C_1|3/2\rangle + C_2| - 3/2\rangle, \quad |h, -\rangle = -C_2|3/2\rangle + C_1| - 3/2\rangle, \quad (3.3)$$

с коэффициентами

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_{h1}}{\sqrt{g_{h1}^2 + g_{h2}^2}} \right)},$$

$$C_2 = \text{sign}(g_{h2}) \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_{h1}}{\sqrt{g_{h1}^2 + g_{h2}^2}} \right)}. \quad (3.4)$$

Ненулевые значения  $g_{h2}$  приводят к тому, что все четыре оптические перехода, изображенные на рис. 3.4с, являются оптически активными. Условимся называть более интенсивные переходы «светлыми», а менее интенсивные – «темными». Энергии переходов наряду с зеемановским вкладом содержат общий для всех линий диамагнитный сдвиг (см. рис. 3.4а и b), поэтому для определения  $g$ -факторов из эксперимента удобно анализировать разность энергий переходов. Расщепления между различными линиями в спектрах являются комбинациями электронных и дырочных вкладов, что позволяет извлечь пару параметров  $g_e$  ( $g$ -фактор электрона) и  $g_h = \sqrt{g_{h1}^2 + g_{h2}^2}$  (см. рис. 3.5а и b). Интенсивности линий в циркулярных поляризациях пропорциональны  $C_1^2$  и  $C_2^2$  и в согласии с экспериментом [125] не зависят от магнитного поля. Из отношения интенсивностей переходов в одинаковых поляризациях

$$\eta \equiv \frac{I_1^{(\pm)}}{I_2^{(\pm)}} = \frac{C_2^2}{C_1^2} = \frac{g_h - g_{h1}}{g_h + g_{h1}}$$

можно извлечь отношение  $g_{h1}/g_h$  следующим образом

$$\frac{g_{h1}}{g_h} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}. \quad (3.5)$$

При определении параметра  $\eta$  нужно правильным образом выбирать линии  $I_1$  и  $I_2$ : при  $g_e > 0$  нужно брать отношение интенсивностей «внешней» и «внутренней» линий (в  $\sigma^-$  поляризации это линии с большей и меньшей энергиями, соответственно), а при  $g_e < 0$  – наоборот. Знак  $g_{h1}$  определяется числителем дроби (3.5), при этом в случае  $g_e > 0$  можно выделить три возможных варианта: случай  $\eta < 1$  («внешние» линии имеют меньшую интенсивность) соответствует  $g_{h1} > 0$ , случай  $\eta > 1$  («внешние» линии имеют большую интенсивность) соответствует  $g_{h1} < 0$  и, наконец, случай  $\eta = 0$  (все линии имеют одинаковую интенсивность) соответствует  $g_{h1} = 0$ . Для иллюстрации на рис. 3.5а, б приведены рассчитанные спектры ФЛ комплексов  $X^\pm$  для двух противоположных значений диагонального  $g$ -фактора ( $g_{h1} = \pm 0.3$ ). Правила отбора при оптических переходах таковы, что относительные положения линий совпадают для обоих комплексов (см. также данные эксперимента, рис. 3.3). Сравнение экспериментальных спектров с теоретическими расчетами показывает, что для всех исследуемых точек и комплексов  $g_{h1} > 0$  (см. рис. 3.3 для точки QD1). В завершение, используя значения  $g_{h1}$  и  $g_h$ , можно определить абсолютное значение  $g_{h2}$ .

### 3.3.2 Тонкая структура нейтрального экситона

В отличие от трионов при анализе энергий переходов и поляризационных свойств излучения нейтрального экситона  $X^0$  нужно учитывать тонкую структуру уровней комплекса в нулевом магнитном поле, связанную с электрон-дырочным обменным взаимодействием. В отсутствие магнитного поля состояния экситона с проекциями спинового момента  $m_z = \pm 1$  отщеплены от состояний с  $m_z = \pm 2$  на энергию  $\delta_0$ <sup>1</sup>. Магнитное поле за счет  $g_{h2} \neq 0$  смешивает светлые и темные

<sup>1</sup>Анизотропное обменное взаимодействие может смешивать светлые и темные состояния экситона уже в нулевом магнитном поле. Однако в экспериментах это смешивание не проявляется, что позволяет сделать вывод о его малости и пренебречь им.

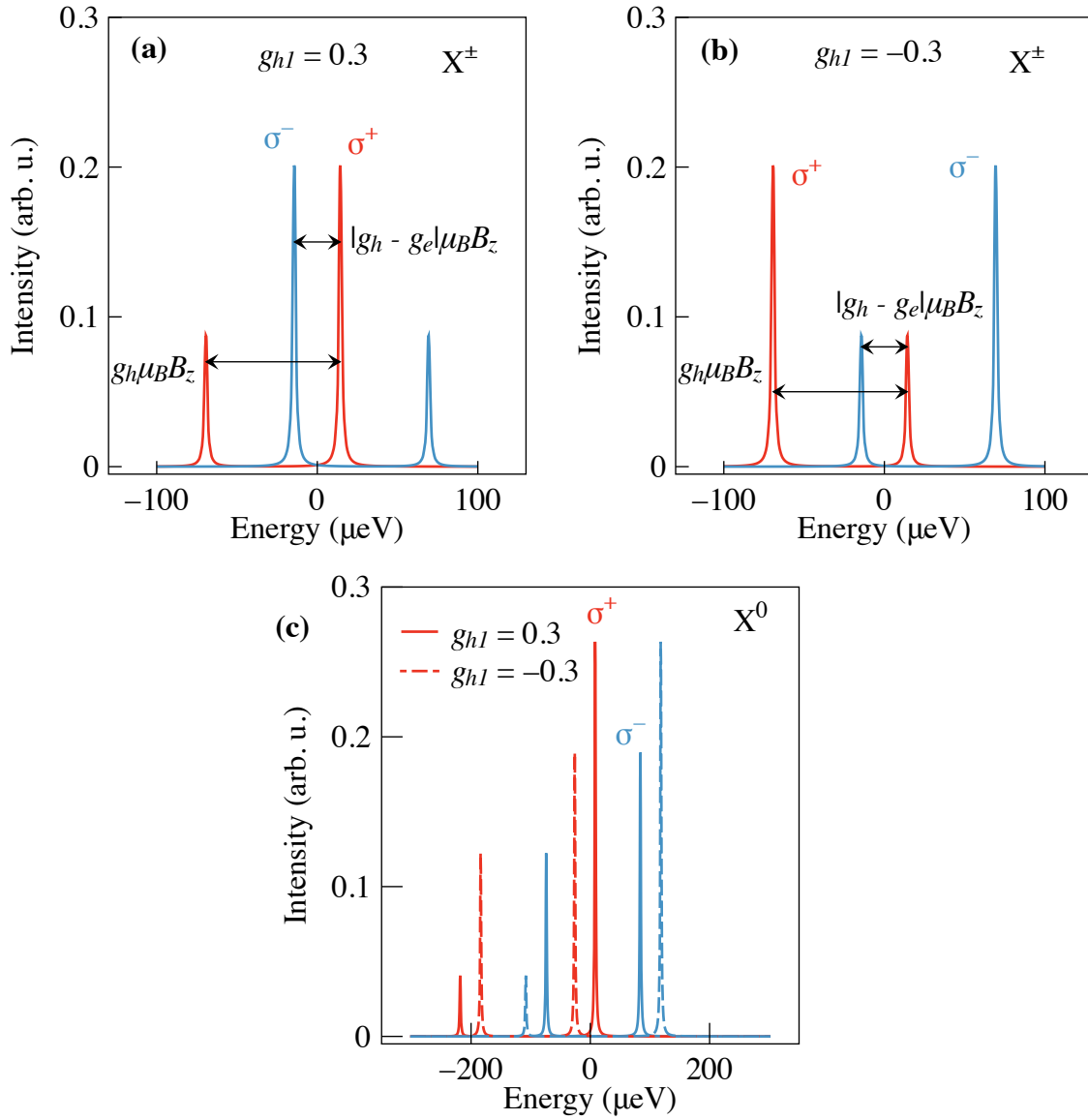


Рис. 3.5: Роль знака  $g_{h1}$ . Рассчитанные спектры ФЛ трионов  $X^\pm$  в  $\sigma^+$  (красные линии) и  $\sigma^-$  (синие линии) поляризациях для  $g_{h1} = 0.3$  (a) и  $g_{h1} = -0.3$  (b). (c) То же для экситона  $X^0$ : сплошными линиями приведены расчеты для  $g_{h1} = 0.3$ , пунктирными – для  $g_{h1} = -0.3$ . Другие параметры:  $g_e = 0.5$ ,  $g_{h2} = 0.7$ ,  $\delta_0 = 100$  мкэВ,  $B_z = 2$  Тл.

экситонные состояния, энергии которых описываются формулой [125]

$$E_{s_z, \tilde{j}} = s_z g_e \mu_B B_z + \frac{1}{2} (\delta_0 + \tilde{j} \delta_{s_z}), \quad (3.6)$$

$$\delta_{s_z} = \sqrt{\delta_0^2 + (g_h \mu_B B_z)^2 - 4 s_z g_{h1} \mu_B B_z \delta_0}.$$

Здесь  $\tilde{j} = \pm 1$  нумерует спиновые состояния тяжелой дырки,  $s_z = \pm 1/2$  –  $z$ -компонента спина электрона и  $\delta_0 > 0$ . Оптически активными являются все четыре состояния, однако при  $B_z \lesssim \delta_0 / (g_h \mu_B)$  интенсивность пары линий с  $s_z = -1/2$ ,  $\tilde{j} = 1$  и  $s_z = 1/2$ ,  $\tilde{j} = -1$  значительно превышает интенсивность другой пары, которая в этом диапазоне полей не разрешается в эксперименте (см. рис. 3.4). Из уравнения (3.6) следует, что расщепление светлых состояний экситона  $E_{+1/2, -1}(B_z) - E_{-1/2, +1}(B_z)$  может быть немонотонной и даже знакопеременной функцией  $B_z$ . Для сравнения в точках [001] наблюдается расщепление, монотонно возрастающее с увеличением магнитного поля [134, 135].

Для определения  $g$ -факторов и обменного расщепления комплекса  $X^0$  используется формула (3.6): расщепление между линиями с одинаковыми  $\tilde{j}$  и разными  $s_z$  позволяет извлечь  $g$ -фактор электрона, в то время как остальные три параметра ( $g_h$ ,  $g_{h2}$  и  $\delta_0$ ) извлекаются из подгонки расщепления между парой линий с разными  $\tilde{j}$  и одинаковыми  $s_z$  как функции магнитного поля. В качестве конкретного примера рассмотрим экспериментально определенные энергии оптических переходов, наблюдаемых в ФЛ точки QD6 (рис. 3.6). Пунктирными стрелками на верхней панели рисунка показано антипересечение светлых и темных состояний экситона  $X^0$ , воспроизвести которое в теоретическом расчете возможно только при наличии ненулевого параметра  $g_{h2}$ . Если положить  $g_{h2}$  равным нулю, то состояния в этой точке будут вырожденными (сплошная линия на рисунке). Магнитное поле в точке вырождения  $B_z^0 = \delta_0 / (g_{h1} \mu_B)$ . Включение смешивания тяжелых дырок приводит к расщеплению, которое в точке  $B_z^0$  равно в точности  $|g_{h2} \mu_B B_z^0|$ . При этом сравнительно небольшое значение  $g_{h2}$  приводит к немонотонному поведению расщепления светлого экситона, которое падает до  $-150$  мкэВ при 6.5 Тл и возрастает до  $-100$  мкэВ при 9 Тл, см. рис. 3.6b. Подгонка позволяет извлечь  $g_e = 0.49$ ,



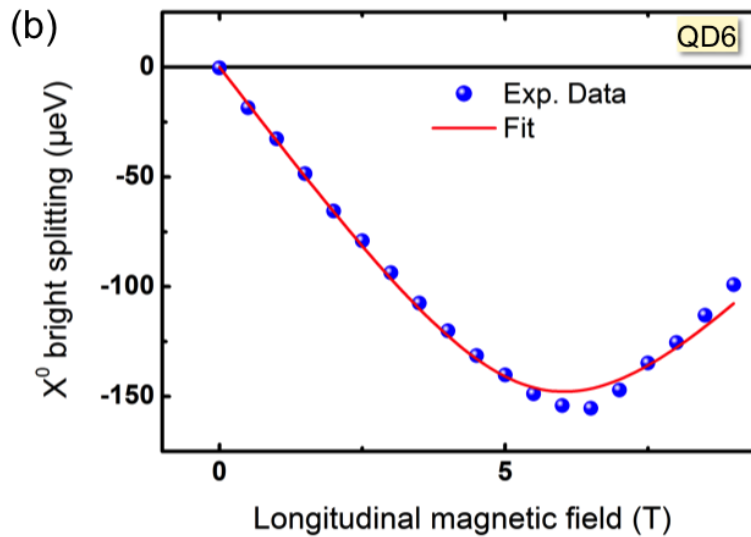
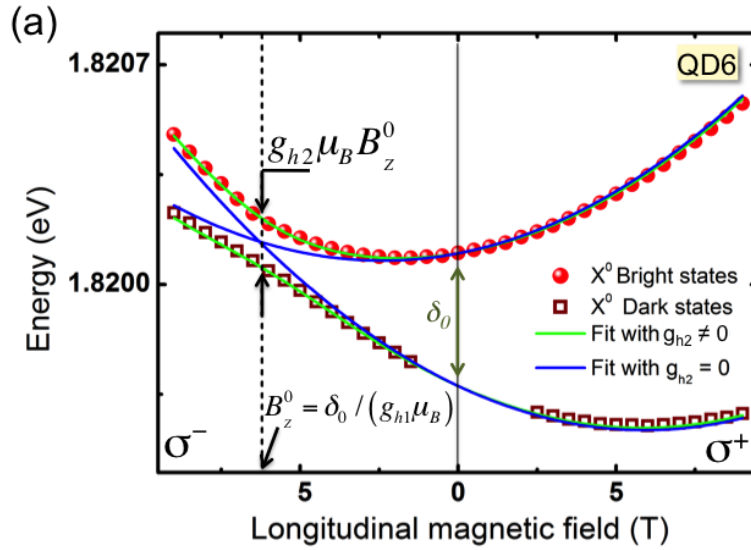


Рис. 3.6: (а) Энергии переходов номинально темных (квадраты) и светлых (круги) состояний нейтрального экситона в зависимости от магнитного поля в геометрии Фарадея. Левые и правые панели отвечают оптическим переходам, активным в  $\sigma^-$ -поляризации ( $s_z = 1/2$ ) и  $\sigma^+$ -поляризации ( $s_z = -1/2$ ), соответственно, см. (3.6). Зелеными кривыми изображены результаты расчета по формуле (3.6) при  $\delta_0 = 422$  мкэВ,  $g_h = 1.16$ ,  $g_e = 0.49$ ,  $g_{h1} = 1.05$  и  $g_{h2} = 0.42$  с учетом диамагнитного сдвига обеих кривых  $E = E_0 + \alpha B_z^2$  с параметрами  $E_0 = 1.819676$  эВ и  $\alpha = 4.15$  мкэВ/Тл<sup>2</sup>. Синяя кривая рассчитана для тех же параметров, но при  $g_{h2} = 0$ . (б) Зеemanовское расщепление светлого экситона как функция магнитного поля. Сплошная кривая – подгонка формулой (3.6).

Таблица 3.1: Величины  $g$ -факторов заряженных и нейтральных комплексов, полученные с помощью подгонки экспериментальных данных (ошибка подгонки  $\leq 10\%$ ).

| геометрия     | QD1     |       | QD5     |       |
|---------------|---------|-------|---------|-------|
|               | Фарадей | Фойхт | Фарадей | Фойхт |
| $X^- : g_e$   | 0.48    | 0.80  | 0.49    | 0.73  |
| $g_h$         | 0.79    | 0     | 0.83    | 0.07  |
| $ g_{h2} $    | 0.57    | -     | 0.53    | -     |
| $X^+ : g_e$   | 0.47    | 0.84  | 0.47    | 0.79  |
| $g_h$         | 0.72    | 0.03  | 0.71    | 0.07  |
| $ g_{h2} $    | 0.7     | -     | 0.62    | -     |
| $X^0 :  g_e $ | 0.47    | 0.80  | 0.47    | 0.77  |
| $g_h$         | 0.72    | 0     | 0.71    | 0.07  |
| $ g_{h2} $    | 0.59    | -     | 0.5     | -     |

$g_{h2} = 0.42$ ,  $g_h = 1.16$  и  $\delta_0 = 422$  мкэВ для этой точки. Соответствующее значение диагонального  $g$ -фактора  $g_{h1} = 1.05$ , для определения его знака также как и в случае трионов можно использовать анализ взаимного расположения линий в спектре ФЛ, см. рис. 3.5с. Отклонение теоретической кривой на рис. 3.6b в области минимума может быть связано с маленьким, но все же ненулевым значением  $\delta_1 \approx 10$  мкэВ, которое не было учтено в теоретическом расчете.

Обработка экспериментальных данных по излучению трионов и нейтрального экситона позволяет извлечь параметры  $g_e$ ,  $g_h$  и  $|g_{h2}|$ , см. табл. 3.1, для каждого комплекса. Во всех изученных квантовых точках  $g_{h2} \neq 0$ , причем величины  $g$ -факторов меняются от точки к точке и отличаются для разных комплексов – последнее свидетельствует о роли кулоновского взаимодействия.

В завершение этого раздела отметим, что весь набор экспериментальных данных в геометрии Фарадея, полученный в результате измерений нескольких десятков квантовых точек, как для нейтральных, так и для заряженных комплексов хорошо описывается простой теоретической моделью, в которой учитываются только линейные по магнитному полю вклады, описываемые двумя  $g$ -факторами  $g_{h1}$  и  $g_{h2}$ . Таким образом, введение всего одного дополнительного параметра  $g_{h2}$  позволяет описать все особенности экситонных переходов в квантовых точках [111]

в сравнении с традиционными точками [001]. Нужно отметить при этом, что в эксперименте часто наблюдаются значения  $|g_{h2}| > |g_{h1}|$ , что говорит о значительности эффекта смешивания тяжелых дырок. В следующем разделе развита микроскопическая теория смешивания тяжелых дырок в квантовых точках тригональной симметрии.

### 3.4 Микроскопическая модель

Два механизма смешивания тяжелых дырок в квантовых точках [111] обсуждались в работе [125]. Первый из них заключается в том, что кубический по угловому моменту  $\mathbf{J}$  вклад в зеэмановский гамильтониан объемной дырки [см. (2.2)], при повороте к собственным осям, связанным с направлением [111], дает слагаемые типа  $B_z (J_x^3 - 3\{J_x J_y^2\}_s)$ , которые приводят к смешиванию тяжелых дырок. Такое смешивание, пропорциональное зонному параметру  $q$ , имеет место и для объемной дырки в случае, когда магнитное поле направлено вдоль оси [111] (аналогичный эффект для экситона, связанного на нейтральном доноре в германии, изучался в работе [137]). В этом механизме  $g_{h2} = 2\sqrt{2}q$ , однако объемное значение  $q$  слишком мало, чтобы объяснить величину наблюдаемого эффекта ( $q \approx 0.02$  в GaAs [90]). Второй возможный механизм смешивания тяжелых дырок, предложенный в [125], связан с кубическим по волновому вектору спин-зависимым членом  $\mathcal{H}_v^{(3)}$  в гамильтониане валентной зоны  $\Gamma_{8v}$  (подробнее см. (1.3) и раздел 1.3). Оценки, выполненные в рамках модели, предложенной в [125], дают  $|g_{h2}| \sim 0.1$  для реалистичных параметров структуры, что также недостаточно для описания экспериментальных данных. Отметим, что оба перечисленных выше вклада пропорциональны параметрам ( $q$  и  $\delta\gamma_v$ ), которые можно получить только в рамках многозонных моделей. Интерфейсное смешивание тяжелой и легкой дырки, играющее важную роль в тонкой структуре экситонных уровней в низкоразмерных структурах, выращенных вдоль [001] [38, 138, 119], в структурах, описываемых симметрией  $C_{3v}$ , запрещено, что исключает и этот потенциально возможный механизм из рассмот-

рения.

Ниже будет показано, что существенный вклад в  $g_{h2}$  можно получить в рамках гамильтониана Латтинжера, учитывая специфическую форму исследуемых квантовых точек в виде правильных треугольных пирамид.

### 3.4.1 Квантование движения дырки в квантовой точке формы треугольной пирамиды

Состояния тяжелой дырки в квантовой точке описываются при помощи гамильтониана Латтинжера (1.17) (здесь и далее, за исключением раздела 3.5, мы будем использовать сферическое приближение,  $\gamma_2 = \gamma_3 \equiv \gamma$ ) и оператора потенциальной энергии дырки  $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ , который записывается в следующем матричном виде

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} V_{hh}(\mathbf{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{lh}(\mathbf{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{lh}(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{hh}(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

с различными энергиями тяжелой ( $V_{hh}$ ) и легкой ( $V_{lh}$ ) дырки. В самоорганизующихся квантовых точках размерное квантование вдоль оси роста  $z$  существенно сильнее, чем в плоскости точки, что позволяет отделить движение дырки вдоль оси  $z$  от движения в плоскости точки  $(x, y)$ . Представим потенциал, действующий на дырку, в следующем сепарабельном виде [139, 140]

$$V_n(\mathbf{r}) = V_z^n(z) + V_{\parallel}^n(\rho, \varphi), \quad (3.7)$$

где для удобства используется цилиндрическая система координат с осью цилиндра  $z$  и полярными координатами в плоскости  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\varphi$  (угол  $\varphi$  отсчитывается от  $x \parallel [11\bar{2}]$ ). Собственные состояния и энергии являются решениями стационарного уравнения Шредингера

$$[\mathcal{H}_{\Gamma_8} + \mathcal{V}(\mathbf{r})]\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = E\hat{\Psi}(\mathbf{r}),$$

где  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  – столбец, сформированный из четырех огибающих  $\Psi_m(\mathbf{r})$  с  $m = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ .

В нулевом приближении недиагональными компонентами  $\mathcal{H}_{\Gamma_8}$  можно пренебречь, что приводит к независимому квантованию тяжелой и легкой дырки вдоль оси роста. При этом четырех-компонентный столбец  $\hat{\Psi}$  имеет только одну ненулевую компоненту  $\Psi_m^n$  с  $m = \pm 3/2$  при  $n = hh$  и  $m = \pm 1/2$  при  $n = lh$  [141]. Сепарабельная форма потенциала (3.7) позволяет разделить переменные в огибающих  $\Psi_m^n(\mathbf{r})$  [139, 140]:

$$\Psi_{m;lp}^n(\mathbf{r}) = F_l^n(z)\psi_p^n(\rho, \varphi). \quad (3.8)$$

Здесь  $F_l^n(z)$  описывает размерное квантование дырки вдоль оси роста (индекс  $l = 1, 2 \dots$  нумерует уровни квантования вдоль этой оси), а  $\psi_p^n(\rho, \varphi)$  описывает квантование в плоскости точки (индекс  $p = 1, 2 \dots$  нумерует состояния в плоскости). Волновые функции  $F_l^n$  и  $\psi_p^n$  определяются таким образом из решений уравнений метода эффективной массы для легких и тяжелых дырок.

Конкретный вид потенциала (3.7) должен учитывать то, что рассматриваемые квантовые точки имеют форму треугольных пирамид, характеризуемых симметрией вращения третьего порядка в плоскости  $(xy)$ , а также отсутствием симметрии к отражению  $z \rightarrow -z$ . В качестве простейшего потенциала, моделирующего асимметрию вдоль оси  $z$ , мы выбираем потенциал так называемой «треугольной» ямы

$$V_z^n(z) = \begin{cases} |e|\mathcal{F}z, & z > 0 \\ +\infty, & z < 0 \end{cases}, \quad (3.9)$$

где  $z = 0$  – координата основания квантовой точки, и  $\mathcal{F}$  – эффективное электрическое поле, нарушающее симметрию  $z \rightarrow -z$  и локализующее дырку вдоль оси  $z$ . Огибающие вдоль оси  $z$ , таким образом, выражаются через функции Эйри

$$F_l^n(z) = C_l^n \text{Ai}(Z_l^n), \quad (3.10)$$

где  $C_l^n$  – нормировочная постоянная,

$$Z_l^n = \frac{z}{L_n} - \mu_l, \quad L_n = \left( \frac{\hbar^2}{2m_{n,z}e\mathcal{F}} \right)^{1/3},$$

$\mu_l$  –  $l$ -ый корень уравнения  $\text{Ai}(-Z) = 0$ , и эффективная масса при движении дырки

вдоль оси  $z$   $m_{n,z} = m_0/(\gamma_1 \pm 2\bar{\gamma})$ , при этом верхний и нижний знаки выбираются в случае  $n = lh$  и  $n = hh$ , соответственно.

В качестве потенциала в плоскости мы выбираем аналитическую функцию  $\rho$ , состоящую из основного параболического вклада [142, 143, 144], а также кубической по  $\rho$  поправки, описывающей тригональное искажение

$$V_{\parallel}^n(\rho, \varphi) = \frac{\hbar^2 \rho^2}{2m_{n,\parallel} a_n^4} \left( 1 + \beta \frac{\rho}{a_n} \cos 3\varphi \right). \quad (3.11)$$

Здесь  $m_{n,\parallel} = m_0/(\gamma_1 \pm \bar{\gamma})$  – эффективные массы тяжелой (знак  $+$ ) и легкой (знак  $-$ ) дырок при движении в плоскости квантовой точки,  $a_n$  – эффективные радиусы локализации, и безразмерный параметр  $\beta$  описывает степень тригональности потенциала. Отметим, что при расчете эффективных масс  $m_{n,\parallel}$  мы для простоты пренебрегаем вкладом, индуцированным смешиванием состояний тяжелой и легкой дырки недиагональными элементами гамильтониана Латтинжера. Изоэнергетические поверхности потенциала квантовой точки (3.7), (3.9), (3.11) приведены на рис. 3.7. На рисунке отчетливо виден переход от аксиальной ( $\beta = 0$ ) к тригональной ( $\beta = -0.35$ ) симметрии.

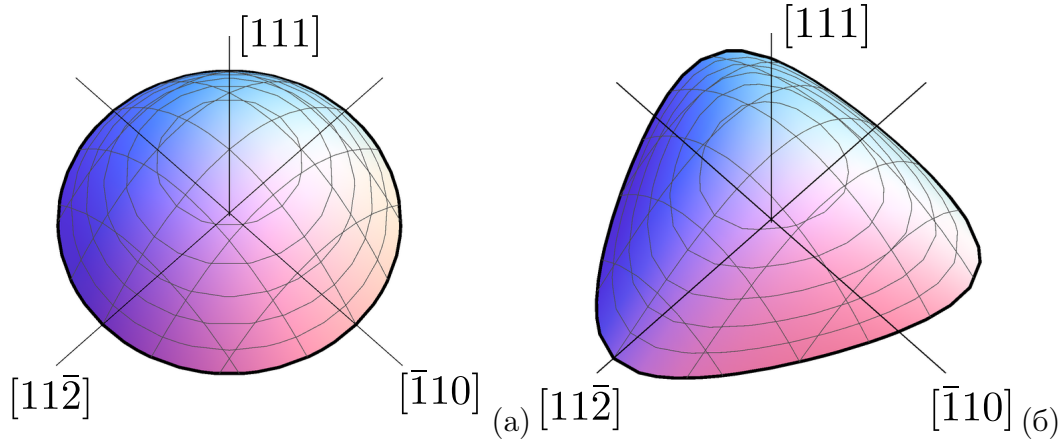


Рис. 3.7: Изоэнергетические поверхности потенциала квантовой точки для двух значений параметра тригональности  $\beta = 0$  (а) и  $\beta = -0.35$  (б).

Для параметров GaAs  $\gamma_1 = 6.98$  и  $\bar{\gamma} = 2.58$  имеем  $m_{hh,z} = 0.55m_0$ ,  $m_{lh,z} = 0.08m_0$ ,  $m_{hh,\parallel} = 0.1m_0$  и  $m_{lh,\parallel} = 0.22m_0$ . Энергии размерного квантова-

ния дырки в приближении сепарабельного потенциала представляют собой сумму энергий размерного квантования вдоль оси  $z$  и в плоскости  $(xy)$ :  $E_{lp}^n = \varepsilon_l^n + E_{\parallel,p}^n$ . Энергии размерного квантования вдоль оси  $z$  записываются в виде

$$\varepsilon_l^n = \frac{\hbar^2 \mu_l}{2m_{n,z} L_n^2}. \quad (3.12)$$

Удобно ввести эффективный размер точки вдоль оси  $z$  как  $L = \sqrt{L_{hh} L_{lh}}$ . При  $L = 30 \text{ \AA}$  значения энергий основных состояний тяжелой и легкой дырок равны, соответственно,  $\varepsilon_1^{hh} \approx 33 \text{ мэВ}$  и  $\varepsilon_1^{lh} \approx 63 \text{ мэВ}$ . При  $\beta = 0$  уровни квантования в плоскости  $E_{\parallel,p}^n$  формируют эквидистантный набор с расстоянием между двумя соседними уровнями

$$\hbar\omega_n = \frac{\hbar^2}{m_{n,\parallel} a_n^2}, \quad (3.13)$$

а собственные состояния совпадают с собственными состояниями двумерного изотропного гармонического осциллятора. В дальнейшем будем считать, что потенциал в плоскости одинаков для тяжелой и легкой дырок. Из этого предположения следует, что  $m_{hh,\parallel} a_{hh}^4 = m_{lh,\parallel} a_{lh}^4$ , при этом отношение радиусов локализации для параметров GaAs  $a_{hh}/a_{lh} \approx 1.21$ . Выбрав  $75 \text{ \AA}$  в качестве разумного значения для  $a_{hh}$ , получим  $\hbar\omega_{hh} \approx 6.5 \text{ мэВ}$  и  $\hbar\omega_{lh} \approx 4.4 \text{ мэВ}$ . Отметим, что эти значения малы по сравнению с разницей  $\varepsilon_1^{lh} - \varepsilon_1^{hh} \approx 30 \text{ мэВ}$  энергий квантования вдоль оси  $z$ .

### 3.4.2 Диагональная компонента тензора $g$ -фактора

Размерное квантование и магнитоиндуцированное смешивание дырок приводит к перенормировке как диагонального  $g$ -фактора  $g_{h1}$  по отношению к его объемному значению  $-6\chi$ , так и появлению недиагонального  $g$ -фактора  $g_{h2}$ . Начнем анализ с диагональной компоненты. В пренебрежении кубическими вкладами она содержит два вклада:

$$g_{h1} = -6\chi + \Delta g_{h1}, \quad (3.14)$$

где перенормировка  $\Delta g_{h1}$  описывается следующим выражением (ср. с 2.2 и [145, 146, 147, 148, 149, 150, 151])

$$\Delta g_{h1} = \frac{2}{\mu_B B_z} \sum_{lp\pm} \frac{\langle \Psi_{3/2;11}^{hh} | \hat{\mathcal{H}}_{\Gamma_8} | \Psi_{\pm 1/2;lp}^{lh} \rangle \langle \Psi_{\pm 1/2;lp}^{lh} | \hat{\mathcal{H}}_{\Gamma_8} | \Psi_{3/2;11}^{hh} \rangle}{\varepsilon_1^{hh} + E_{\parallel,1}^{hh} - \varepsilon_l^{lh} - E_{\parallel,p}^{lh}}. \quad (3.15)$$

Здесь суммирование производится по всем состояниям легкой дырки с индексами  $l$  и  $p$ . С использованием явного вида огибающих (3.8) выражение (3.15) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \Delta g_{h1} &= \frac{2}{\mu_B B_z} \sum_{lp} (\varepsilon_1^{hh} + E_{\parallel,1}^{hh} - \varepsilon_l^{lh} - E_{\parallel,p}^{lh})^{-1} \\ &\times \left( \langle F_1^{hh} \psi_1^{hh} | \tilde{H} | F_l^{lh} \psi_p^{lh} \rangle \langle F_l^{lh} \psi_p^{lh} | \tilde{H}^* | F_1^{hh} \psi_1^{hh} \rangle + \langle F_1^{hh} \psi_1^{hh} | \tilde{I} | F_l^{lh} \psi_p^{lh} \rangle \langle F_l^{lh} \psi_p^{lh} | \tilde{I}^* | F_1^{hh} \psi_1^{hh} \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь  $\tilde{H}$  и  $\tilde{I}$  – недиагональные элементы гамильтониана (1.17), содержащие независимые от поля и линейные по  $B_z$  вклады:

$$\tilde{H} = -\frac{\sqrt{3}\hbar^2}{m_0} \bar{\gamma} k_z \left( k_- - \frac{|e|}{c\hbar} A_- \right), \quad (3.17a)$$

$$\tilde{I} = -\frac{\sqrt{3}\hbar^2}{2m_0} \bar{\gamma} \left( k_-^2 - \frac{2|e|}{c\hbar} \{k_- A_- \} \right), \quad (3.17b)$$

где  $k_\alpha$  – дифференциальные операторы  $-i\partial/\partial x_\alpha$ , фигурные скобки обозначают симметризованное произведение операторов. С учетом явного выражения для векторного потенциала  $A_\pm = \pm \frac{i}{2} B r_\pm$  ( $r_\pm = x \pm iy$ ), и оставляя слагаемые, не выше первого порядка по магнитному полю, запишем выражение (3.16) в виде

$$\begin{aligned} \Delta g_{h1} &= - \sum_{lp} (\varepsilon_1^{hh} + E_{\parallel,1}^{hh} - \varepsilon_l^{lh} - E_{\parallel,p}^{lh})^{-1} \times \\ &6i \frac{\hbar^2 \bar{\gamma}^2}{m_0 L^2} \left[ \eta_l^2 \left( \langle \psi_1^{hh} | k_- | \psi_p^{lh} \rangle \langle \psi_p^{lh} | r_+ | \psi_1^{hh} \rangle - \langle \psi_1^{hh} | r_- | \psi_p^{lh} \rangle \langle \psi_p^{lh} | k_+ | \psi_1^{hh} \rangle \right) + \right. \\ &\left. + \frac{L^2}{2} \zeta_l^2 \left( \langle \psi_1^{hh} | k_-^2 | \psi_p^{lh} \rangle \langle \psi_p^{lh} | \{k_+ r_+\} | \psi_1^{hh} \rangle - \langle \psi_1^{hh} | \{k_- r_-\} | \psi_p^{lh} \rangle \langle \psi_p^{lh} | k_+^2 | \psi_1^{hh} \rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\eta = L \int F_1^{hh}(z) \frac{\partial}{\partial z} F_l^{lh}(z) dz, \quad (3.19a)$$



$$\zeta_l = \int F_1^{hh}(z) F_l^{lh}(z) dz . \quad (3.19b)$$

Сумма в выражении (3.18) может быть посчитана в явном виде с точностью до членов  $(L/a)^2$  при использовании свойства полноты набора  $\psi_p^{lh}$

$$\sum_p \langle \psi_1^{hh} | \hat{F}_1 | \psi_p^{lh} \rangle \langle \psi_p^{lh} | \hat{F}_2 | \psi_1^{hh} \rangle = \langle \psi_1^{hh} | \hat{F}_1 \hat{F}_2 | \psi_1^{hh} \rangle ,$$

где  $\hat{F}_1$  и  $\hat{F}_2$  – два произвольных оператора. Таким образом,  $\Delta g_{h1}$  в пределе  $L/a \ll 1$  записывается в следующей компактной форме

$$\Delta g_{h1} = -6i \sum_l \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1^{hh} - \varepsilon_l^{lh}} \left( \eta_l^2 \langle \psi_1^{hh} | k_- r_+ - r_- k_+ | \psi_1^{hh} \rangle + \right. \\ \left. + \frac{L^2}{2} \xi_l^2 \langle \psi_1^{hh} | k_-^2 \{k_+ r_+\} - \{k_- r_-\} k_+^2 | \psi_1^{hh} \rangle \right) , \quad (3.20)$$

где  $\varepsilon_0 = \hbar^2 \bar{\gamma}^2 / (m_0 L^2)$  и

$$\xi_l^2 = \zeta_l^2 - \frac{2\eta_l^2}{\mu_l \sqrt{m_{lh,\parallel} m_{hh,\parallel}} / m_{lh,z} - \mu_1 m_{hh,\parallel} / m_{hh,z}} .$$

С учетом коммутационных соотношений операторы в угловых скобках могут быть записаны в виде

$$k_- r_+ - r_- k_+ = -2i - 2i [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]_z = -2i - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} , \quad (3.21a)$$

$$k_-^2 \{k_+ r_+\} - \{k_- r_-\} k_+^2 = -4i k_{\parallel}^2 - 2i k_{\parallel}^2 [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]_z = -4i k_{\parallel}^2 - 2k_{\parallel}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (3.21b)$$

Для вычисления последнего оператора удобно использовать соотношения  $[k_+, r_+] = [k_-, r_-] = 0$  и  $[[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]_z, k_+] = k_+$ . Вторые слагаемые в операторах (3.21) представляют собой операторы  $z$ -проекции углового момента и не дают вклада в матричные элементы, посчитанные на волновой функции основного состояния тяжелой дырки  $\psi_1^{hh}$ . Окончательно выражение для  $\Delta g_{h1}$  принимает вид

$$\Delta g_{h1} = -12 \sum_l \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1^{hh} - \varepsilon_l^{lh}} \left( \eta_l^2 + \xi_l^2 \frac{L^2}{a^2} \right) = \\ = 24 \bar{\gamma}^2 \frac{\sqrt[3]{m_{hh,z} m_{lh,z}^2}}{m_0} \sum_l \frac{\eta_l^2 + \xi_l^2 (L^2/a^2)}{\mu_l - \mu_1 \sqrt[3]{m_{lh,z} / m_{hh,z}}} . \quad (3.22)$$

Выполняя численное суммирование в (3.22) по индексу  $l$  и подставляя значения параметров  $\gamma_1$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $m_{hh,\parallel}$  и  $m_{lh,\parallel}$  для GaAs, получим

$$g_{h1} \approx -6\chi + 4.5 + 15.1 \frac{L^2}{a^2}. \quad (3.23)$$

Приведенный выше расчет  $g_{h1}$  выполнен при  $\beta = 0$ . Отметим, что вследствие симметричных соображений поправка к  $g_{h1}$ , учитывающая тригональное искажение точки, квадратична по параметру  $\beta$ . Действительно, при повороте точки вокруг оси  $z$  на угол  $\pi$  параметр  $\beta$  меняет знак, в то время как  $g_{h1}$  очевидно не меняется. Как следует из дальнейших расчетов, разумные значения параметра  $\beta$  лежат в области  $0.2 \div 0.25$ , поэтому поправкой  $\propto \beta^2$  можно пренебречь.

### 3.4.3 Магнитоиндуцированное смешивание тяжелых дырок

Как уже упоминалось, в нашей модели смешивания тяжелых дырок ключевую роль играет пирамидальная форма квантовой точки. Тригональная дисторсия параболического потенциала в плоскости, описываемая слагаемым  $\propto \beta \rho^3 \cos 3\varphi$  в (3.11), приводит к понижению симметрии основного состояния тяжелой дырки. Волновая функция в пределе  $|\beta| \ll 1$  приобретает следующую поправку

$$\tilde{\psi}_1^{hh} \propto \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2}\right) \left[1 + \beta \cos 3\varphi C(\rho) \frac{\rho^3}{a^3}\right], \quad (3.24)$$

где функция  $C(\rho)$  ограничена при  $\rho = 0$ , и приведены только линейные по  $\beta$  члены. Вариационный расчет с постоянной  $C(\rho) \equiv C_0$  дает для  $C_0$  значение  $-1/6$ .

По аналогии со спин-зависимым сдвигом энергий состояний  $\pm 3/2$  (описываемым диагональным  $g$ -фактором  $g_{h1}$ ) магнитоиндуцированное смешивание состояний  $3/2$  и  $-3/2$  возникает в рамках второго порядка теории возмущений [ср. с (3.15)]

$$\mathcal{H}_{B,3/2,-3/2} \equiv \frac{1}{2} g_{h2} \mu_B B_z = \sum_{lp\pm} \frac{\left\langle \Psi_{3/2;11}^{hh} | \hat{\mathcal{H}}_{\Gamma_8} | \Psi_{\pm 1/2;lp}^{lh} \right\rangle \left\langle \Psi_{\pm 1/2;lp}^{lh} | \hat{\mathcal{H}}_{\Gamma_8} | \Psi_{-3/2;11}^{hh} \right\rangle}{\varepsilon_1^{hh} + E_{\parallel,1}^{hh} - \varepsilon_l^{lh} - E_{\parallel,p}^{lh}}. \quad (3.25)$$

С использованием явного вида огибающих (3.8) выражение (3.25) может быть приведено к виду

$$g_{h2} = \frac{2}{\mu_B B_z} \sum_{lp} (\varepsilon_1^{hh} + E_{\parallel,1}^{hh} - \varepsilon_l^{lh} - E_{\parallel,p}^{lh})^{-1} \times \left( \left\langle F_1^{hh} \psi_1^{hh} | \tilde{H} | F_l^{lh} \psi_p^{lh} \right\rangle \left\langle F_l^{lh} \psi_p^{lh} | \tilde{I} | F_1^{hh} \psi_1^{hh} \right\rangle - \left\langle F_1^{hh} \psi_1^{hh} | \tilde{I} | F_l^{lh} \psi_p^{lh} \right\rangle \left\langle F_l^{lh} \psi_p^{lh} | \tilde{H} | F_1^{hh} \psi_1^{hh} \right\rangle \right). \quad (3.26)$$

Два вклада в (3.26) входят с разным знаком, отсюда следует, что в нулевом магнитном поле (когда  $\tilde{H}$  и  $\tilde{I}$  коммутируют) эффект смешивания отсутствует. С учетом (3.17) и (3.19) выражение (3.26) записывается в виде

$$g_{h2} = \frac{12\hbar^2 \bar{\gamma}^2}{m_0 L} \sum_{lp} \frac{\eta_l \zeta_l}{\varepsilon_1^{hh} + E_{\parallel,1}^{hh} - \varepsilon_l^{lh} - E_{\parallel,p}^{lh}} \times \left( \frac{1}{2} \left\langle \tilde{\psi}_1^{hh} | k_-^2 | \psi_p^{lh} \right\rangle \left\langle \psi_p^{lh} | r_- | \tilde{\psi}_1^{hh} \right\rangle + \left\langle \tilde{\psi}_1^{hh} | k_- | \psi_p^{lh} \right\rangle \left\langle \psi_p^{lh} | \{k_- r_-\} | \tilde{\psi}_1^{hh} \right\rangle \right). \quad (3.27)$$

В пределе изотропной точки ( $\beta = 0$ ) произведения матричных элементов в скобках равны нулю для любого значения индекса  $p$ , и следовательно,  $g_{h2} = 0$ . Это следует из того, что два матричных элемента из пары не могут быть отличны от нуля одновременно. Учет тригональности приводит к появлению третьей гармоники ( $\propto \cos 3\varphi$ ) в основном состоянии тяжелой дырки  $\tilde{\psi}_1^{hh}$  (3.24), и как следствие, сумма в круглых скобках отлична от нуля для состояний легкой дырки, содержащих первую и вторую угловые гармоники (индекс  $p = 2$  и  $p = 3$ ).

Выражение (3.27) можно упростить аналогично (3.20) в пределе  $L/a \ll 1$ , воспользовавшись полнотой набора  $\psi_p^{lh}$ . С учетом коммутационных соотношений, получим для оператора

$$\frac{1}{2} k_-^2 r_- + k_- \{k_- r_-\} = \frac{3}{2} r_- k_-^2.$$

Окончательно

$$g_{h2} = -\frac{18\hbar^2 \bar{\gamma}^2}{m_0 L} \sum_l \frac{\eta_l \zeta_l}{\varepsilon_1^{hh} - \varepsilon_l^{lh}} \left\langle \tilde{\psi}_1^{hh} \left| (x - iy) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right| \tilde{\psi}_1^{hh} \right\rangle. \quad (3.28)$$

Дифференциальный оператор, входящий в выражение для  $g_{h2}$ , при действии на функцию заданного углового момента меняет его значение на 3, поэтому его матричный элемент между функциями  $\tilde{\psi}_1^{hh}$  не равен нулю. Из формулы (3.28) видно,

что  $g_{h2}$  отличен от нуля только при одновременном выполнении двух условий: (i) основание точки имеет треугольную форму, т.е.  $\beta \neq 0$ , иначе интегрирование в плоскости дает ноль, и (ii) точка асимметрична в направлении оси  $z$ , иначе произведение  $\eta_l \zeta_l$  равно нулю в силу соображений четности.

Значение матричного элемента (3.28) на огибающей (3.24) равно

$$\left\langle \tilde{\psi}_1^{hh} \left| (x - iy) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right| \tilde{\psi}_1^{hh} \right\rangle = \frac{6C_0\beta}{a}.$$

Подставляя  $C_0 = -1/6$  и энергии квантования вдоль  $z$ , получим

$$g_{h2} = 36\beta\bar{\gamma}^2 \frac{\sqrt[3]{m_{hh,z}m_{lh,z}^2}}{m_0} \frac{L}{a} \sum_l \frac{\eta_l \zeta_l}{\mu_1 \sqrt[3]{m_{lh,z}/m_{hh,z}} - \mu_l}. \quad (3.29)$$

Численное суммирование в (3.29) для параметров GaAs дает

$$g_{h2} \approx -7.8\beta \frac{L}{a}. \quad (3.30)$$

Здесь мы пренебрегли малым вкладом  $2\sqrt{2}q$ . Разумные значения  $\beta = -0.2$ ,  $L/a = 0.3$  дают  $g_{h2} \approx 0.5$ , в хорошем согласии с экспериментом (см. табл. 3.1).

### 3.5 Выход за рамки сферического приближения

В развитой выше теории использовалось так называемое сферическое приближение, в котором все кристаллографические направления эквивалентны, а общая симметрия задачи  $C_{3v}$  связывалась только с характерной тригональной формой исследуемых точек. Однако симметрия  $C_{3v}$  присуща кристаллографическому направлению  $[111]$  даже в отсутствие квантующего потенциала, ограничивающего движение дырки в плоскости, и следовательно смешивание тяжелых дырок имеет место не только в квантовых точках, но и в квантовых ямах. Помимо малых кубических вкладов в эффект Зеемана, описываемых параметром  $q$ , а также вкладов от кубических по  $k$  членов, дополнительный вклад в недиагональный  $g$ -фактор  $g_{h2}$  в структурах с квантовыми ямами возникает за счет «кубической» поправки

к гамильтониану Латтинжера

$$\delta\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{m_0} \delta\gamma \sum_i J_i^2 k_i^2, \quad (3.31)$$

где  $\delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_3$ . После преобразования системы координат из кристаллографического базиса [100], [010], [001] в связанный с точкой базис  $x, y, z$  получим

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{m_0} \delta\gamma \left\{ \frac{1}{3} \mathbf{k}^2 (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) + \frac{1}{6} \left[ (k_x^2 - k_y^2 - 2\sqrt{2}k_x k_z)(J_x^2 - J_y^2 - 2\sqrt{2}\{J_x, J_z\}_s) + \right. \right. \\ \left. \left. + (2k_x k_y + 2\sqrt{2}k_y k_z)(2\{J_x, J_y\}_s + 2\sqrt{2}\{J_y, J_z\}_s) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Первый член в (3.32) содержит диагональные компоненты, которые приводят к модификации элементов  $G$  и  $F$  гамильтониана Латтинжера в сферическом приближении (1.17), в частности к изменению эффективных масс тяжелой и легкой дырок вдоль оси роста  $[m_{lh(hh),z}^{[111]} = 1/(\gamma_1 \pm 2\gamma_3)]$ . Второй член дает поправки  $\propto \delta\gamma$  к недиагональным элементам  $H$  и  $I$  гамильтониана (1.17). В случае  $\delta\gamma \ll \bar{\gamma}$ , характерном для большинства полупроводников с решеткой цинковой обманки [152], элементы  $H$  и  $I$  с учетом кубических поправок записываются в виде

$$\begin{aligned} H' &= \sqrt{3} \frac{\hbar^2 \bar{\gamma}}{m_0} k_z k_- - \frac{\sqrt{6} \hbar^2 \delta\gamma}{6 m_0} k_+^2, \\ I' &= \frac{\sqrt{3} \hbar^2 \bar{\gamma}}{2 m_0} k_-^2 - \frac{\sqrt{6} \hbar^2 \delta\gamma}{3 m_0} k_z k_+. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Вклад в  $g_{h2}$ , имеющий место в квантовых ямах, обусловлен слагаемыми  $\propto k_z$  в  $H'$  и  $I'$  и равен

$$\Delta g_{h2}^{(0)} = 8\sqrt{2} \frac{\hbar^2}{m_0} \bar{\gamma} \delta\gamma \sum_l \frac{\eta_l^2}{L^2(\varepsilon_1^{hh} - \varepsilon_l^{lh})}. \quad (3.34)$$

Оценка для симметричной ямы GaAs с бесконечными барьерами дает  $\Delta g_{h2}^{(0)} = -0.94\delta\gamma$ , для треугольной ямы  $\Delta g_{h2}^{(0)} = -1.66\delta\gamma$ .

Учет вкладов в (3.33), пропорциональных вторым степеням операторов  $k_{\pm}$ , а также разложение энергетического знаменателя для вкладов  $\propto k_z$  дают вклад в  $g_{h2}$ , пропорциональный  $(L/a)^2$

$$\Delta g_{h2}^{(2)} = -8\sqrt{2} \frac{\hbar^2}{m_0} \bar{\gamma} \delta\gamma \frac{L^2}{a^2} \sum_l \frac{\xi_l^2}{L^2(\varepsilon_1^{hh} - \varepsilon_l^{lh})}. \quad (3.35)$$

Отметим, что в отличие от выражения (3.29) для  $g_{h2}$  в тригональных точках вклад (3.35) отличен от нуля в точках с изотропным основанием, имеющих форму конуса и диска. Оценка для симметричного потенциала с бесконечными барьерами вдоль оси роста точки (модель диска) дает  $\Delta g_{h2}^{(2)} = 0.46\delta\gamma (L/a)^2$ , для треугольного потенциала (модель конуса) имеем  $\Delta g_{h2}^{(2)} = 5.5\delta\gamma (L/a)^2$ .

Последняя поправка возникает при учете в (3.33) произведений, пропорциональных  $(\delta\gamma)^2$ . Такой вклад существует только в тригональной точке и имеет вид

$$\Delta g_{h2}^{(1)} = 4 \frac{\hbar^2}{m_0} (\delta\gamma)^2 \beta \frac{L}{a} \sum_l \frac{\eta_l \zeta_l}{L^2 (\varepsilon_1^{lh} - \varepsilon_l^{lh})}. \quad (3.36)$$

Численный расчет дает  $\Delta g_{h2}^{(1)} \approx -0.26 (\delta\gamma)^2 \beta L/a$ . Таким образом, окончательно для недиагонального  $g$ -фактора в точках формы диска и симметричных квантовых ямах [111] имеем

$$g_{h2}^{(S)} = -0.94\delta\gamma + 0.46\delta\gamma \left(\frac{L}{a}\right)^2, \quad (3.37)$$

в то время как в пирамидальных точках и асимметричных ямах [111]

$$g_{h2}^{(A)} = -1.66\delta\gamma - [7.8 + 0.26 (\delta\gamma)^2] \beta \frac{L}{a} + 5.5\delta\gamma \left(\frac{L}{a}\right)^2. \quad (3.38)$$

## 3.6 Обсуждение полученных результатов и сравнение с экспериментальными данными

На рис. 3.8 приведены рассчитанные на основе формул (3.23) и (3.30) зависимости  $g$ -факторов  $g_{h1}$  и  $g_{h2}$  как функции отношения  $L/a$ . Здесь мы пренебрегаем «кубическими» поправками  $\propto \delta\gamma$  и  $\propto (\delta\gamma)^2$  в  $g_{h2}$ . Значения  $|g_{h2}|$  изменяются в диапазоне  $0.2 \div 0.7$  для разумных значений отношения  $L/a \lesssim 0.5$  и  $|\beta| < 0.3$ , при которых профиль волновой функции (3.24) выпуклый, и форма потенциала аналогична наблюдаемой в экспериментах АСМ (см. рис. 3.7). Полученные значения  $|g_{h2}|$  находятся в хорошем согласии с экспериментальными наблюдениями (см. табл. 3.1). Отметим, что при  $\beta \gtrsim 0.3$  у функции  $\tilde{\psi}_1^{hh}$  появляются нефизичные нули. Систематическое отличие между недиагональными  $g$ -факторами  $g_{h2}$  в трионах  $X^+$  и  $X^-$ ,

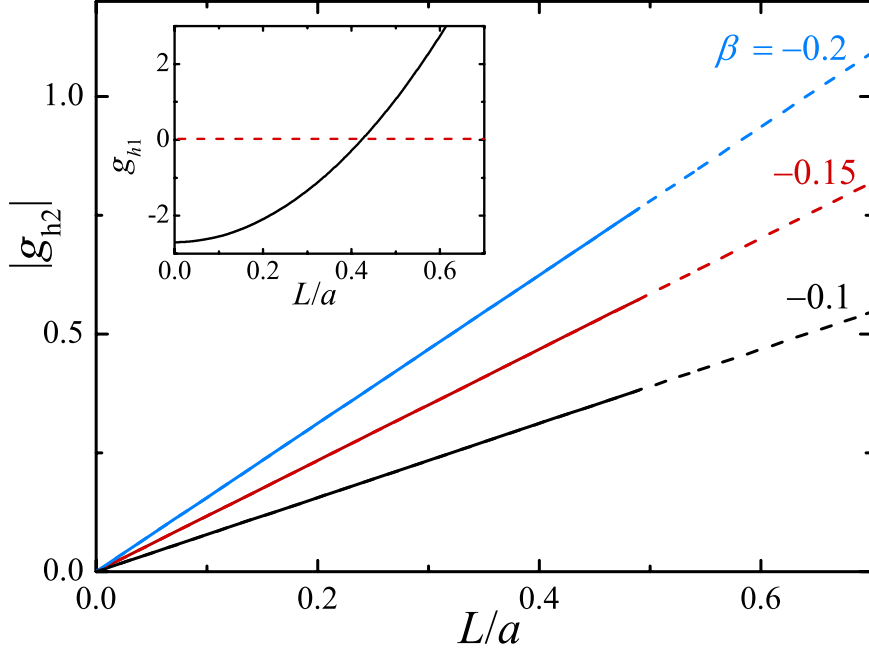


Рис. 3.8: Недиагональный  $g$ -фактор  $g_{h2}$  как функция  $L/a$  для трех различных значений параметра  $\beta$ :  $-0.1$ ,  $-0.15$  и  $-0.2$ . Вставка демонстрирует поведение  $g_{h1}$ .

см. табл. 3.1, указывает на заметную роль кулоновского взаимодействия. Действительно, значение  $g_{h2}$ , определенное из спектра ФЛ  $X^+$ -триона, соответствует  $g$ -фактору резидентной дырки, в то время как значение  $g_{h2}$ , найденное из спектра  $X^-$ , соответствует  $g$ -фактору дырки в трионе.

На вставке к рис. 3.8 показаны результаты расчетов диагональной компоненты тензора  $g$ -фактора тяжелой дырки  $g_{h1}$ . Перенормировка диагонального  $g$ -фактора  $\Delta g_{h1}$  по сравнению с его объемным значением  $-6\mathcal{J} \approx -7.2$  составляет порядка 6 для  $L/a = 0.3$ . Расчет предсказывает смену знака  $g_{h1}$  при  $L/a \approx 0.4$  для используемых параметров GaAs. Как отмечалось выше, положение линий в спектрах ФЛ, свидетельствует о положительных значениях  $g_{h1} \sim 0.5$ , наблюдаемых в эксперименте, что соответствует перенормировке  $\Delta g_{h1}^{(\text{exp})} \sim 8$ . Таким образом, отличие теоретической и экспериментальной перенормировок не превышает 25% для  $L/a \sim 0.3..0.4$ , что с учетом чувствительности точки обращения  $g_{h1}$  в нуль к используемой параметризации можно считать удовлетворительным согласием. Зна-

чения  $L/a \sim 0.3..0.4$  неплохо согласуются и с экспериментальными данными по  $g$ -фактору электрона, см. табл. 3.1. Для  $L = 30 \text{ \AA}$  оценка разности энергий квантования легкой и тяжелой дырок вдоль оси  $z$  по формуле (3.12) дает  $\varepsilon_1^{lh} - \varepsilon_1^{hh} \approx 30 \text{ мэВ}$ . Эта же разность может быть оценена из анизотропии продольной ( $g_{e,\parallel}$ ) и поперечной ( $g_{e,\perp}$ ) компонент  $g$ -фактора электрона [18] и для экспериментальных значений  $(g_{e,\perp} - g_{e,\parallel})/g_{e,\parallel} \sim 40\%$  лежит в диапазоне  $20 \div 30 \text{ мэВ}$ .

### 3.7 Краткие итоги

В Главе 3 получены следующие результаты:

- Показано, что экспериментально наблюдаемые четыре линии в спектрах фотолюминесценции тригональных квантовых точек в продольном магнитном поле обусловлены магнитоиндуцированным смешиванием состояний тяжелой дырки в точечной группе  $C_{3v}$ . Эффект Зеемана для тяжелой дырки в продольном магнитном поле описывается эффективным тензором  $g$ -факторов, имеющим как диагональную ( $g_{h1}$ ), так и недиагональную ( $g_{h2}$ ) компоненты.
- Построена микроскопическая теория дырочного эффекта Зеемана и тонкой структуры энергетического спектра экситонов и трионов в тригональных квантовых точках в продольном магнитном поле. Показано, что основной вклад в недиагональную компоненту  $g_{h2}$  тензора  $g$ -фактора тяжелой дырки связан со специфической формой точки в виде правильной треугольной пирамиды. Рассчитаны дополнительные вклады в  $g_{h2}$ , связанные с гофрировкой спектра дырок ( $\gamma_2 \neq \gamma_3$ ), которые возможны также в квантовых ямах (111).
- Рассчитаны значения  $g_{h1}$  и  $g_{h2}$  для различных параметров тригональной точки на основе GaAs, и получено удовлетворительное согласие результатов расчетов с данными экспериментов.



# Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Развита 14-зонная *kp*-модель для расчета спиновых расщеплений дырочных подзон в квантовых ямах. Предложены граничные условия, учитывающие анизотропию химических связей на интерфейсах и приводящие к смешиванию тяжелых и легких дырок.
- Исследована тонкая структура валентных подзон в квантовых ямах. Показано, что линейное по волновому вектору дырки спин-орбитальное расщепление основной подзоны тяжелой дырки в ямах GaAs/AlGaAs превышает расщепление подзон проводимости. Основной вклад в расщепление валентных подзон связан со смешиванием тяжелой и легкой дырок на интерфейсах.
- Построена теория эффекта Зеемана для легкой дырки в квантовых ямах в магнитном поле, направленном вдоль оси роста структуры. Показано, что близость основного состояния легкой дырки и первого возбужденного состояния тяжелой дырки приводит к гигантской перенормировке зеемановского расщепления легкой дырки, а учет интерфейсного смешивания тяжелой и легкой дырок – к появлению нелинейного по магнитному полю вклада в эффект Зеемана.
- Развита теория зеемановского эффекта для экситона с легкой дыркой с учетом смешивания дырочных состояний на интерфейсах. Показано, что кулоновское взаимодействие между электроном и дыркой приводит к линейному

по магнитному полю расщеплению спиновых подзон экситона даже в ямах с критической шириной. Результаты расчетов, учитывающих экситонные эффекты, удовлетворительно описывают данные экспериментов в квантовых ямах GaAs/AlGaAs, InGaAs/InP и CdTe/CdMgTe.

- Исследовано магнитоиндуцированное смешивание состояний тяжелой дырки в квантовых точках, выращенных вдоль кристаллографического направления [111] и имеющих тригональную симметрию  $C_{3v}$ . Показано, что эффект Зеемана для тяжелой дырки в магнитном поле, направленном вдоль оси роста структуры, описывается эффективным тензором  $g$ -фактора, имеющим как диагональную, так и недиагональную компоненты. Теория позволяет объяснить экспериментальное наблюдение четырех линий в спектрах фотолюминесценции таких точек в присутствии магнитного поля.
- Построена количественная теория дырочного эффекта Зеемана и тонкой структуры энергетического спектра экситонов и трионов в тригональных квантовых точках. Показано, что основной вклад в недиагональную компоненту тензора  $g$ -фактора тяжелой дырки связан со специфической формой точки в виде правильной треугольной пирамиды. Из сопоставления результатов расчета и экспериментальных данных определены геометрические параметры точек.

Основные результаты диссертационной работы изложены в публикациях:

- [A1] M. V. Durnev, M. M. Glazov, E. L. Ivchenko. Giant Zeeman splitting of light holes in GaAs/AlGaAs quantum wells.// *Physica E* **44**, 797-802 (2011).
- [A2] M. V. Durnev, M. M. Glazov, E. L. Ivchenko, M. Jo, T. Mano, T. Kuroda, K. Sakoda, S. Kunz, G. Sallen, L. Bouet, X. Marie, D. Lagarde, T. Amand, and B. Urbaszek. Magnetic field induced valence band mixing in [111] grown semiconductor quantum dots.// *Phys. Rev. B* **87**, 085315 (2013).
- [A3] M. V. Durnev, M. M. Glazov, E. L. Ivchenko. Spin-orbit splitting of valence subbands in semiconductor nanostructures.// *Phys. Rev. B* **89**, 075430 (2014).
- [A4] М. В. Дурнев. Зеемановское расщепление состояний легкой дырки в квантовых ямах: сопоставление теории и эксперимента.// *ФТТ* **56**, 1364 (2014).
- [A5] M. V. Durnev, M. M. Glazov, E. L. Ivchenko. Giant Zeeman effect for light holes in quantum wells.// *Proc. 7th Int. Conf. on Physics and Applications of Spin-Related Phenomena in Semiconductors* (Eindhoven, the Netherlands, 2012), p. 88.
- [A6] M. V. Durnev, M. M. Glazov, E. L. Ivchenko, M. Jo, T. Mano, T. Kuroda, K. Sakoda, S. Kunz, G. Sallen, L. Bouet, X. Marie, D. Lagarde, T. Amand and B. Urbaszek. Exciton fine structure in trigonal quantum dots.// *Proc. 21st Int. Symp. "Nanostructures: Physics and Technology"* (St. Petersburg, Russia, 2013), pp. 35-36.
- [A7] М. В. Дурнев, М. М. Глазов, Е. Л. Ивченко. Спиновое расщепление Дрессельхауза в двумерных дырочных системах.// *Тезисы докладов XI Российской конференции по физике полупроводников* (Санкт-Петербург, Россия, 2013), с. 302.

- [A8] М. В. Дурнев, М. М. Глазов, Е. Л. Ивченко. Спиновое расщепление Дрессельхауза в двумерных дырочных системах.// Тезисы докладов XVIII симпозиума «Нанofизика и наноэлектроника» (Нижний Новгород, Россия, 2014), с. 462.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М.М. Глазову. Работа под его руководством была для меня очень полезной и интересной, его внимание и постоянная поддержка были для меня очень важны.

Я признателен участникам Низкоразмерного и Чайного семинаров ФТИ. Обсуждение на этих семинарах работ, вошедших в диссертацию, принесло мне большую пользу.

Я благодарен Е.Л. Ивченко, С.А. Тарасенко и Л.Е. Голубу за ценные замечания и всем сотрудникам сектора Ивченко за полезные обсуждения, а также А.Н. Поддубному за помощь, любезно оказанную при оформлении диссертации и сопутствующих документов.

# Литература

- [1] *Глинский Г. Ф.* Полупроводники и полупроводниковые наноструктуры: симметрия и электронные состояния. — Санкт-Петербург, 2008.
- [2] Spin physics in semiconductors / Ed. by M. I. Dyakonov. — Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2008.
- [3] *Герчигов Л. Г., Субашиев А. В.* Спиновое расщепление подзон размерного квантования в несимметричных гетероструктурах // *ФТП*. — 1992. — Т. 26. — С. 131.
- [4] *Winkler R.* Spin-Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems. — Springer, 2003.
- [5] *Ivchenko E., Kaminski A., Rössler U.* Heavy-light hole mixing at zinc-blende (001) interfaces under normal incidence // *Phys. Rev. B*. — 1996. — Vol. 54. — P. 5852.
- [6] *Тахтамиров Э. Е., Волков В. А.* Обобщение метода эффективной массы для полупроводниковых структур с атомарно резкими гетеропереходами // *ЖЭТФ*. — 1999. — Т. 116. — С. 1843.
- [7] *Dresselhaus G.* Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures // *Phys. Rev.* — 1955. — Vol. 100. — P. 580.

- [8] Раиба Э. И. Свойства полупроводников с петлей экстремума. 1. Циклотронный и комбинированный резонанс в магнитном поле, перпендикулярном плоскости петли // *ФТТ*. — 1960. — Т. 2. — С. 1224.
- [9] Bychkov Y., Rashba E. Oscillatory effects and the magnetic susceptibility of carriers in inversion layers // *J. Phys. C: Solid State Phys.* — 1984. — Vol. 17. — P. 6039.
- [10] Васьюко Ф. Т. Спиновое расщепление спектра двумерных электронов, обусловленное поверхностным потенциалом // *Письма в ЖЭТФ*. — 1979. — Т. 30. — С. 574–577.
- [11] Optical orientation / Ed. by F. Meier, B. Zakharchenya. — 1984.
- [12] Zutic I., Fabian J., Sarma S. Spintronics: Fundamentals and applications // *Rev. Mod. Phys.* — 2004. — Vol. 76. — P. 323.
- [13] Semiconductor spintronics / J. Fabian, A. Matos-Abiague, C. Ertler et al. // *Acta Phys. Slov.* — 2007. — Vol. 57. — P. 565.
- [14] Special issue on Optical Orientation / Ed. by Y. Kusraev, G. Landwehr. — 2008. — Vol. 23.
- [15] Special issue on effects of spin-orbit interaction on charge transport / Ed. by L. W. Molenkamp, J. Nitta. — 2009. — Vol. 24.
- [16] Специальный выпуск памяти В. И. Переля // *ФТП*. — 2008. — Vol. 42.
- [17] Wu M., Jiang J., Weng M. Spin dynamics in semiconductors // *Physics Reports*. — 2010. — Vol. 493, no. 2-4. — Pp. 61 – 236.
- [18] Ivchenko E. L. Optical spectroscopy of semiconductor nanostructures. — Alpha Science, Harrow UK, 2005.

- [19] *Sherman E. Y.* Random spin-orbit coupling and spin relaxation in symmetric quantum wells // *Appl. Phys. Lett.* — 2003. — Vol. 82, no. 2. — Pp. 209–211.
- [20] *Дьяконов М. И., Качоровский В. Ю.* Спиновая релаксация двумерных электронов в нецентросимметричных полупроводниках // *ФТП.* — 1986. — Т. 20. — С. 178.
- [21] *Silsbee R. H.* Spin-orbit induced coupling of charge current and spin polarization // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2004. — Vol. 16, no. 7. — P. R179.
- [22] Spin-relaxation anisotropy in asymmetrical (001)  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  quantum wells from Hanle-effect measurements: Relative strengths of Rashba and Dresselhaus spin-orbit coupling / N. S. Averkiev, L. E. Golub, A. S. Gurevich et al. — 2006. — Vol. 74, no. 3. — P. 033305.
- [23] High temperature gate control of quantum well spin memory / O. Z. Karimov, G. H. John, R. T. Harley et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 91, no. 24. — P. 246601.
- [24] All-optical measurement of Rashba coefficient in quantum wells / P. S. Eldridge, W. J. H. Leyland, P. G. Lagoudakis et al. // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 125344.
- [25] Rashba spin-splitting of electrons in asymmetric quantum wells / P. S. Eldridge, W. J. H. Leyland, P. G. Lagoudakis et al. // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 82. — P. 045317.
- [26] Strain-induced spin relaxation anisotropy in symmetric (001)-oriented GaAs quantum wells / D. J. English, P. G. Lagoudakis, R. T. Harley et al. // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84. — P. 155323.



- [27] Weak antilocalization and spin precession in quantum wells / W. Knap, C. Skierbiszewski, A. Zduniak et al. // *Phys. Rev. B.* — 1996. — Vol. 53, no. 7. — Pp. 3912–3924.
- [28] Gate-controlled spin-orbit quantum interference effects in lateral transport / J. B. Miller, D. Zumbuhl, C. Marcus et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 76807.
- [29] *Winkler R.* Rashba spin splitting in two-dimensional electron and hole systems // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62, no. 7. — Pp. 4245–4248.
- [30] *Kainz J., Rössler U., Winkler R.* Anisotropic spin-splitting and spin-relaxation in asymmetric zinc blende semiconductor quantum structures // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68, no. 7. — P. 075322.
- [31] *Keppeler S., Winkler R.* Anomalous magneto-oscillations and spin precession // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 46401.
- [32] *Rössler U., Kainz J.* Microscopic interface asymmetry and spin-splitting of electron subbands in semiconductor quantum structures // *Semicond. Sci. Technol.* — 2002. — Vol. 121. — P. 313.
- [33] *Алексеев П. С.* Интерфейсный анизотропный вклад в спин-орбитальное взаимодействие в квантовых ямах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2013. — Т. 98. — С. 92.
- [34] *Девизорова Ж. А., Волков В. А.* Спиновое расщепление 2D-состояний в зоне проводимости несимметричных гетероструктур: вклад атомарно резкого интерфейса // *Письма в ЖЭТФ.* — 2013. — Т. 98. — С. 110.
- [35] *Пикус Г. Е., Маруцак В. А., Тутков А. Н.* Спиновое расщепление зон и спиновая релаксация носителей в кубических кристаллах  $A_3B_5$  // *ФТП.* — 1988. — Т. 22. — С. 185.

- [36] *Ivchenko E. L., Pikus G. E.* Superlattices and other heterostructures. — Springer, 1997.
- [37] *Rashba E. I., Sherman E. Y.* Spin-orbital band splitting in symmetric quantum wells // *Physics Letters A*. — 1988. — Vol. 129, no. 3. — Pp. 175 – 179.
- [38] *Алейнер И. Л., Ивченко Е. Л.* Природа анизотропного обменного расщепления в сверхрешетках GaAs/AlAs типа II // *Письма в ЖЭТФ*. — 1992. — Т. 55. — С. 662.
- [39] *Krebs O., Voisin P.* Giant optical anisotropy of semiconductor heterostructures with no common atom and the quantum-confined pockels effect // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77. — P. 1829.
- [40] *Vervoort L., Ferreira R., Voisin P.* Effects of interface asymmetry on hole subband degeneracies and spin-relaxation rates in quantum wells // *Phys. Rev. B*. — 1997. — Vol. 56. — Pp. R12744–R12747.
- [41] *Vervoort L., Ferreira R., Voisin P.* Spin-splitting of the subbands of InGaAs – InP and other ‘no common atom’ quantum wells // *Semicond. Sci. Technol.* — 1999. — Vol. 14. — P. 227.
- [42] Optical polarization relaxation in  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -based quantum wells: Evidence of the interface symmetry-reduction effect / T. Guettler, A. L. C. Triques, L. Vervoort et al. // *Phys. Rev. B*. — 1998. — Vol. 58. — Pp. R10179–R10182.
- [43] Excitonic contributions to the quantum-confined pockels effect / A. A. Toropov, E. L. Ivchenko, O. Krebs et al. // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 63. — P. 035302.
- [44] Discovery of a novel linear-in- $k$  spin splitting for holes in the 2D GaAs/AlAs system / J.-W. Luo, A. N. Chantis, M. van Schilfgaarde et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104, no. 6. — P. 066405.

- [45] *Foreman B. A.* Accurate quadratic-response approximation for the self-consistent pseudopotential of semiconductor nanostructures // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 045326.
- [46] *Foreman B. A.* Valence-band mixing in first-principles envelope-function theory // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 045327.
- [47] *Бур Г. Л., Пукис Г. Е.* Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. — Наука, Москва, 1972.
- [48] Higher-order contributions to Rashba and Dresselhaus effects / X. Cartoixà, L.-W. Wang, D.-Y. Ting, Y.-C. Chang // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 205341.
- [49] Spin splitting of electron states in (110) quantum wells: Symmetry analysis and  $\mathbf{k}\mathbf{p}$  theory versus microscopic calculations / M. O. Nestoklon, S. A. Tarasenko, J.-M. Jancu, P. Voisin // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 205307.
- [50] *Wang L., Wu M. W.* Hole spin relaxation in  $p$ -type (111) GaAs quantum wells // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 235308.
- [51] *Cartoixà X., Ting D. Z.-Y., Chang Y.-C.* Suppression of the D'yakonov-Perel' spin-relaxation mechanism for all spin components in [111] zincblende quantum wells // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71. — P. 045313.
- [52] Full electrical control of the electron spin relaxation in GaAs quantum wells / A. Balocchi, Q. H. Duong, P. Renucci et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 136604.
- [53] *Rössler U.* Nonparabolicity and warping in the conduction band of GaAs // *Solid State Communications.* — 1984. — Vol. 49, no. 10. — Pp. 943 – 947.

- [54] *Cardona M., Christensen N. E., Fasol G.* Relativistic band structure and spin-orbit splitting of zinc-blende-type semiconductors // *Phys. Rev. B.* — 1988. — Vol. 38. — Pp. 1806–1827.
- [55] *Pfeffer P., Zawadzki W.* Conduction electrons in GaAs: Five-level ***kp*** theory and polaron effects // *Phys. Rev. B.* — 1990. — Vol. 41. — Pp. 1561–1576.
- [56] *Pfeffer P., Zawadzki W.* Five-level ***kp*** model for the conduction and valence bands of GaAs and InP // *Phys. Rev. B.* — 1996. — Vol. 53. — Pp. 12813–12828.
- [57] *Voon L. C. L. Y., Willatzen M.* The ***kp*** Method: Electronic Properties of Semiconductors. — Springer, 2009.
- [58] Спин-зависимое внутри- и междолинное электрон-фононное рассеяние в германии / Z. Liu, M. O. Nestoklon, J. L. Cheng и др. // *ФТТ.* — 2013. — Т. 55. — С. 1510.
- [59] Atomistic spin-orbit coupling and ***kp*** parameters in III – V semiconductors / J.-M. Jancu, R. Scholz, E. A. de Andrada e Silva, G. C. L. Rocca // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72, no. 19. — P. 193201.
- [60] *Nestoklon M. O., Golub L. E., Ivchenko E. L.* Spin and valley-orbit splittings in SiGe/Si heterostructures // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 235334.
- [61] *Глинский Г. Ф., Кравченко К. О.* Оптика экситонов в системах с резкими гетерограницами. Приближение сильно локализованной волновой функции экситона. // *ФТТ.* — 1998. — Т. 40. — С. 872.
- [62] *Киселёв А. А., Мусеев Л. В.* Зеемановское расщепление состояний тяжелой дырки в гетероструктурах  $A_3B_5$  и  $A_2B_6$  // *ФТТ.* — 1996. — Т. 38. — С. 1574.
- [63] *Foreman B. A.* Elimination of spurious solutions from eight-band ***kp*** theory // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 56. — Pp. R12748–R12751.

- [64] Меркулов И. А., Перель В. И., Портной М. Е. Выстраивание импульсов и ориентация спинов фотовозбужденных электронов в квантовых ямах // *ЖЭТФ*. — 1991. — Т. 99. — С. 1202.
- [65] Gerchikov L. G., Subashiev A. V. Interface states in subband structure of semiconductor quantum wells // *physica status solidi (b)*. — 1990. — Vol. 160, no. 2. — Pp. 443–457.
- [66] Golub L. E. Spin-splitting-induced photogalvanic effect in quantum wells // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 67. — P. 235320.
- [67] New measurement of the electron magnetic moment using a one-electron quantum cyclotron / B. Odom, D. Hanneke, B. D’Urso, G. Gabrielse // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97. — P. 030801.
- [68] Schwinger J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron // *Phys. Rev.* — 1948. — Vol. 73. — Pp. 416–417.
- [69] Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron / T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio // *Phys. Rev. D*. — 2008. — Vol. 77. — P. 053012.
- [70] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие для вузов в 10 т. Т. III. Квантовая механика. — Наука, Москва, 1989.
- [71] Roth L. M., Lax B., Zwerdling S. Theory of optical magneto-absorption effects in semiconductors // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 114, no. 1. — P. 90.
- [72] Rodina A. V., Meyer B. K. Anisotropy of conduction band  $g$  values and interband momentum matrix elements in wurtzite GaN // *Phys. Rev. B*. — 2001. — Vol. 64. — P. 245209.
- [73] Ивченко Е. Л., Киселёв А. А. Электронный  $g$ -фактор в квантовых ямах и сверхрешетках // *ФТП*. — 1992. — Т. 26. — С. 1471.

- [74] *Калевич В. К., Корнев В. Л.* Анизотропия электронного  $g$ -фактора в квантовых ямах GaAs/AlGaAs // *Письма в ЖЭТФ*. — 1992. — Т. 56. — С. 257.
- [75] *Kiselev A. A., Ivchenko E. L., Rössler U.* Electron  $g$  factor in one- and zero-dimensional semiconductor nanostructures // *Phys. Rev. B*. — 1998. — Vol. 58. — Pp. 16353–16359.
- [76] Universal behavior of the electron  $g$  factor in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum wells / I. A. Yugova, A. Greulich, D. R. Yakovlev et al. // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Vol. 75, no. 24. — P. 245302.
- [77] *Rodina A. V., Efros A. L., Alekseev A. Y.* Effect of the surface on the electron quantum size levels and electron  $g$  factor in spherical semiconductor nanocrystals // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 67. — P. 155312.
- [78] Zeeman splitting of the excitonic recombination in InGaAs/GaAs single quantum wells / T. Wimbauer, K. Oettinger, A. L. Efros et al. // *Phys. Rev. B*. — 1994. — Vol. 50. — Pp. 8889–8892.
- [79] *Moon P., Choi W. J., Lee J. D.* Electrically driven singularity and control of carrier spin of a hybrid quantum well // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Vol. 83. — P. 165450.
- [80] Nature of tunable hole  $g$ -factors in quantum dots / N. Ares, V. N. Golovach, G. Katsaros et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 046602.
- [81] Смешивание экситонных состояний с легкими и тяжелыми дырками в GaAs/AlGaAs одиночной квантовой яме в магнитном поле / В. Б. Тимофеев, М. Байер, А. Форхел, М. Потемский // *Письма в ЖЭТФ*. — 1996. — Vol. 64. — P. 52.

- [82] Combined exciton-cyclotron resonance in quantum well structures / D. R. Yakovlev, V. P. Kochereshko, R. A. Suris et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79. — Pp. 3974–3977.
- [83] Петров П. В., Ив́анов Ю. Л. Экспериментальное наблюдение гигантского зеемановского расщепления уровня легкой дырки в квантовой яме GaAs/AlGaAs // *ФТП*. — 2013. — Т. 47. — С. 433.
- [84] Carmel O., Shtrikman H., Bar-Joseph I. Quantum-beat spectroscopy of the zeeman splitting of heavy- and light-hole excitons in GaAs/AlGaAs quantum wells // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 48. — Pp. 1955–1958.
- [85] Magnetic-circular-dichroism study of heavy- and light-hole  $g$ -factors in InGaAs/InP quantum wells / D. M. Hofmann, K. Oettinger, A. L. Efros, B. K. Meyer // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 55. — Pp. 9924–9928.
- [86] Large  $g$ -factors of higher-lying excitons detected with reflectance difference spectroscopy in GaAs-based quantum wells / Y. H. Chen, X. L. Ye, B. Xu et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. 89, no. 5. — P. 051903.
- [87] Magneto-optical Kerr effect spectroscopy based study of Landé  $g$ -factor for holes in GaAs/AlGaAs single quantum wells under low magnetic fields / A. Arora, A. Mandal, S. Chakrabarti, S. Ghosh // *J. Appl. Phys.* — 2013. — Vol. 113, no. 21. — P. 213505.
- [88] Kiselev A. A., Kim K. W., Yablonovitch E. In-plane light-hole  $g$  factor in strained cubic heterostructures // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64. — P. 125303.
- [89] Electron and hole  $g$ -factors measured by spin-flip raman scattering in CdTe/Cd<sub>1-x</sub>Mg<sub>x</sub>Te single quantum wells / A. A. Sirenko, T. Ruf, M. Cardona et al. // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 56. — Pp. 2114–2119.

- [90] Hole spin quantum beats in quantum-well structures / X. Marie, T. Amand, P. Le Jeune et al. // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 60. — P. 5811.
- [91] *Luttinger J. M.* Quantum theory of cyclotron resonance in semiconductors: General theory // *Phys. Rev.* — 1956. — Vol. 102, no. 4. — Pp. 1030–1041.
- [92] *Roth L. M.* Theory of the Faraday effect in solids // *Phys. Rev.* — 1964. — Vol. 133, no. 2A. — Pp. A542–A553.
- [93] *Vurgaftman I., Meyer J. R., Ram-Mohan L. R.* Band parameters for III – V compound semiconductors and their alloys // *J. Appl. Phys.* — 2001. — Vol. 89, no. 11. — Pp. 5815–5875.
- [94] Optical determination of the valence-band parameters in CdTe / G. Milchberg, K. Saminadayar, E. Molva, H. R. Zelsmann // *Phys. Status Solidi B.* — 1984. — Vol. 125, no. 2. — Pp. 795–803.
- [95] *Bastard G.* Superlattice band structure in the envelope-function approximation // *Phys. Rev. B.* — 1981. — Vol. 24. — Pp. 5693–5697.
- [96] Single valley Dirac fermions in zero-gap HgTe quantum wells / B. Buttner, C. X. Liu, G. Tkachov et al. // *Nat. Phys.* — 2011. — Vol. 7. — P. 418.
- [97] Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. I. Nonrelativistic theory / X. L. Yang, S. H. Guo, F. T. Chan et al. // *Phys. Rev. A.* — 1991. — Vol. 43. — Pp. 1186–1196.
- [98] *Боев М. В., Ковалев В. М.* Оптические переходы экситонов в квантовых ямах со спин-орбитальным взаимодействием // *Письма в ЖЭТФ.* — 2013. — Т. 97. — С. 150.
- [99] Exciton, heavy-hole, and electron  $g$  factors in type-I GaAs/AlGaAs quantum wells / M. J. Snelling, E. Blackwood, C. J. McDonagh et al. // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 45. — Pp. 3922–3925.



- [100] Magneto-photoluminescence study of InGaAs/InP and InGaAs/AlAsSb quantum wells / T. Mozume, J. Kasai, A. Gopal, N. Kotera // *Physica E*. — 2004. — Vol. 21. — Pp. 703 – 707.
- [101] Optical investigation of confinement and strain effects in CdTe/(CdMg)Te quantum wells / B. Kuhn-Heinrich, W. Ossau, H. Heinke et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 1993. — Vol. 63, no. 21. — Pp. 2932–2934.
- [102] Экситоны / Под ред. Э. И. Рашба, М. Д. Стердж. — М. Наука, 1985.
- [103] *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристалло-оптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — Наука, Москва, 1979.
- [104] Spectroscopic study of dark excitons in  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  self-assembled quantum dots by a magnetic-field-induced symmetry breaking / M. Bayer, O. Stern, A. Kuther, A. Forchel // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 61, no. 11. — Pp. 7273–7276.
- [105] *Гупалов С. В., Ивченко Е. Л., Кавокин А. В.* Тонкая структура уровней локализованных экситонов в квантовых ямах // *ЖЭТФ*. — 1998. — Т. 113. — С. 703–714.
- [106] Fine structure splitting in the optical spectra of single GaAs quantum dots / D. Gammon, E. Snow, B. Shanabrook et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76. — P. 3005.
- [107] *Bayer M. et al.* Electron and hole  $g$  factors and exchange interaction from studies of the exciton fine structure in  $\text{In}_{0.60}\text{Ga}_{0.40}\text{As}$  quantum dots // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82, no. 8. — Pp. 1748–1751.
- [108] Magnetic-field-induced reduction of the exciton polarization splitting in InAs quantum dots / R. M. Stevenson, R. J. Young, P. See et al. // *Phys. Rev. B*. — 2006. — Vol. 73, no. 3. — P. 033306.

- [109] A semiconductor source of triggered entangled photon pairs / R. M. Stevenson, R. J. Young, P. Atkinson et al. // *Nature*. — 2006. — Vol. 439. — P. 179.
- [110] Entangled photon pairs from semiconductor quantum dots / N. Akopian, N. H. Lindner, E. Poem et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 130501.
- [111] *Johne R., Gippius N. A., Malpuech G.* Entangled photons from a strongly coupled quantum dot-cavity system // *Phys. Rev. B*. — 2009. — Vol. 79. — P. 155317.
- [112] Ultrabright source of entangled photon pairs / A. Dousse, J. Suffczynski, A. Beveratos et al. // *Nature*. — 2010. — Vol. 466, no. 7303. — Pp. 217–220.
- [113] Influence of an in-plane electric field on exciton fine structure in InAs – GaAs self-assembled quantum dots / K. Kowalik, O. Krebs, A. Lemâitre et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2005. — Vol. 86, no. 4. — P. 041907.
- [114] Control of quantum dot excitons by lateral electric fields / V. Stavarache, D. Reuter, A. Wieck et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. 89, no. 12. — Pp. 123105–123105.
- [115] Effect of uniaxial stress on excitons in a self-assembled quantum dot / S. Seidl, M. Kroner, A. Hogele et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. 88, no. 20. — Pp. 203113–203113.
- [116] Universal recovery of the energy-level degeneracy of bright excitons in InGaAs quantum dots without a structure symmetry / R. Trotta, E. Zallo, C. Ortix et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 147401.
- [117] Manipulating the exciton fine structure of single CdTe/ZnTe quantum dots by an in-plane magnetic field / K. Kowalik, O. Krebs, A. Golnik et al. // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Vol. 75. — P. 195340.

- [118] Diamagnetic contribution to the effect of in-plane magnetic field on a quantum-dot exciton fine structure / M. M. Glazov, E. L. Ivchenko, O. Krebs et al. // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 193313.
- [119] *Bester G., Zunger A.* Cylindrically shaped zinc-blende semiconductor quantum dots do not have cylindrical symmetry: Atomistic symmetry, atomic relaxation, and piezoelectric effects // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71. — P. 45318.
- [120] Optical and magnetic anisotropies of the hole states in Stranski-Krastanov quantum dots / A. V. Koudinov, I. A. Akimov, Y. G. Kusrayev, F. Henneberger // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 70, no. 24. — P. 241305.
- [121] *Luo J.-W., Zunger A.* Geometry of epitaxial GaAs/(AlGa)As quantum dots as seen by excitonic spectroscopy // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84. — P. 235317.
- [122] In(Ga)As/GaAs quantum dots grown on a (111) surface as ideal sources of entangled photon pairs / A. Schliwa, M. Winkelnkemper, A. Lochmann et al. // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80, no. 16. — P. 161307.
- [123] *Singh R., Bester G.* Nanowire quantum dots as an ideal source of entangled photon pairs // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103, no. 6. — P. 063601.
- [124] Self-assembly of symmetric GaAs quantum dots on (111)A substrates: Suppression of fine-structure splitting / T. Mano, M. Abbarchi, T. Kuroda et al. // *Applied Physics Express.* — 2010. — Vol. 3, no. 6. — P. 065203.
- [125] Dark-bright mixing of interband transitions in symmetric semiconductor quantum dots / G. Sallen, B. Urbaszek, M. M. Glazov et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 166604.
- [126] Fine structure of exciton complexes in high-symmetry quantum dots: Effects of symmetry breaking and symmetry elevation / K. F. Karlsson, M. A. Dupertuis, D. Y. Oberli et al. // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 81, no. 16. — P. 161307.

- [127] Single-photon emission from InGaAs quantum dots grown on (111) GaAs / E. Stock, T. Warming, I. Ostapenko et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 96, no. 9. — Pp. 093112–093112.
- [128] Symmetric quantum dots as efficient sources of highly entangled photons: Violation of Bell’s inequality without spectral and temporal filtering / T. Kuroda, T. Mano, N. Ha et al. // *Phys. Rev. B.* — 2013. — Vol. 88. — P. 041306.
- [129] Towards quantum-dot arrays of entangled photon emitters / G. Juska, V. Dimastrodonato, L. O. Mereni et al. // *Nat Photon.* — 2013. — Vol. 7, no. 7. — Pp. 527–531.
- [130] Magneto-optical properties of excitonic complexes in GaAs self-assembled quantum dots / M. Abbarchi, T. Kuroda, T. Mano et al. // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 81. — P. 035334.
- [131] Optically monitored nuclear spin dynamics in individual GaAs quantum dots grown by droplet epitaxy / T. Belhadj, T. Kuroda, C.-M. Simon et al. // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78. — P. 205325.
- [132] Atomic scale analysis of self assembled GaAs/AlGaAs quantum dots grown by droplet epitaxy / J. G. Keizer, J. Bocquel, P. M. Koenraad et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 96, no. 6. — P. 062101.
- [133] Controlling the polarization eigenstate of a quantum dot exciton with light / T. Belhadj, C.-M. Simon, T. Amand et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103, no. 8. — P. 086601.
- [134] Fine structure of neutral and charged excitons in self-assembled InGaAs-AlGaAs quantum dots / M. Bayer, G. Ortner, O. Stern et al. // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 65. — P. 195315.

- [135] Valence-band mixing in neutral, charged, and Mn-doped self-assembled quantum dots / Y. Léger, L. Besombes, L. Maingault, H. Mariette // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 045331.
- [136] Properties of the thirty-two point groups / G. F. Koster, R. G. Wheeler, J. O. Dimmock, H. Statz. — MIT Press, 1963.
- [137] Поляризация излучения связанного экситона в Ge(As) в продольном магнитном поле / Н. С. Аверкиев, В. М. Аснин, Ю. Н. Ломасов и др. // *ФТТ.* — 1981. — Т. 23. — С. 3117.
- [138] Inversion asymmetry in heterostructures of zinc-blende semiconductors: Interface and external potential versus bulk effects / O. Krebs, D. Rondi, J. L. Gentner et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80. — P. 5770.
- [139] Variational calculations on a quantum well in an electric field / G. Bastard, E. Mendez, L. Chang, L. Esaki // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Vol. 28. — P. 3241.
- [140] Electronic structure and magneto-optics of self-assembled quantum dots / A. Wojs, P. Hawrylak, S. Fafard, L. Jacak // *Phys. Rev. B.* — 1996. — Vol. 54. — P. 5604.
- [141] Семина М. А., Сурис Р. А. Влияние локализации в квантовых ямах и квантовых проволоках на смешивание тяжелых и легких дырок и на энергию связи акцептора // *ФТП.* — 2011. — Т. 45. — С. 947.
- [142] Que W. Excitons in quantum dots with parabolic confinement // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 45. — P. 11036.
- [143] Hawrylak P. Excitonic artificial atoms: Engineering optical properties of quantum dots // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 60. — P. 5597.

- [144] Семина М. А., Сергеев Р. А., Суриц Р. А. Локализация электронно-дырочных комплексов на флуктуациях интерфейсов квантовых ям // *ФТП*. — 2006. — Т. 40. — С. 1373.
- [145] *Nenashev A. V., Dvurechenskii A. V., Zinovieva A. F.* Wave functions and  $g$ -factor of holes in Ge/Si quantum dots // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 67. — P. 205301.
- [146] Size, shape, and strain dependence of the  $g$ -factor in self-assembled In(Ga)As quantum dots / T. Nakaoka, T. Saito, J. Tatebayashi, Y. Arakawa // *Phys. Rev. B*. — 2004. — Vol. 70, no. 23. — P. 235337.
- [147] Tuning of  $g$ -factor in self-assembled In(Ga)As quantum dots through strain engineering / T. Nakaoka, T. Saito, J. Tatebayashi et al. // *Phys. Rev. B*. — 2005. — Vol. 71, no. 20. — P. 205301.
- [148] *Pryor C., Flatté M.* Landé  $g$ -factors and orbital momentum quenching in semiconductor quantum dots // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96, no. 2. — P. 026804.
- [149] *Andlauer T., Vogl P.* Electrically controllable  $g$  tensors in quantum dot molecules // *Phys. Rev. B*. — 2009. — Vol. 79, no. 4. — P. 045307.
- [150] *Sheng W.* Electrical tuning of exciton  $g$ -factors in quantum dot molecules: Effect of hole localization // *Appl. Phys. Lett.* — 2009. — Vol. 95, no. 11. — P. 113105.
- [151] Influence of quantum dot shape on the Landé  $g$ -factor determination / S. Prado, C. Trallero-Giner, A. Alcalde et al. // *Phys. Rev. B*. — 2004. — Vol. 69, no. 20. — P. 201310.
- [152] *Baldereschi A., Lipari N.* Spherical model of shallow acceptor states in semiconductors // *Phys. Rev. B*. — 1973. — Vol. 8. — P. 2697.