

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ СПЕКТРОСКОПИИ РАН

На правах рукописи

ГЛАДУШ Юрий Геннадьевич

**Теория волн, генерируемых при обтекании
препятствий бозе-эйнштейновским
конденсатом, и их оптические аналоги**

01.04.02 - теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. А.М. Камчатнов

Троицк - 2009

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	2
1 Волны обтекания в бозе-эйнштейновском конденсате	19
1.1 Основные уравнения	19
1.2 Обзор литературы и постановка задачи	21
1.3 “Корабельные волны” в бозе-эйнштейновском конденсате .	26
1.4 Наклонные периодические нелинейные структуры	43
1.5 Заключение	51
2 Дифракция света на тонкой проволочке	53
2.1 Основные уравнения	53
2.2 Постановка задачи	57
2.3 Линейная дифракционная картина	62
2.4 Наклонные темные солитоны	67
2.5 Устойчивость наклонных темных солитонов	73
2.6 Заключение	80
3 Обтекание препятствия двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом	81
3.1 Основные уравнения и постановка задачи	81
3.2 Линейные волны	84
3.3 Темные солитоны	90
3.4 Заключение	99
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
Благодарности	102

Введение

Обтекание препятствий различными средами широко изучалось во многих областях физики. Если в среде существует внутренняя характерная скорость, то волновая картина, возникающая в данном случае, существенно зависит от того, выше или ниже скорость течения по отношению к этой характерной скорости. В газе таким параметром является скорость звука. Если скорость потока газа превышает скорость звука, то при обтекании тела возникает ударная волна. Электродинамическим аналогом этого явления может считаться излучение Вавилова-Черенкова. Когда заряженная частица движется сквозь диэлектрическую среду со скоростью, превышающей скорость света в данной среде, то под определенным углом к направлению движения частицы возникнет излучение. В теории квантовой жидкости процесс обтекания связан со свойством сверхтекучести. При превышении определенного значения скорости течения свойство сверхтекучести пропадает. Эксперименты последнего десятилетия по обтеканию бозе-эйнштейновским конденсатом (БЭК) препятствий инициировали ряд теоретических работ по данному вопросу. Однако, построение полной картины этого явления на сегодняшний день далеко от завершения. Настоящая работа посвящена определению структуры волн, возникающих в бозе-эйнштейновском конденсате при обтекании двумерным конденсатом препятствия, а также рассмотрению аналогов этого процесса в оптике.

После достижения бозе-эйнштейновской конденсации в парах щелочных металлов в 1995г. возникла новая область приложения физики нелинейных волн. История этой области физики восходит к Эйнштейну, который в 1924-25гг. опубликовал две статьи [1], где он обобщил работу Бозе о квантовой статистике фотонов на случай идеального газа атомов. В частности, во второй статье он предсказал новое явление — конденсацию атомов в наинишем квантовом состоянии. Роль данного процесса в явлениях природы долгое время оставалась под вопросом. Были попыт-

ки объяснения необычных свойств He-II (впервые получен Вольфке и Кеезом в 1928 году), в частности, сверхтекучести, открытой Капицей в 1938г. [2], как следствия бозе-конденсации атомов He [3]. Но были и противники такого подхода. Ландау в своей знаменитой статье [4] о теории сверхтекучести гелия-II пишет: “Не говоря уже о том, что жидкий гелий не имеет ничего общего с идеальным газом, атомы, находящиеся в основном состоянии отнюдь не вели бы себя как “сверхтекучие”. Напротив, ничего не могло бы помешать атомам, находящимся в нормальном состоянии, сталкиваться с возбужденными атомами, т.е. при движении через жидкость они испытывали бы трение”¹. Однако, Ландау показал, что элементарные возбуждения являются коллективным эффектом и не могут быть отождествлены с индивидуальными атомами. Этот подход использовал Боголюбов в своей работе 1947г. об элементарных возбуждениях в слабонеидеальном бозе-газе [5]. В его работе сделана попытка построить теорию сверхтекучести, исходя из “микроскопических” уравнений квантовой механики для бозе-частиц со слабым взаимодействием между частицами. Боголюбовым был найден энергетический спектр малых возбуждений для однородного слабонеидеального бозе-газа.

В 1961г. независимо друг от друга Гроссом [6] и Питаевским [7] было получено уравнение, описывающее динамику слабонеидеального неоднородного бозе-газа при нулевой температуре. В этом случае надконденсатной составляющей можно пренебречь и волновая функция конденсата приобретает конкретный классический смысл: квадрат волновой функции есть число частиц в единице объема, а градиент фазы — скорость бозе-газа. Эта теория получила название теории среднего поля. Спектр элементарных возбуждений, вычисленный из линеаризованного уравнения Гросса-Питаевского, совпадает с боголюбовским спектром однородного бозе-газа. Кроме того, уравнение Гросса-Питаевского описывает нелинейные возбуждения в БЭК — квантовые вихри, темные со-

¹Ландау разработал феноменологическую теорию данного процесса, качественно объяснившую экспериментальные данные

литоны, дисперсионные ударные волны и др. (см., например, [8]).

В настоящее время нет сомнения, что бозе-эйнштейновская конденсация играет важную роль в различных явлениях, таких как сверхтекучесть гелия-II и сверхпроводимость. Однако, сильные взаимодействия между частицами и сложность систем не позволяют использовать теорию среднего поля Гросса-Питаевского в этих случаях. Поэтому, когда удалось осуществить бозе-конденсацию в парах щелочных металлов в магнитных ловушках, это ознаменовало новый этап развития теории бозе-эйнштейновской конденсации. В 1995г. сразу две группы сообщили об охлаждении атомов рубидия [10] и натрия [11] в магнитных ловушках до температур в доли микрокельвинов и наблюдении бозе-конденсации². Позднее в том же году третья группа сообщила о наблюдении бозе-конденсации в парах лития [12]. Атомы щелочных металлов обладают магнитным моментом, благодаря этому их можно удерживать в магнитных ловушках. Заполнение ловушек газом осуществляется с помощью последовательного применения нескольких методов лазерного охлаждения.

К настоящему времени экспериментальная техника шагнула далеко вперед. Существенно увеличилось количество элементов, с которыми удалось достичь бозе-конденсации. В 1998г. к первым трем элементам прибавился атомарный водород [13], в 2001г. - калий [14] и метастабильный гелий [15], в 2003г. - цезий [16] и иттербий [17] и, наконец, в 2007г. - хром [18]. Каждое из веществ обладает своими особенностями. В литии осуществляется эффективное притяжение между атомами, в отличие от остальных элементов. Кроме того, у лития и калия удалось сконденсировать как бозе, так и фермионный изотопы. Водород ввиду своей простоты позволяет выполнить точный расчет величины взаимодействия между частицами. Атомы хрома обладают очень большим магнитным моментом, что приводит к сильному дальнедействующему диполь-дипольному

²В 2001г. руководители этих групп Корнел, Виман и Кеттерле получили Нобелевскую премию по физике.

взаимодействию и, как следствие, к анизотропии конденсата.

Широкие экспериментальные возможности дает наличие резонанса Фешбаха. Благодаря этому явлению с помощью внешнего магнитного поля можно управлять длиной рассеяния атомов, и, следовательно, величиной их взаимодействия. Много интересных экспериментов основано на этом эффекте. Например, коллапс БЭК при смене эффективного отталкивания на притяжение, образование молекулярных конденсатов и многое другое (см., напр., обзор [19] и ссылки в нем). Были получены многокомпонентные конденсаты — бозе-конденсаты из смесей различных атомов и так называемые “спинорные” бозе-конденсаты. О них речь пойдет в третьей главе диссертации.

Большое количество как экспериментальных, так и теоретических работ посвящено динамическим свойствам БЭК. В частности, первая регистрация бозе-конденсации атомов в магнитной ловушке осуществлялась по наблюдению скорости разлета газа при отключении ловушки [20]. После уменьшения температуры ниже некоторой критической наблюдался острый пик в распределении атомов по скоростям, что и явилось доказательством бозе-конденсации атомов. Теория среднего поля и уравнение Гросса-Питаевского показали хорошую применимость при описании динамики БЭК. Интерес к таким системам вызван тем, что элементарные возбуждения являются коллективными и не могут быть отождествлены с отдельными атомами. В бозе-конденсате такими возбуждениями являются фононы и квантовые вихри. Основными “игроками”, формирующими динамические свойства конденсата, являются дисперсия и нелинейность (по нелинейным волнам в бозе-эйнштейновском конденсате смотрите подробный обзор [21]). Благодаря их наличию, в БЭК наблюдаются светлые солитоны в конденсате с притяжением и темные солитоны в конденсате атомов с отталкиванием. Последние, будучи устойчивыми в одномерном случае, в двумерном конденсате в ловушке распадаются на вихри [8]. Вызывает интерес поиск условий, при которых темный солитон становится устойчивым [29, 30]. Кроме того, наблюдались вихри

и вихревые решетки во вращающемся конденсате. Были исследованы дисперсионные ударные волны, возникающие при “ударе” по конденсату лазерным лучом или при создании в облаке конденсата областей повышенной плотности.

В ряде теоретических и экспериментальных работ изучался процесс обтекания бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Эта тема интересна в связи с вопросом о нарушении сверхтекучести при больших скоростях течения (более подробный обзор по этим работам дан в разделе 2 главы 1). В одном из экспериментов [22] бозе-конденсат выпускался из магнитной ловушки, а перпендикулярно его движению направлялся лазерный луч, выталкивающий атомы конденсата. Скорость течения достигала сверхзвуковых величин, что приводило к нарушению сверхтекучести. В результате за препятствием возникала область тени, снаружи которой наблюдались волновые структуры. Эксперименты проводились для разных форм и размеров препятствия и различных скоростей обтекания, что приводило к изменению волновой картины и возникновению вихрей. Численный счет и предварительный анализ [23, 24] показали, что в двумерном случае волновую картину можно разделить на две области. В одной достаточно далеко от препятствия находятся малоамплитудные волны, описываемые линейной теорией. В другой — нелинейные структуры: темные солитоны и вихри. Профили темных солитонов были описаны аналитически в работе [23] для случая однородного распределения плотности в конденсате. Для того, чтобы получить полную волновую картину, необходимо построить профили линейных волн и определить область их существования. В реальном эксперименте течение бозе-газа, выпущенного из ловушки, не является равномерным, а распределение плотности конденсата не однородно. Однако, численный счет показал, что неоднородность не приводит к качественному изменению возникающей волновой картины. Поэтому, для общего понимания возникающих волновых процессов, достаточно рассмотреть равномерное течение однородного бозе-газа.

Итак, сформулируем первую задачу диссертации: *построение картины линейных волн, возникающих при сверхзвуковом обтекании однородным бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия.*

Как известно, двумерные темные солитоны неустойчивы относительно распада на вихри (см. классические работы [27, 28] и большой обзор [26]). Исследованию их устойчивости посвящено большое количество работ. Предложено несколько способов стабилизации солитонов, в том числе стабилизация темного солитона в ловушке, введение дальнедействующих дипольных взаимодействий в конденсате [29] и другие. В работе [30] было показано, что при наличии течения вдоль солитона малоамплитудные неустойчивости могут сноситься течением до того, как они перейдут в нелинейную стадию и вызовут распад солитона. В результате неустойчивость становится конвективной (о конвективной неустойчивости смотрите, например, [31]) и солитоны будут доступны для наблюдения. Но в описанном выше эксперименте темные солитоны не наблюдались - в области, где должны находиться темные солитоны и вихревые структуры, возникает область тени. Это может быть связано с большим размером препятствия и тем, что конденсат не успеваешь затечь за препятствие.

Так как наблюдение темных солитонов обтекания в бозе-эйнштейновском конденсате столкнулось с трудностями, возможно, этих трудностей удастся избежать в оптике. Распространение пучков света в средах с зависящим от интенсивности показателем преломления в параксиальном приближении описывается нелинейным уравнением Шредингера [32], которое совпадает с уравнением Гросса-Питаевского. Благодаря этому в оптике возможно наблюдение тех же волновых структур, что и в бозе-эйнштейновском конденсате. Конденсату с отталкивающим взаимодействием между атомами соответствует отрицательная нелинейная добавка к показателю преломления. Такая нелинейность может осуществляться в средах с тепловой нелинейностью,

фотовольтаическим эффектом и многими другими [33]. Пространственные темные солитоны в таких средах наблюдались экспериментально при использовании амплитудных и фазовых транспарантов [34–36]. Амплитудные транспаранты представляют собой полосы, решетки или кресты, накладываемые на поперечное сечение пучка. В этом случае на дифракционной картине в дальней зоне возникают полосы пониженной интенсивности — темные солитоны. Фазовые транспаранты сдвигают фазу в пучке на π , что также приводит к формированию солитона. В некоторых экспериментах наблюдался распад солитона на оптические вихри вследствие изгибной неустойчивости [37]. Кроме того, в экспериментах по нелинейной дифракции на тонкой щели и круглом отверстии наблюдались оптические дисперсионные ударные волны [38, 39].

В случае, если в среде осуществляется нелинейность керровского типа, то распространение пучков света в ней описывается нелинейным уравнением Шредингера. Однако, во многих случаях нелинейная добавка к показателю преломления имеет не керровскую зависимость от интенсивности. Например, это может быть среда с конкурирующими нелинейностями или нелинейность с насыщением, осуществляющаяся в фоторефрактивных средах с фотовольтаическим эффектом. В этом случае говорят об обобщенном нелинейном уравнении Шредингера с произвольной нелинейностью.

Как уже было сказано, для экспериментального наблюдения темных солитонов можно использовать проволочку, расположенную поперек направления распространения пучка. Тогда в дальней зоне будут наблюдаться две темные полосы — темные солитоны. Можно предположить, что, если проволочку расположить под небольшим углом к направлению распространения пучка, то на выходе из среды будет наблюдаться дифракционная картина, аналогичная волновой картине, возникающей при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. То есть, будут существовать две области, внутри первой будут находиться темные солитоны, одним концом прикрепленные к проволочке. В другой —

малоамплитудные волны.

Итак, сформулируем вторую задачу диссертации: *исследование дифракционной картины, возникающей при дифракции пучка света на тонкой проволочке в среде с отрицательной рефракцией, нелинейная добавка к показателю преломления которой зависит от интенсивности произвольным образом. Построение профилей линейных волн и темных солитонов, исследование устойчивости темных солитонов.*

Представляет интерес обобщение задачи об обтекании препятствия на случай двухкомпонентных сред. В бозе-эйнштейновском конденсате это может быть реализовано двумя способами. Могут быть сконденсированы атомы двух разных элементов. Или бозе-конденсация может быть осуществлена с атомами одного элемента, но находящимися на разных подуровнях основного состояния [8].

В оптике также возможно осуществить режим распространения двух связанных волн. Это могут быть две волны поляризации или волны с различными частотами [33]. В обоих случаях нелинейная добавка к показателю преломления будет зависеть от интенсивности обеих волн. В оптически анизотропной среде эта зависимость может быть неодинаковой для каждой из волн.

В общем случае двухкомпонентные среды описываются парой связанных нелинейных уравнений. И в оптике, и в физике бозе-эйнштейновского конденсата существуют параметры, при которых эти уравнения могут быть сведены к двухкомпонентному нелинейному уравнению Шредингера. Нелинейные структуры, описываемые этим уравнением, широко изучались как теоретически, так и экспериментально (см. ссылки в [43]). Для отрицательной керровской нелинейности известны векторные темные солитоны, пары темный-светлый солитон [40] и векторные вихри [41, 42]. Можно ожидать, что при обтекании двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия в целом волновая картина также может быть разделена на линейные волны и на

нелинейные структуры — векторные темные солитоны и вихри. Однако, в двухкомпонентной среде имеются существенные отличия от однокомпонентного случая. В частности, в линейном пределе закон дисперсии Боголюбова расщепляется на две ветви с двумя скоростями звука. Это приведет к изменению картины линейных волн. Кроме того, могут измениться параметры устойчивости векторного темного солитона. Это позволяет ожидать новые эффекты в сравнении с однокомпонентным случаем.

Сформулируем третью основную задачу диссертации: *исследование волновой картины, возникающей при обтекании двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Построение картины линейных волн и векторных темных солитонов. Исследование устойчивости солитонов. Обсуждение схемы реализации данной волновой картины в оптике.*

Новизна работы

1. В связи с экспериментом по обтеканию препятствия бозе-эйнштейновским конденсатом построены профили линейных волн, генерируемых течением конденсата снаружи конуса Маха.

2. Для картины волн внутри конуса Маха построены профили периодических нелинейных волн.

3. Предложена схема эксперимента, моделирующего процесс обтекания бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия в оптике. Рассмотрена дифракционная картина, возникающая при дифракции пучка на отражающей проволочке, расположенной под небольшим углом к направлению распространения пучка в среде с отрицательной нелинейной добавкой к показателю преломления.

4. Построена картина волн, возникающих при обтекании двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Указана возможность реализации данной волновой картины в оптике.

Автор выносит на защиту:

1. Аналитическое описание стационарных линейных волн, возникающих при сверхзвуковом обтекании препятствий бозе-эйнштейновским конденсатом: выражения для гребней и профилей линейных волн, расположенных вне конуса Маха, а также для распределения амплитуд и локальных длин волн в двумерной геометрии.

2. Результаты аналитического расчета дифракции света на тонкой проволочке, расположенной под небольшим углом к направлению распространения света в среде с отрицательной нелинейной добавкой к показателю преломления. Анализ дифракционной картины, включающей в себя линейные волны, расположенные вне конуса Маха и наклонные темные солитоны, расположенные внутри конуса Маха, определение параметров устойчивости наклонных темных солитонов.

3. Результаты аналитического расчета стационарной волновой картины обтекания препятствий двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом: наличие двух конусов Маха и соответствующих им линейных волн, существование наклонных векторных солитонов внутри внешнего конуса Маха, возможность стабилизации наклонных векторных солитонов относительно распада на вихревые пары.

Научная и практическая ценность

Теория нелинейных волн и физика бозе-эйнштейновского конденсата на данный момент являются бурно развивающимися направлениями физики. Эксперименты по наблюдению нелинейных волн в бозе-эйнштейновском конденсате, часто обгоняя теорию в постановке новых задач, дали новый импульс развитию теории нелинейных волн. Одним из таких экспериментов, который требует более детального теоретического изучения, была мотивирована данная работа.

В работе предложена схема эксперимента, который позволит моделировать соответствующую волновую картину оптическими методами.

В результате может быть получен новый дифракционный эффект. В него входят оптические темные солитоны, обладающие при определенных условиях высокой устойчивостью. Это делает возможным их использование в качестве оптически индуцированных волноводов.

Изучение обтекания средой препятствия может быть интересно для задачи детектирования неоднородностей среды. Обобщение данной работы на среды с поляритонами или плазмонами может иметь применение для микроскопии, основанной на использовании квазичастиц.

Апробация

Результаты работы были представлены в докладах:

1. ICONO/LAT, Минск 2007.

“Wave pattern generated in a stationary flow of Bose-Einstein condensate past an obstacle”, Yu.G. Gladush (Institute of Spectroscopy, Russia), A.M. Kamchatnov (Institute of Spectroscopy, Russia) G. El (Loughborough University, UK), A. Gammal (Universidade de Sao Paulo, Brazil).

2. “14th Central European Workshop on Quantum Optics”, 1-5 июня 2007, Палермо, Италия.

“Wave pattern generated in a stationary flow of Bose-Einstein condensate past an obstacle”, Yu.G. Gladush (Institute of Spectroscopy, Russia), A.M. Kamchatnov (Institute of Spectroscopy, Russia) G. El (Loughborough University, UK), A. Gammal (Universidade de Sao Paulo, Brazil).

3. Молодежная школа-конференция “Нелинейные волны - 2008”, 1-7 марта, Нижний Новгород.

“Нелинейная дифракция пучков света, распространяющихся в фоторефрактивных средах, на встроенных в них тонких проволочках”.
Гладуш Ю.Г., Камчатнов А.М., El G.A., Khamis E.G., A. Gammal.

4. Конференция “Лазерная физика и оптические технологии - 2008”, 17-19 июня, Минск, Беларусь.

“Нелинейная дифракция пучков света, распространяющихся в фоторефрактивных средах, на встроенных в них тонких проволочках”.
Гладуш Ю.Г., Камчатнов А.М., El G.A., Khamis E.G., A. Gammal.

5. Семинар В.Е. Захарова и А.А. Гуревича в ФИАН по проблемам нелинейной физики.
6. Семинар кафедры фотоники и физики микроволн, Физический факультет, МГУ.

Премии и гранты:

1. Премия им. Франциско Полумбо за лучший доклад молодого ученого на международной конференции CEWQO-2007.
2. Конкурс научных работ Института спектроскопии РАН. Второе место. Совместно с А.М. Камчатновым.
3. Конкурс научных работ молодых ученых им. Александрова (ТРИНИТИ). Второе место.
4. Грант фонда “Династия” за 2008г. для аспирантов и молодых ученых без степени.
5. Грант фонда РФФИ по инициативным проектам 2004-2007гг., руководитель - Камчатнов А.М.

Основные результаты были опубликованы в следующих статьях в рецензируемых журналах:

1. G. A. El, Yu. G. Gladush and A. M. Kamchatnov, “Two-dimensional periodic waves in supersonic flow of a Bose–Einstein condensate”, J. Phys. A: Math. Theor. 40 No 4 611-619, 2007.

2. Yu.G. Gladush, G.A. El, A. Gammal, A.M. Kamchatnov, “Radiation of linear waves in the stationary flow of a Bose-Einstein condensate past an obstacle”, Phys. Rev. A 75, 033619, 2007.
3. Ю.Г. Гладуш, А.М. Камчатнов, “Генерация линейных волн при обтекании препятствия Бозе-Эйнштейновским конденсатом” ЖЭТФ, т. 132, № 3, сс. 589–595, 2007.
4. Yu. G. Gladush, L. A. Smirnov and A. M. Kamchatnov, “Generation of Cherenkov waves in the flow of a Bose–Einstein condensate past an obstacle”, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 41, 165301, 2008.
5. E. G. Khamis, A. Gammal, G. A. El, Yu. G. Gladush and A. M. Kamchatnov, “Nonlinear diffraction of light beams propagating in photorefractive media with embedded reflecting wire”, Phys. Rev. A, 78, 013829, 2008.
6. Yu. G. Gladush, A. M. Kamchatnov, Z. Shi, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and B. A. Malomed, “Wave patterns generated by a supersonic moving body in a binary Bose-Einstein Condensate”, Phys. Rev. A, 79, 033623, 2009.

В том числе тезисы докладов на конференциях:

7. Yu. G. Gladush, A. M. Kamchatnov, G. El, A. Gammal, “Wave pattern generated in a stationary flow of Bose-Einstein condensate past an obstacle”, тезисы докладов XIV Центрально-европейского семинара по квантовой оптике CEWQO-2007, Палермо, Италия, 2007.
8. Гладуш Ю. Г., Камчатнов А. М., El G.A., Khamis E. G., A. Gammal, “Нелинейная дифракция пучков света, распространяющихся в фоторефрактивных средах, на встроенных в них тонких проволочках”, тезисы докладов на школе-семинаре “Нелинейные волны - 2008”, 1-7 марта, Нижний Новгород, Россия, 2008.

9. Гладуш Ю. Г., Камчатнов А. М., El G. A., Khamis E. G., A. Gammal, “Нелинейная дифракция пучков света, распространяющихся в фоторефрактивных средах, на встроенных в них тонких проволочках”, тезисы докладов международной конференции “Лазерная физика и оптические технологии - 2008”, Минск, Беларусь, 2008.

Структура и краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и раздела благодарностей. В конце каждой главы дано заключение, в котором приведены основные результаты главы.

Во введении дана общая характеристика работы, обоснование актуальности выбранной темы и направления исследований, определяются цели работы, кратко изложено ее содержание и сформулированы защищаемые положения.

Первая глава посвящена изучению волновой картины, возникающей при сверхзвуковом обтекании однокомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом цилиндрического препятствия.

В первом разделе приводятся общие свойства уравнения Гросса-Питаевского (ГП) применительно к описанию возмущений однородного состояния бозе-эйнштейновского конденсата.

Во втором разделе приводятся данные из эксперимента по сверхзвуковому обтеканию бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Дан обзор по теоретическим работам других авторов, посвященных исследованию этого процесса. Определяется место данного исследования среди других работ по данной теме.

Третий раздел посвящен построению профилей стационарных линейных волн, возникающих при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. На основе свойств спектра Боголюбова найдены линии постоянной фазы (линии гребней) линейных волн. Показано, что такие волны могут находиться только снаружи конуса Маха. В рамках формализма уравнения Гросса-Питаевского построены профили линейных

волн в двух предельных случаях — вдали от конуса Маха и в непосредственной близости от него. Показано, что найденные решения сшиваются в промежуточной области. В конце раздела приведено сравнение найденных аналитических решений с результатами численного моделирования полного нелинейного уравнения Гросса-Питаевского, сделанного нашими соавторами. Показано, что линейная теория хорошо “работает” на расстояниях в несколько длин волн от препятствия и более. Даны оценки для характерного размера возникающих линейных структур и времени их выхода на стационар.

Четвертый раздел посвящен изучению нелинейных структур, находящихся внутри конуса Маха. Для уравнения Гросса-Питаевского найдены решения в виде наклонных периодических нелинейных волн. Исследованы их предельные случаи. Показано, что для каждого из пределов периодические нелинейные структуры при некоторых параметрах переходят в темные солитоны.

Во **второй главе** рассматривается дифракция света на тонкой проволочке, расположенной под небольшим углом к направлению распространения света в среде с отрицательной нелинейной добавкой к показателю преломления.

В первом разделе приведены основные свойства обобщенного нелинейного уравнения Шредингера, описывающего распространение пучков в параксиальном приближении; предполагается произвольная зависимость нелинейной добавки к показателю преломления от интенсивности.

Во втором разделе дана принципиальная схема предполагаемого эксперимента по наблюдению дифракционной картины возникающей при дифракции света на тонкой проволочке. Показана аналогия дифракционной картины с волновой картиной, возникающей при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия.

Третий раздел посвящен изучению стационарных волновых структур, находящихся в рассматриваемой дифракционной картине вне конуса Ма-

ха для произвольного вида нелинейности. Найдены аналитические выражения для профилей линейных волн. Для их иллюстрации построены графики профилей для нелинейности с насыщением.

В четвертом разделе изучаются нелинейные структуры, возникающие внутри конуса Маха. Ищется стационарное решение в виде наклонных темных солитонов для обобщенного нелинейного уравнения Шредингера с произвольным видом нелинейности. Для иллюстрации данного подхода построены профили наклонных темных солитонов для нелинейности с насыщением для различных значений параметра насыщения. Приведено сравнение с результатами численного моделирования полного нелинейного уравнения Шредингера.

Пятый раздел посвящен изучению устойчивости наклонных темных солитонов. Найдены параметры, при которых темные солитоны переходят из абсолютно неустойчивых в конвективно неустойчивые и становятся доступны для наблюдения.

Третья глава посвящена изучению волновой картины, возникающей при обтекании двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия.

В первом разделе приводятся уравнения, описывающие динамику многокомпонентных бозе-эйнштейновских конденсатов, и обсуждаются их свойства. Предлагается модель поставленной задачи: через двухкомпонентный спинорный бозе-эйнштейновский конденсат движется цилиндрическое препятствие со сверхзвуковой скоростью.

Во втором разделе производится построение профилей стационарных линейных волн, расположенных вне соответствующих конусов Маха. Приводится сравнение линий гребней линейных волн, построенных по аналитическим формулам, с численным моделированием векторного ГП.

Третий раздел посвящен построению наклонных векторных темных солитонов и изучению их устойчивости. Векторное уравнение ГП сводится к паре нелинейных уравнений второго порядка от одной переменной, связанных через нелинейные члены. В общем случае эти уравне-

ния должны решаться численно. В частном случае равенства химических потенциалов решение этих уравнений найдены точно. Приводится сравнение полученных решений с результатами численного моделирования векторного уравнения ГП. Анализируется устойчивость наклонных векторных солитонов. Определены параметры, при которых наклонные векторные солитоны становятся эффективно устойчивыми.

В **заключении** коротко формулируются основные выводы.

1 Волны обтекания в бозе-эйнштейновском конденсате

В этой главе изучается волновая картина, возникающая при обтекании однокомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом цилиндрического препятствия. Показано, что введением конуса Маха волновая картина может быть разделена на две области. Для внутренней области найдены стационарные решения уравнения Гросса-Питаевского в виде наклонных нелинейных периодических структур. Для области вне конуса Маха получены решения в виде линейных “корабельных волн”. Найдены аналитические выражения для гребней волн, а также для профилей волн вдали от препятствия. Обсуждается применимость полученных решений.

1.1 Основные уравнения

В приближении среднего поля динамика бозе-эйнштейновского конденсата описывается уравнением Гросса-Питаевского [8]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\mathbf{r})\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (1.1)$$

где $\psi(\mathbf{r})$ — “волновая функция” конденсата, а $V(\mathbf{r})$ является внешним потенциалом, воздействующим на атомы конденсата. Это может быть потенциал удерживающей ловушки или потенциал препятствия в конденсате. Константа связи g выражается через длину рассеяния a_s :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (1.2)$$

где m - масса атома конденсата. В этом приближении мы пренебрегаем всеми корреляциями между атомами, а также наличием несконденсированных атомов. В этом случае волновая функция конденсата

$$\psi = \sqrt{n}e^{i\Phi}e^{-\frac{i\mu}{\hbar}t}, \quad (1.3)$$

где μ - химический потенциал БЭК, связана с наблюдаемыми величинами

$$n = |\psi|^2, \quad v = \frac{\hbar}{m}\nabla\Phi, \quad (1.4)$$

где n - это локальная плотность БЭК, а v - его скорость.

Подставляя (1.3) в уравнение Гросса-Питаевского (1.1), получим уравнения динамики БЭК для наблюдаемых величин

$$\begin{aligned} n_t + \nabla(n\mathbf{v}) &= 0, \\ \hbar\mathbf{v}_t + m(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + g\nabla n - \frac{\hbar^2}{m}\nabla\left(\frac{\Delta n}{4n} - \frac{(\nabla n)^2}{8n^2}\right) &= -\nabla V. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Первое из этих уравнений в гидродинамике известно как уравнение непрерывности. Второе соответствует уравнению Эйлера с уравнением состояния $P = gn^2/2$, где P - давление газа. Кроме того, в нем присутствует новый член $\frac{\hbar^2}{m}\nabla\left(\frac{\Delta n}{4n} - \frac{(\nabla n)^2}{8n^2}\right)$, называемый квантовым давлением. Уравнения (1.5) содержат внутренний параметр размерности длины — корреляционную длину $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn}}$. Если характерный размер, на котором меняется плотность, намного превышает корреляционный радиус, то при описании динамики БЭК в ловушке квантовым давлением можно пренебречь. Это называется гидродинамическим приближением. Но при рассмотрении возмущений, возникающих в конденсате, их размер оказывается порядка корреляционной длины, и, следовательно, квантовым давлением пренебрегать нельзя.

Для описания малоамплитудных возмущений конденсата можно воспользоваться линейной теорией. Линеаризуя уравнение (1.1) или (1.5) найдем закон дисперсии линейных волн

$$\omega(k) = \sqrt{c_s^2 k^2 + \left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2}, \quad (1.6)$$

где

$$c_s = \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \quad (1.7)$$

— скорость звука в длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$. Этот закон дисперсии был впервые выведен Н.Н. Боголюбовым из микроскопических уравнений квантовой механики. Для длинных волн $k \rightarrow 0$ закон дисперсии соответствует звуковым волнам, распространяющимся со скоростью c_s :

$$\omega \cong c_s k. \quad (1.8)$$

Для малых длин волн $k \rightarrow \infty$, он переходит в квантовый закон дисперсии для частиц

$$\omega \cong \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (1.9)$$

Переход из одной области в другую происходит при длине волны порядка корреляционной длины. Если амплитуда возмущений не мала и конденсат не однороден, то вид возмущений описывается полным уравнением Гросса-Питаевского (1.1). Так как это уравнение нелинейно, то нахождение конкретных решений, связанных с возмущениями конденсата, является довольно сложной задачей. Известно его решение для темного солитона в одномерном по пространству случае [47, 48]

$$\psi = \nu \operatorname{th} \nu(x - \kappa t - x_0) + i\kappa, \quad \kappa^2 + \nu^2 = 1, \quad (1.10)$$

где ν - амплитуда солитона, а κ - его скорость. Скорость солитона меньше скорости звука и уменьшается с увеличением глубины солитона. Ширина солитона имеет размер порядка корреляционной длины. В двумерном по пространству случае солитон становится неустойчивым и распадается на вихри [28]. Размер вихря составляет величину также порядка корреляционной длины.

Кроме того, в бозе-конденсате могут существовать ударные волны [9]. Например, в одномерном случае, если начальное возмущение представляет собой область пониженной плотности, то это приведет к формированию последовательности темных солитонов [44]. А если начальная плотность конденсата повышена, то эволюция приводит к опрокидыванию данного возмущения и формированию дисперсионной ударной волны [45, 46].

1.2 Обзор литературы и постановка задачи

Вопрос об обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия вызывает большой интерес прежде всего в связи с задачей о сверхтекучести. Наибольшее число, как теоретических, так и экспериментальных

работ посвящено определению критической скорости, при которой происходит переход от сверхтекучего движения к нормальному. В экспериментах [49, 50] конденсат в магнитной ловушке сканировался лазерным лучом с различными скоростями. По уменьшению конденсатной компоненты атомного облака, происходящему вследствие нагревания конденсата, определялась критическая скорость обтекания. Было показано, что эта скорость равна приблизительно четверти скорости звука. В этом случае потерю сверхтекучести связывают с генерацией вихрей на препятствии, а скорость, при которой это происходит, зависит от различных факторов, в частности, от размера препятствия [51, 52] и конфигурации ловушки.

Если скорость течения становится больше скорости звука, то, кроме вихрей, в конденсате генерируются фононы. Это приводит к существованию стационарной волновой картины, прикрепленной к препятствию. Вид этих волн полностью определяется законом дисперсии (1.6). В результате волновая картина должна состоять из линейных волн и нелинейных вихрей, рождающихся на препятствии. В ряде теоретических работ вычислялась тормозящая сила, возникающая при таком обтекании.

В работе [52] тормозящая сила изучалась путем численного моделирования уравнения Гросса-Питаевского в двумерном случае и сравнивалась с соответствующей силой, возникающей в идеальном бозе-газе. Было показано, что наличие отталкивающего взаимодействия между атомами приводит к уменьшению соответствующей силы. Зависимость тормозящей силы от времени выходит на некоторое среднее значение, вокруг которого сила совершает небольшие осцилляции. Среднее значение обуславливается генерацией линейных волн, а наличие осцилляций авторы объясняют генерацией вихревых пар, отрывающихся от препятствия. Величина тормозящей силы растет со скоростью квадратичным образом, а также увеличивается линейным образом с увеличением размера препятствия. Кроме того, было замечено, что в слабо-неидеальном бозе-газе

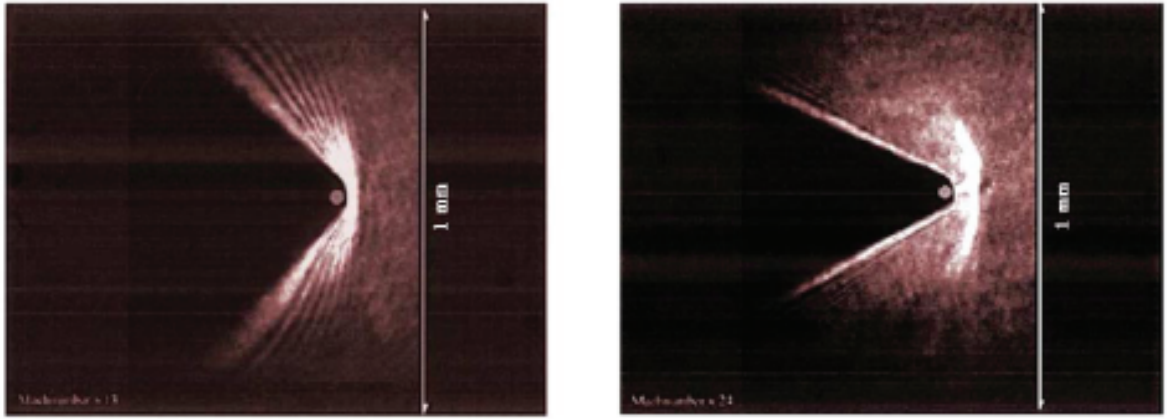


Рис. 1.1: Волновая картина, возникающая при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия, эксперимент. Взято из [24]

линейные волны находятся вне конуса Маха [53]

$$\sin \theta = \frac{c_s}{v}, \quad (1.11)$$

где v - это скорость течения БЭК. В невзаимодействующем конденсате $c_s = 0$ и линейные волны заполняют всю область вне препятствия.

В работах [54, 55] тормозящая сила вычислялась аналитически из линеаризованного уравнения Гросса-Питаевского. Эти теории не учитывают нелинейных эффектов, в частности, генерации вихрей. Но, как отмечено в работе [54], размер вихря не может быть меньше корреляционной длины, поэтому можно ожидать, что при достаточно маленьком размере препятствия вихри не будут генерироваться и все потери энергии будут обусловлены линейными волнами.

В лаборатории JILA [22] экспериментально наблюдалась волновая картина, возникающая при сверхзвуковом обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. В этой работе атомы ^{87}Rb охлаждались в магнитной ловушке до состояния бозе-конденсации, после чего потенциал ловушки “переворачивался”. Конденсат разлетался со скоростью, многократно превышающей скорость звука. Перпендикулярно его движению создавался лазерный луч, выталкивающий атомы конденсата. В результате за препятствием возникала область тени, сна-

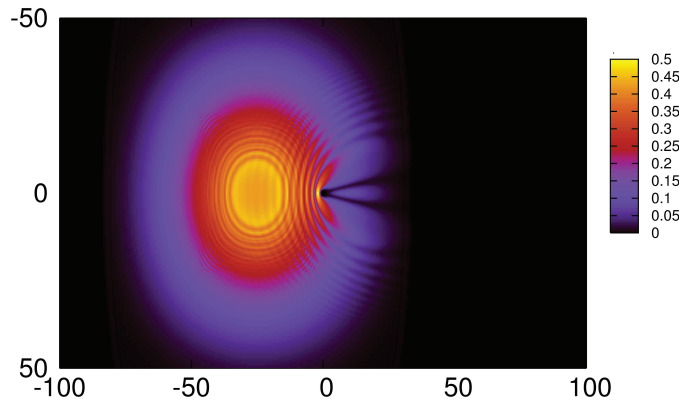


Рис. 1.2: Численное моделирование волновой картины, возникающей при обтекании свободно расширяющимся из ловушки бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия.

ружи которой наблюдалась некоторая волновая картина (см. рис.1.1).

В работе [24] было проведено численное моделирование этого эксперимента с помощью уравнения Гросса-Питаевского. Если в предыдущих аналитических работах течение конденсата считалось однородным, то в данной работе конденсат выпускался из ловушки в соответствии с экспериментом. Было показано, что в этом случае линейные волны находятся снаружи некоторого конуса. Авторы указывают, что раствор этого конуса всегда больше конуса Маха, причем тем больше, чем больше размер препятствия. При уменьшении размера препятствия этот конус стремится к конусу Маха. Авторы анализируют полученную волновую картину с помощью теории излучения Вавилова-Черенкова и получают некоторые простые характеристики: длину волны возмущений перед препятствием и обоснование существования линейных волн вне конуса Маха.

Как было показано в работе [23], при обтекании БЭК препятствия кроме вихрей могут возникать темные солитоны. Они выглядят как две темные линии, протянувшиеся от препятствия и находящиеся внутри конуса Маха (см. рис. 1.2). Авторами было получено аналитическое решение уравнения Гросса-Питаевского в виде двумерных наклонных со-

литонов при однородном течении БЭК мимо препятствия. Сравнение с численным счетом показало хорошее совпадение с полученными решениями. Кроме того, численный счет показал, что и при неоднородном расширении конденсата из ловушки (рис. 1.2) такие структуры должны наблюдаться³.

В работе [30] исследовалась устойчивость наклонных темных солитонов. Как известно, пространственные темные солитоны неустойчивы относительно распада на вихри. Но если вдоль солитона существует течение, то линейные неустойчивости будут им сноситься. Поэтому при достаточной скорости течения абсолютная неустойчивость перейдет в конвективную и солитон станет доступен для наблюдения. В [30] было показано, что при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия солитон становится конвективно неустойчивым (т.е. эффективно устойчивым) при скорости течения $v \approx 1.4c_s$.

Работы [23, 30] описывают профиль нелинейных структур, находящихся внутри конуса Маха, не затрагивая линейные структуры, которые находятся снаружи. Работы, учитывающие линейные волны, посвящены расчету потери энергии средой, уходящей на генерацию волны, и содержат лишь фрагментарную информацию о структуре генерируемых волн. Информация о потере энергии при обтекании очень важна в связи с проблемой сверхтекучести. Как указывается в [50], эта величина может быть измерена экспериментально по нагреву конденсата. Однако, для полноценного сравнения с экспериментом необходимо построить полную картину линейных волн, возникающих при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Это будет сделано в следующем разделе для однородного течения конденсата.

³В более ранней работе [52] на численном счете также видна структура, соответствующая наклонному темному солитону. Авторами она была интерпретирована как “vortex street”

1.3 “Корабельные волны” в бозе-эйнштейновском конденсате

Перейдем к непосредственному построению картины линейных волн, возникающих при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Наше исследование будет основываться на теории среднего поля и на уравнении Гросса-Питаевского, написанного в форме (1.5). Для удобства перейдем к безразмерным величинам

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}\xi}, \quad \tilde{t} = \frac{c_s}{\sqrt{2}\xi}t, \quad \tilde{n} = \frac{n}{n_0}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{c_s}, \quad (1.12)$$

а также введём безразмерный потенциал препятствия

$$\tilde{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{mc_s^2}V(\sqrt{2}\xi\tilde{\mathbf{r}}). \quad (1.13)$$

где n_0 — плотность невозмущенного конденсата (“бесконечно удаленного” от препятствия). В результате в двумерном по пространству случае уравнения (1.5) запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} n_t + (nu)_x + (nv)_y &= 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + n_x + \left(\frac{n_x^2 + n_y^2}{8n^2} - \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4n} \right)_x &= -V_x, \\ v_t + uv_x + vv_y + n_y + \left(\frac{n_x^2 + n_y^2}{8n^2} - \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4n} \right)_y &= -V_y, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где тильды для простоты опущены, а u и v - скорости вдоль осей x и y соответственно, $\mathbf{v} = (u, v)$.

Нас интересуют линейные волны, распространяющиеся на фоне однородного течения с $n = 1$, $u = M$, $v = 0$ (течение направлено вдоль оси x). Поэтому вводим

$$n = 1 + n_1, \quad u = M + u_1, \quad v = v_1, \quad (1.15)$$

и линеаризуем систему (1.14) относительно малых отклонений n_1 , u_1 , v_1 от однородного течения. В результате получаем линейную систему

$$\begin{aligned} n_{1,t} + u_{1,x} + Mn_{1,x} + v_{1,y} &= 0, \\ u_{1,t} + Mu_{1,x} + n_{1,x} - \frac{1}{4}(n_{1,xxx} + n_{1,xyy}) &= -V_x \\ v_{1,t} + Mv_{1,x} + n_{1,y} - \frac{1}{4}(n_{1,xyy} + n_{1,yyy}) &= -V_y, \end{aligned} \quad (1.16)$$

которая описывает распространение малоамплитудных волн в движущемся конденсате. Определим условие применимости данных уравнений. Замечаем, что по порядку величины $Mu_1 \sim n_1$. Нелинейные члены порядка $u_1 \nabla u_1 \sim \nabla (Mn_1)^2$ могут быть отброшены, если они много меньше линейных $\sim \nabla n_1$. В результате получаем условие

$$n_1 \ll 1/M^2. \quad (1.17)$$

Снаружи конуса Маха на достаточном удалении от препятствия это условие всегда выполняется.

Для гармонических волн $n_1, u_1, v_1 \propto \exp[i(k_x x + k_y y) - i\omega t]$ в отсутствие внешнего поля ($V(\mathbf{r}) = 0$) система (1.16) дает закон дисперсии

$$\omega = Mk_x \pm k\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}, \quad (1.18)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Это хорошо известный закон дисперсии Боголюбова (1.6) при наличии течения.

Для построения картины линейных волн мы будем пользоваться теорией, развитой Кельвином для описания волн на воде, возникающих от движущегося точечного источника [56, 57]. Эта теория была разработана для описания стационарной волновой картины, возникающей при движении корабля, поэтому будем называть такие волны “корабельными волнами”. Так как мы интересуемся стационарной картиной волн, то в уравнении (1.18) ω можно положить равной нулю. Закон дисперсии (1.18) в этом случае превращается в уравнение, связывающее k_x и k_y

$$G(k_x, k_y) \equiv Mk_x + k\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}} = 0, \quad (1.19)$$

Введем цилиндрические координаты

$$k_x = -k \cos \eta, \quad k_y = k \sin \eta, \quad (1.20)$$

где η - угол между осью x и вектором \mathbf{k} (см. рис. 1.3), отсчитываемый от отрицательного направления оси x . Уравнение (1.19) переходит в

$$G(k, \eta) = -Mk \cos \eta + k\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}} = 0. \quad (1.21)$$

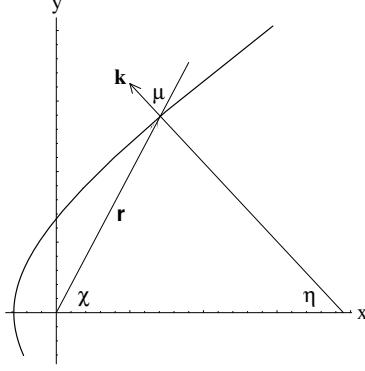


Рис. 1.3: Полярные координаты, определяющие радиус-вектор \mathbf{r} и волновой вектор \mathbf{k} , перпендикулярный волновому фронту, схематически изображенному сплошной линией

Это уравнение используется в теории излучения Вавилова-Черенкова в бозе-эйнштейновском конденсате (см. [24]). Получим из него выражение для величины волнового вектора в зависимости от угла η :

$$k = 2\sqrt{M^2 \cos^2 \eta - 1}, \quad (1.22)$$

где η изменяется в пределах

$$-\arccos \frac{1}{M} \leq \eta \leq \arccos \frac{1}{M}. \quad (1.23)$$

Из этого выражения можно получить длину волны возмущения перед препятствием. Имеем $\eta = 0$, откуда $\cos \eta = 1$, и

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (1.24)$$

Далее, покажем, как с помощью простых вычислений получить форму гребней (линии постоянной фазы) “корабельных волн” в бозе-эйнштейновском конденсате. Волновой вектор является градиентом фазы волны, $k = \nabla \phi$, следовательно, мы можем записать

$$\phi = \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.25)$$

Из условия $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ получим, что компоненты вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial k_x}{\partial y} - \frac{\partial k_y}{\partial x} = 0. \quad (1.26)$$

С учетом (1.19) первое слагаемое можно переписать как

$$\frac{\partial k_x}{\partial y} = \frac{\partial k_x}{\partial k_y} \frac{\partial k_y}{\partial y} = - \frac{\partial G / \partial k_y}{\partial G / \partial k_x} \frac{\partial k_y}{\partial y} \quad (1.27)$$

и уравнение (1.26) переходит в

$$\frac{\partial k_y}{\partial x} + \frac{\partial G / \partial k_y}{\partial G / \partial k_x} \frac{\partial k_y}{\partial y} = 0. \quad (1.28)$$

Повторив те же рассуждения для k_x , получим, что (k_x, k_y) будут константами вдоль характеристик, определяемых решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial G / \partial k_y}{\partial G / \partial k_x}. \quad (1.29)$$

Так как правая часть уравнения не зависит от x и y , то характеристики являются прямыми линиями. На больших расстояниях от препятствия само препятствие может рассматриваться как точечный источник волн. Следовательно, полученная стационарная волна должна быть центрирована и характеристики должны выходить из точки $(x, y) = (0, 0)$, в которой расположено препятствие. В результате получаем решение для характеристик

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \chi = - \frac{\partial G / \partial k_y}{\partial G / \partial k_x}, \quad (1.30)$$

где χ - угол между осью x и радиус-вектором \mathbf{r} , проведенным к точке A с волновыми векторами (k_x, k_y) (см. рис. 1.3). Это означает, что вектор k имеет постоянное значение на луче $\chi = \operatorname{const}$. Так как $G(k_x, k_y)$ является законом дисперсии волн в среде, то условие (1.30) может быть проинтерпретировано следующим образом: отношение координат x и y возмущения с данным волновым вектором, равно отношению соответствующих групповых скоростей $\partial \omega / \partial k_x$ и $\partial \omega / \partial k_y$, с которыми движется данное возмущение.

Подставляя (1.19) в (1.30), получаем

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{(1 + k^2/2) \operatorname{tg} \eta}{M^2 - (1 + k^2/2)}, \quad (1.31)$$

где k определяется из (1.22). Фаза ϕ может быть посчитана путем интегрирования (1.25) вдоль лучей $\chi = \text{const}$, вдоль которых значение k постоянно

$$\phi = (k \cos \mu)r, \quad (1.32)$$

где $\mu = \pi - \eta - \chi$ - угол между \mathbf{r} и \mathbf{k} и учтено, что \mathbf{k} на этом луче имеет постоянное значение. Линии постоянной фазы могут быть заданы параметрически через угол η

$$r = \frac{\phi}{k \cos \mu}, \quad (1.33)$$

где k определяется уравнением (1.22), а μ может быть вычислена из условия $\text{tg} \mu = -\text{tg}(\chi + \eta)$ которое после некоторых преобразований с учетом (1.31) дает

$$\text{tg} \mu = \frac{2M^2}{k^2} \sin 2\eta. \quad (1.34)$$

В результате, уравнение (1.33) переходит в

$$r = \frac{4\phi}{k^3} \sqrt{M^2(M^2 - 2) \cos^2 \eta + 1}. \quad (1.35)$$

И наконец, запишем кривые постоянной фазы в декартовых координатах

$$\begin{aligned} x &= r \cos \chi = \frac{4\phi}{k^3} \cos \eta (1 - M^2 \cos 2\eta), \\ y &= r \sin \chi = \frac{4\phi}{k^3} \sin \eta (2M^2 \cos^2 \eta - 1), \end{aligned} \quad (1.36)$$

где пределы изменения параметра η определяются из (1.23). Границы области значений η определяют область существования “корабельных волн”. При $\eta = \pm \arccos(1/M)$, волновой вектор $k = 0$, а $\text{ctg} \chi = \pm \sqrt{M^2 - 1}$, откуда

$$\sin \chi = \frac{1}{M}. \quad (1.37)$$

Уменьшение по модулю угла η приводит к увеличению угла χ , следовательно “корабельные волны” должны находится вне конуса, определяемого условием (1.37). Это условие определяет конус Маха и при возвращении к размерным величинам переходит в условие (1.11).

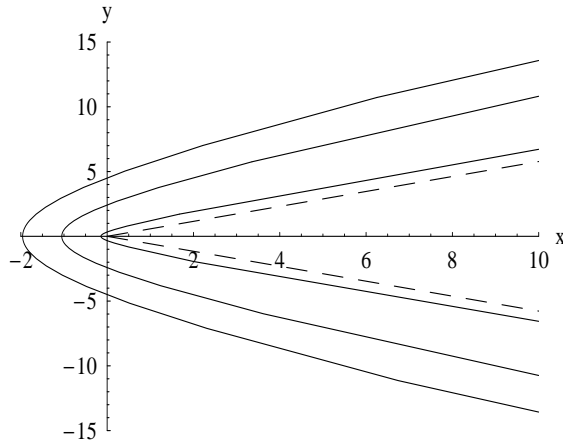


Рис. 1.4: Линии постоянной фазы (гребни волн) волновой картины, возникающей при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Пунктирная линия соответствует конусу Маха, ограничивающего область существования линейных волн.

На рис. 1.4 изображены гребни корабельных волн, построенные по параметрическим формулам (1.36). В данной теории “корабельные волны” занимают все пространство вне конуса Маха. Однако очевидно, что амплитуда волн должна спадать с удалением от препятствия. В реальных экспериментах она становится незаметна на конечных расстояниях от выталкивающего лазерного луча. Поэтому перейдем к построению полной картины “корабельных волн”, которая даст нам распределение амплитуды волны.

Для этого вернемся к уравнениям (1.16), где будем считать, что потенциал препятствия зависит от времени как $V(\mathbf{r}, t) = e^{\varepsilon t} V(\mathbf{r})$. Так как мы интересуемся стационарной картиной волн, это предполагает, что потенциал был включен в бесконечно удаленном прошлом. Зависимость от времени как $e^{\varepsilon t}$ моделирует медленное включение потенциала при $t \rightarrow -\infty$. Стационарный предел соответствует $\varepsilon \rightarrow 0$, наличие этой бесконечно малой добавки не повлияет на картину волн, но позволит правильно учесть полюсы при контурном интегрировании.

Считая, что остальные величины также зависят от времени как $e^{\varepsilon t}$,

применим преобразование Фурье по пространственным координатам

$$\begin{aligned} n_1 &= e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}, & u_1 &= e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \\ v_1 &= e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}, & V &= e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} (i\varepsilon + k_x M)\tilde{n} + k_x \tilde{u} + k_y \tilde{v} &= 0, \\ (i\varepsilon + k_x M)\tilde{u} + (k_x + \frac{1}{4}k_x k^2)\tilde{n} &= -k_x \Phi, \\ (i\varepsilon + k_x M)\tilde{v} + (k_y + \frac{1}{4}k_y k^2)\tilde{n} &= -k_y \Phi. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Решая эту систему относительно \tilde{n} , находим

$$\tilde{n} = -\frac{k^2 \Phi}{(\varepsilon + ik_x M)^2 + k^2(1 + \frac{k^2}{4})}. \quad (1.40)$$

Подставляя фурье-образ в выражение для плотности конденсата (1.38), получаем ее выражение через интеграл

$$n_1 = -e^{\varepsilon t} \iint \frac{k^2 \Phi(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)}}{(\varepsilon + ik_x M)^2 + k^2(1 + k^2/4)} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2}. \quad (1.41)$$

На больших расстояниях от препятствия создаваемый им потенциал можно считать точечным $V(\mathbf{r}) = V_0 \delta(\mathbf{r})$; тогда $\Phi(\mathbf{k}) = V_0$. Перейдем к полярным координатам (см. рис. 1.3), определяющим компоненты векторов \mathbf{r} и \mathbf{k} :

$$x = r \cos \chi, \quad y = r \sin \chi; \quad k_x = -k \cos \eta, \quad k_y = k \sin \eta. \quad (1.42)$$

После несложных преобразований выражение (1.41) переходит в

$$n_1 = \frac{V_0}{\pi^2} e^{\varepsilon t} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k e^{-ikr \cos(\chi+\eta)} dk d\eta}{k^2 - k_0^2 - i\delta \cos \eta}, \quad (1.43)$$

где $\delta = 8M\varepsilon/k$ — малая положительная величина, а k_0 совпадает с формулой (1.22)

$$k_0 = 2\sqrt{M^2 \cos^2 \eta - 1}. \quad (1.44)$$

Интеграл по η можно разбить на два: $\int d\eta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\eta$. После замены $\eta' = \eta - \pi$ во втором интеграле, получаем, что подынтегральное выражение переходит в комплексно сопряженное. В результате интеграл (1.43) можно записать в виде

$$n_1 = \frac{2V_0}{\pi^2} e^{\varepsilon t} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{k e^{-ikr \cos(\chi+\eta)} dk d\eta}{k^2 - k_0^2 - i\delta \cos \eta}. \quad (1.45)$$

Интеграл по k берётся вдоль положительной действительной полуоси, вблизи которой расположен полюс

$$k = \sqrt{k_0^2 + i\delta \cos \eta} \cong k_0 + i \frac{\delta \cos \eta}{2k_0}, \quad (1.46)$$

так что можно ожидать, что он даёт главный вклад в значение интеграла (еще один полюс расположен вблизи отрицательной действительной полуоси, но, как мы увидим далее, он существенного вклада в интеграл дать не может). Убедиться в этом можно следующим образом. Прежде всего заметим, что в области интегрирования $\cos \eta > 0$ (см. (1.23)). Отсюда следует, что малая добавка $\sim \delta$ сдвигает интересующий нас полюс всегда в первый квадрант. Далее, контур вдоль действительной оси k можно дополнить, превращая его в замкнутый, контуром вдоль положительной или отрицательной мнимой полуоси и соответствующей бесконечно удалённой четвертью окружности. Для того, чтобы интеграл по четверти окружности обращался в нуль при стремлении радиуса $|k|$ окружности к бесконечности, мы должны выбрать контур по границе первого квадранта, если $\cos(\chi + \eta) < 0$, и по границе четвертого квадранта для $\cos(\chi + \eta) > 0$. Полюс (1.46) попадает внутрь контура интегрирования лишь при интегрировании по границе первого квадранта, когда $\cos(\chi + \eta) < 0$. Так что в этом случае интеграл по действительной полуоси k равен вкладу полюса и интегралу по положительной мнимой полуоси. Если же $\cos(\chi + \eta) > 0$, то этот интеграл сводится лишь к интегралу по отрицательной мнимой полуоси. В обоих случаях оценка интегралов по мнимым полюсам даёт

$$\int_0^\infty \frac{k e^{-kr \cos(\chi+\eta)} dk}{k^2 + k_0^2} \propto \frac{1}{r^2}, \quad (1.47)$$

то есть эти вклады убывают с расстоянием r от препятствия как r^{-2} . Как мы убедимся ниже, вклад полюса убывает с радиусом как $r^{-1/2}$, так что достаточно далеко от препятствия вкладом от мнимых полюсов в (1.45) можно пренебречь. Таким образом, волновая структура возникает лишь в области, где $\cos(\chi + \eta) < 0$, то есть когда угол μ между векторами \mathbf{r} и \mathbf{k} острый. Соответствующий вклад обусловлен полюсом (1.46) и равен

$$n_1 = -\frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos(\chi+\eta)} d\eta, \quad (1.48)$$

где k определяется по формуле (1.44) (с опущенным индексом “0”).

Перейдем к интегрированию по η . Вдали от препятствия при больших значениях фазы $\mathbf{kr} = rs$, где

$$s(\eta) = k(\eta) \cos(\chi + \eta), \quad (1.49)$$

интеграл (1.48) может быть вычислен методом стационарной фазы [58]. Этот метод предполагает, что если в подынтегральном выражении есть быстро осциллирующий множитель, то медленно меняющийся множитель можно вынести за знак интеграла, а наибольший вклад в интеграл дается в окрестностях точки, в которой первая производная от фазы s обращается в нуль. При этом пределы интегрирования можно расширить на всю действительную ось.

Раскладывая фазу в степенной ряд по η , получаем

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(-irs) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ir(s(\eta_0) + \frac{s''}{2!}(\eta - \eta_0)^2)) d\eta, \quad (1.50)$$

где учтено, что $s' = 0$. С учетом формулы $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, последний интеграл равен

$$\sqrt{\frac{2\pi}{r|s''(\eta_0)|}} e^{i(rs(\eta_0) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(s''(\eta_0)))}. \quad (1.51)$$

Применяя эту формулу к интегралу (1.48), получаем

$$n_1 = 2V_0 \sqrt{\frac{2}{\pi r s''(\eta_0)}} \cos(kr \cos \mu - \frac{\pi}{4}), \quad (1.52)$$

Фаза в выражении (1.52) с точностью до постоянного слагаемого совпадает с (1.32). Условие $\partial s / \partial \eta = 0$ даёт уравнение для точки стационарной фазы, из которого получается соотношение для углов η и μ (1.33). А с учетом определения μ можно получить соотношение (1.31), связывающее χ и η . Таким образом, данная теория полностью воспроизводит результаты более простого подхода, предложенного ранее.

Найдем, наконец, амплитуду “корабельной волны”. Для этого вычислим вторую производную от фазы

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} = 8 \frac{\cos \mu}{k^3} [(M^2 - 2)k^2 + 6(M^2 - 1)], \quad (1.53)$$

а также представим $\cos \mu$ как

$$\cos \mu = \frac{k^2}{2[(M^2 - 2)k^2 + 4(M^2 - 1)]^{1/2}}. \quad (1.54)$$

Подставляя (1.53) и (1.54) в (1.52), получим окончательное выражение для возмущения плотности конденсата

$$n_1 = V_0 \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} \frac{[(M^2 - 2)k^2 + 4(M^2 - 1)]^{1/4}}{[(M^2 - 2)k^2 + 6(M^2 - 1)]^{1/2}} \cos \left(kr \cos \mu - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.55)$$

Это выражение описывает “корабельную волну” параметрически через параметр η , где $\mu(\eta)$ и $k(\eta)$ задаются формулами (1.33) и (1.44) соответственно. Из него следует, что амплитуда данной волны спадает с расстоянием как $r^{-1/2}$. Вид данной волны изображен на рис.1.5.

Рассмотрим некоторые предельные случаи полученных решений. Перед препятствием угол η мал. Поэтому выражение для гребней волн (1.36) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &\cong -\frac{\phi}{2\sqrt{M^2 - 1}} + \frac{(2M^2 - 1)\phi}{4(M^2 - 1)^{3/2}} \eta^2, \\ y &\cong \frac{(2M^2 - 1)\phi}{2(M^2 - 1)^{3/2}} \eta, \end{aligned} \quad (1.56)$$

то есть кривые постоянной фазы имеют параболическую форму

$$x(y) \cong -\frac{\phi}{2\sqrt{M^2 - 1}} + \frac{(M^2 - 1)^{3/2}}{(2M^2 - 1)\phi} y^2. \quad (1.57)$$

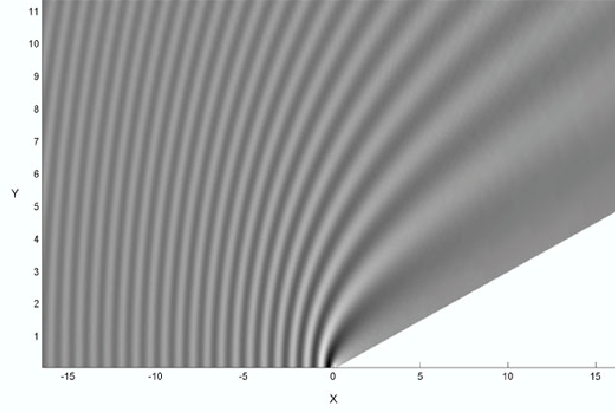


Рис. 1.5: Рассчитанная согласно формуле (1.55) с $M = 4$ волновая структура, генерируемая вне конуса Маха. (Показана верхняя половина структуры при $y > 0$.)

Непосредственно перед препятствием $\eta = 0$, что приводит к упрощению формул. Здесь

$$k = 2\sqrt{M^2 - 1}, \quad (1.58)$$

а выражение для возмущения плотности конденсата (1.55) переходит в

$$n_1 = 2V_0 \sqrt{\frac{(M^2 - 1)^{1/2}}{\pi(2M^2 + 1)|x|}} \cos \left[-2\sqrt{M^2 - 1}x - \frac{\pi}{4} \right], \quad y = 0, \quad x < 0. \quad (1.59)$$

График этой зависимости представлен на рис.1.7.

Если скорость течения очень велика $M \gg 1$, то существует область, где $M \cos \eta \gg 1$, и формулы существенно упрощаются. В частности, здесь

$$\chi \cong \pi - 2\eta, \quad \mu \cong \eta \cong (\pi - \chi)/2,$$

так что

$$k \cong 2M \sin \frac{\chi}{2} \gg 1 \quad (1.60)$$

и формула для колебаний плотности конденсата (1.55) задается явным образом в цилиндрических координатах

$$n_1 \cong V_0 \sqrt{\frac{2}{\pi Mr}} \cos \left(2Mr \sin^2 \frac{\chi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.61)$$

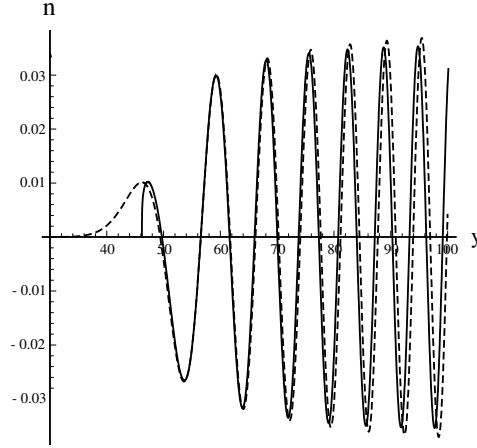


Рис. 1.6: Профиль колебания конденсата как функция координаты y при $x = 80$ в окрестности конуса Маха, находящегося в $y = 46$ для числа Маха $M = 2$; непрерывная линия соответствует профилю, построенному по формуле (1.55), штриховая линия была построена по формуле (1.70).

Выражения (1.36) также упрощаются и дают параболические кривые постоянной фазы

$$x = -\frac{\phi}{2M} + \frac{M}{2\phi}y^2. \quad (1.62)$$

Другой предельный случай составляют волны вблизи конуса Маха. Метод стационарной фазы оказывается не применим в этой области, т.к. необходимое для него условие $\phi \equiv r|k(\eta) \cos(\chi + \eta)| \gg 1$ не выполняется: как указывалось выше, вблизи конуса Маха $k \cos \mu \rightarrow 0$. Можно заметить, что в указанной области волновой вектор \mathbf{k} меняется вдоль конуса Маха существенно медленнее, чем поперек. Поэтому, для построения профиля волны вернемся к исследованию интеграла (1.41), в котором перейдем к новым координатам, направленным вдоль конуса Маха (ξ) и перпендикулярно к нему (τ)

$$x = \xi \cos \theta - \tau \sin \theta, \quad y = \xi \sin \theta + \tau \cos \theta, \quad (1.63)$$

где $\sin \theta = 1/M$ — угол Маха (см. (1.37)). Интеграл (1.41) в этом случае принимает вид

$$n_1 = \iint \frac{k^2 V(\mathbf{k}) e^{i(k_\xi \xi + k_\tau \tau)}}{(k_\xi M \cos \theta - k_\tau M \sin \theta)^2 - k^2(1 + k^2/4) + i0} \frac{dk_\xi dk_\tau}{(2\pi)^2}, \quad (1.64)$$

где k_ξ, k_τ — соответствующие компоненты волнового вектора. Основной вклад при интегрировании по k_ξ дает полюс, определяемый соотношениями

$$(k_\xi M \cos \theta - k_\tau M \sin \theta)^2 - k^2(1 + k^2/4) = 0, \quad k_\xi^2 + k_\tau^2 = k^2. \quad (1.65)$$

С учетом $k_\xi \ll k_\tau \ll 1$ и $k_\tau \sim k$, их решение дает

$$k_\xi = -\frac{k_\tau^3}{8\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (1.66)$$

Интегрирование по k_ξ приводит к интегралу

$$n_1 = \frac{V_0}{2\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{k_\tau^3 \xi}{8\sqrt{M^2 - 1}} - k_\tau \tau \right) dk_\tau \right]. \quad (1.67)$$

Этот интеграл выражается через производную от функции Эйри, явный вид которой задается формулой [59]

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{1}{3} \kappa^3 + z \kappa \right) d\kappa. \quad (1.68)$$

Воспользовавшись этим определением функции Эйри, представим (1.67) в виде

$$n_1 = -\frac{2V_0}{(M^2 - 1)^{1/6} (3\xi)^{2/3}} \text{Ai}' \left[-\frac{2(M^2 - 1)^{1/6}}{(3\xi)^{1/3}} \tau \right], \quad (1.69)$$

где Ai' означает производную функции Эйри по ее аргументу. Наконец, вернемся к координатам x и y и получим окончательное выражение для колебаний плотности вблизи конуса Маха

$$n_1 = -\frac{2V_0}{(M^2 - 1)^{1/6} [3(x \cos \theta + y \sin \theta)]^{2/3}} \times \\ \times \text{Ai}' \left[-\frac{2(M^2 - 1)^{1/6}}{[3(x \cos \theta + y \sin \theta)]^{1/3}} (-x \sin \theta + y \cos \theta) \right]. \quad (1.70)$$

На рисунке 1.6 приведено сравнение профиля волны, построенного по формуле (1.70) с профилем, построенным по (1.55) при постоянном значении x . Вблизи конуса Маха волновая картина описывается решением (1.70). На некотором удалении от конуса Маха оно переходит в решение (1.55), описывающее волну вдали от конуса Маха.

Обсуждение полученных результатов

Оба построенных нами выше решения (1.55) и (1.70) не применимы непосредственно вблизи препятствия. Это связано с рядом причин.

Во-первых, при выводе уравнений (1.55) и (1.70) в качестве потенциала препятствия использовалась δ -функция. В реальном эксперименте препятствие имеет конечный размер, что влияет на картину волн вблизи от него. Однако, на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размером препятствия, его структура не будет иметь значения для возникающей волновой картины.

Во-вторых, метод стационарной фазы, который использовался при выводе (1.55), также работает только при достаточном удалении от источника волн.

И, наконец, линейная теория, используемая нами при получении решений, ограничена в своей применимости только малоамплитудными волнами (см. условие применимости линейного приближения (1.17)). Очевидно, при достаточно жестком высоком потенциале препятствия, непосредственно вблизи от него данное условие будет нарушаться. Расстояние, на котором линейная теория становится применима, зависит от размера и жесткости препятствия.

Для проверки аналитической теории и определения области ее применимости нашими соавторами было произведено численное моделирование исследуемого процесса с помощью временного нелинейного уравнения Гросса-Питаевского. Моделировались абсолютно непроницаемые препятствия, а также препятствия с гауссовым профилем. Диаметр препятствия менялся, но не превышал нескольких безразмерных единиц, что соответствует нескольким корреляционным длинам на реальном эксперименте. Численный счет подтвердил, что “корабельные волны” появляются при $M > 1$. Сравнение с теорией продемонстрировало, что на расстояниях в несколько длин волн от препятствия теория хорошо согласуется с численным экспериментом. Для сравнения теории с численным счетом мы всюду будем пользоваться безразмерными единицами (1.12).

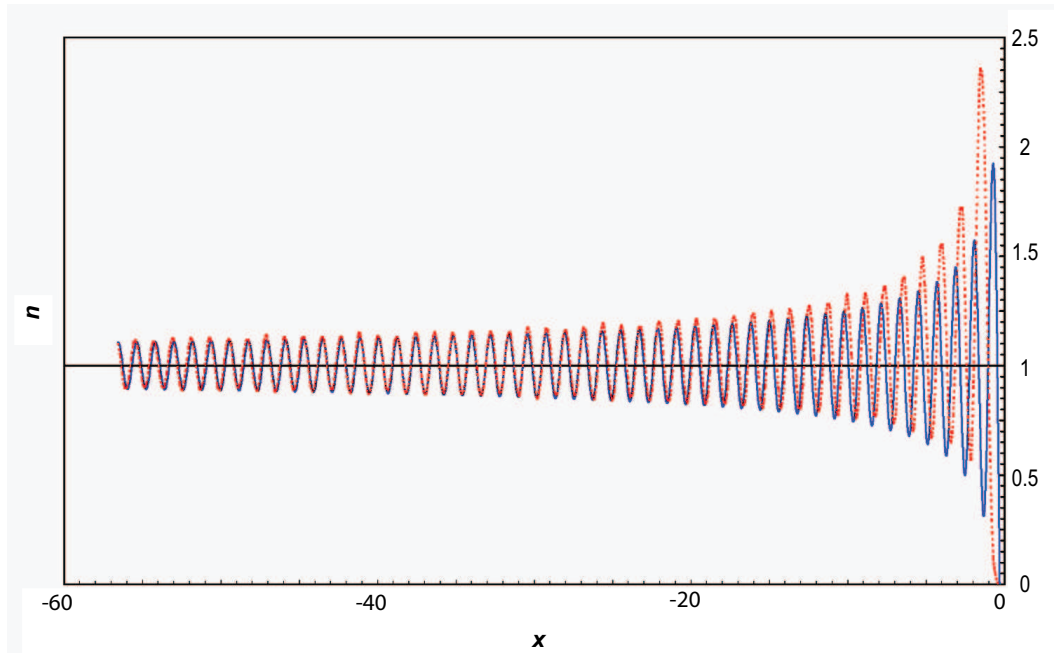


Рис. 1.7: Профиль “корабельной волны” перед препятствием: $x < 0$, $y = 0$. Конденсат течет слева направо с числом Маха $M = 2\sqrt{2}$. Сплошная линия соответствует численному моделированию полного нелинейного уравнения Гросса-Питаевского, а пунктир соответствует теоретической кривой, рассчитанной по формуле (1.59).

Одна безразмерная единица расстояния соответствует одному корреляционному радиусу на реальном эксперименте.

На рис.1.7 приведено сравнение профиля волны перед препятствием ($y = 0$), построенной по формуле (1.59) и численно (данные смотрите на подписи к рисунку). Для параметров данного счета условия применимости линейного приближения (1.17) дают совпадение при $|x| \gg 16$ (безразмерных единиц). Вблизи препятствия теоретическая и численная кривые не совпадают. Но на расстоянии нескольких длин волн от препятствия совпадение является довольно хорошим.

На рис.1.8 сравнивалась длина волны, рассчитанная по теоретической формуле (1.24) и численно. Их значения лежат очень близко и лишь слегка расходятся при увеличении числа Маха. Это говорит о хорошей применимости линейной теории.

Линии постоянной фазы (линии гребней), построенные по формулам

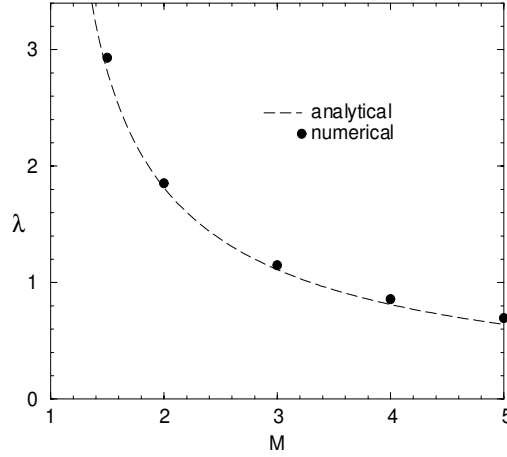


Рис. 1.8: Зависимость длины волны перед препятствием, рассчитанная численно по временному уравнению Гросса-Питаевского (точки), и аналитически (1.24) (пунктирная линия). Препятствие моделировалось непроницаемым цилиндром единичного радиуса.

(1.36), также дают хорошее совпадение с численным экспериментом. На рис. 1.9 линия гребня, построенная по аналитическим формулам, показана пунктиром. Она точно “ложится” на линию постоянной фазы, полученную в численном расчете.

Оценим характерные размеры волновой структуры в “корабельной волне”. Для этого приведем некоторые параметры из эксперимента по обтеканию бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия [22] (числа взяты из [24]). Облако в ловушке обладало сигарообразной формой с размерами $R_{x,y} = 30$ мкм и $R_z = 50$ мкм, число атомов составляло $N = 3.4 \times 10^6$. Скорость звука в центре облака равнялась $c_s = 1.2$ мм/сек, а скорость разлета частиц достигала 9.1 см/сек на краю облака. Корреляционная длина равнялась $\xi = 0.4$ мкм. Размер препятствия варьировался от 17 корреляционных длин до нескольких десятков. Эффективная скорость течения изменялась от десятка скоростей звука до нескольких сотен скоростей звука.

Как было показано выше, длина волны вдоль лучей, выходящих из препятствия, постоянна. Из (1.22) следует, что наименьшая длина волны будет вдоль луча, направленного от препятствия строго против течения

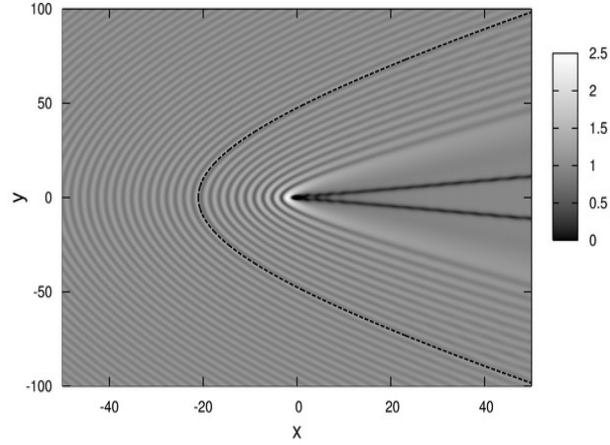


Рис. 1.9: Численный счет волновой картины, возникающей при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Число маха равно $M = 2$, радиус непроницаемого препятствия равен $r = 1$. Пунктирная линия соответствует линии постоянной фазы, рассчитанной по формуле (1.36) и сдвинутой на одну единицу длины влево для учета конечности размера препятствия.

($y = 0$). Вернувшись в (1.22) к размерным величинам, получим выражение для длины волны перед препятствием:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\pi\xi}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (1.71)$$

Для чисел Маха порядка единицы длина волны в стационарной волновой картине перед препятствием оказывается порядка корреляционной длины. Для данных из эксперимента [22] она будет иметь размер порядка микрона. При очень больших скоростях течения, $M \gg 1$, длина волны перед препятствием становится обратно пропорциональна числу Маха $\lambda \sim \xi/M$. Если ее размер уменьшится до среднего расстояния между частицами, то теория среднего поля перестанет работать и найденная нами волновая структура перед препятствием наблюдаться не будет.

Время выхода на стационар можно оценить как отношение расстояния от препятствия к групповой скорости с несущей длиной волны, равной стационарной длине волны в данной точке. Для волн перед препятствием время выхода на стационар на расстоянии в одну длину волны от

препятствия имеет вид

$$t \sim \frac{\lambda}{v_{gr}} \sim \frac{\xi}{c_s} \frac{M}{(M^2 - 1)^{3/2}}. \quad (1.72)$$

При $M \gg 1$ и значениях из [22], получаем оценку $t \sim 10^{-3} \times 1/M^2$ сек.

1.4 Наклонные периодические нелинейные структуры

Как говорилось во введении, при сверхзвуковом обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия, кроме линейных волн и вихрей, теория предсказывает существование темных солитонов (см. рис. 1.2). В случае, если размер препятствия не очень большой (порядка корреляционной длины), то эти солитоны представляют собой две полосы пониженной плотности, выходящие из препятствия. Профили наклонных темных солитонов были получены в работе [23]. Однако, численный счет показал, что с увеличением размера препятствия количество солитонов увеличивается. В результате из препятствия выходит своеобразный “веер” темных солитонов. Теория таких структур для некоторого диапазона параметров и для препятствия в виде тонкого тела, была развита в работах [25]. В рассмотренном случае уравнение Гросса-Питаевского сводилось к одномерному нелинейному уравнению Шредингера. Веер солитонов рассматривался как дисперсионная ударная волна, ее профиль был построен методом Уизема. Однако, в реальном эксперименте препятствие не является тонким телом и необходимые соотношения для параметров не обязательно выполняются. В этом случае следует решать полное уравнение Гросса-Питаевского, которое является неинтегрируемым методом обратной задачи рассеяния. Однако, подход Уизема может быть применен для описания некоторых параметров солитонного веера и в этом случае. В теории Уизема дисперсионная ударная волна рассматривается как промодулированная нелинейная периодическая волна на размерах в одну длину волны и длительностях в один период [57, 60]. Поэтому, для применения теории Уизема в первую очередь

необходимо найти соответствующие стационарные нелинейные периодические решения, наклоненные относительно течения конденсата. Именно этим решениям посвящен данный раздел диссертации.

Для нахождения интересующих нас решений вернемся к уравнениям (1.14), где внешний потенциал положим равным нулю. Кроме того, мы интересуемся стационарным решением, поэтому уберем производные по времени

$$\begin{aligned} (nu)_x + (nv)_y &= 0, \\ uu_x + vu_y + n_x + \left(\frac{n_x^2 + n_y^2}{8n^2} - \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4n} \right)_x &= 0, \\ uv_x + vv_y + n_y + \left(\frac{n_x^2 + n_y^2}{8n^2} - \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4n} \right)_y &= 0, \end{aligned} \quad (1.73)$$

Введем наклонную координату $\theta = x - ay$, где a — тангенс угла наклона гребней волн к оси y (в данном решении гребни волн лежат на параллельных прямых). Будем считать, что все неизвестные зависят только от координаты θ : $n = n(\theta)$, $u = u(\theta)$, $v = v(\theta)$. Первое уравнение из (1.73) дает

$$u - av = \frac{A}{n}, \quad (1.74)$$

где A — константа интегрирования. С учетом (1.74) вторые два уравнения переходят в

$$n_\xi^2 - 2nn_{\xi\xi} + 2n^3 - \frac{2B}{1+a^2}n^2 + \frac{A^2}{1+a^2} = 0, \quad (1.75)$$

где B это еще одна константа интегрирования, а также для удобства введена переменная ξ

$$\xi = \frac{2\theta}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{2(x-ay)}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (1.76)$$

Можно проверить прямой подстановкой, что уравнение (1.75) имеет интеграл

$$n_\xi^2 = n^3 - \frac{2B}{1+a^2}n^2 - \frac{2C}{1+a^2}n - \frac{A^2}{1+a^2}, \quad (1.77)$$

где C — новая константа. Уравнение имеет решение, выражающееся через эллиптические функции (по эллиптическим функциям см., например, [59]). Чтобы выписать его в явном виде, обозначим нули полинома в правой части уравнения (1.77) как p_1, p_2, p_3

$$n_\xi^2 = (n - p_1)(p_2 - n)(p_3 - n), \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3, \quad (1.78)$$

и предположим, что $n = p_1$ при $\xi = 0$. В результате, получаем решение

$$n = p_1 + (p_2 - p_1) \operatorname{sn}^2(\sqrt{p_3 - p_1} \xi/2; m), \quad (1.79)$$

где $\operatorname{sn}(\theta; m)$ — эллиптический синус Якоби, а

$$m = \frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1} \quad (1.80)$$

— его модуль. Константы A, B, C связаны с нулями p_1, p_2, p_3 соотношениями

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{2B}{1 + a^2}, \quad p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = -\frac{2C}{1 + a^2}, \quad p_1 p_2 p_3 = \frac{A^2}{1 + a^2}. \quad (1.81)$$

Следует заметить, что компоненты скорости (u, v) не определяются однозначно константами p_1, p_2, p_3 и a . Действительно, если n известно, у нас есть только одно уравнение для определения u и v . Еще одно уравнение можно получить, если учесть, что течение потенциально. Получаем условие

$$u_y = v_x, \quad (1.82)$$

которое при переходе к переменной ξ дает

$$au + v = D. \quad (1.83)$$

Здесь D является еще одним интегралом движения. Его существование означает, что для одинаковых периодических структур с параметром наклона a могут существовать различные потенциальные поля скоростей. Если мы определим u и v в какой-либо точке, то D становится известной и определяет компоненты скорости на всей плоскости. Примером

использования полученного решения может служить солитонное решение из [23]. Определив решение на бесконечности $|x| \rightarrow \infty$, как $n = 1$, $u = M = \text{const}$, $v = 0$, где M - число Маха и положив $m = 1$ в уравнении (1.79), приходим к решению в виде темного солитона

$$n = 1 - \frac{1 - q}{\text{ch}^2[\sqrt{1 - q}(x - ay)/(1 + a^2)]}, \quad (1.84)$$

где $q = M^2/(1 + a^2)$, а компоненты скорости определяются уравнениями

$$u = \frac{M(1 + a^2n)}{(1 + a^2)n}, \quad v = -\frac{aM(1 - n)}{(1 + a^2)n}. \quad (1.85)$$

Рассмотрим теперь несколько частных случаев, допускающих асимптотические разложения системы (1.73).

Как было отмечено в [23], если мы будем рассматривать течение БЭК как малое отклонение от однородного сверхзвукового течения с параметрами $n = 1$, $u = M$, $v = 0$ ($M > 1$), то можно сделать асимптотическое разложение

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \quad u = M + \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \quad v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad (1.86)$$

где $\varepsilon \ll 1$ является малым параметром. Подстановка (1.86) в (1.73) и переход к новым координатам

$$\zeta = \varepsilon^{1/2}(x - Vy), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}y, \quad (1.87)$$

приводят по теории возмущений к соотношениям

$$u_1 = -\frac{n_1}{M}, \quad v_1 = \frac{V}{M}n_1, \quad V = \sqrt{M^2 - 1}, \quad (1.88)$$

где n_1 удовлетворяет уравнению Кортевега-де-Вриза (КдВ)

$$n_{1,\tau} - \frac{3M^2}{2\sqrt{M^2 - 1}}n_1n_{1,\zeta} + \frac{M^4}{8\sqrt{M^2 - 1}}n_{1,\zeta\zeta} = 0. \quad (1.89)$$

Периодическое решение этого уравнения хорошо известно (см., например, [60]), так что, возвращаясь к декартовым координатам (x, y) , получаем уравнение для профиля плотности

$$n = 1 - \frac{1}{2}M^2\varepsilon(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2) + M^2\varepsilon(\lambda_3 - \lambda_2)\text{sn}^2 \left[\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1} \varepsilon^{1/2}(x - ay), m \right], \quad (1.90)$$

где

$$a = \sqrt{M^2 - 1} - \frac{\varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)M^2}{4\sqrt{M^2 - 1}}, \quad m = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1}, \quad (1.91)$$

а $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ — параметры, возникающие при использовании метода “конечнозонного интегрирования” уравнения КдВ (см. [60]).

Определим связь между решением уравнения Гросса-Питаевского (1.79) и его малоамплитудным решением (1.90). Для этого, представим константы p_1, p_2, p_3 как разложение по малому параметру ε

$$p_i = 1 + \varepsilon p_i^{(1)} + \dots, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.92)$$

а затем подставим разложения (1.86), (1.88), (1.92) в периодическое решение (1.79) чтобы получить решение (1.90), но выраженное через параметры $p_i^{(1)}$. Сравнение с (1.90) дает соотношения

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \frac{1}{2}M^2\varepsilon(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2), \\ p_2 &= 1 - \frac{1}{2}M^2\varepsilon(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3), \\ p_3 &= 1 - \frac{1}{2}M^2\varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3), \end{aligned} \quad (1.93)$$

Используя аналогичное асимптотическое разложение для a ,

$$a = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \dots, \quad (1.94)$$

соотношение (1.74) и последнее соотношение из (1.81), получаем уравнение (1.91) для параметра наклона. Из (1.93) получим уравнения, задающие λ_j через p_j ,

$$\lambda_1 = \frac{p_1 + p_2 - 2}{M^2\varepsilon}, \quad \lambda_2 = \frac{p_1 + p_3 - 2}{M^2\varepsilon}, \quad \lambda_3 = \frac{p_2 + p_3 - 2}{M^2\varepsilon}. \quad (1.95)$$

Солитонное решение уравнения КдВ соответствует $m = 1$ в (1.90). В параметрах p_j , имеем $p_2 = p_3 = 1$ (см. 1.80), и с учетом (1.95) получаем $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ и $\lambda_3 = 0$. Отсюда

$$p_1 = 1 + M^2\varepsilon\lambda \quad (1.96)$$

и, так как $p_1 \leq p_2 \leq p_3$, имеем $p_1 \leq 1$ и $\lambda \leq 0$. Из уравнения (1.90) при $m = 1$ получим профиль темного солитона

$$n = 1 - \frac{-M^2 \varepsilon \lambda}{\text{ch}^2[\sqrt{-\varepsilon \lambda}(x - ay)]}, \quad (1.97)$$

а из (1.91) его параметр наклона

$$a = \sqrt{M^2 - 1} - \frac{\varepsilon \lambda M^2}{2\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (1.98)$$

Так как $\lambda \leq 0$, из (1.98) видно, что $a \geq a_M$, где $a_M = \sqrt{M^2 - 1}$, то есть мелкий (КдВ) темный солитон всегда находится вблизи конуса Маха

Введя полуширину солитона κ

$$\kappa = 2\sqrt{-\varepsilon \lambda}, \quad (1.99)$$

уравнение (1.99) можно написать в более удобной форме

$$n = 1 - \frac{M^2 \kappa^2}{4\text{ch}^2[\kappa(x - ay)/2]}, \quad (1.100)$$

которую можно получить непосредственно из уравнения (1.84) в мало-амплитудном пределе [23].

Таким образом, мы установили асимптотическую связь между стационарным периодическим двумерным решением уравнения Гросса-Питаевского, характеризуемого четырьмя независимыми параметрами и известным трех-параметрическим периодическим решением уравнения КдВ.

Рассмотрим теперь другой частный случай. Если число Маха много больше единицы ($M \gg 1$), то система (1.73) может быть сведена к нелинейному уравнению Шредингера [25]. Действительно, вводя новые переменные

$$u = M + u_1 + O(1/M), \quad T = x/2M, \quad Y = y, \quad (1.101)$$

где $u_1 \rightarrow 0$ при $|Y| \rightarrow \infty$, приходим, оставляя величины порядка M^{-1} , к системе

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n_T + (nv)_Y &= 0, \\ \frac{1}{2}v_T + vv_Y + n_Y + \left(\frac{n_Y^2}{8n^2} - \frac{n_{YY}}{4n} \right)_Y &= 0, \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\frac{1}{2}u_{1T} + vu_{1Y} = 0. \quad (1.103)$$

Разложение условия потенциальности течения (1.82) вместе с уравнением (1.103) дают $u_1 \equiv 0$. Уравнения (1.102), (1.103) задают гидродинамическую форму одномерного нелинейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_T + \Psi_{YY} - 2|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (1.104)$$

для комплексной переменной

$$\Psi = \sqrt{n} \exp\left(i \int^Y v(Y', t) dY'\right). \quad (1.105)$$

Уравнение НУШ, в отличие от (1+1)-мерного уравнения Гросса-Питаевского, представляет (0+2)-мерную асимптотическую аппроксимацию, а его решение определяется новым набором независимых параметров. Периодическое решение уравнения (1.104) хорошо известно (см., напр., [60]) и для плотности $n = |\Psi|^2$ может быть представлено в форме

$$n = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) \operatorname{sn}^2\left[\sqrt{\nu_3 - \nu_1}\left(y - \frac{s_1}{2M}x\right), m\right], \quad (1.106)$$

где

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \quad m = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)} \quad (1.107)$$

а $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$ выражаются через параметры $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ следующим образом

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)^2, \\ \nu_2 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)^2, \\ \nu_3 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2, \end{aligned} \quad (1.108)$$

и $m = (\nu_2 - \nu_1)/(\nu_3 - \nu_1)$.

Для $M \gg 1$ стационарная волна имеет большой параметр наклона к оси y , $a \gg 1$, так что общее решение (1.79) принимает форму

$$n = p_1 + (p_2 - p_1) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{p_3 - p_1}(y - x/a); m\right). \quad (1.109)$$

Так как асимптотическое решение (1.79) уравнения Гросса-Питаевского характеризуется четырьмя параметрами p_1, p_2, p_3, a , то их соответствие

четырем параметрам $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, s_1)$ решения (1.106) может быть установлено прямым сравнением решений

$$p_1 = \nu_1, \quad p_2 = \nu_2, \quad p_3 = \nu_3, \quad a = \frac{2M}{s_1}. \quad (1.110)$$

Решение в виде темного солитона из выражения (1.106) может быть получено при $\lambda_2 = \lambda_3$, что соответствует $m = 1$. Чтобы фоновая плотность равнялась единице, следует выбрать

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_4 = 1. \quad (1.111)$$

Обозначая $\lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$, получим из (1.110), (1.107)

$$a = \frac{M}{\lambda}. \quad (1.112)$$

Итак, в солитонном пределе выражение для плотности имеет вид

$$n = 1 - \frac{1 - \lambda^2}{\text{ch}^2[\sqrt{1 - \lambda^2}(y - x/a)]}, \quad (1.113)$$

совпадающий с соответствующим солитонным решением, полученным в [23] в пределе $M \gg 1$. Без потери общности, рассмотрим волны только в верхней полуплоскости ($a > 0$), тогда из (1.111) следует, что $0 \leq \lambda \leq 1$. Значит, $a > a_M$ и, следовательно, темный солитон при больших (по сравнению со скоростью звука) скоростях течения всегда находится внутри конуса Маха.

Если солитон НУШ является мелким, то он должен совпадать с КдВ солитоном в пределе $M \gg 1$. Действительно, введя $\lambda^2 = 1 - M^2\kappa^2/4$, где $M\kappa \ll 1$, получим КдВ солитон (1.100), но на этот раз с a , определяемым по формуле

$$a = M/\sqrt{1 - M^2\kappa^2/4} \cong M + \frac{1}{8}M^3\kappa^2 \quad (1.114)$$

которая является аппроксимацией (1.91) при соответствующем выборе λ_i и $M \gg 1$.

Связь между параметрами λ для случая КдВ и малоамплитудного предела НУШ дается выражением

$$\lambda_{NLS}^2 = 1 + M^2\varepsilon\lambda_{KdV}. \quad (1.115)$$

Так как $\lambda_{KdV} \leq 0$, имеем $\lambda_{NLS} \leq 1$ плюс $1 - \lambda_{NLS} \ll 1$.

Кроме того, решение (1.79) имеет линейное решение при $m \ll 1$

$$n = 1 - \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \cos \left[2\sqrt{\frac{p_3 - p_1}{1 + a^2}}(x - ay) \right], \quad (1.116)$$

где нужно выбрать $(p_1 + p_2)/2 = 1$, чтобы фон плотности равнялся единице. Можно также показать, что оно существует вне конуса Маха. Это решение соответствует рассмотренным ранее “корабельным волнам” без учета их амплитудной модуляции.

Решения в виде темных солитонов наблюдались на численном эксперименте при выборе размера препятствия порядка корреляционной длины. В этом случае образуются два симметричных относительно оси x солитона. При увеличении размера препятствия количество солитонов увеличивается. Но на эксперименте [22] темные солитоны не наблюдались, а за препятствием возникала область тени. Это может быть связано с тем, что волновая картина была далека от стационарной, течение не было однородным, а размер препятствия был слишком велик — от полутора десятков корреляционных длин. Поэтому можно предположить, что для наблюдения стационарных темных солитонов, генерируемых при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия, размер препятствия должен быть порядка нескольких корреляционных длин. Для данных эксперимента [22] этот размер должен составлять от половины микрона до нескольких микрон.

1.5 Заключение

В рамках теории среднего поля построена стационарная волновая картина, возникающая при однородном сверхзвуковом обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия для двухмерной геометрии. Показано, что волновая картина состоит из двух областей с различными свойствами, разделенных конусом Маха. Вне конуса Маха расположены “корабельные волны”. На достаточном удалении от препятствия они

описываются линейной теорией. Внутри конуса Маха образуются нелинейные структуры. Для этой области построены наклонные нелинейные периодические решения уравнения Гросса-Питаевского, рассмотрены их частные случаи и подробно изучена связь между ними. В качестве предельного случая нелинейных периодических волн получены решения в виде наклонных темных солитонов, впервые рассмотренных в работе [23]. Изучены их простые свойства. Показано, что мелкие солитоны находятся вблизи конуса Маха, а глубокие — под малыми углами к оси x , вдоль которой направлено течение. Ширина этих солитонов имеет размер порядка корреляционной длины.

Теоретическое описание стационарных “корабельных волн” плотности, расположенных вне конуса Маха показало, что стационарная волновая структура существует только для чисел Маха превышающих единицу. Найдены аналитические выражения, описывающие линии гребней. Получены решения для профиля волн в двух предельных случаях — вблизи конуса Маха и вдали от него. Показано, что в переходной области эти решения сшиваются. Таким образом, найденные решения описывают волновую картину во всей области вне конуса Маха. Исключение составляет область непосредственно вблизи препятствия, где перестает работать линейная теория. Из сравнения с численным счетом следует, что для препятствий размером порядка корреляционной длины линейная теория хорошо описывает “корабельную волну” на расстояниях от препятствия в несколько длин волн.

2 Дифракция света на тонкой проволочке

В данной главе рассматривается дифракция света на тонкой проволочке в среде с отрицательной нелинейной добавкой к показателю преломления. Свет падает на проволочку под небольшим углом. В параксиальном приближении рассчитаны параметры возникающей дифракционной картины. Показано, что в ней присутствуют темные солитоны, оптические вихри и малоамплитудные волны. Исследована зависимость малоамплитудных волн от вида нелинейности, построены их профили. Построены профили темных солитонов и исследована их устойчивость относительно распада на вихри. На примере нелинейности с насыщением показана зависимость параметров устойчивости темных солитонов от конкретного вида нелинейности.

2.1 Основные уравнения

Зависимость показателя преломления света в среде от интенсивности падающего пучка приводит к искривлению волнового фронта, что качественно меняет дифракционную картину, возникающую в таких средах по сравнению с классической линейной дифракцией. В большинстве интересных нас практических случаев нелинейность показателя преломления может рассматриваться как зависящая от интенсивности добавка к линейному показателю преломления в среде. Распространение монохроматических пучков в нелинейной среде в параксиальном приближении описывается нелинейным уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} \psi + \frac{k_0}{n_0} \delta n (|\psi|^2) \psi + V(\mathbf{r}) \psi = 0, \quad (2.1)$$

где ψ — это огибающая электрического поля с волновым числом $k_0 = 2\pi n_0/\lambda$, z — координата вдоль распространения пучка, x, y — поперечные координаты, $\mathbf{r} = (x, y)$, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — поперечный лапласиан, n_0 — линейный показатель преломления, $V(\mathbf{r}, z)$ описывает “потенциал” препятствия, на котором происходит дифракция. Это уравнение аналогично уравнению Гросса-Питаевского, описывающему динамику бозе-эйнштейновского конденсата. Чтобы уравнение (2.1) описывало

конденсат с отталкивающим взаимодействием между атомами, нелинейная добавка к показателю преломления $\delta n(|\psi|^2)$ должна быть отрицательной. Ее зависимость от интенсивности $|\psi|^2$ различается для разных сред и определяется механизмом ее возникновения (о различных видах оптической нелинейности и свойствах решений соответствующих уравнений см., например, [33, 61]). Наиболее изученной является керровская нелинейность

$$\delta n = -n_2|\psi|^2. \quad (2.2)$$

Вне зависимости от физического механизма возникновения нелинейности при больших значениях интенсивности в большинстве случаев добавка к показателю преломления выходит на насыщение. Феноменологически это можно описать следующей зависимостью:

$$\delta n = -n_2 \frac{\rho}{\rho + \rho_d}, \quad (2.3)$$

где $\rho = |\psi|^2$ — интенсивность света в пучке, ρ_d — интенсивность насыщения.

Для описания оптических свойств фоторефрактивных сред с фотоэлектрической нелинейностью эта зависимость может быть строго обоснована [62]

$$\delta n = -\frac{1}{2}n_0^3 r_{33} E_p \frac{\rho}{\rho + \rho_d}, \quad (2.4)$$

где E_p внешнее электрическое поле, r_{33} электрооптический индекс.

В случае керровской нелинейности (2.2) уравнение (2.1) совпадает с точностью до коэффициентов с уравнением Гросса-Питаевского. Его решения обсуждались в предыдущей главе. Упомянем среди них лишь пространственные темные солитоны, вихри и дисперсионные ударные волны. Дифракционные эффекты, приводящие к формированию данных структур в дефокусирующих керровских средах, широко изучались как экспериментально, так и теоретически [33]. В частности, в одной из ранних работ [34], пространственные темные солитоны наблюдались на дифракционной картине от пары скрещенных полос и от составленных из скрещенных полос решеток.

В случае не керровской нелинейности уравнение (2.1) может оказаться не интегрируемым методом обратной задачи рассеяния. Это относится, в частности, к нелинейности с насыщением (2.4). Тем не менее, аналитические методы и численный счет показывают, что при дифракции в таких средах будут возникать нелинейные структуры, сходные со структурами, возникающими при керровской нелинейности — солитоны, оптические вихри и дисперсионные ударные волны [63, 66]. Строго говоря, возникающие при таких нелинейностях структуры не будут являться солитонами. У них могут быть другие параметры устойчивости, их соударение может оказаться неупругим и пр. [61]. Для каждого конкретного вида нелинейности свойства солитонов и других структур следует изучать отдельно.

Нелинейные структуры в средах, отличных от керровских, наблюдались в ряде экспериментальных работ. В частности, для нелинейности вида (2.4) в экспериментах [37] наблюдались темные солитоны и их распад на оптические вихри, а в экспериментах [38] наблюдалась волновая структура, аналогичная дисперсионным ударным волнам, при дифракции от щели и от круглого отверстия.

В случае, если дифракция вызывает малое изменение в фоновой интенсивности пучка, то для описания возникающей волновой картины достаточно воспользоваться линейным приближением уравнения (2.1). Как и в предыдущей главе, после линеаризации уравнения (2.1) и подстановки решения в виде гармонической волны, получим закон дисперсии для малых модуляций интенсивности

$$k_z = \sqrt{c_s^2 k^2 + \left(\frac{k^2}{2k_0}\right)^2}, \quad (2.5)$$

где “скорость звука” определяется из соотношения

$$c_s^2 = \frac{1}{n_0} \rho_0 f'(\rho) \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad (2.6)$$

где $f(\rho) = |\delta n(\rho)|$, а $\rho_0 = |\psi_0|^2$ — фоновая интенсивность.

Корреляционная длина ξ , которая, в частности, определяет размер темных солитонов и вихрей, определяется из условия (см. раздел 1.1)

$$c_s^2 k_\xi^2 \sim \left(\frac{k_\xi^2}{2k_0} \right)^2,$$

откуда имеем

$$\xi \sim \frac{1}{k_\xi} \sim \frac{1}{2c_s k_0}. \quad (2.7)$$

Для керровской нелинейности (2.2) имеем

$$c_s^2 = \frac{n_2 \rho_0}{n_0}, \quad \xi = \frac{1}{2k_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_2 \rho_0}}. \quad (2.8)$$

Нелинейность с насыщением (2.4) дает

$$c_s^2 = \frac{1}{2} n_0^2 r_{33} E_p \frac{\gamma}{(1 + \gamma)^2}, \quad \xi = \frac{1 + \gamma}{k_0 n_0 \sqrt{2 r_{33} E_p \gamma}}, \quad (2.9)$$

где $\gamma = \rho_0 / \rho_d$ — параметр насыщения.

Для удобства последующих вычислений перепишем уравнение (2.1) в безразмерном виде

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta_\perp \psi - f(|\psi|^2) \psi + V(\mathbf{r}) \psi = 0, \quad (2.10)$$

Параметры обезразмеривания зависят от конкретного вида нелинейности. В частности, для нелинейности с насыщением (2.4) можно произвести следующую замену переменных

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} k n_0^2 r_{33} E_p z, \quad \tilde{x} = k n_0 \sqrt{\frac{1}{2} r_{33} E_p} x, \quad \tilde{y} = k n_0 \sqrt{\frac{1}{2} r_{33} E_p} y, \quad \tilde{\psi} = \psi / \sqrt{\rho_0}, \quad (2.11)$$

В результате получим уравнение

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \Delta_\perp \psi - \frac{\gamma |\psi|^2}{1 + \gamma |\psi|^2} \psi + V(\mathbf{r}) \psi = 0. \quad (2.12)$$

При этом выборе переменных $\rho_0 = 1$ и скорость звука становится равной

$$c_s = \frac{\sqrt{\gamma}}{1 + \gamma}. \quad (2.13)$$

Отметим, что если эффект насыщения мал, $\gamma|\psi|^2 \ll 1$, то уравнение (2.12) переходит в стандартное нелинейное уравнение Шредингера с керровской нелинейностью с $n_2 = -n_0^3 r_{33} E_p / (2\rho_d)$.

В следующем разделе будет предложена принципиальная схема эксперимента, который моделировал бы волновую структуру, возникающую при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия, в оптике. Это позволило бы наблюдать новый дифракционный эффект, в котором присутствуют как линейные, так и нелинейные структуры — темные солитоны и вихри. При расчете дифракционной картины мы будем исходить из уравнения (2.10) с произвольным видом нелинейности. Для иллюстрации полученных решений будем использовать нелинейность с насыщением (2.4), т.к. фоторефрактивные среды, в которых она осуществляется, являются в настоящее время наиболее удобными и часто используемыми в экспериментах по изучению нелинейной дифракции.

2.2 Постановка задачи

В нашем мысленном эксперименте монохроматическая плоская волна падает под небольшим углом на тонкую отражающую проволочку, введенную в фоторефрактивную среду. На изображенной на рис. 2.2 схеме монохроматический пучок подается на фоторефрактивную среду снизу. На выходе из среды (на противоположной грани) наблюдается дифракционная картина. Ось z направлена вдоль проволочки, дифракционная картина наблюдается в плоскости, перпендикулярной к оси z .

Покажем аналогию данной задачи с задачей об обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. “Высота” среды z соответствует времени. Скорость течения “квантовой жидкости” U равна отношению пройденного пучком пути в плоскости, перпендикулярной проволочке, ко “времени” z , т.е. тангенсу угла α между направлением распространения пучка и проволочкой. По аналогии с течением квантовой жидкости можно ожидать, что если угол наклона будет меньше скорости звука c_s , определяемой из соотношения (2.6), то на дифракционной картине

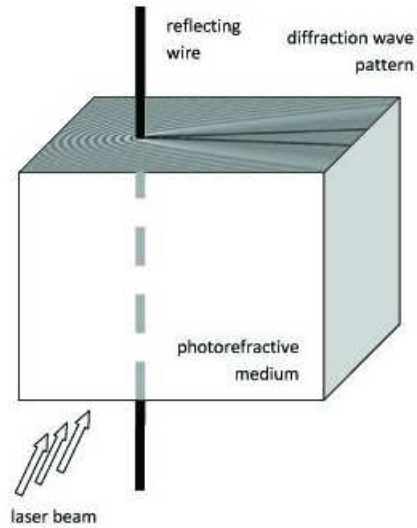


Рис. 2.1: Схема формирования нелинейной дифракционной картины от тонкой проволоочки в оптически нелинейной среде.

будут наблюдаться только вихри, а при еще меньшем угле какая-либо дифракционная картина пропадет, что будет соответствовать сверхтекучему режиму течения. Мы будем рассматривать “сверхзвуковое течение”, то есть $\text{tg } \alpha > c_s$. Кроме того, уравнение (2.10) написано в параксиальном приближении. Поэтому для угла α должно выполняться соотношение

$$c_s < \alpha \ll 1. \quad (2.14)$$

Стоит отметить, что условие параксиальности не является строго необходимым. Даже если оно будет нарушаться, это может привести к количественному несовпадению наблюдаемой картины с теорией, однако, качественно вид дифракционной картины останется тем же.

Ограничением теории является приближение плоской волны, в то время как распределение интенсивности в реальном пучке неоднородно по пространству. Однако, если диаметр пучка будет существенно превышать диаметр проволоочки, то вблизи проволоочки его неоднородностью можно пренебречь. Наличие неоднородности распределения интенсивности по краям пучка приведет к искажению дифракционной картины, но

не к ее качественным изменениям.

Для того, чтобы наблюдалась полная дифракционная картина, включающая в себя как линейные волны, так и нелинейные структуры, диаметр проволоочки должен быть порядка корреляционной длины (2.7). Если диаметр будет много меньше, то можно ожидать, что дифракционная картина будет состоять только из линейных волн, т.к. нелинейные структуры не смогут сформироваться. Если же диаметр проволоочки окажется много больше корреляционной длины, то за ней может возникнуть область тени, которая исказит дифракционную картину. Практическое введение отражающей проволоочки в фоторефрактивную среду является задачей экспериментаторов. Однако, можно указать несколько способов для реализации неоднородности среды такого типа. Во-первых, существуют жидкие и газообразные среды с отрицательной нелинейной добавкой к показателю преломления [34]. Введение проволоочки в такие среды не представляется очень трудоемким. Что касается твердых сред, то роль проволоочки может выполнять цилиндрическое отверстие. За счет полного внутреннего отражения, свет будет отражаться от него, как от проволоочки. В работах [64, 65] предложен способ реализации цилиндрического препятствия лазерным излучением. За счет изменения показателя преломления среды опорным пучком, сигнальный пучок рассеивается на нем за счет полного внутреннего отражения.

Приведем оценки для некоторых сред с отрицательной добавкой к показателю преломления. В одном из первых экспериментов [34] по наблюдению пространственных солитонов лазерный луч распространялся в парах натрия. Интенсивность пучка составляла $I \simeq 1.3 \cdot 10^2$ Вт/см², $n_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ см²/Вт. Подставив эти значения в (2.8), получим оценку для скорости звука $c_s \simeq 6 \cdot 10^{-3}$, откуда следует, что соотношение для угла α (2.14) может быть выполнено. Для корреляционной длины получаем оценку $\xi \simeq 20$ мкм. Эта величина определяет размер проволоочки, а также характерный размер получаемых на дифракционной картине структур.

Произведем аналогичные оценки для еще одного вещества — кристалла SBN:75 ($\text{Sr}_{0.75}\text{Ba}_{0.25}\text{Nb}_2\text{O}_6$), обладающего фоторефрактивными свойствами [38]. О важности таких сред в экспериментах по нелинейной оптике уже говорилось ранее. Для определения скорости звука и корреляционной длины воспользуемся формулами (2.9). Необходимые числа взяты из [38]: $E_p = -125$ В, $r_{33} = 1.3 \cdot 10^{-6}$ м/В, $n_0 = 2.3$, $k_0 = 30 \cdot 10^{-6}$ м $^{-1}$. Выберем $\gamma \equiv \rho_0/\rho_d = 1$ (значение $\rho_d \simeq 10$ мВт/см 2). Для этих значений получаем $c_s \simeq 10^{-2}$ и $\xi \simeq 2$ мкм. Значение корреляционной длины оказывается очень маленьким, однако оно может быть увеличено, например, за счет увеличения значения γ .

Приведенные оценки показывают принципиальную возможность наблюдения предлагаемой дифракционной картины.

В случае керровской нелинейности дифракционная картина качественно должна совпадать с волновой картиной, возникающей при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Т.е. можно определить конус Маха

$$\sin \theta = \frac{1}{M}, \quad M = \frac{U}{c_s}, \quad (2.15)$$

где U — “скорость течения” (см. выше), а c_s — скорость звука (2.8). Внутри конуса Маха будут находиться темные солитоны и вихри, а снаружи — линейные “корабельные” волны. В случае нелинейности, отличной от керровской, можно ожидать, что общая картина сохранится, но скорость звука в (2.15) будет определяться по общей формуле (2.6). Закон дисперсии линейных волн (2.5) отличается от керровского случая только значением скорости звука, поэтому структуры линейных волн будут в обоих случаях сходными. Кроме того, можно ожидать, что внутри конуса Маха образуются солитоноподобные структуры и вихри. Однако профили этих структур и условия устойчивости могут заметно отличаться от керровского случая.

Численный счет, выполненный для нелинейности с насыщением (см. рис. 2.2) подтверждает правильность указанных предположений. На рисунках рассчитана дифракционная картина для различных длин оптиче-

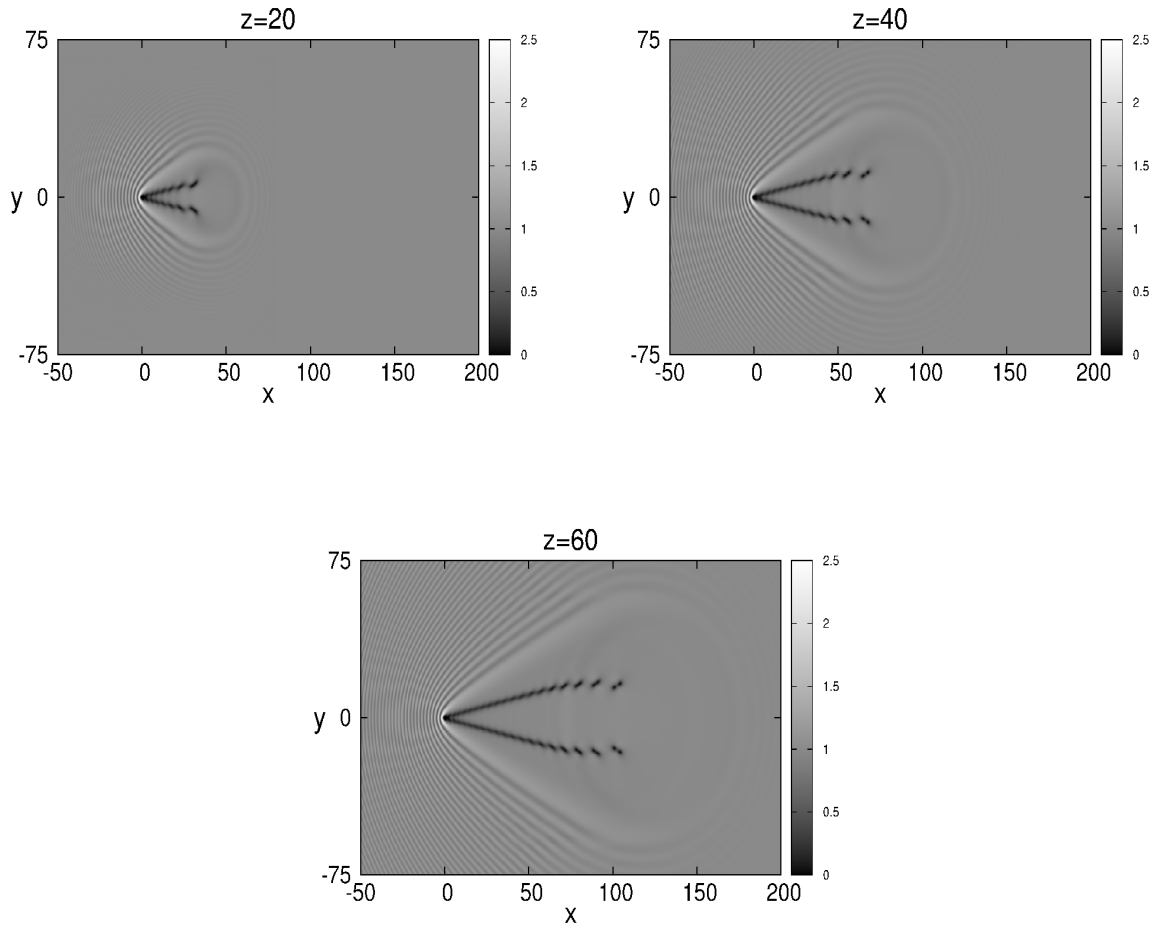


Рис. 2.2: Развитие дифракционной картины с увеличением длины фоторефрактивной среды z . Рисунки получены с помощью решения уравнения (2.12) с $V(\mathbf{r})$ соответствующему идеально отражающей проволочке единичного радиуса, для $\gamma = 0.2$, $U = 2$, и (a) $z = 20$, (b) $z = 40$, (c) $z = 60$.

ского пути z . Полученная дифракционная картина аналогична волновой картине, возникающей при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия (см. рис. 1.2). Вне конуса Маха находятся линейные структуры. Внутри конуса Маха возникла пара темных солитонов, расположенных симметрично относительно направления “течения”. На конце эти солитоны распадаются на вихриные пары. Структура фазы такова (см. рис. 2.3), что обход вокруг вихрей дает необходимый набег фазы в 2π , а ближе к препятствию наблюдается скачок, соответствующий темному солитону.

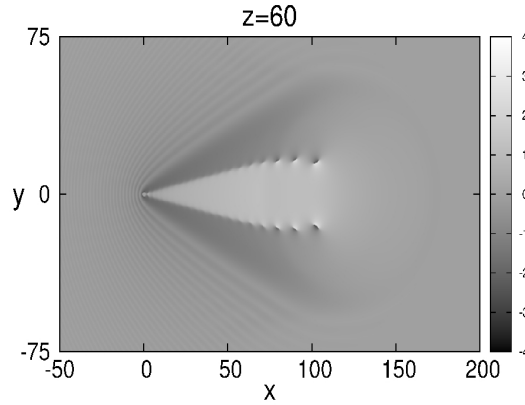


Рис. 2.3: Численный счет, демонстрирующий распределение фазы однородного пучка, дифрагировавшего на тонкой проволочке. Картина соответствует $\gamma = 0.2$, $U = 2$ и $z = 60$.

2.3 Линейная дифракционная картина

Перейдем к построению картины линейных волн. Как и в разделе 1.3, мы воспользуемся методом Фурье. Но теперь будем исходить непосредственно из нелинейного уравнения Шредингера в форме (2.10).

Как и раньше, будем считать препятствие точечным

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \delta(\mathbf{r}). \quad (2.16)$$

В отсутствии возмущения в системе отсчета, в которой $U = 0$, ψ -функция однородного пучка света интенсивности ρ_0 зависит от z как $\psi \sim \exp(-if(\rho_0)z)$. Эту зависимость можно исключить путем следующей замены $\psi = \Psi \cdot \exp(-if(\rho_0)z)$. В результате Ψ будет удовлетворять уравнению

$$i\Psi_z + \frac{1}{2}\Delta\Psi + [f(\rho_0) - f(|\Psi|^2)]\Psi = 0. \quad (2.17)$$

В этой же системе отсчета препятствие движется со скоростью $-\mathbf{U}$ и генерирует дифракционную волновую картину, которая в линейном приближении описывается небольшой добавкой $\delta\Psi$ к невозмущенной волновой функции: $\Psi \approx \sqrt{\rho_0} + \delta\Psi$. Подставляя это выражение в (2.17),

получим уравнение для $\delta\Psi$

$$i\delta\Psi_z + \frac{1}{2}\Delta\delta\Psi - c_s^2(\delta\Psi + \delta\Psi^*) - V_0\sqrt{\rho_0}\delta(\mathbf{r} + \mathbf{U}z) = 0, \quad (2.18)$$

в которое добавлен потенциал препятствия. В стационарном случае волны движутся вместе с препятствием, следовательно, в системе отсчета, связанной с препятствием, имеем $\Psi = \Psi(\mathbf{r} + \mathbf{U}z)$ и

$$\frac{\partial}{\partial z}\delta\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{U}z) = (\mathbf{U}\nabla)\delta\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{U}z).$$

Введем $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{U}z$ и, опуская штрихи, придем к уравнению

$$i(\mathbf{U}\nabla)\delta\Psi + \frac{1}{2}\Delta\delta\Psi - c_s^2(\delta\Psi + \delta\Psi^*) - V_0\sqrt{\rho_0}\delta(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.19)$$

описывающему стационарную дифракционную картину волн от проволочки.

Уравнение (2.19) будем решать методом Фурье. Введем фурье-образы волновой функции

$$\delta\Psi = \int \delta\Psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \quad \delta\Psi^* = \int \delta\Psi_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \quad (2.20)$$

и получим

$$-(\mathbf{k}\mathbf{U} + k^2/2 + c_s^2)\delta\Psi_{\mathbf{k}} - c_s^2\delta\Psi_{-\mathbf{k}}^* = V_0\sqrt{\rho_0}. \quad (2.21)$$

Еще одно уравнение получим подстановкой $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ и комплексным сопряжением

$$-c_s^2\delta\Psi_{\mathbf{k}} + (\mathbf{k}\mathbf{U} - k^2/2 - c_s^2)\delta\Psi_{-\mathbf{k}}^* = V_0\sqrt{\rho_0}. \quad (2.22)$$

Решение уравнений (2.21),(2.22) дает

$$\delta\Psi_{\mathbf{k}} = V_0\sqrt{\rho_0} \frac{k^2/2 - \mathbf{k}\mathbf{U}}{(\mathbf{k}\mathbf{U})^2 - k^2(c_s^2 + k^2/4)}. \quad (2.23)$$

Так как

$$\delta\rho = \sqrt{\rho_0}(\delta\Psi + \delta\Psi^*) = \sqrt{\rho_0} \int (\delta\Psi_{\mathbf{k}} + \delta\Psi_{-\mathbf{k}}^*) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2},$$

то приходим к следующему выражению, описывающему колебания интенсивности в дифракционной картине, возникающей при дифракции света на проволочке:

$$\delta\rho = V_0\rho_0 \int \frac{k^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{(\mathbf{k}\mathbf{U})^2 - k^2(c_s^2 + k^2/4) + i0} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \quad (2.24)$$

В (2.24) введена малая добавка $+i0$, соответствующая условию излучения волн.

Перейдем к полярным координатам (см. рис. 2.4)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \chi, & y &= r \sin \chi; \\ k_x &= -k \cos \eta, & k_y &= k \sin \eta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В результате уравнение (2.24) переходит в

$$\delta\rho = \frac{V_0\rho_0}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k e^{-ikr \cos(\chi+\eta)} dk d\eta}{k^2 - k_0^2 - i0}, \quad (2.26)$$

где

$$k_0 = 2c_s \sqrt{M^2 \cos^2 \eta - 1} = c_s \tilde{k}(\eta). \quad (2.27)$$

Интеграл (2.26) можно представить как сумму

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\eta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\eta$$

и, замечая, что после подстановки во второй интеграл $\eta' = \eta - \pi$, он переходит в комплексно сопряженный первому, перепишем (2.26) как

$$\delta\rho = \frac{V_0\rho_0}{\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{k e^{-ikr \cos(\chi+\eta)} dk d\eta}{k^2 - k_0^2 - i0}. \quad (2.28)$$

Этот интеграл с точностью до коэффициентов аналогичен интегралу (1.45) из главы 1. Не будем повторять подробно все рассуждения, необходимые для его вычисления. Напомним лишь, что сначала производится интегрирование по k методом контурного интегрирования. В результате, приходим к интегралу

$$\delta\rho = -\frac{2V_0\rho_0}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikr \cos(\chi+\eta)} d\eta, \quad (2.29)$$

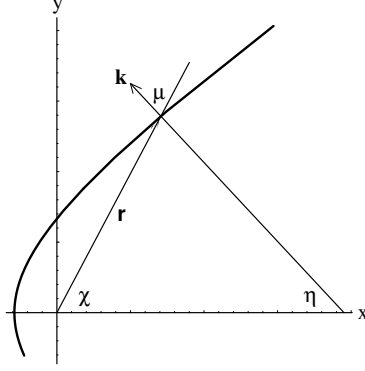


Рис. 2.4: Схема, поясняющая геометрический смысл полярных углов.

где k определяется из (2.27) (индекс “0” здесь нами опущен).

Интеграл по η берется методом стационарной фазы, где фаза равна $\mathbf{k}\mathbf{r} = r\varphi$ и

$$\varphi(\eta) = k(\eta) \cos(\chi + \eta). \quad (2.30)$$

Для больших значений r наибольший вклад в интеграл дает область в районе точки стационарной фазы, определяемой из уравнения $\partial\varphi/\partial\eta = 0$ (см. раздел 1.3). Это уравнение дает соотношения для углов, аналогичные соотношениям из раздела 1.3:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\mu &= \frac{2U^2}{k^2} \sin 2\eta = \frac{2M^2}{\tilde{k}^2} \sin 2\eta, \\ \operatorname{tg}\chi &= \frac{(c_s^2 + k^2/2)\operatorname{tg}\eta}{U^2 - (c_s^2 + k^2/2)} = \frac{(1 + \tilde{k}^2/2)\operatorname{tg}\eta}{M^2 - (1 + \tilde{k}^2/2)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

с той разницей, что здесь скорость звука не равна единице, а определяется из (2.6).

Вычисления, аналогичные проведенным в главе 1, дают выражение для модуляции интенсивности света в волне

$$\delta\rho = V_0\rho_0\sqrt{\frac{2\tilde{k} [(M^2 - 2)\tilde{k}^2 + 4(M^2 - 1)]^{1/4}}{\pi r [(M^2 - 2)\tilde{k}^2 + 6(M^2 - 1)]^{1/2}}} \cos\left(c_s\tilde{k}r \cos\mu - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.32)$$

где

$$\tilde{k} = 2\sqrt{M^2 \cos^2 \eta - 1}. \quad (2.33)$$

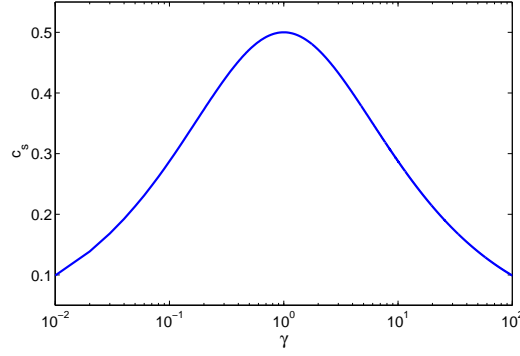


Рис. 2.5: Вид скорости звука в зависимости от параметра насыщения γ , указанного в логарифмическом масштабе.

Из (2.33) видно, что линейная волна существует только в области

$$-\arccos(1/M) \leq \eta \leq \arccos(1/M) \quad (2.34)$$

вне конуса Маха.

Для линий гребней волн получаем соотношения

$$\begin{aligned} x &= r \cos \chi = \frac{4\Phi}{c_s \tilde{k}^3} \cos \eta (1 - M^2 \cos 2\eta), \\ y &= r \sin \chi = \frac{4\Phi}{c_s \tilde{k}^3} \sin \eta (2M^2 \cos^2 \eta - 1). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Укажем также вид модуляции интенсивности вблизи конуса Маха

$$\begin{aligned} \delta\rho &= -\frac{2V_0\rho_0}{(M^2 - 1)^{1/6} [3(x \cos \theta + y \sin \theta)]^{2/3}} \times \\ &\times \text{Ai}' \left[-\frac{2(M^2 - 1)^{1/6}}{[3(x \cos \theta + y \sin \theta)]^{1/3}} (-x \sin \theta + y \cos \theta) \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

где Ai' — производная от функции Эйри (см. 1.68), а $\sin \theta = \frac{1}{M}$ — конус Маха.

Следует подчеркнуть, что, не смотря на то, что мы пользуемся линейной теорией при построении дифракционной картины в данной области, наличие нелинейности в среде оказывает на нее существенное влияние. Это легко понять, обратив внимание, что в выражение для скорости звука в законе дисперсии (2.5) входит нелинейность среды. Ее отсутствие

повлияло бы существенным образом на возникающую дифракционную картину.

Полученные выражения, описывающие линейные дифракционные структуры в нелинейной среде, совпадают с соответствующими волнами, возникающими при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия с точностью до определения скорости звука. Для нелинейности с насыщением (2.13) скорость звука c_s симметрична относительно замены $\gamma \rightarrow \frac{1}{\gamma}$. Следовательно, модуляции интенсивности, нормированные на фоновую интенсивность, совпадают, если фоновая интенсивность будет больше или меньше интенсивности насыщения в одинаковое число раз. Поэтому при построении линейной волновой картины при разных γ достаточно рассматривать только $\gamma > 1$ или $\gamma < 1$. Вид зависимости скорости звука от γ указан на рис. 2.5. При $\gamma = 1$ он имеет максимум $c_s = 1/2$. При стремлении $\gamma \rightarrow 0$ скорость звука также стремится к нулю как $\sim \sqrt{\gamma}$. Это, во-первых, позволяет использовать меньший угол наклона пучка к проволочке, что может оказаться полезным для экспериментов, основанных на использовании полного внутреннего отражения для моделирования проволочки. Во-вторых, уменьшение скорости звука ведет к увеличению корреляционной длины, а следовательно, к увеличению размеров наблюдаемых структур, что также может быть полезно для экспериментального наблюдения.

Перейдем к исследованию нелинейных структур.

2.4 Наклонные темные солитоны

Вернемся к исследованию нелинейного уравнения Шредингера в форме (2.10), где с помощью подстановки Моделунга

$$\psi = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, z)} e^{i\phi(\mathbf{r}, z)} e^{-i\mu z} \quad (2.37)$$

перейдем к действительным переменным. Здесь ρ — интенсивность, ϕ — эйконал, а μ — константа, определяемая из граничных условий. В

результате получим уравнения

$$\begin{aligned} \rho_z + (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0, \\ \phi_z + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + f(\rho) - \frac{\Delta\rho}{4\rho} + \frac{(\nabla\rho)^2}{8\rho^2} &= \mu, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где введено обозначение $\nabla\phi = (u, v)$ — компоненты градиента эйконала, а слагаемое с внешним потенциалом опущено. Будем искать решения, не зависящие от z . Тогда уравнения (2.38) примут вид:

$$\begin{aligned} (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0, \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + f(\rho) - \frac{\Delta\rho}{4\rho} + \frac{(\nabla\rho)^2}{8\rho^2} &= \frac{1}{2}U^2 + f(\rho_0), \end{aligned} \quad (2.39)$$

где константа $\mu = \frac{1}{2}U^2 + f(\rho_0)$ определена из граничных значений — интенсивности на бесконечности ρ_0 , и тангенса угла между направлением распространения пучка и проволочкой U .

Из условия $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ следует

$$u_y = v_x. \quad (2.40)$$

Вернемся к рисункам 2.2. На них видно, что темные полосы, выходящие из препятствия, становятся длиннее с ростом z . На концах они распадаются на вихри. Вдали от обоих концов вдоль самой полосы ее профиль не меняется. Поэтому введем наклонную координату $\theta = x - ay$, направленную поперек полосы, где a — тангенс угла наклона полосы к оси y , и будем искать решение в виде

$$\rho = \rho(\theta), \quad u = u(\theta), \quad v = v(\theta). \quad (2.41)$$

В новых координатах соотношение (2.40) вместе с первым уравнением из (2.39) дает зависимости u и v от ρ

$$u = \frac{U(1 + a^2\rho)}{(1 + a^2)\rho}, \quad v = -\frac{aU(1 - \rho)}{(1 + a^2)\rho}. \quad (2.42)$$

Подставляя эти значения во второе уравнение (2.39), получим уравнение для интенсивности

$$\frac{1}{8}(1 + a^2)(\rho_\theta^2 - 2\rho\rho_{\theta\theta}) + (f(\rho) - f(\rho_0))\rho^2 - \frac{1}{2}\frac{U^2}{1 + a^2}\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{U^2}{1 + a^2}\rho_0^2 = 0. \quad (2.43)$$

Продифференцируем это уравнение по θ и разделим на ρ . Получим

$$-\frac{1}{4}(1+a^2)\rho_{\theta\theta\theta} + f'(\rho)\rho\rho_{\theta} + 2f(\rho)\rho_{\theta} - 2f(\rho_0)\rho_{\theta} - \frac{U^2}{1+a^2}\rho_{\theta} = 0. \quad (2.44)$$

Проинтегрируем его по θ

$$-\frac{1}{4}(1+a^2)\rho_{\theta\theta} + f(\rho)\rho + \int f(\rho)d\rho - (2f(\rho_0) + \frac{U^2}{1+a^2})\rho + B = 0. \quad (2.45)$$

и, домножив на ρ , вычтем из (2.43). Получим

$$\frac{1}{4}(1+a^2)\rho_{\theta}^2 = 2\rho \int f(\rho)d\rho - (2f(\rho_0) + \frac{U^2}{1+a^2})\rho^2 + 2B\rho - \frac{U^2}{1+a^2}\rho_0^2. \quad (2.46)$$

Константа B определяется из условия, что при $\theta \rightarrow \infty$ имеем $\rho = \rho_0$, $u = U$ и $v = 0$:

$$B = - \int f(\rho)d\rho|_{\rho=\rho_0} + f(\rho_0)\rho_0 + \frac{U^2}{1+a^2}\rho_0. \quad (2.47)$$

Запишем окончательное уравнение

$$\frac{1}{4}(1+a^2)\rho_{\theta}^2 = 2\rho \int_{\rho_0}^{\rho} f(\rho)d\rho + 2f(\rho_0)(\rho_0 - \rho)\rho - \frac{U^2}{1+a^2}(\rho_0 - \rho)^2. \quad (2.48)$$

Данное дифференциальное уравнение является интегрируемым только для некоторых видов нелинейности $f(\rho)$. Например, для керровской нелинейности $f(\rho) = \rho$ его решением будет (1.84). Для большинства видов нелинейности профиль солитона необходимо искать численно. В уравнение (2.48) входят постоянные ρ_0 , U и a . Последняя может быть связана с амплитудой солитона. Для этого учтем, что в точке минимума солитона $\theta = 0$ производная $\rho_{\theta} = 0$. Тогда из (2.48) получим

$$a = \sqrt{\frac{U^2(\rho_0 - \rho_m)^2}{2\rho_m \left(- \int_{\rho_m}^{\rho_0} f(\rho)d\rho + f(\rho_0)(\rho_0 - \rho_m) \right)}} - 1. \quad (2.49)$$

где ρ_m — интенсивность в точке минимума солитона. Для мелких солитонов, у которых $\rho_m \rightarrow \rho_0$, выражение (2.49) принимает вид

$$a_{min} = \sqrt{\frac{U^2}{\rho_0 f'(\rho_0)}} - 1 \equiv \sqrt{\frac{U^2}{c_s^2}} - 1, \quad (2.50)$$

что соответствует определению конуса Маха. Таким образом, мелкие солитоны расположены вблизи конуса Маха. Для глубоких солитонов, $\rho_m \rightarrow 0$, из уравнения (2.49) получаем $a \rightarrow \infty$, то есть угол между солитоном и осью y стремится к $\pi/2$. Это означает, что глубокие солитоны прижимаются к оси x .

В случае нелинейности с насыщением (см. 2.12) $f(\rho)$ имеет вид

$$f(\rho) = \frac{\gamma\rho}{1 + \gamma\rho}. \quad (2.51)$$

Дифференциальное уравнение для профиля солитона (2.48) переходит в

$$\begin{aligned} \frac{(1 + a^2)^2}{8} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = & \frac{\rho}{\gamma} \ln \frac{1 + \gamma\rho_0}{1 + \gamma\rho} + \left(\frac{1}{1 + \gamma\rho_0} - \frac{1}{2} \frac{U^2}{1 + a^2} \right) \rho^2 - \\ & - \left(\frac{\rho_0}{1 + \gamma\rho_0} - \frac{U^2}{1 + a^2} \rho_0 \right) \rho - \frac{1}{2} \frac{U^2}{1 + a^2} \rho_0^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

В качестве начального условия зададим минимум плотности солитона ρ_m в точке $\theta = 0$. С помощью уравнения (2.49) найдем связь между a и ρ_m

$$a = \sqrt{\frac{U^2(1 - \rho_m)^2}{2\rho_m \left(\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1+\gamma\rho_m} - \frac{1-\rho_m}{1+\gamma} \right)}} - 1. \quad (2.53)$$

По этим формулам можно построить профили темных солитонов задав один из параметров и вычислив по формуле (2.53) другой. Для сравнения этих решений с численным моделированием этот параметр следует взять из результатов численного счета. Результат такого сравнения представлен на рисунке 2.6. На картине с численным счетом был измерен угол наклона солитона, по формулам (2.52), (2.53) и построен его профиль для двух значений расстояния от препятствия. На верхнем рисунке эти профили наложены на соответствующие профили из численного моделирования. Видно их хорошее совпадение. На нижнем рисунке показана фаза численных нелинейных структур. В точке минимума солитона она претерпевает скачок, как и положено фазе темного солитона.

Кроме построенных нами решений с “течением”, для анализа устойчивости косых солитонов нам понадобится решение, в котором течение

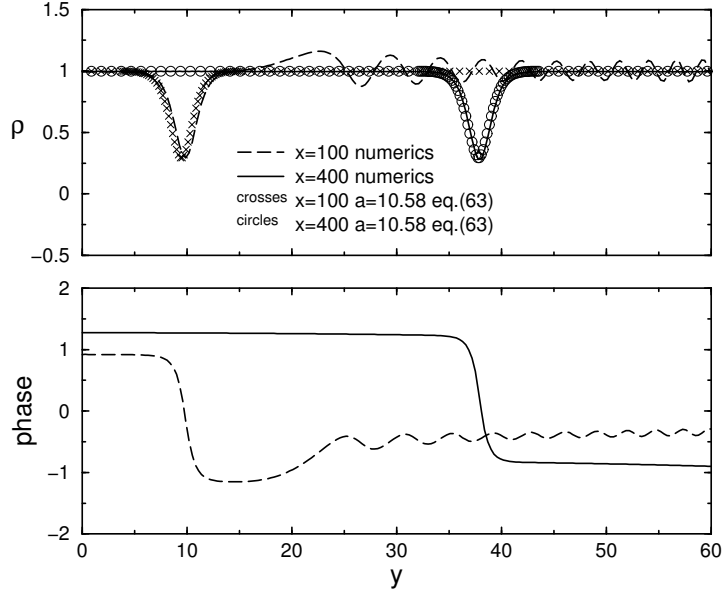


Рис. 2.6: Верхняя часть рисунка: профили распределения интенсивности, полученные с помощью численного решения нелинейного $(2+1)$ -мерного уравнения Шредингера и уравнения (2.52). Нижняя часть рисунка: профили фазы, рассчитанные численно для профилей интенсивности, указанных выше. Скачок фазы соответствует хорошо известному поведению фазы темного солитона.

отсутствует, а фаза вдоль солитона постоянна, т.е. $v = 0$. В работе [30] было показано, что при керровской нелинейности такое решение может быть получено из “наклонного” путем поворота координат. Так как поле “скоростей”, как функция интенсивности ρ , не зависит от нелинейных свойств среды, а определяется уравнением непрерывности (первое уравнение из (2.39)) и условием “потенциальности” течения (2.40), то такой поворот координат может быть осуществлен для любого вида нелинейности. Для этого следует повернуть систему отсчета на угол $\phi = \arctan a$ и перейти в систему координат, “движущуюся” со “скоростью” $(U \cos \phi, U \sin \phi)$ с ростом z

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x \cos \phi - y \sin \phi - U \cos \phi \cdot z, \\ \tilde{y} &= x \sin \phi + y \cos \phi - U \sin \phi \cdot z.\end{aligned}\tag{2.54}$$

Соответственно, поле “скоростей” перейдет в

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= (u - U) \cos \phi - v \sin \phi, \\ \tilde{v} &= (u - U) \sin \phi + v \cos \phi.\end{aligned}\tag{2.55}$$

Подставив (2.55) в (2.42), получим

$$\tilde{u} = c \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right), \quad \tilde{v} = 0,\tag{2.56}$$

где введен новый параметр

$$c = \frac{U}{\sqrt{1 + a^2}}.\tag{2.57}$$

Переменная θ принимает вид $\theta = \sqrt{1 + a^2}(\tilde{x} + cz)$. В новых координатах поле скоростей и интенсивность не зависят от координаты \tilde{y} . То есть, в новых координатах у нас имеется одномерный темный солитон,двигающийся со скоростью c в отрицательном направлении оси \tilde{x} .

В новых переменных с учетом нового параметра c уравнение (2.48) переходит в

$$\frac{1}{4} \left(\frac{d\rho}{d\xi} \right)^2 = 2\rho \int_{\rho_0}^{\rho} f(\rho) d\rho + 2f(\rho_0)(\rho_0 - \rho)\rho - c^2(\rho_0 - \rho)^2,\tag{2.58}$$

где $\xi = \tilde{x} + cz$. Как и раньше, задав значение плотности ρ_m в минимуме солитона, определим связь скорости c и ρ_m

$$c^2 = \frac{2\rho_m}{(\rho_0 - \rho_m)^2} \left(- \int_{\rho_m}^{\rho_0} f(\rho) d\rho + f(\rho_0)(\rho_0 - \rho_m) \right).\tag{2.59}$$

Устремив в (2.59) $\rho_m \rightarrow \rho_0$, получим

$$c^2 = \rho_0 f'(\rho_0) = c_s^2,\tag{2.60}$$

что означает, что мелкие солитоны двигаются со скоростью звука, а с увеличением их глубины скорость будет стремиться к нулю.

Перепишем уравнения (2.58), (2.59) для нелинейности с насыщением:

$$\frac{1}{8} \left(\frac{d\rho}{d\xi} \right)^2 = \frac{\rho}{\gamma} \ln \frac{1 + \gamma\rho_0}{1 + \gamma\rho} + \left(\frac{1}{1 + \gamma\rho_0} - \frac{1}{2} c^2 \right) \rho^2 - \left(\frac{\rho_0}{1 + \gamma\rho_0} - c^2 \rho_0 \right) \rho - c^2 \rho_0^2.\tag{2.61}$$

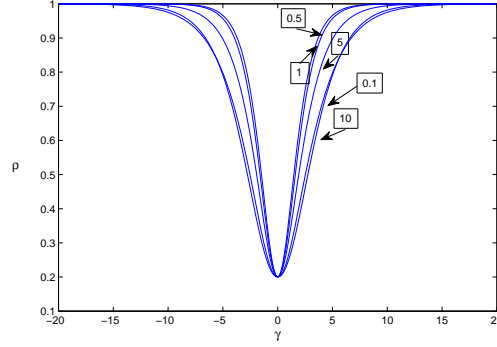


Рис. 2.7: Профили темных солитонов для различных значений параметра насыщения γ (указан в рамке). На рисунке видно, что профили, соответствующие γ и $1/\gamma$, очень близки друг другу.

$$c^2 = \frac{2\rho_m}{(1 - \rho_m)^2} \left(\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma\rho_m} - \frac{1 - \rho_m}{1 + \gamma} \right). \quad (2.62)$$

Профили темных солитонов одинаковых амплитуд и разных значений параметра насыщения γ построены на рис. 2.7. Такие одномерные фоторефрактивные солитоны впервые рассмотрены в работе [63], где было, в частности, указано, что ширина солитона слабо меняется в широком диапазоне изменения параметра насыщения. Это утверждение также подтверждается экспериментом [67].

Построенные нами решения являются бесконечно длинными темными солитонами, интенсивность вдоль которых не меняется. В реальной среде солитон имеет конечную длину. При численном моделировании (рис. 2.2) видно, что на противоположном от препятствия конце солитона образуются вихревые пары. Это означает, что солитон неустойчив относительно распада на вихри. Поэтому важно изучить условия устойчивости темного солитона.

2.5 Устойчивость наклонных темных солитонов

Численный счет показывает, что вдоль солитона существуют осцилляции интенсивности, которые нарастают от препятствия к хвосту солитона и на нелинейной стадии процесса приводят к его развалу на вихревые па-

ры. То, что темный солитон является неустойчивым относительно распада на вихри, известно довольно давно. Сначала это было показано для солитонов КдВ [27], которые являются малоамплитудным пределом нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Затем в работе [28] это было обобщено на случай НУШ. В литературе такую неустойчивость называют поперечной модуляционной неустойчивостью или изгибной неустойчивостью (в англоязычной литературе “snake instability”). В нашем случае качественно ее можно объяснить следующим образом: как было показано выше, наклон солитона зависит от его глубины. Поэтому, если амплитуда солитона по какой-то причине оказывается промодулирована, то солитон начнет изгибаться, что может привести к его разрыву. Но эти качественные рассуждения не исчерпывают всего явления. В статье [28] было показано, что спектр малых колебаний вдоль солитона обладает неустойчивой модой. Поэтому любое малое начальное возмущение будет нарастать и приводить к развалу солитона. Но, как было продемонстрировано в работе [30], если вдоль солитона существует течение, то оно может сносить нарастающие волновые пакеты, в результате чего солитон становится эффективно устойчивым. Это соответствует переходу от абсолютной неустойчивости к конвективной [68]. В нашем случае роль течения выполняет наклон пучка света к проволочке.

Вид волновой картины критическим образом зависит от скорости течения. Для дозвукового течения $U < c_s$ вид волновой картины указан на рисунке 2.8. На этом рисунке солитонов не наблюдается, а от препятствия отрываются одиночные вихри. При небольшом превышении скорости звука одиночные вихри сменяются вихревыми парами. Однако это не приводит к формированию солитонов. И только при превышении некоторой критической скорости от препятствия начинают отрастать темные солитоны, которые на противоположном конце разваливаются на вихревые пары. Для того, чтобы определить параметры, при которых абсолютная неустойчивость переходит в конвективную и солитон становится наблюдаемым, будем следовать методу, предложенному в статье [30]. В

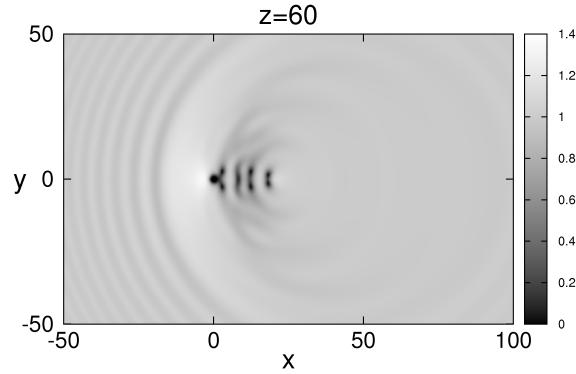


Рис. 2.8: Дифракционная картина на выходе из фоторефрактивной среды с $z = 60$ и числом Маха $M = 0.9$. Картина получена с помощью численного моделирования уравнения (2.10) с $\gamma = 0.2$ и потенциалом $V(\mathbf{r})$ описывающим идеально отражающую проволочку единичного радиуса.

этой работе рассматривался аналогичный процесс для косых солитонов в бозе-эйнштейновском конденсате. В этом случае нелинейность аналогична керровской. Мы обобщим эту теорию на случай произвольной нелинейности и найдем критическую скорость “течения” для нелинейности с насыщением для различных значений параметра насыщения.

Для полноты изложения воспроизведем все необходимые выкладки. Сначала следует определить спектр линейных возмущений вдоль солитона $\Omega(p)$ в отсутствие течения. Этот спектр в случае керровской нелинейности был впервые получен в работе [28]. Данная задача не имеет аналитического решения и требует использования численных методов. Вернемся к нелинейному уравнению Шредингера в форме (2.10)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2}\Delta_{\perp}\psi - f(|\psi|^2)\psi = 0, \quad (2.63)$$

в котором внешний потенциал опущен. Будем искать спектр малых продольных возмущений на фоне солитонного решения. Его невозмущенное решение запишем в виде

$$\psi_s(\xi) = \sqrt{\rho_s(\xi)} \exp(i\phi_s(\xi) - izf(\rho_0)), \quad (2.64)$$

где ρ_s и $\nabla\phi_s = (u, 0)$ определяются из (2.58) и (2.56) соответственно. Полная ψ -функция состоит из невозмущенного решения и малой добавки

$$\psi = \psi_s(\xi) + (\psi' + i\psi'') \exp(i\phi_s(\xi) - izf(\rho_0)), \quad (2.65)$$

причем ψ' и ψ'' зависят от y и z как $\exp(ip_y + \Gamma z)$. Здесь $\Gamma(p)$ — инкремент нарастания начальных возмущений. Он связан со спектром неустойчивости соотношением $\Gamma = -i\Omega$. Наличие действительных положительных значений в спектре $\Gamma(p)$ приводит к нарастанию начальных возмущений с волновым числом p . Чисто мнимые значения $\Gamma(p)$ не приводят к увеличению возмущений. Подставляя (2.65) в уравнение (2.63) и линеаризуя его по ψ' и ψ'' , получим линейную задачу на собственные значения

$$\begin{pmatrix} -A & L_1 \\ L_2 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'' \\ \psi' \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \psi'' \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

где

$$A = \frac{c}{\rho_s} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\rho_{s,\xi}}{2\rho_s} \right), \quad (2.67)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}(c^2 - p^2) + f(\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_s^2} - [f(\rho_s) + 2f'(\rho_s)\rho_s], \quad (2.68)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}(c^2 - p^2) + f(\rho_0) - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_s^2} - f(\rho_s). \quad (2.69)$$

Функция ρ_s рассматривается в данном случае как известная для заданной скорости солитона c ; следовательно, система (2.66) может быть решена численно. В результате мы получим инкремент нарастания малых продольных возмущений $\Gamma = \Gamma(p)$ для всех значений c . Элемент A матрицы (2.66) не зависит от конкретного вида нелинейности, а элементы L_1, L_2 для нелинейности с насыщением принимают вид

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}(c^2 - p^2) + \frac{\gamma}{1 + \gamma} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_s^2} - \gamma \frac{3\rho_s + \gamma\rho_s^2}{(1 + \gamma\rho_s)^2}, \quad (2.70)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}(c^2 - p^2) + \frac{\gamma}{1 + \gamma} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_s^2} - \frac{\gamma\rho_s}{1 + \gamma\rho_s}. \quad (2.71)$$

На рис 2.9 показан инкремент нарастания продольных возмущений для нелинейности с насыщением. Пунктиром обозначена действительная

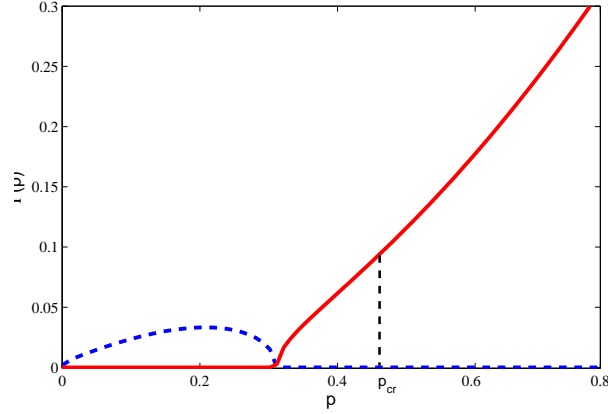


Рис. 2.9: Инкремент нарастания возмущений Γ как функция волнового числа p продольных колебаний с $\gamma = 0.5$ и $\rho_m = 0.3$. Пунктирная линия соответствует действительному значению $\Gamma(p)$, то есть неустойчивой области. Сплошная линия соответствует мнимому значению $\Gamma(p)$. Пунктиром показана точка p_{cr} , откуда видно, что она попадает в мнимую часть инкремента $\Gamma(p)$.

часть часть спектра, а сплошной — мнимая. Видно, что инкремент продольных возмущений обладает неустойчивой ветвью, приводящей к нарастанию малых начальных возмущений и к распаду солитона на нелинейной стадии. Однако, при наличии течения вдоль солитона неустойчивые волновые пакеты могут сноситься и солитон становится эффективно устойчивым.

Вернемся в систему отсчета, в которой присутствует течение. В ней к спектру линейных возмущений добавится еще одно слагаемое

$$\omega(p) = \mu p + i\Gamma(p), \quad (2.72)$$

где

$$\mu = \frac{aU}{\sqrt{1+a^2}} \quad (2.73)$$

— скорость течения вдоль солитона. Уравнение (2.72) неявным образом задает $p = p(\omega)$. Тип неустойчивости определяется положением точки ветвления p_{br} этой функции (см. напр. [31]), в которой $d\omega/dp = 0$. Это условие дает уравнение

$$\mu = -i \frac{d\Gamma}{dp}, \quad (2.74)$$

определяющее точку ветвления p_{br} как функцию течения вдоль солитона μ при заданном значении c . В работе [30] показано, что критическое значение течения μ_{cr} , соответствующее переходу от абсолютной неустойчивости к конвективной, определяется условием, что функция $p_{br}(\mu)$ также имеет точку ветвления при $\mu = \mu_{cr}$. Это условие дает уравнение

$$\left. \frac{d^2\Gamma}{dp^2} \right|_{p=p_{cr}} = 0 \quad (2.75)$$

из которого получаем значение p_{cr} для заданного c . Скорость c связана соотношением (2.59) с амплитудой солитона. Поэтому значение p_{cr} может быть получено для всех возможных значений ρ_m в интервале $0 \leq \rho_m \leq \rho_0$.

Если p_{cr} как функция от ρ_m известна, мы можем подставить ее в (2.74) и получить критическое значение μ_{cr} как функцию от ρ_m

$$\mu_{cr}(\rho_m) = -i \left. \frac{d\Gamma(p, \rho_m)}{dp} \right|_{p=p_{cr}}. \quad (2.76)$$

Из уравнений (2.73) и (2.57) следует, что $\mu = ca$, откуда параметр наклона a и скорость U также можно получить как функции от ρ_m :

$$a_{cr}(\rho_m) = \frac{\mu_{cr}(\rho_m)}{c(\rho_m)}, \quad (2.77)$$

$$U_{cr}(\rho_m) = c(\rho_m) \sqrt{1 + a^2(\rho_m)}. \quad (2.78)$$

Последнее уравнение для большей наглядности результатов перепишем через число Маха $M = U_0/c_s$

$$M_{cr} = \frac{c(\rho_m)}{c_s} \sqrt{1 + a^2(\rho_m)}. \quad (2.79)$$

Уравнения (2.77) и (2.79) определяют критическое значение числа Маха M как функцию от наклона солитона a в параметрической форме, причем ρ_m , $0 \leq \rho_m \leq 1$, играет роль параметра. Эта функция, полученная с помощью численного решения задачи (2.66), представлена кривыми на рис. 2.10 для нескольких значений параметра насыщения

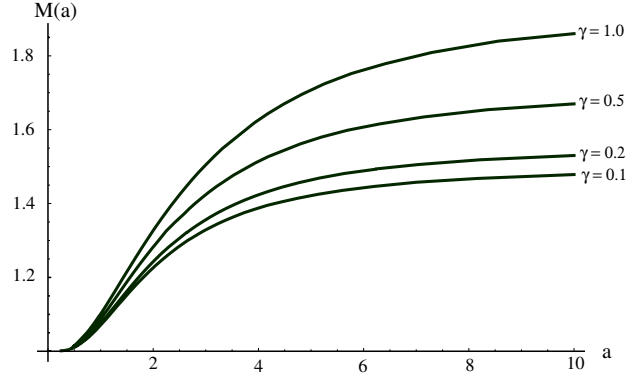


Рис. 2.10: Кривая, разделяющая область конвективной неустойчивости (сверху) и абсолютной (снизу) в пространстве параметров солитона.

γ . Эти кривые начинаются в точке $a = 0$, $M = 1$ и с ростом a выходят на константу. Эти свойства можно пояснить, исследуя поведение инкремента $\Gamma(p)$ вблизи граничных значений ρ_m . При $\rho_m \rightarrow 0$ имеем $c \rightarrow 0$, а инкремент $\Gamma(p)$ практически не меняется, т.е. $\mu_{cr} = const$. Следовательно, из условия $a = \mu_{cr}/c \rightarrow \infty$ и формулы (2.73) получаем $U_{cr} = \mu_{cr}$ или $M = \mu_{cr}(\rho_m)/c_s = const$. Второй предел $\rho_m \rightarrow \rho_0$ соответствует малоамплитудным солитонам и описывается теорией Кадомцева-Петвиашвили. Из нее следует, что в этом пределе μ_{cr} стремится к нулю [30], а $c \rightarrow c_s$. Следовательно $a = \mu_{cr}/c \rightarrow 0$ и в (2.79) a можно пренебречь по сравнению с единицей, откуда получаем $M_{cr} \rightarrow 1$.

Область параметров солитонов, доступных для наблюдения, лежит выше кривых устойчивости. Такие солитоны являются конвективно неустойчивыми и их длина увеличивается быстрее, чем они распадаются на вихри. Какие конкретно параметры солитона реализуются на конкретном эксперименте зависит от вида препятствия и “скорости течения” U . Если значение наклона солитона a и течения U таковы, что они оказываются под кривой устойчивости, то на дифракционной картине будут наблюдаться вихревые пары, а солитоны рождаться не будут. Так как кривые устойчивости с ростом a стремятся к конечному значению U , то для всех скоростей, превышающих это значение, солитоны будут эффективно устойчивы независимо от их наклона. Его величина зависит

от конкретного вида нелинейности. Для нелинейности с насыщением она может быть оценена из рисунка 2.10 для различных параметров насыщения γ . При уменьшении величины γ кривая устойчивости стремится к соответствующей кривой для керровской нелинейности.

2.6 Заключение

Предложен новый диффракционный эффект, возникающий при дифракции света на тонкой проволочке, расположенной под небольшим углом к направлению распространения света в среде с нелинейной отрицательной добавкой к показателю преломления. Для углов, превышающих характерную для данной среды величину, в параксиальном приближении рассчитана структура возникающей диффракционной картины для произвольного вида зависимости нелинейности от интенсивности. Построены профили диффракционных структур для нелинейного показателя преломления с насыщением. Показано, что диффракционная картина может быть разделена на две области введением конуса Маха. Раствор конуса Маха зависит от параметров задачи и вида нелинейности.

Вне конуса Маха находятся малоамплитудные волновые структуры, описываемые линейной теорией. Конкретный вид нелинейности влияет на длину волны и амплитуду, но не влияет на их структуру. Построены профили таких волн для нелинейности с насыщением. Показано, что линейные волны не меняются при замене параметра насыщения $\gamma \rightarrow 1/\gamma$.

Внутри конуса Маха расположены нелинейные структуры — вихри и оптические темные солитоны. Развита аппарат, позволяющий строить профили наклонных темных солитонов для произвольного вида нелинейности. Показано, что свойства устойчивости темных солитонов существенным образом зависят от вида нелинейности. Для нелинейности с насыщением найдены параметры задачи, при которых темные солитоны переходят из абсолютно неустойчивых в конвективно неустойчивые и становятся доступны для наблюдения.

3 Обтекание препятствия двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом

В главе изучается волновая картина, возникающая при обтекании препятствия двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом. Скорость течения предполагалась больше обеих скоростей звука, возникающих в данной задаче. Построены профили линейных волн, находящихся снаружи соответствующих конусов Маха. При некоторых параметрах найдены профили векторных темных солитонов, расположенных внутри внешнего конуса Маха. Исследована устойчивость темных солитонов, найдены две неустойчивые моды, приводящие к развалу солитона на вихри. Определены параметры, при которых векторный темный солитон становится эффективно устойчивым. Обсуждается возможность наблюдения аналогичной волновой картины в оптике при дифракции света на тонкой проволочке в оптически нелинейной среде с двулучепреломлением.

3.1 Основные уравнения и постановка задачи

В общем случае многокомпонентный бозе-эйнштейновский конденсат описывается системой связанных уравнений, являющихся обобщением уравнения Гросса-Питаевского [21]

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_n} \Delta \psi_n + V(\mathbf{r}) \psi_n + \sum_{k=1}^N (g_{n,k} |\psi_k|^2 \psi_n + \kappa_{n,k} \psi_k), \quad (3.1)$$

где ψ_n — волновая функция каждой из компонент, а константы связаны соотношением $g_{n,k} = g_{k,n}$ и $\kappa_{n,k} = \kappa_{k,n}$ ($n \neq k$). Экспериментально такой конденсат может быть получен двумя способами. В первом случае бозеконденсации в ловушке подвергаются атомы разных типов. Тогда m_n — масса атомов разных типов, g_{nn} — константы взаимодействия атомов одного типа друг с другом, g_{nk} — константа взаимодействия атомов различных типов между собой, $\kappa = 0$ — член линейного взаимодействия отсутствует. В экспериментах [69] были получены двухкомпонентные бозеконденсаты из калия-рубидия, лития-цезия.

Второй способ получения таких конденсатов представляет из себя так называемый “спинорный конденсат”. В этом случае различные компонен-

ты бозе-газа соответствуют атомам, находящимся на разных подуровнях основного состояния. Тогда $m_i = m_j$ — масса атомов одинакова в каждой из компонент, g_{nk} — константы взаимодействия атомов каждой из компонент, $\kappa_{n,k}$ — константа, описывающая переход атомов из одной компоненты в другую. На эксперименте с помощью резонансов Фешбаха и других техник возможно контролировать значение констант g_{nk} , количество сконденсированных компонент, содержать компоненты в качестве смеси или пространственно разделять их, а также включать или выключать переход атомов из одной компоненты в другую [70]. В случае, если возможны только упругие столкновения, то число атомов в каждой из компонент сохраняется $\int |\psi_n|^2 d\mathbf{r} = const$. В противном случае сохраняется только общее число частиц в конденсате. Такие двухкомпонентные бозе-конденсаты были, например, получены экспериментально с атомами натрия [72] и рубидия [71].

Мы будем рассматривать конденсат второго типа с двумя компонентами, в которых число частиц в каждой из компонент постоянно. После обезразмеривания уравнения (3.1) примут вид

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\Delta\psi_1 + (g_{11}|\psi_1|^2 + g_{12}|\psi_2|^2)\psi_1 + V(\mathbf{r},t)\psi_1, \\ i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\Delta\psi_2 + (g_{12}|\psi_1|^2 + g_{22}|\psi_2|^2)\psi_2 + V(\mathbf{r},t)\psi_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $V(\mathbf{r},t)$ — потенциал движущегося вдоль конденсата препятствия. Будем считать, что потенциал действует одинаково на каждую из компонент. Существует важный частный случай (манаковский предел, [73]), когда $g_{11} = g_{22} = g_{12} = g$, внешний потенциал отсутствует, $V(\mathbf{r},t) = 0$. В этом случае система интегрируема методом обратной задачи рассеяния и ее решения могут быть найдены аналитически.

С помощью стандартной подстановки перейдем к системе уравнений

в гидродинамической форме

$$\begin{aligned}\psi_1(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{n_1(\mathbf{r}, t)} \exp \left(i \int^{\mathbf{r}} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{r}' - i\mu_1 t \right), \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{n_2(\mathbf{r}, t)} \exp \left(i \int^{\mathbf{r}} \mathbf{u}_2(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{r}' - i\mu_2 t \right),\end{aligned}\quad (3.3)$$

где $n_{1,2}(\mathbf{r}, t)$ — плотности соответствующих компонент конденсата, $\mathbf{u}_{1,2}(\mathbf{r}, t)$ их поля скоростей, а $\mu_{1,2}$ — соответствующие химические потенциалы. В отсутствие течения химические потенциалы связаны с невозмущенной плотностью компонент n_{10} и n_{20}

$$\mu_1 = g_{11}n_{10} + g_{12}n_{20}, \quad \mu_2 = g_{12}n_{10} + g_{22}n_{20}. \quad (3.4)$$

Так как мы рассматриваем безвихревое течение, интегралы в (3.3) не зависят от выбора контуров интегрирования, а являются функциями лишь верхнего предела интегрирования \mathbf{r} . Подставляя (3.3) в (3.2) получим следующую систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned}(n_{1,2})_t + \nabla \cdot (n_{1,2}\mathbf{u}_{1,2}) &= 0, \\ (\mathbf{u}_1)_t + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 + g_{11}\nabla n_1 + g_{12}\nabla n_2 + \nabla \left(\frac{(\nabla n_1)^2}{8n_1^2} - \frac{\Delta n_1}{4n_1} \right) + \nabla V(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ (\mathbf{u}_2)_t + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2 + g_{12}\nabla n_1 + g_{22}\nabla n_2 + \nabla \left(\frac{(\nabla n_2)^2}{8n_2^2} - \frac{\Delta n_2}{4n_2} \right) + \nabla V(\mathbf{r}, t) &= 0,\end{aligned}\quad (3.5)$$

где индексом t обозначен оператор $\partial/\partial t$. Первая пара уравнений описывает сохранение числа частиц в каждой из компонент, а вторая пара соответствует уравнению Эйлера для скоростей течения под давлением, вызванным наличием взаимодействия между атомами, потенциалом препятствия и “квантовым давлением”.

Как и раньше, линеаризуя уравнения (3.5), найдем закон дисперсии линейных волн

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}k^2 \left[g_{11}n_{10} + g_{22}n_{20} + \frac{1}{2}k^2 \pm \sqrt{(g_{11}n_{10} - g_{22}n_{20})^2 + 4g_{12}^2 n_{10}n_{20}} \right], \quad (3.6)$$

Этот закон дисперсии обладает двумя ветвями и двумя скоростями звука в длинноволновом пределе

$$c_{\pm} \equiv \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g_{11}n_{10} + g_{22}n_{20} \pm \sqrt{(g_{11}n_{10} - g_{22}n_{20})^2 + 4g_{12}^2 n_{10}n_{20}}}{2}}. \quad (3.7)$$

Отметим, что наличие двух скоростей звука ведет к существованию двух конусов Маха, углы раствора которых определяются соотношениями

$$\sin \theta_{\pm} = \frac{c_{\pm}}{U} \equiv \frac{1}{M_{\pm}}, \quad (3.8)$$

где $M_{\pm} = U/c_{\pm}$ — соответствующие числа Маха. Следовательно, волновая картина, возникающая при движении препятствия через двухкомпонентный бозе-газ, может быть разделена на три области: (i) внутри внутреннего конуса Маха, (ii) снаружи внешнего конуса Маха, (iii) область между двумя конусами Маха. Существование последней области является особенностью двухкомпонентных систем.

Укажем частный случай равенства химических потенциалов $\mu_1 = \mu_2$, который приводит к сильному упрощению всех формул. В частности, скорости звука в этом случае приобретают вид

$$c_{-}^2 = (g_{11} - g_{12})n_{10}, \quad c_{+}^2 = g_{11}n_{10} + g_{12}n_{20} \equiv \mu. \quad (3.9)$$

В манаковском пределе, который также относится к случаю $\mu_1 = \mu_2$, первая скорость звука обращается в нуль $c_{-} = 0$, а вторая приобретает вид $c_{+} = g(n_{01} + n_{02})$. При это область (i) пропадает и линейные волны должны занимать все пространство. Однако, как будет показано далее, амплитуда соответствующей компоненты линейных волн в этом случае стремится к нулю. Поэтому в манаковском случае существование двух компонент линейных волн в задаче об обтекании препятствия себя не проявляет.

Перейдем к более подробному исследованию линейных волн, возникающих при обтекании двухкомпонентным бозе-газом препятствия.

3.2 Линейные волны

Будем исследовать линейные волны от движущегося точечного источника методом, используемым в главе 1. Будем искать решение в системе отсчета, связанной с препятствием, в которой скорость обеих компонент

на бесконечности равна $\mathbf{u} = (U, 0)$, а волновая картина стационарна. Введем малые отклонения от невозмущенного состояния

$$n_1 = n_{10} + n'_1, \quad n_2 = n_{20} + n'_2, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} + \mathbf{u}'_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} + \mathbf{u}'_2, \quad (3.10)$$

и линеаризуем уравнения (3.5) около данных значений

$$(n'_1)_t + n_{10}(\nabla \cdot \mathbf{u}'_1) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)n'_1 = 0, \quad (n'_2)_t + n_{20}(\nabla \cdot \mathbf{u}'_2) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)n'_2 = 0, \quad (3.11)$$

$$(\mathbf{u}'_1)_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}'_1 + g_{11}\nabla n'_1 + g_{12}\nabla n'_2 - \frac{1}{4n_{10}}\nabla(\Delta n'_1) = -\nabla V, \quad (3.12)$$

$$(\mathbf{u}'_2)_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}'_2 + g_{12}\nabla n'_1 + g_{22}\nabla n'_2 - \frac{1}{4n_{20}}\nabla(\Delta n'_2) = -\nabla V.$$

Мы интересуемся стационарной картиной волн, поэтому производные по времени могут быть опущены. Введем преобразование Фурье

$$n'_j(\mathbf{r}, t) = \int \int \tilde{n}'_j(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \quad (3.13)$$

где тильда обозначает Фурье-образ. Избавившись в уравнениях (3.11), (3.12) от скоростей, получим систему двух линейных уравнений для компонент плотности:

$$\begin{aligned} [-\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}]^2 + k^2(g_{11}n_{10} + k^2/4)]\tilde{n}'_1 + k^2g_{12}n_{10}\tilde{n}'_2 &= -k^2\tilde{V}n_{10}, \\ k^2g_{12}n_{20}\tilde{n}'_1 + [-\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}]^2 + k^2(g_{22}n_{20} + k^2/4)]\tilde{n}'_2 &= -k^2\tilde{V}n_{20}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Данная линейная система может быть решена относительно $\tilde{n}'_{1,2}$, после чего, применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} n'_1 &= -n_{10} \int \int \frac{k^2\tilde{V} \{[-\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}]^2 + k^2(g_{22}n_{20} + k^2/4)] - k^2g_{12}n_{20}\} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{((\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2 - \omega_+^2)((\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2 - \omega_-^2)} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \\ n'_2 &= -n_{20} \int \int \frac{k^2\tilde{V} \{[-\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}]^2 + k^2(g_{11}n_{10} + k^2/4)] - k^2g_{12}n_{10}\} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{((\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2 - \omega_+^2)((\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2 - \omega_-^2)} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где ω_{\pm} определяется дисперсионным соотношением (3.6).

Как и прежде, перейдем к полярным координатам (см. рис. 3.1)

$$\mathbf{r} \equiv (-r \cos \chi, r \sin \chi), \quad \mathbf{k} \equiv (k \cos \eta, k \sin \eta), \quad (3.16)$$

и представим потенциал препятствия как δ -функцию, $V(\mathbf{r}) = V_0\delta(\mathbf{r})$. Выражения (3.15) примут вид

$$\begin{aligned} n'_1 &= \frac{4V_0n_{10}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k[(g_{22} - g_{12})n_{20} + k^2/4 - U^2 \cos^2 \eta] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{(k^2 - k_+^2 - i0)(k^2 - k_-^2 - i0)} dk d\eta, \\ n'_2 &= \frac{4V_0n_{20}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k[(g_{11} - g_{12})n_{10} + k^2/4 - U^2 \cos^2 \eta] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{(k^2 - k_+^2 - i0)(k^2 - k_-^2 - i0)} dk d\eta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

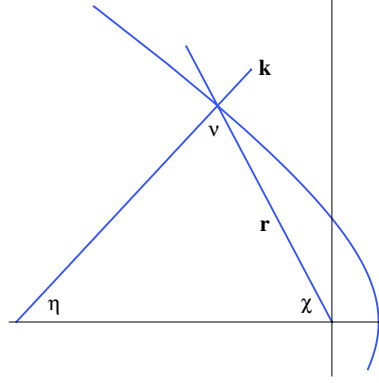


Рис. 3.1: Координаты, определяющие радиус-вектор \mathbf{r} и волновой вектор \mathbf{k} .

где малые мнимые величины $i0$ добавлены для правильного учета вклада полюсов, соответствующего медленному включению препятствия (см. раздел 1.3). Кроме того, введено обозначение

$$k_{\pm} \equiv 2\sqrt{U^2 \cos^2 \eta - c_{\pm}^2}. \quad (3.18)$$

Разделим интеграл по η на две части: $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\eta \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\eta$. После подстановки $\eta' \equiv \eta - \pi$ во второе слагаемое, интеграл переходит в комплексно сопряженный, в результате чего интегралы в (3.17) можно переписать как

$$\begin{aligned} n'_1 &= \frac{8V_0 n_{10}}{\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta \int_0^{\infty} \frac{k[(g_{22} - g_{12})n_{20} + k^2/4 - U^2 \cos^2 \eta] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{(k^2 - k_+^2 - i0)(k^2 - k_-^2 - i0)} dk, \\ n'_2 &= \frac{8V_0 n_{20}}{\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta \int_0^{\infty} \frac{k[(g_{11} - g_{12})n_{10} + k^2/4 - U^2 \cos^2 \eta] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{(k^2 - k_+^2 - i0)(k^2 - k_-^2 - i0)} dk. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Интегрирование по k производится так же, как в главе 1. Каждый из интегралов имеет четыре полюса, два из которых попадают в контур интегрирования. Контур, как и ранее, проходит вдоль действительной оси, далее он описывает четверть окружности и возвращается по мнимой оси в нуль. При стремлении радиуса контура к бесконечности четверть окружности вклада не дает. Вклад от интегрирования вдоль мнимой оси пропорционален r^{-2} , что на достаточном удалении от препятствия существенно меньше, чем вклад от полюсов, пропорциональный $\sim r^{-1/2}$. В результате, интегрирование по k дает два интеграла для каждой из компонент, что соответствует двум модам колебания конденсата, каждая со

своим законом дисперсии

$$\begin{aligned}
n'_1 &= -\frac{2V_0 n_{10}}{\pi(c_+^2 - c_-^2)} \left\{ [c_+^2 - (g_{22} - g_{12})n_{20}] \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta e^{ik_+ r \cos \nu} - \right. \\
&\quad \left. - [c_-^2 - (g_{22} - g_{12})n_{20}] \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta e^{ik_- r \cos \nu} \right\}, \\
n'_2 &= -\frac{2V_0 n_{20}}{\pi(c_+^2 - c_-^2)} \left\{ [c_+^2 - (g_{11} - g_{12})n_{10}] \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta e^{ik_+ r \cos \nu} - \right. \\
&\quad \left. - [c_-^2 - (g_{11} - g_{12})n_{10}] \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta e^{ik_- r \cos \nu} \right\},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

где $\nu \equiv \pi - \chi - \eta$. При удалении от препятствия, где фазы $\mathbf{k}_\pm \mathbf{r} = r s_\pm$,

$$s_\pm(\eta) = k_\pm(\eta) \cos(\chi + \eta) \tag{3.21}$$

достаточно велики, интегралы (3.20) могут быть вычислены методом стационарной фазы. Интегрирование по k_+ аналогично интегрированию по k_- и дает схожие соотношения для углов. Условие $\partial s_\pm / \partial \eta = 0$ определяет точку стационарной фазы, откуда следуют соотношения для углов

$$\operatorname{tg}(\nu_\pm) = (2U^2/k_\pm^2) \sin(2\eta_\pm). \tag{3.22}$$

С учетом определения ν , получим формулу для χ ,

$$\operatorname{tg}(\chi_\pm) = \frac{(1 + k_\pm^2/(2c_\pm^2)) \operatorname{tg}(\eta_\pm)}{U^2/c_\pm^2 - (1 + k_\pm^2/(2c_\pm^2))}, \tag{3.23}$$

где η_\pm изменяется в интервале

$$-\arccos\left(\frac{1}{M_\pm}\right) \leq \eta_\pm \leq \arccos\left(\frac{1}{M_\pm}\right), \quad M_\pm \equiv \frac{U}{c_\pm}. \tag{3.24}$$

Кривые постоянной фазы (гребни волн) задаются формулами

$$\begin{aligned}
x(\eta_\pm) &= \frac{4\phi c_\pm^2}{k_\pm^3} [M_\pm^2 \cos(2\eta_\pm) - 1] \cos(\eta_\pm), \\
y(\eta_\pm) &= \frac{4\phi c_\pm^2}{k_\pm^3} [2M_\pm^2 \cos^2(\eta_\pm) - 1] \sin(\eta_\pm),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

После всех преобразований метод стационарной фазы приводит выра-

жение для колебаний плотности одной компоненты к следующему виду:

$$\begin{aligned}
n'_1 = & -\frac{2V_0 n_{10}}{\pi(c_+^2 - c_-^2)} \left\{ [c_+^2 - (g_{22} - g_{12})n_{20}] \sqrt{\frac{2\pi}{k_+ r}} \times \right. \\
& \times \frac{[1 + (4U^2/k_+^2) \sin^2(2\eta_+)]^{1/4}}{[1 + (4U^2/k_+^2) \cos(2\eta_+) + (12U^4/k_+^4) \sin^2(2\eta_+)]^{1/2}} \cos(k_+ r \cos \nu_+ - \pi/4) - \\
& - [c_-^2 - (g_{22} - g_{12})n_{20}] \sqrt{\frac{2\pi}{k_- r}} \frac{[1 + (4U^2/k_-^2) \sin^2(2\eta_-)]^{1/4}}{[1 + (4U^2/k_-^2) \cos(2\eta_-) + (12U^4/k_-^4) \sin^2(2\eta_-)]^{1/2}} \times \\
& \left. \times \cos(k_- r \cos \nu_- - \pi/4) \right\}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

где $\nu_{\pm} \equiv \pi - \chi_{\pm} - \eta_{\pm}$. Аналогичная формула может быть получена для колебаний плотности второй компоненты конденсата. Это выражение имеет два слагаемых, структура каждого из которых соответствует однокомпонентному случаю (см. формулу (1.55)). Реальный конденсат нельзя разделить на колеблющиеся отдельно друг от друга компоненты. Каждая из компонент принимает участие в колебании каждой из мод. Можно записать формулу для колебаний конденсата как целого, $N' = n'_1 + n'_2$:

$$\begin{aligned}
N' = & -\frac{2V_0(n_{10} + n_{20})}{\pi(c_+^2 - c_-^2)} \left\{ \left[c_+^2 - (g_{11} + g_{22} - 2g_{12}) \frac{n_{10}n_{20}}{n_{10} + n_{20}} \right] \sqrt{\frac{2\pi}{k_+ r}} \times \right. \\
& \times \frac{[1 + (4U^2/k_+^2) \sin^2(2\eta_+)]^{1/4}}{[1 + (4U^2/k_+^2) \cos(2\eta_+) + (12U^4/k_+^4) \sin^2(2\eta_+)]^{1/2}} \cos(k_+ r \cos \nu_+ - \pi/4) - \\
& - \left[c_-^2 - (g_{11} + g_{22} - 2g_{12}) \frac{n_{10}n_{20}}{n_{10} + n_{20}} \right] \sqrt{\frac{2\pi}{k_- r}} \times \\
& \left. \times \frac{[1 + (4U^2/k_-^2) \sin^2(2\eta_-)]^{1/4}}{[1 + (4U^2/k_-^2) \cos(2\eta_-) + (12U^4/k_-^4) \sin^2(2\eta_-)]^{1/2}} \cos(k_- r \cos \nu_- - \pi/4) \right\} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

При равенстве химических потенциалов $\mu_1 = \mu_2$ благодаря формулам (3.9) волновая картина существенно упрощается

$$\begin{aligned}
N' = & -2V_0(n_{10} + n_{20}) \sqrt{\frac{2}{\pi k_+ r}} \times \\
& \times \frac{[1 + (4U^2/k_+^2) \sin^2(2\eta_+)]^{1/4}}{[1 + (4U^2/k_+^2) \cos(2\eta_+) + (12U^4/k_+^4) \sin^2(2\eta_+)]^{1/2}} \cos(k_+ r \cos \nu_+ - \pi/4) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

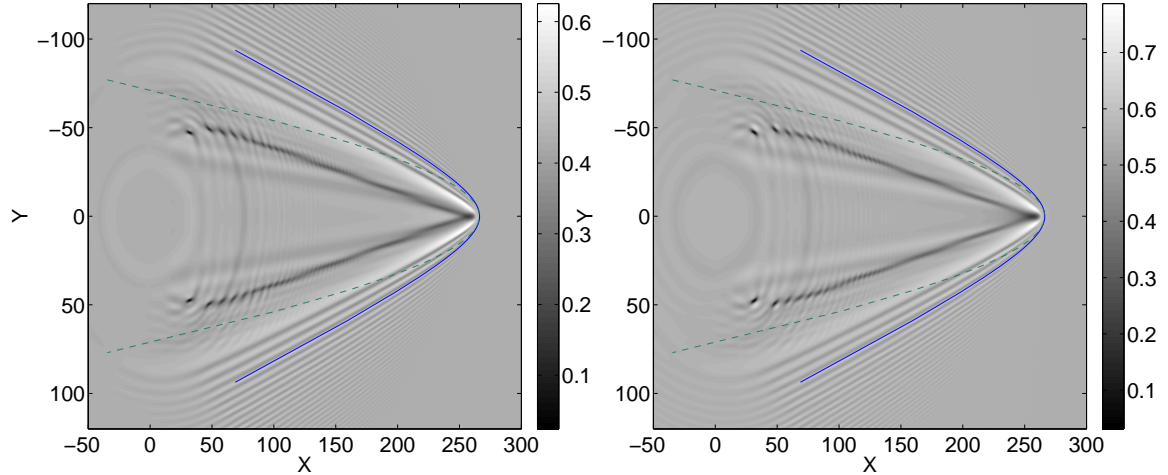


Рис. 3.2: Численное моделирование волновой картины, возникающей при течении двухкомпонентного бозе-эйнштейновского конденсата с неравными химическими потенциалами мимо препятствия при скорости $U = 3.5$ и $t = 75$. Каждый из рисунков соответствует одной из компонент конденсата. Вид препятствия задается потенциалом $V(x, y, t) = 2\text{sech}^2\left(\sqrt{(x - Ut)^2 + y^2}/2\right)$. Непрерывная и пунктирная линии отвечают линиям постоянной фазы, построенным по формулам (3.25).

а компонента, соответствующая k_- , исчезает. То есть, при стремлении химических потенциалов к равенству амплитуда волн, соответствующих внутреннему конусу Маха, уменьшается и при равенстве химических потенциалов эти волны исчезают. В результате, линейная волновая картина будет идентична волновой картине, возникающей в однокомпонентном случае.

На рис. 3.2 приведен пример волновой картины, построенной с помощью численного моделирования уравнения (3.2) с параметрами $g_{11} = 1.5$, $g_{22} = 1.03$, $g_{12} = 1.0$, $n_{10} = 0.49$, $n_{20} = 0.55$ и скоростью $U = 3.5$. Здесь могут быть выделены три различных типа волн. Во-первых, это корабельные волны, находящиеся снаружи конусов Маха. Видно, что волны, относящиеся ко внутреннему конусу Маха, являются более мелкими относительно “внешних” корабельных волн. Во-вторых, внутри внешнего конуса Маха находятся темные солитоны (их исследованию посвящен следующий раздел). Отметим тот факт, что темные солитоны модулируются внутренними корабельными волнами, что приводит к их неболь-

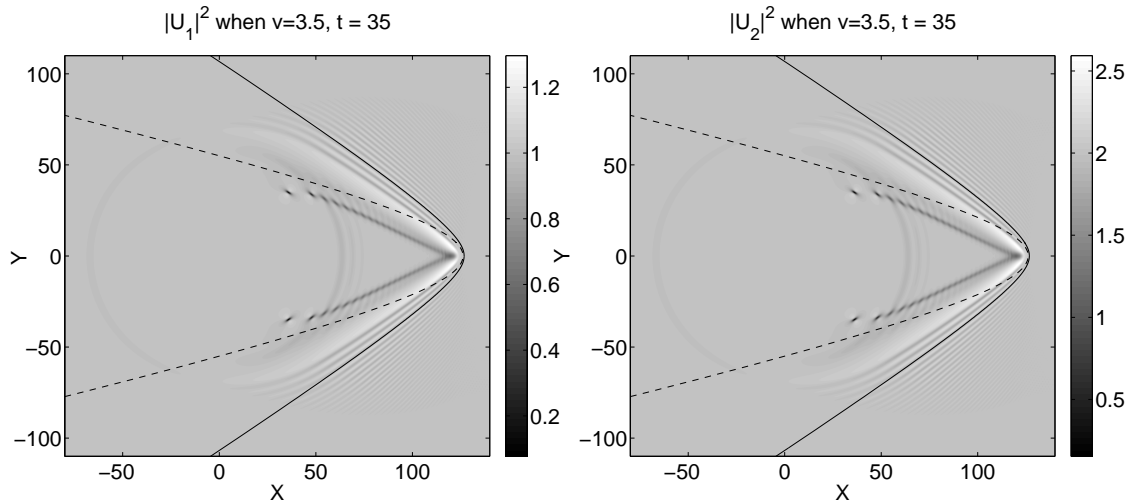


Рис. 3.3: Численное моделирование, описывающее волновую картину, возникающую при течении двухкомпонентного бозе-эйнштейновского конденсата с равными хим. потенциалами $\mu_1 = \mu_2 = 3.5$ мимо препятствия при скорости $U = 3.5$ и $t = 75$. Непрерывная и пунктирная линии отвечают линиям постоянной фазы, построенным по формулам (3.25).

шому изгибу, но не нарушает устойчивости. И, наконец, в задней части рисунков находятся цилиндрически-симметричные волны, которые образуются от “включения” препятствия. Эти волны не имеют отношения к стационарной картине, рассматриваемой нами в данной главе.

На рис.3.2 непрерывной линией и курсивом обозначены линии постоянной фазы, построенные по (3.25). Видно, что они находятся в хорошем согласии с численным счетом. На рис.3.3 приведен результат для численного моделирования процесса обтекания двухкомпонентным бозе-газом с равными химическими потенциалами. Параметры задачи: $g_{11} = 1.5$, $g_{22} = 1.25$, $g_{12} = 1.0$, и $n_{10} = 1.0$, $n_{20} = 2.0$ и скоростью $U = 3.5$, откуда $\mu_1 = \mu_2 = 3.5$. Из рисунков видно, что внутренняя корабельная волна исчезает, как это и следует из (3.28).

3.3 Темные солитоны

Как говорилось выше, численные расчеты (рис. 3.2) показали, что темные солитоны расположены внутри внешнего конуса Маха, в результате

чего они сосуществуют с внутренними корабельными волнами. Как и в однокомпонентном случае, двумерные темные солитоны разваливаются на концах на вихри благодаря изгибной неустойчивости. Для того, чтобы определить параметры устойчивости солитона, нам необходимо построить невозмущенное стационарное солитонное решение. Для этого будем исследовать уравнение Гросса-Питаевского в гидродинамической форме (3.3) в стационарном пределе (производные по времени опущены) и в отсутствие внешнего потенциала

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (n_{1,2} \mathbf{u}_{1,2}) &= 0, \\ (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + g_{11} \nabla n_1 + g_{12} \nabla n_2 + \nabla \left[\frac{(\nabla n_1)^2}{8n_1^2} - \frac{\Delta n_1}{4n_1} \right] &= 0, \\ (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 + g_{12} \nabla n_1 + g_{22} \nabla n_2 + \nabla \left[\frac{(\nabla n_2)^2}{8n_2^2} - \frac{\Delta n_2}{4n_2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнения (3.29) должны решаться при граничных условиях

$$n_1 \rightarrow n_{10}, \quad n_2 \rightarrow n_{20}, \quad \mathbf{u}_1 \rightarrow (-U, 0), \quad \mathbf{u}_2 \rightarrow (-U, 0) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.30)$$

где $-U$ скорость обеих компонент по отношению к препятствию. При данных допущениях решение зависит от координат как

$$\xi = \frac{x - ay}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad (3.31)$$

где a определяет наклон векторного темного солитона. В результате система может быть сведена к следующим уравнениям (где штрих обозначает производную $d/d\xi$)

$$\begin{aligned} (1/8) \left[\left(n_1' \right)^2 - 2n_1 n_1'' \right] + g_{11} n_1^3 + g_{12} n_1^2 n_2 + \frac{1}{2} q n_{10}^2 - \left(\frac{1}{2} q + \mu_1 \right) n_1^2 &= 0, \\ (1/8) \left[\left(n_2' \right)^2 - 2n_2 n_2'' \right] + g_{12} n_1 n_2^2 + g_{22} n_2^3 + \frac{1}{2} q n_{20}^2 - \left(\frac{1}{2} q + \mu_2 \right) n_2^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где μ_1 и μ_2 химические потенциалы, определяемые уравнением (3.4), и

$$q \equiv \frac{U^2}{1 + a^2}. \quad (3.33)$$

Скорости течения компонент конденсата определяются из уравнения непрерывности (первое из (3.29)) и условия потенциальности течения и поэтому совпадают с соответствующими скоростями для однокомпонентного случая

$$\mathbf{u}_i = \left\{ \frac{(n_{i0} + a^2 n_i)U}{(1 + a^2)n_i}, -\frac{aU(n_{i0} - n_i)}{(1 + a^2)n_i} \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (3.34)$$

В общем случае система (3.32) должна решаться численными методами. Однако, если химические потенциалы обеих компонент выбрать одинаковыми $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, то система (3.32) имеет простое аналитическое решение. В этом случае будем искать решение в виде $n_1 = n_{10}f(\xi)$, $n_2 = n_{20}f(\xi)$. Оба уравнения из (3.32) сводятся к одному

$$\frac{1}{8} \left[(f')^2 - 2ff'' \right] + \mu f^3 + \frac{1}{2}q - \left(\frac{1}{2}q + \mu \right) f^2 = 0. \quad (3.35)$$

Решение в виде темного солитона для этого уравнения известно [23]:

$$\begin{aligned} n_1 = n_{1s} = n_{10}f(\xi), \quad n_2 = n_{2s} = n_{20}f(\xi), \\ f(\xi) = 1 - \frac{1 - q/c_+^2}{\text{ch}^2 \left[\sqrt{c_+^2 - q} (x - ay) / \sqrt{1 + a^2} \right]}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где учтено, что равенство химических потенциалов приводит к упрощению формул для скоростей звука (для определенности мы предполагаем, что $g_{11}, g_{22} > g_{12}$, т.е. взаимодействие между атомами различных компонент слабее, чем взаимодействие между атомами каждой из компонент):

$$c_-^2 = (g_{11} - g_{12})n_{10}, \quad c_+^2 = \mu. \quad (3.37)$$

Очевидно, что решение (3.36) существует при выполнении условия $q < c_+^2$. Если мы введем угол θ между направлением течения и направлением вдоль темного солитона, так что $a = \text{ctg}\theta$, то условие существования может быть сведено к следующему:

$$\sin^2 \theta < \frac{c_+^2}{U^2} = \frac{1}{M_+^2}, \quad M_+ \equiv \frac{U}{c_+}. \quad (3.38)$$

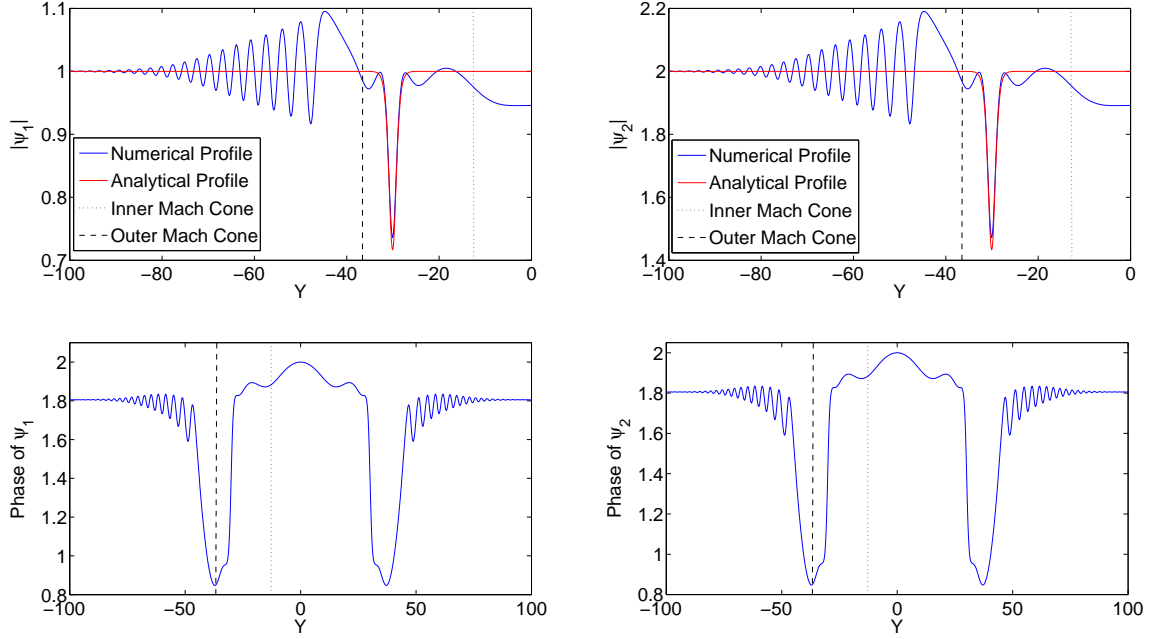


Рис. 3.4: Графики плотности (сверху) и фазы (снизу) двух компонентного бозе-эйнштейновского конденсата для скорости течения $U = 4.5$. Конусы Маха показаны курсивом, откуда видно, что темный солитон находится внутри внешнего конуса Маха. Значение химических потенциалов одинаково, $\mu_1 = \mu_2 = 3.5$, значение безразмерного времени равно $t = 30$.

То есть солитон должен находиться внутри внешнего конуса Маха, определяемого условием (3.8). Это заключение было доказано нами для частного случая равенства химических потенциалов. Можно ожидать, что оно является верным и для общего случая. Это подтверждается численным моделированием, в котором темные солитоны при различных параметрах задачи всегда оказывались внутри внешнего конуса Маха. На рис. 3.4 показаны профили плотности конденсата, построенные с помощью численного моделирования полного нелинейного двухкомпонентного уравнения Гросса-Питаевского, как функции от y при постоянном x . Соответствующие им вариации фазы показаны на нижнем рисунке. Из рисунка видно, что наклонные солитоны действительно находятся внутри внешнего конуса Маха и снаружи внутреннего конуса Маха, который определяется как $\sin(\theta_-) = 1/M_-$. Профили темных солитонов близки к профилям, построенным аналитически, и скачки фазы также находятся

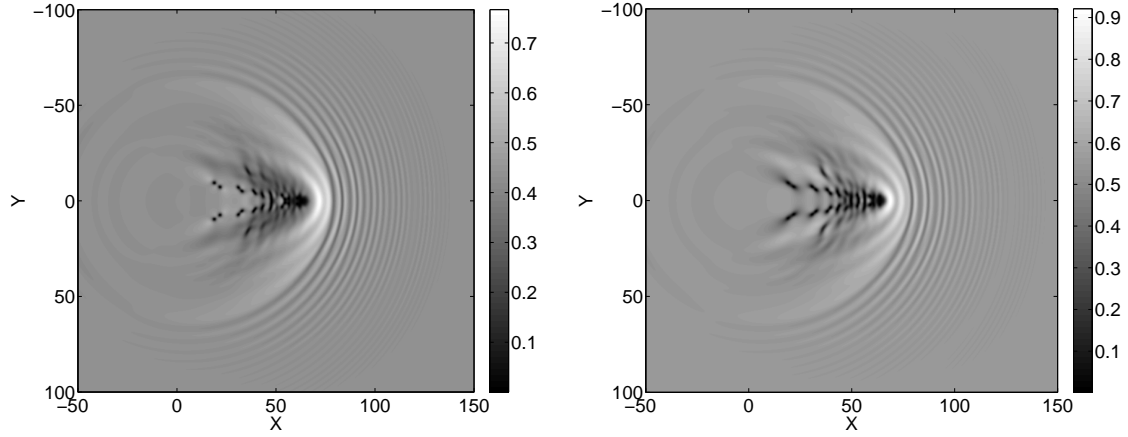


Рис. 3.5: Плотности двух компонент бозе-эйнштейновского конденсата при скорости течения $U = 1.2$ при $t = 55$. В данном случае темные солитоны не наблюдаются.

в соответствии с ожидаемым поведением солитона.

Из условия (3.38) следует, что векторный темный солитон существует, если скорость течения превышает верхнюю скорость звука $U > c_+$. Это же условие необходимо при построении солитонных решений численно из уравнений (3.32) в общем случае неравных химических потенциалов, $\mu_1 \neq \mu_2$. Однако, как и в однокомпонентном случае, численный счет показывает, что при небольшом превышении скорости звука солитоны не образуются, а вместо них генерируются вихревые пары (см. рис. 3.5). То есть векторные темные солитоны являются абсолютно неустойчивыми. Поэтому перейдем к поиску параметров, при которых данная неустойчивость переходит в конвективную и темные векторные солитоны становятся доступны для наблюдения.

Для этого, как и ранее, мы должны определить солитонные решения в системе отсчета, в которой отсутствует течение. Для этого повернем систему координат на угол $\varphi = \arctg a$ и перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью $(U \cos \varphi, U \sin \varphi)$:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x \cos \varphi - y \sin \varphi - U \cos \varphi \cdot t, \\ \tilde{y} &= x \sin \varphi + y \cos \varphi - U \sin \varphi \cdot t.\end{aligned}\tag{3.39}$$

В новой системе отсчета поле скоростей (3.34) переходит в

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = (v(n_{10}/n_{1s} - 1), 0), \quad \tilde{\mathbf{u}}_2 = (v(n_{20}/n_{2s} - 1), 0), \quad (3.40)$$

а профили плотности принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{1s} &= n_{10}f(\zeta), \quad \tilde{n}_{2s} = n_{20}f(\zeta), \\ f(\zeta) &= 1 - \frac{1 - (v^2/c_+^2)}{\text{ch}^2 \left[\sqrt{c_+^2 - v^2} \zeta \right]}, \quad \zeta = \tilde{x} - vt, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где скорость солитона в новой системе отсчета равна

$$v = \frac{U}{\sqrt{1 + a^2}}. \quad (3.42)$$

Далее, мы опустим тильды, относящиеся к новым величинам.

Рассмотрим малые возмущения солитонного решения

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{1s}(\zeta) + (\psi'_1 + i\psi''_1) \exp(i\phi_{1s}(\zeta) - i\mu_1 t), \\ \psi_2 &= \psi_{2s}(\zeta) + (\psi'_2 + i\psi''_2) \exp(i\phi_{2s}(\zeta) - i\mu_2 t), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где невозмущенное решение зависит только от $\zeta = x - vt$,

$$\psi_{js} = \sqrt{n_{js}} \exp(i\phi_{js}(\zeta) - i\mu_j t), \quad (3.44)$$

а фаза ϕ_{js} связана с плотностью уравнением

$$\frac{\partial \phi_{js}}{\partial \zeta} = v \left(\frac{n_{j0}}{n_{js}} - 1 \right). \quad (3.45)$$

Возмущения ψ' и $i\psi''$ зависят от y и t как $\exp(ip_y + \Gamma t)$. Подстановка выражения (3.43) в (3.2) и их дальнейшая линейризация по малым возмущениям ψ' и $i\psi''$ приводит к следующей задаче на собственные значения

$$\begin{pmatrix} A_1 & -L_{I1} & 0 & 0 \\ L_{R1} & A_1 & B & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & -L_{I2} \\ B & 0 & L_{R2} & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi''_1 \\ \psi'_2 \\ \psi''_2 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi''_1 \\ \psi'_2 \\ \psi''_2 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

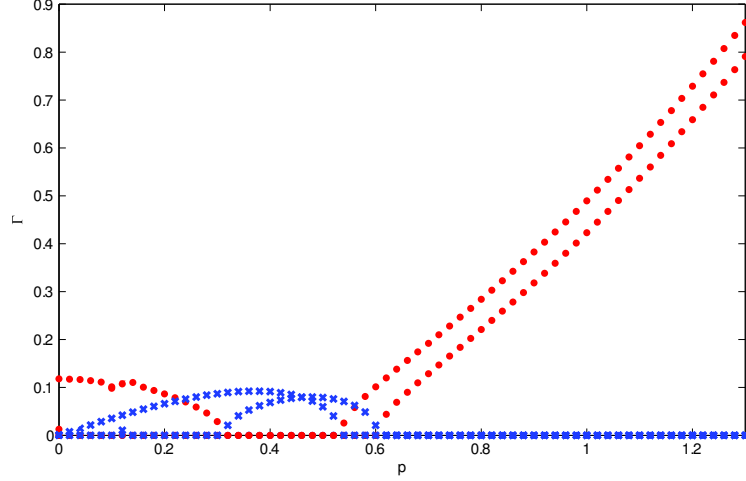


Рис. 3.6: Две неустойчивые ветви закона дисперсии $\Gamma(p)$ малых возмущений вдоль солитона. Действительная часть Γ показана крестиками, а мнимая — точками. Параметры задачи: $g_{11} = 1, g_{22} = 1.6, g_{12} = 0.1, n_{10} = 1, n_{20} = 0.6$.

$$\begin{aligned}
 A_j &\equiv \frac{vn_{j0}n_{js,\zeta}}{2n_{js}^2} - \frac{vn_{j0}}{n_{js}} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\
 B &\equiv -2g_{12}\sqrt{n_{1s}n_{2s}}, \\
 L_{Ij} &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{n_{j0}^2 v^2}{n_{js}^2} + \frac{1}{2}(v^2 - p^2) - g_{jj}n_{js} - g_{lj}n_{ls} + \mu_j, \\
 L_{Rj} &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{n_{j0}^2 v^2}{n_{js}^2} + \frac{1}{2}(v^2 - p^2) - 3g_{jj}n_{js} - g_{lj}n_{ls} + \mu_j, \\
 j &= 1, 2, \quad l = 1, 2, \quad l \neq j.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Система (3.46) определяет закон дисперсии $\Gamma_{1,2}(p)$ малых возмущений, движущихся вдоль солитона. Численный расчет показывает наличие двух неустойчивых ветвей (рис.3.6). Переход к конвективной неустойчивости должен быть изучен отдельно для каждой из ветвей.

Возвращаясь в систему отсчета, связанную с движущимся препятствием, получим закон дисперсии

$$\omega_{1,2}(p) = U_s p + i\Gamma(p, v), \tag{3.48}$$

где $U_s = v \sin \varphi \equiv aU/\sqrt{1+a^2}$ — компонента скорости течения вдоль солитона. Критические значения параметров, при которых солитон становится конвективно неустойчивым, определяются из тех же соотношений, которые были приведены в главе 2 (см. формулы (2.74)–(2.79)). Критическое значение скорости вдоль солитона определяется из условия, что $p = p(\omega)$ имеет точку ветвления, т.е. $d\omega/dp = 0$. Откуда получаем

$$U_s = -i \left. \frac{d\Gamma}{dp} \right|_{p=p_{\text{cr}}}, \quad (3.49)$$

А p_{cr} определяется из условия

$$\left. \frac{d^2\Gamma}{dp^2} \right|_{p=p_{\text{cr}}} = 0 \quad (3.50)$$

для каждого значения скорости солитона v , в результате получим $p_{\text{cr}}(v)$. Подставляя это значение в (3.49), получим функцию $U_s(v)$. Когда эта функция известна, найдем с помощью соотношений

$$v = \frac{U}{\sqrt{1+a^2}}, \quad U_s = U \sin \varphi = \frac{Ua}{\sqrt{1+a^2}} = av, \quad (3.51)$$

критические параметры наклона и скорость течения,

$$a_{\text{cr}}(v) = \frac{U_s(v)}{v}, \quad (3.52)$$

$$U(v) = v\sqrt{1+a_{\text{cr}}^2(v)}, \quad (3.53)$$

как функцию от v для всех значений в интервале ($0 < v < c_+$). В результате, мы получили в параметрической форме зависимость $U(a)$ для кривой, разделяющей области абсолютной и конвективной неустойчивостей в пространстве параметров векторного солитона. Две такие кривые изображены на рис. 3.7, где область конвективной неустойчивости находится над обеими кривыми. Из рисунков следует, что темные солитоны с любым значением параметра наклона a становятся конвективно неустойчивыми при значении скорости превышающей примерно ~ 1.5 .

Отметим важный частный случай. В манаковском пределе численный счет показывает, что вторая неустойчивая ветвь в спектре малых возмущений пропадает. Следовательно, в этом пределе существует только одна

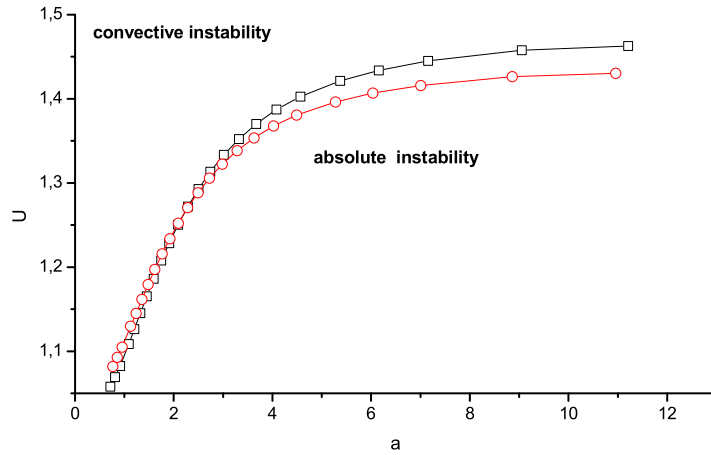


Рис. 3.7: Кривые, разделяющие области абсолютной и конвективной неустойчивостей векторных темных солитонов в двухкомпонентном конденсате с параметрами $g_{11} = 1$, $g_{22} = 1.6$, $g_{12} = 0.1$, $n_{10} = 1$, $n_{20} = 0.6$. Скорости звука равны $c_+ = 1.03$, $c_- = 0.95$. Квадраты и кружки соответствуют двум разным неустойчивым модам. Темный солитон становится конвективно неустойчивым (т.е. эффективно устойчивым) над обеими кривыми $U > u_{cr} \cong 1.5$.

кривая, разделяющая области абсолютной и конвективной неустойчивостей солитона.

Рассмотренная в этой главе волновая картина может наблюдаться в оптике при дифракции света на тонкой проволочке. В предыдущей главе рассмотрена дифракционная картина, возникающая при падении на проволочку линейно поляризованного пучка, поляризация которого не меняется со временем. Если пучок не является линейно поляризованным, то в нелинейной среде он может быть представлен как два линейно поляризованных пучка, взаимодействующих между собой нелинейным образом. В общем случае их распространение описывается сложной системой связанных нелинейных уравнений (см., например, [33, 61]). Но при некоторых условиях эти уравнения можно существенно упростить. Так, для случая слабого двулучепреломления в пренебрежении разностью между групповыми скоростями компонент и в отсутствие обмена энергией между компонентами уравнения сводятся к векторному уравне-

нию Шредингера, аналогичному (3.2). Рассмотрев в такой среде дифракцию пучка света на тонкой проволочке, расположенной под небольшим углом по направлению к распространению излучения, мы приходим к волновой картине, описанной в данной главе.

3.4 Заключение

В данной главе построена волновая картина, возникающая в двумерной геометрии при обтекании препятствия двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом. Показано, что наличие двух ветвей в законе дисперсии линейных волн, каждая из которых обладает своей скоростью звука, приводит к формированию внутреннего и внешнего конусов Маха. Снаружи каждого из конусов Маха находятся “корабельные волны”, которые, на достаточном удалении от препятствия, описываются линейным приближением двух связанных уравнений Гросса-Питаевского. Отмечено, что при особом выборе констант взаимодействия, когда уравнения ГП сводятся к интегрируемой системе Манакова, амплитуда внутренней корабельной волны стремится к нулю.

Показано, что внутри внешнего конуса Маха находятся наклонные векторные темные солитоны. Они модулируются внутренней корабельной волной и при этом сохраняют свойство устойчивости. Для частного случая равенства химических потенциалов найдены аналитические выражения для профилей наклонных векторных солитонов. Исследована устойчивость данных решений. Показано, что в спектре неустойчивостей появляется вторая неустойчивая ветвь. Переход от абсолютной неустойчивости к конвективной изучен отдельно для каждой из ветвей. Построены кривые устойчивости в пространстве параметров: скорость течения, наклон солитона. Солитоны, параметры которых оказываются над этими кривыми, являются эффективно устойчивыми и доступными для наблюдения. Солитоны, оказавшиеся под этими кривыми, являются абсолютно неустойчивыми и не могут формироваться. Вместо них будут наблюдаться вихревые пары. Показано, что, как и в однокомпо-

ненном случае, существует скорость течения, при превышении которой солитоны становятся эффективно устойчивыми при любых значениях параметров.

Указаны условия, при которых аналогичная волновая картина может наблюдаться при дифракции света на тонкой проволочке в оптически нелинейной среде с двулучепреломлением.

Заключение

В диссертации проведено аналитическое исследование стационарной волновой картины, возникающей при сверхзвуковом обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия. Предложена принципиальная схема эксперимента, который позволил бы наблюдать аналогичную волновую картину в оптике при дифракции света на тонкой проволочке. Рассчитана структура такой дифракционной картины. Построенная теория обобщается на случай обтекания препятствия двухкомпонентной средой. Сформулируем основные выводы по главам.

1. Основные выводы по первой главе:

При обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом цилиндрического препятствия возникающая стационарная волновая картина разделена конусом Маха на две области, обладающие различными свойствами. Во внешней области расположены “корабельные волны”, которые на достаточном удалении от препятствия описываются линейной теорией. Эти волны обладают следующими свойствами:

- их амплитуда спадает с увеличением расстояния от препятствия как $\sim 1/\sqrt{r}$;
- длины волн в волновой структуре зависят от числа Маха как $\sim 1/\sqrt{M^2 - 1}$.

2. Основные выводы по второй главе:

Дифракционная картина, возникающая при дифракции света на тонкой проволочке, расположенной под небольшим углом к направлению света в среде с отрицательной нелинейной добавкой к показателю преломления, имеет ту же структуру, что волновая картина, возникающая при обтекании бозе-эйнштейновским конденсатом препятствия: внутри конуса Маха расположены нелинейные структуры, а снаружи “корабельные волны”. Вид зависимости нелинейного показателя преломления от интенсивности не оказывает влияния на структуру “корабельных волн”, но влияет на их размеры и на раствор угла Маха.

Профили оптических наклонных темных солитонов могут быть построены для произвольного вида нелинейного показателя преломления. Они являются неустойчивыми относительно распада на вихри. При наличии “течения” вдоль солитонов при определенных параметрах они могут переходить в эффективно устойчивые. Существует угол наклона проволочки относительно направления распространения пучка, при котором наклонные оптические солитоны становятся эффективно устойчивыми при любых возможных параметрах солитона. Величина этого угла зависит от вида нелинейного показателя преломления.

3. Основные выводы по третьей главе:

Волновая картина, возникающая при обтекании препятствия двухкомпонентным бозе-эйнштейновским конденсатом, содержит корабельные волны и векторные темные солитоны. Наличие в законе дисперсии линейных волн двух ветвей с двумя скоростями звука приводит к существованию двух конусов Маха со своими “корабельными волнами”. Темные солитоны расположены внутри внешнего конуса Маха и сосуществуют с внутренней корабельной волной. Модуляция солитона корабельной волной не приводит к потере его устойчивости. Спектр продольных линейных возмущений векторного солитона обладает двумя неустойчивыми ветвями. Каждой из них в определенной области параметров соответствует кривая устойчивости, обозначающая переход от абсолютной неустойчивости солитона к конвективной.

Благодарности

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., Камчатнову Анатолию Михайловичу, под руководством которого я вошел в настоящую научную жизнь, полную загадок и неожиданных решений, получить которые можно только через упорный и кропотливый труд. Анатолий Михайлович, обладая большой эрудицией, на протяжении шести лет настойчиво и терпеливо вкладывал в меня свои знания. Регулярные обсуждения широкого круга вопросов способствовали развитию моего интереса к интеллектуальной деятельности.

Автор благодарит заведующего теоретическим отделом ИСАН, профессора Аграновича Владимира Моисеевича за доброе отношение и поддержку.

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н., председателю совета молодых ученых ИСАН, Андрею Наумову за всестороннюю помощь и поддержку.

Автор выражает благодарность физическому факультету МГУ им. М.В. Ломоносова и кафедре Общей физики и волновых процессов, давших мне путевку в научную жизнь.

Автор благодарит фонды РФФИ и “Династия” за финансовую поддержку, позволившую плодотворно работать во время учебы в аспирантуре.

Автор благодарит своих родителей, Антонову Галину Федоровну и Гладуша Геннадия Григорьевича. Они не только дали мне жизнь, но и создали все условия для того, чтобы я мог посвятить ее любимому и интересному делу. Их опыт и знания помогли мне избежать многих трудностей и способствовали моему движению вперед.

Также выражаю благодарность моему старшему брату, к.ф.-м.н., Гладушу Максиму Геннадьевичу, который, проходя различные этапы жизненного пути раньше меня, на основании своего опыта всегда помогал мне советом и делом.

Список литературы

- [1] Einstein A Berl. Ber., 22, 261, 1924; 23, 3, 1925; 23, 18, 1925.
- [2] П.Л. Капица, ДАН СССР, 18, 28, 1937; Nature, 141, 74, 1937.
- [3] L. Tisza, Nature, 141, 913, 1938.
- [4] Л.Д. Ландау, ЖЭТФ, 11, 592, 1941.
- [5] Н.Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. 11(1), 77, 1947.
- [6] E.P. Gross, Nuovo Cimento, 20, 454, 1961.
- [7] Л.П. Питаевский, ЖЭТФ, 40, 646, 1961.
- [8] L.P. Pitaevskii and S. Stringari, Bose-Einstein Condensation, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [9] M.A. Hofer, M.J. Ablowitz, I. Coddington, E.A. Cornell, P. Engels, V. Schweikhard, Phys. Rev. A, 74, 023623, 2006.
- [10] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, Science, 269, 198, 1995.
- [11] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett., 75, 3969, 1995.
- [12] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett., 75, 1687, 1995.
- [13] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner and T.J. Greytak, Phys. Rev. Lett., 81, 3811, 1998.
- [14] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R.J. Brecha, A. Simoni and M. Inguscio Science, 294, 1320, 2001.
- [15] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C.I. Westbrook and A. Aspect, Science, 292, 461, 2001.

- [16] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. N'agerl and R. Grimm, *Science*, 299, 232, 2003.
- [17] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki and Y. Takahashi *Phys. Rev. Lett.*, 91, 040404, 2003.
- [18] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler and T. Pfau, *Phys. Rev. Lett.*, 94, 160401, 2005.
- [19] Л.П. Питаевский, *УФН*, 176, 4, 345-364, 2006.
- [20] E. Cornell, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, 101, 419, 1996.
- [21] R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis and P. G. Kevrekidis, *IOP: Nonlinearity*, 21, R139–R202, 2008.
- [22] E.A. Cornell, доклад на "Conference on Nonlinear Waves, Integrable Systems and their Applications", (Colorado Springs, June 2005); <http://jilawww.colorado.edu/bec/papers.html>.
- [23] G.A. El, A. Gammal, and A.M. Kamchatnov, *Phys. Rev. Lett.*, 97, 180405, 2006.
- [24] I. Carusotto, S.X. Hu, L.A. Collins, and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.*, 97, 260403, 2006.
- [25] G.A. El and A.M. Kamchatnov, *Phys. Lett A*, 350, 192, 2006; erratum: *Phys. Lett. A*, 352, 554, 2006.
- [26] Yu.S. Kivshar, D.E. Pelinovsky, *Physics Reports* 331, 117-195, 2000.
- [27] B.B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili, *Sov. Phys. Doklady*, 15, 539, 1970.
- [28] E.A. Kuznetsov and S.K. Turitsyn, *Sov. Phys. JETP*, 67, 1583, 1988.
- [29] R. Nath, P. Pedri, and L. Santos, *Phys. Rev. Lett.*, 101, 210402, 2008.
- [30] A. M. Kamchatnov and L. P. Pitaevskii, *Phys. Rev. Lett.*, 100, 160402, 2008.

- [31] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Физическая кинетика, Москва, “Наука”, 1979.
- [32] М.Б. Виноградова, О.Б. Руденко, А.П. Сухоруков, “Теория волн”, Москва, “Наука”, 1990.
- [33] Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал, “Оптические солитоны”, Москва, физматлит, 2005.
- [34] G.A. Swartzlander et. al., Phys. Rev. Lett., 66, 1583, 1991.
- [35] G.R. Allan et al., Opt.Lett, v.16, p. 156, 1991.
- [36] G. Duree at al., Phys. Rev. Lett., 74, 1978, 1995.
- [37] A.V. Mamaev, M. Saffman, A.A. Zozulya, Phys. Rev. Lett., 76, 13, 1996.
- [38] W. Wan, S. Jia and J.W. Fleischer, Nature Physics, 3, 46, 2007.
- [39] N. Ghofraniha, C. Conti, G. Ruocco, and S. Trillo, Phys. Rev. Lett., 99, 043903, 2007.
- [40] A.P. Sheppard and Yu.S. Kivshar, Phys. Rev. E, 55, 4773, 1997.
- [41] K. Kasamatsu et al., Phys. Rev. Lett. 93, 250406, 2004.
- [42] N.G. Berloff, Phys. Rev. Lett. 94, 120401, 2005.
- [43] Yu.S. Kivshar, B. Luther-Davies, Physics Reports, 298, 81-197, 1998.
- [44] V.A. Brazhnyi, A.M. Kamchatnov, Phys. Rev. A, 68, 043614, 2003.
- [45] A.M. Kamchatnov, A. Gammal, R.A. Kraenkel, Phys. Rev. A, 69, 063605, 2004.
- [46] B. Damski, Phys. Rev. A, 69, 043610, 2004.
- [47] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат, ЖЭТФ, 64, 1627, 1973.
- [48] T. Tsuzuki, J. Low Temp. Phys. 4, 441, 1971.

- [49] C. Raman et al., Phys. Rev. Lett., 83, 2502, 1999.
- [50] R. Onofrio, Phys. Rev. Lett., 85, 2228, 2000.
- [51] J. S. Stieβberger and W. Zwerger, PHYSICAL REVIEW A, VOLUME 62, 061601R, 2000.
- [52] T. Winiecki, J.F. McCann, and C.S. Adams, Phys. Rev. Lett., 82, 5186, 1999.
- [53] Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, “Гидродинамика”, Москва, “Наука”, 1986.
- [54] G.E. Astrakharchik and L.P. Pitaevskii, Phys. Rev. A, 70, 013608, 2004.
- [55] D.L. Kovrizhin, L.A. Maksimov Physics Letters A, 282, 421, 2001.
- [56] Lord Kelvin, Phil. Mag., 9, 733, 1905.
- [57] Дж. Уизем, “Линейные и нелинейные волны”, Москва, “Мир”, 1977.
- [58] Г. Арфкен, “Математические методы в физике”, Москва, Атомиздат, 1970.
- [59] М. Абрамовиц, И. Стиган, “Справочник по специальным функциям”, Москва, “Наука”, 1979.
- [60] A.M. Kamchatnov, “Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations”, World Scientific, Singapore, 2000.
- [61] Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич, “Солитоны”, Москва, Физматлит, 2003.
- [62] D.N. Christodoulides, M.I. Carvalho, J.Opt.Soc.Am.B., 12, 1658, 1995.
- [63] G.C. Valley, M. Segev et al., Phys.Rev.A, 50, R4457, 1994.
- [64] В.Е. Лобанов, А.К. Сухорукова, А.П. Сухоруков, Квантовая электроника, 38, 951, 2008.
- [65] В.И. Кабакова, А.П. Сухоруков, Известия РАН, Серия физическая, 70, N12, 1752, 2006; В.Е. Лобанов, А.П. Сухоруков, А.Ж. Цырендоржиев, А.А. Калинович, Изв. РАН. Сер. физ. 70, 1731, 2006.

- [66] G.A. El, A. Gammal, E.G. Khamis, R.A. Kraenkel, and A.M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A*, 76, 053813, 2007.
- [67] M. Taya, M.C. Bashaw et al., *Phys. Rev. A*, 52, 3095, 1995.
- [68] P. A. Sturrock, *Phys. Rev.*, 112, 1488, 1958.
- [69] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R.J. Brecha, A. Simoni and M. Inguscio, *Science*, 294, 1320, 2001.
- [70] W. Ketterle в книге “Bose-Einstein Condensates and Atom Lasers” под редакцией S. Martellucci, A.N. Chester, A. Aspect, M. Inguscio, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht и др., 2002.
- [71] C.J. Myatt, E.A. Burt, R.W. Ghrist, E.A. Cornell and C.E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.*, 78, 586, 1997.
- [72] J. Stenger, S. Inouye, D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A.P. Chikkatur and W. Ketterle, *Nature*, 396, 345, 1998.
- [73] С.В. Манаков, *ЖЭТФ*, 65, 505, 1973.