

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт спектроскопии Российской Академии Наук

На правах рукописи

Ефимкин Дмитрий Кириллович

**КОЛЛЕКТИВНЫЕ И ТРАНСПОРТНЫЕ
ЯВЛЕНИЯ В ГРАФЕНЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ
ИЗОЛЯТОРАХ**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
Зав. лаб. спектроскопии наноструктур,
профессор Ю.Е. Лозовик

Троицк - 2012

Оглавление

Введение	3
Дираковские электроны в физике конденсированного состояния	3
Особенности энергетического спектра дираковских электронов	8
Краткий обзор содержания глав диссертации	11
1. Спин-плазмоны на поверхности топологического изолятора	17
1.1. Введение	17
1.2. Описание спин-плазмонов и их свойства	18
1.2.1. Метод уравнений движения для спин-плазмонов	18
1.2.2. Волновая функция спин-плазмона	22
1.2.3. Проявления жесткой связи между направлениями спина и им- пульса	24
1.2.4. Уравнение непрерывности	28
1.2.5. Рассеяние спин-плазмонов	28
1.3. Выводы	31
2. Киральные экситоны на поверхности топологического изолятора и магнитооптические эффекты Фарадея и Керра	33
2.1. Введение	33
2.2. Описание киральных экситонов	35
2.2.1. Поверхностные состояния во внешнем обменном поле	35
2.2.2. Метод уравнений движения для киральных экситонов	36
2.2.3. Киральные экситонные состояния	38
2.3. Тензор оптической проводимости	39
2.3.1. Вычисление тензора оптической проводимости	39
2.3.2. Оптическая активность киральных экситонов	41
2.4. Эффекты Керра и Фарадея	44

2.5.	Заключение	49
2.5.1.	Условия для наблюдения резонансных экситонных эффектов . .	49
2.5.2.	Киральные экситоны в графене	49
2.5.3.	Магнитоэкситоны на поверхности топологического изолятора . .	50
2.5.4.	Выводы	51
3.	Куперовское спаривание пространственно разделенных дираков-	
	ских электронов и дырок	53
3.1.	Введение	53
3.2.	Фазовая диаграмма дираковских электронов и дырок	54
3.2.1.	Дираковские электроны и дырки	54
3.2.2.	Однозонное приближение и модель Бардина-Купера-Шриффера	56
3.2.3.	Влияние беспорядка и дисбаланса концентраций электронов и дырок	59
3.2.4.	Влияние гибридизации волновых функций электронов и дырок .	62
3.2.5.	Выводы	67
3.3.	Флуктуации куперовских пар и туннелирование	68
3.3.1.	Туннелирование и внутренний эффект Джозефсона	68
3.3.2.	Куперовский пропагатор и туннельная проводимость	69
3.3.3.	Критическое поведение и критические индексы	72
3.3.4.	Выводы	76
	Заключение	81
	Основные результаты диссертации	81
	Публикации автора по теме диссертации	83
4.	Приложения	86
4.1.	Уравнение движения для оператора рождения спин-плазмона	86
4.2.	Фурье-компоненты операторов зарядовой и спиновой плотностей	89
4.3.	Уравнение движения для оператора рождения экситона	94
4.4.	Электрон-дырочное спаривание и диаграммная техника	97
4.5.	Потенциал взаимодействия между электронами и дырками	99
4.6.	Куперовский пропагатор	102
4.7.	Эффект увлечения и туннелирование в системе из двух листов графена	104

Введение

Дираковские электроны в физике конденсированного состояния

В течение многих лет исследования релятивистских электронов, динамика которых описывается уравнением Дирака, принадлежали только к области физики элементарных частиц. Однако за последнее десятилетие в физике конденсированного состояния появились две новые физические системы, в которых электронные состояния описываются двумерным аналогом уравнением Дирака для частиц как с конечной массой, так и с массой, равной нулю. Этими системами являются графен и поверхность трехмерного топологического изолятора. В настоящее время и теоретические, и экспериментальные исследования различных физических явлений в этих системах стремительно развиваются и очень актуальны (см. [1–3] и цит. лит.).

Графен представляет собой двумерный материал, полученный впервые в 2004 г. [4, 5], и обладает уникальными электронными и механическими свойствами. В первой зоне Бриллюэна графена находятся две неэквивалентные дираковские точки, в которых зона проводимости и валентная зона касаются друг друга и в окрестности которых электроны могут быть описаны эффективным гамильтонианом для безмассовых дираковских частиц

$$H_g = v_F(\mathbf{p}\sigma), \quad (1)$$

где v_F — величина скорости электронов; \mathbf{p} — их импульс; $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двумерный вектор, составленный из матриц Паули, или изоспин электрона в графене. Волновая функция электрона вблизи одной из дираковских точек имеет две компоненты, соответствующие двум подрешеткам, из которых может быть составлена решетка графена.

Ультрарелятивистская динамика электронов в графене приводит к ряду интересных физических явлений, к которым относятся полуцелый квантовый эффект Холла

[6], абсолютная прозрачность потенциальных барьеров для электронов при их нормальном падении [7], тесно связанная с квантово-электродинамическим парадоксом Клейна, и эффект слабой антилокализации электронов [8].

Если химический потенциал графена сдвинут из дираковской точки, то электроны (или дырки) образуют вырожденную Ферми-жидкость [9]. Изучению различных коллективных состояний в графене и их особенностям посвящено многочисленное количество работ. В частности, была рассмотрена возможность вигнеровской кристаллизации [10] электронов. Обсуждалась возможность перестройки энергетического спектра графена, связанной с экситонной [11] или сверхпроводящей неустойчивостями [12, 13]. Предсказывалось куперовское спаривание пространственно разделенных электронов и дырок в системе из двух листов графена [14], во многом аналогичное спариванию электронов и дырок в связанных полупроводниковых квантовых ямах [15]. Электронная структура графена оказалась устойчивой относительно различных неустойчивостей, и взаимодействие между носителями заряда приводит только к перенормировке его одночастичного спектра, а именно к перенормировке скорости электронов [16].

Графен обладает высокой подвижностью носителей заряда, достигающей значения $\mu \approx 10^6 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ при комнатной температуре, и в настоящее время он представляет большой интерес для различных возможных приложений — баллистической электроники, плазмоники и оптоэлектроники [17]. Следует отметить, что графен считается перспективным материалом для квантовой плазмоники [18], в которой планируется возбуждать и детектировать отдельные плазмоны. Поэтому исследование влияния кулоновского взаимодействия на различные транспортные, коллективные и оптические эффекты очень актуально.

Топологический изолятор (ТИ) представляет собой новый класс материалов, который обладает нетривиальной топологией заполненных электронных состояний в гильбертовом пространстве [2]. ТИ в своей толще имеет запрещенную зону, при этом на его поверхности (3D) или границе (2D) присутствуют необычные электронные состояния. Трехмерные ТИ делятся на два класса — на "сильные" и "слабые". Энергетический спектр поверхности между сильным ТИ и тривиальным изолятором или вакуумом содержит нечетное количество дираковских точек, в окрестности которых электроны могут быть описаны эффективным гамильтонианом

$$H_{\text{ТИ}} = v_F \mathbf{n} [\mathbf{p} \times \boldsymbol{\sigma}], \quad (2)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности ТИ; v_F — величина скорости электронов;

$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двумерный вектор, составленный из матриц Паули, действующих в пространстве состояний с заданной проекцией спина электрона. Спин электрона перпендикулярен его импульсу и лежит в плоскости поверхности ТИ. Такая жесткая связь между направлениями импульса и спина на поверхности ТИ является следствием сильного спин-орбитального взаимодействия в его толще. Энергетический спектр сильного ТИ топологически защищен от возмущений, которые не нарушают симметрию по отношению к обращению знака времени, например, к немагнитному беспорядку [19]. Энергетический спектр поверхности слабых топологических изоляторов *может* содержать четное количество дираковских точек и не является топологически защищенным.

Первым "сильным" трехмерным ТИ, который был сначала предсказан [20, 21], а затем обнаружен экспериментально [22], является $\text{Bi}_{1-x}\text{Se}_x$. Жесткая связь между направлениями импульса и спина электрона на поверхности этого материала была установлена при помощи фотоэлектронной спектроскопии с угловым разрешением и разрешением по спину [23]. При этом поверхностный энергетический спектр, несмотря на то, что содержит дираковскую точку, в окрестности которой электроны могут быть описаны эффективным гамильтонианом (2), является сложным, и зависимость энергии от импульса является немонотонной. Величина запрещенной зоны в толще $\text{Bi}_{1-x}\text{Se}_x$ мала, $E_g = 0.02$ эВ, поэтому он является изолятором только при низких температурах.

Сравнительно недавно было обнаружено "второе поколение" сильных топологических изоляторов. Оно включает в себя Sb_2Se_3 , Bi_2Se_3 и Sb_2Te_3 [24–26]. Запрещенная зона этих материалов достигает 0.1 – 0.3 эВ, поэтому они сохраняют топологическую нетривиальность спектра при комнатной температуре. Их энергетический спектр поверхностных состояний содержит только одну дираковскую точку и в широком диапазоне энергий может быть описан эффективным гамильтонианом (2).

Следует отметить, что химический потенциал *толщи* $\text{Bi}_{1-x}\text{Se}_x$, а также топологических изоляторов второго поколения находится либо в зоне проводимости, либо в валентной зоне. Концентрацию носителей заряда в толще этих материалов можно значительно сократить при помощи специального допирования. Вклад дираковских электронов на поверхности допированного ТИ был установлен по температурной зависимости удельного сопротивления [27], магнитосопротивления [28] и по эффекту слабой антилокализации [29, 30] дираковских электронов. Вклад объемных носителей заряда в транспорт может быть также значительно снижен в тонких пленках из

топологического изолятора, которые в настоящее время активно исследуются экспериментально [31, 32].

Топологический индекс трехмерного материала может быть вычислен при помощи первопринципных численных методов, используемых для расчета зонной структуры твердых тел. В настоящее время предсказано более пятидесяти топологических изоляторов. Некоторые из этих материалов, например TlBiSe_2 [33], а также GeBi_2Te_4 , $\text{Bi}_2\text{Te}_2\text{Se}$ и $\text{Sb}_2\text{Te}_2\text{Se}$ [34] были обнаружены экспериментально.

Жесткая связь между направлениями импульса и спина приводит к возникновению спиновой поляризации на поверхности топологического изолятора при протекании по ней электрического тока [35] и связанной диффузии плотностей заряда и спина [36]. Коллективные плазменные колебания в вырожденном электронном газе на поверхности ТИ являются спин-плазмонами, которые представляют собой связанные колебания плотностей заряда и спина [37]. Было предложено использовать спин-плазмоны для создания "спиновой батареи", в которой пространственно разделяются электроны с противоположными направлениями вектора спина [38]. Вклад в энергию электрона в полупроводниках и полуметаллах, связанный со спин-орбитальным взаимодействием, является малой поправкой к его кинетической энергии, в то время как для электронов на поверхности ТИ этот вклад (2) является единственным. Поэтому исследование проявления жесткой связи между импульсом и спином в оптических и транспортных явлениях, а также в свойствах плазменных возбуждений на поверхности ТИ является актуальной задачей особенно для спинтроники.

Интересные физические явления возникают на поверхности топологического изолятора, если нарушена симметрия по отношению к обращению знака времени или калибровочная симметрия.

Симметрия по отношению к обращению знака времени на поверхности ТИ может быть нарушена либо внешним обменным полем, созданным, например, упорядоченными магнитными примесями [39, 40], специально внедренными в его объем или на его поверхность, либо магнитным полем. В обоих случаях нарушение симметрии приводит к полуполному квантованию холловской проводимости поверхности ТИ. Если симметрия нарушена на *всей* поверхности топологического изолятора, то распределение электромагнитного поля в его объеме может быть определено при помощи принципа наименьшего действия с лагранжианом, который имеет вид [41, 42]:

$$L = \frac{1}{8\pi}(\epsilon\mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{2\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (3)$$

где ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости толщи ТИ; $\alpha \approx 1/137$ —

постоянная тонкой структуры; величина θ может принимать только два значения: $\theta = 0$ для изолятора с тривиальной топологией зонной структуры и $\theta = \pi$ для топологического изолятора. Последний член в лагранжиане соответствует топологическому магнитоэлектрическому эффекту, который появляется в объеме ТИ благодаря перераспределению зарядов и электрическому току на его поверхности. Следует отметить, что описание топологического магнитоэлектрического эффекта в объеме ТИ представляет собой твердотельную реализацию аксионной электродинамики [43], в которой θ является динамической переменной, соответствующей полю аксионов.

Топологический магнитоэлектрический эффект в объеме топологического изолятора приводит к магнитооптическим эффектам Фарадея и Керра на его поверхности [44–47]. Он приводит также к появлению магнитного монополя в роли заряда-изображения (в дополнение к электрическому заряду-изображению) для электрона, находящегося у поверхности ТИ изолятора [48]. Электронный газ над поверхностью топологического изолятора становится газом анионов [48] и испытывает действие магнитного поля, которое создается магнитными монополями под его поверхностью и которое может быть измерено в эффекте Холла [49].

Внешнее обменное поле приводит к образованию щели в энергетическом спектре, внутри которой образуются киральные экситонные состояния [50]. Для уровней киральных экситонов нарушена симметрия между состояниями с противоположными значениями квантового орбитального числа. Исследование возможного проявления киральных экситонов в различных эффектах, связанных с топологическим магнитоэлектрическим эффектом, является важной фундаментальной задачей.

Если на поверхности топологического изолятора нарушена калибровочная симметрия, например, при ее туннельном контакте со сверхпроводником с s -волновым спариванием, то электронный газ, заполняющий поверхностные состояния, становится двумерным топологическим сверхпроводником [51]. Он обладает топологически нетривиальной электронной структурой спектра его боголюбовских квазичастиц. В коре вихря двумерного топологического сверхпроводника образуются майорановское состояние с нулевой энергией, а на его границе с областью ТИ, в которой открыта щель при помощи обменного поля, появляются киральные майорановские поверхностные состояния. Экзотические майорановские фермионы представляют собой квазичастицы, которые являются собственными античастцами. Они рассматривались в физике элементарных частиц, но элементарные частицы, которые ими бы являлись, так и не были обнаружены [52].

Особый интерес к майорановским состояниям вызван тем, что их можно использовать для квантовых вычислений [53]. Пара вихрей, в которых локализованы майорановские состояния, представляет собой нелокальный кубит, который защищен от декогерентности. Манипуляции над кубитами и процесс измерения можно производить при помощи перестановки вихрей, которыми можно управлять при помощи сверхпроводящих контактов [51]. В настоящее время теоретическое и экспериментальное исследование майорановских состояний активно развивается [54, 55].

Другой физической реализацией топологической сверхпроводимости является куперовское спаривание электронов и дырок [56] с противоположных поверхностей тонкой пленки из топологического изолятора, обусловленное кулоновским взаимодействием между ними. В этой системе были предсказаны майорановские состояния, локализованные на вихрях, которые являются топологическими дефектами параметра порядка конденсата электрон-дырочных пар и которыми можно управлять при помощи сверхпроводящих контактов [57]. При этом численные оценки температуры перехода, соответствующего электрон-дырочному спариванию, в реалистичной модели не проводились, что и является важной задачей для выбора оптимальных условий экспериментов. Также актуально теоретическое исследование различных проявлений электрон-дырочного спаривания в этой системе.

В диссертации детально исследуются коллективные плазменные возбуждения в дираковском электронном газе: спин-плазмоны на поверхности топологического изолятора и плазмоны в графене. Исследуются киральные экситоны на поверхности топологического изолятора и их проявления в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра. Большое внимание уделено куперовскому спариванию дираковских электронов и дырок, которое может быть реализовано либо в тонкой пленке из топологического изолятора, либо в системе из двух листов графена.

Особенности энергетического спектра дираковских электронов

К коллективным электронным явлениям относят физические явления, которые не могут быть описаны в модели невзаимодействующих электронов в обычных электронных системах. Они включают в себя плазменные колебания, вигнеровскую кристаллизацию электронов, сверхпроводимость, образование экситонного диэлектрика, образование экситонов, различные магнитные переходы и другие явления. Особенно-

сти коллективных электронных явлений в графене и на поверхности ТИ связаны со спецификой дираковского спектра электронов. К особенностям дираковского спектра в этих системах можно отнести: 1) линейный закон дисперсии электронов; 2) близкое расположение и взаимное влияние валентной зоны и зоны проводимости; 3) спинорный характер эффективной волновой функции электронов; 4) дополнительное вырождение носителей заряда 5) топологическая нетривиальность структуры энергетического спектра при открытии в нем запрещенной зоны; 6) двумерность электронного газа. Рассмотрим кратко каждую из перечисленных особенностей.

1) Энергетический спектр безмассовых дираковских частиц состоит из зоны проводимости $E_{p1} = v_F p$ и валентной зоны $E_{p,-1} = -v_F p$, которые касаются друг друга в дираковской точке с нулевым импульсом. Их линейный закон дисперсии приводит к линейной зависимости плотности состояний электронов, которая обращается в ноль в дираковской точке и имеет вид

$$\nu(E) = \frac{E}{2\pi(\hbar v_F)^2}. \quad (4)$$

Благодаря линейному закону дисперсии безразмерный параметр α_c , определяющий характерное отношение между кулоновской энергией вырожденного электронного газа и его кинетической энергией, равен:

$$\alpha_c = \frac{e^2}{\hbar v_F \epsilon}, \quad (5)$$

где ϵ — эффективная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей двумерный электронный газ. Величина этого параметра не зависит от концентрации электронов. Для свободно подвешенного графена величина этого параметра достигает максимального значения $\alpha_c = 2.19$. Поэтому, в частности, вигнеровская кристаллизация, требующая больших значений параметра α_c , в графене не возможна. Топологическим изоляторам второго поколения, если их поверхность граничит с вакуумом, соответствует $\alpha_c = 0.04 \sim 0.09$. Для двумерных электронов с квадратичным законом дисперсии этот параметр (параметр α_c часто обозначается как r_s) возрастает с понижением концентрации электронов и может изменяться в широких пределах.

2) Близкое расположение валентной зоны и зоны проводимости проявляется в энергетическом спектре электронов. Обменное кулоновское взаимодействие между электроном в зоне проводимости и электронами из валентной зоне приводит к логарифмической перенормировке его скорости Ферми. Одночастичными возбуждениями являются как внутрizonные, так и межзонные переходы. Близкое расположение

зон приводит к возможности многозонной сверхпроводимости [13] и многозонного куперовского спаривания пространственно разделенных электронов и дырок [58].

3) Спинорный характер волновой функции дираковских электронов приводит к жесткой связи между направлением импульса и спина (ТИ) или изоспина (графен). Направление изоспина определяет разность фаз между компонентами волновой функции электрона в графене, соответствующих разным подрешеткам.

4) Электроны в графене имеют дополнительное четырехкратное вырождение благодаря двукратному вырождению по спину и двукратному вырождению, связанному с наличием в первой зоне Бриллюэна двух неэквивалентных дираковских точек, или долин. Дираковские электроны на поверхности топологического изолятора не имеют дополнительного вырождения.

5) В спектре дираковских электронов внешнее возмущение $H' = \Delta\sigma_z$ приводит к открытию щели в энергетическом спектре. Двумерный дираковский электронный газ становится двумерным топологическим изолятором, который характеризуется топологическим инвариантом n . Если гамильтониан электронов представить в виде $H = \mathbf{h}(\mathbf{p})\sigma$ и ввести вектор $h'(\mathbf{p}) = h(\mathbf{p})/|h(\mathbf{p})|$, то топологический инвариант может быть записан как:

$$n = \frac{1}{4\pi} \int d^2\mathbf{p} \left[\frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial p_x} \times \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial p_y} \right] \mathbf{h}' = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{|\Delta|}. \quad (6)$$

Наличие топологического инварианта приводит к квантованию холловской проводимости $\sigma_{yx} = ne^2/h$ дираковского электронного газа в отсутствие магнитного поля. На поверхности ТИ щель может быть открыта внешним обменным полем, созданным, например, упорядоченными магнитными примесями, специально внедренными в толщу ТИ или на его поверхность. В графене щель может быть открыта при помощи специальной подложки или спин-орбитального взаимодействия. В обоих случаях абсолютные значения Δ в двух долинах графена в точности совпадают, а их знаки противоположны, поэтому холловская проводимость графена в отсутствие магнитного поля равна нулю.

6) Двумерность дираковских электронов накладывает ограничения на описания коллективных неустойчивостей, например сверхпроводящей неустойчивости, в рамках теории среднего поля. Благодаря сильным флуктуациям фазы параметра порядка, которые соответствуют конденсату куперовских пар, фазовый переход будет являться переходом Березинского-Костерлица-Таулесса [59, 60]. Следует отметить, что аналогичная ситуация возникает и в других двумерных системах.

Краткий обзор содержания глав диссертации

Диссертация состоит из трех глав. Первая глава посвящена исследованию спин-плазмонов на поверхности топологического изолятора. Во второй главе рассматриваются киральные экситоны на поверхности топологического изолятора, в энергетическом спектре которой открыта щель, и исследуются их возможные проявления в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра. Третья глава посвящена изучению куперовского спаривания пространственно разделенных дираковских электронов и дырок, которое может быть реализовано в тонкой пленке из топологического изолятора и в системе из двух листов графена. Третья глава состоит из двух частей. Ее первая часть посвящена вычислению фазовой диаграммы системы. В её второй части теоретически исследуется туннелирование между противоположными поверхностями тонкой пленки из ТИ выше температуры перехода, соответствующего спариванию электронов и дырок. Далее следует заключение, в котором представлены полученные в диссертации результаты. Завершается диссертация семью Приложениями.

В первой главе диссертации рассматриваются спин-плазмоны в вырожденном электронном газе, заполняющем поверхностные состояния трехмерного ТИ, которые представляют собой связанные волны плотностей заряда и спина. Для их исследования применен математический формализм, основанный на методе уравнений движения. В этом подходе спин-плазмон с импульсом \mathbf{q} представляет собой составную бозевскую квазичастицу, являющуюся суперпозицией одночастичных электрон-дырочных переходов с таким же суммарным импульсом, оператор рождения которой имеет вид:

$$Q_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}. \quad (7)$$

где $a_{\mathbf{p}\gamma}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом p в зоне проводимости ($\gamma = 1$) или в валентной зоне ($\gamma = -1$), а набор коэффициентов $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma}$ образует волновую функцию плазмона в импульсном пространстве, в которую вносят вклады как внутризонные ($\gamma = \gamma'$), так межзонные ($\gamma \neq \gamma'$) электрон-дырочные переходы. Оператор рождения спин-плазмона удовлетворяет уравнению движения $[H, Q_{\mathbf{q}}^+] = \Omega_q Q_{\mathbf{q}}^+$, где Ω_q — энергия плазмона, а H — гамильтониан взаимодействующих электронов на поверхности топологического изолятора.

В приближении хаотических фаз (ПХФ) найдены закон дисперсии спин-плазмонов и их волновая функция, которые в безразмерных единицах зависят только от одного безразмерного параметра $\alpha_{gc} = g\alpha_c$. Здесь g — фактор вырождения дираковских электронов, равный $g = 1$ для электронов на поверхности топологического

изолятора и $g = 4$ для электронов в графене. Обоснованность приближения ПХФ для электронов на поверхности топологических изоляторов второго поколения связана с малостью параметра α_c , а для графена — малостью параметра $1/g$ [1, 61].

Исследовано распределение волновой функции спин-плазмона в импульсном пространстве. Проанализировано соотношение вкладов, которые вносят внутризонные и межзонные переходы в волновую функцию спин-плазмона. При малых значениях параметра α_{gc} вклад межзонных возбуждений пренебрежимо мал.

Определены зависимости амплитуды колебаний волн плотностей заряда и спина от концентрации спин-плазмонов и величины их импульса \mathbf{q} . Амплитуды соответствующих волн сравнимы по величине, а соотношение между ними слабо зависит от параметра α_{gc} . Показано, что возбуждение спин-плазмона приводит к появлению спиновой поляризации на поверхности ТИ, которая перпендикулярна импульсу плазмона, и найдена ее величина.

Рассмотрено рассеяние спин-плазмона как на неоднородности потенциала $V(\mathbf{r})$, так и на неоднородности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, параллельного плоскости поверхности ТИ. В первом порядке теории возмущений вероятность рассеяния спин-плазмона между состояниями с импульсами \mathbf{q} и \mathbf{q}' , абсолютные величины которых в силу закона сохранения энергии совпадают, может быть записана в виде:

$$w_e(q, \theta) = |V_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}|^2 |\Phi_e(q, \theta)|^2; \quad w_m(q, \theta) = |\mathbf{H}_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}} \Phi_m(q, \theta)|^2, \quad (8)$$

где $V_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}$ и $\mathbf{H}_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}$ — Фурье-образы распределений внешних возмущений, θ — угол рассеяния, а $\Phi_e(q, \theta)$ и $\Phi_m(q, \theta)$ — электрический и магнитный форм-факторы спин-плазмона, которые зависят только от параметра α_{gc} . Благодаря составной природе спин-плазмона электрический форм-фактор обращается в ноль при рассеянии вперед $\theta = 0$. При рассеянии вперед отлична от нуля только компонента магнитного форм-фактора, перпендикулярная импульсу плазмона, что свидетельствует о том, что спин-плазмон представляет собой нейтральное возбуждение, сопровождаемое спиновой поляризацией, перпендикулярной его импульсу.

В заключении главы обсуждаются различные задачи квантовой оптики спин-плазмонов и плазмонов в графене, для решения которых может быть использован разработанный формализм. Завершается глава обсуждением полученных результатов. Соответствующие результаты опубликованы в статьях [1a, 2a].

Во второй главе диссертации рассматриваются киральные экситоны на поверхности топологического изолятора, в спектре которой открыта щель при помощи обменного поля, создаваемого, например, упорядоченными магнитными примесями,

специально внедренными в толщю топологического изолятора или на его поверхность.

Для описания экситонов использовался метод уравнений движения, в рамках которого экситон представляет собой линейную суперпозицию межзонных переходов и может быть представлен как связанное состояние электрона и дырки. Его оператор рождения есть:

$$d_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{p}} C_{\mathbf{p}\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1}^+ a_{\mathbf{p},-1}, \quad (9)$$

где $a_{\mathbf{p},\gamma}$ — оператор уничтожения электрона в соответствующей зоне, а набор коэффициентов $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ образует волновую функцию экситона в импульсном пространстве. Оператор уничтожения экситона удовлетворяет уравнению движения $[H, d_{\mathbf{q}}^+] = E_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}^+$, где $E_{\mathbf{q}}$ — закон дисперсии экситонов, а H — гамильтониан взаимодействующих электронов на поверхности топологического изолятора.

Получено уравнение для волновой функции экситона и его энергии, которые в безразмерных единицах зависят только от безразмерного параметра $\alpha_c = e^2/\hbar v_F \epsilon$, где ϵ — эффективная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей поверхность топологического изолятора. Его можно оценить как отношение энергии кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой, образующим экситон, и их кинетическими энергиями. В диссертации найдено приближенное аналитическое решение уравнения при $\alpha_c \ll 1$. В этом случае безразмерные энергии и волновые функции киральных экситонов могут получены из соответствующих величин для двумерного атома водорода при помощи сдвига квантового числа орбитального момента на $|\delta m| = 1$. Знак δm зависит от направления обменного поля. Поэтому киральное экситонное состояние с наименьшей энергией обладает ненулевым орбитальным квантовым числом.

При помощи теории линейного отклика вычислен вклад киральных экситонов в тензор оптической проводимости поверхности топологического изолятора. Вклад экситонного состояния в холловскую проводимость имеет такой же знак, что и его орбитальное квантовое число. Показано, что киральные экситоны благодаря отсутствию симметрии между состояниями с противоположными орбитальными квантовыми числами m и $-m$ вносят резонансный вклад в холловскую проводимость и поэтому играют важную роль магнитооптических эффектах.

Проанализирована роль киральных экситонов в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра для тонкой пленки из топологического изолятора. Киральные экситоны резонансным образом усиливают эффект Фарадея и ослабляют эффект Керра.

Киральные экситоны также приводят к резонансам в частотной зависимости степеней эллиптичности как прошедшей сквозь пленку, так и отраженной от нее электромагнитных волн.

В заключении главы приводятся необходимые условия для наблюдения описанных резонансных эффектов, связанных с киральными экситонами. Затем обсуждаются киральные экситоны в графене и бислое графена, щель в спектре которых открыта при помощи специальной подложки или перпендикулярного электрического поля, соответственно. Далее обсуждаются магнитооптические эффекты для тонкой пленки из ГИ, помещенной в перпендикулярное к ней магнитное поле, в которой кулоновское взаимодействие приводит к образованию магнитоэкситонов. Завершается глава обсуждением полученных результатов. Соответствующие результаты этой главы представлены в [1b].

В третьей главе рассматривается куперовское спаривание пространственно разделенных дираковских электронов и дырок, которое может быть реализовано в системе из двух листов графена и в тонкой пленке из топологического изолятора.

В первой части третьей главы исследуется фазовая диаграмма системы пространственно разделенных электронов и дырок. Для определения критической температуры используется приближение Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), в котором критическая температура равна

$$T_0 = \frac{2E_F e^{\gamma_e}}{\pi} e^{-1/\lambda}, \quad (10)$$

где $\gamma_e = 0.57$ — постоянная Эйлера; λ — безразмерная константа кулоновского взаимодействия между электронами и дырками. Величина λ вычислена в статическом пределе приближения хаотических фаз (ПХФ). Исследована зависимость критической температуры спаривания от концентрации носителей заряда и расстояния между электронами и дырками.

Дисбаланс концентраций электронов и дырок эффективно подавляет их куперовское спаривание, при этом в определенном интервале дисбаланса стабилизируется состояние типа Ларкина-Овчинникова-Фулде-Феррелла, в котором параметр порядка конденсата электрон-дырочных пар является периодической функцией координат. Благодаря тому, что электрон и дырка имеют разный заряд и пространственно разделены как точечные примеси, так и кулоновские примеси эффективно подавляют их куперовское спаривание.

Гибридизация волновых функций электронов и дырок приводит к образованию параметра порядка конденсата электрон-дырочных пар с фиксированной фазой вы-

ше температуры перехода и размывает критическую температуру.

Завершается первая часть главы обсуждением условий, которые необходимы для экспериментальной реализации электрон-дырочного спаривания в тонкой пленки из топологического изолятора.

Вторая часть третьей главы посвящена исследованию туннелирования в системе пространственно разделенных электронов и дырок выше температуры их куперовского спаривания. *Ниже* температуры перехода куперовское спаривание приводит к внутреннему эффекту Джозефсона. Внутренний эффект Джозефсона приводит к появлению гигантского пика в зависимости туннельной проводимости от приложенного напряжения, который наблюдался в системе пространственно разделенных композитных электронов и дырок в полупроводниковых квантовых ямах в квантующем магнитном поле [62, 63]. *Выше* температуры перехода куперовские пары могут появляться как термодинамические флуктуации и приводить к усилению туннелирования. Описанный эффект рассмотрен во второй части третьей главы. Микроскопическая теория для описания флуктуаций куперовских пар разработана для тонкой пленки из топологического изолятора.

Для микроскопического описания флуктуаций куперовских пар электронов и дырок определен их куперовский пропагатор, соответствующий сумме диаграмм их рассеяния в куперовском канале.

При помощи теории линейного отклика вычислена туннельная проводимость для невзаимодействующих электронов и дырок в предположении, что при туннелировании электрона его импульс сохраняется. Вычислен также вклад в туннельную проводимость, соответствующий флуктуациям куперовских пар. В обоих случаях зависимость туннельной проводимости содержит резкий пик, появление которого связано с ограничениями, которые накладывают законы сохранения энергии и импульса для туннелирующего электрона.

Показано, что флуктуации куперовских пар приводят к критическому поведению туннельной проводимости в окрестности критической температуры, соответствующей электрон-дырочному спариванию. В окрестности критической температуры ширина пика стремится к нулю, а высота пика расходится степенным образом с критическим индексом $\nu = 2$, то есть $\sigma_T^{\max} \sim (T/T_{0d} - 1)^{-2}$, где T_{0d} — критическая температура перехода с учетом беспорядка. Даже если электрон-дырочное спаривание подавлено беспорядком, то кулоновское взаимодействие между электронами и дырками значительно увеличивают туннельную проводимость. В окрестности кван-

тового фазового перехода по управляющему параметру γ , который равен полусумме декрементов затухания электронов и дырок, высота пика туннельной проводимости также расходуется степенным образом с критическим индексом $\mu = 2$, то есть $\sigma_T^{\max} \sim (\gamma/\gamma_c - 1)^{-2}$. Здесь γ_c — критическое значение декремента затухания куперовских пар, при котором электрон-дырочное спаривание подавляется. В заключении второй части третьей главы обсуждаются особенности эффекта усиления туннелирования флуктуациями куперовских пар в других реализациях системы пространственно разделенных электронов и дырок. Далее обсуждается влияние кулоновского взаимодействия на туннелирование между двумя двумерными электронными системами.

Завершается глава обсуждением полученных результатов. Соответствующие материалы опубликованы в статьях [3а,4а,5а,6а].

В заключении приведены результаты выполненной работы.

Завершается диссертация семью приложениями (Приложение 1 — Приложение 7), в которые вынесены некоторые громоздкие вычисления и дополнительные материалы, представляющие самостоятельный интерес и нарушающие целостность изложения. В Приложении 7 исследуется эффект увлечения электронов электронами в системе из двух листов графена, обусловленный их туннелированием между листами. Материалы этого приложения опубликованы в статье [7а].

Глава 1.

Спин-плазмоны на поверхности топологического изолятора

1.1. Введение

Одной из особенностей электронных состояний на поверхности трехмерного сильно-го топологического изолятора (ТИ) является жесткая связь между направлениями векторов спина и импульса электронов. Оператор плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ электронов связан с плотностью их спина $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ [3]

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 2ev_F[\mathbf{s}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}], \quad (1.1)$$

что приводит к появлению спиновой поляризации на поверхности ТИ при протекании по ней электрического тока [35] и связанной диффузии плотностей заряда и спина [36].

Из (1.1) следует, что колебания электронной плотности на поверхности ТИ сопровождаются колебаниями спиновой плотности. Поэтому коллективные плазменные колебания в вырожденном электронном газе, заполняющем поверхностные состояния ТИ, являются спин-плазмонами, которые представляют собой связанные волны плотностей заряда и спина [37]. Было предложено использовать спин-плазмоны для создания "спиновой батареи", в которой пространственно разделяются электроны с противоположными направлениями вектора спина [38].

Для исследования спин-плазмонов на поверхности ТИ использовалась диаграммная техника и приближение хаотических фаз (ПХФ) [37]. В этом подходе плазменные возбуждения описываются полуклассически, то есть для вычисления распределения электрического поля используются классические уравнения Максвелла, а функции

реакции электронного газа на электрическое поле вычисляются микроскопически. Этот подход предполагает, что колебания электронной плотности макроскопически велики, и количество спин-плазмонов в соответствующей моде значительно больше единицы. Существует другой, более последовательный подход для описания плазменных возбуждений в вырожденном электронном газе, основанный на методе уравнений движения и впервые примененный для исследования плазмонов в металлах [64–66]. В этом формализме плазмоны представляют собой бозевскую ветвь возбуждений электронного газа, соответствующую колебаниям его плотности и появляющуюся в дополнение к одночастичным электрон-дырочным парам. Этот формализм позволяет исследовать возбужденные состояния взаимодействующего электронного газа с произвольным числом плазмонов. Для описания плазмонов в дираковском газе он ранее не применялся, и его разработка позволила бы более детально исследовать спин-плазмоны на поверхности ТИ и плазмоны в графене.

В этой главе диссертации теоретически исследуются спин-плазмоны на поверхности трехмерного топологического изолятора при помощи специально разработанного формализма, основанного на методе уравнений движения. Обсуждаются также свойства плазмонов в графене. В заключении главы обсуждаются различные задачи, для решения которых может быть применен разработанный формализм.

1.2. Описание спин-плазмонов и их свойства

1.2.1. Метод уравнений движения для спин-плазмонов

Отправной точкой для описания плазменных колебаний является многочастичный гамильтониан для взаимодействующих электронов

$$H = \sum_{\mathbf{p}\gamma} \xi_{\mathbf{p}\gamma} a_{\mathbf{p}\gamma}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\gamma_1 \gamma_2} V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}, \gamma_1} | f_{\mathbf{p}_1, \gamma_1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}, \gamma_2} | f_{\mathbf{p}_2, \gamma_2} \rangle a_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}, \gamma_1}^+ a_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}, \gamma_2}^+ a_{\mathbf{p}_2, \gamma_2} a_{\mathbf{p}_1, \gamma_1}, \quad (1.2)$$

где $a_{\mathbf{p}\gamma}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом \mathbf{p} из зоны γ ; $\xi_{\mathbf{p}} = \gamma v_F p - E_F$ — закон дисперсии электронов; E_F — их энергия Ферми; $V_c(\mathbf{q}) = 2\pi e^2 / \epsilon q$ — Фурье-образ потенциала кулоновского взаимодействия; ϵ — эффективная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей двумерный электронный газ, которая равна полусумме диэлектрических проницаемостей двух сред, на поверхности раздела которых он реализуется; $|f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle$ — спинорная часть волновой функции дираковских электронов,

которая является собственным вектором соответствующего одночастичного гамильтониана (1) или (2) и имеет вид:

$$\text{графен} \rightarrow |f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}/2} \\ \gamma e^{i\varphi_{\mathbf{p}}/2} \end{pmatrix}, \quad \text{ТИ} \rightarrow |f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}/2} \\ i\gamma e^{i\varphi_{\mathbf{p}}/2} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Одночастичные гамильтонианы, описывающие дираковские электроны в графене и на поверхности ТИ, связаны унитарным преобразованием, которое сохраняет соответствующие скалярные произведения их собственных векторов $\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'_1} | f_{\mathbf{p}\gamma_1} \rangle$ и $\langle f_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\gamma'_2} | f_{\mathbf{p}_2\gamma_2} \rangle$. Поэтому разработанный ниже формализм позволяет описывать плазменные возбуждения в обеих системах, при этом для определенности будут описываться свойства спин-плазмонов на поверхности ТИ.

Спин-плазмон с импульсом \mathbf{q} представляет собой суперпозицию одночастичных электрон-дырочных пар с таким же суммарным импульсом:

$$Q_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}, \quad (1.4)$$

где набор коэффициентов $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma}$ образует его волновую функцию в импульсном пространстве. Следует отметить, что в дираковском электронном газе в волновую функцию плазмона вносят вклад не только внутризонные ($\gamma = \gamma'$), но и межзонные ($\gamma \neq \gamma'$) переходы. В рамках метода уравнений движения плазмон представляет собой композитный бозон, оператор рождения которого удовлетворяет соответствующим коммутационным соотношениям $[\Omega_{\mathbf{q}}, Q_{\mathbf{q}}^+] = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}$ и уравнению движения Гейзенберга $[H, Q_{\mathbf{q}}^+] = \Omega_{\mathbf{q}} Q_{\mathbf{q}}^+$, где $\Omega_{\mathbf{q}}$ — энергия плазмона, а H — гамильтониан взаимодействующих электронов (1.2).

Свойства плазмонов в дираковском электронном газе определяются двумя *независимыми* безразмерными параметрами: $\alpha_c = e^2/\epsilon\hbar v_F$ и $1/g$, где g — фактор рождения дираковских частиц. Величину α_c можно оценить как отношение кулоновской энергии электронного газа к его кинетической энергии. Для решения уравнений движения для оператора рождения спин-плазмона (Приложение 1) использовалось приближение хаотических фаз (ПХФ). Применимость этого приближения обоснована либо при $\alpha_c \ll 1$, либо при $1/g \ll 1$ (см. [1, 61] и цит.лит.). Первое условие выполняется для электронов на поверхности ТИ второго поколения, а второе — для электронов в графене. При этом волновая функция плазмона и его энергия в приближении ПХФ определяются только отношением безразмерных параметров, то есть величиной $\alpha_{gc} = g\alpha_c$.

Достижимый уровень электрического допирования электронов как в графене, так и на поверхности ТИ равен $E_F \approx 0.1$ эВ [68, 69]. В обоих случаях даже при комнатной температуре электроны образуют вырожденный ферми-газ, то есть $T \ll E_F$, поэтому тепловым размытием функции распределения электронов можно пренебречь. Для определенности также предполагается, что химический потенциал электронного газа находится в зоне проводимости.

В приближении хаотических фаз волновая функция спин-плазмона имеет вид (см. Приложение 1):

$$C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} = \frac{\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle N_{\mathbf{q}}}{\Omega_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{p}\gamma} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} + i\delta} \times |n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}|, \quad (1.5)$$

где $N_{\mathbf{q}}$ — нормировочный множитель; $n_{\mathbf{p}\gamma}$ — функция распределения электронов при нулевой температуре. Закон дисперсии плазмона $\Omega_{\mathbf{q}}$ определяется из уравнения:

$$1 - V_c(\mathbf{q})\Pi(\mathbf{q}, \Omega_{\mathbf{q}}) = 0, \quad (1.6)$$

где введен поляризационный оператор системы двумерных безмассовых электронов

$$\Pi(\mathbf{q}, \omega) = g \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} |\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle|^2 \frac{(n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'})}{\omega + \xi_{\mathbf{p}\gamma} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} + i\delta}. \quad (1.7)$$

Аналитические формулы для поляризационного оператора $\Pi(\mathbf{q}, \omega)$ для дираковского электронного газа в приближении ПХФ были получены при помощи диаграммной техники [70, 71].

В приближении ПХФ коммутационные соотношения для операторов уничтожения и рождения плазмона заменяются их средними значениями по основному состоянию системы

$$[Q_{\mathbf{q}}, Q_{\mathbf{q}'}^+] \rightarrow \langle 0 | [Q_{\mathbf{q}}, Q_{\mathbf{q}'}^+] | 0 \rangle = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}, \quad (1.8)$$

что приводит к следующему уравнению для нормировочного множителя волновой функции плазмона $N_{\mathbf{q}}$:

$$\sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} \left| C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} \right|^2 (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) = 1. \quad (1.9)$$

Все численные расчеты в этой главе выполнены в безразмерных единицах ω/E_F и q/p_F для трех значений безразмерного параметра α_{gc} . Величина $\alpha_{gc} = 0.09$ соответствует поверхности ТИ Bi_2Se_3 . $\alpha_{gc} = 2.2$ — графену, который лежит на подложке из SiO_2 . $\alpha_{gc} = 8.8$ — подвешенному графену. Закон дисперсии плазмонов приведен на Рис.1.1, где пунктирными линиями обозначены границы межзонного ($\omega = 2E_F - v_F q$) и внутрizonного ($\omega = v_F q$) континуумов электрон-дырочных переходов. Если закон

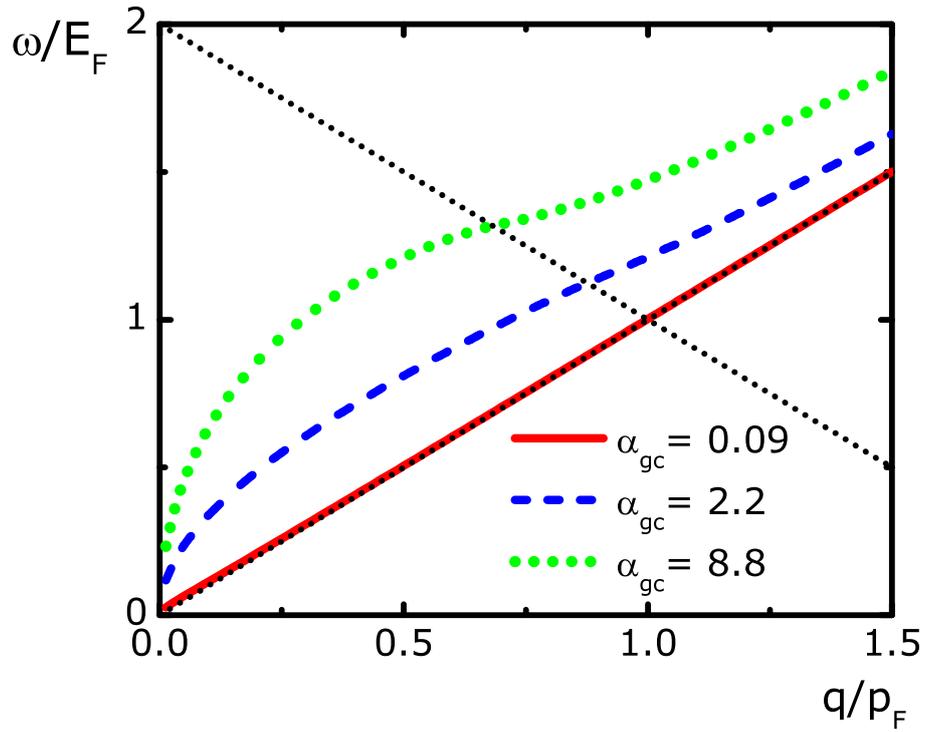


Рис. 1.1. Закон дисперсии спин-плазмонов. Пунктирные линии ($\omega = v_F q$) и ($\omega = 2E_F - v_F q$) обозначают границы континуумов внутризонных и межзонных переходов.

дисперсии плазмона не попадает ни в одночастичный континуум, то он является незатухающим возбуждением. Ограничения, обусловленные одновременным выполнением законов сохранения энергии и импульса, запрещают передачу энергии от плазмона одночастичным возбуждениям. При малых значениях безразмерного параметра α_{gc} закон дисперсии плазмона прижимается к границе континуума внутризонных переходов. При определенном импульсе q_c закон дисперсии пересекает границу континуума межзонных переходов, и плазмон приобретает затухание. При малых величинах параметра α_{gc} закон дисперсии плазмона пересекает границу континуума при $q_c \approx p_F$.

При конечной температуре T границы одночастичных континуумов размываются. Величину их размыва по энергии можно оценить как $\delta E \approx T$. Поэтому для того, чтобы спин-плазмон был незатухающим возбуждением необходимо, чтобы выполнялось условие $\Omega_q - v_F q \gg T$.

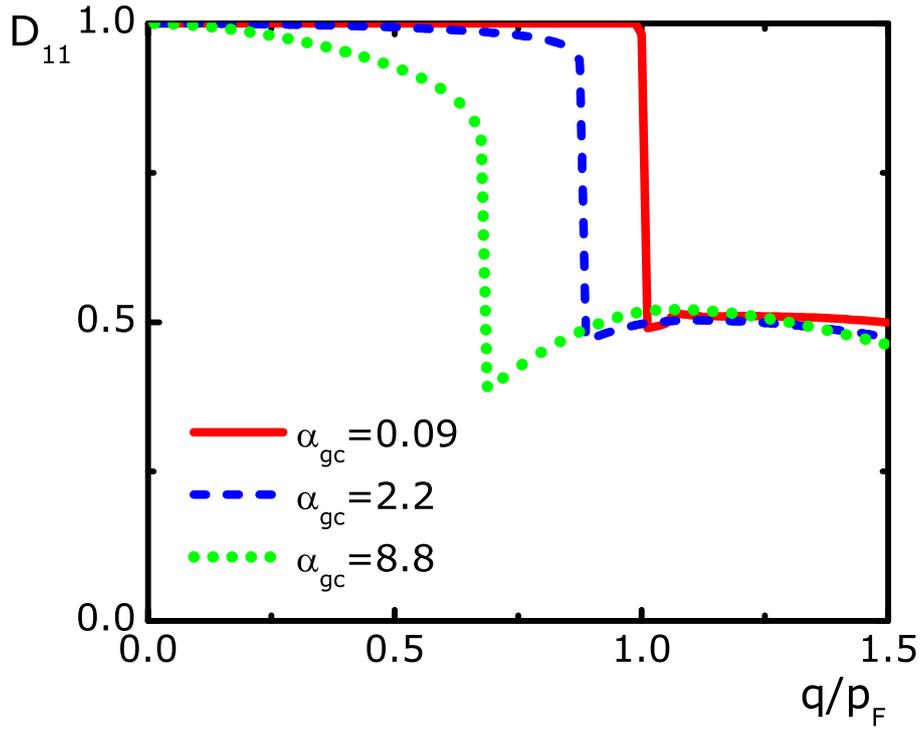


Рис. 1.2. Зависимость вклада внутризонных переходов D_{11} в волновую функцию спин-плазмона от его импульса q .

1.2.2. Волновая функция спин-плазмона

В волновую функцию спин-плазмона вносят вклад как внутризонные, так и межзонные одночастичные электрон-дырочные переходы. Относительный вес этих групп переходов может задаваться величинами

$$D_{\gamma'\gamma} = \sum_{\mathbf{p}} \left| C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} \right|^2 (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}), \quad (1.10)$$

которые являются вкладами соответствующих переходов в условие нормировки (1.9) и их сумма равна единице, то есть $\sum_{\gamma\gamma'} D_{\gamma\gamma'} = 1$.

Зависимость суммарного вклада внутризонных переходов D_{11} в волновую функцию плазмона от его импульса q приведена на Рис.1.2. При $q < q_c$ вклад внутризонных переходов значительно превосходит вклад межзонных переходов. Причем вкладом межзонных переходов можно пренебречь при $\alpha_{gc} \ll 1$. При $q > q_c$ вклады внутризонных и межзонных переходов сравнимы по величине, и соотношения между ними слабо зависят от величины α_{gc} .

Зависимость квадрата модуля внутризонного вклада $|C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{11}|^2$ и суммы квадратов модулей межзонных вкладов $|C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{1-1}|^2 + |C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{-11}|^2$ в волновую функцию спин-плазмона с

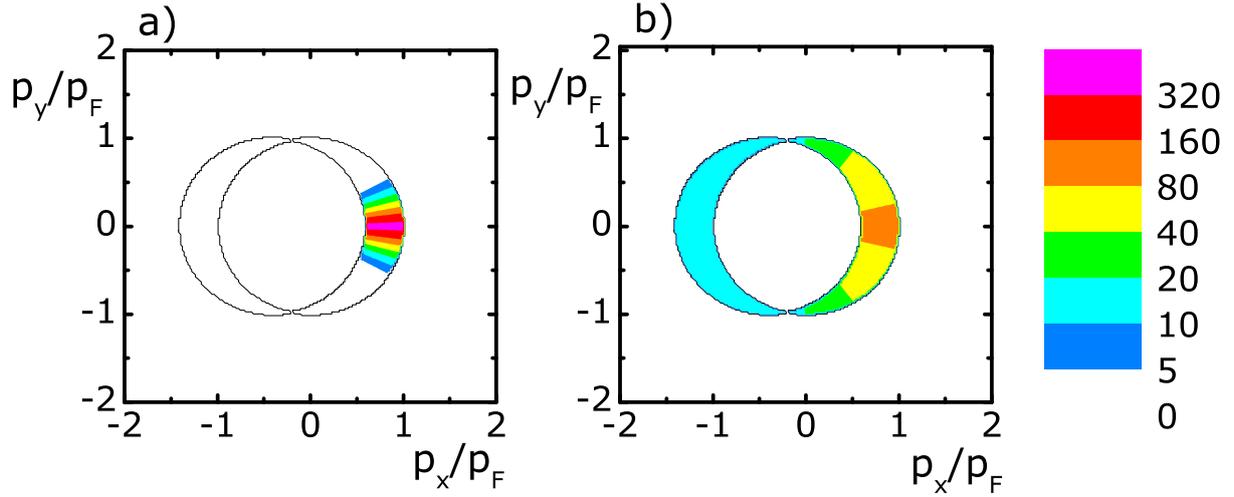


Рис. 1.3. Зависимость квадрата модуля внутризонного вклада $|C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{11}|^2$ в волновую функцию спин-плазмона от импульса \mathbf{p} для $q = 0.4p_F$ при $\alpha_{gc} = 0.09$ (a) и $\alpha_{gc} = 8.8$ (b).

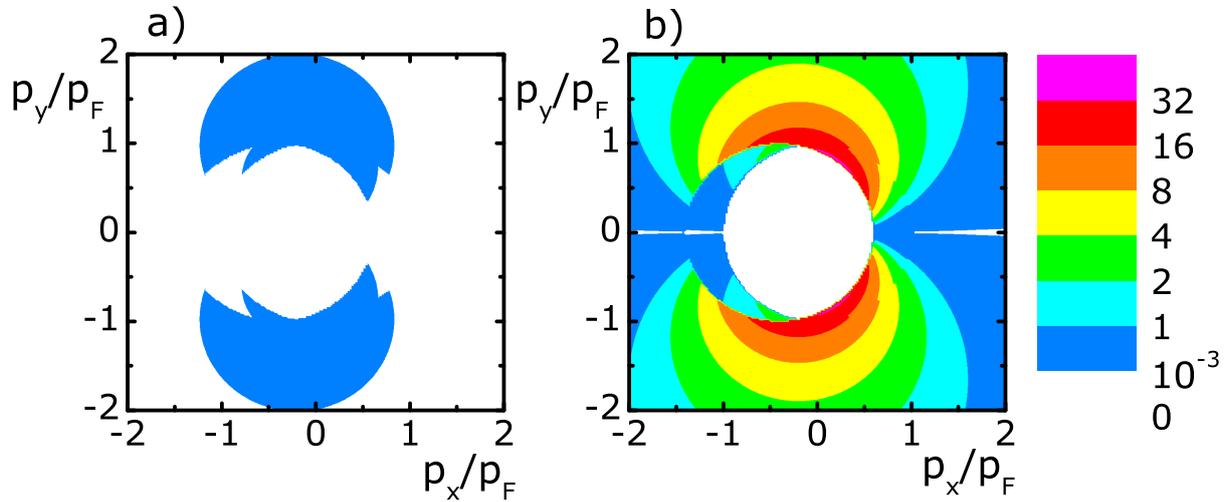


Рис. 1.4. Зависимость суммы квадратов модулей $|C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{1,-1}|^2 + |C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{-1,1}|^2$ межзонных вкладов в волновую функцию спин-плазмона от его импульса \mathbf{p} при $q = 0.4p_F$ при $\alpha_{gc} = 0.09$ (a) и $\alpha_{gc} = 8.8$ (b).

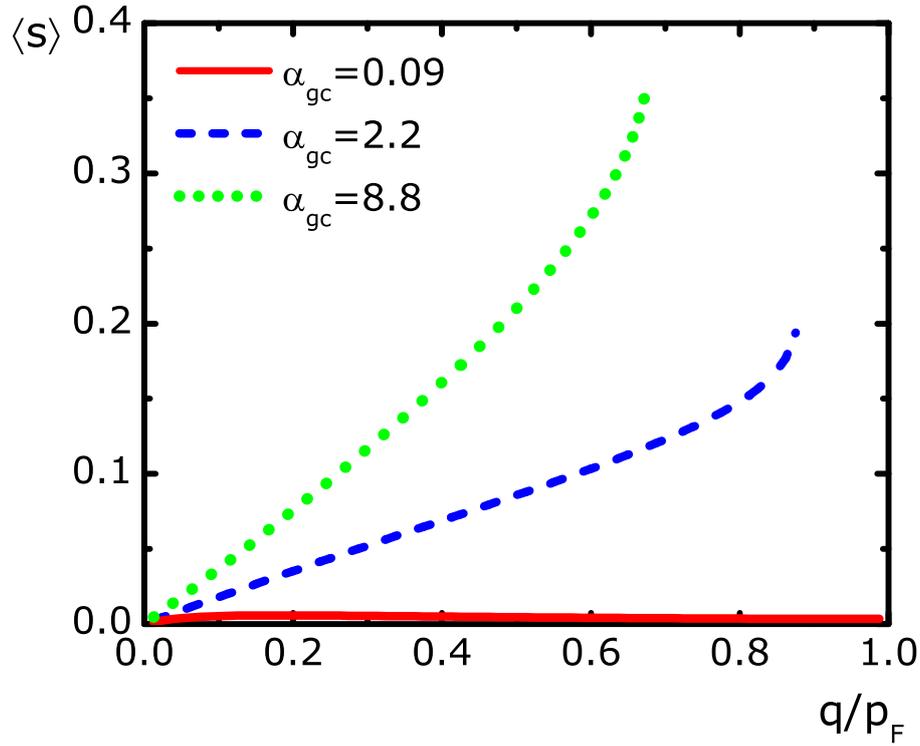


Рис. 1.5. Зависимость спиновой поляризации поверхности ТИ $\langle s \rangle$ (в единицах \hbar) в состоянии с одним спин-плазмоном от величины его импульса q .

импульсом $q = 0.4p_F$ от импульса \mathbf{p} представлены на Рис.1.3 и Рис.1.4. При $\alpha_{gc} \ll 1$ волновая функция спин-плазмона, соответствующая внутризонному вкладу, сильно локализована в импульсном пространстве. Только небольшая группа одночастичных переходов из электронных состояний, чей импульс параллелен импульсу плазмона вносят вклад в его волновую функцию. При $\alpha_{gc} \gg 1$ волновая функция спин-плазмона сильно размыта в импульсном пространстве.

1.2.3. Проявления жесткой связи между направлениями спина и импульса

Спин-плазмон с импульсом \mathbf{q} является когерентной суперпозицией одночастичных возбуждений с таким же суммарным импульсом, поэтому его возбуждение приводит к смещению функции распределения электронов в импульсном пространстве. Благодаря жесткой связи между направлениями спина и импульса отдельных электронов возбуждение спин-плазмона приводит к возникновению спиновой поляризации поверхности ТИ, которая перпендикулярна его импульсу. В состоянии с одним плазмоном $|1_{\mathbf{q}}\rangle = Q_{\mathbf{q}}^+|0\rangle$ среднее значение спиновой поляризации поверхности ТИ

$\langle \mathbf{s} \rangle = 1/2 \cdot \langle 1_{\mathbf{q}} | \mathbf{S} | 1_{\mathbf{q}} \rangle$ можно представить в виде:

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'\tau} \left[\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | \sigma | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\tau} \rangle C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\tau\gamma} - C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\tau} \langle f_{\mathbf{p}\tau} | \sigma | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle \right] \left(C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} \right)^* (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}), \quad (1.11)$$

где \mathbf{S} — многочастичный оператор спина системы. Зависимость спиновой поляризации поверхности ТИ от величины импульса спин-плазмона приведена на Рис.1.5. При $\alpha_{gc} \ll 1$ величина спиновой поляризации поверхности ТИ значительно меньше величины спина отдельного электрона, а при $\alpha_{gc} \gg 1$ ее величина сравнима с величиной спина одного электрона.

Возбуждение плазмона в графене приводит к возникновению в нем изоспиновой поляризации электронного газа, которая параллельна импульсу плазмона. Изоспиновая поляризация электронного газа приводит к появлению ненулевого *среднего* значения по всем электронам разности фаз между компонентами их волновых функций, соответствующих двум подрешеткам графена. В отсутствие изоспиновой поляризации графена среднее значение этой разности фаз равно нулю.

В заряженной электронной жидкости без спин-орбитального взаимодействия плазменные колебания представляют собой колебания электронной плоскости. В электронной жидкости на поверхности ТИ, благодаря жесткой связи между направлениями спина и импульса, плазменные колебания представляют собой связанные колебания плотности заряда и плотности спина. Направление колебаний плотности спина перпендикулярно направлению колебаний плотности заряда, которое параллельно импульсу спин-плазмона. Для описания этих волн, которые сопутствуют плазмону с импульсом \mathbf{q} , удобно ввести Фурье-образы операторов плотностей заряда и спина, которые имеют вид:

$$\rho_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{s}_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | \mathbf{s} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}. \quad (1.13)$$

Для вычисления среднего значения этих операторов (1.12) и (1.13) в состоянии $|n_{\mathbf{q}}\rangle = [(Q_{\mathbf{q}}^+)^{n_{\mathbf{q}}}/(n_{\mathbf{q}}!)]|0\rangle$ с заданным числом плазмонов $n_{\mathbf{q}}$ с импульсом \mathbf{q} , удобно эти операторы выразить через операторы рождения и уничтожения спин-плазмонов (см. Приложение 2):

$$\rho_{\mathbf{q}}^+ = N_{\mathbf{q}}^* \Pi(\mathbf{q}, \Omega_{\mathbf{q}}) Q_{\mathbf{q}}^+ + \tilde{\rho}_{\mathbf{q}}^+, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{s}_{\mathbf{q}}^+ = N_{\mathbf{q}}^* \Pi_s(\mathbf{q}, \Omega_{\mathbf{q}}) Q_{\mathbf{q}}^+ + \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbf{q}}^+, \quad (1.15)$$

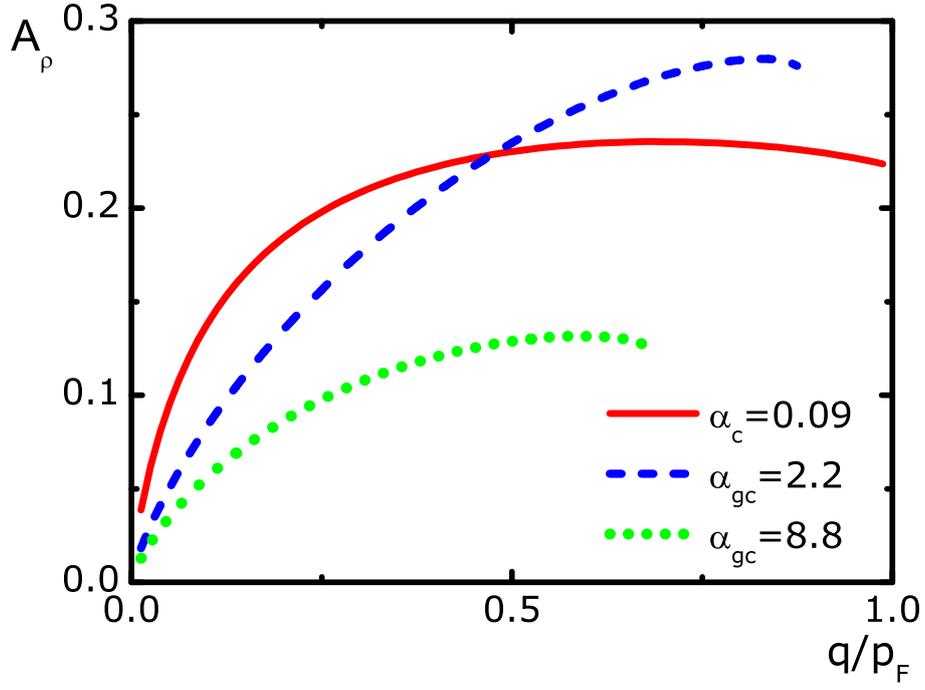


Рис. 1.6. Зависимость нормированной амплитуды волны плотности заряда A_ρ от величины импульса q спин-плазмона.

где операторы $\tilde{\rho}_\mathbf{q}^+$ и $\tilde{\mathbf{s}}_\mathbf{q}^+$ соответствуют одночастичным возбуждениям в системе взаимодействующих электронов и являются динамически независимыми от плазмонов. Здесь $\Pi(q, \omega)$ — поляризационный оператор, определенный в (1.7), который также является корреляционной функцией плотность-плотность, а $\Pi_s(q, \omega)$ — корреляционная функция плотность-спин, которая имеет вид:

$$\Pi_s(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} \frac{\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle \langle f_{\mathbf{p}\gamma} | \mathbf{s} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'})}{\omega + \xi_{\mathbf{p}\gamma} - \xi_{\mathbf{q}+\mathbf{q},\gamma'} + i\delta}. \quad (1.16)$$

Средние значения операторов $\rho_\mathbf{q}^+$ и $\mathbf{s}_\mathbf{q}^+$ в состоянии $|n_\mathbf{q}\rangle$ равны нулю. Аналогичная ситуация возникает в задаче о квантово-механическом гармоническом осцилляторе [72], в которой среднее значение координаты в любом квантовом состоянии в точности равно нулю и в которой амплитуда колебаний обычно определяется как её среднеквадратичное значение. Поэтому амплитуды волн плотностей заряда и спина в состоянии $|n_\mathbf{q}\rangle$ можно характеризовать их среднеквадратичными значениями, из которых вычтены их нулевые колебания, то есть:

$$\sqrt{\langle \rho_\mathbf{q} \rho_\mathbf{q}^+ \rangle} \equiv \sqrt{\langle n_\mathbf{q} | \rho_\mathbf{q} \rho_\mathbf{q}^+ | n_\mathbf{q} \rangle - \langle 0 | \rho_\mathbf{q} \rho_\mathbf{q}^+ | 0 \rangle} = \sqrt{n_\mathbf{q} |N_\mathbf{q} \Pi(\mathbf{q}, \Omega_\mathbf{q})|}, \quad (1.17)$$

$$\sqrt{\langle \mathbf{s}_\mathbf{q}^T (\mathbf{s}_\mathbf{q}^T)^+ \rangle} \equiv \sqrt{\langle n_\mathbf{q} | \mathbf{s}_\mathbf{q}^T (\mathbf{s}_\mathbf{q}^T)^+ | n_\mathbf{q} \rangle - \langle 0 | \mathbf{s}_\mathbf{q}^T (\mathbf{s}_\mathbf{q}^T)^+ | 0 \rangle} = \sqrt{n_\mathbf{q} |N_\mathbf{q} \Pi_s^T(\mathbf{q}, \Omega_\mathbf{q})|}. \quad (1.18)$$

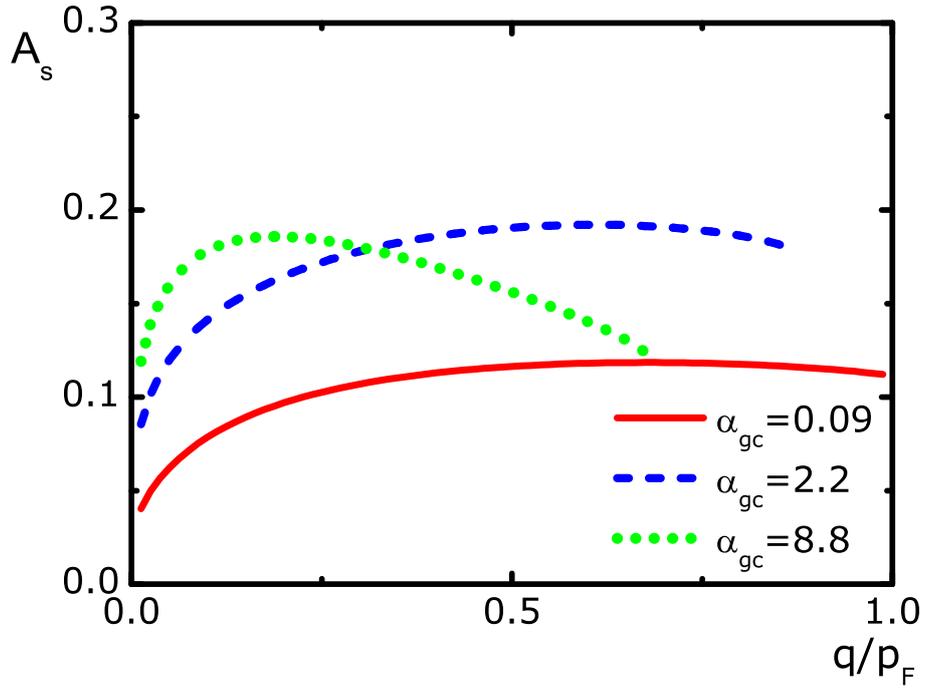


Рис. 1.7. Зависимость нормированной амплитуды волны плотности спина A_s от величины импульса q спин-плазмона.

Здесь учтено, что направление колебаний плотности спина перпендикулярно импульсу плазмона \mathbf{q} , и s^T обозначает соответствующую компоненту векторного оператора плотности спина. $\Pi_s^T(\mathbf{q}, \Omega_q)$ — компонента функции реакции плотность-спин, перпендикулярная импульсу спин-плазмона. Удобно ввести безразмерные амплитуды волн $A_\rho(q)$ и $A_s(q)$, которые определены следующим образом: $\sqrt{\langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}}^+ \rangle} = (n_{\mathbf{q}} \rho)^{1/2} A_\rho(q)$ и $\sqrt{\langle s_{\mathbf{q}}^T (s_{\mathbf{q}}^T)^+ \rangle} = (n_{\mathbf{q}} \rho)^{1/2} A_s(q)$, где ρ — концентрация дираковских электронов. При таком определении нормированные амплитуды не зависят от концентрации плазмонов. Зависимости безразмерных амплитуд волн плотностей заряда и плотности спина приведены на Рис.1.6 и Рис.1.7. Величины амплитуд волн плотностей заряда и спина сравнимы по величине, и соотношение между ними слабо зависит от параметра α_{gc} . Следует отметить, что в электронном газе со спин-орбитальным взаимодействием плазменные возбуждения также представляют собой связанные волны плотностей заряда и спина. В реалистичных условиях энергия спин-орбитального взаимодействия электронов значительно меньше их кинетической энергии. Поэтому в этом случае амплитуда волны плотности спина значительно меньше, чем амплитуда волны плотности заряда [73].

1.2.4. Уравнение непрерывности

Оператор электрического тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ для электронов на поверхности ТИ связан с оператором плотности спина $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ следующим уравнением:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 2ev_F[\mathbf{s}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}]. \quad (1.19)$$

Плотности распределения заряда и электрического тока на поверхности ТИ удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\text{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.20)$$

Соотношения (1.19) и (1.20) накладывают ограничения на *точные* функции реакции плотность-плотность $\tilde{\Pi}(q)$ и плотность-спин $\tilde{\Pi}_s^T(q)$ системы взаимодействующих электронов, которые должны удовлетворять следующему уравнению [37]:

$$\tilde{\Pi}(q, \omega) = 2 \frac{qv_F}{\omega} \tilde{\Pi}_s^T(q, \omega). \quad (1.21)$$

Функции реакции $\Pi(q, \omega)$ и $\Pi_s^T(q, \omega)$, полученные в приближении ПХФ и определенные согласно формулам (1.7) и (1.16), удовлетворяют этому соотношению. Это означает, что в приближении ПХФ закон сохранения заряда на поверхности ТИ не нарушается.

Следует отметить, что функции реакции плотность-плотность и плотность-ток, вычисленные в рамках однозонного приближения и ПХФ, также удовлетворяют уравнению (1.21). В однозонном приближении пренебрегают изменением функции распределения в валентной зоне дираковского спектра, то есть межзонными переходами. Однозонное приближение часто используется для анализа транспортных явлений в графене и на поверхности ТИ (см. [1] и цит.лит.)

1.2.5. Рассеяние спин-плазмонов

Примеси и неоднородности магнитного поля на поверхности топологического изолятора приводят к рассеянию спин-плазмонов. Гамильтониан взаимодействия электронов с внешним потенциалом H_e и магнитным полем H_m , параллельным поверхности топологического изолятора, имеет вид:

$$H_e = -e \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_{\gamma' \gamma} V(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}'\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}, \quad (1.22)$$

$$H_m = \mu_B \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \sum_{\gamma' \gamma} \mathbf{H}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | \sigma | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}'\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}. \quad (1.23)$$

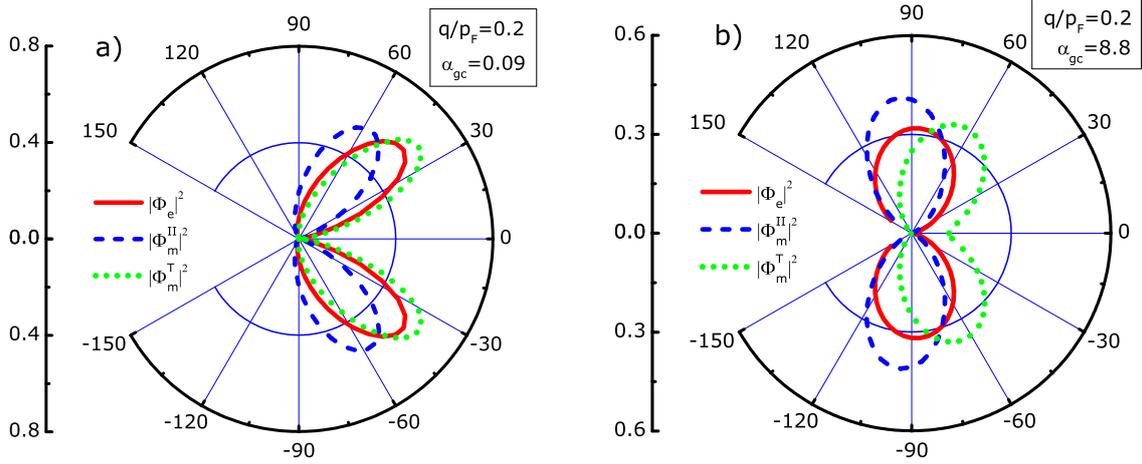


Рис. 1.8. Диаграмма рассеяния спин-плазмона с импульсом $q = 0.2p_F$. Зависимость квадрата модуля электрического форм-фактора $|\Phi_e|^2$ и компонент вектора магнитного форм-фактора $|\Phi_m^T|^2$ и $|\Phi_m^{II}|^2$ от угла рассеяния при $\alpha_{gc} = 0.09$ (а) и $\alpha_{gc} = 8.8$ (б).

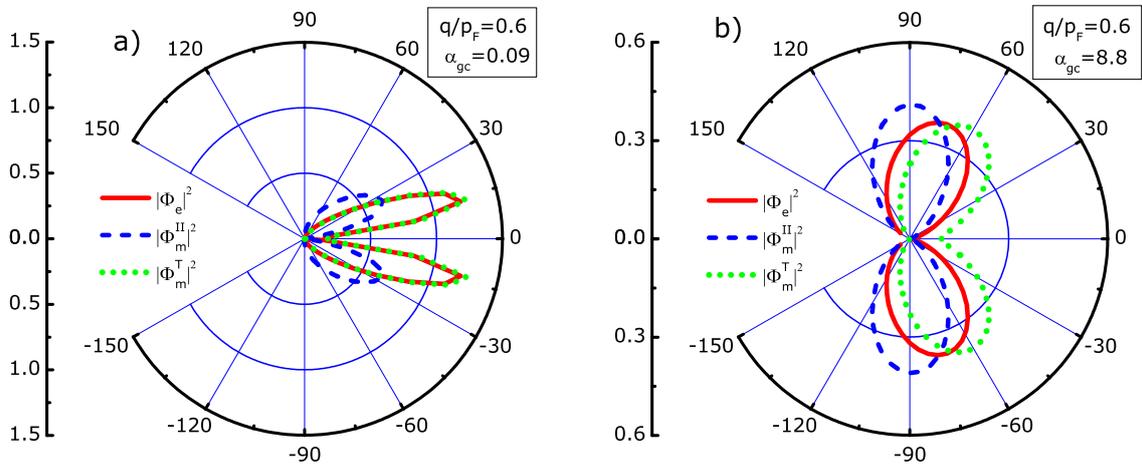


Рис. 1.9. Диаграмма рассеяния спин-плазмона с импульсом $q = 0.6p_F$. Зависимость квадрата модуля электрического форм-фактора $|\Phi_e|^2$ и компонент вектора магнитного форм-фактора $|\Phi_m^T|^2$ и $|\Phi_m^{II}|^2$ от угла рассеяния при $\alpha_{gc} = 0.09$ (а) и $\alpha_{gc} = 8.8$ (б).

Здесь $V(\mathbf{q})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ — Фурье-компоненты потенциала и магнитного момента примеси. В первом порядке теории возмущений зависимость вероятности рассеяния спин-плазмона от угла рассеяния может быть записана в виде:

$$w_e(q, \theta) = |V(2q \sin \frac{\theta}{2})|^2 |\Phi_e(q, \theta)|^2, \quad (1.24)$$

$$w_m(q, \theta) = |\mathbf{H}(2q \sin \frac{\theta}{2}) \Phi_m(q, \theta)|^2, \quad (1.25)$$

где θ — угол рассеяния спин-плазмона. Величины $\Phi_e(q, \theta)$ и $\Phi_m(q, \theta)$ представляют собой электрический и магнитный форм-факторы спин-плазмона, для которых были получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_e(q, \theta) = e \sqrt{\frac{q}{\Omega'_q}} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\gamma\gamma'\tau} \left(\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\tau} \rangle C_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\tau\gamma} - C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}}^{\gamma'\tau} \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'-\mathbf{q}\tau} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle \right) \times \\ \times (C_{\mathbf{p}\mathbf{q}'}^{\gamma'\gamma})^* (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'\gamma'}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \Phi_m(q, \theta) = \mu_B \sqrt{\frac{q}{\Omega'_q}} \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'\tau} \left(\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'\gamma'} | \sigma | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\tau} \rangle C_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\tau\gamma} - C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}}^{\gamma'\tau} \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'-\mathbf{q}\tau} | \sigma | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle \right) \times \\ \times (C_{\mathbf{p}\mathbf{q}'}^{\gamma'\gamma})^* (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}'\gamma'}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь $\Omega'_q = d\Omega_q/dq$ — производная закона дисперсии спин-плазмона по его импульсу. Удобно спроецировать магнитный форм-фактор спин-плазмона на направления параллельное и перпендикулярное его импульсу, получив $\Phi_m^{\text{II}}(q, \theta)$ и $\Phi_m^{\text{T}}(q, \theta)$. Благодаря тому, что интерес представляет не полная вероятность рассеяния, а ее распределение по углу рассеяния, то форм-факторы спин-плазмона удобно нормировать следующим образом:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} |\Phi_e(q, \theta)|^2 = \int \frac{d\theta}{2\pi} |\Phi_m^{\text{T}}(q, \theta)|^2 = \int \frac{d\theta}{2\pi} |\Phi_m^{\text{II}}(q, \theta)|^2 = 1. \quad (1.28)$$

Зависимости нормированных форм-факторов $|\Phi_e(q, \theta)|^2$, $|\Phi_m^{\text{II}}(q, \theta)|^2$ и $|\Phi_m^{\text{T}}(q, \theta)|^2$ для спин-плазмона с импульсами $q = 0.2p_F$ и $q = 0.6p_F$ приведены на Рис.1.8 и Рис.1.9.

Благодаря тому, что спин-плазмон является составной частицей подавлено рассеяние вперед на внешнем потенциале и неоднородности магнитного поля, параллельного импульсу спин-плазмона, то есть $|\Phi_e(q, 0)| = 0$ и $|\Phi_m^{\text{II}}(q, 0)| = 0$. Выражения (1.26) и (1.27) содержит два слагаемых, первое из которых соответствует рассеянию электрона вне линии Ферми, а второе — дырки внутри линии Ферми. При рассеянии вперед на внешнем потенциале и на неоднородности магнитного поля, параллельного импульсу плазмона, эти слагаемые в точности компенсируют друг друга. При рассеянии вперед на неоднородности магнитного поля, перпендикулярного импульсу спин-плазмона, величина форм-фактора $|\Phi_m^{\text{T}}(q, 0)|$ имеет конечное значение. При

$\mathbf{q} = \mathbf{q}'$ величины форм-факторов определяются средним значением заряда и спина в состоянии со спин-плазмоном, то есть

$$\Phi_e(q, 0) \sim \langle 1_{\mathbf{q}} | Q | 1_{\mathbf{q}} \rangle, \quad \Phi_m(q, 0) \sim \langle 1_{\mathbf{q}} | \mathbf{S} | 1_{\mathbf{q}} \rangle, \quad (1.29)$$

где Q и S — многочастичные операторы заряда и вектора спина поверхности ТИ. Поэтому спин-плазмон можно интерпретировать как нейтральное возбуждение, приводящее к спиновой поляризации поверхности ТИ, перпендикулярной его импульсу. Подавлено также рассеяние спин-плазмона назад как на неоднородности потенциала, так и на неоднородности магнитного поля, то есть $|\Phi_e(q, \pi)| = |\Phi_m^T(q, \pi)| = |\Phi_m^{\text{II}}(q, \pi)| = 0$.

Зависимость распределения вероятности рассеяния по углам становится более резкой с уменьшением параметра α_{gs} , потому что волновая функция спин-плазмона C_{pq} становится сильнее локализованной в импульсном пространстве.

1.3. Выводы

В этой главе детально исследованы спин-плазмоны в вырожденном электронном газе на поверхности трехмерного топологического изолятора при помощи математического формализма, основанного на методе уравнений движения, который был впервые применен к газу дираковских частиц. Благодаря наличию близко расположенных зоны проводимости и валентной зоны в спектре безмассовых дираковских частиц, спин-плазмон является суперпозицией как внутризонных, так межзонных переходов. В приближении хаотических фаз найдены закон дисперсии спин-плазмонов и их волновые функции в импульсном пространстве. Благодаря жесткой связи между импульсом и спином спин-плазмон представляет собой связанные волны плотностей заряда и спина. Найдены зависимости амплитуд этих волн от концентрации плазмонов с заданным импульсом и от величины этого импульса. Показано, что возбуждение спин-плазмона приводит к появлению спиновой поляризации поверхности на поверхности ТИ, и найдена её величина. Рассмотрено рассеяние спин-плазмонов на внешнем потенциале и неоднородности магнитного поля, и вычислены соответствующие электрический и магнитный форм-факторы. Благодаря составной природе спин-плазмона электрический форм-фактор и компонента магнитного форм-фактора, параллельная импульсу спин-плазмона, обращаются в ноль при рассеянии вперед $\theta = 0$. Отлична от нуля только компонента магнитного форм-фактора, перпендикулярная импульсу плазмона, что свидетельствует о том, что спин-плазмон представляет собой

нейтральное возбуждение, сопровождаемое спиновой поляризацией, перпендикулярной его импульсу.

Разработанный формализм может быть применен для описания плазмонов в электронном газе в графене. При этом плазмоны в графене сопровождаются появлением волны изоспиновой плотности и изоспиновой поляризацией. Ненулевое значение изоспиновой поляризации соответствует ненулевому среднему значению разности фаз между компонентами волновой функции электрона, усредненной по всем электронам.

Разработанный математический формализм для описания плазмонов в дираковском электронном газе может быть применен для решения целого ряда задач. В частности, он позволяет исследовать взаимодействие плазмонов с фотонами и фононами, которое приводит к образованию поверхностных плазмон-поляритонов [74] и гибридных плазмон-фононных мод [75, 76]. Разработанный формализм может быть использован для описания возбуждения, рассеяния, детектирования отдельных плазмонов, а также других задач квантовой плазмоники.

Глава 2.

Киральные экситоны на поверхности топологического изолятора и магнитооптические эффекты Фарадея и Керра

2.1. Введение

Электронные состояния на поверхности "сильного" топологического изолятора (ТИ) топологически защищены от внешних возмущений, которые не нарушают симметрию по отношению к обращению знака времени, например, от действия потенциала немагнитных примесей. Даже сильный беспорядок не приводит ни к открытию щели в спектре поверхностных состояний, ни к андерсоновской локализации электронов, заполняющих эти состояния [19].

Щель в спектре поверхностных состояний ТИ может быть открыта при помощи внешнего обменного поля, нарушающего симметрию по отношению к обращению знака времени и действующего только на магнитные моменты электронов. Внешнее обменное поле может проникать в ТИ из непроводящего магнита [77], приведенного в контакт с его поверхностью. Оно также может быть создано упорядоченными магнитными примесями, специально внедренными в толщу ТИ или на его поверхность [39, 40]. Благодаря кулоновскому взаимодействию на поверхности ТИ внутри энергетической щели появляется серия киральных экситонных состояний [50]. Киральное экситонное состояние с наименьшей энергией обладает ненулевым орбитальным квантовым числом. Энергетический спектр поверхностных состояний ТИ

во внешнем обменном поле является топологически нетривиальным и характеризуется топологическим инвариантом. Наличие топологического инварианта приводит к квантованию холловской проводимости $\sigma_{yx} = e^2/2h$ дираковского электронного газа на поверхности ТИ в отсутствие магнитного поля.

Симметрия по отношению к обращению знака времени на поверхности ТИ может быть нарушена также при помощи магнитного поля. Перпендикулярное поверхности ТИ магнитное поле приводит к перестройке энергетического спектра и образованию серии дискретных дираковских уровней Ландау. Перестройка энергетического спектра приводит к полуцелому квантованию холловской проводимости поверхности $\sigma_{yx} = e^2/h(n + 1/2)$, где n — количество полностью заполненных уровней Ландау. Благодаря кулоновскому взаимодействию на поверхности ТИ возбуждения системы представляют собой набор магнитоэкситонных ветвей, энергия которых зависит от их магнитного импульса [78–80].

Если симметрия по отношению к обращению знака времени нарушена на *всей* поверхности топологического изолятора, то распределения электрического и магнитного полей в его объеме могут быть определены при помощи *макроскопического* подхода, основанного на принципе наименьшего действия, в котором лагранжиан электромагнитного поля имеет вид [41, 42]:

$$L = \frac{1}{8\pi}(\epsilon\mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{2\pi} \mathbf{E}\mathbf{B}, \quad (2.1)$$

где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры, а величина θ может принимать только два значения: $\theta = 0$ для изолятора с тривиальной топологией зонной структуры и $\theta = \pi$ для топологического изолятора. Последний член в лагранжиане соответствует топологическому магнитоэлектрическому эффекту, который появляется в объеме ТИ благодаря перераспределению зарядов и возбуждению электрического тока на его поверхности. Разработанный макроскопический подход обоснован в пределе низких частот, и при его выводе предполагалось, что на поверхности ТИ отлична от нуля только холловская компонента тензора проводимости. Следует отметить, что описание топологического магнитоэлектрического эффекта в объеме ТИ представляет собой твердотельную реализацию аксионной электродинамики [43], в которой θ является динамической переменной, соответствующей полю аксионов.

Топологический магнитоэлектрический эффект в объеме топологического изолятора приводит к повороту плоскостей поляризации прошедшей через его поверхность (эффект Фарадея) и отраженной от нее (эффект Керра) электромагнитных волн [44–47]. Для тонкой пленки из ТИ, толщина которой значительно меньше длины

волны для материала ТИ, величины углов Фарадея θ_F и Керра θ_K при нормальном падении электромагнитной волны являются универсальными, то есть $\tan \theta_F = \alpha$ и $\tan \theta_K = 1/\alpha$, где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. При помощи макроскопического подхода, основанного на уравнениях, получаемых из лагранжиана (2.1) были исследованы магнитооптические эффекты при наклонном падении электромагнитной волны [45]. Была также изучена роль подложки, на которой выращена пленка из ТИ, [44] и были рассмотрены интерференционные эффекты в толстой пленке из ТИ [45]. При этом, несмотря на свою математическую элегантность, макроскопический подход не позволяет учесть эффекты, связанные с частотной дисперсией, и многочастичные корреляции на поверхности ТИ.

Для описания магнитооптических эффектов на поверхности ТИ существует другой подход, основанный на уравнениях Максвелла, в котором в граничных условиях для электрического и магнитного полей непосредственно учитываются электрические токи, возбужденные на поверхности ТИ падающей электромагнитной волной. В этом подходе отклик поверхности ТИ описывается тензором оптической проводимости. Этот тензор вычисляется *микроскопически*, что позволяет естественным образом учесть эффекты частотной дисперсии и многочастичные корреляции на поверхности ТИ. Влияние частотной дисперсии оптической проводимости на магнитооптические эффекты рассматривалось для поверхности ТИ как в магнитном поле [46], так и во внешнем обменном поле [47]. Возможное проявление киральных экситонов и магнитоэкситонов в магнитооптических эффектах ранее не исследовалось.

В этой главе диссертации теоретически исследуются киральные экситоны на поверхности ТИ, в спектре которой открыта щель при помощи внешнего обменного поля. Изучается их роль в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра. В заключении главы обсуждается роль магнитоэкситонов на поверхности ТИ в перпендикулярном к ней магнитном поле в магнитооптических эффектах.

2.2. Описание киральных экситонов

2.2.1. Поверхностные состояния во внешнем обменном поле

Одночастичный гамильтониан для электронов на поверхности ТИ, на которые действует внешнее обменное поле, имеет вид [2, 3]:

$$H_0 = v_F \mathbf{n}[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\sigma}] + \Delta \sigma_z, \quad (2.2)$$

где v_F — модуль скорости электронов; $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двумерный вектор, составленный из матриц Паули, действующих в пространстве состояний с заданной проекцией спина электрона; величина Δ параметризует взаимодействие спина электронов с z -компонентой обменного поля. Другие компоненты обменного поля могут быть исключены из гамильтониана (2.2) при помощи калибровочного преобразования, которое сдвигает дираковскую точку в импульсном пространстве. Энергетический спектр $\epsilon_{\mathbf{p}\gamma} = \gamma\epsilon_{\mathbf{p}} = \gamma\sqrt{|\Delta|^2 + v_F^2 p^2}$ состоит из зоны проводимости ($\gamma = 1$) и валентной зоны ($\gamma = -1$), которые разделены запрещенной зоной шириной $2|\Delta|$. Собственные состояния гамильтониана (2.2) имеют вид $e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}|f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle$, где $|f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle$ — спинорная составляющая волновой функции:

$$|f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\mathbf{p}\gamma}/2)e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}/2} \\ i\gamma \sin(\theta_{\mathbf{p}\gamma}/2)e^{i\varphi_{\mathbf{p}}/2} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $\cos \theta_{\mathbf{p}\gamma} = \gamma\Delta/\epsilon_{\mathbf{p}}$ и $\varphi_{\mathbf{p}}$ — полярный угол вектора импульса \mathbf{p} .

Отправной точкой для описания киральных экситонов является многочастичный гамильтониан, описывающий взаимодействующие электроны на поверхности ТИ

$$H = \sum_{\mathbf{p}\gamma} \epsilon_{k\gamma} a_{\mathbf{p}\gamma}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{p}'} \sum_{\substack{\gamma_1 \gamma_2 \\ \gamma'_1 \gamma'_2}} V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, \gamma'_1} | f_{\mathbf{p}\gamma_1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}, \gamma'_2} | f_{\mathbf{p}'\gamma_2} \rangle a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \gamma'_1}^+ a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}, \gamma'_2}^+ a_{\mathbf{p}'\gamma_2} a_{\mathbf{p}\gamma_1}, \quad (2.4)$$

где $a_{\mathbf{p}\gamma}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом \mathbf{p} из зоны γ ; $V_c(\mathbf{q}) = 2\pi e^2/\epsilon q$ — Фурье-образ потенциала кулоновского взаимодействия в двумерном пространстве; ϵ — эффективная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей поверхность топологического изолятора.

2.2.2. Метод уравнений движения для киральных экситонов

Экситоны представляют собой когерентную суперпозицию межзонных одночастичных переходов, и их можно представлять как связанное состояние электрона из зоны проводимости и дырки из валентной зоны. Оператор рождения экситона $d_{\mathbf{q}}^+$ с импульсом центра масс \mathbf{q} электрона и дырки имеет вид [67]:

$$d_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{p}} C_{\mathbf{p}\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, 1}^+ a_{\mathbf{p}, -1}, \quad (2.5)$$

где совокупность коэффициентов $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ образует волновую функцию экситона в импульсном пространстве. В рамках метода уравнений движения экситоны являются композитными бозонами, которые удовлетворяют соответствующим коммутационным соотношениям $[d_{\mathbf{q}}, d_{\mathbf{q}'}^+] = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}$. Оператор рождения экситона удовлетворяет урав-

нению движения Гейзенберга: $[H, d_{\mathbf{q}}^+] = \Omega_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}}^+$, где $\Omega_{\mathbf{q}}$ — закон дисперсии экситонов, и H — гамильтониан взаимодействующих электронов (2.4) на поверхности ТИ.

Только экситоны с нулевым импульсом центра масс $\mathbf{q} = 0$ вносят вклад в тензор оптической проводимости, потому что импульсом фотонов можно пренебречь. Далее предполагается, что импульс центра масс экситонов равен нулю, а индекс \mathbf{q} опущен.

Так как экситоны являются составными бозевскими частицами, то бозевские соотношения для их операторов рождения и уничтожения являются приближенными. Обменными процессами между электронами (или дырками), которые принадлежат *разным* экситонам, можно пренебречь, если $n_{\text{exc}} a_{\text{exc}}^2 \ll 1$, где n_{exc} — концентрация экситонов, а a_{exc} — характерное расстояние между электроном и дыркой, образующих экситон. При исследовании энергетического спектра отдельных экситонов это приближение заведомо выполняется.

Уравнение движения для оператора рождения экситона приводит к следующему уравнению для его энергии и волновой функции (см. Приложение 3):

$$(2\epsilon_{\mathbf{p}} + \Sigma_{\mathbf{p}}^{\text{eh}})C_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}'} V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} C_{\mathbf{p}'} = \Omega C_{\mathbf{p}}, \quad (2.6)$$

где $\Sigma_{\mathbf{p}}^{\text{eh}}$ — разность собственно-энергетических частей электрона и дырки, обусловленных их кулоновским взаимодействием со всеми электронами из валентной зоны, которая равна

$$\Sigma_{\mathbf{p}}^{\text{eh}} = \sum_{\mathbf{p}'} V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\Delta^2 + v_{\text{F}}^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')}{\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}'}}; \quad (2.7)$$

$\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$ — угловой фактор, который является спецификой дираковских частиц и имеет вид:

$$\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = \frac{1}{2} \frac{v_{\text{F}}^2 p p'}{\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}'}} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}'}} \right) \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'}) + \frac{i}{2} \left(\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{p}'}} \right) \sin(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'}). \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.6) было найдено численно в [50]. Экситонные состояния $|n, m\rangle$ могут характеризоваться радиальным n и орбитальным m квантовыми числами и являются киральными. В зависимости от знака величины Δ наибольшую энергию связи имеет киральное экситонное состояние с орбитальным квантовым числом либо $m = 1$, либо $m = -1$. Также энергии киральных экситонных состояний с противоположными орбитальными квантовыми числами не совпадают между собой. Киральные экситоны появляются также в бислое графена [81], щель в спектре которого открыта при помощи перпендикулярного электрического поля [82–84]. В этом случае киральное экситонное состояние с минимальной энергией обладает орбитальным угловым моментом $|m| = 2$.

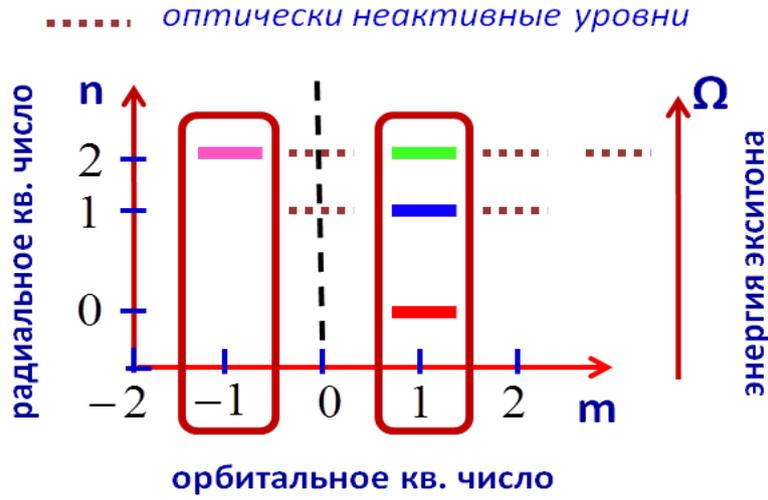


Рис. 2.1. Схема уровней киральных экситонных состояний с радиальными квантовыми числами $n = 0, 1, 2$. Рамкой выделены экситонные состояния, которые являются оптически активными.

2.2.3. Киральные экситонные состояния

В диссертации найдено приближенное аналитическое решение уравнения (2.6). Разность собственно-энергетических частей электрона и дырки $\Sigma_{\mathbf{p}}^{\text{eh}}$ приводит только к перенормировке параметров одночастичного спектра, а именно к перенормировке величин Δ, v_{F} . Если считать, что параметры Δ, v_{F} — уже перенормированные величины, то собственно-энергетическая часть в уравнении (2.6) может быть опущена. Угловой фактор $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$ и закон дисперсии электронов $\epsilon_{\mathbf{p}}$ содержат характерный масштаб импульса $p_{\Delta} = |\Delta|/v_{\text{F}}$, который соответствует переходу между линейным ($p \gg p_{\Delta}$) и параболическим ($p \ll p_{\Delta}$) участками закона дисперсии электронов. Если характерный импульс локализации p_{exc} относительной волновой функции экситона $C_{\mathbf{p}}$ в импульсном пространстве удовлетворяет условию $p_{\text{exc}} \ll p_{\Delta}$, то угловой фактор и закон дисперсии электронов могут быть аппроксимированы следующим образом: $\epsilon_{\mathbf{p}} \approx |\Delta| + v_{\text{F}}^2 p^2 / 2|\Delta|$ и $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \approx \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'}) + i \sin(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})$. В этом приближении уравнение для волновой функции и энергии кирального экситона (2.6) совпадает с уравнением Шредингера в импульсном пространстве для двумерного атома водорода, в котором: 1) приведенная масса электрона равна $m^* = |\Delta|/2v_{\text{F}}^2$; 2) момент мультипольного разложения кулоновского потенциала $V_m(p, p')$ сдвинут на $\delta m = 1$ благодаря угловому фактору, который можно представить в форме $\Lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = e^{i(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})}$, то есть $V_m(p, p') \rightarrow V_{m-1}(p, p')$. Экситонные состояния нумеруются главным $n = 0, 1, \dots$ и орбитальным $m = 0, \pm 1, \dots$ квантовыми числами, которые удовлетворяют соотношению

$|m - 1| \leq n$. Энергетический спектр Ω_{nm} и волновые функции C_p^{nm} киральных экситонов в импульсном пространстве в безразмерных единицах могут быть получены из спектра $\Omega_{n,m-1}^{2d}$ и волновых функций $C_{p,nm}^{2d}$ двумерного атома водорода (которые известны, см. [72]) при помощи сдвига орбитального квантового числа:

$$\Omega_{nm} = \Omega_{n,m-1}^{2d}, \quad C_p^{nm} = C_{p,n,m-1}^{2d}. \quad (2.9)$$

Энергия кирального экситонного состояния с квантовыми числами $|n, m\rangle$ имеет вид

$$\Omega_{nm} = 2|\Delta| - \frac{\alpha_c^2 |\Delta|}{(2n + 1)^2}, \quad (2.10)$$

где $\alpha_c = e^2/\epsilon\hbar v_F$ — безразмерная константа связи, параметр, определяющий силу кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой. Состояние с минимальной энергией $|0, 1\rangle$ обладает угловым моментом $m = 1$. Боровский радиус связанного состояния и энергия связи равны $a_{\text{exc}} = (\alpha_c p_\Delta)^{-1}$ и $\Omega_b = \alpha_c^2 |\Delta|$. Импульс локализации p_{exc} волновой функции относительного движения в импульсном пространстве C_p можно оценить как обратный боровский радиус $p_{\text{exc}} = \alpha_c p_\Delta$. Поэтому собственные состояния двумерного атома водорода являются приближенными решениями уравнения (2.6) при $\alpha_c \ll 1$.

Безразмерный параметр α_c является единственным управляющим параметром для киральных экситонов. Его можно оценить как отношение энергии кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой и их кинетическими энергиями. Для топологических изоляторов "второго" поколения этот параметр является малым $\alpha_c \ll 1$, поэтому описанное выше приближенное аналитическое решение было использовано для вычисления экситонного вклада в тензор оптической проводимости поверхности ТИ.

Знак орбитального квантового числа, соответствующего экситонному состоянию с минимальной энергией связи, определяется знаком величины Δ , который, в свою очередь, определяется направлением внешнего обменного поля.

2.3. Тензор оптической проводимости

2.3.1. Вычисление тензора оптической проводимости

Для вычисления тензора оптической проводимости поверхности топологического изолятора использовалась теория линейного отклика Кубо при нулевой температуре.

В этом подходе компоненты тензора проводимости в представлении Лемана могут быть записаны в следующем виде:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{\hbar} \sum_n \frac{i}{E_{n0}} \left(\frac{J_\alpha^{n0} J_\beta^{0n}}{\omega + E_{n0} + i\delta} + \frac{J_\alpha^{0n} J_\beta^{n0}}{\omega - E_{n0} + i\delta} \right), \quad (2.11)$$

где $|n\rangle$ и E_{n0} обозначают собственное состояние системы взаимодействующих электронов и его энергию, отсчитанную от энергии основного состояния $|0\rangle$, в котором все состояния в зоне проводимости являются свободными, а в валентной зоне — заполненными; \mathbf{J} — многочастичный оператор тока. Только состояния $|n\rangle$, в которых импульс системы равен нулю, вносят вклад в оптическую проводимость системы. Двухчастичные возбуждения системы с нулевым импульсом включают в себя континуум одночастичных межзонных переходов $|n\rangle = a_{\mathbf{p}1}^+ a_{\mathbf{p}-1}|0\rangle$, энергия которых превышает запрещенную зону, и набор экситонных состояний $|n\rangle = d^+|0\rangle$, энергия которых лежит внутри запрещенной зоны. Вклад этих двух типов возбуждений можно разделить.

После подстановки $|n\rangle = a_{\mathbf{p}1}^+ a_{\mathbf{p}-1}|0\rangle$ в общую формулу для проводимости системы (2.11), получаем одночастичный вклад в тензор оптической проводимости. Его можно представить в виде формулы Кубо-Гринвуда, которая имеет вид:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\text{sp}} = \frac{e^2}{i\hbar} \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} \frac{n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}\gamma'}}{\epsilon_{\mathbf{p}\gamma} - \epsilon_{\mathbf{p}\gamma'}} \frac{\langle f_{\mathbf{p}\gamma} | j_\alpha | f_{\mathbf{p}\gamma'} \rangle \langle f_{\mathbf{p}\gamma'} | j_\beta | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle}{\omega + \epsilon_{\mathbf{p}\gamma} - \epsilon_{\mathbf{p}\gamma'} + i\delta}. \quad (2.12)$$

Здесь $\mathbf{j} = v_F[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n}]$ — одночастичный оператор тока; $n_{\mathbf{p}\gamma}$ — функция распределения электронов при нулевой температуре. Проводя интегрирование в (2.12), получаем

$$\text{Re}[\sigma_{xx}^{\text{sp}}] = \frac{e^2}{h} \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\omega} \right)^2 \right] \Theta(|\omega| - 2|\Delta|), \quad (2.13)$$

$$\text{Im}[\sigma_{xx}^{\text{sp}}] = \frac{e^2}{h} \left[\frac{|\Delta|}{2\omega} + \left(\frac{1}{8} + \frac{\Delta^2}{2\omega^2} \right) \ln \left| \frac{\omega - 2|\Delta|}{\omega + 2|\Delta|} \right| \right],$$

$$\text{Re}[\sigma_{yx}^{\text{sp}}] = -\frac{e^2}{h} \times \frac{\Delta}{2\omega} \ln \left| \frac{\omega - 2|\Delta|}{\omega + 2|\Delta|} \right|, \quad (2.14)$$

$$\text{Im}[\sigma_{yx}^{\text{sp}}] = \frac{e^2}{h} \times \frac{\pi\Delta}{2\omega} \Theta(|\omega| - 2|\Delta|).$$

Полученные выражения для одночастичного вклада в тензор оптической проводимости согласуются с [47], где они были получены при помощи квантового кинетического уравнения при конечной температуре и с учетом рассеяния электронов на случайных примесях.

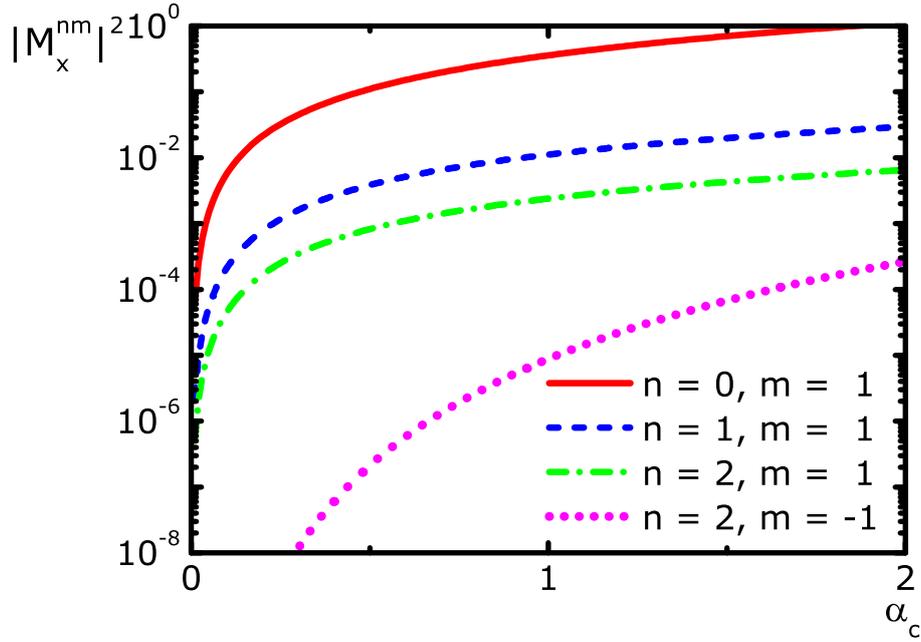


Рис. 2.2. Зависимость квадрата модуля матричных элементов $|M_x^{nm}|^2$ для четырех оптически активных состояний, обладающих наименьшей энергией, ($|0, 1\rangle$, $|1, 1\rangle$, $|2, 1\rangle$ и $|2, -1\rangle$) от безразмерной константы связи α_c .

После подстановки d^+ в общую формулу (2.11) получаем экситонный вклад в тензор оптической проводимости системы, который можно представить в виде:

$$\sigma_{xx}^{\text{exc}}(\omega) = i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{nm} |M_x^{nm}|^2 \frac{\omega + i\gamma}{\Omega_{nm}} \frac{2\Delta^2}{(\omega + i\gamma)^2 - \Omega_{nm}^2}, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{yx}^{\text{exc}}(\omega) = -\frac{e^2}{\hbar} \sum_{nm} m |M_x^{nm}|^2 \frac{2\Delta^2}{(\omega + i\gamma)^2 - \Omega_{nm}^2}. \quad (2.16)$$

Здесь суммирование производится по всем квантовым числам, которыми нумеруются экситонные состояния; γ — феноменологически введенный декремент затухания экситонов; \mathbf{M}^{nm} — безразмерный матричный элемент, который характеризует оптическую активность экситонного уровня $|n, m\rangle$ и зависит только от безразмерной константы связи α_c :

$$\mathbf{M}^{nm} = \frac{\hbar}{\Delta} \sum_{\mathbf{p}} C_{\mathbf{p}}^{nm} \langle f_{\mathbf{p},-1} | \mathbf{j} | f_{\mathbf{p},1} \rangle. \quad (2.17)$$

2.3.2. Оптическая активность киральных экситонов

Безразмерный матричный элемент \mathbf{M}^{nm} отличен от нуля только для экситонных состояний, у которых орбитальное квантовое число равно $m = \pm 1$. Все остальные

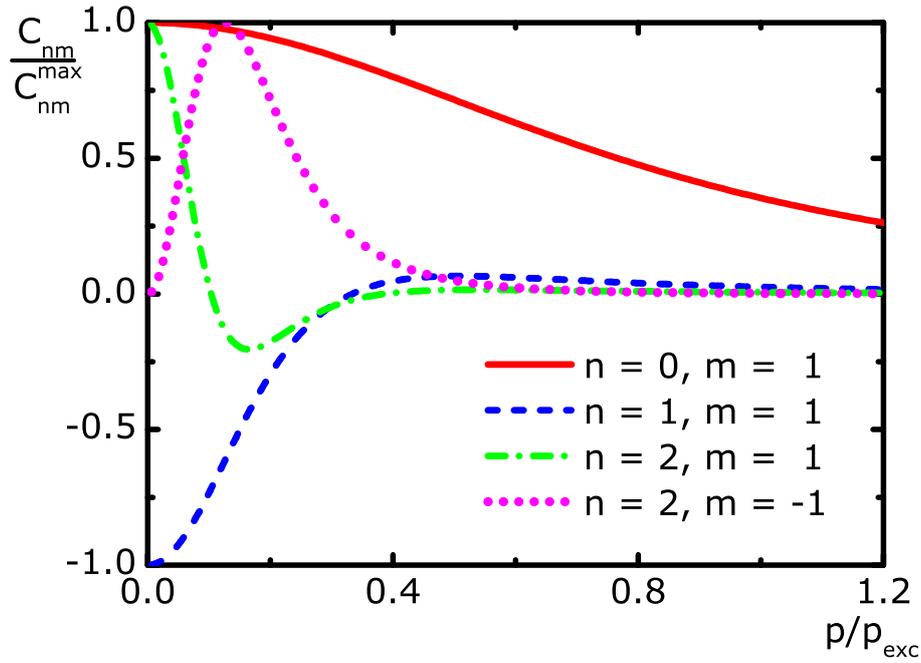


Рис. 2.3. Зависимость относительной волновой функции экситона C_{nm} для четырех оптически активных состояний, обладающих наименьшей энергией, ($|0, 1\rangle$, $|1, 1\rangle$, $|2, 1\rangle$ и $|2, -1\rangle$) от импульса p/p_{exc} .

экситонные состояния являются оптически неактивными. Зависимость квадрата модуля матричного элемента $|M_x^{nm}|^2$ для четырех оптически активных состояний с наименьшей энергией от безразмерной константы α_c приведена на Рис.2.2. Волновые функции относительного движения электрона и дырки, образующих экситон, в этих состояниях показаны на Рис.2.3. Матричный элемент экситона является суперпозицией матричных элементов одночастичных переходов с весом $C_{\mathbf{p}}^{nm}$. Благодаря тому, что волновые функции экситона при $n > 0$ являются осциллирующими, причем осцилляции нарастают с увеличением радиального квантового числа, модуль матричного элемента быстро падает с его увеличением. Следует отметить, что оптическая активность экситонных состояний с $m = -1$ значительно меньше, чем с $m = 1$.

Вклад экситонного уровня $|n, m\rangle$ в холловскую проводимость поверхности ТИ (2.15) имеет такой же знак, как и его квантовое орбитальное число m . Экситонные состояния с противоположными значениями квантового орбитального числа m и $-m$ преобразуются друг в друга при обращении знака времени. В двумерных и трехмерных полупроводниках благодаря симметрии по отношению к обращению знака времени $\Omega_{nm} = \Omega_{n-m}$ и $|M_x^{nm}|^2 = |M_x^{n-m}|^2$. Поэтому *суммарный* вклад всех экситонных

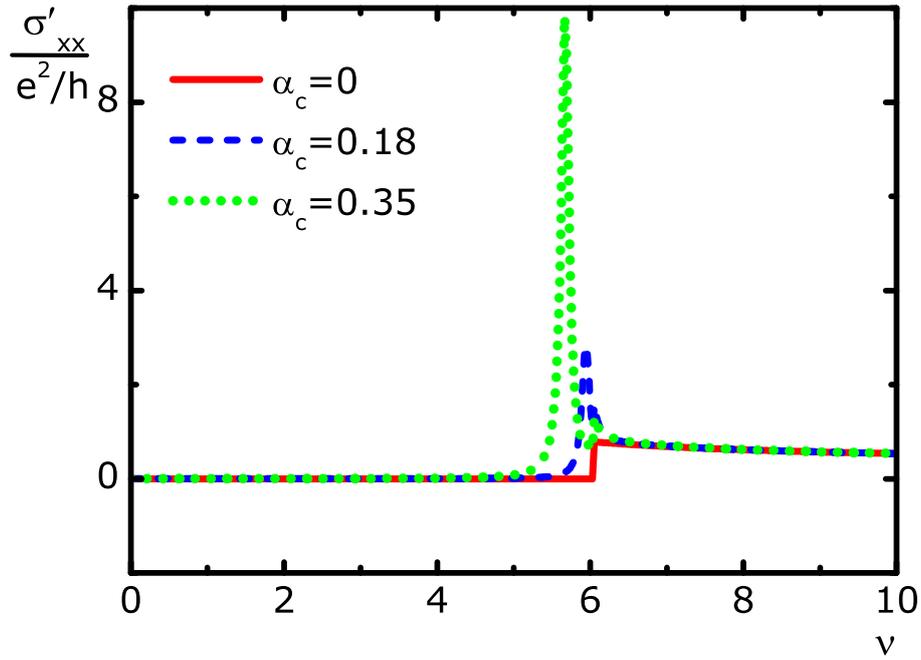


Рис. 2.4. Зависимость действительной части продольной проводимости σ'_{xx} (в единицах e^2/h) от частоты ν (ТГц).

состояний в холловскую проводимость в этом случае в точности равен нулю. Для киральных экситонов на поверхности ТИ симметрия между состояниями с противоположными орбитальными квантовыми числами нарушена, и киральные экситоны приводят к резонансному вкладу в холловскую проводимость поверхности ТИ.

Для всех численных вычислений в этой главе использовались следующие параметры: $\Delta = 12.5$ мэВ, $\gamma = 0.25$ мэВ и $v_F = 0.62 \times 10^6$ м/с. Также использовались три значения безразмерной константы связи α_c . Значение $\alpha_c = 0$ соответствует системе невзаимодействующих электронов на поверхности ТИ. Значения $\alpha_c = 0.18$ и $\alpha_c = 0.35$ соответствуют $\epsilon = 20.5$ и $\epsilon = 10.5$, соответственно. Значение $\alpha_c = 0.18$ соответствует поверхности между Bi_2Te_3 и вакуумом, а остальные значения α_c используются для сравнения.

Зависимости действительных частей продольной $\text{Re}[\sigma_{xx}(\omega)]$ и холловской $\text{Re}[\sigma_{yx}(\omega)]$ компонент тензора оптической проводимости от частоты приведены на Рис.2.4 и Рис.2.5. В пределе низких частот экситонный вклад в тензор оптической проводимости пренебрежимо мал, поэтому компоненты тензора определяются одночастичным вкладом (2.13) и (2.14). Киральные экситоны приводят к резкому максимуму в зависимости продольной проводимости от частоты и, следовательно, к резонансному поглощению энергии электромагнитной волны. Для используемого набора

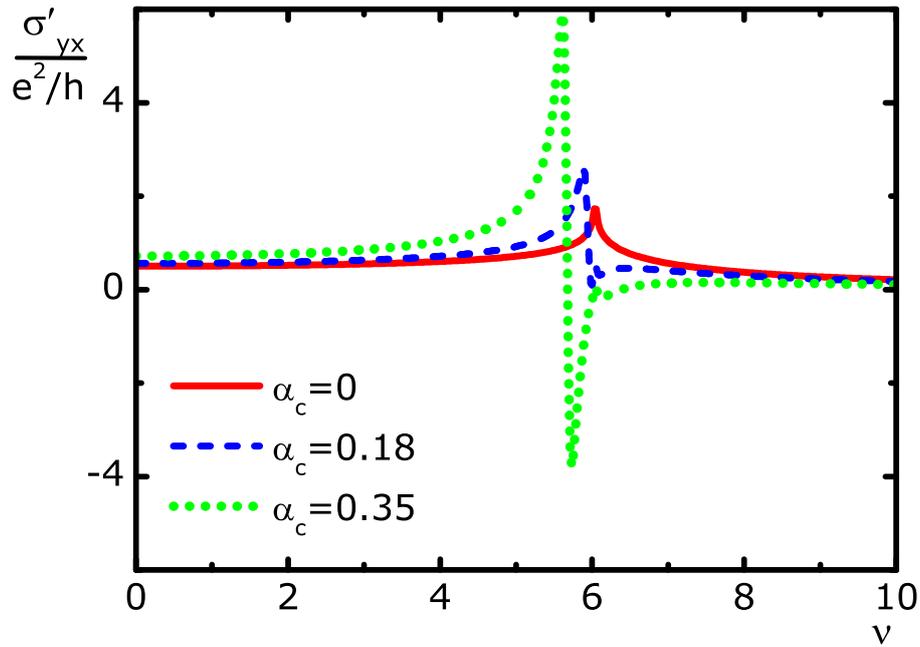


Рис. 2.5. Зависимость действительной части холловской проводимости σ'_{yx} (в единицах e^2/h) от частоты ν (ТГц).

числовых параметров различим только один резкий пик, который соответствует экситонному состоянию $|0, 1\rangle$. При этом вклад остальных экситонных состояний сливается с вкладом одночастичных переходов. Киральные экситоны вносят резонансный вклад в холловскую компоненту тензора проводимости, поэтому играют важную роль в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра.

2.4. Эффекты Керра и Фарадея

В диссертации рассмотрены магнитооптические эффекты в тонкой пленке из топологического изолятора, толщина которой значительно меньше длины электромагнитной волны в толще ТИ. Предполагалось также, что падение электромагнитной волны на пленку происходит под прямым углом. Полученные результаты легко обобщить на более сложную геометрию, которая может быть использована в экспериментах, и на случай наклонного падения электромагнитной волны.

В экспериментах, направленных на исследование магнитооптических эффектов Фарадея и Керра, падающая на материал электромагнитная волна, как правило, является линейно поляризованной (см. [85] и цит.лит.), то есть $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0$, где E_0 — ее амплитуда. При этом характеристики прошедшей через пленку ТИ и отраженной от

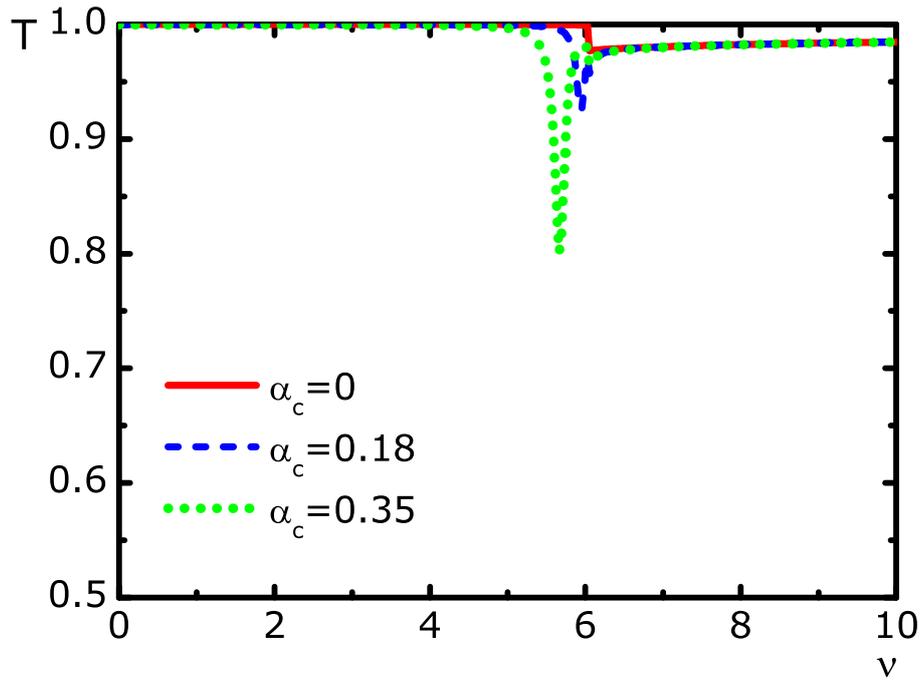


Рис. 2.6. Зависимость коэффициента прохождения T электромагнитной волны сквозь тонкую пленку из ТИ от частоты ν (ТГц).

нее волн могут быть выражены через амплитуды прохождения $t_\lambda = |t_\lambda|e^{i\Phi_\lambda^t}$ и отражения $r_\lambda = |r_\lambda|e^{i\Phi_\lambda^r}$ волны, обладающей круговой поляризацией $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x + i\lambda\mathbf{e}_y)E_0$, где $\lambda = \pm 1$ — знак круговой поляризации. Коэффициент прохождения линейно поляризованной волны через тонкую пленку ТИ равен $T = (|t_+|^2 + |t_-|^2)/2$. Угол поворота плоскости поляризации прошедшей волны θ_F (угол Фарадея) и степень ее эллиптичности δ_F равны $\theta_F = (\Phi_+^t - \Phi_-^t)/2$ и $\delta_F = (|t_+| - |t_-|)/(|t_+| + |t_-|)$. Угол поворота плоскости поляризации отраженной волны θ_K (угол Керра) и степень ее эллиптичности δ_K равны $\theta_K = (\Phi_+^r - \Phi_-^r)/2$ и $\delta_p = (|r_+| - |r_-|)/(|r_+| + |r_-|)$.

Амплитуды прохождения и отражения электромагнитной волны могут быть найдены из граничных условий для электрического и магнитного полей, учитывающих электрические токи, возбужденные на противоположных поверхностях тонкой пленки. Амплитуды прохождения и отражения электромагнитной волны, обладающей круговой поляризацией λ , имеют вид:

$$t_\lambda = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \alpha\sigma_\lambda^t}, \quad r_\lambda = -\frac{\alpha\sigma_\lambda^t}{\sigma_0 + \alpha\sigma_\lambda^t}, \quad (2.18)$$

где $\sigma_0 = e^2/h$ — квант проводимости; $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры; $\sigma_\lambda^t = \sigma_{xx}^t + i\lambda\sigma_{yx}^t$; $\sigma_{\alpha\beta}^t$ — сумма соответствующих компонент тензора проводимости с противоположных поверхностей пленки. Направление вращения плоскости поля-

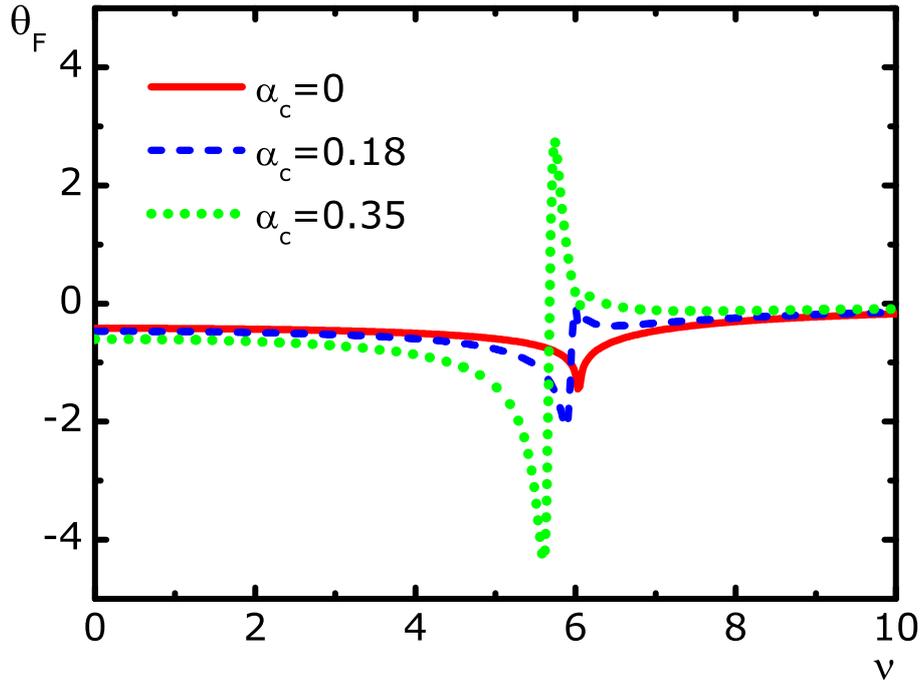


Рис. 2.7. Зависимость угла Фарадея θ_F (град.) от частоты ν (ТГц).

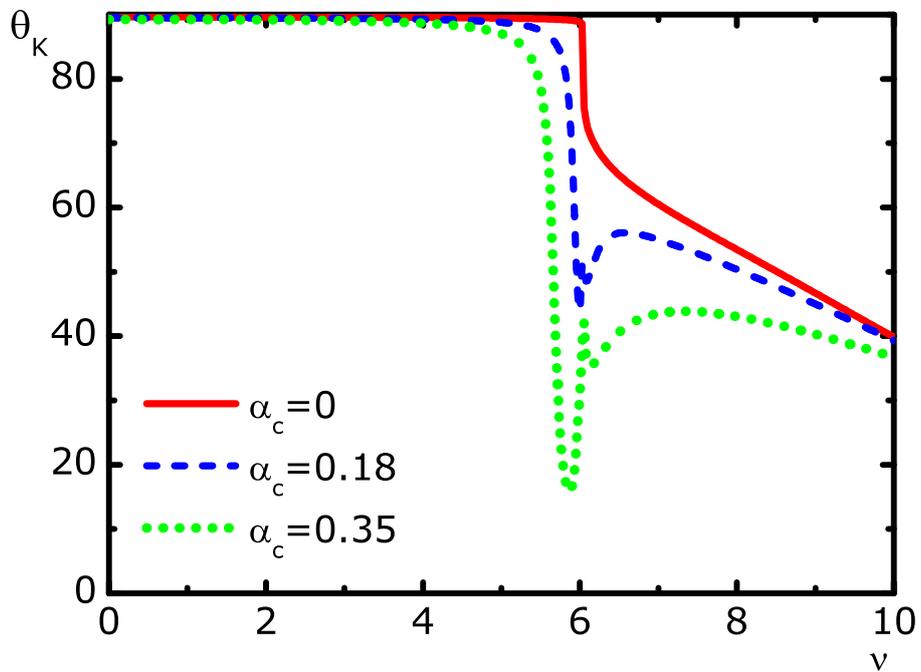


Рис. 2.8. Зависимость угла Керра θ_K (град.) от частоты ν (ТГц).

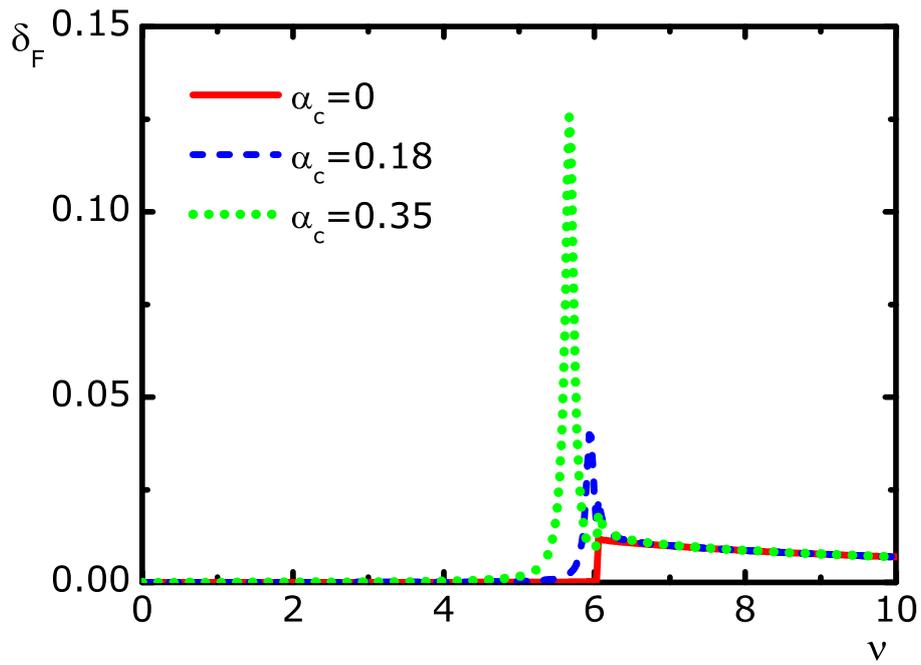


Рис. 2.9. Зависимость степени эллиптичности δ_F прошедшей электромагнитной волны от частоты ν (ТГц).

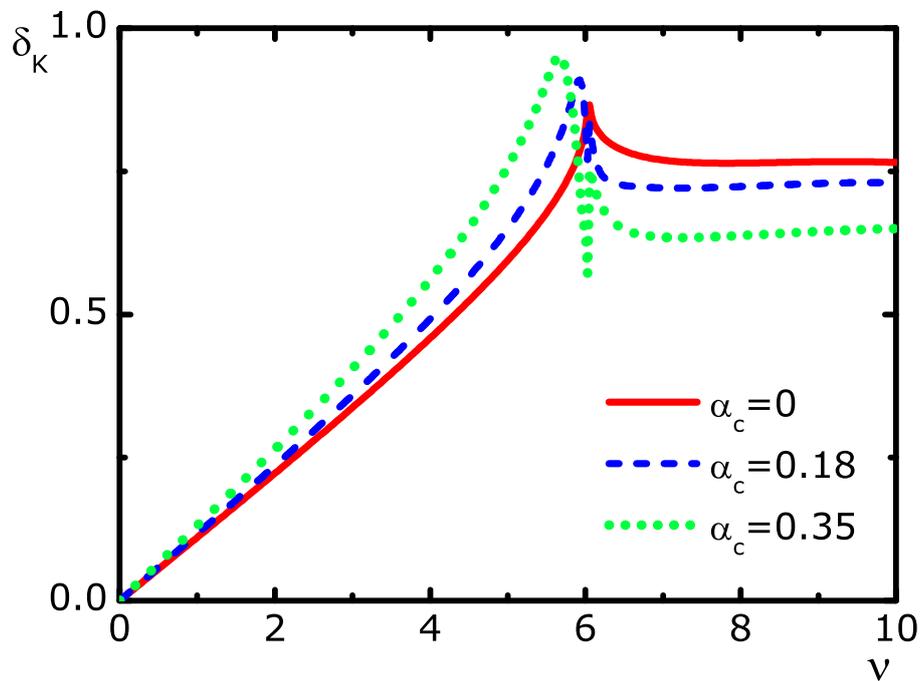


Рис. 2.10. Зависимость степени эллиптичности δ_K отраженной электромагнитной волны от частоты ν (ТГц).

ризации на каждой поверхности пленки зависит от знака холловской проводимости, которая, в свою очередь, зависит от знака компоненты обменного поля, перпендикулярной к поверхности пленки из ТИ. Если знаки соответствующих компонент на противоположных поверхностях совпадают между собой, то вращения происходят в одну и ту же сторону. Если при этом величина энергетических щелей, вызываемая обменным полем на противоположных поверхностях совпадает между собой, то $\sigma_{\alpha\beta}^t = 2\sigma_{\alpha\beta}$. Если соответствующие компоненты обменного поля направлены в разные стороны, то вращения ослабляют друг друга. Если при этом величина энергетических щелей совпадает между собой, то $\sigma_{yx}^t = 0$. В этом случае вращение плоскостей поляризации прошедшей и отраженной волн не происходит. Далее будем предполагать, что величины и знаки соответствующих компонент обменного поля для противоположных поверхностей пленки из ТИ совпадают.

Зависимость коэффициента прохождения электромагнитной волны T от ее частоты приведена на Рис.2.6. Киральные экситонные уровни внутри энергетической щели приводят к резонансному поглощению энергии падающей на пленку электромагнитной волны. Если возбуждение экситонов является единственным механизмом поглощения энергии, то даже в условиях резонанса поглощение достаточно мало, то есть $T \geq 0.8$. В этом случае резонансное поглощение энергии не мешает детектированию электромагнитной волны, прошедшей сквозь пленку из ТИ.

Частотные зависимости величины углов Фарадея θ_F и Керра θ_K приведены на Рис.2.7 и Рис.2.8. В пределе низких частот экситонный вклад в оптическую проводимость становится незначительным, и значения углов Фарадея θ_F и Керра θ_K стремятся к их универсальным значениям [46, 47]: $\tan \theta_F = \alpha$ and $\tan \theta_K = 1/\alpha$, где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Резонансный вклад киральных экситонов в холловскую проводимость приводит к резонансному усилению эффекта Фарадея, при этом в окрестности резонанса величина угла Фарадея меняет знак. Величина угла Керра крайне чувствительна к продольной компоненте тензора оптической проводимости [86]. Так как киральный экситонный резонанс соответствует резкому пику в частотной зависимости продольной проводимости, то он приводит к резонансному ослаблению эффекта Керра.

Зависимости степени эллиптичности прошедшей δ_F и отраженной δ_K электромагнитных волн приведены на Рис.2.9 и Рис.2.10. Киральные экситоны приводят к резонансному усилению степени эллиптичности δ_F прошедшей электромагнитной волны и к немонотонной зависимости степени эллиптичности δ_K отраженной электро-

магнитной волны от частоты. Описанные выше резонансные проявления киральных экситонов в магнитооптических эффектах Керра и Фарадея могут быть непосредственно обнаружены в эксперименте.

2.5. Заключение

2.5.1. Условия для наблюдения резонансных экситонных эффектов

Резонансные особенности в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра, которые связаны с киральными экситонами на поверхности ТИ, могут непосредственно наблюдаться в эксперименте. Для этого необходимо, чтобы в зависимости холловской проводимости от частоты хотя бы один экситонный резонанс был отделен от одночастичного континуума. В этом случае энергия связи $\Omega_b = \alpha_c^2 |\Delta|$ экситонного состояния с наименьшей энергией $|0, 1\rangle$ должна превышать его декремент затухания γ . В экспериментах величина энергетической щели в поверхностном спектре Bi_2Se_3 достигала $2|\Delta| = 50$ мэВ [39]. Для Bi_2Se_3 безразмерная константа связи и энергия связи экситона равны: $\alpha_c = 0.09$ и $\Omega_b \sim 2$ К. Для Bi_2Te_3 безразмерная константа связи и энергия связи экситона равны: $\alpha_c = 0.18$ и $\Omega_b \sim 9$ К. Затухание экситона обусловлено как его радиационным излучением, так и его рассеянием на примесях. Декремент затухания экситона γ можно оценить как вероятность рассеяния электрона или дырки, его образующих. Максимальное значение подвижности носителей заряда на поверхности ТИ, полученное из анализа транспортных экспериментов [3], равно $\mu \sim 10^4$ см²/эВ · с, что соответствует $\gamma \sim 30$ К. Для наблюдения резонансных эффектов требуются пленки из ТИ с меньшей диэлектрической проницаемостью или пленки с большей подвижностью, чем у пленок из Bi_2Se_3 .

2.5.2. Киральные экситоны в графене

Электроны в окрестности одной из двух долин графена, щель в спектре которого открыта при помощи специальной подложки, например BN [87] или SiC [88], могут быть описаны при помощи одночастичного гамильтониана

$$H = v_F(\mathbf{p}\sigma) + \Delta\sigma_z, \quad (2.19)$$

который может быть получен (2.2) при помощи унитарного преобразования. Поэтому в этом случае кулоновское взаимодействие приводит к образованию киральных

экситонов. Киральное экситонное состояние с орбитальным квантовым числом, абсолютная величина которого равна $|m| = 1$, имеет наименьшую энергию. При этом электроны из разных долин преобразуются друг в друга при обращении знака времени. Если симметрия относительно обращения знака времени не нарушена, величины щелей, открываемых в разных долинах, имеют одинаковые абсолютные величины, но разные знаки. Киральные экситоны из одной долины вносят резонансный вклад в холловскую проводимость графена, при этом экситонные вклады из разных долин в точности компенсируют друг друга.

Киральные экситоны появляются также в бислое графена [81], щель в спектре которого открыта при помощи перпендикулярного ему электрического поля [82–84]. В этом случае киральное экситонное состояние с орбитальным квантовым числом, абсолютная величина которого равна $|m| = 2$, имеет наименьшую энергию. В первой зоне Бриллюэна двухслойного графена [1] также находятся две долины, электронные состояния в окрестности которых преобразуются друг в друга при обращении знака времени. Поэтому и в этом случае суммарный вклад киральных экситонов из разных долин в холловскую проводимость в точности равен нулю.

Киральные экситоны как в графене, так и в бислое графена не проявляются в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра, если симметрия по отношению к обращению времени не нарушена.

2.5.3. Магнитоэкситоны на поверхности топологического изолятора

Симметрия по отношению к обращению знака времени на поверхности ТИ может быть нарушена при помощи магнитного поля. Если магнитное поле имеет компоненту, перпендикулярную к поверхности ТИ, то ее энергетический спектр перестраивается, и образуются дискретные дираковские уровни Ландау [2, 3]. В отсутствие кулоновского взаимодействия возбуждения системы представляют собой одночастичные переходы между уровнями Ландау, или электрон-дырочные возбуждения. Энергия электрон-дырочной пары не зависит от их суммарного магнитного импульса, который в постоянном однородном магнитном поле является интегралом движения. Зависимость холловской проводимости от частоты содержит в себе несколько резонансов, которые соответствуют одночастичным переходам с нулевым суммарным магнитным импульсом [46]. Энергия электрон-дырочной пары зависит от их суммарного магнитного импульса при наличии кулоновского взаимодействия между элек-

тронами, поэтому возбуждения системы приобретают закон дисперсии и называются магнитоэкситами [78–80]. В этом случае холловская проводимость также будет содержать набор резонансов, которые соответствуют возбуждению магнитоэкситонов с нулевым магнитным импульсом. Поэтому кулоновское взаимодействие приводит к сдвигу частот резонансов и изменению их амплитуд. Но качественно зависимость холловской проводимости от частоты при "включении" кулоновского взаимодействия не изменяется. Поэтому проявление магнитоэкситонов в магнитооптических эффектах не такое яркое, как проявление киральных экситонов на поверхности ТИ, в спектре которой открыта щель.

В настоящее время тонкие пленки из ТИ, помещенные в перпендикулярное магнитное поле, активно исследуются экспериментально [89–92]. Реальные образцы Bi_2Se_3 и Bi_2Te_3 содержат объемные носители заряда (их концентрация значительно сокращается допированием, но они полностью не исключаются) и полярные фононы, которые взаимодействуют с падающей на ТИ пленку электромагнитной волной. Зависимости углов Керра и Фарадея от частоты электромагнитной волны и ширины пленки из ТИ могут быть объяснены откликом именно объема пленки, а не ее поверхности. Резонансные особенности в магнитооптических эффектах, которые не зависят от ее толщины, могут быть вызваны магнитоэкситами на поверхностях пленки из ТИ.

2.5.4. Выводы

В этой главе при помощи метода уравнений движения теоретически исследованы киральные экситоны на поверхности ТИ, в энергетическом спектре которой открыта щель внешним обменным полем. Найдено приближенное аналитическое решение уравнения движения для киральных экситонов. Показано, что серия киральных экситонных состояний может быть получена из серии состояний двумерного атома водорода при помощи сдвига орбитального квантового числа на $\delta m = 1$. Вычислен их вклад в тензор оптической проводимости поверхности. Киральные экситоны приводят к набору пиков в зависимости продольной проводимости от частоты. Благодаря отсутствию симметрии между их состояниями с противоположными орбитальными квантовыми числами, киральные экситоны вносят резонансный вклад в холловскую оптическую проводимость. Поэтому они играют важную роль в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра. Показано, что киральные экситоны приводят к резонансному усилению эффекта Фарадея и ослаблению эффекта Керра. Также они

приводят к резонансам в зависимости степеней эллиптичности прошедшей и отраженных электромагнитных волн. Описанные эффекты могут быть непосредственно измерены в эксперименте. Проанализированы экспериментальные условия, необходимые для наблюдения резонансных эффектов.

Глава 3.

Куперовское спаривание пространственно разделенных дираковских электронов и дырок

3.1. Введение

Возможность куперовского спаривания пространственно разделенных электронов и дырок была предсказана достаточно давно в системе параллельных полупроводниковых квантовых ям [15, 93]. Куперовское спаривание сопровождается появлением параметра порядка $\Delta = |\Delta|e^{i\phi}$ конденсата электрон-дырочных пар. Модуль параметра порядка равен половине щели в спектре электронов и дырок, который перестраивается их при спаривании, а фаза параметра порядка определяется спонтанным образом. Математическое описание электрон-дырочного спаривания во многом аналогично описанию спаривания электронов в сверхпроводниках.

Пространственное разделение электронов и дырок приводит к набору интересных физических явлений, которые невозможны в экситонном диэлектрике [95, 96]. К ним относятся внутренний эффект Джозефсона [97, 98], особенности в эффекте кулоновского увлечения [99] и нелокальное андреевское отражение [100]. Фаза параметра порядка в экситонном диэлектрике фиксируется межзонными переходами, поэтому в нем невозможна сверхтекучесть нейтральных куперовских электрон-дырочных пар. В системе пространственно разделенных электронов и дырок фиксация фазы параметра порядка обусловлена туннелированием между слоями и может быть экспоненциально слабой. Более того пространственное разделение электронов и дырок приводит к пространственному разделению сверхтекучих токов с них связанными,

которые могут быть независимо измерены [15].

Куперовское спаривание пространственно разделенных электронов и дырок в полупроводниковых структурах так и не было обнаружено. Оно было идентифицировано в системе параллельных квантовых ям, содержащих электроны и находящихся в перпендикулярном им квантующем магнитном поле. При суммарном факторе заполнения $n_T = 1$ эта система может быть представлена как система композитных электронов и композитных дырок, в которой кулоновское взаимодействие приводит к их куперовскому спариванию (см. [101] и цит.лит.). В этой системе было обнаружено образование щели в спектре электронов и дырок [102], аномалии в эффекте кулоновского увлечения [103], внутренний эффект Джозефсона [62] и другие эффекты, которые указывают на электрон-дырочное спаривание в этой системе. Однако температура куперовского спаривания в этой системе не превышала одного градуса Кельвина.

Исследование возможности электрон-дырочного спаривания в других системах очень актуально. В частности, интерес представляет изучение спаривания дираковских электронов и дырок, которые могут быть реализованы в системе из двух листов графена и в тонкой пленке из топологического изолятора. Также актуально изучение различных физических явлений в этих системах.

3.2. Фазовая диаграмма дираковских электронов и дырок

3.2.1. Дираковские электроны и дырки

Вскоре после экспериментального обнаружения графена было предсказано куперовское спаривание пространственно разделенных электронов и дырок в системе из двух листов графена, разделенных диэлектриком [13]. Критическая температура, вычисленная в рамках однозонной модели типа модели Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) без учета экранировки кулоновского взаимодействия [104], достигала $T_0 \approx 250$ К. Благодаря дополнительному четырехкратному вырождению электронов в графене, экранированное кулоновское взаимодействие является слабым. Поэтому критическая температура, вычисленная в рамках модели типа БКШ и в статическом пределе приближения хаотических фаз, не превышает $T_0 \approx 10^{-5}$ К [13, 105]. Критическая температура была вычислена в многозонной модели [58], и

была исследована роль динамических эффектов и корреляций. Изучение электрон-дырочного спаривания в многозонной модели и исследование роли динамических эффектов и корреляций показало, что влияния динамических эффектов и корреляций [106]. Модель типа БКШ значительно недооценивает критическую температуру, которая может достигать $T_0 \sim 1\text{K}$ [58]. Как будет показано ниже примеси эффективно подавляют куперовское спаривание, поэтому в реалистичных условиях оно будет подавлено беспорядком.

Недавно было предсказано электрон-дырочное спаривание пространственно разделенных дираковских электронов и дырок в наноструктурах на основе топологических изоляторов. Электроны и дырки могут быть локализованы: 1) на противоположных поверхностях тонкой пленки из ТИ, или структуре изолятор-ТИ-изолятор, 2) на поверхностях разных топологических изоляторах, разделенных диэлектрической пленкой, или структуре ТИ-изолятор-ТИ. Если в энергетическом спектре системы открывается щель, обусловленная кулоновским взаимодействием между ними, то он становится топологически нетривиальным. Таким образом состояние с куперовским спариванием электронов и дырок является двумерным топологическим сверхпроводником. В этой системе были предсказаны майорановские состояния, локализованные на вихрях, которые являются топологическими дефектами параметра порядка конденсата электрон-дырочных пар и которыми можно управлять при помощи сверхпроводящих контактов [57]. При этом вычисление критической температуры спаривания в наноструктурах на основе топологических изоляторов не проводилось. Электроны на поверхности ТИ не имеют дополнительного вырождения, поэтому можно ожидать, что критическая температура электрон-дырочного спаривания в структурах на основе топологических изоляторов будет выше, чем соответствующая температура в системе из двух листов графена. Вычисление критической температуры в реалистичной модели очень важно для экспериментов, направленных на обнаружение электрон-дырочного спаривания в этой системе.

В первой части третьей главы исследуется фазовая диаграмма системы пространственно разделенных электронов и дырок в наноструктурах на основе топологических изоляторов в реалистичной модели на основе модели типа БКШ, которая учитывает экранировку взаимодействия, беспорядок, дисбаланс концентраций и гибридизацию волновых функций электронов и дырок, обусловленную туннелированием.

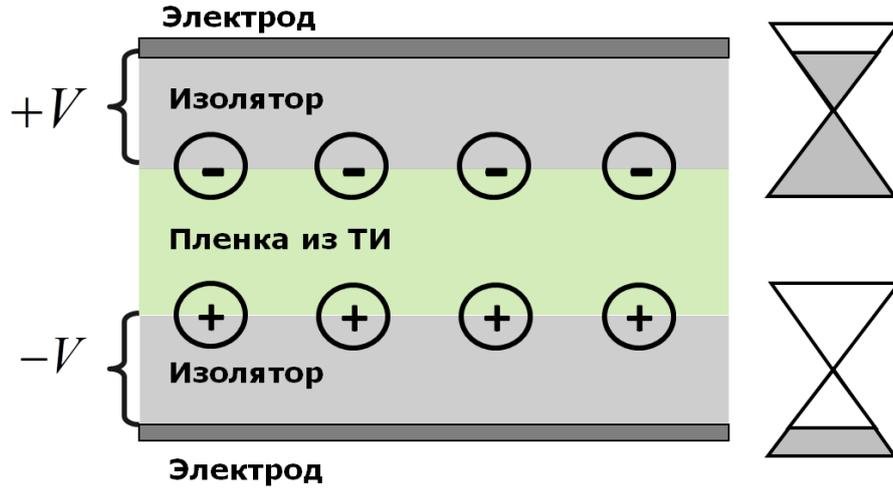


Рис. 3.1. Пространственно разделенные электроны и дырки в тонкой пленке из топологического изолятора. Схема энергетического спектра системы.

3.2.2. Однозонное приближение и модель Бардина-Купера-Шриффера

В однозонном приближении гамильтониан пространственно разделенных дираковских электронов и дырок имеет вид

$$H_{\text{eh}} = \sum_{\mathbf{p}\tau} \tau \xi_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}\tau}^+ a_{\mathbf{p}\tau} + \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} U(\mathbf{q}) \cos \frac{\phi_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{2} \cos \frac{\phi_{\mathbf{p}',\mathbf{p}'+\mathbf{q}}}{2} a_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},1}^+ a_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},-1}^+ a_{\mathbf{p}_2,-1} a_{\mathbf{p},1} \quad (3.1)$$

где $a_{\mathbf{p}\tau}$ — оператор рождения электронов в слое с избытком электронов ($\tau = 1$) и в слое с избытком дырок ($\tau = -1$); $\xi_{\mathbf{p}\tau} = \tau \xi_{\mathbf{p}} = \tau(v_{\text{F}}p - E_{\text{F}})$ — их закон дисперсии; E_{F} — их энергия Ферми; $U(\mathbf{q})$ — экранированный потенциал кулоновского взаимодействия между электронами из разных слоев, вычисленный в статическом приближении хаотических фаз (см. Приложение 5). В этом приближении кулоновское взаимодействие между электронами с одной поверхности пленки из ТИ приводит только перенормировке их скорости Ферми и, поэтому может быть опущено. Следует отметить, что для описания носителей заряда в слое с избытком дырок удобнее использовать операторы рождения и уничтожения электронов, которые соответствуют операторам уничтожения и рождения дырок с противоположными импульсами. Здесь также предполагается, что концентрации электронов и дырок совпадают между собой. В состоянии со спариванием нарушается калибровочная симметрия, и образуются аномальные средние $\langle a_{\mathbf{p}',-1}^+ a_{\mathbf{p}',1} \rangle$ и $\langle a_{\mathbf{p},1}^+ a_{\mathbf{p},-1} \rangle$. Этим аномальным средним соответствует

следующий параметр порядка

$$\Delta_{\text{cp}} = - \sum_{\mathbf{p}'} U(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1 + \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})}{2} \langle a_{\mathbf{p}', -1}^+ a_{\mathbf{p}', 1} \rangle, \quad (3.2)$$

модуль которого равен половине щели в спектре системы. Уравнение самосогласования для параметра порядка системы имеет вид (см. Приложение 4):

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1 + \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})}{2} \frac{\Delta_{\mathbf{p}'}}{2E_{\mathbf{p}'}} \text{th} \frac{E_{\mathbf{p}'}}{2T}. \quad (3.3)$$

Полученное уравнение самосогласования отличается от уравнения самосогласования для частиц с квадратичным законом дисперсии [15] дополнительным фактором, стоящем под знаком суммы, который является спецификой безмассовых дираковских частиц. Для решения этого уравнения использовалось приближение типа БКШ, в котором предполагалось, что величина щели не зависит от импульса. В этом приближении критическая температура спаривания определяется как

$$T_0 = \frac{2\Lambda e^{\gamma_e}}{\pi} e^{-1/\lambda}, \quad (3.4)$$

где Λ — ультрафиолетовая обрезка в теории БКШ; $\gamma_e = 0.57$ — постоянная Эйлера; λ — безразмерная константа кулоновского взаимодействия между электронами и дырками. В системе имеется только один энергетический масштаб E_F , поэтому энергия обрезания по порядку величины равна $\Lambda \approx E_F$. Безразмерная константа кулоновского взаимодействия определяется как

$$\lambda = \nu_F \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1 + \cos \phi}{2} U(2p_F \sin \frac{\phi}{2}), \quad (3.5)$$

где ν_F — плотность состояний электронов и дырок на уровне Ферми.

Для вычисления экранированного потенциала взаимодействия использовался статический предел приближения хаотических фаз. Если структура изолятор-ТИ-изолятор (ТИ-изолятор-ТИ) имеет диэлектрические проницаемости ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 , то потенциал взаимодействия между электронами и дырками имеет вид:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{2\pi e^2}{q} \frac{\epsilon_2}{2 \sinh qd} \frac{1}{D}, \quad (3.6)$$

где d — расстояние между электронами и дырками, или ширина слоя с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Величина D имеет вид:

$$D = \left(\frac{1}{2}(\epsilon_3 + \epsilon_2 \coth(qd)) - V_0(q)\Pi(q) \right)^2 - \left(\frac{\epsilon_2}{2 \sinh(qd)} \right)^2, \quad (3.7)$$

где $\Pi(q) = -g\nu_F$ — поляризационный оператор дираковского электронного газа в статическом пределе. В пределе $qd \ll 1$ экранированный потенциал взаимодействия между электронами и дырками достигает максимального значения, которое равно

$$U(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_{13}q} \left(1 - \frac{2\pi e^2}{\epsilon_{13}q} (\Pi_1 + \Pi_{-1})\right)^{-1}, \quad (3.8)$$

где $\epsilon_{13} = (\epsilon_1 + \epsilon_3)/2$. Следует отметить, что при $qd \ll 1$ потенциал не зависит от диэлектрической проницаемости среды с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Если расстояние между электронами с противоположных поверхностей пленки значительно превышает ее толщину, то подавляющее большинство силовых линий, соединяющих электроны, проходит через диэлектрические среды, окружающие пленку. Поэтому эффективная диэлектрическая проницаемость системы равна полусумме диэлектрических проницаемостей окружающих сред. Так как топологические изоляторы второго поколения обладают большими диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_{\text{ТИ}} \sim 40-100$, то температура электрон-дырочного спаривания в структуре изолятор-ТИ-изолятор будет значительно выше, чем в структуре ТИ-изолятор-ТИ. Далее будет рассматриваться электрон-дырочное спаривание в тонкой пленке из топологического изолятора.

Величину $\nu_F U(\mathbf{q})$, которая определяет безразмерную константу связи λ , можно представить в виде:

$$\nu_F U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2g} \frac{q_0}{q + q_0}. \quad (3.9)$$

Здесь $q_0 = 2g\alpha_c p_F$ — импульс экранировки потенциала взаимодействия; $\alpha_c = e^2/\hbar\nu_F\epsilon_{13}$ — безразмерный параметр, определяющий силу кулоновского взаимодействия между электронами и дырками. Максимальное значение константы λ связи можно оценить сверху как $\lambda = 1/4g$, где g — фактор вырождения дираковских электронов. Поэтому для графена максимальное значение безразмерной константы взаимодействия равно $\lambda = 1/16$, а для тонкой пленки из топологического изолятора — $\lambda = 1/4$. Достижимый уровень электрического допирования как в графене, так и на поверхности ТИ равен $E_F = 0.1$ эВ. Соответствующие критические температуры равны $T_g \approx 8 \times 10^{-5}$ К и $T_{\text{ТИ}} \approx 12$ К.

Зависимость критической температуры спаривания электронов и дырок в тонкой пленке из топологического изолятора от их энергии Ферми E_F и от ее ширины d приведена на Рис.3-2. Для того, чтобы критическая температура спаривания превышала $T_0 = 0.1$ К, необходимо, чтобы толщина пленки не превышала $d \sim 7$ нм. При таких малых толщинах пленки становится важной гибридизация волновых функций

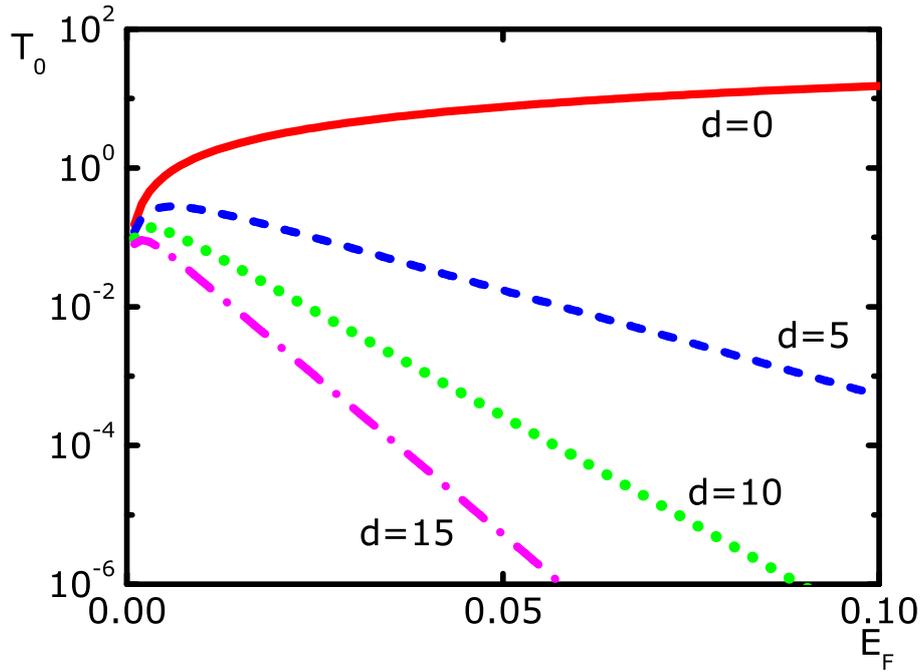


Рис. 3.2. Зависимость критической температуры спаривания T_0 (К) от энергии Ферми электронов и дырок E_F (эВ) при различных значениях толщины d (нм) пленки из топологического изолятора.

электронов и дырок. Далее рассмотрено влияние на куперовское спаривание электронов и дырок гибридизации их волновых функций, дисбаланса их концентраций и беспорядка.

3.2.3. Влияние беспорядка и дисбаланса концентраций электронов и дырок

Для определения критической температуры электрон-дырочного спаривания в присутствии дисбаланса концентраций и случайных примесей удобно рассматривать их куперовскую неустойчивость. В этом случае уравнение для критической температуры T_0^d , которая соответствует спариванию электронов и дырок с ненулевым импульсом куперовских пар \mathbf{q} , может быть представлено в виде:

$$\ln \frac{T_0^d}{T_0} + \text{Re} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{v_F q \cos \phi - \delta E_F}{4\pi T} + \frac{\gamma}{2\pi T} \right) - \Psi \left(\frac{1}{2} \right) \right] = 0, \quad (3.10)$$

здесь T_0 — критическая температура в отсутствии дисбаланса концентраций и беспорядка; δE_F — разность энергий Ферми электронов и дырок, которая параметризует их дисбаланс концентраций; γ — затухание куперовских пар, которое в приближении некоррелированных примесных потенциалов из разных слоев равно полусумме

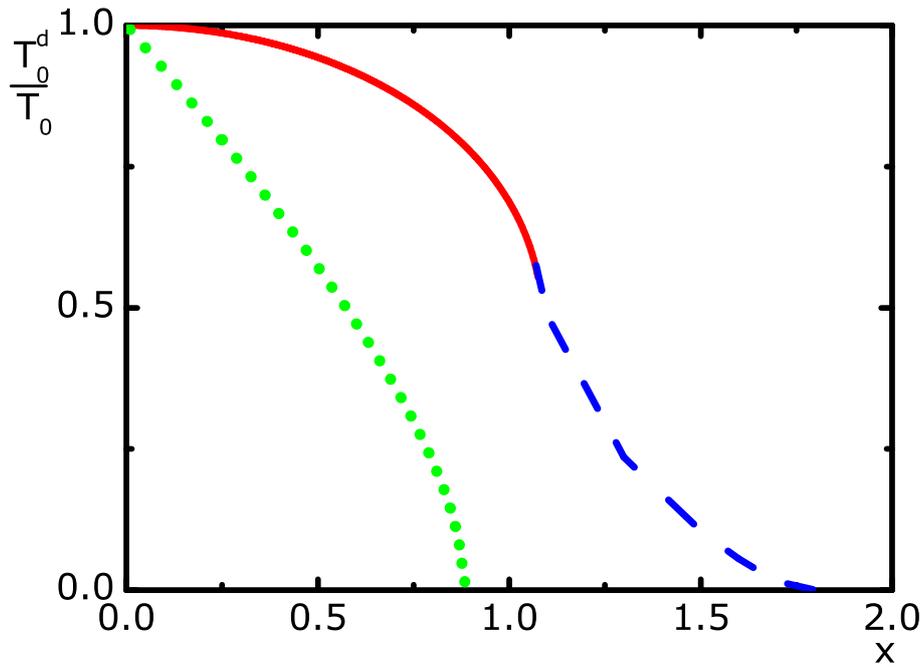


Рис. 3.3. Фазовая диаграмма системы пространственно разделенных электронов и дырок при наличии беспорядка $x = \gamma/T_0$ (пунктирная линия) и дисбаланса концентраций электронов и дырок $x = \delta E_F/2T_0$ (сплошная линия, переходящая в штриховую). Сплошная линия обозначает границу состояния типа БКШ, а пунктирная — состояния типа ЛОФФ

декрементов затухания электронов и дырок $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_{-1})/2$; $\Psi(x)$ — дигамма функция.

При решении уравнения (3.10) удобно перейти к безразмерным величинам T_0^d/T_0 , γ/T_0 , $\delta E_F/2T_0$ и $v_F q/2T_0$ и рассмотреть влияние на электрон-дырочное спаривание дисбаланса их концентраций и примесей по-отдельности.

Зависимость критической температуры T_0^d от величины затухания куперовских пар γ приведены на Рис.3.3. Беспорядок разрушает куперовское спаривание при $\gamma_c = 0.91 T_0$. Примеси с короткодействующим потенциалом, действующие только на носители заряда из одного слоя, эффективно подавляют электрон-дырочное спаривание так как рассеивают только одну из двух компонент куперовской пары. Если потенциал примесей является дальнедействующим, то и в этом случае они эффективно разрушают куперовское спаривание, так как компоненты куперовской пары имеют разный заряд.

Зависимость критической температуры от величины дисбаланса концентраций электронов и дырок представлена на Рис.3.3. Дисбаланс концентраций приводит к

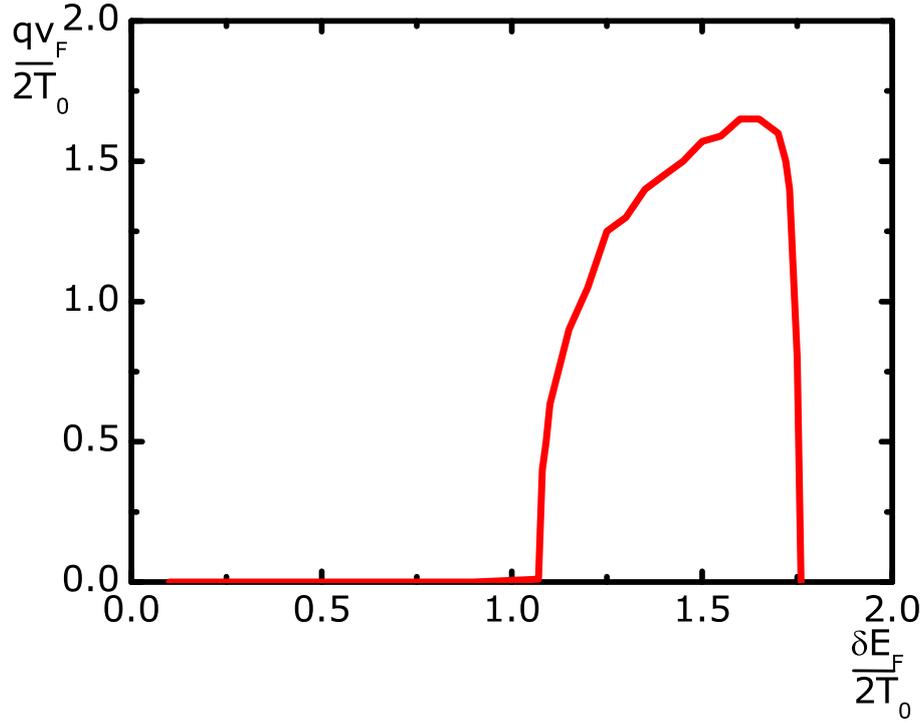


Рис. 3.4. Зависимость импульса куперовских пар $qv_F/2T_0$, соответствующего критической температуре, от разности энергий Ферми электронов и дырок $\delta E_F/2T_0$.

несовпадению линий Ферми электронов и дырок и поэтому эффективно подавляет их куперовское спаривание. Дисбаланс концентраций подавляет спаривание при $\delta E_F > 3.56T_0$. При расстоянии между линиями Ферми $2.10 T_0 < \delta E_F < 3.56 T_0$ температура электрон-дырочного спаривания с конечным импульсом куперовских становится выше, чем температура спаривания с импульсом, равным нулю.

Зависимость импульса куперовских пар, соответствующего критической температуре, от дисбаланса концентраций приведена на Рис.3.4. Величина импульса куперовских пар приблизительно равна расстоянию между линиями Ферми электронов и дырок в импульсном пространстве.

Образование куперовских пар с конечным импульсом было впервые предсказано в сверхпроводниках, в которых поверхности Ферми могут быть раздвинуты благодаря зеемановскому взаимодействию электронов с внешним магнитным полем [107, 108]. Куперовское спаривание электронов с конечным импульсом в сверхпроводниках приводит к образованию состояния Фулде-Феррелла, в котором параметр порядка системы имеет вид $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$. Более энергетически выгодным является состояние Ларкина-Овчинникова, в котором параметр порядка является суперпозицией спариваний с противоположными импульсами, то есть $\Delta(\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{q}\mathbf{r})$. Мо-

жет быть также реализовано состояние более общего вида, или состояние Ларкина-Овчинникова-Фулде-Феррелла (ЛОФФ), в котором параметр порядка имеет вид $\Delta(\mathbf{r}) = \sum_m \Delta_m e^{iq_m \mathbf{r}}$.

Следует отметить, что внешнее магнитное поле также разрушает сверхпроводимость при H_c благодаря его действию на орбитальное движение электронов. Здесь H_c — критическое поле сверхпроводника (или второе критическое поле сверхпроводника второго рода). В реалистичных условиях, то есть при $T_{0sc} \ll E_{Fsc}$, $H_c \ll H_{ЛОФФ}$, где $H_{ЛОФФ}$ — магнитное поле, стабилизирующее состояние ЛОФФ. Здесь T_{0sc} и E_{Fsc} — критическая температура сверхпроводника и энергия Ферми электронов в нем. Поэтому это состояние в трехмерных сверхпроводниках так и не было обнаружено. Состояние ЛОФФ может быть стабилизировано в квазидвумерных сверхпроводниках в параллельном им магнитном поле. В настоящее время образование сверхпроводящего состояния, отличного от состояния БКШ, обнаружено в квазидвумерных тяжелофермионных сверхпроводниках [109].

Фазы типа ЛОФФ могут быть реализованы в системе пространственно разделенных электронов и дырок. Идентифицировать это состояние на фазовой диаграмме можно по зависимости термодинамических величин, например теплоемкости, от температуры и дисбаланса концентраций электронов и дырок. При этом переход между состоянием типа ЛОФФ и состоянием без спаривания является переходом первого рода, а переход между состояниями типа ЛОФФ и состоянием типа БКШ является переходом второго рода. В состоянии ЛОФФ модуль параметра порядка осциллирует в координатном пространстве, и образуется система областей со спариванием или доменов. На краях доменов модуль параметра порядка обращается в ноль и энергетическая щель в спектре системы. Так как именно эти области будут давать основной вклад в электропроводность и теплопроводность системы, то в состоянии ЛОФФ эти величины будут анизотропными.

3.2.4. Влияние гибридизации волновых функций электронов и дырок

Гибридизация волновых функций электронов и дырок приводит к открытию щели на уровне Ферми. При этом перестройка энергетического спектра электронов и дырок, обусловленная гибридизацией, аналогична перестройке спектра при их куперовском спаривании. Действительно, аномальные средние $\langle a_{\mathbf{p}1}^+ a_{\mathbf{p}2} \rangle$ и $\langle a_{\mathbf{p}2}^+ a_{\mathbf{p}1} \rangle$, которые вносят вклад в параметр порядка, соответствуют туннелированию между электрон-

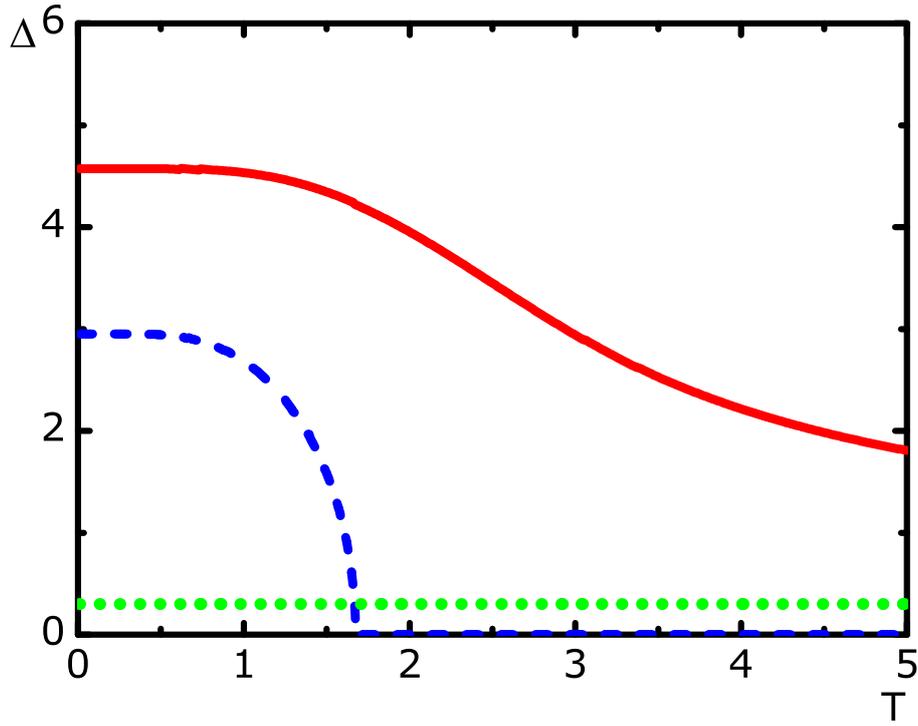


Рис. 3.5. Зависимость величины щели Δ (К) от температуры T (К) при $E_F = 0.1$ эВ, $\lambda = 0.15$ и $\Delta_T = 0.3$ К.

ными и дырочными электронными состояниями.

В присутствии щели, обусловленной гибридизацией волновых функций электронов и дырок, уравнение для параметра порядка конденсата электрон-дырочных пар имеет вид (см. Приложение 4):

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \Delta_T + \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1 + \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})}{2} \frac{\Delta_{\mathbf{p}'}}{2E_{\mathbf{p}'}} \operatorname{th} \frac{E_{\mathbf{p}'}}{2T} \quad (3.11)$$

где Δ_T — величина щели, обусловленной гибридизацией. Для решения этого уравнения также использовалось приближение БКШ, в котором пренебрегалось зависимостью щели от импульса. Решение этого уравнения при $E_F = 0.1$ эВ, $\lambda = 0.15$ и $\Delta_T = 0.3$ К представлено на Рис.3.5. Также для сравнения приведена зависимость щели от температуры в модели БКШ в отсутствие гибридизации. Гибридизация приводит к образованию параметра выше критической температуры и "размытию" фазового перехода. При $T \gg T_0$ величина щели определяется определяется гибридизацией $\Delta \rightarrow \Delta_T$, а при нулевой температуре величина щели Δ_0 превышает сумму $\Delta_T + \Delta_0^{\text{BCS}}$, благодаря нелинейности уравнения (3.11).

Следует отметить аналогию между электрон-дырочным спариванием при наличии гибридизации с ферромагнитным переходом во внешнем магнитном поле. В

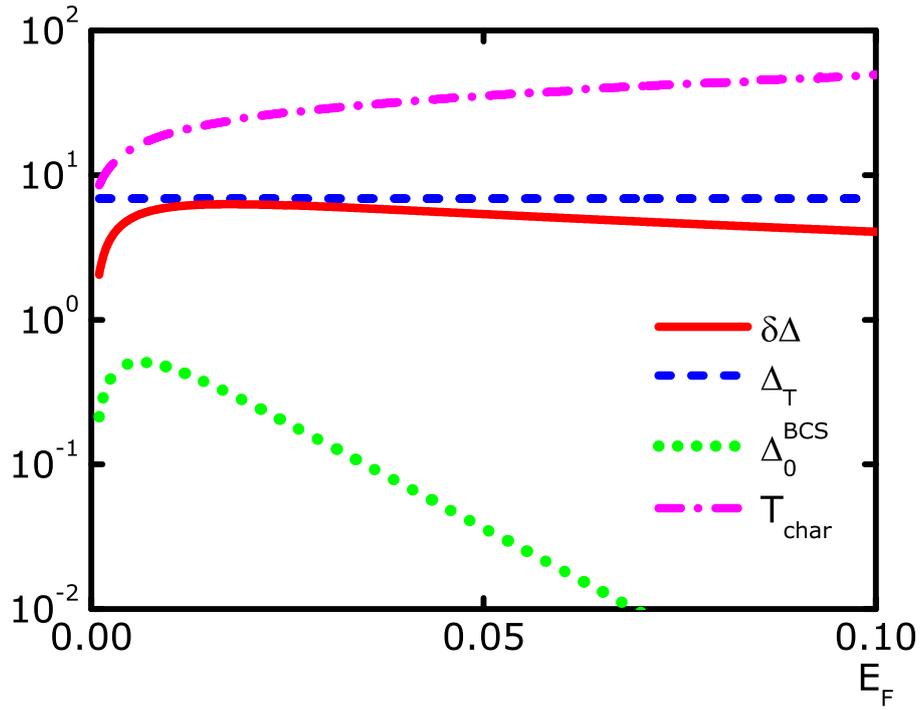


Рис. 3.6. Зависимости величин $\delta\Delta$, Δ_T , Δ_0^{BCS} и T_{char} (К) от энергии Ферми E_F (эВ) электронов и дырок при $d = 4.8$ нм.

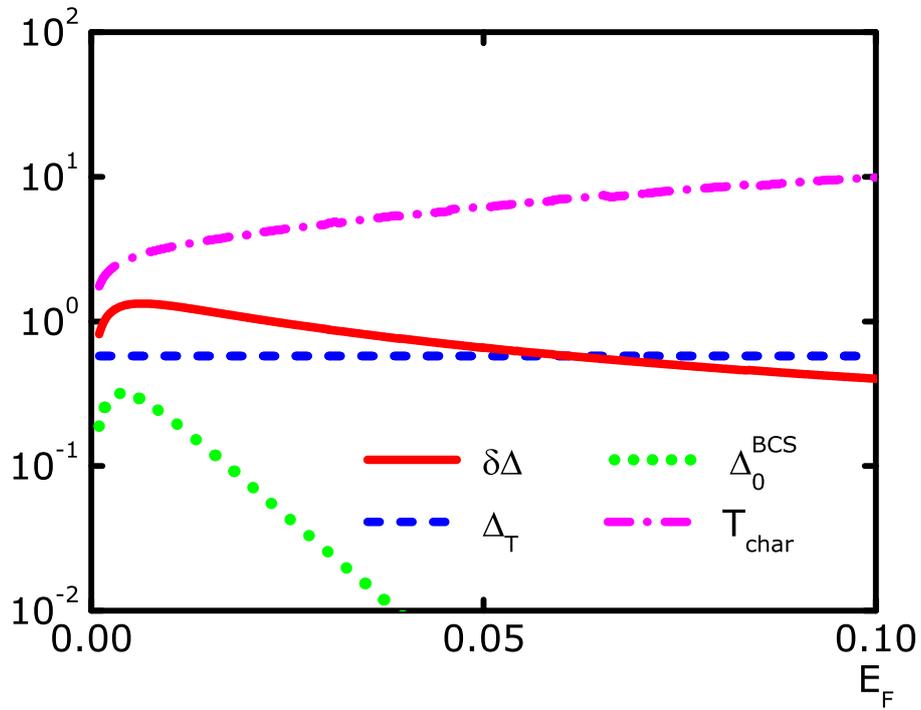


Рис. 3.7. Зависимости величин $\delta\Delta$, Δ_T , Δ_0^{BCS} и T_{char} (К) от энергии Ферми E_F (эВ) электронов и дырок при $d = 7.7$ нм.

отсутствии внешнего магнитного поля намагниченность ферромагнитного материала спонтанно появляется ниже критической температуры. При этом внешнее магнитное поле приводит к образованию намагниченности выше критической температуры и таким образом размывает фазовый переход.

При гибридизации волновых функций электронов и дырок их куперовское спаривание может быть идентифицировано по зависимости щели в спектре от температуры. Для этого необходимо, чтобы увеличение щели $\delta\Delta = \Delta_0 - \Delta_T$, обусловленное кулоновским взаимодействием между электронами и дырками, было бы сравнимым с величиной Δ_T . Также необходимо, чтобы интервал температур, в котором происходило бы увеличение щели, был достаточно узким. Характерную ширину этого интервала T_{char} можно определить как $\Delta(T_{\text{char}}) - \Delta_T = (\Delta_0 - \Delta_T)/2$.

Топологические изоляторы представляют собой слоистые материалы, причем каждый их слой состоит из пяти атомных слоев и имеет ширину около 1 нм. В настоящее время тонкие пленки из этих материалов получают как при помощи молекулярно-лучевой эпитаксии [110], так и при помощи механического отщепления [111]. Туннелирование между противоположными поверхностями тонкой пленки приводит к открытию щели в их поверхностном спектре. Образование щели в энергетическом спектре тонких пленок из Bi_2Se_3 было обнаружено при помощи фотоэлектронной спектроскопии с угловым разрешением [112]. Для численных расчетов в этой части главы использовались данные для тонких пленок из Bi_2Se_3 , взятые из вычислений [113].

Для расчета использовался следующий набор параметров $\Delta_T = 13$ К при $d = 4.8$ нм и $\Delta_T = 1.1$ К при $d = 7.7$ нм. Зависимости $\delta\Delta$ и T_{char} от энергии Ферми электронов и дырок при $d = 4.8$ нм и $d = 7.7$ нм приведены на Рис.3.6 и Рис.3.7.

В режиме сильной гибридизации волновых функций электронов и дырок $\Delta_T \gg \Delta_0$, который реализуется при $d \approx 2 \sim 4$ нм, увеличение щели $\delta\Delta$ значительно меньше, чем Δ_T . В режиме слабой гибридизации $\Delta_T \sim \Delta_0$ туннелирование в несколько раз увеличивает величину щели Δ . При этом и величина Δ_T , и Δ_0^{BCS} экспоненциально спадают с увеличением, толщины пленки. Поэтому оптимальная толщина тонкой пленки из топологического изолятора равна $d \approx 5 \sim 7$ нм.

При наличии гибридизации и примесей, рассеивающих электроны и дырки, уравнение для щели может быть представлено в виде:

$$\Delta = \Delta_T + \lambda T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{-E_F}^{E_F} d\xi \frac{\Delta}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi^2 + \Delta^2}, \quad (3.12)$$

где $\tilde{\omega}_n$ — мацубаровская частота, перенормированная благодаря взаимодействию

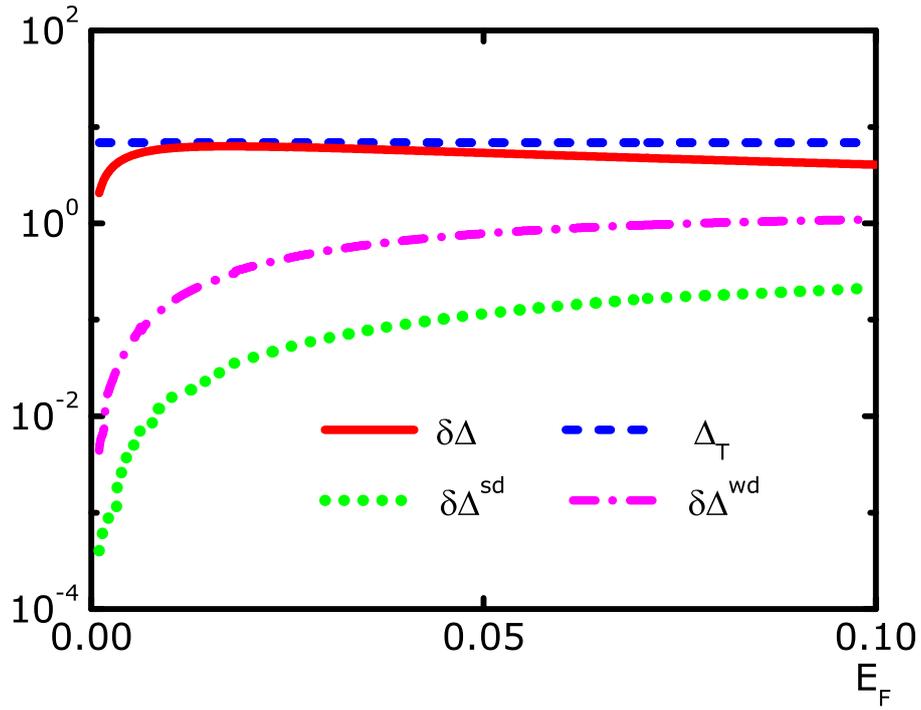


Рис. 3.8. Зависимости величин $\delta\Delta$, Δ_T , $\delta\Delta^{sd}$ и $\delta\Delta^{wd}$ (К) от энергии Ферми E_F (эВ) электронов и дырок при $d = 4.8$ нм.

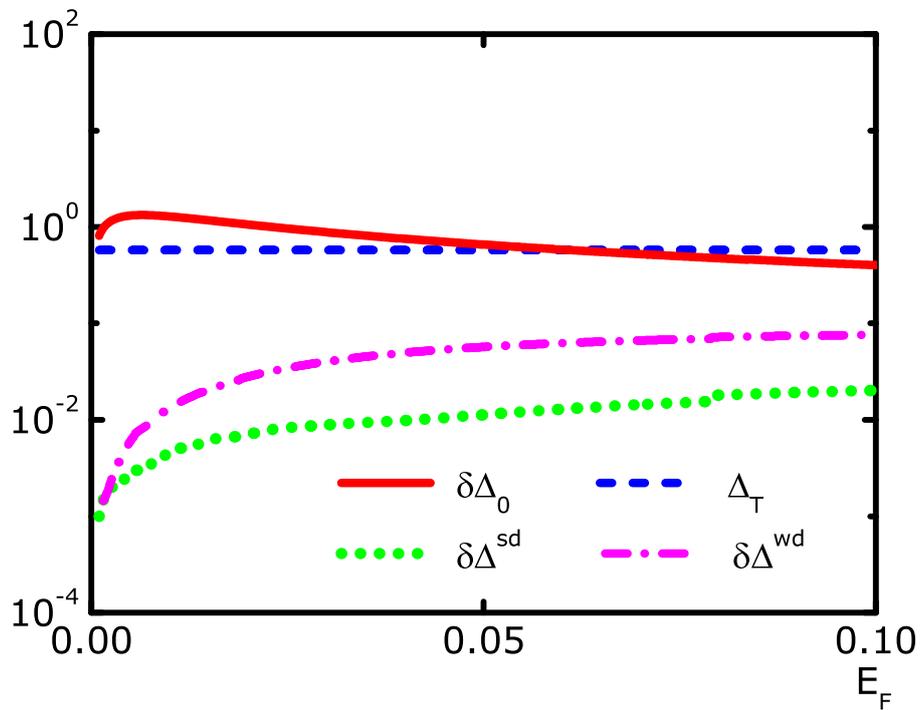


Рис. 3.9. Зависимости величин $\delta\Delta$, Δ_T , $\delta\Delta^{sd}$ и $\delta\Delta^{wd}$ (К) от энергии Ферми E_F (эВ) электронов и дырок при $d = 7.7$ нм.

электронов и дырок с примесями, которая удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + 2\gamma \frac{\tilde{\omega}_n}{\sqrt{\tilde{\omega}_n + \Delta_n^2}} \quad (3.13)$$

Здесь декремент затухания куперовских пар γ равна полусумме декрементов затухания электронов и дырок. Ее величину можно оценить из величины подвижности, которая обычно определяется из транспортных экспериментов. Величина проводимости может быть записана в виде:

$$\sigma = ne\mu = \frac{e^2 E_F}{h 4\gamma} \quad (3.14)$$

Для вычисления использовались два значения подвижности: $\mu = 500 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ и $\mu = 10^4 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ соответствуют режиму сильного и слабого беспорядка.

Зависимости $\delta\Delta$ и T_{char} от энергии Ферми электронов и дырок при $d = 4.8 \text{ нм}$ и $d = 7.7 \text{ нм}$ как в режиме слабого беспорядка $\delta\Delta^{\text{wd}}$, так и в режиме сильного беспорядка $\delta\Delta^{\text{sd}}$ приведены на Рис.3.8 и Рис.3.9. Беспорядок приводит к значительному уменьшению прироста щели $\delta\Delta$. При этом величина $\delta\Delta$ остается положительной величиной. Даже в режиме сильного беспорядка величина щели не становится меньше значения, обусловленного туннелированием. Поэтому в режиме сильной гибридизации $\Delta_T \gg \Delta_0$ беспорядок не влияет на величину щели. В режиме слабой гибридизации беспорядок приводит к значительному сокращению величины $\delta\Delta$.

Для экспериментального обнаружения электрон-дырочного спаривания в тонкой пленке из ТИ требуется режим слабой гибридизации $\Delta_T \sim \Delta_0$, который реализуется при $d \approx 5 \sim 7 \text{ нм}$, и высокая подвижность электронов $\mu \gg 10^4 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

3.2.5. Выводы

Во первой части третьей главы вычислена фазовая диаграмма пространственно разделенных дираковских электронов и дырок. Вычислена критическая температура перехода в модели, основанной на приближении Бардина-Купера-Шриффера и приближении хаотических фаз для экранированного кулоновского взаимодействия между электронами и дырками. Беспорядок и дисбаланс концентраций электронов и дырок эффективно подавляют их куперовское спаривание. При этом в определенном интервале величины дисбаланса концентраций может быть стабилизировано состояние типа Ларкина-Овчинникова-Фулде-Феррелла, в котором параметр порядка является периодической функцией координат. Туннелирование приводит к образованию параметра порядка конденсата электрон-дырочных пар выше критической температуры

и к "размытию" фазового перехода. Для экспериментального обнаружения электрон-дырочного спаривания в тонкой пленке из ГИ требуется режим слабой гибридизации и высокая подвижность электронов. Соответствующие материалы опубликованы в статьях [3а,4а,5а,6а].

3.3. Флуктуации куперовских пар и туннелирование

3.3.1. Туннелирование и внутренний эффект Джозефсона

Куперовское спаривание пространственно разделенных электронов и дырок приводит к внутреннему эффекту Джозефсона. Действительно, туннелирование электрона из слоя с избытком дырок в слой с избытком электронов приводит к образованию куперовской пары, а туннелирование в обратном направлении — к ее уничтожению. Поэтому туннельный ток между слоями является когерентным и зависит от фазы параметра конденсата куперовских пар ϕ :

$$j_T = t_c \sin(\phi - \phi_T), \quad (3.15)$$

где ϕ_T — фаза туннельного матричного элемента; t_c — коэффициент, пропорциональный модулю матричного элемента, соответствующего межслойному туннелированию. Внутренний эффект Джозефсона может быть описан при помощи макроскопического подхода [97, 98], основанного на принципе наименьшего действия, в котором динамической переменной является фаза параметра порядка, а лагранжиан имеет вид:

$$L = \frac{\rho_d}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\rho_s}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 - t_c \cos(\phi - \phi_T), \quad (3.16)$$

где ρ_s и ρ_d коэффициенты статической и динамической фазовой жесткости конденсата электрон-дырочных пар. В равновесии фаза параметра порядка конденсата электрон-дырочных пар равна фазе туннельного матричного элемента, и туннельный ток равен нулю. Следует отметить, что ситуация отличается от эффекта Джозефсона между двумя сверхпроводниками, фазы которых могут устанавливаться *независимо* друг от друга. Поэтому между двумя сверхпроводниками в равновесии может течь туннельный сверхпроводящий ток. Если система пространственно разделенных электронов и дырок выводится из равновесия магнитным полем, параллельным слоям, или внешним напряжением, приложенным между слоями, то возникает когерентный туннельный ток. Когерентное туннелирование приводит к образованию гигантского

пика в зависимости туннельной проводимости от приложенного напряжения, который наблюдался в системе композитных электронов и композитных дырок в полупроводниковых квантовых ямах в квантующем магнитном поле [62, 63]. Высота пика туннельной проводимости и его ширина определяются процессами декогерентности в системе и зависят от динамики топологических вихревых возбуждений конденсата электрон-дырочных пар [114]. Внутреннему эффекту Джозефсона в этой системе посвящено значительное количество как теоретических, так и экспериментальных работ (см. [98, 115–118]. и цит.лит.)

Куперовские пары могут возникать *выше* критической температуры, соответствующей спариванию электронов и дырок, как термодинамические флуктуации и усиливать туннелирование между слоями. Так как при приближении температуры к критической флуктуации куперовских пар нарастают (как это имеет место в окрестности различных фазовых переходов [119]), то можно ожидать значительное увеличение туннельной проводимости в её окрестности. Усиление туннелирования флуктуациями куперовских пар ранее не рассматривалось.

Во второй части третьей главы исследуется возможность усиления туннелирования флуктуациями куперовских пар в системе пространственно разделенных электронов и дырок в тонкой пленке из топологического изолятора. Особенности этого эффекта в других реализациях системы электронов и дырок обсуждаются в заключении второй части главы.

3.3.2. Куперовский пропагатор и туннельная проводимость

Гамильтониан системы пространственно разделенных электронов и дырок в тонкой пленке из топологического изолятора в однозонном приближении имеет вид :

$$\begin{aligned}
H_{\text{ch}} = & \sum_{\mathbf{p}\tau\tau'} ((v_{\text{F}}p - E_{\text{F}})\sigma_z^{\tau\tau'} + t\sigma_x^{\tau\tau'}) a_{\mathbf{p}\tau}^+ a_{\mathbf{p}\tau'} + \\
& + \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} U(\mathbf{q}) \cos \frac{\phi_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{2} \cos \frac{\phi_{\mathbf{p}',\mathbf{p}'+\mathbf{q}}}{2} a_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},1}^+ a_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},-1}^+ a_{\mathbf{p}_2,-1} a_{\mathbf{p},1}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь $a_{\mathbf{p}\tau}$ — оператор уничтожения электрона в зоне проводимости в слое с избытком электронов ($\tau = 1$) или в валентной зоне в слое с избытком дырок ($\tau = -1$); предполагается, что при туннелировании электрона его импульс сохраняется, и t — матричный элемент туннелирования; $U(\mathbf{q})$ — экранированное кулоновское взаимодействие электронов и дырок в статическом пределе приближения хаотических фаз (ПХФ) (См. Приложение 5). В этом приближении кулоновское взаимодействие между электронами с одной поверхности пленки из ТИ приводит только перенормировке

их скорости Ферми и, поэтому может быть опущено. Следует отметить, что для описания носителей заряда в слое с избытком дырок удобнее использовать операторы рождения и уничтожения электронов, которые соответствуют операторам уничтожения и рождения дырок с противоположными импульсами.

При описании рассеяния электронов и дырок на примесях, предполагалось, что действующие на них потенциалы некоррелированы друг с другом, и использовалось борновское приближение. В этом приближении мацубаровские функции Грина электронов и дырок можно записать в виде:

$$G_\tau(i\omega_n, p) = \frac{1}{i\omega_n - \tau(v_F p - E_F) + i\gamma_\tau \text{sgn}\omega_n}, \quad (3.18)$$

где γ_τ — их декремент затухания; $\omega_n = (2n+1)\pi T$ — фермиевские мацубаровские частоты; T — температура системы. В величину γ_τ также могут быть включены другие механизмы затухания, например затухание, обусловленное кулоновским взаимодействием.

Для микроскопического описания флуктуаций куперовских пар в сверхпроводниках выше критической температуры вводится куперовский пропагатор [120]. Он соответствует бесконечному лестничному ряду диаграмм для рассеяния электронов в куперовском канале. Введение куперовского пропагатора для электронов и дырок и графическая запись уравнения для него приведены на Рис.3.10-а и Рис.3.10-б. Если электрон-дырочное спаривание не подавлено беспорядком, то куперовский пропагатор для дираковских электронов и дырок имеет вид (см. Приложение 6):

$$\Gamma_c^R(\omega) = \frac{U'_0}{1 - U'_0 \Pi_c^R(\omega)} = \frac{1}{\nu_F} \frac{1}{\ln\left(\frac{T}{T_0^d}\right) + \Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{4\pi T} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right)}, \quad (3.19)$$

где $U'_0(p_F, p_F) = 1/2(U_0(p_F, p_F) + U_1(p_F, p_F))$ — полусумма мультпольных моментов $U_0(p_F, p_F)$ и $U_1(p_F, p_F)$ экранированного кулоновского потенциала взаимодействия, определенных на уровне Ферми; T_0^d — критическая температура перехода с учетом беспорядка; $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_{-1})/2$ — декремент затухания куперовских пар, который представляет собой полусумму декрементов затухания электрона и дырки; $\Psi(x)$ — дигамма-функция. Здесь величина $\Pi_c^R(\omega)$ соответствует одному элементу в лестничном ряду диаграмм на Рис.3.10-а и может быть получена при помощи аналитического продолжения из величины $\Pi_c^M(i\Omega_n)$, которая имеет вид

$$\Pi_c^M(i\Omega_n) = -T \sum_{\omega_n, \mathbf{p}} G_1(i\omega_n + i\Omega_n, \mathbf{p}) G_{-1}(i\omega_n, \mathbf{p}) \quad (3.20)$$

Здесь $\Omega_n = 2n\pi T$ — бозевские мацубаровские частоты. Куперовский пропагатор расходится при температуре $T = T_0^d$, что свидетельствует о неустойчивости системы

относительно электрон-дырочного спаривания. Если электрон-дырочное спаривание подавлено беспорядком, то куперовский пропагатор удобнее представить в другой форме:

$$\Gamma_c^R(\omega) = \frac{1}{\nu_F} \frac{1}{\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \Psi\left(\frac{1}{2} - \frac{i\omega}{4\pi T} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (3.21)$$

где T_0 — критическая температура электрон-дырочного спаривания без учета беспорядка.

Если вклад в гамильтониан системы, соответствующий туннелированию, представить как $H_T = T + T^+$, где T соответствует переходам из слоя с избытком дырок в слой с избытком электронов, а T^+ — наоборот, то оператор туннельного тока I_T приобретает вид

$$I_T = i(T^+ - T). \quad (3.22)$$

Для вычисления туннельной проводимости между противоположными поверхностями тонкой пленки из топологического изолятора использована теория линейного отклика Кубо. В этом подходе туннельная проводимость может быть записана в виде:

$$\sigma_T(V) = \frac{e^2}{h} \frac{4\pi}{eV} \text{Im}[\chi_T^R(eV)], \quad (3.23)$$

где функция реакции $\chi_T^R(\omega)$ может быть получена при помощи аналитического продолжения из мацубаровской восприимчивости $\chi_T^M(i\Omega_n)$, которая имеет вид:

$$\chi_T^M(i\Omega_n) = -\frac{1}{2\beta} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\Omega_n\tau} \langle T_M T(\tau) T^+(0) \rangle. \quad (3.24)$$

В системе невзаимодействующих электронов и дырок мацубаровской восприимчивости $\chi_T^M(i\Omega_n)$ соответствует первая диаграмма на Рис.3.10-с, которая также является элементом куперовской лестницы, поэтому $\chi_T^R(i\Omega_n) = t^2 \Pi_c(i\Omega_n)$, а, следовательно,

$$\sigma_{T0}(V) = \frac{e^2}{h} \frac{4\pi |t|^2}{eV} \text{Im}[\Pi_T^R(eV)]. \quad (3.25)$$

Вкладу флуктуаций куперовских пар соответствует диаграмма на Рис.3.10-с. В этом случае туннельная проводимость равна

$$\sigma_T(V) = \frac{e^2}{h} \frac{4\pi |t|^2}{eV} \text{Im}\left[\frac{\Pi_T^R(eV)}{1 - U'_0 \Pi_T^R(eV)}\right]. \quad (3.26)$$

Следует отметить, что выражение (3.26) может быть получено, если перенормировать туннельную вершину линиями кулоновского взаимодействия в лестничном приближении. В точке фазового перехода, соответствующего электрон-дырочному спариванию, знаменатель выражения (3.26) обращается в ноль, что приводит к расходимости туннельной проводимости и ее критическому поведению в окрестности критической температуры.

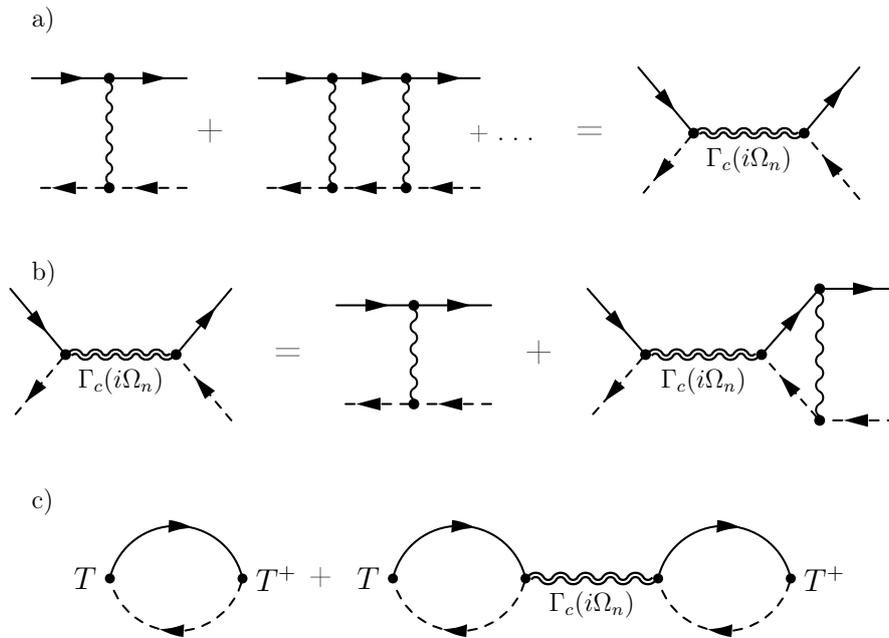


Рис. 3.10. а) Рассеяние электронов и дырок в куперовском канале и куперовский пропагатор. б) Уравнение для куперовского пропагатора; в) Диаграммы для туннельной проводимости. Сплошные линии соответствуют электронам из слоя с избытком электронов, а пунктирные — электронам из слоя с избытком дырок. Волнистые линии соответствуют кулоновскому взаимодействию.

3.3.3. Критическое поведение и критические индексы

Для численного вычисления туннельной проводимости был использован следующий набор параметров: $T_0 = 0.1$ К, $\mu = 0.02$ эВ, $t = 0.01$ К. На вставках Рис.3.10-3.13 приведена фазовая диаграмма системы в модели БКШ с учетом беспорядка. Если затухание куперовских пар превышает критическое значение $\gamma_c = 0.09$ К, то куперовское спаривание электронов и дырок подавлено беспорядком.

Зависимость туннельной проводимости системы от приложенного напряжения при $\gamma = 0.2$ К и $T = 0.2$ К приведена на Рис.3.11. Благодаря ограничениям, обусловленным одновременным выполнением законов сохранения энергии и импульса для туннелирующего электрона, эта зависимость содержит резкий пик. Его наличие является особенностью туннелирования с сохранением импульса между двумя двумерными системами. Он появляется как в электрон-дырочных, так и в электрон-электронных двухслойных системах. Кулоновское взаимодействие между электронами и дырками значительно увеличивает туннельную проводимость, качественно не меняя ее зависимость от приложенного напряжения.

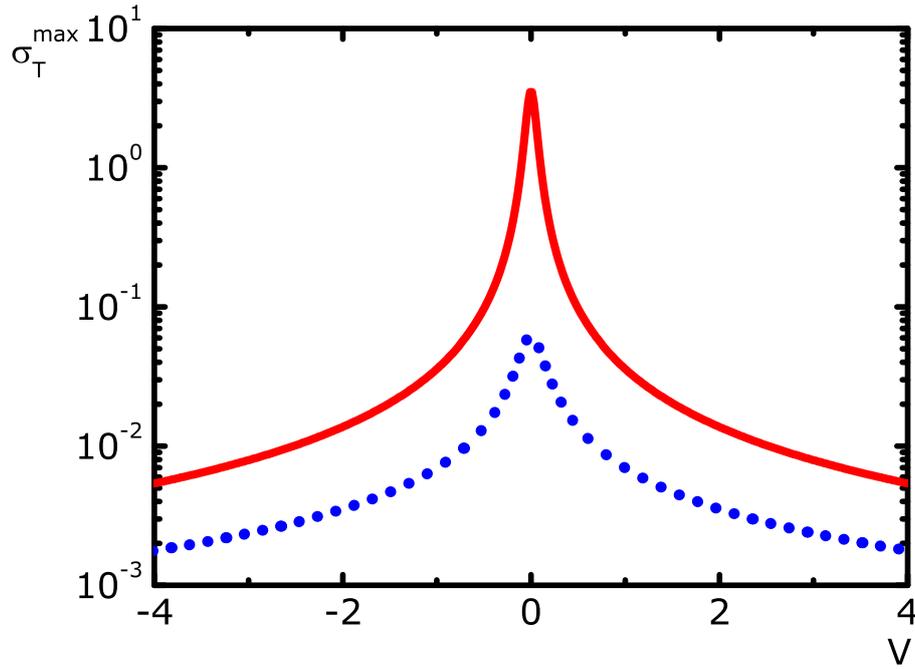


Рис. 3.11. Зависимость туннельной проводимости σ_T^{\max} ($\text{Ом}^{-1}\text{мм}^{-2}$) от приложенного напряжения V (мВ) без учета (пунктирная линия) и с учетом (сплошная линия) кулоновского взаимодействия между электронами и дырками.

Зависимость высоты пика туннельной проводимости, вычисленной без учета кулоновского взаимодействия между электронами и дырками, приведена на Рис.3.12, а с его учетом — Рис.3.13. Для невзаимодействующих электронов и дырок высота пика увеличивается с понижением температуры, и ее значение при нулевой температуре определяется величиной декремента затухания γ . При $\gamma > \gamma_c$ кулоновское взаимодействие значительно увеличивает высоту пика туннельной проводимости, не меняя качественно ее зависимость от температуры. При $\gamma < \gamma_c$ кулоновское взаимодействие приводит к расходимости высоты пика в окрестности критической температуры. Расходимость туннельной проводимости связана с флуктуациями куперовских пар, которые нарастают в окрестности критической температуры. Высота пика туннельной проводимости как для невзаимодействующих $\sigma_{T_0}^{\max}$, так и для взаимодействующих σ_T^{\max} электронов и дырок, имеет вид:

$$\sigma_{T_0}^{\max} = \frac{2\pi e^2 \nu_F t^2}{h} \frac{\gamma}{\gamma} \frac{\gamma}{2\pi T} \Psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi T} \right), \quad (3.27)$$

$$\sigma_T^{\max} = \frac{2\pi e^2 \nu_F t^2}{h} \frac{\gamma}{\gamma} \frac{\gamma}{2\pi T} \Psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi T} \right) \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\ln^2 \frac{T}{T_0^d}}. \quad (3.28)$$

Раскладывая (3.28) в окрестности критической температуры T_0^d по величине $\delta T =$

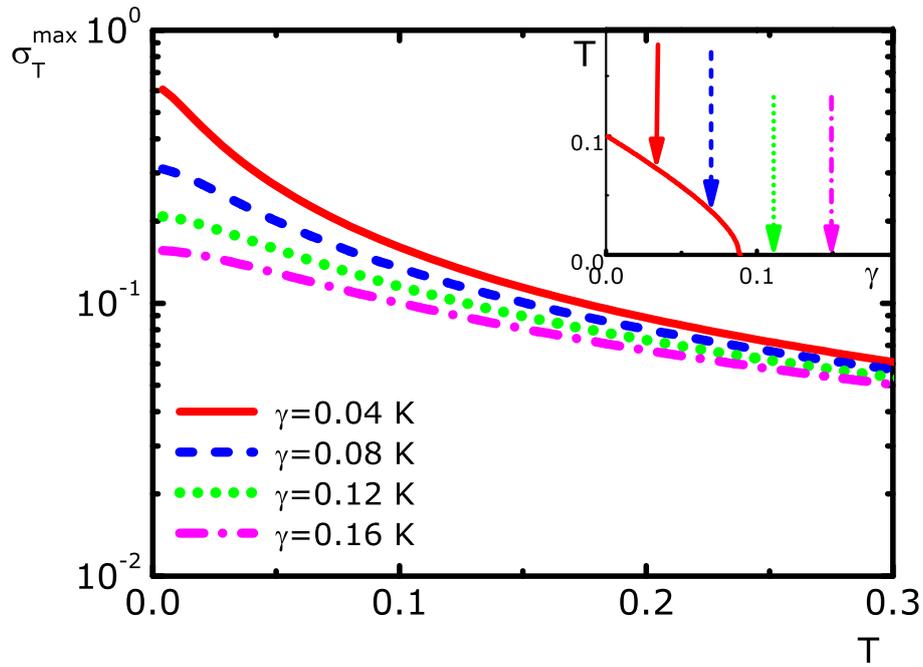


Рис. 3.12. Зависимость высоты пика туннельной проводимости σ_T^{\max} ($\text{Om}^{-1}\text{mm}^{-2}$) от температуры T (K), вычисленной без учета кулоновского взаимодействия между электронами и дырками.

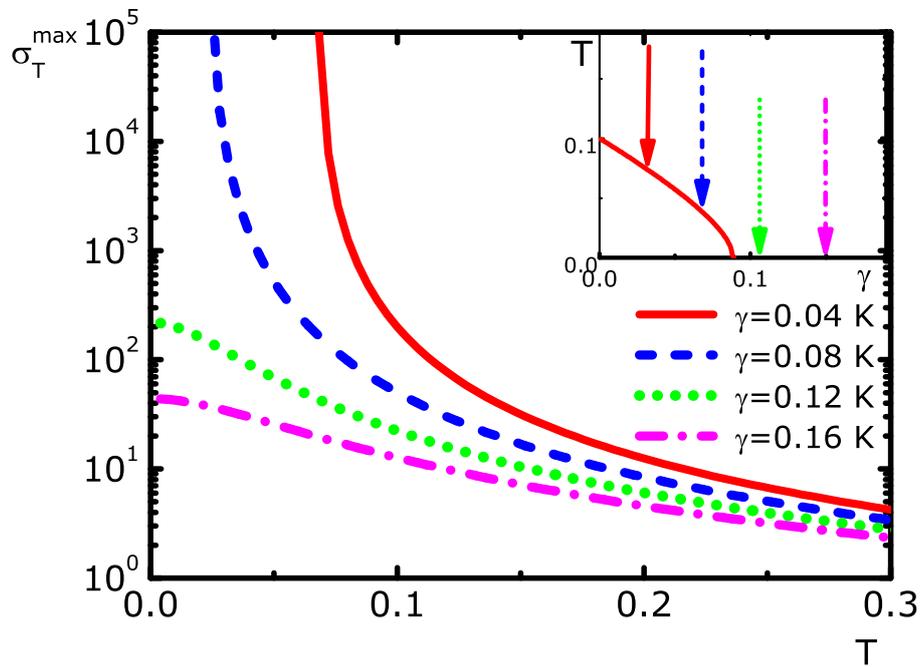


Рис. 3.13. Зависимость высоты пика туннельной проводимости σ_T^{\max} ($\text{Om}^{-1}\text{mm}^{-2}$) от температуры T (K), вычисленная с учетом кулоновского взаимодействия между электронами и дырками.

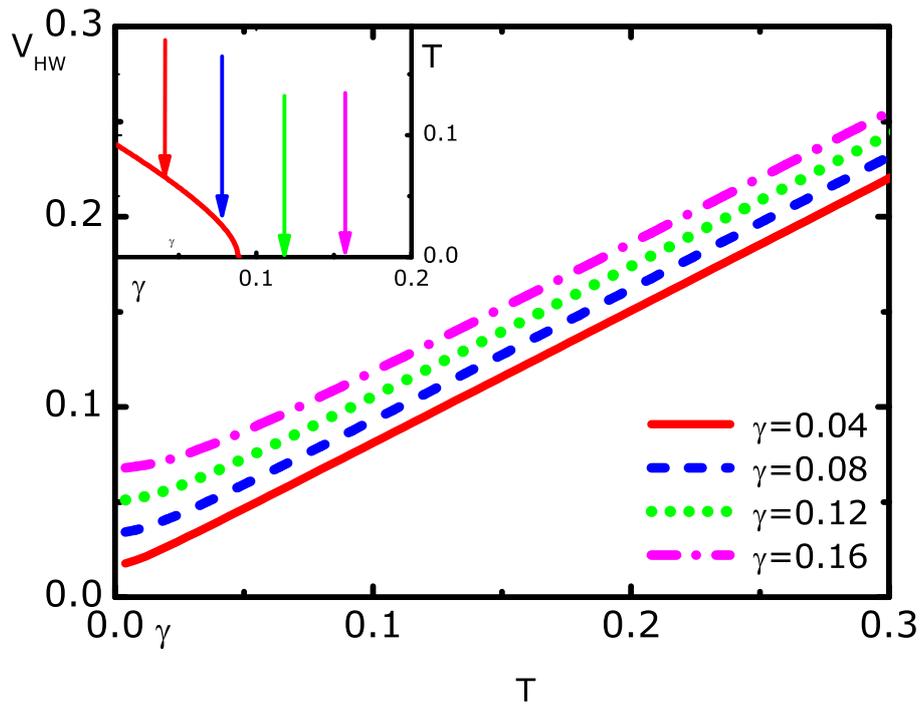


Рис. 3.14. Зависимость полуширины пика V_{HW} (мВ) туннельной проводимости от температуры T (К), вычисленной без учета кулоновского взаимодействия между электронами и дырками.

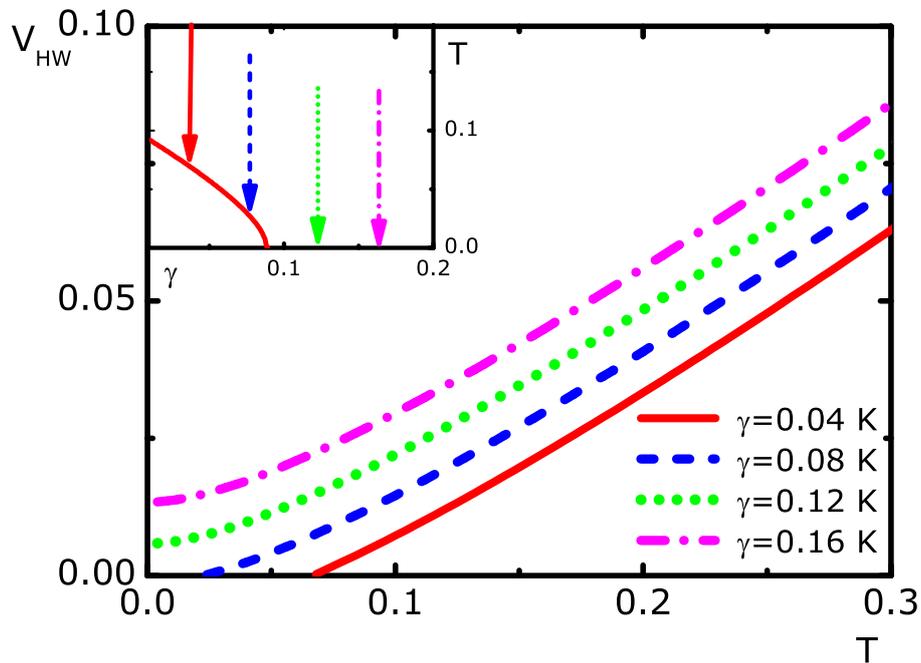


Рис. 3.15. Зависимость полуширины пика V_{HW} (мВ) туннельной проводимости от температуры T (К), вычисленной с учетом кулоновского взаимодействия между электронами и дырками.

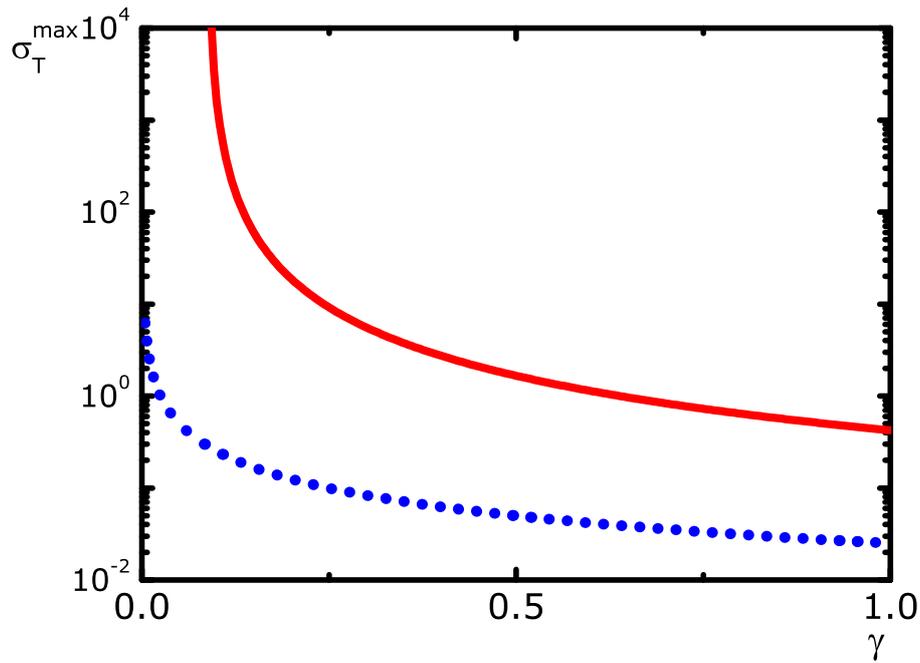


Рис. 3.16. Зависимость высоты пика туннельной проводимости σ_T^{\max} ($\text{Ом}^{-1}\text{мм}^{-2}$) при нулевой температуре от величины декремента затухания куперовских пар γ , вычисленная без учета (пунктирная линия) и с учетом (сплошная линия) кулоновского взаимодействия между электронами и дырками.

$T - T_{0d}$, получаем, что туннельная проводимость расходуется степенным образом с критическим индексом $\nu = 2$, то есть

$$\sigma_T^{\max} \sim \left(\frac{T_{0d}}{\delta T}\right)^2. \quad (3.29)$$

Зависимость ширины пика туннельной проводимости, вычисленной без учета кулоновского взаимодействия между электронами и дырками, приведена на Рис.3.14, а с его учетом — на Рис.3.15. Для невзаимодействующих электронов и дырок ширина пика уменьшается с понижением температуры, и ее значение при нулевой температуре определяется величиной декремента затухания γ . При $\gamma < \gamma_c$ кулоновское взаимодействие значительно уменьшает ширину пика, не меняя качественно ее зависимость от температуры. При $\gamma > \gamma_c$ ширина пика обращается в ноль при критической температуре. В окрестности температуры перехода ширина пика значительно меньше, чем декремент затухания куперовских пар γ .

Зависимость высоты пика туннельной проводимости от затухания куперовских пар при нулевой температуре приведена на Рис.3.16. В окрестности квантовой критической точки туннельная проводимость также расходуется как функция управляю-

щего параметра γ . Высота пика туннельной проводимости при нулевой температуре как для невзаимодействующих σ_{T0}^{\max} , так и для взаимодействующих σ_T^{\max} электронов и дырок, имеет вид:

$$\sigma_{T0}^{\max} = \frac{2\pi e^2 \nu_F t^2}{h \gamma}, \quad (3.30)$$

$$\sigma_T^{\max} = \frac{2\pi e^2 \nu_F t^2}{h} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\lambda^2 \ln^2 \frac{\gamma}{\gamma_c}}. \quad (3.31)$$

Раскладывая (3.31) в окрестности квантовой критической точки по величине $\delta\gamma = \gamma - \gamma_c$, получаем, что туннельная проводимость расходуется степенным образом с критическим индексом $\mu = 2$, то есть

$$\sigma_T^{\max} \sim \left(\frac{\gamma_c}{\delta\gamma}\right)^2. \quad (3.32)$$

Расходимость туннельной проводимости в окрестности квантовой критической точки также обусловлена нарастающими флуктуациями куперовских электрон-дырочных пар.

3.3.4. Выводы

Значительное усиление туннелирования флуктуациями куперовских пар возможно и в других системах, в которых реализуются пространственно разделенные электроны и дырки. Рассмотрим особенности этого эффекта в других системах.

Пространственно разделенные дираковские электроны и дырки реализуются в системе из двух листов графена, разделенных диэлектриком. В графене дираковские точки находятся на краях первой зоны Бриллюэна. Если при туннелировании электрона его импульс сохраняется, то туннелирование между двумя листами графена возможно при специальной ориентации их кристаллических решеток, при которой положения дираковских точек двух листов графена совпадают между собой. Предполагается, что туннелирование является слабым и листы графена выращиваются или отщепляются независимо друг от друга. В этом случае решетки графена будут ориентированы случайным образом, и туннелирование между ними будет подавленным. Если при туннелировании импульс электрона не сохраняется, на что указывают эксперименты [121] с двумя листами графена, разделенными несколькими слоями нитрида бора BN , то в этом случае возможно критическое поведение туннельной проводимости. При этом критическое поведение системы определяется соотношением между q_T и q_c , где q_T — характерный импульс, который не сохраняется при туннелировании, а $q_c \sim T_0/v_F$ — величина импульса куперовских пар, при

которой куперовская неустойчивость исчезает. При $q_T \ll q_c$ можно считать, что при туннелировании электрона его импульс сохраняется, и в этом случае справедлива модель, использованная в этой главе. При $q_T \gg q_c$ флуктуации приведут к критическому поведению, при этом расходимость туннельной проводимости будет ослаблена, то есть соответствующие критические индексы будут меньше, чем $\nu = \mu = 2$.

Пространственно разделенные композитные электроны и композитные дырки реализуется в параллельных полупроводниковых квантовых ямах в квантующем магнитном поле при суммарном факторе заполнения $\nu_T = 1$. В этой системе было идентифицировано электрон-дырочное спаривание, и наблюдался гигантский пик в зависимости туннельной проводимости от приложенного напряжения, обусловленный внутренним Джозефсоновским эффектом. При этом выше температуры перехода в зависимости туннельной проводимости от приложенного напряжения наблюдался провал при $V < V_c$ [122, 123], где $V_c = e/l_B \epsilon$ и l_B — магнитная длина. Наличие провала свидетельствует о наличии щели в плотности состояний, которая связана с кулоновским взаимодействием между электронами и является спецификой композитных фермионов [124]. Также в качестве механизма образования щели рассматривалось образование электронами на уровнях Ландау вигнеровского кристалла [125]. Одновременное влияние флуктуаций куперовских электрон-дырочных пар и механизма, приводящего к образованию щели, требует отдельного исследования. Следует отметить, что в этой системе расходимости туннельной проводимости и её критического поведения в окрестности критической температуры в эксперименте не наблюдалось.

Пространственно разделенные электроны и дырки могут быть реализованы в параллельных полупроводниковых квантовых ямах. Электрон-дырочное спаривание в этой системе так не было идентифицировано, хотя в ней были обнаружены особенности в эффекте кулоновского увлечения [126, 127]. Также было обнаружено образование щели в спектре электронов и дырок, обусловленной их взаимодействием. Поэтому эта система не может быть описана в модели двух слабо связанных фермижидкостей. Если эти эффекты связаны с флуктуациями куперовских пар, то детальное изучение туннелирования позволило бы идентифицировать электрон-дырочное спаривание в этой системе.

Следует отметить, что фазовый переход в состояние со спариванием является переходом Березинского-Костерлитца-Таулесса (БКТ)[59, 60], температура которого лежит ниже температуры температуры спаривания, вычисляемой в рамках теории среднего поля. Выше температуры перехода Березинского-Костерлитца-Таулесса

флуктуации фазы параметра велики и разрушают пространственную когерентность в системе. При этом флуктуации модуля параметра порядка велики только в окрестности температуры спаривания. Эффект усиления туннелирования флуктуациями куперовских пар является локальным, и для него не требуется макроскопическая пространственная когерентность. Поэтому для его описания может быть использована теория среднего поля.

Кулоновское взаимодействие значительно увеличивает туннельную проводимость в двухслойной системе пространственно разделенных электронов и дырок даже в том случае, если их куперовское спаривание подавлено, например, беспорядком. Влияние кулоновского взаимодействия на туннелирование в двухслойной электрон-электронной системой рассматривалось в [128–130]. Во-первых, кулоновское взаимодействие между электронами приводит к их дополнительному затуханию, которое зависит от температуры. Во-вторых оно приводит к перенормировке туннельной вершины. Перенормировка туннельной вершины в лестничном приближении приводит к уменьшению ширины пика, но не приводит к изменению его высоты. Причина заключается в том, что в электрон-дырочной системе перенормировка туннельной вершины соответствует вершине взаимодействия в куперовском канале, а в электрон-электронной системе — в электрон-дырочном канале.

Флуктуации электрон-дырочных куперовских пар в тонкой пленки из топологического изолятора могут проявляться и в других транспортных физических явлениях. Они приводят к критическому поведению в эффекте кулоновского увлечения, а именно к логарифмической расходимости транссопротивления системы [131, 132]. Рассеяние электронов является неупругим процессом, и в эффект увлечения вносят вклад электроны с энергиями порядка температуры системы T . Куперовская неустойчивость соответствует электронам и дыркам на уровне Ферми, поэтому флуктуации куперовских пар приводят к логарифмической расходимости, а не степенной. Увлечение в системе электронов и дырок может быть обусловлено не только кулоновским взаимодействием, но и туннелированием между противоположными поверхностями пленки из ГИ. Этот эффект рассмотрен для системы из двух листов графена в Приложении 7. Несмотря на то, что этот механизм значительно слабее механизма, связанного с кулоновским взаимодействием, он может быть значительно усилен флуктуациями куперовских пар, так как туннелирование является упругим процессом, поэтому флуктуации куперовских пар могут привести к степенной расходимости транссопротивления.

Во второй части третьей главы исследовано влияние кулоновского взаимодействия на туннелирование в системе электронов и дырок, заполняющих противоположные поверхности тонкой пленки из топологического изолятора. Показано, что зависимость туннельной проводимости от приложенного напряжения содержит один резкий пик, который обусловлен ограничениями, связанными с законами сохранения энергии и импульса для туннелирующего электрона. Кулоновское взаимодействие не меняет качественно эту зависимость и приводит к значительному увеличению высоты пика и заметному уменьшению его ширины, даже если электрон-дырочное спаривание подавлено беспорядком. Если электрон-дырочное спаривание не подавлено беспорядком, то в окрестности критической температуры туннельная проводимость расходуется степенным образом с критическим индексом $\nu = 2$. Критическое поведение туннельной проводимости связано с флуктуациям куперовских электрон-дырочных пар, которые нарастают в окрестности температуры спаривания. В окрестности квантового фазового перехода по затуханию куперовских пар, которое параметризует взаимодействие электронов и дырок с примесями, туннельная проводимость также расходуется с критическим индексом $\mu = 2$.

Заключение

Основные результаты диссертации

Основные результаты, полученные в рамках диссертационной работы, можно сформулировать следующим образом:

- Исследованы спин-плазмоны в вырожденном электронном газе на поверхности трехмерного топологического изолятора при помощи математического формализма, основанного на методе уравнений движения, который был впервые применен к газу дираковских частиц. Детально исследована волновая функция спин-плазмонов в импульсном пространстве. Найдены зависимости амплитуд волн плотностей заряда и спина от импульса спин-плазмонов и их концентрации. Показано, что возбуждение спин-плазмона также сопровождается появлением спиновой поляризации поверхности топологического изолятора, которая перпендикулярна его импульсу, и найдена ее величина. Рассмотрено рассеяние спин-плазмонов на внешнем потенциале и неоднородности магнитного поля, и вычислены соответствующие форм-факторы спин-плазмонов. Показано, что благодаря составной структуре спин-плазмона его диаграмма рассеяния представляет собой два симметричных лепестка, которые имеют максимумы при конечном угле рассеяния, в то время как амплитуда рассеяния и вперед, и назад равна нулю. Разработанный формализм позволяет описывать плазмоны в графене и может быть применен для решения различных задач квантовой оптики плазмонов.
- Исследованы киральные экситоны на поверхности трехмерного топологического изолятора, в спектре которой открыта щель внешним обменным полем. Вычислен их вклад в тензор оптической проводимости поверхности. Показано, что киральные экситоны благодаря отсутствию симметрии между состояниями с противоположными орбитальными квантовыми числами вносят резонанс-

ный вклад в холловскую проводимость поверхности и, поэтому, играют важную роль в магнитооптических эффектах Фарадея и Керра. Показано, что киральные экситоны резонансно усиливают эффект Фарадея и ослабляют эффекта Керра. Они также резонансным образом проявляются в частотной зависимости степеней эллиптичности как прошедшей, так и отраженной электромагнитных волн. Проанализированы условия, которые необходимо быть выполнены для экспериментального обнаружения резонансных эффектов.

- Вычислена фазовая диаграмма пространственно разделенных дираковских электронов и дырок. Вычислена критическая температура перехода в модели Бардина-Купера-Шриффера, при этом для вычисления экранированного потенциала взаимодействия использовалось приближение хаотических фаз. Беспорядок и дисбаланс концентраций электронов и дырок эффективно подавляют их куперовское спаривание. При этом в определенном диапазоне величины дисбаланса концентраций может быть стабилизировано состояние типа Ларкина-Овчинникова-Фулде-Феррелла, в котором параметр порядка является периодической функцией координат. Туннелирование приводит к образованию параметра порядка конденсата электрон-дырочных пар выше критической температуры и "размытию" фазового перехода.
- Исследовано влияние кулоновского взаимодействия на туннелирование между противоположными поверхностями тонкой пленки из топологического изолятора. Кулоновское взаимодействие значительно усиливает туннелирование, даже если куперовское спаривание электронов и дырок подавлено беспорядком, но не меняет качественно зависимость туннельной проводимости от приложенного напряжения. Если электрон-дырочное спаривание не подавлено, то в окрестности критической температуры туннельная проводимость расходуется степенным образом с критическим индексом $\nu = 2$, что можно интерпретировать как проявление флуктуаций куперовских пар. В окрестности квантового фазового перехода по беспорядку туннельная проводимость также расходуется с критическим индексом $\mu = 2$.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных журналах

1а. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Spin-plasmons in topological insulator // Journal of Magnetism and Magnetic Materials **324**, 3610 (2012).

2а. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Collective excitations on a surface of topological insulator // Nanoscale Research Letters, **7**, 163 (2012).

3а. D.K. Efimkin, V.A. Kulbachinskii, Yu.E. Lozovik. Influence of disorder on electron-hole pairing in graphene bilayer // Письма в ЖЭТФ **93**, 4, 238-241 (2011).

4а. Д.К. Ефимкин, Ю.Е. Лозовик. Электрон-дырочное спаривание с ненулевым импульсом в бислое графена // ЖЭТФ, **140**, 5 (11), 1009-1016 (2011).

5а. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik. Nonuniform electron-hole pairing in graphene bilayer // Fullerenes, Nanotubes, and Carbon Nanostructures **20**, 4(7), 569-573 (2012).

6а. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Electron-hole pairing in topological insulator thin film // Phys. Rev. B, **86**, 115436 (9pp) (2012).

7а. Д.К. Ефимкин, Ю.Е. Лозовик. Эффект увлечения электронов в бислое графена // ЖЭТФ, **140**, 6(12), 1203-1210 (2011).

Статьи, отправленные в печать

1b. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik. Resonant manifestations of chiral excitons in magneto-optical Faraday and Kerr effects in topological insulator film // Отправлена в печать в журнал Phys. Rev. B. Опубликована в международном архиве препринтов ArXiv:1208.3320 (2012).

Печатные работы в трудах научных конференций

1с. Д.К. Ефимкин, Ю.Е. Лозовик. Электрон-дырочное спаривание с ненулевым импульсом в бислое графена // Труды 53-й научной конференции МФТИ, т. 8, стр. 11-13 (2010).

2с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik. Nonuniform electron-hole pairing in graphene bilayer // Proceedings of joint international conference "Advanced Carbon Nanostructures", p. 76 -76 (2011).

3с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik. Electron-hole pairing with finite value of Cooper pair momentum in graphene bilayer // Books of Abstracts of international school "Quantum

Phenomena in Graphene, Other Low-Dimensional Materials and Optical Lattices", p. 66-77 (2011).

4с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Spin-plasmons in topological insulators // Proceedings of international conference "Moscow International Symposium on Magnetism", p. 42-42 (2011).

5с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Collective excitations on a surface of 3D topological insulator // Book of abstracts of The 5th Forum "Nano and Giga Challenges in Electronics, Photonics and Renewable Energy", p. 124-125 (2011).

6с. Д.К. Ефимкин, Ю.Е. Лозовик, А.А. Соколик. Спин-плазмоны на поверхности трехмерного топологического изолятора // Труды международной конференции "Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения " (Intermatic-2011), т. 1, с. 77-80(2011).

7с. Д.К. Ефимкин, Ю.Е. Лозовик. Эффект кулоновского увлечения и куперовское спаривание электронов и дырок // Труды 53-й научной конференции МФТИ, т. 8, стр. 87-88 (2011).

8с. Д.К. Ефимкин, Ю.Е. Лозовик. Флуктуационные эффекты в системе пространственно разделенных электронов и дырок // Труды 53-й научной конференции МФТИ, т. 8, стр. 86-87 (2011).

9с. Д.К. Ефимкин, Ю.Е. Лозовик. Коллективные возбуждения на поверхности топологического изолятора // Труды 53-й научной конференции МФТИ, т. 8, стр. 85-86 (2011).

10с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik. Cooper pair fluctuations in the system of spatially separated electrons and holes // Proceedings of Advanced research workshop "Meso-2012" - "Nonequilibrium and coherent phenomena at nanoscale", p. 40 (2012).

11с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Electron-hole pairing in thin film of topological insulator // Proceedings of Advanced research workshop "Meso-2012" - "Nonequilibrium and coherent phenomena at nanoscale", p. 54 (2012).

12с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik. Fluctuation effects and electron-hole pairing in thin film of topological insulator // Book of abstracts of International Conference "Dubana-Nano2012", p. 36 (2012).

13с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Electron-hole Cooper pairing in topological insulator thin film // Book of abstracts of International Conference "Dubana-Nano2012", p. 117 (2012).

14с. D.K. Efimkin, Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Cooper pair of electrons and holes

on opposite surfaces of topological insulator film // Books of abstracts of International School and Workshop "Innovations in Strongly Correlated Electronic Systems ", p. 126 (2012).

Благодарности

В заключение автор выражает глубокую благодарность Юрию Ефремовичу Лозовику за научное руководство и постановку интересных физических задач.

Также автор благодарит коллегу и соавтора Алексея Алексеевича Соколика за продуктивное сотрудничество: вместе с ним были получены некоторые результаты первой главы и первой части третьей главы.

Особую признательность за поддержку автор выражает Галине Анатолиевне Михайловой, Юрию Михайловичу Михайлову и Ефимкину Кириллу Николаевичу, а также сердечно благодарит за вдохновение Юрченко Светлану Владимировну.

Глава 4.

Приложения

4.1. Уравнение движения для оператора рождения спин-плазмона

В этом приложении получено уравнение движения для оператора рождения спин-плазмона. Так как спин-плазмон является когерентной суперпозицией электрон-дырочных пар, то удобно начать с вычисления коммутатора гамильтониана системы с оператором рождения одной электрон-дырочной пары:

$$\begin{aligned} [H, a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}] &= (\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}) a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} + \sum_{\mathbf{q}'} V_{\mathbf{q}'} \rho_{\mathbf{q}'}^+ \times \\ &\times \sum_{\gamma''} (\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{q}',\gamma''} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{q}',\gamma''}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} - \langle f_{\mathbf{p},\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}',\gamma''} \rangle a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}',\gamma''}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\rho_{\mathbf{q}}$ — Фурье-образ оператора плотности, определенный в (1.12). Коммутатор в правой части уравнения (4.1) сводится к произведению четырех операторов электронов. Если записать уравнение движения для произведения четырех электронных операторов, то оно будет содержать произведение шести электронных операторов и так далее. Для получения замкнутого уравнения (или конечной системы уравнений) эту цепочку уравнений следует оборвать. В приближении хаотических фаз (ПХФ) во втором слагаемом в правой части уравнения (4.1) произведение операторов электронов заменяется их средними значениями в основном состоянии невзаимодействующей системы, то есть $a_{\mathbf{p}',\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} \rightarrow n_{\mathbf{p}\gamma} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\gamma\gamma'}$, где $n_{\mathbf{p}\gamma}$ — функция распределения электронов при нулевой температуре. В этом приближении уравнение (4.1) принимает вид:

$$[H, a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}] = (\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}) a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} + V_c(\mathbf{q}) \rho_{\mathbf{q}}^+ \langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'} \rangle (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}). \quad (4.2)$$

Подставляя определение оператора плазмона (1.4) в его уравнение движения и используя (4.2), получаем систему операторных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} (\Omega_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{p}\gamma} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} &= \\ = V_c(\mathbf{q}) \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} \langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) \sum_{\mathbf{p}'\sigma\sigma'} \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} | f_{\mathbf{p}'\sigma} \rangle a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'}^+ a_{\mathbf{p}'\sigma}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Приравнивая слагаемые в обеих частях уравнения (4.3) при одинаковых операторах электрон-дырочных возбуждений $a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}$, получаем

$$C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} (\Omega_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{p}\gamma} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) = V_c \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle \sum_{\mathbf{p}'\sigma\sigma'} C_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\sigma'\sigma} \langle f_{\mathbf{p}'\sigma} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} \rangle (n_{\mathbf{p}'\sigma} - n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'}). \quad (4.4)$$

Если ввести сокращенное обозначение $N_{\mathbf{q}}$ для суммы в правой части уравнения (4.4), которую можно интерпретировать как нормировочный множитель и которая равна

$$N_{\mathbf{q}} = V_c(\mathbf{q}) \sum_{\mathbf{p}'\sigma\sigma'} C_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\sigma'\sigma} \langle f_{\mathbf{p}'\sigma} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} \rangle (n_{\mathbf{p}'\sigma} - n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'}), \quad (4.5)$$

то коэффициенты, образующие волновую функцию спин-плазмона в импульсном пространстве, приобретают вид:

$$C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma} = \frac{\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle N_{\mathbf{q}}}{\Omega_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{p}\gamma} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} + i\delta} |n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}|. \quad (4.6)$$

Бесконечно малая мнимая величина $i\delta$ включена в знаменатель (4.6) для того, чтобы гарантировать правильный знак затухания плазмона. Уравнение движения для плазмона подразумевает, что оператор рождения эволюционирует как $Q_{\mathbf{q}} \sim e^{i\Omega_{\mathbf{q}}t}$. Введение бесконечно малой величины $i\delta$ приводит к затуханию плазмона при $t \rightarrow +\infty$.

Для определения закона дисперсии спин-плазмона $\Omega_{\mathbf{q}}$ следует замкнуть уравнения для коэффициентов, образующих его волновую функцию, подставив (4.6) в (4.5). Уравнение для закона дисперсии спин-плазмона имеет вид:

$$1 - \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} |\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle|^2 \frac{(n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'})}{\omega + \xi_{\mathbf{p}\gamma} - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} + i\delta} = 0. \quad (4.7)$$

Это уравнение можно записать в виде $1 - V_c(\mathbf{q})\Pi(\mathbf{q}, \Omega_{\mathbf{q}}) = 0$, где $\Pi(\mathbf{q}, \Omega_{\mathbf{q}})$ обозначает поляризационный оператор дираковского электронного газа, который определен в (1.7).

Нормировочный множитель $N_{\mathbf{q}}$ можно определить из бозевских коммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения спин-плазмона $[\Omega_{\mathbf{q}}, \Omega_{\mathbf{q}'}] = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$.

Так как спин-плазмон является составной частицей, то коммутационные соотношения для его операторов уничтожения и рождения сводятся к суперпозиции пар электронных операторов, то есть

$$[\Omega_{\mathbf{q}}, \Omega_{\mathbf{q}'}^+] = \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'\sigma} (C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma})^* (C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{q}',\mathbf{q}'}^{\gamma'\sigma} a_{\mathbf{p}\gamma}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{q}',\sigma} - C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{q}',\mathbf{q}'}^{\sigma\gamma} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}',\sigma}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}',\gamma'}). \quad (4.8)$$

В приближении ПХФ коммутационные соотношения (4.8) заменяются их средними значениями по основному состоянию невзаимодействующей системы. Вычисляя среднее значение выражения (4.8), получаем:

$$\sum_{\mathbf{p}\gamma'\gamma} |C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma}|^2 (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) = 1. \quad (4.9)$$

Следует отметить, что уравнение (4.9) для величины $N_{\mathbf{q}}$, вытекающее из бозевских коммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения спин-плазмона, можно интерпретировать как условие нормировки $\langle 1_{\mathbf{q}} | 1_{\mathbf{q}} \rangle = 1$ возбужденного состояния системы $|1_{\mathbf{q}}\rangle = \Omega_{\mathbf{q}}^+ |0\rangle$ с одним спин-плазмоном.

4.2. Фурье-компоненты операторов зарядовой и спиновой плотностей

В этом приложении выведены соотношения (1.12) и (1.13), связывающие операторы Фурье-компонент зарядовой и спиновой плотностей с операторами рождения спин-плазмонов. В системе электронов без взаимодействия элементарными возбуждениями являются электрон-дырочные пары, операторы которых есть $a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}$, а их энергии равны разности энергий электрона и дырки: $\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}$.

При "включении" кулоновского взаимодействия свойства элементарных возбуждений изменяются. Во-первых, одночастичные электрон-дырочные возбуждения искажаются, в результате чего изменяются их операторы рождения. Во-вторых, часть спектрального веса одночастичных возбуждений собирается в одной моде, которая выталкивается из континуума одночастичных возбуждений и становится плазмоном. Таким образом, для каждого заданного импульса множество всех возможных элементарных возбуждений с таким импульсом состоит из континуума искаженных одночастичных возбуждений и одного плазмона. Обозначим оператор рождения искаженного одночастичного возбуждения с энергией $\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}$ как $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+$. Из-за влияния взаимодействия оператор $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+$ уже не будет равен $a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma}$, а вместо этого будет представлять собой суперпозицию исходных одночастичных возбуждений, которую можно представить в виде:

$$\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+ = \sum_{\mathbf{p}'\sigma\sigma'} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'}^+ a_{\mathbf{p}'\sigma}. \quad (4.10)$$

Коэффициенты $U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}$, как и коэффициенты $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma}$ разложения (1.5) оператора рождения плазмона, можно найти при помощи метода уравнений движения в приближении хаотических фаз. Оператор $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+$ должен подчиняться следующему уравнению движения:

$$[H, \eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+] = (\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}) \eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.10) в (4.11) и используя (4.4), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}\sigma\sigma'} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} (\xi_{\mathbf{p}'\sigma} - \xi_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'}^+ a_{\mathbf{p}'\sigma} = \\ = V_c(\mathbf{q}) \rho_{\mathbf{q}}^+ \sum_{\mathbf{p}'\sigma\sigma'} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} \langle f_{\mathbf{p}'\sigma} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} \rangle (n_{\mathbf{p}'\sigma} - n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Затем, расписывая оператор Фурье-компоненты плотности $\rho_{\mathbf{q}}^+$ согласно формуле (1.12) и приравнявая в обеих частях уравнения (4.12) члены при одинаковых парах

операторов $a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'}^+ a_{\mathbf{p}'\sigma}$, получим следующую систему уравнений для коэффициентов $U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}$:

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} (\xi_{\mathbf{p}'\sigma} - \xi_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) = \\ = V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'} | f_{\mathbf{p}'\sigma} \rangle \sum_{\mathbf{p}''\tau\tau'} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}''\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\tau\tau'} \langle f_{\mathbf{p}''\tau} | f_{\mathbf{p}''+\mathbf{q},\tau'} \rangle (n_{\mathbf{p}''\tau} - n_{\mathbf{p}''+\mathbf{q}\tau'}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Как видно из (4.13), коэффициент $U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}$ при $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, $\sigma = \gamma$ и $\sigma' = \gamma'$ остается неопределенным, так как множитель в скобках, стоящий после него в левой части этого уравнения, обращается при этом в нуль. В работах [64, 66], в которых разрабатывался метод уравнений движения для нерелятивистского электронного газа, было показано, что этот коэффициент равен единице. По аналогии с теорией рассеяния, соответствующая часть оператора $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+$ представляет собой исходную "падающую волну", которая должна фигурировать в полном решении задачи наряду с "рассеянными" волнами.

Удобно недиагональные элементы $U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}$ выделить явно

$$U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\sigma\gamma} \delta_{\sigma'\gamma'} + W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}, \quad (4.14)$$

где коэффициенты $W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}$ должны удовлетворять следующей системе уравнений, непосредственно вытекающей из (4.12):

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} (\xi_{\mathbf{p}'\sigma} - \xi_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) = V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'} | f_{\mathbf{p}'\sigma} \rangle \langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle \times \\ \times (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}) + V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'} | f_{\mathbf{p}'\sigma} \rangle \sum_{\mathbf{p}''\tau\tau'} W_{\mathbf{p}\mathbf{p}''\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\tau\tau'} \langle f_{\mathbf{p}''\tau} | f_{\mathbf{p}''+\mathbf{q},\tau'} \rangle (n_{\mathbf{p}''\tau} - n_{\mathbf{p}''+\mathbf{q}\tau'}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отсюда получаем

$$W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} = \frac{V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}) + Y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'}}{\xi_{\mathbf{p}'\sigma} - \xi_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} + i\delta} \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'} | f_{\mathbf{p}'\sigma} \rangle. \quad (4.16)$$

Здесь, как и ранее в выражении (4.6), в энергетический знаменатель была включена бесконечно малая мнимая величина $i\delta$, которая приводит к затуханию электрон-дырочных пар при $t \rightarrow \infty$. Под $Y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'}$ обозначена следующая сумма:

$$Y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'} = V_c(\mathbf{q}) \sum_{\mathbf{p}''\tau\tau'} W_{\mathbf{p}\mathbf{p}''\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\tau\tau'} \langle f_{\mathbf{p}''\tau} | f_{\mathbf{p}''+\mathbf{q},\tau'} \rangle (n_{\mathbf{p}''\tau} - n_{\mathbf{p}''+\mathbf{q}\tau'}). \quad (4.17)$$

Подставляя (4.15) в (4.17) и учитывая, что суммирование по \mathbf{p}'' , τ и τ' в получившемся выражении дает поляризационный оператор на энергии $\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}$, согласно определению (1.7), можно получить замкнутую систему уравнений

$$Y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'} = V_c(\mathbf{q})^2 \langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}) \Pi(q, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}) + V_c(\mathbf{q}) Y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'} \Pi(q, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma}). \quad (4.18)$$

Из этого уравнения можно сразу найти величину $Y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'}$, которая равна

$$Y_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'} = V_c(\mathbf{q})^2 \frac{\langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) \Pi(q, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma})}{1 - V_c(\mathbf{q}) \Pi(q, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma})}. \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.15) и далее в (4.14), получаем окончательное выражение для коэффициентов $U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}$:

$$U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\sigma\gamma} \delta_{\sigma'\gamma'} + \frac{V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} \rangle \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'} | f_{\mathbf{p}'\sigma} \rangle}{1 - V_c(\mathbf{q}) \Pi(q, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma})} \times \frac{(n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) |(n_{\mathbf{p}'\sigma} - n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'})|}{\xi_{\mathbf{p}'\sigma} - \xi_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma} + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} + i\delta}. \quad (4.20)$$

Множитель $|(n_{\mathbf{p}'\sigma} - n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'})|$ введен здесь для того, чтобы гарантировать попадание в сумму (4.10) только разрешенных принципом Паули переходов $\mathbf{p}\sigma \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}\sigma'$.

Совокупность коэффициентов $U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}}^{\gamma\gamma'\sigma\sigma'}$ и выражение для волновой функции плазмона $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ образуют преобразование, связывающее операторы *искаженных* электрон-дырочных пар $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+$ и оператор рождения плазмона $Q_{\mathbf{q}}^+$ с набором операторов электрон-дырочных пар $a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'}^+, a_{\mathbf{p}'\sigma}$. Для вычисления амплитуд волн плотностей заряда и спина, которые сопровождают спин-плазмон, нужно получить обратное преобразование, связывающее $a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'}^+, a_{\mathbf{p}'\sigma}$ с оператором рождения спин-плазмона. Как совокупность исходных, так и совокупность искаженных возбуждений представляют собой полный набор состояний, поэтому преобразование между ними должно быть унитарным.

Унитарность этого преобразования выражается в том, что для операторов искаженных одночастичных возбуждений и спин-плазмонов должны выполняться коммутационные соотношения

$$[\eta_{\mathbf{p}'\mathbf{q}\sigma\sigma'}, \eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\sigma\gamma} \delta_{\sigma'\gamma'} (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}), \quad (4.21)$$

$$[Q_{\mathbf{q}}, Q_{\mathbf{q}'}] = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}, \quad (4.22)$$

так же, как и для операторов исходных электрон-дырочных возбуждений

$$[a_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\sigma'}^+, a_{\mathbf{p}'\sigma}, a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}^+, a_{\mathbf{p}\gamma}] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\sigma\gamma} \delta_{\sigma'\gamma'} (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}). \quad (4.23)$$

В приближении хаотических фаз коммутационные соотношения (4.21), (4.22) и (4.23) должны выполняться в среднем по основному состоянию. Множитель $n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}$ равен 1, если электронный переход $\mathbf{p}\gamma \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}\gamma'$ происходит из занятого состояния в свободное, и равен -1 , если этот переход происходит из свободного состояния в занятое. Их введение обусловлено тем обстоятельством, что в первом случае

операторы $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}$ и $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+$ должны как операторы бозе-частиц коммутировать на единицу. Во втором случае оператор $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}$ является фактически оператором рождения, а оператор $\eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+$ — оператором уничтожения, вследствие чего они должны коммутировать на -1 . Унитарное преобразование можно записать в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} Q_{\mathbf{q}}^+ \\ \eta_{\mathbf{p}_1\mathbf{q}\gamma_1\gamma'_1}^+ \\ \vdots \\ \eta_{\mathbf{p}_N\mathbf{q}\gamma_N\gamma'_N}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\mathbf{p}_1\mathbf{q}}^{\sigma'_1\sigma_1} & \cdots & C_{\mathbf{p}_N\mathbf{q}}^{\sigma'_N\sigma_N} \\ U_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1\mathbf{q}}^{\gamma_1\gamma'_1\sigma_1\sigma'_1} & \cdots & U_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_N\mathbf{q}}^{\gamma_1\gamma'_1\sigma_N\sigma'_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{\mathbf{p}_N\mathbf{p}_N\mathbf{q}}^{\gamma_N\gamma'_N\sigma_1\sigma'_1} & \cdots & U_{\mathbf{p}_N\mathbf{p}_N\mathbf{q}}^{\gamma_N\gamma'_N\sigma_N\sigma'_N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}\sigma'_1}^+ a_{\mathbf{p}_1\sigma_1} \\ \vdots \\ a_{\mathbf{p}_N+\mathbf{q}\sigma'_N}^+ a_{\mathbf{p}_N\sigma_N} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

или более компактно

$$A^+ = UB^+, \quad (4.25)$$

где A^+ и B^+ — столбцы, составленные из операторов рождения элементарных возбуждений в системе со взаимодействием и без взаимодействия соответственно. Коммутационные соотношения (4.8), (4.21) и (4.22) для компонентов столбца A^+ могут быть записаны с учетом (4.25) в виде:

$$[A_i, A_j^+] = U_{jk}[B_p, B_l^+]U_{li}^+ = U_{jk}F_kU_{ki}^+ = \delta_{ij}F_k, \quad (4.26)$$

где F_k - фактор $n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'}$ для k -го исходного электрон-дырочного возбуждения $\mathbf{p}\gamma \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}\gamma'$. В матричном виде последнее равенство выражения (4.26) можно записать как

$$UFU^+ = F. \quad (4.27)$$

Используя это соотношение и равенство $FF = I$, где I — единичная матрица, получаем

$$B^+ = FU^+FA^+. \quad (4.28)$$

Преобразование (4.28) является обратным по отношению к (4.25) и выражает операторы рождения электрон-дырочных возбуждений в системе без взаимодействия через операторы рождения плазмонов и искаженных одночастичных возбуждений в системе со взаимодействием. Пользуясь выражениями для элементов матрицы U , можно записать преобразование (4.28) в явном виде:

$$a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}^+ a_{\mathbf{p},\gamma} = (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) \left((C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\gamma'\gamma})^* Q_{\mathbf{q}}^+ + \sum_{\mathbf{p}'\sigma\sigma'} U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\sigma\sigma'\gamma\gamma'} (n_{\mathbf{p}'\sigma} - n_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\sigma'}) \eta_{\mathbf{p}'\mathbf{q}\sigma\sigma'}^+ \right). \quad (4.29)$$

Теперь, пользуясь преобразованием (4.29), выражаем Фурье-компоненты оператора плотности заряда (1.12) через операторы возбуждений в системе взаимодействующих электронов, получаем

$$\rho_{\mathbf{q}}^+ = N_q^* \Pi^*(\mathbf{q}, \Omega_{\mathbf{q}}) Q_{\mathbf{q}}^+ + \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} \frac{\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'})}{1 - V_c(\mathbf{q}) \Pi^*(\mathbf{q}, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma})} \eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+, \quad (4.30)$$

где $\Pi(\mathbf{q}, \Omega)$ — величина, комплексно сопряженная поляризаационному оператору, который определен согласно (1.7). Аналогичным образом получается Фурье-образ оператора плотности спина (1.13), который имеет вид:

$$s_{\mathbf{q}}^+ = N_q^* \Pi_s^*(\mathbf{q}, \Omega_{\mathbf{q}}) Q_{\mathbf{q}}^+ + \sum_{\mathbf{p}\gamma\gamma'} (n_{\mathbf{p}\gamma} - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'}) \left(\langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\gamma'} | \mathbf{s} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle + \frac{V_c(\mathbf{q}) \Pi_s^*(\mathbf{q}, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma})}{1 - V_c(\mathbf{q}) \Pi^*(\mathbf{q}, \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\gamma'} - \xi_{\mathbf{p}\gamma})} \right) \eta_{\mathbf{p}\mathbf{q}\gamma\gamma'}^+, \quad (4.31)$$

где $\Pi_s(\mathbf{q}, \Omega)$ — величина, комплексно сопряженная функции реакции плотность-спин, которая определена согласно (1.16).

Выражения (1.14) и (1.15), которые связывают операторы плотностей заряда и спина с оператором рождения спин-плазмона, представляют собой упрощенную форму выражений (4.30) и (4.31).

4.3. Уравнение движения для оператора рождения экситона

Экситон представляет собой композитный бозон и является суперпозицией электрон-дырочных межзонных переходов $b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+ = a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1}^+ a_{\mathbf{p},-1}$. В методе уравнений движения коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения электрон-дырочных пар заменяются их средними значениями по основному состоянию системы, то есть в котором все состояния валентной зоны заполнены, в зоне проводимости пустые, то есть

$$[b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}, b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'}] \approx \langle [b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}, b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'}] \rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}. \quad (4.32)$$

В основном состоянии системы все состояния валентной зоны заполнены, а состояния из зоны проводимости являются пустыми. Удобно через эти операторы выразить гамильтониан системы. Гамильтониан, соответствующий кулоновскому взаимодействию, содержит шестнадцать слагаемых, соответствующих процессам рассеяния. Закон сохранения энергии выполняется только для шести процессов рассеяния, и соответствующие им слагаемые удобно выделить явно:

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \sum_{\gamma} V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},\gamma} | f_{\mathbf{p}_1\gamma} \rangle \langle f_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\gamma} | f_{\mathbf{p}_2\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},\gamma}^+ a_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\gamma}^+ a_{\mathbf{p}_2\gamma} a_{\mathbf{p}_1\gamma}, \quad (4.33)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \sum_{\gamma} V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},\gamma} | f_{\mathbf{p}_1\gamma} \rangle \langle f_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},-\gamma} | f_{\mathbf{p}_2,-\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},\gamma}^+ a_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},-\gamma}^+ a_{\mathbf{p}_2,-\gamma} a_{\mathbf{p}_1,\gamma}, \quad (4.34)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \sum_{\gamma} V_c(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},-\gamma} | f_{\mathbf{p}_1\gamma} \rangle \langle f_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\gamma} | f_{\mathbf{p}_2-\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},-\gamma}^+ a_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\gamma}^+ a_{\mathbf{p}_2-\gamma} a_{\mathbf{p}_1\gamma}. \quad (4.35)$$

Гамильтониан H_1 соответствует рассеянию электронов из одной зоны, H_2 — рассеянию электронов из разных зон, а H_3 — межзонным переходам. Используя приближение Хартри-Фока для слагаемого H_1 и оставляя слагаемые в гамильтониане, соответствующие процессам рассеяния, в которых выполняется закон сохранения энергии, получаем

$$H = \sum_{\mathbf{p}\gamma} (\epsilon_{\mathbf{p}\gamma} - \mu + \Sigma_{\mathbf{p}\gamma}) a_{\mathbf{p}\gamma}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} + \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p},-1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}',-1} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} \rangle b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}} - \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}',-1} | f_{\mathbf{p},-1} \rangle b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}, \quad (4.36)$$

где $\Sigma_{\mathbf{p}\gamma}$ — собственно-энергетическая часть электронов, которая определяется их обменным взаимодействием со всеми электронами из валентной зоны и имеет вид:

$$\Sigma_{\mathbf{p}\gamma} = - \sum_{\mathbf{p}'\gamma'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') |\langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}',\gamma'} \rangle|^2 n_{\mathbf{p}'\gamma'}, \quad (4.37)$$

где $n_{\mathbf{p}\gamma}$ — функция распределения электронов.

Экситон является суперпозицией электрон-дырочных пар, поэтому удобно начать с вычисления коммутатора гамильтониана с оператором рождения одной электрон-дырочной пары $b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+$:

$$\begin{aligned} [H, b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+] &= E_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\text{eh}} b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+ + \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p},-1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}',-1} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} \rangle b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^+ - \\ &- \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}',-1} | f_{\mathbf{p},-1} \rangle b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^+, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $E_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\text{eh}}$ — перенормированная энергия электрон-дырочной пары, которая имеет вид

$$E_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\text{eh}} = \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} - \epsilon_{\mathbf{p},-1} + \Sigma_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} - \Sigma_{\mathbf{p}-1}. \quad (4.39)$$

Используя определения оператора рождения экситона (2.5) и соотношение (4.38), получаем уравнение движения для оператора рождения экситона с импульсом \mathbf{q} и энергией $\Omega_{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}} (E_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\text{eh}} - \Omega_{\mathbf{q}}) C_{\mathbf{p}\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+ + \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} V(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p}',-1} \rangle \langle f_{\mathbf{p},-1} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} \rangle C_{\mathbf{p}\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^+ - \\ - \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} V(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \langle f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} \rangle \langle f_{\mathbf{p},-1} | f_{\mathbf{p}',-1} \rangle C_{\mathbf{p}\mathbf{q}} b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^+ = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Переставляя индексы в сумме в уравнении (4.40) и приравнивая слагаемые при операторах одночастичных пар $b_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}^+$, получаем

$$\begin{aligned} (E_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\text{eh}} - \Omega_{\mathbf{q}}) C_{\mathbf{p}\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{q}) \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p},-1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}',-1} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} \rangle C_{\mathbf{p}'\mathbf{q}} - \\ - \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \langle f_{\mathbf{p}+\mathbf{q},1} | f_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}',-1} | f_{\mathbf{p},-1} \rangle C_{\mathbf{p}'\mathbf{q}} = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Учитывая, что волновые функции состояний с одинаковыми импульсами, но из разных зон ортогональны друг другу, то есть $\langle f_{\mathbf{p},1} | f_{\mathbf{p},-1} \rangle = \langle f_{\mathbf{p},-1} | f_{\mathbf{p},1} \rangle = 0$, уравнение для волновой функции экситона с импульсом центра масс, равным нулю $\mathbf{q} = 0$, может быть записано в виде:

$$(2\epsilon_{\mathbf{p}} + \Sigma_{\mathbf{p}}^{\text{eh}}) C_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} C_{\mathbf{p}'} = E C_{\mathbf{p}}, \quad (4.42)$$

где $\Sigma_{\mathbf{p}}^{\text{eh}} = \Sigma_{\mathbf{p},1} - \Sigma_{\mathbf{p}-1}$ — разность собственно- энергетических частей электрона и дырки, а $\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ — угловой фактор, которые имеют вид:

$$\Sigma_{\mathbf{p}}^{\text{eh}} = \sum_{\mathbf{p}'} V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\Delta^2 + v_{\text{F}}^2(\mathbf{p}\mathbf{p}')}{\epsilon_{\mathbf{p}}\epsilon_{\mathbf{p}'}} , \quad (4.43)$$

$$\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} = \frac{1}{2} \frac{v_F^2 p p'}{\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}'}} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{\epsilon_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}'}} \right) \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'}) + \frac{i}{2} \left(\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{p}'}} \right) \sin(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'}). \quad (4.44)$$

Следует отметить, что угловой фактор $\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ является особенностью дираковских частиц и приводит к киральности экситонных состояний.

4.4. Электрон-дырочное спаривание и диаграммная техника

Гамильтониан системы пространственно разделенных дираковских электронов и дырок в однозонном приближении с учетом гибридизации волновых функций имеет вид:

$$H_{\text{eh}} = \sum_{\mathbf{p}\tau\tau'} ((v_{\text{F}}p - E_{\text{F}})\sigma_z^{\tau\tau'} + \Delta_t\sigma_x^{\tau\tau'})a_{\mathbf{p}\tau}^+a_{\mathbf{p}\tau'} + \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} U(\mathbf{q}) \cos \frac{\phi_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{2} \cos \frac{\phi_{\mathbf{p}',\mathbf{p}'+\mathbf{q}}}{2} a_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q},\gamma_1}^+ a_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\gamma_2}^+ a_{\mathbf{p}_2\gamma_2} a_{\mathbf{p}\gamma_1}, \quad (4.45)$$

где $a_{\mathbf{p}\tau}$ — оператор уничтожения электрона в верхнем ($\tau = 1$) или нижнем ($\tau = -1$) слоях. Электроны в нижнем слое имеют отрицательную скорость, поэтому их можно *интерпретировать* как дырки. Также предполагается, что концентрации электронов и дырок совпадают между собой, поэтому они имеют одинаковый закон дисперсии $\xi_{\mathbf{p}} = v_{\text{F}}p - E_{\text{F}}$. Для определения критической температуры спаривания при наличии дисбаланса концентраций электронов и дырок удобнее рассматривать их куперовскую неустойчивость (см. Приложение 6). Кулоновское взаимодействие электронов из одного слоя приводит к перенормировке их закона дисперсии, и его можно опустить. В состоянии со спариванием нарушается калибровочная симметрия, и образуются аномальные средние $\langle a_{\mathbf{p},-1}^+ a_{\mathbf{p},1} \rangle$ и $\langle a_{\mathbf{p},1}^+ a_{\mathbf{p},-1} \rangle$. Этим аномальным средним соответствует следующий параметр порядка:

$$\Delta_{\text{cp}} = - \sum_{\mathbf{p}'} U(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1 + \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})}{2} \langle a_{\mathbf{p}',-1}^+ a_{\mathbf{p},1} \rangle. \quad (4.46)$$

Гамильтониан системы удобно представить в матричном виде в пространстве Горькова-Намбу, в котором базисные векторы записываются в виде $\Psi_{\mathbf{p}} = (a_{\mathbf{p},1}, a_{\mathbf{p},-1})$. Тогда в приближении среднего поля гамильтониан системы приобретает вид:

$$H_{\text{MF}} = \Psi_{\mathbf{p}}^+ \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{p}} & \Delta_{\mathbf{p}} \\ \Delta_{\mathbf{p}}^* & -\xi_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad (4.47)$$

где $\Delta_{\mathbf{p}} = \Delta_{\text{cp}} + \Delta_t$. В пространстве Горькова-Намбу мацубаровские функции Грина определяются как $\hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = -\langle \Psi_{\mathbf{p}}(\tau_{\text{M}})\Psi_{\mathbf{p}}^+(0) \rangle$, где τ_{M} — мнимое мацубаровское время, а ω_n — мацубаровские фермиевские частоты. Матричная одночастичная функция Грина системы имеет вид:

$$\hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = -\frac{1}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2} \begin{pmatrix} i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}} & \Delta_{\mathbf{p}} \\ \Delta_{\mathbf{p}}^* & i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Подставляя найденные недиагональные элементы матричной функции Грина, или аномальные функции Грина, в (4.46), получаем уравнение самосогласования для определения величины параметра порядка $\Delta_{\mathbf{p}}$:

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \Delta_{\text{T}} + T \sum_{\omega_n, \mathbf{p}'} U(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1 + \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})}{2} \frac{\Delta_{\mathbf{p}'}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}'}^2 + \Delta_{\mathbf{p}'}}. \quad (4.49)$$

Выполняя суммирование по мацубаровским частотам, получаем

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \Delta_{\text{T}} + \sum_{\mathbf{p}'} U(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1 + \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'})}{2} \frac{\Delta_{\mathbf{p}'}}{2E_{\mathbf{p}'}} \text{th} \frac{E_{\mathbf{p}'}}{2T}. \quad (4.50)$$

Это уравнение отличается от уравнения самосогласования для щели в теории сверхпроводимости БКШ следующим: 1) наличием слагаемого Δ_{T} , которое обусловлено гибридизацией электронов и дырок; 2) дополнительным угловым фактором в подинтегральном выражении, которое является следствием дираковской природы электронов и дырок.

Получим решение уравнения (4.50) при $\Delta_{\text{T}} = 0$ в приближении БКШ. Благодаря изотропности кулоновского взаимодействия величина параметра порядка не зависит от направления импульса. Производя интегрирование по углам, получаем

$$\Delta(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} U'_0(p, p') \frac{\Delta(p')}{2E_{\mathbf{p}'}} \text{th} \frac{E_{\mathbf{p}'}}{2T}, \quad (4.51)$$

где $U'_0(p_2, p_1) = 1/2(U_0(p_2, p_1) + 1/2(U_{-1}(p_2, p_1) + U_1(p_2, p_1)))$ и $U_m(p_1, p_2)$ — мультипольные моменты экранированного кулоновского взаимодействия. Подинтегральное выражение имеет резкий максимум на уровне Ферми. При этом мультипольные моменты экранированного кулоновского взаимодействия являются медленной функцией импульса с характерным масштабом p_{F} . Поэтому можно воспользоваться формулой среднего и определить мультипольные моменты кулоновского взаимодействия Ферми. Вводя ультрафиолетовую обрезку Λ , получаем выражение для критической температуры, при которой исчезает нетривиальное решение уравнения (4.51)

$$T_0 = \frac{2\Lambda e^{\gamma_e}}{\pi} e^{-1/\lambda}, \quad (4.52)$$

где $\gamma_e = 0.57$ — постоянная Эйлера; $\lambda = \nu_{\text{F}} U'_0$ — безразмерная константа кулоновского взаимодействия между электронами и дырками, выражение для которой также может быть представлено в виде:

$$\lambda = \nu_{\text{F}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1 + \cos \phi}{2} U(2p_{\text{F}} \sin \frac{\phi}{2}), \quad (4.53)$$

где ν_{F} — плотность состояний на уровне Ферми электронов и дырок.

4.5. Потенциал взаимодействия между электронами и дырками

В этом приложении вычислен экранированный потенциал взаимодействия между пространственно разделенными электронами и дырками. Рассматриваемая система состоит из двух непроводящих полупространств с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_3 . Их разделяет диэлектрическая пленка с ϵ_2 , на противоположных поверхностях ($(\mathbf{r}, \frac{d}{2})$ и $(\mathbf{r}, -\frac{d}{2})$) которой находится электронный газ.

Для нахождения потенциала взаимодействия между зарядами можно поместить точечный заряд на поверхность диэлектрической пленки (для определенности, в точку $(0, \frac{d}{2})$) и вычислить распределение потенциала электрического поля, которое он создает. Уравнение Максвелла для распределения электрического поля имеют вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}, z) = 4\pi\sigma_t\delta(z - \frac{d}{2}) + 4\pi\sigma_b\delta(z + \frac{d}{2}), \quad (4.54)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (4.55)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, z)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, z)$ — напряженность и индукция электрического поля; σ_t и σ_b — плотности зарядов на противоположных поверхностях диэлектрической пленки. Потенциал электрического поля в толще диэлектриков связан с электрическим полем следующим образом

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z) = -\operatorname{grad}\phi(\mathbf{r}, z), \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, z) = -\epsilon \times \operatorname{grad}\phi(\mathbf{r}, z). \quad (4.56)$$

Потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа в объеме каждого диэлектрика

$$\Delta\phi(\mathbf{r}, z) = 0 \quad (4.57)$$

и граничным условиям на их поверхности, вытекающим непосредственно из (4.54) и (4.55):

$$\begin{aligned} \epsilon_2 \frac{\phi_2(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{d}{2}} - \epsilon_1 \frac{\phi_1(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{d}{2}} &= 4\pi\sigma_t(\mathbf{r}), & \phi_2(\mathbf{r}, \frac{d}{2}) &= \phi_1(\mathbf{r}, \frac{d}{2}), \\ \epsilon_3 \frac{\phi_3(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{d}{2}} - \epsilon_2 \frac{\phi_2(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{d}{2}} &= 4\pi\sigma_b(\mathbf{r}), & \phi_3(\mathbf{r}, -\frac{d}{2}) &= \phi_2(\mathbf{r}, -\frac{d}{2}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Здесь $\phi_1(\mathbf{r}, z)$, $\phi_2(\mathbf{r}, z)$ и $\phi_3(\mathbf{r}, z)$ — потенциалы в средах с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 . В теории среднего поля плотность заряда и электрический потенциал на каждой поверхности диэлектрической пленки определяются самосо-

гласованно, то есть

$$\begin{aligned}\sigma_t(\mathbf{r}) &= q_0\delta(\mathbf{r}) + e^2 \int d\mathbf{r}' \Pi_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{r}', \frac{d}{2}), \\ \sigma_b(\mathbf{r}) &= e^2 \int d\mathbf{r}' \Pi_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_3(\mathbf{r}', -\frac{d}{2}),\end{aligned}\tag{4.59}$$

где $\Pi_t(\mathbf{r})$ и $\Pi_b(\mathbf{r})$ — поляризационные операторы электронов и дырок. Решая систему уравнений (4.57), (4.58) и (4.59), получаем Фурье-образы потенциала на противоположных поверхностях пленки $\phi_1(\mathbf{q}, \frac{d}{2})$ и $\phi_3(\mathbf{q}, -\frac{d}{2})$:

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{q}, \frac{d}{2}) &= \frac{2\pi q_0}{q} \frac{1}{D} \left(\frac{1}{2}(\epsilon_3 + \epsilon_2 \coth qd) - \frac{2\pi e^2}{q} \Pi_b \right), \\ \phi_2(\mathbf{q}, -\frac{d}{2}) &= \frac{2\pi q_0}{q} \frac{1}{D} \frac{\epsilon_2}{2 \sinh qd},\end{aligned}\tag{4.60}$$

где величина D определяется следующим образом:

$$D = \left(\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 \coth qd) - \frac{2\pi e^2}{q} \Pi_t \right) \left(\frac{1}{2}(\epsilon_3 + \epsilon_2 \coth qd) - \frac{2\pi e^2}{q} \Pi_b \right) - \left(\frac{\epsilon_2}{2 \sinh qd} \right)^2.\tag{4.61}$$

Взаимодействие между электронами с противоположных поверхностей диэлектрической пленки имеет вид:

$$U(q) = \frac{2\pi e^2}{q} \frac{\epsilon_2}{2 \sinh qd} \frac{1}{D}.\tag{4.62}$$

В пределе $qd \ll 1$ потенциал взаимодействия сводится к

$$U(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_{13} q} \left(1 - \frac{2\pi e^2}{\epsilon_{13} q} (\Pi_t + \Pi_b) \right)^{-1},\tag{4.63}$$

где $\epsilon_{13} = (\epsilon_1 + \epsilon_3)/2$. Следует отметить, что при $qd \ll 1$ потенциал не зависит от диэлектрической проницаемости пленки из топологического изолятора ϵ_2 , а зависит от полусуммы диэлектрических проницаемостей сред, которые его окружают. Если расстояние между электронами с противоположных поверхностей пленки значительно превышает ее толщину, то подавляющее большинство силовых линий, соединяющих электроны, проходит через диэлектрические среды, окружающие пленку. Поэтому эффективная диэлектрическая проницаемость системы равна полусумме диэлектрических проницаемостей окружающих сред.

Для дираковского электронного газа поляризационный оператор $\Pi(\mathbf{q})$ в статическом пределе приближения хаотических фаз не зависит от импульса и равен $\Pi(\mathbf{q}) = -g\nu_F$, где ν_F — плотность состояний на уровне Ферми и g — фактор вырождения дираковских электронов. Если на противоположных поверхностях пленки находятся электроны и дырки, концентрации которых совпадают между собой, то величина $\nu_F U(\mathbf{q})$, определяющая безразмерную константу связи (3.5), имеет вид:

$$\nu_F U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2g} \frac{q_0}{q + q_0}.\tag{4.64}$$

Здесь $q_0 = 2g\alpha_c p_F$ — импульс экранировки потенциала взаимодействия; $\alpha_c = e^2/\hbar v_F \epsilon_{13}$ — безразмерный параметр, определяющий силу кулоновского взаимодействия между электронами и дырками.

4.6. Куперовский пропагатор

В этом приложении вычислен куперовский пропагатор дираковских электронов и дырок. Пропагатор для куперовской пары $\Gamma^R(\Omega, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ с нулевым импульсом и энергией Ω может быть получен при помощи аналитического продолжения из мацубаровского куперовского пропагатора $\Gamma(i\Omega_n, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$, который удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \Gamma(i\Omega_n, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = & U(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cos^2\left(\frac{\phi_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1}}{2}\right) - \\ & - T \sum_{\omega_n \mathbf{p}'} U(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}') \cos^2\left(\frac{\phi_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'}}{2}\right) G_e(i\omega_n + i\Omega_n, \mathbf{p}') G_h(i\omega_n, \mathbf{p}') \Gamma(i\Omega_n, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Производя мультипольное разложение куперовского пропагатора и Фурье-образа потенциала взаимодействия, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_m(i\Omega_n, p_2, p_1) = & U'_m(p_2, p_1) - \\ & - T \sum_{\omega_n \mathbf{p}'} U'_m(p_2, k') G_e(i\omega_n + \Omega_n, k') G_h(i\omega_n, k') \Gamma_m(i\Omega_n, k', p_1). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Здесь $U'_m(p_2, p_1) = 1/2(U_m(p_2, p_1) + 1/2(U_{m-1}(p_2, p_1) + U_{m+1}(p_2, p_1)))$, и смешивание мультипольных моментов произошло благодаря угловым факторам, которые являются особенностью безмассовых дираковских частиц. Мультипольный момент $U_m(p_2, p_1)$ кулоновского потенциала является медленной функцией обоих импульсов с характерным масштабом p_F , а произведение функций Грина электрона и дырки имеет резкий максимум на уровне Ферми. Поэтому можно пренебречь зависимостью мультипольных моментов куперовского пропагатора от обоих импульсов и определить их на уровне Ферми. В этом приближении интегральное уравнение сводится к алгебраическому, и, выполняя аналитическое продолжение, получаем

$$\Gamma_m^R(\Omega) = \frac{U'_m}{1 - U'_m \Pi_c^R(\Omega)}, \quad (4.67)$$

где величине $\Pi_c^R(\Omega)$ соответствует петлевая диаграмма на Рис.3.10, и она может быть получена при помощи аналитического продолжения из выражения

$$\Pi_c(i\Omega_n) = -T \sum_{\omega_n, \mathbf{p}} G_e(i\omega_n + \Omega_n, \mathbf{p}) G_h(i\omega_n, \mathbf{p}). \quad (4.68)$$

Производя интегрирование по импульсам и суммирование по мацубаровским частотам в (4.68), получаем

$$\Pi_c^R(\Omega) = \nu_F \left(\Psi\left(1 + \frac{\Lambda}{2\pi T} - i\frac{\Omega}{4\pi T} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{\Omega}{4\pi T} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) \right). \quad (4.69)$$

Здесь $\Psi(x)$ — логарифмическая производная от гамма-функции; T — температура системы; γ — декремент затухания куперовских пар, который равен полусумме декрементов затухания электрона и дырки; Λ — ультрафиолетовая энергия обрезания. При температуре $T_m = \frac{2e\gamma_e}{\pi}\Lambda e^{-1/\nu_F U'_m}$ мультипольные моменты $\Gamma_m^R(0)$ обращаются в бесконечность, что свидетельствует о неустойчивости системы относительно электрон-дырочного спаривания. Здесь $\gamma_e = 0.57$ — постоянная Эйлера. Для кулоновского взаимодействия $U'_0 > U'_1 > U'_2 > \dots$, поэтому куперовская нестабильность возникает в s -канале и приводит к s -волновому спариванию. Выразив энергию обрезания Λ через критическую температуру T_0 , представим величину $\Pi_c^R(\Omega)$ в более удобной форме, которая обычно используется в теории флуктуаций в сверхпроводниках [120],

$$\Pi_c^R(\Omega) = \frac{1}{U'_0} - \nu_F \left(\ln \frac{T}{T_0} + \Psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{\Omega}{4\pi T} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \right). \quad (4.70)$$

В окрестности температуры перехода расходится только мультипольный момент в s -канале Γ_c^0 . Поэтому при рассмотрении флуктуационных эффектов в окрестности критической температуры вкладом остальных мультипольных моментов можно пренебречь. Окончательное выражение для куперовского пропагатора электрон-дырочной пары имеет вид:

$$\Gamma(i\Omega_n) = \frac{U'_0}{1 - U'_0 \Pi_c(i\Omega_n)} = \frac{1}{\nu_F} \frac{1}{\ln \frac{T}{T_0} + \Psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{\Omega}{4\pi T} + \frac{\gamma}{2\pi T}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right)}. \quad (4.71)$$

4.7. Эффект увлечения и туннелирование в системе из двух листов графена

В этом приложении рассматривается эффект увлечения электронов в системе из двух листов графена, разделенных диэлектриком. Увлечение электронов, обусловленное кулоновским взаимодействием между ними, рассмотрено в работах [133–135]. Результаты экспериментов [136] согласуются с [133, 134], что указывает на то, что кулоновское взаимодействие является основным механизмом увлечения в этой системе.

Существует еще один механизм увлечения, связанный с туннелированием электронов между листами графена. Если при туннелировании импульс электрона сохраняется, то при смещении функции распределения в одном слое туннелирование приведет к смещению функции распределения в другом слое. Таким образом, электрический ток в одном слое приводит к возбуждению электрического тока в другом слое. Этот механизм увлечения исследован ниже. Несмотря на то, что этот механизм увлечения слабее механизма, связанного с кулоновским взаимодействием, он крайне чувствителен к несовпадению линий Ферми квазичастиц из разных слоев и магнитному полю, параллельному листам графена. Поэтому вклад этого механизма увлечения в транссопротивление может быть выделен в эксперименте.

В экспериментах по исследованию эффекта увлечения в двухслойных системах обычно измеряется транссопротивление системы. Если протекание электрического тока I в одном слое, благодаря взаимодействию между электронами из разных листов, приводит к возникновению разности потенциалов V в другом слое, то транссопротивление определяется как $\rho_d = VW/IL$, где L и W — длина и ширина двухслойной системы.

Транссопротивление вычисляется во втором порядке теории возмущений (в первом порядке теории возмущений оно равно нулю) либо по энергии кулоновского взаимодействия, либо по энергии межслойного туннелирования. В этом приближении различные механизмы увлечения независимы, и их можно исследовать отдельно друг от друга.

Из экспериментов, направленных на изучение туннелирования между листами графена, разделенных диэлектриком, следует, что импульс электрона при туннелировании не сохраняется. Импульс не сохраняется, если туннелирование происходит через примеси или структурные дефекты. Поэтому для его описания удобно

предполагать, что туннелирование между двумя листами графена происходит через хаотически расположенные туннельные мостики размер которых a_T .

Гамильтониан H_T , описывающий туннелирование электронов между двумя листами графена на отдельных мостиках, размер которых a_T значительно превышает период решетки графена a_o , может быть записан в виде:

$$H_T = \int d\mathbf{r} (\Psi_1^+(\mathbf{r}, w) T(\mathbf{r}) \hat{t}(w, w') \Psi_{-1}(\mathbf{r}, w') + h.c.).$$

Здесь $\Psi_\alpha^+(\mathbf{r}, w)$ — оператор рождения электрона в точке \mathbf{r} на подрешетке w в верхнем ($\alpha = 1$) или нижнем слое ($\alpha = -1$); $T(\mathbf{r})$ — энергетический профиль системы туннельных мостиков; \hat{t} — матрица, описывающая переходы между различными подрешетками соответствующих слоев, которая зависит от взаимной ориентации решеток графена. Профиль энергии системы туннельных мостиков представляет собой сумму энергий отдельных мостиков $T(\mathbf{r}) = \sum_i T_o(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, где профиль одного туннельного мостика удобно параметризовать как $T_o(r) = T_E e^{-r^2/2a_T^2}$.

Наиболее устойчивыми упаковками двухслойного графена являются берналовская и гексагональная упаковки [137], причем двухслойный графен с берналовской упаковкой имеет меньшую энергию. При гексагональной упаковке узлы решеток графена обоих листов находятся напротив друг друга. Поэтому в основном возможны туннельные переходы только между атомами, которые принадлежат к одной и той же подрешетке. В этом случае матрица \hat{t} имеет диагональный вид:

$$t_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При берналовской упаковке решетки графена смещены друг относительно друга, и туннелирование в основном происходит между различными подрешетками, причем только с одной подрешетки. То есть, если две подрешетки обозначить как A и B , то туннелирование происходит либо $A \leftrightarrow B'$ (B1), либо $B \leftrightarrow A'$ (B2) в зависимости от направления смещения решеток графена. В этом случае матрица \hat{t} имеет иную структуру:

$$t_{B1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t_{B2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Без учета взаимодействия электронов со случайными примесными атомами га-

мильтониан системы в однозонном приближении имеет вид:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} (v_{\mathbf{F}} p - E_{\mathbf{F}}^1) a_{\mathbf{p}1}^+ a_{\mathbf{p}1} + \sum_{\mathbf{p}} \lambda (v_{\mathbf{F}} p - E_{\mathbf{F}}^{-1}) a_{\mathbf{p},-1}^+ a_{\mathbf{p},-1} + \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} (T(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \langle f_{\mathbf{p}',1} | t | f_{\mathbf{p},\lambda} \rangle a_{\mathbf{p}',1}^+ a_{\mathbf{p},-1} + T^*(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \langle f_{\mathbf{p},\lambda} | t | f_{\mathbf{p}',1} \rangle a_{\mathbf{p},-1}^+ a_{\mathbf{p}',1}), \quad (4.72)$$

где $a_{\mathbf{p}\alpha}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом \mathbf{p} в верхнем ($\alpha = 1$) или нижнем ($\alpha = -1$) листе. Предполагается, что химический потенциал находится, либо в зоне проводимости ($\lambda_{\alpha} = 1$), либо в валентной зоне ($\lambda_{\alpha} = -1$) в соответствующем листе α . Ниже рассмотрен только случай сильного допирования, в котором $E_{\mathbf{F}}\tau \gg 1$, где $E_{\mathbf{F}}$ и τ — энергия Ферми и время жизни электронов на уровне Ферми. Взаимодействие электронов с примесными атомами удобно учесть феноменологически, добавив конечное время жизни τ в их одночастичные функции Грина электронов, которые приобретают вид:

$$G_{\alpha}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\omega_n - \lambda_{\alpha}(v_{\mathbf{F}} p - E_{\mathbf{F},\alpha}) + i1/2\tau_{\alpha} \text{sgn}\omega_n}, \quad (4.73)$$

где $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ — фермиевские мацубаровские частоты. Следует отметить, что представление функций Грина (4.73) соответствует борновскому приближению, в котором затухание электронов определено на их уровне Ферми.

Хотя непосредственно в эксперименте определяется транссопротивление двухслойной системы ρ_D , удобнее вычислять транспроводимость σ_D , которая является недиагональным элементом матрицы, обратной к матрице сопротивлений, и связана с транссопротивлением следующим образом:

$$\rho_D = \frac{\sigma_D}{\sigma_D^2 - \sigma_1 \sigma_{-1}} \simeq -\frac{\sigma_D}{\sigma_1 \sigma_{-1}}.$$

Здесь σ_1, σ_{-1} — проводимости слоев, которые в режиме сильного допирования равны:

$$\sigma_{\alpha} = g \frac{e^2}{h} \frac{E_{\mathbf{F},\alpha} \tau_{\alpha}^{\text{tr}}}{2\hbar}.$$

Здесь $\tau_{\alpha}^{\text{tr}}$ — транспортное время релаксации носителей заряда на примесях на уровне Ферми в соответствующем слое.

Для вычисления транспроводимости системы использовалась теория линейного отклика Кубо. Транспроводимость системы $\sigma_D^{\text{R}}(\omega)$ может быть выражена через корреляционную функцию ток-ток $\chi_D^{\text{R}}(\omega)$ следующим образом $\sigma_D^{\text{R}}(\omega) = i\chi_D^{\text{R}}(\omega)/\omega$. Функция реакции ток-ток может быть получена при помощи аналитического продолжения из мацубаровской функции реакции $\sigma_D^{\text{M}}(ip_n)$, которая определяется как:

$$\chi_D^{\text{M}}(ip_n) = -\frac{1}{2\beta} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{ip_n \tau} \langle T_M J_{x,1}(\tau) J_{x,-1}(0) \rangle, \quad (4.74)$$

где $p_n = 2n\pi T$ — бозевские мацубаровские частота; $\beta = 1/T$ — обратная температура системы; $J_{x,\alpha}$ — компонента оператора тока для электронов в соответствующем слое; T_M — операция упорядочения по мацубаровскому времени. Функция реакции ток-ток раскладывается в ряд теории возмущений по энергии межслойного туннелирования, причем ненулевой вклад в транспроводимость дает диаграмма второго порядка, изображенная на Рис.4.1. Усреднение этой диаграммы по положениям примесных центров приводит к перенормировке и токовой вершины, и одночастичных функций Грина. Следует отметить, что благодаря тому, что потенциалы примесей, действующие на электроны из двух слоев, нескоррелированы, туннельные вершины не перенормируются. Диаграмме на Рис. 2 соответствует аналитическое выражение:

$$\begin{aligned} \chi_D^M(ip_n) = & -T \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \Gamma_{x,1}(ip_n + i\omega_n, i\omega_n, \mathbf{p}) G_1(ip_n + i\omega_n, \mathbf{p}) G_1(i\omega_n, \mathbf{p}) \times \\ & \times |T_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}', \lambda_{-1}} | t | f_{\mathbf{p}, \lambda_1} \rangle|^2 G_{-1}(ip_n + i\omega_n, \mathbf{p}') G_{-1}(i\omega_n, \mathbf{p}') \Gamma_{x,-1}(i\omega_n, ip_n + i\omega_n, \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Здесь $\Gamma_{x\alpha}(i\omega'_n, i\omega_n, \mathbf{p})$ — перенормированная токовая вершина. Производя суммирование по мацубаровским частотам и выделяя главные слагаемые в пределе $E_F\tau \gg 1$, получаем для транспроводимости системы

$$\begin{aligned} \sigma_D^R(\omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{n_F(\epsilon) - n_F(\epsilon + \omega)}{\omega} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \Gamma_{x,1}^{RA}(\epsilon + \omega, \epsilon, \mathbf{p}) G_1^R(\epsilon + \omega, \mathbf{p}) G_1^A(\epsilon, \mathbf{p}) \times \\ & \times |T_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}', \lambda_{-1}} | t | f_{\mathbf{p}, \lambda_1} \rangle|^2 G_{-1}^R(\epsilon + \omega, \mathbf{p}') G_{-1}^A(\epsilon, \mathbf{p}') \Gamma_{x,-1}^{AR}(\epsilon, \epsilon + \omega, \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (4.76)$$

Примем во внимание следующие факты:

1) Через один из листов графена пропускается постоянный электрический ток, поэтому $\sigma_D = \sigma_D^R(\omega \rightarrow 0)$.

2) Перенормированная токовая вершина имеет вид:

$$\Gamma_{x,\alpha}^{AR}(\epsilon, \epsilon, \mathbf{p}') = \lambda_\alpha e v_F \frac{\tau_\alpha^{\text{tr}}}{\tau_\alpha} \quad (4.77)$$

3) При $E_F\tau \gg 1$ свертка запаздывающей и опережающей функций Грина имеет вид

$$G_\alpha^R(\epsilon, \mathbf{p}) G_\alpha^A(\epsilon, \mathbf{p}) = 2\pi\tau_\alpha \delta(\epsilon - \xi_\alpha(p)) \quad (4.78)$$

4) Усреднение транспроводимости по положениям туннельных мостиков приводит к

$$\langle |\tilde{T}_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}|^2 \rangle = n_T |T_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}|^2, \quad (4.79)$$

где n_T — концентрация туннельных мостиков.

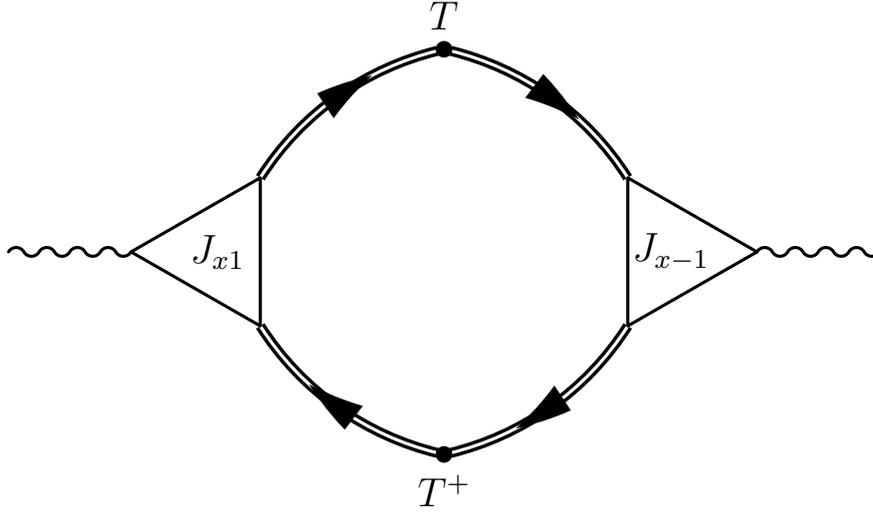


Рис. 4.1. Диаграмма для транспроводимости системы из двух листов графена. Жирные точки обозначают туннельные вершины, а треугольники — токовые вершины.

Транспроводимость системы из двух листов графена имеет вид:

$$\sigma_D = -g\lambda_1\lambda_{-1} \frac{e^2}{h} \frac{E_{F1}\tau_1^{\text{tr}}\tau_{-1}^{\text{tr}}}{2\tau_{T1}^{\text{tr}}} = -g\lambda_1\lambda_{-1} \frac{e^2}{h} \frac{E_{F-1}\tau_1^{\text{tr}}\tau_{-1}^{\text{tr}}}{2\tau_{T,-1}^{\text{tr}}}, \quad (4.80)$$

где время $\tau_{T\alpha}^{\text{tr}}$ определено как

$$\frac{1}{\tau_{T\alpha}^{\text{tr}}} = 2\pi n_T \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} \cos \phi_{\mathbf{p}',\mathbf{p}} |\langle f_{\mathbf{p}',\lambda_{\bar{\alpha}}} | t | f_{\mathbf{p},\lambda_{\alpha}} \rangle|^2 |T_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\xi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}') - \xi_{\alpha}(\mathbf{p}))|_{p=p_{F\alpha}}. \quad (4.81)$$

Окончательно для транссопротивления системы получаем

$$\rho_D = -\lambda_1\lambda_{-1} \frac{1}{g} \frac{2\hbar}{e^2 E_{F,1}} \frac{1}{\tau_{T,-1}^{\text{tr}}} = -\lambda_1\lambda_{-1} \frac{1}{g} \frac{2\hbar}{e^2 E_{F,-1}} \frac{1}{\tau_{T,1}^{\text{tr}}}.$$

Следует отметить, что величина, обратная к транссопротивлению, имеет вид формулы Друде и определяется временем $\tau_{T\sigma}^{\text{tr}}$. Величина времени $\tau_{T\sigma}^{\text{tr}}$ не совпадает с временем жизни электронов на уровне Ферми в соответствующем слое, которое в борновском приближении определяется как

$$\frac{1}{\tau_{T\alpha}} = 2\pi n_T \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} |\langle f_{\mathbf{p}',\lambda_{\bar{\alpha}}} | t | f_{\mathbf{p},\lambda_{\alpha}} \rangle|^2 |T_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\xi_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}') - \xi_{\alpha}(\mathbf{p}))|_{p=p_{F\alpha}}. \quad (4.82)$$

Аналогичная ситуация возникает с проводимостью электронного газа, которая определяется транспортным временем релаксации, нежели временем свободного пробега электронов. Поэтому величину τ_T^{tr} можно назвать "транспортным" временем туннелирования.

Время свободного пробега и транспортное время релаксации могут значительно отличаться друг от друга, например, при рассеянии электронов на дальнедействующих примесях или других дефектах. Потому интерес представляет как изменяется соотношение между временем жизни электронов и транспортным временем туннелирования с изменением размера туннельных мостиков при разных взаимных ориентациях листов графена. Угловые факторы, стоящие под знаком интегралов и зависящие от взаимной ориентации листов графена представлены в таблице 4.1. Следует отметить, что при берналовской ориентации угловой факторы для электрон-электронной и электрон-дырочной системы совпадают. Отношение $\tau_T/\tau_T^{\text{tr}}$ определяется одним безразмерным параметром $k_F a_T$, и соответствующие зависимости приведены на Рис.4.2.

Тип носителей \ ориентация	гексагональная	берналовская
электроны и электроны	$(1 + \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'}))/2$	1/4
электроны и дырки	$(1 - \cos(\phi_{\mathbf{p}} - \phi_{\mathbf{p}'}))/2$	1/4

При пределе протяженного контакта $k_F a_T \gg 1$ туннелирование происходит с сохранением импульса. Поэтому в подинтегральной функции в $\cos \phi_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \approx 1$ и $\tau_T/\tau_T^{\text{tr}} \approx 1$ для всех рассматриваемых взаимных ориентаций листов графена. В пределе точечного контакта распределение вероятности туннелирования определяется угловым фактором и зависит от взаимной ориентации листов графена туннелирование. Для берналовской ориентации листов графена амплитуда туннелирования в пределе точечного контакта во все возможные состояния одинакова, поэтому при туннелировании электронов из листа графена, в котором течет электрический ток, передачи импульса не происходит. При гексагональной взаимной ориентации листов распределение вероятности туннелирования является сильно анизотропным. Для электрон-электронной системы подавлено туннелирование назад, а для электрон-электронной системы туннелирование вперед. Поэтому в обоих случаях передача импульса в пределе точечного контакта имеет конечное значение. В электрон-дырочном системе смена знака τ_T^{tr} соответствует смене полярности напряжения в листе графена, в котором электроны увлекаются.

Приложение постоянного магнитного поля \mathbf{H} , параллельного листам графена, изменяет фазу туннельного элемента в соответствии с зависимостью $T(\mathbf{r}) \rightarrow T(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}_m \mathbf{r}}$, где $\mathbf{q}_m = (-\frac{ed}{\hbar c} H_y, \frac{ed}{\hbar c} H_x)$. Поэтому изменяется амплитуда туннелирования между двумя состояниями \mathbf{p} и \mathbf{p}' : $|T_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}|^2 \rightarrow |T_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{q}_m}|^2$ При туннелировании сохраняются импульс (с точностью до a_T^{-1}) и энергия квазичастицы. Приложение магнитного поля,

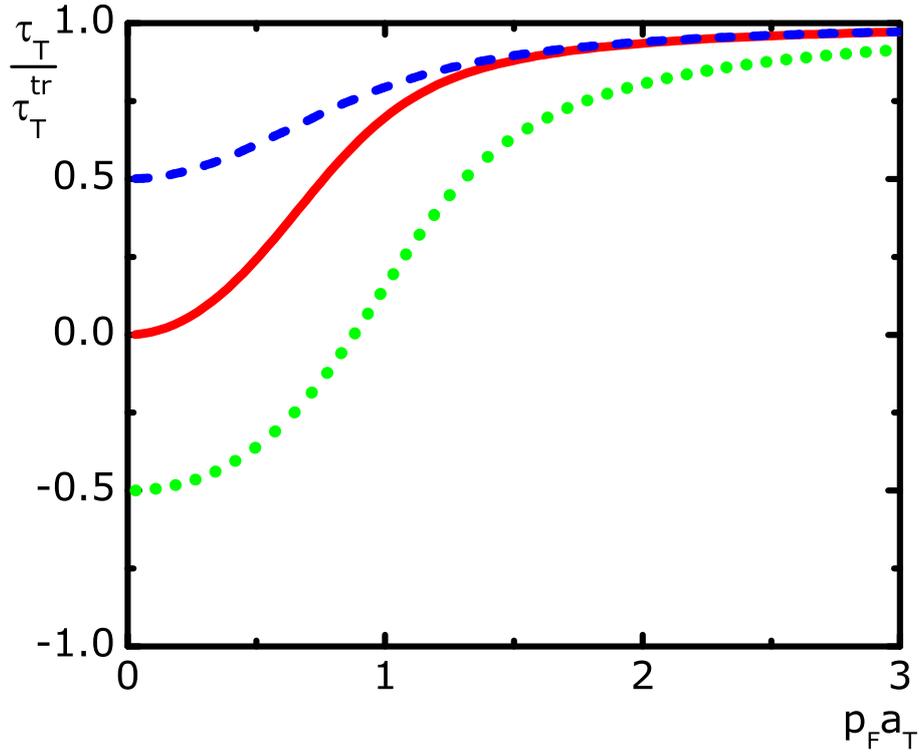


Рис. 4.2. Зависимость отношения τ_T/τ_T^{tr} от размера туннельного мостика для системы из двух листов графена с берналовской ориентации (сплошная линия), для электрон-электронной системы с гексагональной ориентацией (штриховая линия) и электрон-дырочной системы с гексагональной ориентацией (пунктирная линия)

для которого магнитный импульс $q_m a_T \gg 1$, приводит к значительному сокращению площади фазового пространства, доступного для туннелирования. Для туннельного мостика размером $a_T = 100$ нм и расстояния между листами графена $d = 2$ нм величина критического магнитного поля, параллельного листам графена, которое подавляет туннелирование, равна $H_c \simeq 3$ Т.

Поворот решетки одного листа графена относительно решетки другого на угол α сопровождается поворотом первой зоны Бриллюэна одного листа графена в импульсном пространстве относительно первой зоны Бриллюэна второго листа на такой же угол. Положения дираковских точек листов графена перестают совпадать, и для туннелирования электронов между листами требуется импульс $\delta k = K\alpha$, где $K = 4\pi/3\sqrt{3}a_o$ — расстояние от центра зоны Бриллюэна до дираковской точки и a_o — расстояние между соседними атомами в графене. При $\delta k a_T \gg 1$ туннелирование и увлечение за счет туннелирования будут подавленными. Для туннельных мостиков размером $a_T = 100$ нм критическое значение угла поворота равно $\alpha_c \simeq 0.5 \cdot 10^{-3}$.

При несовпадении линий Ферми электронов из разных слоев для туннелирования между слоями графена требуется импульс, равный расстоянию между линиями Ферми δk_F . При туннелировании сохраняется импульс с точностью до a_T^{-1} , поэтому при $\Delta k a_T \gg 1$ туннелирование и увлечение за счет туннелирования будут подавленными. Для туннельных мостиков размером $a_T = 100$ нм туннелирование будет подавленным, если разность между энергиями Ферми превышает критическое значение $\delta E_F \simeq 6 \times 10^{-2}$ эВ.

При $T_E \simeq 6 \times 10^{-3}$ эВ, $d \simeq 2$ нм, $a_T \simeq 100$ нм, и $n_T a_T \simeq 10^{-2}$ транссопротивление, обусловленное межслойным туннелированием, равно $\rho \simeq 0.7$ Ом. При этих же параметрах транссопротивление, обусловленное кулоновским взаимодействием при $T = 250$ К, изменяется в пределах $\rho \sim 10 - 100$ Ом с изменением концентрации носителей заряда в обоих слоях [136].

В эксперименте увлечение электронов из одного слоя электрическим током в другом слое происходит за счет туннелирования и кулоновского взаимодействия одновременно. В отличие от увлечения за счет кулоновского взаимодействия величина транссопротивления, связанного с межслойным туннелированием, крайне чувствительна к несовпадению линий Ферми квазичастиц и к магнитному полю, параллельному листам графена. Это позволяет эксперименте непосредственно выделить вклад в транссопротивление, связанный с туннелированием.

Результаты, представленные в этом приложении оубоикованы в статье [7a].

Литература

- [1] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. The electronic properties of graphene // *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109-162 (2009).
- [2] M.Z. Hasan, C.L. Kane. Topological Insulators // *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045-3067 (2010).
- [3] X.L. Qi, S.C Zhang. Topological insulators and superconductors // *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057-1112 (2011).
- [4] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, A.A. Firsov. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films // *Science* **306**, 666-670 (2004).
- [5] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jing, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene // *Nature* **438**, 197-201 (2005).
- [6] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H.L. Stormer, Philip Kim. Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene // *Nature*, **438**, 201-204 (2005).
- [7] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim. Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene // *Nature Phys.* **2**, 620-625 (2006).
- [8] E. McCann, K. Kechedzhi, V. I. Fal'ko, H. Suzuura, T. Ando, and B.L. Altshuler. Weak localisation magnetoresistance and valley symmetry in graphene // *Phys. Rev. Lett.* **97**, 146805 (4pp) (2006).
- [9] S. Das Sarma, E.H. Hwang, W.-K. Tse. Is Graphene a Fermi Liquid? // *Phys. Rev. B* **75**, 121406 (2007).
- [10] H. P. Dahal, Y.N. Joglekar, K. S. Bedell, and A. V. Balatsky. Absence of Wigner Crystallization in Graphene // *Phys. Rev. B* **74**, 233405 (2006).

- [11] D. V. Khveshchenko. Ghost excitonic insulator transition in layered graphite // Phys. Rev. Lett. **87**, 246802 (4pp) (2001).
- [12] B. Uchoa, A.H. Castro Neto. Superconducting states of pure and doped graphene // Phys. Rev. Lett. 98, No. 14, 146801(4pp) (2007).
- [13] Yu. E. Lozovik, A. A. Sokolik. Phonon-mediated electron pairing in graphene // Physics Letters A. **374**, 2785-2791 (2010).
- [14] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Electron-hole pair condensation in graphene bilayer // Письма в ЖЭТФ, **87**(1), с. 61-65 (2008).
- [15] Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон. О возможности сверхтекучести разделенных в пространстве электронов и дырок при их спаривании; новый механизм сверхпроводимости // Письма в ЖЭТФ, **22**, 556-558 (1975).
- [16] D.C. Elias, R.V. Gorbachev, A.S. Mayorov, S.V. Morozov, A.A. Zhukov, P. Blake, L.A. Ponomarenko, I.V. Grigorieva, K.S. Novoselov, F. Guinea, A. K. Geim. Dirac cones reshaped by interaction effects in suspended graphene // Nature Phys. **7**, 701-704 (2011).
- [17] F. Bonaccorso, Z.Sun, T. Hasan, A.C. Ferrari. Graphene Photonics and Optoelectronics // Nat. Photonics, **4**, 611-627 (2010).
- [18] F.H.L. Koppens, D.E. Chang, and F. J. Garcia de Abajo. Graphene Plasmonics: A Platform for Strong Light with Matter Interactions // Nano Lett., 11, 3370–3377 (2011).
- [19] K.Nomura, M. Koshino, S. Ryu. Topological delocalization of two-dimensional massless Dirac fermions // Phys. Rev. Lett., **99**, 146806 (4pp) (2007).
- [20] J. C. Y. Teo, L. Fu, and C. L. Kane. Surface states and topological invariants in three-dimensional topological insulators: Application to $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ // Phys. Rev. B **78**, 045426 (15pp) (2008).
- [21] H.-J. Zhang, C.-X. Liu, X.-L. Qi, X.-Y. Deng, X. Dai, S.-C. Zhang. and Zhong Fang. Electronic Structures and Surface States of Topological Insulator $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$. // Phys. Rev. B, **80**, 085307 (9pp) (2009).
- [22] D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y.S. Hor, R.J. Cava, M.Z. Hasan. A topological Dirac insulator in quantum spin Hall phase. // Nature, **452**, 970-974 (2008).

- [23] D. Hsieh, Y. Xia, L. Wray, D. Qian, A. Pal, J. H. Dil, F. Meier, J. Osterwalder, G. Bihlmayer, C. L. Kane, Y. S. Hor, R. J. Cava, M. Z. Hasan. Observation of topologically protected Dirac spin-textures and π Berry's phase in pure Antimony (Sb) and topological insulator BiSb. // *Science*, **323**, 919-923 (2009).
- [24] Y.L. Chen, J.G. Analytis, J.H. Chu, Z.K. Liu, S.K. Mo, X. L. Qi, H.J. Zhang, D.H. Lu, X. Dai, Z. Fang, S.C. Zhang, I.R. Fisher, Z. Hussain, Z.X. Shen. Experimental Realization of a Three-Dimensional Topological Insulator, Bi₂Te₃. // *Science* **325**, 178-182 (2009).
- [25] D. Hsieh, Y. Xia, D. Qian, L. Wray, J. H. Dil, F. Meier, J. Osterwalder, L. Patthey, J. G. Checkelsky, N. P. Ong, A. V. Fedorov, H. Lin, A. Bansil, D. Grauer, Y. S. Hor, R. J. Cava, M. Z. Hasan. First observation of Spin-Momentum Helical Locking in Bi₂Se₃ and Bi₂Te₃, demonstration of Topological-Order at 300K and a realization of topological-transport-regime // *Nature* **460**, 1101-1105 (2009).
- [26] Xia Y., L. Wray, D. Qian, D. Hsieh, A. Pal, H. Lin, A. Bansil, D. Grauer, Y. Hor, R. Cava, and M. Hasan. Observation of a large-gap topological-insulator class with a single Dirac cone on the surface // *Nature Phys.*, **5**, 398-402 (2009).
- [27] J.G. Analytis, R.D. McDonald, S.C. Riggs, J.H. Chu, G.S. Boebinger, I.R. Fisher. Two-dimensional surface state in the quantum limit of a topological insulator // *Nat. Phys.* **6**, 960-964 (2010).
- [28] H. Tang, D. Liang, R.L.J. Qiu, X.P.A Gao. Magneto-transport Effects in Topological Insulator Bi₂Se₃ Nanoribbons // *ACS Nano*, **5**, 7510-7516 (2011).
- [29] J. G. Checkelsky, Y. S. Hor, R. J. Cava and N. P. Ong. Bulk band gap and surface state conduction observed in voltage-tuned crystals of the topological insulator Bi₂Se₃ // *Phys. Rev. Lett.* **106**, 196801 (6pp) (2011).
- [30] J. Chen, H. J. Qin, F. Yang, J. Liu, T. Guan, F. M. Qu, G. H. Zhang, J. R. Shi, X. C. Xie, C. L. Yang, K. H. Wu, Y. Q. Li, and L. Lu. Gate-Voltage Control of Chemical Potential and Weak Anti-localization in Bi₂Se₃ // *Phys. Rev. Lett.* **105**, 176602 (5pp) (2010).
- [31] N. Bansal, Y.S. Kim, M. Brahlek, E. Edrey, and S. Oh. Thickness-independent transport channels in topological insulator Bi₂Se₃ thin films // *Phys. Rev. Lett.* **109**, 116804 (5pp) (2012).

- [32] A. A. Taskin, S. Sasaki, K. Segawa, and Y. Ando. Manifestation of Topological Protection in Transport Properties of Epitaxial Bi₂Se₃ Thin Films // Phys. Rev. Lett. **109**, 066803 (5pp) (2012).
- [33] S.-Y. Xu, L.A. Wray, Y. Xia, R. Shankar, S. Jia, A. Fedorov, J.H. Dil, F. Meier, B. Slomski, J. Osterwalder, R.J. Cava, and M.Z. Hasan. Observation of Topological Order in the TlBiSe₂ class : Probing the "spin" and "phase" on topological insulator surfaces // Science **932**, 560-564 (2011).
- [34] Su-Yang Xu, L. A. Wray, Y. Xia, R. Shankar, A. Petersen, A. Fedorov, H. Lin, A. Bansil, Y. S. Hor, D. Grauer, R. J. Cava, and M. Z. Hasan. Discovery of several large families of Topological Insulator classes with backscattering-suppressed spin-polarized single-Dirac-cone on the surface // xxx.ArXiv.org/abs/1107.5111v1.
- [35] D. Culcer, E.H. Hwang, T.D. Stanescu, S. Das Sarma. Two-dimensional surface charge transport in topological insulators // Phys. Rev. B, **82**, 155457 (17 pp) (2010).
- [36] A.A. Burkov, D.G. Hawthorn DG. Spin and charge transport on the surface of a topological insulator // Phys. Rev. Lett. **105**, 66802 (4pp) (2010).
- [37] S. Raghu, S. B. Chung, X.-L. Qi and S.-C. Zhang. Collective modes of a helical liquid // Phys.Rev.Lett. **104**, 116401 (4pp) (2010).
- [38] I. Appelbaum, H.D. Drew, M. Fuhrer. Proposal for a Topological Plasmon Spin Rectifier. // Appl. Phys. Lett., **98**, 023103 (4pp) (2011).
- [39] Y.L. Chen, J.-H. Chu, J.G. Analytis, Z.K. Liu, K. Igarashi, H.-H. Kuo, X.L. Qi, S.K. Mo, R.G. Moore, D.H. Lu, M. Hashimoto, T. Sasagawa, S.C. Zhang, I.R. Fisher, Z.Hussain, Z.X. Shen. Massive Dirac Fermions on the surface of magnetically doped topological insulator Science // **329**, 659(2010).
- [40] L.A. Wray, S.-Y. Xu, Y. Xia, D. Hsieh, A.V. Fedorov, H. Lin, A. Bansil, Y. S. Hor, R.J. Cava, and M.Z. Hasan. How robust the topological properties of Bi₂Se₃ surface are: A topological insulator surface under strong Coulomb, magnetic and disorder perturbations // Nature Physics **7**, 32 (2011).
- [41] X.L. Qi, T.L. Hughes, S.C. Zhang. Topological field theory of time-reversal invariant insulators // Phys. Rev.B **78**, 195424 (2009).

- [42] A.M. Essin, J.E. Moore, D. Vanderbilt. Magnetolectric Polarizability and Axion Electrodynamicism in Crystalline Insulators // Phys. Rev. Lett. **102**, 146805 (2009).
- [43] F. Wilczek. Two applications of axion electrodynamicism // Phys. Rev. Lett. **58**, 1799-1802(1987).
- [44] J. Maciejko, X.L. Qi, H.D. Drew, S.C. Zhang. Topological quantization in units of the fine structure constant // Phys. Rev. Lett. **105**, 166803(4pp) (2010).
- [45] Y. Lan, S. Wan, S.C. Zhang. Generalized quantization condition in topological insulator // Phys. Rev. B **83**, 205109(9pp) (2011).
- [46] W.-K. Tse, A.H. MacDonald. Magneto-optical and magneto-electric effects of topological insulators in quantizing magnetic fields // Phys. Rev. B **82**, 161104(4pp) (2010).
- [47] W.-K. Tse, A.H. MacDonald. Giant Magneto-optical Kerr Effect and Universal Faraday Effect in Thin-film Topological Insulators // Phys. Rev. Lett. **105**, 057401(5pp) (2010).
- [48] X.-L. Qi, J. Zang, S.-C. Zhang. Seeing the magnetic monopole through the mirror of topological surface states // Science **323**, 1184-1188 (2009).
- [49] J. Zang, and N. Nagaosa. Monopole current and unconventional Hall response on a topological insulator // Phys. Rev. B, **81**, 245125 (5pp) (2011).
- [50] I. Garate, M. Franz. Excitons and Optical Absorption on the Surface of a Strong Topological Insulator with a Magnetic Energy Gap // Phys. Rev. B **84**, 054403 (12pp)(2011).
- [51] L.Fu, C.L. Kane, E.J. Mele. Topological insulators in three dimensions // Phys.Rev.Lett., **100**, 096407 (4 pp) (2009).
- [52] F.Wilczek. Majorana returns // Nature Phys., **5**, 614-618(2009).
- [53] A. Yu. Kitaev. Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Phys. Usp. **44**, 131-136 (2001).
- [54] J. Alicea. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // Rep. Prog. Phys. **75**, 076501 (36pp) (2012).

- [55] C.W.J. Beenakker. Search for Majorana fermions in superconductors // arXiv:1112.1950 (2012).
- [56] B. Seradjeh, J.E. Moore, M. Franz. Exciton condensation and charge fractionalization in a topological insulator fl. // Phys. Rev. Lett. **103**, 066402 (4pp) (2009).8.
- [57] B. Seradjeh. Majorana edge modes of topological exciton condensate with superconductors // Phys. Rev. B **86**, 121101(R) (4pp) (2012).
- [58] Yu. E. Lozovik, A. A. Sokolik. Ultrarelativistic electron-hole pairing in graphene bilayer // Eur. Phys. J. B **73**, 195-206 (2010).
- [59] В.Л. Березинский. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии // ЖЭТФ **61**, 1144 (1971).
- [60] J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // J. Phys. C: Solid State Phys. (6), 7, 1181 (1973).
- [61] S.M. Apenko, D.A. Kirzhnits, Y.E. Lozovik. On the validity of the $1/N$ -expansion // Phys. Lett. A **92**, 107-109 (1982).
- [62] I.B. Spielman, J. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, K.W. West. Resonantly enhanced tunneling in a double layer quantum Hall ferromagnet // Phys.Rev. Lett., **84**(25), 5808 (2000).
- [63] J.P. Eisenstein, Evidence for sponatanous interlayer phase coherence in a bilayer quantum Hall exciton condensate // Solid St. Comm. **127**, 123-130 (2003).
- [64] K. Sawada. Correlation energy of an electron gas at high energy // Phys.Rev., **106**, 372 - 383 (1957).
- [65] K. Sawada, K. A. Brueckner, and N. Fukuda, R. Brout. Correlation Energy of an Electron Gas at High Density: Plasma Oscillations // Phys. Rev. **108**, 507–514 (1957).
- [66] R.Brout. Correlation Energy of a High-Density Gas: Plasma Coordinates // Phys. Rev. **108**, 515–517 (1957)
- [67] I. Egri. Excitons and plasmons in metals, semiconductors and insulators: a unified approach // Physical reports 119, **6**, 363-402 (1985).

- [68] S. Wiedmann, H. J. van Elferen, E. V. Kurganova, M. I. Katsnelson, A. J. M. Giesbers, A. Veligura, B. J. van Wees, R. V. Gorbachev, K. S. Novoselov, J. C. Maan, and U. Zeitler. Coexistence of electron and hole transport in graphene // Phys. Rev. B **84**, 115314 (5pp) (2011).
- [69] H.Zhang, C.X. Liu, X.L. Qi, X. Dai, Z. Fang and S.C. Zhang. Topological insulators in Bi₂e₃, Bi₂Te₃ and Sb₂Te₃ with a single dirac cone on the surface // Nature Phys. **5**, 438-442 (2009).
- [70] B. Wunsch, T. Stauber, F. Sols, F. Guinea. Dynamical polarization of graphene at finite doping // New J. Phys. **8**, 318-333 (2006).
- [71] E.H. Hwang, S. Das Sarma. Dielectric function, screening, and plasmons in 2D graphene // Phys. Rev. B **75**, 205418 (2007).
- [72] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика. Том 3, Москва, Наука, 1976.
- [73] Л.И. Магарилл, А.В. Чаплик, М.В. Энтин. Спиновый отклик двумерных электронов на латеральное электрическое поле // ФТП, **35**(9), 1128-1135 (2001).
- [74] Yu. V. Bludov, M. I. Vasilevskiy, and N. M. R. Peres. Mechanism for graphene-based optoelectronic switches by tuning surface plasmon-polaritons in monolayer graphene // EPL **92**, 68001 (5pp) (2010).
- [75] E. H. Hwang, R. Sensarma, and S. Das Sarma. Plasmon-phonon coupling in graphene // Phys. Rev. B **82**, 195406 (2010).
- [76] Y. Liu, R. F. Willis. Plasmon-phonon Strongly-Coupled Mode in Epitaxial Graphene // Phys. Rev. B., **81**, 081406 (2010)
- [77] H. Ji, J. M. Allred, N. Ni, J. Tao, M. Neupane, A. Wray, S. Xu, M. Z. Hasan, R. J. Cava. Bulk Intergrowth of a Topological Insulator with a Room Temperature Ferromagnet // Phys. Rev. B, **85**, 165313 (5 pp) (2012).
- [78] C. Kallin and B.I. Halperin. Excitations from a Filled Landau Level in the Two-Dimensional Electron Gas // Phys. Rev. B **30**, 5655 (1984).
- [79] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. Экситон Мота в квазидвумерных полупроводниках в сильном магнитном поле // ЖЭТФ, **78**, 3, 1167-1175 (1980).

- [80] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. Двумерные электронно-дырочные системы в сильном магнитном поле как почти идеальный газ экситонов // *ЖЭТФ*, **80**, 4, 1488-1503 (1981).
- [81] C.H. Park and G. Louie. Tunable Excitons in Biased Bilayer Graphene // *Nano. Lett.* **10**, 426 (2010).
- [82] E. McCann. Asymmetry gap in the electronic band structure of bilayer graphene // *Phys. Rev. B.* **74**, 161403 (2006).
- [83] K.S. Novoselov, E. McCann, S.V. Morozov, V. I. Falko, M.I. Katsnelson, U. Zeitler, D. Jiang, F. Schedin, A. K. Geim. Unconventional quantum Hall effect and Berry's phase of 2π in bilayer graphene // *Nature Phys.*, **2**, 177(2006).
- [84] Y. Zhang, T.-T. Tang, C. Girit, Z. Hao, M. C. Martin, A. Zettl, M. F. Crommie, Y. R. Shen and F. Wang. Direct Observation of a Widely Tunable Bandgap in Bilayer Graphene // *Nature* 459, **820** (2009).
- [85] I. Crassee, J. Levallois, A.L. Walter, M. Ostler, A. Bostwick, E. Rotenberg, T. Seyller, D. van der Marel, A. B. Kuzmenko. Giant Faraday rotation in single- and multilayer graphene // *Nature Phys.* 7, **48** (2011)
- [86] G. Tkachov and E.M. Hankiewicz. Anomalous galvanomagnetism, cyclotron resonance and microwave spectroscopy of topological insulators // *Phys. Rev. B* **84**, 035405 (2011).
- [87] G. Giovannetti, P.A. Khomyakov, G. Brocks, P.J. Kelly, and J. van den Brink. Substrate-induced band gap in graphene on hexagonal boron nitride: Ab initio density functional calculations // *Phys. Rev. B* **76**, 071103 (2007).
- [88] S.Y. Zhou, G.-H. Gweon, A.V. Fedorov, P.N. First, W.A. de Heer, D.-H. Lee, F. Guinea, A.H. Castro Neto, A. Lanzara. Substrate-induced band gap opening in epitaxial graphene // *Nature Mater.* **6**, 770-775 (2007).
- [89] G.S. Jenkins, A.B. Sushkov, D.C. Schmadel, N.P. Butch, P. Syers, J. Paglione, H.D. Drew. Terahertz Kerr and Reflectivity Measurements on the Topological Insulator Bi₂Se₃ // *Phys. Rev. B* **82**, 125120 (2010).
- [90] A.A. Schafgans, A.A. Taskin, Y. Ando, X.-L. Qi, B.C. Chapler, K.W. Post, D.N. Basov - Landau level spectroscopy of surface states in the topological insulator Bi_{0.91}Sb_{0.09} via magneto-optics // *Phys. Rev. B* **85**, 195440 (2012).

- [91] J.N. Hancock, J. L. M. van Mechelen, A. B. Kuzmenko, D. van der Marel, C. Brune, E.G. Novik, G.V. Astakhov, H. Buhmann, L. W. Molenkamp. Surface state charge dynamics of a high-mobility three dimensional topological Insulator // *Phys. Rev. Lett.* **107**, 136803 (2011)
- [92] R. V. Aguila, A.V. Stier, W. Liu, L.S. Bilbro, D.K. George, N. Bansal, L. Wu, J. Cerne, A.G. Markelz, S. Oh, and N.P. Armitage. THz response and colossal Kerr rotation from the surface states of the topological insulator Bi₂Se₃ // *Phys. Rev. Lett.* **108**, 087403 (2012).
- [93] Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон. Новый механизм сверхпроводимости: спаривание между пространственно разделенными электронами и дырками // *ЖЭТФ*, **71**, 738 (1976).
- [94] Yu.E. Lozovik, A.V. Poushnov. Magnetism and Josephson effect in the coupled quantum well electron-hole system // *Phys. Lett. A* **228**, 399-407 (1997).
- [95] Л.В. Келдыш, Ю.В. Копаев. Возможная неустойчивость полуметаллического состояния относительно кулоновского взаимодействия // *Физ. твердого тела* **6**(9), 2791-2798 (1964).
- [96] D. Jerome, T.M. Rice, W. Kohn. Excitonic insulator // *Phys. Rev.* **158**, 2, pp. 462–475 (1967).
- [97] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. Межзонные переходы и возможность токовых состояний в системах с электрон-дырочным спариванием // *Письма в ЖЭТФ*, **25**(1), 18-21 (1977).
- [98] Yu.E. Lozovik, A.V. Poushnov. Magnetism and Josephson effect in the coupled quantum well electron-hole system // *Phys. Lett. A* **228**, 399-407 (1997).
- [99] G. Vignale, A.H. MacDonald. Drag in Paired Electron-Hole Layers // *Phys. Rev. Lett.*, **76** 2786 (4pp) (1996).
- [100] D. A. Pesin, A. H. MacDonald. Transport in Coherent Quantum Hall Bilayers // *Phys. Rev. B* **84**, 075308 (8pp) (2011).
- [101] J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald. Bose–Einstein condensation of excitons in bilayer electron systems // *Nature* **432**, 691-694 (2004).

- [102] R. D. Wiersma, J. G. S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H.-P. Tranitz, W. Wegscheider. Activated Transport in the Separate Layers that Form the $\nu=1$ Exciton Condensate // *Phys. Rev. Lett.* **93**, 266805 (4pp) (2004).
- [103] D. Nandi, A.D.K. Finck, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, K.W. West. Exciton Condensation and Perfect Coulomb Drag // *Nature* **488**, 481-485 (2012).
- [104] H. Min, R. Bistritzer, J.-J. Su, A.H. MacDonald. Room-Temperature Superfluidity in Graphene Bilayers // *Phys. Rev. B* **78**, 121401(R) (4pp) (2008).
- [105] M.Yu. Kharitonov, K.B. Efetov. Electron screening and excitonic condensation in double-layer graphene systems // *Phys. Rev. B* **78**, 241401 (4pp) (2008).
- [106] Yu. E. Lozovik, S. L. Ogarkov, A. A. Sokolik. Cooper pairing of electrons and holes in graphene bilayer: Correlation effects // *Phys. Rev. B* **86**, 045429 (6pp) (2012).
- [107] P. Fulde, R. A. Ferrell. Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field // *Phys. Rev.* **135**, A550-A563 (1964).
- [108] А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников. Неоднородное состояние сверхпроводников // *ЖЭТФ* **47**(3), 1136-1146 (1964).
- [109] Y. Matsuda, H. Shimahara. Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in heavy fermion superconductors // *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 051005 (2007).
- [110] G. Zhang, H. Qin, J. Teng, J. Guo, Q. Guo, X. Dai, Z. Fang, K. Wu. Quintuple-layer epitaxy of thin films of topological insulator Bi_2Se_3 // *Appl. Phys. Lett.* **95**, 053114 (3pp) (2009).
- [111] K.M.F. Shahil, M.Z. Hossain, D. Teweldebrhan, A.A. Balandin. Crystal symmetry breaking in few-quintuple Bi_2Te_3 films: Applications in nanometrology of topological insulators // *Appl. Phys. Lett.* **96**, 153103 (2010).
- [112] Y. Zhang, K. He, C.-Z. Chang, C.-L. Song, L.-L. Wang, X. Chen, J.-F. Jia, Z. Fang, X. Dai, W.-Y. Shan, S.-Q. Shen, Q. Niu, X.-L. Qi, S.-C. Zhang, X.-C. Ma, Q.-K. Xue. Crossover of the 3D topological insulator Bi_2Se_3 to the 2D limit // *Nature Phys.* **6**, 584 (2010).
- [113] K. Ebihara, K. Yada, A. Yamakage, Y. Tanaka. Finite Size Effects of the Surface States in a Lattice Model of Topological Insulator // *Physica E* **44**, 885 (2012).

- [114] A.Stern, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, N.Ma. Theory of interlayer tunneling in bilayer quantum Hall ferromagnets // Phys. Rev. Lett. **86**(9), 1829 (4pp) (2001).
- [115] Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald. Is there a dc Josephson Effect in Bilayer Quantum Hall Systems? // Phys.Rev.Lett. **87**, 196802 (4pp) (2001).
- [116] O.G.C. Ros, D.K.K. Lee, Effect of disorder and electron-phonon interaction on interlayer tunneling current in Quantum Hall bilayers // Phys. Rev.B **81**, 075115 (8pp)(2010).
- [117] M. Fogler and F. Wilczek. Josephson Effect Without Superconductivity: Realization in Quantum Hall Bilayers // Phys. Rev. Lett. **86**, 1833 (4pp) (2001).
- [118] A. I. Bezuglyj, S. I. Shevchenko. Order parameter phase locking as a cause of a zero bias peak in the differential tunneling conductance of bilayers with electron-hole pairing // Low Temp. Phys. **30**, 208-214 (2004).
- [119] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. Том 5, Москва, Наука, 1976.
- [120] А.А. Валамов, А.И. Ларкин. Теория флуктуаций в сверхпроводниках. Москва, Добросвет, 2007.
- [121] L. Britnell, R.V. Gorbachev, R. Jalil, B. D. Belle, F. Schedin, M. I. Katsnelson, L. Eaves, S.V. Morozov, A.S. Mayorov, N.M. R. Peres, A.H. Castro Neto, J. Leist, A.K. Geim, L.A. Ponomarenko, K.S. Novoselov. Atomically thin boron nitride: a tunnelling barrier for graphene devices // Nano Lett., **12** (3),1707-1710 (2012).
- [122] R. C. Ashoori, J. A. Lebens, N. P. Bigelow, and R. H. Silsbee. Equilibrium tunneling from the two-dimensional electron gas in GaAs: Evidence for a magnetic-field-induced energy gap // Phys. Rev. Lett. **64**, 681-684 (1990).
- [123] J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Coulomb barrier to tunneling between parallel two-dimensional electron systems // Rev. Lett. **69**, 3804-3807 (1992).
- [124] Song He and P. M. Platzman, B. I. Halperin. Tunneling into a Two-Dimensional Electron System in a Strong Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. **71**, 777 (4pp) (1993).

- [125] Peter Johansson and Jari M. Kinaret. Magnetophonon Shakeup in a Wigner Crystal: Applications to Tunneling Spectroscopy in the Quantum Hall Regime // *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1435 (4pp) (1993)
- [126] J. A. Seamons, C. P. Morath, J. L. Reno and M. P. Lilly. Coulomb Drag in the Exciton Regime in Electron-Hole Bilayers // *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026804 (4pp) (2009).
- [127] A.F. Croxall, K. Das Gupta, C.A. Nicoll, H.E. Beere, I. Farrer, D.A. Ritchie, and M. Pepper. Possible effect of collective modes in zero magnetic field transport in an electron-hole bilayer // *Phys. Rev. B* **80**, 125323 (5pp) (2009).
- [128] L. Zheng, A.H. MacDonald. Tunneling conductance between parallel two-dimensional electron systems // *Phys. Rev. B*, **47**(16), 10619 (6pp).
- [129] T. Jungwirth, A.H. MacDonald, Electron-electron interaction and two-dimensional—two-dimensional tunneling // *Phys. Rev. B*, **53**(11), 7403 (10pp) (1996).
- [130] L. Swierkowski, A.H. MacDonald. Transverse pseudospin susceptibility and tunneling parameters of double-layer electron-gas systems // *Phys. Rev. B*, **55**(24), 160117(4pp) (1997).
- [131] B. Y.-K. Hu. Prospecting for the Superfluid Transition in Electron-Hole Coupled Quantum Wells Using Coulomb Drag // *Phys. Rev. Lett.* **85**, 820 (4pp) (2000).
- [132] M. P. Mink, H. T. C. Stoof, R.A. Duine, Marco Polini, G. Vignale. Probing the topological exciton condensate via Coulomb drag // *Phys. Rev. Lett.* **108**, 186402 (2012).
- [133] W.-K. Tse, B.-Y.-K. Hu, S. Das Sarma. Theory of Coulomb drag in graphene // *Phys.Rev.B.* **76**, 081401 (4 pp) (2007).
- [134] B.N. Narozhny, M. Titov, I.V. Gornyi, and P.M. Ostrovsky. Coulomb drag in graphene: perturbation theory // *Phys.Rev.B* **85**, 195421 (22pp) (2012).
- [135] N.M.R. Peres, J.M.B. Lopes dos Santos and A. H. Castro Neto. Coulomb Drag and High Resistivity Behavior in Double Layer Graphene // *EPL*, **95**, 18001 (2011).
- [136] S. Kim, I. Jo, J. Nah, Z. Yao, S. K. Banerjee, and E. Tutuc. Coulomb Drag of Massless Fermions in Graphene // *Phys. Rev. B* **83**, 161401(R) (5pp) (2011).

- [137] B. Nanda, S. Satpathy. Strain and electric field modulation of the electronic structure of bilayer graphene // Phys. Rev. B **80**, 165430 (7pp)(2009).