

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Голубева Татьяна Юрьевна

Генерация, передача и хранение
широкополосного яркого излучения
в квантовой оптике
и квантовой информатике

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Специальность: 01.04.05 – оптика

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

Введение	6
1 Квантовая теория вискелов: генерация поляризационно сжатого света	17
1.1 Модель вискела	19
1.2 Основные уравнения лазерной генерации	21
1.3 Адиабатическое приближение	23
1.4 Полуклассические стационарные решения	24
1.5 Линеаризация основных уравнений около стационарных полуклассических решений	26
1.6 Решения для спектральных квадратур	28
1.7 Парные спектральные корреляционные функции для квадратур поля генерации	30
1.8 Квантовые поляризационные состояния света	31
1.8.1 Квантовые параметры Стокса	31
1.8.2 Измерение классических параметров Стокса	35
1.8.3 Наблюдение спектра флуктуаций квантовых параметров Стокса	36
1.8.4 Формальные соотношения между спектральными плотностями квантовых параметров Стокса и квадратурными компонентами	39
1.8.5 Поляризационное сжатие в вискеле	41
1.9 Вискел с одинаковыми временами жизни уровней	46
2 Спектральные квантовые свойства излучения трехмодового параметрического генератора в надпороговом режиме	55
2.1 Физическая модель и основные уравнения	57
2.2 Стационарные решения для классической теории TPO	59
2.3 Линеаризация основного уравнения по малым флуктуациям амплитуд и фаз	61
2.4 Внутррезонаторные спектральные плотности шумов	63
2.5 Корреляции для наблюдаемых полей снаружи резонатора	66
2.5.1 Ковариационная матрица	68
2.5.2 Степень чистоты для осциллятора в гауссовском состоянии . . .	70
2.5.3 Спектральная чистота квантового состояния поля	71

2.5.4	Спектральная степень чистоты для надпороговой генерации TPOPO с симметричной синхронизацией	73
3	Источники широкополосного сжатого света	83
3.1	Теория вырожденного параметрического генератора света над порогом генерации	84
3.1.1	Физическая модель ВПГС. Уравнения Гайзенберга-Ланжевена	84
3.1.2	Полуклассические стационарные решения	86
3.1.3	Флуктуации полей. Линеаризация уравнений Гайзенберга-Ланжевена	87
3.1.4	Спектральные плотности квадратурных компонент света на выходе ВПГС	89
3.1.5	Насколько близко возможно "подойти" к порогу?	92
3.2	Теория одномодового субпуассоновского лазера с захватом фазы	93
3.2.1	Физическая модель и уравнения Гайзенберга-Ланжевена	95
3.2.2	Линеаризация уравнений относительно малых флуктуаций	100
3.2.3	Среднеквадратичные флуктуации квадратур поля внутри и снаружи резонатора	102
3.2.4	Захват фазы лазерного излучения	104
4	Пиксельный источник пространственно многомодового перепутанного света	108
4.1	Прямое измерение квадратурных компонент поля в дальней зоне	110
4.1.1	Схема с одиночным источником яркого когерентного света	110
4.1.2	Схема с двумя когерентными источниками	115
4.2	±детектирование в схеме с вырожденным параметрическим генератором света (ВПГС) или субпуассоновским лазером с захватом фазы	117
4.3	±детектирование с пиксельным источником: массив когерентных точечных источников	121
4.4	Прямое измерение с одним пиксельным источником	125
5	Плотное кодирование оптических изображений	130
5.1	Пространственно-многомодовый канал в схеме квантового плотного кодирования	132
5.1.1	Основы квантового плотного кодирования	132
5.1.2	Оптическая схема для квантового плотного кодирования изображений	134
5.1.3	Свойства пространственно-многомодового сжатого света	137
5.1.4	Плотности фототоков	139
5.2	Пропускная способность канала связи	139
5.2.1	Степени свободы в шумовом и сигнальном полях	139

5.2.2	Взаимная информация Шеннона и пропускная способность пространственно-многомодового канала плотного кодирования . . .	142
6	Широкополосное плотное кодирование и телепортация	150
6.1	Субпуассоновский лазер в схеме квантового плотного кодирования . . .	152
6.1.1	Критерий Дуана для перепутывания света в непрерывных перемешанных	152
6.1.2	Схема плотного кодирования	154
6.1.3	Отношение сигнал-шум в спектральном представлении	156
6.1.4	Взаимная информация Шеннона	158
6.2	Протокол квантовой телепортации с использованием лазерного излучения	161
6.2.1	Принципиальная схема	161
6.2.2	Спектральная верность протокола телепортации	163
6.3	Особенности использования ВПГС в схемах плотного кодирования и телепортации	166
7	Широкополосная и пространственно многомодовая квантовая память	174
7.1	Модель широкополосной квантовой памяти	177
7.1.1	Общие решения	186
7.1.2	Решения для процессов записи и считывания сигнала	190
7.2	Обсуждение: процесс записи	193
7.2.1	Оценка потерь в процессе записи	197
7.2.2	Применимость резонансного и рамановского приближений . . .	202
7.3	Обсуждение процесса считывания	204
7.3.1	Оценка числа сохраняемых мод	208
7.4	Сохранение сжатого света в ячейках памяти	210
7.4.1	Адиабатическая модель: описание в терминах неканонических амплитуд	213
7.4.2	Широкополосная квантовая память: решение для неканонической амплитуды поля	219
7.4.3	Способность широкополосной и адиабатической памяти к сохранению сжатия	220
7.5	Анализ собственных временных мод широкополосной и адиабатической квантовой памяти	225
7.5.1	Сравнение актуальных параметров для двух моделей памяти . .	230
7.6	Эффективность и другие характеристики качества хранения информации	232
A	Спектр сжатия изолированного импульса входного поля	241
	Заключение	245

<i>Оглавление</i>	5
Список используемых сокращений	253
Литература	254

Введение

Интенсивное развитие квантовой оптики, а также становление квантовой теории информации, произошедшие за последние 20 лет, сформировали ряд направлений, получивших самостоятельное звучание. Прежде всего, это проблема генерации состояний света с заданными неклассическими квантово-статистическими свойствами. Далее — манипуляция такими состояниями: их передача на требуемые расстояния, перенос на другие объекты, использование в качестве носителя информации и др. В этой связи принято говорить о квантовом канале связи (или иначе, квантовом информационном канале), как о системе передачи/преобразования информации, использующей в качестве носителя сообщений квантово-механический объект [20]. Наконец, отдельное место занимает проблема хранения квантового сигнала, т.е. формирование "линии задержки" света, позволяющей извлекать нужное квантовое состояние по требованию.

Источники неклассического (сжатого, перепутанного) света играют исключительную роль в задачах квантовой оптики. Именно свойствами источников определяются потенциально достижимые квантовые эффекты, от них зависят особенности построения экспериментальных схем с неклассическим светом. Построение квантовых моделей для таких источников началось с середины 80-х годов двадцатого века с первых демонстрационных схем, указывающих на принципиальную возможность наблюдения квантовых эффектов (см., например, [21–25]). Для формирования сжатого и перепутанного света обычно используют один из двух механизмов: параметрическое

преобразование фотонов в кристаллах с квадратичной нелинейностью [26] или создание регулярной генерации лазерного излучения (например, путем регуляризации накачки) [27–29]. Первый из перечисленных механизмов предполагает возможность манипулирования как малофотонными полями, так и ярким неклассическим светом при использовании резонатора. Генераторы с регулярной накачкой, будучи первыми системами, в которых удалось экспериментально получить излучение с субпуассоновской статистикой [30], и сегодня остаются наиболее надежными и легко реализуемыми источниками неклассического света, используемыми уже не только в научных лабораториях, но и в коммерческих целях [31].

Более детальное изучение источников неклассического света, а также вопросы применения такого света в протоколах передачи информации, выделили, как один из важнейших аспектов, многомодовость и широкополосность излучения. Следует отметить, что каким бы ни был источник света, вышедшее излучение всегда обладает той или иной полосой излучения. Таким образом, учет этого фактора необходим для построения адекватных физических моделей. С другой стороны, оказалось, что широкополосность света предоставляет дополнительные информационные возможности для передачи сигналов. Вообще, увеличение числа степеней свободы носителя информации мультипликативно увеличивает информационную емкость канала. Однако, для квантового канала необходимо не только иметь информационно емкий источник сигнала, но и обеспечить передачу этой информации без добавления квантовых шумов, а значит свет, используемый для подавления шумов в канале, должен обладать как минимум тем же числом степеней свободы, что и сам сигнал.

Другим важным аспектом является дальность передачи квантового сигнала. Как известно, эффекты декогеренции принципиально ограничивают дальность передачи квантовых сигналов. В отличие от передачи классических сигналов, допускающих усиление для увеличения дальности их передачи, квантовые сигналы не могут

быть усилены без добавления шума (это диктуется теоремой о запрете клонирования квантовых состояний [32–34]). Усилия, предпринимаемые для преодоления эффектов декогеренции, позволили на несколько порядков увеличить дальность работы информационных каналов. Так, если в первых экспериментах по передаче квантового ключа [35], выполненных в 1992 году, максимальное расстояние между источником и приемником составляло 30 см [36], то на настоящий момент дальность передачи превосходит 100 км. Решение проблемы передачи квантовых сигналов на большие расстояния связывают сегодня с использованием квантовых повторителей [37–40] — устройств, позволяющих разделить большую дистанцию на короткие сегменты, связанные между собой квантовым перепутыванием. Ключевым моментом для реализации таких повторителей является наличие ячеек квантовой памяти [41, 42], позволяющих хранить перепутанные состояния на каждом из сегментов до определенного момента. При этом требования, предъявляемые к ячейкам памяти в рамках концепции квантовых повторителей очень высоки: оперируя в квантовом режиме, они должны работать с высокой эффективностью и достаточным быстродействием.

Первая модель ячейки квантовой памяти опиралась на использование эффекта электромагнитно-индуцированной прозрачности (EIT) в атомном ансамбле с Λ -конфигурацией энергетических уровней [43, 44]. Однако, как известно, снижение групповой скорости света за счет повышения дисперсии показателя преломления неизбежно сопровождается сужением рабочей полосы частот, а значит, и снижением информационной емкости соответствующего оптического канала связи [45]. На сегодня, вопрос об эффективности работы квантовой памяти обсуждают в совокупности с вопросом о ее пропускной способности [46]. Все изложенное выше говорит об актуальности темы данного диссертационного исследования.

Во введениях к каждой из глав диссертации продемонстрирована высокая степень разработанности направлений исследования.

Целью данной работы является изучение ярких широкополосных или многомодовых в пространстве и/или времени световых полей в сжатом и перепутанном состоянии и анализ их применимости в информационных протоколах; обсуждение всего комплекса вопросов от генерации таких полей (с различными квантово-статистическими свойствами), использования широкополосных световых полей в квантовых информационных каналах (в протоколах квантового плотного кодирования и телепортации), до их хранения в ячейках квантовой памяти.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие конкретные задачи:

1. Найти квантовые системы способные генерировать яркий широкополосный свет с неклассическими свойствами. Построить квантово-статистические модели таких систем и получить полное теоретическое описание их характеристик в рамках аппарата квантовой электродинамики. Получить различные виды неклассического света: широкополосный квадратурно сжатый свет, перепутанный свет, поляризационное сжатие, пространственно-многомодовый сжатый свет.
2. Исследовать применимость найденных источников света в квантовых информационных протоколах. Обобщить протоколы плотного кодирования и телепортации на случай многомодового и широкополосного света, найти и оценить адекватные информационные меры, характеризующие качество работы протоколов.
3. Построить модель квантовой памяти, пригодную для сохранения широкополосного и пространственно многомодового неклассического света. Оценить возможности сохранения статистических информационных характеристик такого света. Апробировать модель на примере излучения от конкретных источников.

Практическая значимость работы обусловлена прежде всего растущими потребностями квантовой информатики. В этой связи мы старались перекинуть мост от традиционных подходов квантовой оптики к информационным оценкам исследуемых систем. Мы сделали акцент на задачах, обеспечивающих увеличение скорости работы информационных каналов и их емкости. Использование пространственно многомодового света делает возможным распространение естественного оптического параллелизма, присущего квантовым изображениям, на квантово-информационные приложения. Подобная аналогия напрашивается и для широкополосных (относительно временной переменной) полей. Следует отдельно выделить важность оперирования широкополосными (короткими) импульсами в задачах квантовой памяти. Ячейки квантовой памяти рассматриваются на сегодня как ключевой элемент каналов передачи информации на значительные расстояния, обеспечивая возможность функционирования квантовых повторителей. Таким образом, поскольку информационная емкость каналов связи существенно зависит от их полосы пропускания, ячейки памяти, будучи частью этих каналов и являясь спектральными фильтрами, не должны ухудшать их пропускные способности. С другой стороны, как потенциальные элементы квантовых вычислительных систем, ячейки памяти должны обеспечивать быстрый процессинг, а значит, оперировать короткими импульсами.

Методы исследования, используемые в работе, включают основные подходы квантовой электродинамики. Анализ квантово-статистических свойств неклассического света проводится в основном на языке операторных уравнений Гайзенберга-Ланжевена, удобном для дальнейшего анализа использования полей в информационных приложениях. Полуклассические уравнения помогают нам оценить динамику систем. Кроме того мы пользуемся диагональными представлениями: представление Глаубера оказывается удобным для изучения статистики излучения ТРОРО

(мы демонстрируем его преимущества перед положительным представлением для этой задачи), а представление Вигнера - для оценки чистоты квантовых состояний. В работе предлагается методически интересный подход к детектированию квадратурных компонент яркого многомодового света, позволяющий избежать сложностей гомодинного приема. Нам кажется удачным методологическим решением введение неканонических амплитуд в задаче квантовой памяти, позволяющих существенно упростить решение, но сохраняющих ее интересные квантовые аспекты.

Новизна результатов исследования:

- Построена полностью квантовая модель полупроводникового лазера на квантовых ямах - вискела - с учетом наличия двойного лучепреломления и дихроизма в излучающей среде. Проанализирована квантовая статистика излучения для двух конфигураций (соответствующих различному соотношению между релаксационными константами), встречающихся в экспериментах, в зависимости от параметров среды, а также от характера ее возбуждения, и выявлены условия для наблюдения поляризационного сжатия. Продемонстрирована несостоятельность феноменологической модели при описании шумов излучения.
- Построена модель трехмодового невырожденного параметрического генератора света, работающего в надпороговом режиме, с инжекцией внешнего слабого поля в сигнальную и холостую моды. Найдена трехмодовая функция распределения квази-вероятности числа фотонов Глаубера, а также ковариационные матрицы, соответствующие различным вариантам наблюдения. Проанализирована спектральная чистота системы. Определены условия для наилучшего наблюдения эффектов сжатия и перепутывания между модами.
- Построена модель субпуассоновского лазера с захватом фазы. Показано, что условие подавления диффузии фазы согласуется с требованием, накладывае-

мым на мощность внешнего синхронизирующего поля, для сохранения квантовых особенностей излучения.

- Построена модель пространственно многомодового пиксельного источника неклассического света, проявляющего пространственно-временное сжатие. Предложен новый метод детектирования яркого пространственно многомодового излучения, позволяющий измерять квадратуры поля без использования схемы гомодинного приема.
- Протокол плотного кодирования обобщен на случай пространственно-многомодового квантового канала связи. Рассчитана взаимная информация Шеннона для потока классических входных изображений в пространственно-многомодовом канале.
- Протоколы квантового плотного кодирования и квантовой телепортации спектрально широкого сигнала апробированы в схемах с источниками широкополосного сжатого света. Предложены и оценены адекватные меры работы протоколов.
- Предложена новая модель квантовой голографической памяти для коротких импульсов на основе ансамбля Λ -атомов. Проанализированы механизмы потерь и возможности оптимизации работы схемы. Оценены эффективность и число сохраняемых мод. Построено общее теоретическое описание взаимодействия для произвольного значения отстройки управляющего и сигнального полей от частот переходов Λ -атомов, на основе которой проанализированы условия применимости резонансной и рамановской моделей. Исследована возможность сохранения широкополосного сжатого света. Основываясь на анализе собственных мод схем памяти, оценены возможности хранения широкополосных сигналов.

Положения, выносимые на защиту. В диссертации рассматриваются три взаимно пересекающихся аспекта, важных для квантовой оптики и квантовой информатики, а именно, генерация неклассического яркого света, использование его в квантовых каналах передачи и обработки информации, и хранение (с последующим воспроизведением) в ячейках квантовой памяти.

На защиту выносятся следующие положения, относящиеся к генерации неклассического света:

1. Низкоразмерный полупроводниковый лазер (виксел) является эффективным источником поляризационно-сжатого по отношению к параметру Стокса S_1 яркого света, даже в условиях двулучепреломления и дихроизма в излучающей среде.
2. Невырожденный трехмодовый параметрический генератор света, работающий в надпороговом режиме, является источником эффективно сжатых и перепутанных сигнальной и холостой волн. При значительном превышении мощностью накачки порогового значения, волны оказываются амплитудно-сжатыми наполовину по сравнению с когерентным состоянием. При небольшом превышении, сигнальная и холостая волны оказываются в перепутанном состоянии, а волна накачки - в фазово-сжатом состоянии.
3. Субпуассоновский лазер, синхронизированный достаточно слабым когерентным внешним электромагнитным полем, остается эффективным источником неклассического света, однако обнаруживает уже не субпуассоновскую статистику, а амплитудное сжатие, поскольку диффузия фазы оказывается полностью подавленной.
4. Пиксельный источник, построенный как совокупность точечных источников сжатого света, расположенных периодически в пространстве на некоторой плос-

кости, формирует свет, сжатый не только во времени, как от индивидуального пиксела, но и в пространстве.

На защиту выносятся следующие положения, относящиеся к использованию неклассического света в квантовых информационных каналах:

5. Пространственно-многомодовый квантовый информационный канал обеспечивает параллельную передачу мод сигнала без добавления квантового шума в области эффективного сжатия, что приводит к значительному увеличению его информационной емкости по сравнению с одномодовым. В отличие от классического канала, в этом случае можно указать оптимальное соотношение между пространственной плотностью элементов сигнального изображения и шириной пространственного спектра перепутывания, обеспечивающее максимальную емкость канала. Вывод сделан из анализа схемы плотного кодирования оптического изображения.
6. Применение широкополосного света в схеме плотного кодирования существенно увеличивает взаимную информацию Шеннона, обеспечивая временной многоканальный параллелизм при передаче информации. Использование широкополосного света в схеме телепортации позволяет передать широкополосный сигнал с верностью каждой моды заметно превосходящей классический предел.

На защиту выносятся следующие положения, относящиеся к сохранению неклассического света в ячейках квантовой памяти:

7. Для достаточно плотной трехуровневой среды квантовая широкополосная память (память для коротких импульсов) реализуется не статически, как в случае ЕПТ-памяти, но динамически, поскольку при таком взаимодействии света со средой эффект "остановки" света не успевает реализоваться заметным образом.

8. Эффективность полного цикла широкополосной памяти при оптимальном выборе параметров задачи (при минимальных потерях в процессе записи) оказывается близкой к ста процентам.
9. Наилучшее воспроизведение квантовых свойств света (сжатие) достигается обязательно при максимальной эффективности памяти, что связано с особенностями мод Шмидта для ячейки памяти.

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается тем, что в основу всех расчетов положены адекватные квантово-механические модели, все сделанные приближения и предположения имеют под собой физические основания и никакие волюнтаристские шаги не допускались. Для решения задач применяются хорошо зарекомендовавшие себя методы квантовой электродинамики. Анализ результатов включает сравнение с результатами других исследователей. Значительная часть работы выполнена в тесном контакте с экспериментальными группами Клода Фабра и Элизабет Джакобино (Университет Пьера и Марии Кюри, Париж). Наконец, полученные результаты обсуждались на научных семинарах с коллегами, докладывались диссертантом на представительных научных конференциях, опубликованы в ревьюируемых журналах.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации изложены в 19 статьях [G1-G19], из которых 17 - в журналах, включенных в список ВАК, а также докладывались на следующих международных конференциях: International Quantum Electronics Conference, Москва, 2002; International Conference on Quantum Optics, Минск, 2002, 2004, 2006; Russian-French Laser Symposium, Москва, 2003; Оптика, С.Петербург, 2003, 2013; Международные чтения по квантовой оптике, С.Петербург, 2003; Russian-French Laser Physics Workshop for Young Scientists, 2004, 2006; Фонда-

ментальные проблемы оптики, С.Петербург, 2004; Квантовые измерения и физика мезоскопических систем, г. Владимир, 2005; International Conference on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO/LAT), С.Петербург, 2005; Семинар памяти Д.Н.Клышко, Москва, 2005, 2007; Quantum Physics and Communication, Дубна, 2005; ICO Topical Meeting on Optoinformatics/Information Photonics, С.Петербург, 2006; Coherent Control of the Fundamental Processes in Optics and X-ray-Optics, Нижний Новгород, 2006; NATO Advanced Research Workshop "Quantum Communication and Security Гданьск, 2006, 2009; Frontiers of nonlinear physics, Нижний Новгород, 2007, 2010; International Laser Physics Workshop, Тронхейм, 2008; International Workshop on High Dimensional Entanglement 2009, 2010, 2011; International Conference on Quantum Technologies, Москва, 2011, 2013; Continuous Variable Quantum Information Processing, Копенгаген, 2012; Central European Workshop on Quantum Optics, Синая, 2012; Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, Нюрнберг, 2013.

Личный вклад автора. Основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. В работах, опубликованных в соавторстве, в материалы диссертации включены только те результаты исследований, в получении которых диссертанту принадлежит определяющая роль.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертационной работы составляет 268 страниц, в том числе 47 рисунков и 192 наименования в списке литературы.

Глава 1

Квантовая теория викселов: генерация поляризационно сжатого света

Идея использования лазера для генерации неклассического света была впервые высказана в работе [28], где авторы предложили использовать короткие регулярные импульсы для создания накачки с полным возбуждением в каждом импульсе, что приводит (при выполнении прочих необходимых условий) к формированию субпуассоновской статистики излучения. В работах [47–50] было показано, что к повышению регулярности излучения лазера могут привести и другие способы управления случайными процессами, отвечающими за эффективное линейное усиление (включая внутрирезонаторные потери) лазера. Заслуживают внимания методы создания регулярного потока фотонов или фототока в лазерах с отрицательной обратной связью. Относительно этой системы до сих пор актуальна научная дискуссия о том, является ли излучение этих лазеров субпуассоновским [51–55] или такая статистика характерна только для фототока [56–58, G4, G6].

В этой связи внимание исследователей привлекли полупроводниковые лазеры на квантовых ямах. К таким лазерам относится первый из объектов нашего интереса - виксел. Это транскрипционное название, происходящее от англоязычного Vertical-

Cavity Surface-Emitting Laser (VCSEL). Особый интерес для нас вексели представляют потому, что в них достаточно просто организуется регулярная накачка лазерных уровней и тем самым обеспечивается субпикосекундовая лазерная генерация [28, 30]. Кроме того интерес к векселям мотивирован потенциальными возможностями использования их излучения в высокоскоростных каналах связи [59] благодаря их высокой квантовой эффективности, низкому порогу генерации, а также возможности реализовать одномодовый режим работы.

Экспериментальные демонстрации сжатия в излучении векселя проведены как в одномодовом режиме генерации, так и в поперечно-многомодовом режиме [60, 61]. При работе в одномодовом режиме, когда над порогом генерируется только одна линейно поляризованная мода, флуктуации подпороговой моды с ортогональной поляризацией могут оказаться очень велики [62, 63] а, кроме того, могут быть сильно скоррелированы с флуктуациями интенсивности осциллирующей моды. Это явление может ухудшать сжатие, наблюдаемое в экспериментах с поляризационно-чувствительными оптическими элементами. Таким образом, поляризационная динамика в векселях играет важную роль для корректного описания их квантовых флуктуаций.

Теоретическая полуклассическая модель, описывающая динамику двух поляризационных компонент электромагнитного поля в векселе, так называемая спин-флип (spin-flip) модель лазерной генерации, была предложена Сан-Мигелем и соавторами в работе [64]. На основе этой модели был предпринят ряд попыток полуклассического описания флуктуаций излучения векселя [65–67]. Однако, как стало ясно, полуклассический подход оказался непригоден для описания света, сжатого по интенсивности, требовавшего полностью квантового анализа. Такой анализ был впервые выполнен в работе [68]. Наше исследование здесь развивает эту модель. В частности, мы обобщаем ее на случай наличия в системе двойного лучепреломления и дихроизма, прибли-

жая к реальным экспериментальным условиям. Кроме того основной акцент задачи в нашем рассмотрении сосредоточен не на квадратурном, как в работе [68], но на поляризационном сжатии. Мы применим технику квантовых параметров Стокса к описанию авто-корреляций и кросс-корреляций двух поляризационных компонент излучения виксела. Мы найдем аналитические выражения для спектров флуктуаций квантовых параметров Стокса и обсудим эксперименты, в которых они могут быть измерены. Наконец, мы покажем, что при субпуассоновской статистике накачки виксел может излучать свет поляризационно сжатый в некотором спектральном диапазоне. Здесь мы будем основываться главным образом на материалах нашей работы [G3].

В конце главы мы сравним между собой два типа викселов, используемых в экспериментах, отличающиеся соотношением времен жизни лазерных уровней, и покажем, какой из них предпочтителен с точки зрения генерации сжатого света.

1.1 Модель виксела

В работе [64] предложено рассматривать энергетическую структуру лазерной среды как систему четырех-уровневых "атомов", схематически представленных на рис. 1.1. Такое модельное рассмотрение хорошо обосновано с точки зрения зонной структуры полупроводника [69]. Верхние состояния $|1_{\pm}\rangle$ распадаются со скоростью γ_1 , а нижние $|2_{\pm}\rangle$ со скоростью γ_2 . Скорость распада когерентности между лазерными уровнями предполагается равной $\gamma_{\perp} \geq (\gamma_1 + \gamma_2)/2$. В случае полупроводникового лазера накачка на лазерные уровни осуществляется электрическим током через p-n переход. Мы полагаем, что у нас имеет место некогерентное возбуждение только на верхние уровни со средней скоростью 2μ . Это вместе со спонтанным распадом уровней обеспечивает стационарную в среднем одинаковую заселенность верхних состояний $|1_{\pm}\rangle$. Нижние же уровни $|2_{\pm}\rangle$ в отсутствие генерации остаются незаселенными. Переходы

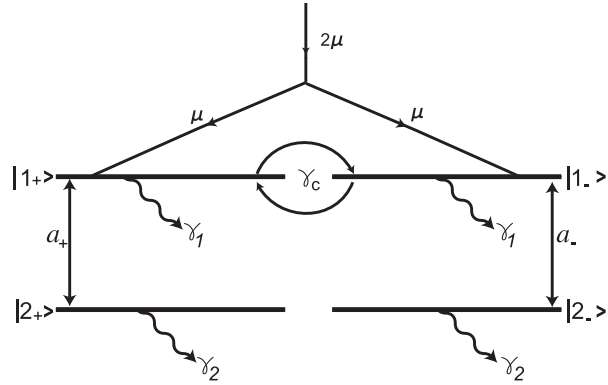


Рис. 1.1: Четырехуровневая схема активной среды в ви́кселе.

$|1_+\rangle \Leftrightarrow |2_+\rangle$ и $|1_-\rangle \Leftrightarrow |2_-\rangle$ осуществляются право- и лево-циркулярно поляризованными электромагнитными волнами.

Мы полагаем, что эта среда четырех-уровневых "атомов" помещается в высокочастотный резонатор, где для нас актуальными оказываются только две моды с приблизительно одинаковыми частотами, но с ортогональными циркулярными поляризациями. Амплитуды этих волн задаются нормированными гайзенберговскими операторами $\hat{a}_\pm(t)$.

В реальном ви́кселе важную роль играет эффект переворачивания спинов (spin-flip), связанный формально с тем, что подуровни \pm могут обмениваться своими возбуждениями. Это некогерентное явление, и мы будем учитывать его феноменологически и только для верхних лазерных уровней. Будем полагать, что взаимные переходы $|1_+\rangle \Leftrightarrow |1_-\rangle$ происходят симметрично со скоростью γ_c .

Важной особенностью нашего рассмотрения является то, что мы сможем следить за генерацией при разной статистике возбуждения среды. В теории, развиваемой ниже, это характеризуется параметром p [70]. При $p = 1$ имеет место строго регулярная накачка, ответственная за возникновение субпуассоновской генерации. При $p = 0$ атомы возбуждаются на верхний рабочий уровень случайным образом и независимо друг от друга (пуассоновская статистика). Суперпуассоновская статистика

генерации реализуется при отрицательных значениях p .

1.2 Основные уравнения лазерной генерации

Согласно работе [68] рабочая среда вискела удобно описывается посредством коллективных переменных. Они вводятся в рассмотрение следующим образом: коллективные заселенности верхних лазерных подуровней

$$\hat{N}_{1\pm}(t) = \sum_j \theta(t - t_j) \hat{\sigma}_{1\pm}^j(t) \quad (1.1)$$

и коллективные заселенности нижних подуровней

$$\hat{N}_{2\pm}(t) = \sum_j \theta(t - t_j) \hat{\sigma}_{2\pm}^j(t) \quad (1.2)$$

выражаются через заселенности каждого из атомов в отдельности $\hat{\sigma}_{1\pm}^j(t)$ и $\hat{\sigma}_{2\pm}^j(t)$. Здесь $\theta(t)$ - это функция включения. Она не равна нулю только при $t > 0$. t_j - это момент возбуждения j -го атома.

Аналогичным образом записываются коллективные поляризации лазерных переходов через индивидуальные

$$\hat{P}_{\pm}(t) = -i \sum_j \theta(t - t_j) \hat{\sigma}_{\pm}^j(t). \quad (1.3)$$

В работе [G3] получена следующая система уравнений

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_{\pm} = -\kappa \hat{a}_{\pm} - (\kappa_a + i\omega_p) \hat{a}_{\mp} + g \hat{P}_{\pm} + \hat{F}_{a\pm}, \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{P}_{\pm} = -\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{P}_{\pm} + g (\hat{N}_{1\pm} - \hat{N}_{2\pm}) \hat{a}_{\pm} + \hat{F}_{P\pm}, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{N}_{1\pm} = \mu - \gamma_1 \hat{N}_{1\pm} - \gamma_c (\hat{N}_{1\pm} - \hat{N}_{1\mp}) - g (\hat{a}_{\pm}^{\dagger} \hat{P}_{\pm} + \hat{a}_{\pm} \hat{P}_{\pm}^{\dagger}) + \hat{F}_{1\pm}, \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{N}_{2\pm} = -\gamma_2 \hat{N}_{2\pm} + g (\hat{a}_{\pm}^{\dagger} \hat{P}_{\pm} + \hat{a}_{\pm} \hat{P}_{\pm}^{\dagger}) + \hat{F}_{2\pm}, \quad (1.7)$$

которая, в принципе, позволяет получить всю необходимую информацию о лазерной генерации, включая и информацию о поведении лазерной среды. Все необходимые

свойства ланжевеновских источников могут быть найдены в работе [G3]. Мы не будем их выписывать здесь, поскольку мы не будем в дальнейшем их использовать напрямую. Дело в том, что эта система уравнений может быть существенно упрощена в предположении, что нас могут в конечном счете интересовать только так называемые нормально упорядоченные средние. Как хорошо известно, при этом уравнения Гайзенберга-Ланжевена могут быть переписаны в форме уравнений Ланжевена для s -числовых коллективных атомных переменных и для s -числовых амплитуд поля [70, 71]. Формально это означает, что в предшествующей системе уравнений все шляпки, указывающие на операторный характер величин, могут быть опущены. При этом ненулевые парные корреляторы для ланжевеновских источников имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} \langle F_{1\pm}(t)F_{1\pm}(t') \rangle &= [\gamma_1 \langle N_{1\pm}(t) \rangle + \gamma_c [\langle N_{1\pm}(t) \rangle + \langle N_{1\mp}(t) \rangle] + \mu(1 - p/2) - \\ &- g \langle a_{\pm}^*(t)P_{\pm}(t) + a_{\pm}(t)P_{\pm}^*(t) \rangle] \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\langle F_{1\pm}(t)F_{1\mp}(t') \rangle = [\gamma_c [\langle N_{1\pm}(t) \rangle + \langle N_{1\mp}(t) \rangle] - \mu p/2] \delta(t - t'), \quad (1.9)$$

$$\langle F_{1\pm}(t)F_{2\pm}(t') \rangle = g \langle a_{\pm}^*(t)P_{\pm}(t) + a_{\pm}(t)P_{\pm}^*(t) \rangle \delta(t - t'), \quad (1.10)$$

$$\langle F_{2\pm}(t)F_{2\pm}(t') \rangle = [\gamma_2 \langle N_{2\pm}(t) \rangle - g \langle a_{\pm}^*(t)P_{\pm}(t) + a_{\pm}(t)P_{\pm}^*(t) \rangle] \delta(t - t'), \quad (1.11)$$

$$\langle F_{P\pm}^*(t)F_{P\pm}(t') \rangle = [(2\gamma_{\perp} - \gamma_1 - \gamma_c) \langle N_{1\pm}(t) \rangle + \gamma_c \langle N_{1\mp}(t) \rangle + \mu] \delta(t - t'), \quad (1.12)$$

$$\langle F_{P\pm}(t)F_{P\pm}(t') \rangle = 2g \langle a_{\pm}(t)P_{\pm}(t) \rangle \delta(t - t'), \quad (1.13)$$

$$\langle F_{P\pm}(t)F_{2\pm}(t') \rangle = \gamma_2 \langle P_{\pm}(t) \rangle \delta(t - t'). \quad (1.14)$$

В полученных уравнениях κ - скорость утечки поля (спектральная ширина обеих лазерных мод), ω_p и κ_a описывают линейное двулучепреломление и линейный дихроизм в среде. g - константа взаимодействия среды с циркулярно поляризованными световыми волнами. Параметр α описывает отстройку частоты генерации ν от частоты лазерного перехода ω

$$\alpha = \frac{\nu - \omega}{\gamma_{\perp}}, \quad (1.15)$$

1.3 Адиабатическое приближение

Важной особенностью, характерной для викселов, является то, что скорость релаксации нижних уровней оказывается значительно большей, чем скорость релаксации верхних уровней. Это означает, что мы можем написать следующие неравенства

$$\gamma_2, \gamma_{\perp} \gg \gamma_1, \quad (1.16)$$

что позволяет нам применить к исходной системе уравнений адиабатическое приближение, положив там $\dot{N}_{2\pm} = 0$ и $\dot{P}_{\pm} = 0$, и тем самым исключить из рассмотрения заселенности нижних уровней $N_{2\pm}$ и оптическую поляризацию P_{\pm} .

Перепишем новую систему уравнений в форме

$$\dot{a}_{\pm} = -\kappa a_{\pm} - (\kappa_a + i\omega_p)a_{\mp} + c(1 - i\alpha)(D \pm d)a_{\pm} + F_{\pm}(t), \quad (1.17)$$

$$\dot{D} = \mu - \gamma D - c(|a_+|^2 + |a_-|^2)D - c(|a_+|^2 - |a_-|^2)d + F_D(t), \quad (1.18)$$

$$\dot{d} = -\gamma_s d - c(|a_+|^2 - |a_-|^2)D - c(|a_+|^2 + |a_-|^2)d + F_d(t). \quad (1.19)$$

Это и есть та самая система дифференциальных нелинейных уравнений, которая описывает работу виксела в адиабатическом приближении, и которую мы будем далее стремиться проинтегрировать в явном виде

Мы здесь ввели новые коллективные переменные для среды, а именно полуразность между средними заселенностями верхней и нижней пары уровней D и полуразность между их разностными заселенностями d

$$D = \frac{1}{2}(N_{1+} + N_{1-}), \quad (1.20)$$

$$d = \frac{1}{2}(N_{1+} - N_{1-}). \quad (1.21)$$

Кроме того, в уравнениях (1.17)-(1.19) введены следующие обозначения:

$$c = \frac{g^2}{\gamma_{\perp}(1 + \alpha^2)}, \quad \gamma = \gamma_1, \quad \gamma_s = \gamma_1 + 2\gamma_c. \quad (1.22)$$

Новые ланжевенковские источники связаны со старыми посредством соотношений

$$F_{\pm}(t) = \frac{g}{\gamma_{\pm}(1+i\alpha)} \left[F_{P\pm}(t) - \frac{g}{\gamma_2} a_{\pm}(t) F_{2\pm}(t) \right], \quad (1.23)$$

$$F_D(t) = \frac{1}{2} [F_{1+}(t) + F_{1-}(t)] - \frac{1}{2} [a_+^*(t) F_{p+}(t) + a_-^*(t) F_{p-}(t) + c.c.], \quad (1.24)$$

$$F_d(t) = \frac{1}{2} [F_{1+}(t) - F_{1-}(t)] - \frac{1}{2} [a_+^*(t) F_{p+}(t) - a_-^*(t) F_{p-}(t) + c.c.] \quad (1.25)$$

1.4 Полуклассические стационарные решения

Дифференциальные уравнения (1.17)-(1.19) существенно нелинейные, и для их решения мы будем стараться их линеаризовать. Обычный в подобных случаях подход состоит в том, что ищется не всеобъемлющее решение, а только временная эволюция, связанная с малым отклонением, например, от стационарных решений. Будем полагать, что эти стационарные решения подчиняются тем же самым уравнениям (1.17)-(1.19), в которых убраны все ланжевенковские источники. Хорошо известно [G1], что эти уравнения имеют четыре типа стационарных решений, а именно два ортогонально линейно поляризованных и два ортогонально эллиптически поляризованных. Здесь мы будем обсуждать случаи только линейной поляризации, поскольку именно они обычно реализуются экспериментально.

Нетрудно убедиться в том, что для случая, когда линейная поляризация поля генерации направлена по оси x , для амплитуд полей могут быть записаны решения в виде

$$a_+(t) = a_-(t) = Q_x e^{-i\Delta_x t}. \quad (1.26)$$

где

$$\Delta_x = \alpha\kappa_x + \omega_p, \quad Q_x = \sqrt{\frac{\gamma}{2c}(r_x - 1)}, \quad \kappa_x = \kappa + \kappa_a \quad (1.27)$$

и $r_x = \mu/\mu_{th.x}$ это скорость накачки по отношению к пороговой

$$\mu_{th.x} = \frac{\gamma\kappa_x}{c} \quad (1.28)$$

для генерации с линейной поляризацией вдоль оси x .

Точно также могут быть записаны амплитуды поля для линейной поляризации вдоль оси y :

$$a_+(t) = -a_-(t) = Q_y e^{-i\Delta_y t}, \quad (1.29)$$

где

$$\Delta_y = \alpha\kappa_y - \omega_p, \quad \kappa_y = \kappa - \kappa_a, \quad Q_y = \sqrt{\frac{\gamma}{2c}(r_y - 1)} \quad (1.30)$$

и пороговая скорость накачки равна

$$\mu_{th.y} = \frac{\gamma\kappa_y}{c}. \quad (1.31)$$

Эти решения для комплексных амплитуд актуальных полей записаны при условии, что среда находится в стационарном состоянии и для переменных резонансной среды могут быть получены следующие выражения соответственно для x -линейной поляризации

$$D_{st.x} = \frac{\mu}{\gamma + 2cQ_x^2}, \quad d_{st.x} = 0 \quad (1.32)$$

и для y -линейной поляризации

$$D_{st.y} = \frac{\mu}{\gamma + 2cQ_y^2}, \quad d_{st.y} = 0. \quad (1.33)$$

Для викселов, как и для других полупроводниковых лазеров, важным является вопрос об устойчивости решений. Соответствующее обсуждение можно найти в работах [72, G1]. Здесь мы будем предполагать, что наши решения устойчивы, более того, мы ограничимся случаем, когда устойчива только x -поляризованная мода поля (это происходит при более низких значениях скоростей накачки).

1.5 Линеаризация основных уравнений около стационарных полуклассических решений

Как уже было сказано, мы изучаем только ситуации, когда поле генерации оказывается линейно-поляризованным, которые обычно реализуются в реальных условиях эксперимента. Более того согласно исследованиям на устойчивость стационарных решений [G1] устойчивость x -поляризованной волны достигается при скоростях накачек μ , значительно меньших, чем для y -поляризованной волны. Поэтому далее мы будем исследовать только один случай, когда реализуется x -поляризованная генерация.

Запишем решения уравнений (1.17)-(1.19) вблизи стационарных значений амплитуд поля a_{\pm} и атомных заселенностей D и d в виде

$$a_{\pm}(t) = (Q_x + \delta a_{\pm}(t))e^{-i\Delta_x t}, \quad D(t) = D_{st.x} + \delta D(t), \quad d(t) = 0 + \delta d(t). \quad (1.34)$$

Полагая, что добавки малы, мы сможем линеаризовать исходные уравнения (1.17)-(1.19).

Возможность подобной линеаризации не вполне очевидна, поскольку, как, например, хорошо известно, поле лазерной генерации способно менять свою фазу в широких пределах (эффект диффузии фазы) так, что усредненная полевая амплитуда оказывается равной нулю, и мы не можем воспользоваться условием малости флуктуаций амплитуды поля относительно нулевой средней амплитуды. Однако, рассматриваемая здесь система значительно более сложная, нежели обычный лазер. Здесь имеет место линейное двулучепреломление, связанное с кристаллической природой полупроводниковой лазерной среды. Как будет показано ниже, это приводит к стабилизации фазы, которая теперь оказывается только очень слабо флуктуирующей около своего среднего значения.

Поскольку далее будем обсуждать только x -поляризованное решение, то в пара-

метрах Δ_x и Q_x опускаем индекс "x". Линеаризованные уравнения для полевых и атомных переменных можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\delta a_{\pm} = (\kappa_a + i\omega_p)(\delta a_{\pm} - \delta a_{\mp}) + c(1 - i\alpha)Q(\delta D \pm \delta d) + F_{\pm}e^{i\Delta t}, \quad (1.35)$$

$$\frac{d}{dt}\delta D = -(\gamma + 2cQ^2)\delta D - \kappa_x Q(\delta a_+ + \delta a_- + c.c.) + F_D, \quad (1.36)$$

$$\frac{d}{dt}\delta d = -(\gamma_s + 2cQ^2)\delta d - \kappa_x Q(\delta a_+ - \delta a_- + c.c.) + F_d. \quad (1.37)$$

Если переписать эти уравнения в переменных $\delta a_x(t)$ и $\delta a_y(t)$ (вводя соответствующие ланжевеновские источники шума $F_x(t)$ и $F_y(t)$), то исходная система связанных уравнений распадется на две независимые системы. Определим флуктуации квадратурных компонент $\delta X_x(t)$ и $\delta Y_x(t)$ для x -поляризованного поля и $\delta X_y(t)$ и $\delta Y_y(t)$ для y -поляризованного поля,

$$\delta X_x = \frac{1}{2}(\delta a_x + \delta a_x^*), \quad \delta Y_x = \frac{1}{2i}(\delta a_x - \delta a_x^*), \quad (1.38)$$

$$\delta X_y = \frac{1}{2}(\delta a_y + \delta a_y^*), \quad \delta Y_y = \frac{1}{2i}(\delta a_y - \delta a_y^*). \quad (1.39)$$

Мы рассматриваем случай x -поляризованной генерации, имея в виду то, что в полуклассическом стационарном подходе без учета флуктуаций имеют место равенства

$$a_{st.x} = 2Q_x e^{-i\Delta t}, \quad a_{st.y} = 0. \quad (1.40)$$

Однако в полной теории с учетом источников флуктуаций мы обязаны следить не только за ненулевой в среднем x -поляризацией, но и из ортогональной к ней. Нетрудно получить следующие две независимые системы уравнений:

$$\frac{d}{dt}\delta X_x = \sqrt{2}cQ\delta D + R_x, \quad (1.41)$$

$$\frac{d}{dt}\delta Y_x = -\sqrt{2}\alpha cQ\delta D + T_x, \quad (1.42)$$

$$\frac{d}{dt}\delta D = -\Gamma\delta D - 2\sqrt{2}\kappa_x Q\delta X_x + F_D, \quad (1.43)$$

и

$$\frac{d}{dt}\delta X_y = 2\kappa_a\delta X_y - 2\omega_p\delta Y_y - \sqrt{2}\alpha cQ\delta d + R_y, \quad (1.44)$$

$$\frac{d}{dt}\delta Y_y = 2\kappa_a\delta Y_y + 2\omega_p\delta X_y - \sqrt{2}cQ\delta d + T_y, \quad (1.45)$$

$$\frac{d}{dt}\delta d = -\Gamma_s\delta d + 2\sqrt{2}\kappa_x Q\delta Y_y + F_d, \quad (1.46)$$

где новые ланжевенновские источники R_x , R_y и T_x , T_y определены как

$$R_x = \frac{1}{2}(F_x e^{i\Delta t} + F_x^* e^{-i\Delta t}), \quad T_x = \frac{1}{2i}(F_x e^{i\Delta t} - F_x^* e^{-i\Delta t}), \quad (1.47)$$

$$R_y = \frac{1}{2}(F_y e^{i\Delta t} + F_y^* e^{-i\Delta t}), \quad T_y = \frac{1}{2i}(F_y e^{i\Delta t} - F_y^* e^{-i\Delta t}), \quad (1.48)$$

и для удобства введены обозначения:

$$\Gamma \equiv \gamma + 2cQ^2 = \gamma r, \quad \Gamma_s \equiv \gamma_s + 2cQ^2 = \gamma_s + \gamma(r - 1). \quad (1.49)$$

1.6 Решения для спектральных квадратур

Уравнения(2.39)-(1.43) и (1.44)-(1.46) удобно решать, используя фурье-преобразование

$$G(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\Omega t} dt, \quad G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (1.50)$$

Производя простые алгебраические преобразования, получаем из первой системы уравнений следующие выражения для флуктуаций квадратур $\delta X_x(\Omega)$ и $\delta Y_x(\Omega)$

$$\delta X_x(\Omega) = \frac{1}{D_x(\Omega)} \left[(\Gamma - i\Omega) R_x(\Omega) + \sqrt{2}cQ F_D(\Omega) \right], \quad (1.51)$$

$$\delta Y_x(\Omega) = -\delta X_x(\Omega) - \frac{1}{i\Omega} [\alpha R_x(\Omega) + T_x(\Omega)], \quad (1.52)$$

где

$$D_x(\Omega) = -i\Omega(\Gamma - i\Omega) + 2\kappa_x\gamma(r - 1). \quad (1.53)$$

Для ортогональной поляризации соответствующие выражения имеют вид

$$\delta X_y(\Omega) = \frac{1}{D_y(\Omega)} [A_R R_y(\Omega) + A_T T_y(\Omega) + A_F F_d(\Omega)], \quad (1.54)$$

$$\delta Y_y(\Omega) = \frac{1}{D_y(\Omega)} [B_R R_y(\Omega) + B_T T_y(\Omega) + B_F F_d(\Omega)], \quad (1.55)$$

где коэффициенты перед ланжевеновскими источниками и знаменатель зависят от параметров задачи в следующей форме

$$A_R = 2\kappa_x \gamma(r-1) - (2\kappa_a + i\Omega)(\Gamma_s - i\Omega), \quad (1.56)$$

$$A_T = -2\alpha\kappa_x \gamma(r-1) - 2\omega_p(\Gamma_s - i\Omega), \quad (1.57)$$

$$A_F = \sqrt{2cQ}(2\omega_p + 2\alpha\kappa_a + i\alpha\Omega), \quad (1.58)$$

$$B_R = 2\omega_p(\Gamma_s - i\Omega), \quad (1.59)$$

$$B_T = -(2\kappa_a + i\Omega)(\Gamma_s - i\Omega), \quad (1.60)$$

$$B_F = \sqrt{2cQ}(-2\alpha\omega_p + 2\kappa_a + i\Omega), \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} D_y(\Omega) &= \\ &= (\Gamma_s - i\Omega)[(2\omega_p)^2 + (2\kappa_a + i\Omega)^2] + 2\kappa_x \gamma(r-1)(2\alpha\omega_p - 2\kappa_a - i\Omega). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Как видим, явное выражение для флуктуации квадратуры $\delta Y_x(\Omega)$ оказывается логарифмически расходящимся при малых значениях частоты Ω . Это, разумеется, противоречит исходному требованию малости флуктуаций, то-есть это решение оказывается неверным, и мы не имеем права его использовать в наших рассуждениях. Однако, при этом решения для всех других квадратурных флуктуаций может не подвергаться сомнению, поскольку в них отсутствуют сингулярности и для них исходная система дифференциальных уравнений формально независима от $\delta Y_x(\Omega)$. Таким образом, мы не получили полного решения для нашей лазерной системы, тем не менее, полученное решение для трех квадратур оказывается для нас вполне достаточным, чтобы правильно описывать ту измерительную процедуру, которую мы предусматриваем в

нашем рассмотрении здесь. Мы собираемся следить за флуктуациями поляризационных параметров Стокса, которые в режиме линейной x -поляризации поля генерации лазера независимы от величины $\delta Y_x(\Omega)$.

1.7 Парные спектральные корреляционные функции для квадратур поля генерации

Ввиду стационарности процесса спектральные корреляционные функции квадратур δ -коррелированы, и могут быть записаны в виде

$$\langle \delta X_i(\Omega) \delta X_i(\Omega') \rangle = (\delta X_i^2)_\Omega \delta(\Omega + \Omega'), \quad (1.63)$$

$$\langle \delta Y_i(\Omega) \delta Y_i(\Omega') \rangle = (\delta Y_i^2)_\Omega \delta(\Omega + \Omega'), \quad (1.64)$$

$$\langle \delta X_i(\Omega) \delta Y_i(\Omega') \rangle = (\delta X_i \delta Y_i)_\Omega \delta(\Omega + \Omega'), \quad i = x, y \quad (1.65)$$

где $(\delta X_i^2)_\Omega$, $(\delta Y_i^2)_\Omega$ - спектральные плотности соответствующих квадратур, а $(\delta X_i \delta Y_i)_\Omega$ спектральные плотности их кросс-корреляторов.

Точно так же дельта-коррелированы и сами ланжевенские источники, и их отличные от нуля корреляторы имеют вид

$$\begin{aligned} \langle R_x(\Omega) R_x(\Omega') \rangle &= \langle R_y(\Omega) R_y(\Omega') \rangle = \langle T_x(\Omega) T_x(\Omega') \rangle = \langle T_y(\Omega) T_y(\Omega') \rangle = \\ &= \kappa_x \delta(\Omega + \Omega'), \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\langle F_D(\Omega) F_D(\Omega') \rangle = \frac{\kappa_x}{c} \Gamma \left(1 - \frac{1}{2}p \right) \delta(\Omega + \Omega'), \quad (1.67)$$

$$\langle F_d(\Omega) F_d(\Omega') \rangle = \frac{\kappa_x}{c} \Gamma_s \delta(\Omega + \Omega'), \quad (1.68)$$

$$\langle F_D(\Omega) R_x(\Omega') \rangle = \langle F_d(\Omega) T_y(\Omega') \rangle = -\sqrt{2} \kappa_x Q \delta(\Omega + \Omega'). \quad (1.69)$$

Теперь мы имеем возможность записать интересующие нас спектральные плотности,

выраженными в явном виде через лазерные параметры

$$(\delta X_x^2)_\Omega = \frac{\kappa_x}{|D_x(\Omega)|^2} \left[\Omega^2 + \gamma^2 r \left(1 - (r-1) \frac{p}{2} \right) \right], \quad (1.70)$$

$$(\delta X_y^2)_\Omega = \frac{\kappa_x}{2|D_y(\Omega)|^2} [\Omega^4 + A_X \Omega^2 + 4B_X], \quad (1.71)$$

$$(\delta Y_y^2)_\Omega = \frac{\kappa_x}{2|D_y(\Omega)|^2} \left\{ \Omega^4 + A_Y \Omega^2 + 4B_Y \right\}, \quad (1.72)$$

где

$$A_X = [2\kappa_a - \gamma(r-1)]^2 + [2\omega_p + \alpha\gamma(r-1)]^2 - 4\kappa\gamma(r-1) + \gamma_s [\gamma_s + \gamma(r-1)(\alpha^2 + 2)], \quad (1.73)$$

$$B_X = [\kappa_a\gamma_s - \kappa\gamma(r-1)]^2 + [\omega_p\gamma_s + \alpha\kappa\gamma(r-1)]^2 + \gamma_s\gamma(r-1)(\alpha\kappa_a + \omega_p)^2, \quad (1.74)$$

$$A_Y = 4(\kappa_a^2 + \omega_p^2) + \gamma_s^2 + \gamma(r-1)(4\alpha\omega_p + \gamma_s), \quad (1.75)$$

$$B_Y = \gamma_s^2(\kappa_a^2 + \omega_p^2) + \gamma_s\gamma(r-1) [\omega_p^2(\alpha^2 + 2) + \kappa_a^2]^2 + \omega_p^2\gamma^2(r-1)^2(\alpha^2 + 1), \quad (1.76)$$

Спектральная плотность кросс-коррелятора $(\delta X_y \delta Y_y)_\Omega$ записывается как

$$(\delta X_y \delta Y_y)_\Omega = -\frac{\kappa_x \gamma (r-1)}{2|D_y(\Omega)|^2} \times [\alpha\kappa_x \Omega^2 + 2\kappa\omega_p \gamma (r-1)(\alpha^2 + 1) + 2\gamma_s [\kappa(\alpha\kappa_a + \omega_p) + \alpha\kappa_a(\kappa_a - \alpha\omega_p)]]. \quad (1.77)$$

Мы будем использовать полученные здесь аналитические выражения в дальнейшем для расчета спектральных плотностей квантовых параметров Стокса, их кросс-корреляторов и анализа спектра фототока.

1.8 Квантовые поляризационные состояния света

1.8.1 Квантовые параметры Стокса

Существует два эквивалентных способа описания поляризационных свойств света в классической оптике: с помощью поляризационной матрицы или в терминах клас-

сических параметров Стокса [73]. В течении двух последних десятилетий в научной литературе был введен и активно используется квантово-механический аналог классических параметров Стокса, применяемый в квантовой оптике для описания квантовых флуктуаций поляризации электромагнитного поля [74–77]. Опубликован ряд теоретических работ, где предложены варианты генерации поляризационно-сжатого света [76, 78–82], а также несколько экспериментальных демонстраций такого излучения [83–86].

Мы будем здесь использовать язык квантовых параметров Стокса, чтобы характеризовать квантовые флуктуации поляризованного излучения вискела. В этом разделе мы продемонстрируем как выразить спектр флуктуаций квантовых параметров Стокса через спектральные плотности квадратурных компонент, рассмотренные выше.

Запишем оператор $\vec{\hat{E}}(t)$ электромагнитного поля на выходе вискела через x - и y -поляризованную компоненты:

$$\vec{\hat{E}}(t) \sim \hat{a}_x(t)\vec{e}_x + \hat{a}_y(t)\vec{e}_y, \quad (1.78)$$

где $\hat{a}_x(t)$ и $\hat{a}_y(t)$ - операторы уничтожения фотонов в представлении Гайзенберга. Мы будем далее опускать аргумент t там, где это не приведет к неясности. Квантовые операторы Стокса \hat{S}_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ определяются подобно их классическим аналогам (например, см. [82]),

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y, \\ \hat{S}_1 &= \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y, \\ \hat{S}_2 &= \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x, \\ \hat{S}_3 &= i(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y). \end{aligned} \quad (1.79)$$

Применяя коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения

фотонов,

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (i, j = x, y), \quad (1.80)$$

нетрудно показать, что оператор \hat{S}_0 коммутирует со всеми остальными,

$$[\hat{S}_0, \hat{S}_\mu] = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3), \quad (1.81)$$

а операторы \hat{S}_1 , \hat{S}_2 и \hat{S}_3 удовлетворяют коммутационным соотношениям, подобным коммутационным соотношениям для компонент оператора углового момента:

$$[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = 2i\hat{S}_3, \quad [\hat{S}_2, \hat{S}_3] = 2i\hat{S}_1, \quad [\hat{S}_3, \hat{S}_1] = 2i\hat{S}_2. \quad (1.82)$$

Некоммутативность этих трех операторов Стокса накладывает запрет на их одновременное измерение в любом физическом эксперименте.

Средние значения $\langle \hat{S}_\mu \rangle$, $\mu = 1, 2, 3$ и дисперсии $\Delta S_\mu = \sqrt{\langle (\hat{S}_\mu - \langle \hat{S}_\mu \rangle)^2 \rangle}$ связаны соотношениями неопределенности [74],

$$\Delta S_1 \Delta S_2 \geq |\langle \hat{S}_3 \rangle|, \quad \Delta S_2 \Delta S_3 \geq |\langle \hat{S}_1 \rangle|, \quad \Delta S_3 \Delta S_1 \geq |\langle \hat{S}_2 \rangle|. \quad (1.83)$$

Когда x - и y -поляризованная компоненты электромагнитного поля находятся в когерентном состоянии $|\alpha_x\rangle$ и $|\alpha_y\rangle$, т.е.

$$\hat{a}_x |\alpha_x\rangle = \alpha_x |\alpha_x\rangle, \quad \hat{a}_y |\alpha_y\rangle = \alpha_y |\alpha_y\rangle, \quad (1.84)$$

можно говорить о *когерентном поляризационном состоянии* электромагнитного поля. Средние значения квантовых параметров Стокса в этом состоянии можно записать, заменяя $\hat{a}_x \rightarrow \alpha_x$ и $\hat{a}_y \rightarrow \alpha_y$ в выражении (1.79). Например, для первых двух параметров Стокса получим:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_0 \rangle &= |\alpha_x|^2 + |\alpha_y|^2 = \langle \hat{n}_x \rangle + \langle \hat{n}_y \rangle = \langle \hat{n} \rangle, \\ \langle \hat{S}_1 \rangle &= |\alpha_x|^2 - |\alpha_y|^2 = \langle \hat{n}_x \rangle - \langle \hat{n}_y \rangle, \end{aligned} \quad (1.85)$$

где $\langle \hat{n} \rangle$ - среднее полное число фотонов в электромагнитной волне. Дисперсии всех четырех квантовых параметров Стокса в этом случае совпадают и определяются выражением [82]:

$$\Delta S_\mu^2 = \langle \hat{n}_x \rangle + \langle \hat{n}_y \rangle = \langle \hat{n} \rangle, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.86)$$

Это свойство когерентного поляризационного состояния позволяет определить *поляризационное сжатое состояние* подобно тому, как вводится одномодовое сжатое состояние. Согласно [76], можно говорить о поляризационном сжатии, если хотя бы одна из четырех дисперсий ΔS_μ параметров Стокса оказывается меньше, чем соответствующее значение для когерентного состояния, т. е. $\Delta S_\mu^2 < \langle \hat{n} \rangle$ хотя бы для одного μ .

Классические параметры Стокса $S_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ (без "шляпок") - это средние значения соответствующих квантовых аналогов, определяемых соотношениями (1.79), $S_\mu = \langle \hat{S}_\mu \rangle$. С классической точки зрения все поляризационные свойства света полностью описываются этими четырьмя параметрами: S_0 определяет полную интенсивность луча, в то время как три остальных параметра характеризуют поляризацию света. Эту поляризацию принято отображать в виде точки на сфере Пуанкаре.

В квантовой оптике, для того чтобы полностью характеризовать поляризационные свойства света, кроме средних значений S_μ квантовых параметров Стокса необходимо определить их дисперсии ΔS_μ . В общем случае эти дисперсии могут отличаться друг от друга, что позволяет говорить об эллипсоиде неопределенности в пространстве Стокса-Пуанкаре [77].

Не останавливаясь более детально на общем описании, мы покажем в следующем разделе, что в случае вицелов квантовые параметры Стокса \hat{S}_μ могут иметь различные дисперсии ΔS_μ , и обсудим, как квантовые флуктуации поляризации вицелов можно отобразить в пространстве Стокса-Пуанкаре.

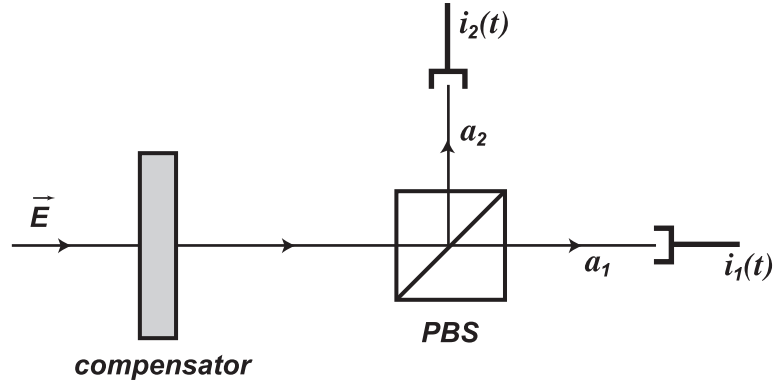


Рис. 1.2: Схема экспериментальной установки для измерения классических параметров Стокса.

1.8.2 Измерение классических параметров Стокса

Четыре классических параметра Стокса S_μ могут быть измерены с помощью экспериментальной установки, изображенной схематически на рис. 1.2

Измерительная схема состоит из компенсатора, поляризационного светоделителя (PBS), и двух фотодетекторов. Пусть δ_x и δ_y определяют фазовые сдвиги, производимые компенсатором в x - и y -компонентах электромагнитного поля (1.78), соответственно. Обозначим φ угол между осью пропускания поляризационного светоделителя PBS и осью x . Тогда амплитуды \hat{a}_1 и \hat{a}_2 прошедшей и отраженной поляризационным светоделителем волн могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= e^{i\delta_x}(\hat{a}_x \cos \varphi + \hat{a}_y e^{-i\theta} \sin \varphi), \\ \hat{a}_2 &= e^{i\delta_x}(-\hat{a}_x \sin \varphi + \hat{a}_y e^{-i\theta} \cos \varphi),\end{aligned}\tag{1.87}$$

где $\theta = \delta_x - \delta_y$ - разность фаз между x - и y -компонентами, вводимая компенсатором.

Вторичные волны после PBS попадают на фотодетекторы, измеряющие средние значения фототоков $\langle i_1 \rangle = \eta c \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$, и $\langle i_2 \rangle = \eta c \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle$, где η - это квантовая эффективность фотодетектирования, c - скорость света (мы положили заряд электрона равным единице, так что фототоки измеряются в числах электронов в секунду). Для упрощения будем рассматривать ситуацию с $\eta = 1$. Используя (1.87) можем записать

средний фототок $\langle i_1 \rangle$, детектируемый в пропускающем плече PBS:

$$\langle i_1 \rangle \equiv \langle i_1(\varphi, \theta) \rangle = \frac{1}{2} \eta c \left[S_0 + S_1 \cos 2\varphi + (S_2 \cos \theta + S_3 \sin \theta) \sin 2\varphi \right], \quad (1.88)$$

где S_μ - классические параметры Стокса.

Выражение (1.88) - хорошо известная формула для измерения четырех классических параметров Стокса. Первые три из них можно получить, удаляя компенсатор ($\theta = 0$) и поворачивая ось пропускания PBS так, чтобы угол φ составлял, соответственно, 0° , 45° и 90° . Четвертый параметр Стокса, S_3 , измеряется с использованием компенсатора с $\theta = 90^\circ$ (так называемой четверть-волновой пластины), устанавливая ось пропускания PBS под углом $\varphi = 45^\circ$. Измеряемые при этом фототоки записываются в виде:

$$\begin{aligned} \langle i_1(0^\circ, 0^\circ) \rangle &= \frac{1}{2} \eta c (S_0 + S_1), \\ \langle i_1(45^\circ, 0^\circ) \rangle &= \frac{1}{2} \eta c (S_0 + S_2), \\ \langle i_1(90^\circ, 0^\circ) \rangle &= \frac{1}{2} \eta c (S_0 - S_1), \\ \langle i_1(45^\circ, 90^\circ) \rangle &= \frac{1}{2} \eta c (S_0 + S_3). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Решая систему уравнений (1.89) относительно S_μ мы можем получить из этих четырех измерений все классические параметры Стокса.

1.8.3 Наблюдение спектра флуктуаций квантовых параметров Стокса

В квантовой оптике кроме средних значений квантовых параметров Стокса $\langle \hat{S}_\mu \rangle$ рассматриваются также их квантовые флуктуации. Мы будем обсуждать здесь квантовые флуктуации на языке спектра флуктуаций квантовых параметров Стокса.

Разделим операторы Стокса $\hat{S}_\mu(t)$, определяемые выражением (1.79), на два слагаемых: стационарное среднее значение $S_\mu = \langle \hat{S}_\mu \rangle$ и малые флуктуации $\delta \hat{S}_\mu(t)$,

$$\hat{S}_\mu(t) = S_\mu + \delta \hat{S}_\mu(t). \quad (1.90)$$

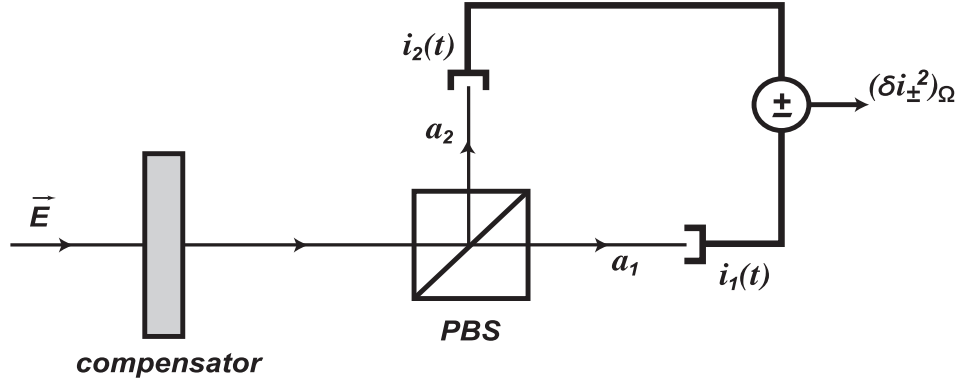


Рис. 1.3: Схема экспериментальной установки для измерения спектральных плотностей квантовых параметров Стокса и спектральных плотностей их кросс-корреляторов.

Беря преобразование Фурье от $\delta\hat{S}_\mu(t)$,

$$\delta\hat{S}_\mu(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\hat{S}_\mu(t) e^{i\Omega t} dt, \quad (1.91)$$

мы можем ввести нормально упорядоченные спектральные корреляционные функции флуктуаций $\delta\hat{S}_\mu(\Omega)$, подобные спектральным корреляционным функциям квадратурных компонент (1.63)-(1.65), а именно,

$$\begin{aligned} \langle : \delta\hat{S}_\mu(\Omega) \delta\hat{S}_\mu(\Omega') : \rangle &= (\delta S_\mu^2)_\Omega \delta(\Omega + \Omega'), \\ \langle : \delta\hat{S}_\mu(\Omega) \delta\hat{S}_\nu(\Omega') : \rangle &= (\delta S_\mu \delta S_\nu)_\Omega \delta(\Omega + \Omega'), \quad (\mu \neq \nu). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Здесь $(\delta S_\mu^2)_\Omega$ - спектральные плотности соответствующих флуктуаций, а $(\delta S_\mu \delta S_\nu)_\Omega$ - спектральные плотности их кросс-корреляторов. Символ $\langle : \dots : \rangle$ означает нормальное упорядочение операторов.

Для измерения спектральных плотностей $(\delta S_\mu^2)_\Omega$ и $(\delta S_\mu \delta S_\nu)_\Omega$ квантовых параметров Стокса используют экспериментальную установку, подобную той, что мы обсуждали выше для измерения классических параметров Стокса (см. рис. 1.3). Отличие заключается в том, что вместо измерения средних фототоков $\langle i_1 \rangle$ и $\langle i_2 \rangle$ после PBS, теперь детектируются спектры флуктуаций фототока $(\delta i_s^2)_\Omega$ ($s = 1, 2$), определяемые

как

$$(\delta i_s^2)_\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\Omega t} \langle \delta i_s(0) \delta i_s(t) \rangle, \quad (1.93)$$

где $\langle \delta i_s(0) \delta i_s(t) \rangle$ - корреляционная функция флуктуаций фототока $\delta i_s(t) = i_s - \langle i_s \rangle$, $\langle i_s \rangle$ - среднее значение фототока. С другой стороны, схема позволяет исследовать суммарный и разностный фототоки, детектируемые во вторичных каналах после PBS, $i_+(t) = i_1(t) + i_2(t)$ и $i_-(t) = i_1(t) - i_2(t)$. В этом случае спектр флуктуаций суммарного/разностного фототока также содержит информацию о спектре флуктуаций квантовых параметров Стокса:

$$(\delta i_\pm^2)_\Omega = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\Omega t} \langle \delta i_\pm(0) \delta i_\pm(t) \rangle. \quad (1.94)$$

Спектры флуктуаций фототоков $(\delta i_s^2)_\Omega$ и $(\delta i_\pm^2)_\Omega$ нетрудно выразить через спектральные плотности $(\delta S_\mu^2)_\Omega$ и $(\delta S_\mu \delta S_\nu)_\Omega$ четырех квантовых параметров Стокса. Результат удобно выразить через оператор, представляющий собой линейную комбинацию трех операторов Стокса \hat{S}_1 , \hat{S}_2 и \hat{S}_3 :

$$\hat{S} = \hat{S}_1 \cos 2\varphi + (\hat{S}_2 \cos \theta + \hat{S}_3 \sin \theta) \sin 2\varphi. \quad (1.95)$$

Эту величину называют *поляризационной наблюдаемой* [84, 85]. Мы получили следующие выражения для спектров флуктуаций $(\delta i_s^2)_\Omega$ и $(\delta i_\pm^2)_\Omega$, отнесенных к соответствующим значениям дробового шума:

$$(\delta i_1^2)_\Omega / \langle i_1 \rangle = 1 + \frac{\kappa}{2\langle n_1 \rangle} [(\delta S_0^2)_\Omega + 2(\delta S_0 \delta S)_\Omega + (\delta S^2)_\Omega], \quad (1.96)$$

$$(\delta i_2^2)_\Omega / \langle i_2 \rangle = 1 + \frac{\kappa}{2\langle n_2 \rangle} [(\delta S_0^2)_\Omega - 2(\delta S_0 \delta S)_\Omega + (\delta S^2)_\Omega], \quad (1.97)$$

$$(\delta i_-^2)_\Omega / \langle i_+ \rangle = 1 + \frac{2\kappa}{\langle n \rangle} (\delta S^2)_\Omega, \quad (1.98)$$

$$(\delta i_+^2)_\Omega / \langle i_+ \rangle = 1 + \frac{2\kappa}{\langle n \rangle} (\delta S_0^2)_\Omega. \quad (1.99)$$

Здесь $\langle i_+ \rangle = \langle i_1 \rangle + \langle i_2 \rangle$ - уровень дробового шума как суммарного, так и разностного

фототоков; $\langle n_1 \rangle = \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$ и $\langle n_2 \rangle = \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle$ - средние числа фотонов в соответствующих вторичных каналах после PBS; $\langle n \rangle = \langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle$.

Система уравнений (1.96)-(1.99) показывает, как спектральные плотности флуктуаций параметров Стокса могут быть получены экспериментально. Для этого необходимо измерительную процедуру построить таким образом, чтобы она обеспечила знание левых частей системы уравнений (1.96)-(1.99). После этого, подбирая углы θ и φ , мы сможем получить все интересующие нас моменты для флуктуаций параметров Стокса.

В следующем разделе мы покажем, как вычислить левые части уравнений с помощью построенных ранее спектральных плотностей для квадратур полей.

1.8.4 Формальные соотношения между спектральными плотностями квантовых параметров Стокса и квадратурными компонентами

В предыдущем разделе мы получили аналитические выражения для флуктуаций квадратурных компонент $\delta X_x(\Omega)$, $\delta X_y(\Omega)$, $\delta Y_y(\Omega)$, их спектральных плотностей и плотностей их кросс-корреляций (см. (1.70)-(1.72), (1.77)). Здесь мы покажем, как спектральные плотности квантовых параметров Стокса могут быть выражены через спектральные плотности квадратурных компонент. Как и прежде, мы ограничимся рассмотрением x -поляризованного стационарного решения, при котором $\langle n_x \rangle = 2Q^2$ и $\langle n_y \rangle = 0$.

Применяя стандартный подход сопоставим квантовым операторам Стокса $\hat{S}_\mu(t)$ соответствующие s -числовые переменные $S_\mu(t)$. Так как в определении операторов Стокса (1.79) фигурируют только нормально упорядоченные операторы рождения и уничтожения фотонов, то эти соотношения остаются справедливыми и для s -числовых величин $S_\mu(t)$ и s -числовых переменных $a_i(t)$ и $a_i^*(t)$, $i = x, y$.

Линеаризуя с-числовые переменные $S_\mu(t)$ около своих стационарных значений S_μ ,

$$S_\mu(t) = S_\mu + \delta S_\mu(t), \quad (1.100)$$

мы можем выразить флуктуации $\delta S_\mu(t)$ через флуктуации полевых компонент $\delta a_x(t)$ и $\delta a_y(t)$:

$$\delta S_0 = \delta S_1 = \sqrt{2}Q (\delta a_x + \delta a_x^*) = 2\sqrt{2}Q \delta X_x, \quad (1.101)$$

$$\delta S_2 = \sqrt{2}Q (\delta a_y + \delta a_y^*) = 2\sqrt{2}Q \delta X_y, \quad (1.102)$$

$$\delta S_3 = -\sqrt{2}iQ (\delta a_y - \delta a_y^*) = 2\sqrt{2}Q \delta Y_y. \quad (1.103)$$

Как видно флуктуация δY_x не вносит никакого вклада во флуктуации параметров Стокса.

Теперь нетрудно получить соотношения между спектральными плотностям квадратур и параметров Стокса в виде

$$(\delta S_0^2)_\Omega = (\delta S_1^2)_\Omega = 8Q^2(\delta X_x^2)_\Omega, \quad (1.104)$$

$$(\delta S_2^2)_\Omega = 8Q^2(\delta X_y^2)_\Omega, \quad (1.105)$$

$$(\delta S_3^2)_\Omega = 8Q^2(\delta Y_y^2)_\Omega, \quad (1.106)$$

$$(\delta S_2 \delta S_3)_\Omega = 8Q^2(\delta X_y \delta Y_y)_\Omega. \quad (1.107)$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$(\delta i_1^2)_\Omega / \langle i_1 \rangle = 1 + 8\kappa [\cos^2 \varphi (\delta X_x^2)_\Omega + \sin^2 \varphi (\delta X_\theta^2)_\Omega], \quad (1.108)$$

$$(\delta i_2^2)_\Omega / \langle i_2 \rangle = 1 + 8\kappa [\sin^2 \varphi (\delta X_x^2)_\Omega + \cos^2 \varphi (\delta X_\theta^2)_\Omega], \quad (1.109)$$

$$(\delta i_-^2)_\Omega / \langle i_+ \rangle = 1 + 8\kappa [\cos^2 2\varphi (\delta X_x^2)_\Omega + \sin^2 2\varphi (\delta X_\theta^2)_\Omega], \quad (1.110)$$

$$(\delta i_+^2)_\Omega / \langle i_+ \rangle = 1 + 8\kappa (\delta X_x^2)_\Omega. \quad (1.111)$$

В этих формулах обозначено

$$\delta X_\theta(\Omega) = \cos \theta \delta X_y(\Omega) - \sin \theta \delta Y_y(\Omega), \quad (1.112)$$

спектральная плотность которой $(\delta X_\theta^2)_\Omega$ имеет вид:

$$(\delta X_\theta^2)_\Omega = \cos^2 \theta (\delta X_y^2)_\Omega - 2 \sin \theta \cos \theta (\delta X_y \delta Y_y)_\Omega + \sin^2 \theta (\delta Y_y^2)_\Omega. \quad (1.113)$$

Средние значения фототоков в каналах $\langle i_1 \rangle$ и $\langle i_2 \rangle$, и суммарного фототока $\langle i_+ \rangle = \langle i_1 \rangle + \langle i_2 \rangle$ можно выразить как

$$\langle i_1 \rangle = 2Q^2 \kappa \cos^2 \varphi, \quad \langle i_2 \rangle = 2Q^2 \kappa \sin^2 \varphi, \quad \langle i_+ \rangle = 2Q^2 \kappa. \quad (1.114)$$

1.8.5 Поляризационное сжатие в вискеле

Обратимся к выражению (1.98), соответствующему наблюдению спектра шума разностного фототока $(\delta i_-^2)_\Omega(\varphi, \theta)$. Используя (1.95), перепишем спектр шума фототока $(\delta i_-^2)_\Omega(\varphi, \theta)$ в виде:

$$\begin{aligned} (\delta i_-^2)_\Omega(\varphi, \theta) / \langle i_+ \rangle &= 1 + \frac{2\kappa}{Q^2} \left\{ (\delta S_1^2)_\Omega \cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi \left[(\delta S_2^2)_\Omega \cos^2 \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\delta S_2 \delta S_3)_\Omega 2 \sin \theta \cos \theta + (\delta S_3^2)_\Omega \sin^2 \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Здесь мы указали явным образом зависимость наблюдаемого спектра от угла θ , вносимого компенсатором, и угла φ поляризационного светоделителя.

Спектральные плотности $(\delta S_0^2)_\Omega = (\delta S_1^2)_\Omega$ и $(\delta S_2^2)_\Omega$ параметров Стокса S_0, S_1 и S_2 измеряются в отсутствие компенсатора ($\theta = 0$), устанавливая угол поворота оси пропускания PBS равным $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$. Спектральная плотность параметра S_3 измеряется при использовании компенсатора с $\theta = 90^\circ$ (четверть-волновая пластина), устанавливая $\varphi = 45^\circ$. Соответствующие спектры флуктуаций фототоков имеют вид:

$$(\delta i_-^2)_\Omega(0^\circ, 0^\circ) / \langle i_+ \rangle = 1 + \frac{2\kappa}{Q^2} (\delta S_1^2)_\Omega, \quad (1.116)$$

$$(\delta i_-^2)_\Omega(45^\circ, 0^\circ) / \langle i_+ \rangle = 1 + \frac{2\kappa}{Q^2} (\delta S_2^2)_\Omega, \quad (1.117)$$

$$(\delta i_-^2)_\Omega(45^\circ, 90^\circ) / \langle i_+ \rangle = 1 + \frac{2\kappa}{Q^2} (\delta S_3^2)_\Omega, \quad (1.118)$$

На рис. 1.4 мы построили спектры флуктуаций фототоков, описываемые выражениями (1.116)-(1.118), при физических параметрах, близких к экспериментальным [68],

а именно, $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_{\perp} = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_s = 50 \text{ GHz}$, $\omega_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = -3$, $r = 6$ и $p = 1$. Параметр κ_a , описывающий дихроизм лазерного кристалла, равен 0 на рис. 1.4а, $\kappa_a = 10 \text{ GHz}$ на рис. 1.4б и $\kappa_a = 50 \text{ GHz}$ на рис. 1.4с.

Обсудим сначала ситуацию в отсутствие дихроизма (рис. 1.4а). Как видно из рисунка, спектральная плотность $(\delta S_1^2)_{\Omega}$ имеет пик на частоте Ω_1 , в то время как две другие спектральные плотности $(\delta S_2^2)_{\Omega}$ и $(\delta S_3^2)_{\Omega}$ обладают максимумами на другой, более высокой, частоте Ω_2 . Эти пики хорошо известны из теории твердого тела и полупроводниковых лазеров, их природа связана с релаксационными колебаниями, возникающими вследствие периодического обмена энергией между активной средой и лазерным излучением. Поскольку в нашем случае активная лазерная среда имеет два верхних энергетических уровня $|1_+\rangle$ и $|1_-\rangle$, в рассматриваемой системе образуются две подсистемы, в каждой из которых обмен энергией происходит независимо. Первая подсистема описывается полной заселенностью D верхних уровней и параметром Стокса S_1 (см. (2.39)-(1.43)), и частота релаксационных колебаний в этой подсистеме равна Ω_1 . Во второй подсистеме происходят релаксационные колебания между разностью заселенностей d и двумя параметрами Стокса S_2 и S_3 на частоте Ω_2 (см. (1.44)-(1.46)).

Вторая важная особенность, которую можно видеть на рис. 1.4а - это подавление квантовых флуктуаций параметра Стокса S_1 ниже стандартного квантового предела на низких частотах в случае регулярной накачки, $p = 1$. Таким образом, можно говорить о *поляризационном сжатии* излучения виксела относительно параметра S_1 в случае регулярной накачки. Этот эффект вполне ожидаем и его природа легко объяснима. В самом деле, как следует из выражений (1.79), для x -поляризованного стационарного решения параметр Стокса S_1 совпадает с полным числом фотонов в лазерном поле. Хорошо известно [28], что регулярно накачиваемый двухуровневый лазер может обладать субпуассоновской статистикой фотонов, т.е. флуктуации числа

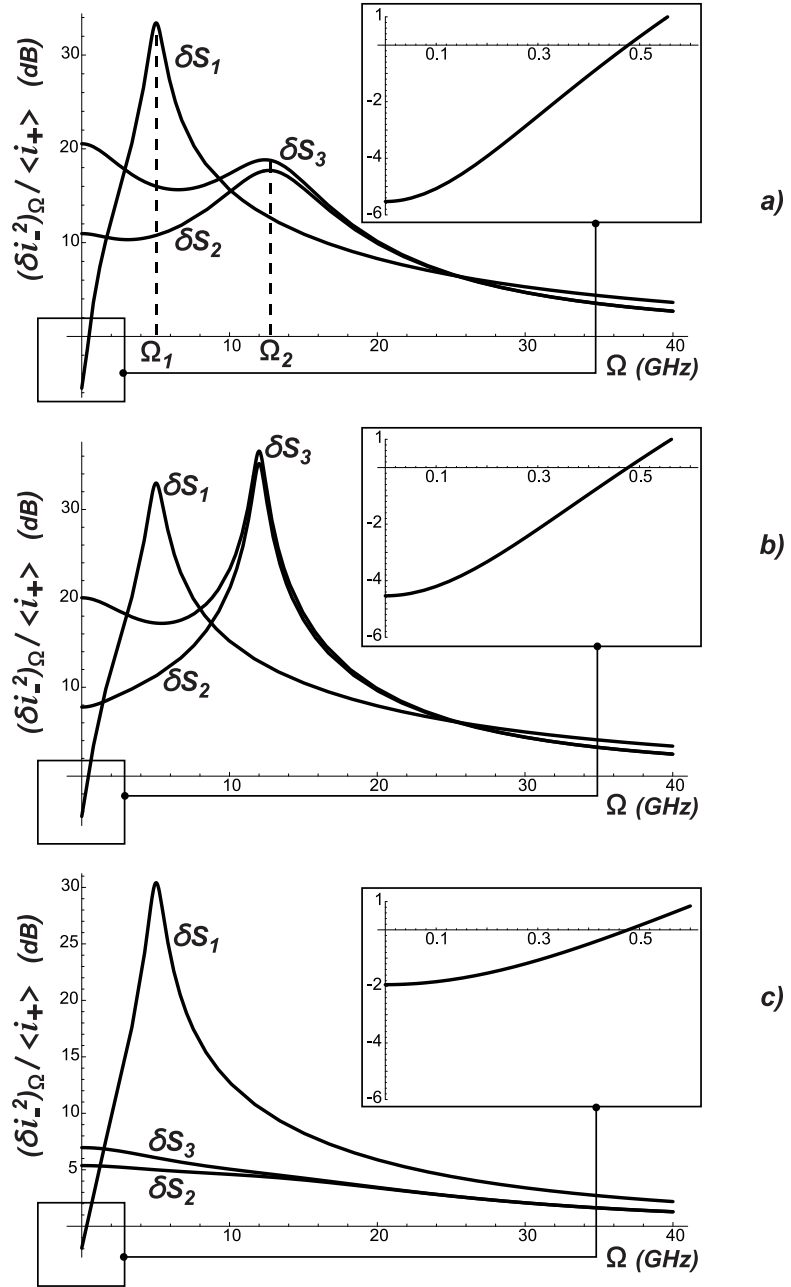


Рис. 1.4: Спектры флуктуаций фототоков при измерении параметров Стокса S_1 , S_2 и S_3 а) в отсутствии дихроизма $\kappa_a = 0$, б) при $\kappa_a = 10$ GHz, в) при $\kappa_a = 50$ GHz. Значения остальных параметров $\kappa = 100$ GHz, $\gamma = 1$ GHz, $\gamma_{\perp} = 1000$ GHz, $\gamma_s = 50$ GHz, $\omega_p = 40$ GHz, $\alpha = -3$, $r = 6$ и $p = 1$.

фотонов в излучении могут подавляться ниже стандартного квантового предела. Поэтому можно заключить, что поляризационное сжатие относительно параметра S_1 в регулярно накачиваемом викселе является следствием субпуассоновской статистики фотонов.

Однако необходимо отметить, что рассматриваемая нами схема виксела с вырожденными уровнями существенно отличается от двухуровневого лазера, изучавшегося в [28], так что взаимосвязь между регулярной статистикой накачки и субпуассоновской статистикой фотонов в викселе не является однозначной. В самом деле, благодаря вырождению верхнего лазерного уровня на два подуровня $|1_+\rangle$ и $|1_-\rangle$, даже при регулярной накачке полной заселенности D верхнего уровня, случайность в заселении каждого из подуровней сохраняется в силу случайности распределения возбужденных атомов по подуровням. Это может стать причиной появления дополнительных шумов в системе. Однако оказывается, что в случае x -поляризованного стационарного излучения эти дополнительные шумы не вносят вклад в флуктуации полного числа фотонов и параметра Стокса S_1 . Причину такого поведения можно увидеть из уравнений (2.39)-(1.43): оказывается, что для нашей системы флуктуации параметра Стокса S_1 связаны только с флуктуациями полной заселенности D , а не с флуктуациями заселенностей индивидуальных подуровней. В следующем разделе мы продемонстрируем, что такое поведение системы связано с определенным выбором параметров, и рассмотрим случай, когда случайное распределение атомов по подуровням существенно сказывается на статистике генерации.

Рисунки 1.4b,c демонстрируют роль дихроизма в статистике излучения. Как видно из рисунков, появление дихроизма в системе приводит к двум важным последствиям. Во-первых, подавление дробового шума ниже стандартного квантового предела в спектральной плотности $(\delta S_1^2)_\Omega$ первого параметра Стокса уменьшается пропорционально $\kappa/(\kappa + \kappa_a)$. Такое уменьшение имеет ясное физическое объяснение:

наличие ненулевого дихроизма приводит к случайным потерям лазерного излучения внутри резонатора со скоростью κ_a , так что полная скорость распада лазерного поля внутри резонатора увеличивается и становится равной $\kappa + \kappa_a$, тогда как в отсутствие дихроизма скорость распада лазерного поля определяется коэффициентом пропускания выходного зеркала резонатора и равна κ .

Вторым важным следствием наличия дихроизма в системе является изменение релаксационных колебаний на частоте Ω_2 , связанных с параметрами Стокса S_2 и S_3 . Из рис. 1.4b видно, что даже при появлении относительно малого по величине дихроизма κ_a ($\kappa_a = 10 \text{ GHz}$ при $\kappa = 100 \text{ GHz}$) пик релаксационных колебаний на частоте Ω_2 становится более острым. Такое поведение объясняется тем фактом, что при данных значениях κ_a мы приближаемся к области неустойчивости решений [G1]. Однако при дальнейшем увеличении κ_a (рис. 1.4c) релаксационные колебания на частоте Ω_2 быстро исчезают.

Как было отмечено в предыдущем разделе, три спектральные плотности $(\delta S_1^2)_\Omega$, $(\delta S_2^2)_\Omega$ и $(\delta S_3^2)_\Omega$, представленные на рис. 1.4, можно также интерпретировать в терминах эллипсоида неопределенности. Поскольку спектральные плотности зависят от частоты Ω , можно говорить о частотно-зависимом эллипсоиде неопределенности, три главные оси которого определяются соответствующими спектральными плотностями. Эти спектральные плотности нормированы на уровень дробового шума, так что сфера единичного радиуса в пространстве Стокса-Пуанкаре соответствует стандартному квантовому пределу, имеющему место для когерентного поляризационного состояния. Как следует из рис. 1.4a, например, в случае поляризационно-сжатого состояния в области низких частот, когда $(\delta S_1^2)_\Omega$ ниже стандартного квантового предела, эллипсоид неопределенности имеет сплюсненную форму (форму буше). Напротив, в окрестности частоты релаксационных колебаний Ω_1 эллипсоид неопределенности приобретает вытянутую сигарообразную форму со значением $(\delta S_1^2)_\Omega$ больше, чем две

другие компоненты.

1.9 Виксел с одинаковыми временами жизни уровней

Рассмотрим теперь коротко модель виксела с одинаковыми временами жизни уровней $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$. Как уже было отмечено ранее, эта модель виксела (в отличие от модели с короткоживущим нижним уровнем) развивалась в основном на феноменологическом уровне. Поэтому проводимое здесь сравнение имеет две основные цели: рассмотреть ситуацию, в которой роль случайного распределения возбужденных атомов по подуровням (при регулярной накачке верхнего энергетического уровня) оказывает существенное влияние на статистику излучения, а также продемонстрировать ограничения феноменологического подхода в описании статистических особенностей. Мы не будем в деталях описывать то, каким образом выводятся основные уравнения для виксела в этом случае, поскольку это уже достаточно подробно сделано выше для первой из рассматриваемых моделей лазера. Напомним только основные моменты этого вывода. Сначала из основных квантовых принципов строятся уравнения для макроскопических переменных, а именно, операторов амплитуд поля и операторов актуальных заселенностей и поляризаций полупроводниковой среды. Получающиеся при этом уравнения называются уравнениями Гайзенберга-Ланжевена и отличаются от динамических уравнений тем, что они, во-первых, записаны для операторов, а не для c -числовых функций, и, во-вторых, содержат неоднородные члены (источники шума), которые тоже являются операторами и свойства которых определяются с помощью так называемых соотношений Эйнштейна. Имеется возможность, оставаясь в рамках квантовых воззрений и тем самым сохраняя возможности для описания разного рода квантовых проявлений, значительно упростить математическую ситуацию, превращая операторные уравнения в c -числовые. При превращении лазер-

ных операторных переменных в c -числовые функции нужно правильно переписать корреляционные функции для источников. Для этого используется традиционный принцип соответствия, согласно которому при усреднении нормально упорядоченного произведения операторов последние могут быть заменены на c -числовые функции. Уравнения для c -числовых переменных принято по традиции называть уравнениями Ланжевена. После адиабатического исключения поляризации они становятся очень похожи внешне на уравнения для вихселов с короткоживущим нижним уровнем и имеют следующий вид [G2]:

$$\dot{a}_{\pm} = -\kappa a_{\pm} - (\kappa_a + i\omega_p) a_{\mp} + c(1 - i\alpha)(D \pm d) a_{\pm} + \xi_{\pm} \quad (1.119)$$

$$\dot{D} = R - \gamma D - 2cD(|a_+|^2 + |a_-|^2) - 2cd(|a_+|^2 - |a_-|^2) + \xi_D \quad (1.120)$$

$$\dot{d} = -\gamma_s d - 2cD(|a_+|^2 - |a_-|^2) - 2cd(|a_+|^2 + |a_-|^2) + \xi_d \quad (1.121)$$

где сохранены все прежние обозначения, кроме следующих:

$$D = \frac{1}{2} [(N_{1+} + N_{1-}) - (N_{2+} + N_{2-})] \quad (1.122)$$

$$d = \frac{1}{2} [(N_{1+} - N_{1-}) - (N_{2+} - N_{2-})], \quad (1.123)$$

а стохастические источники

$$\xi_{\pm} = \frac{c}{g} (1 - i\alpha) F_{P\pm} \quad (1.124)$$

$$\xi_D = F_D - (a_+^* \xi_+ + a_-^* \xi_- + a_+ \xi_+^* + a_- \xi_-^*) \quad (1.125)$$

$$\xi_d = F_d - (a_+^* \xi_+ - a_-^* \xi_- + a_+ \xi_+^* - a_- \xi_-^*) \quad (1.126)$$

определяются ненулевыми корреляционными функциями:

$$\begin{aligned} \overline{F_D(t)F_D(t')} &= \frac{1}{4} [\gamma (\bar{N}_{1+} + \bar{N}_{1-} + \bar{N}_{2+} + \bar{N}_{2-}) + 2R(1-p) \\ &\quad - 4g (\overline{a_+^* P_+} + \overline{a_+ P_+^*} + \overline{a_-^* P_-} + \overline{a_- P_-^*})] \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (1.127)$$

$$\begin{aligned} \overline{F_d(t)F_d(t')} &= \frac{1}{4} [(\gamma + 4\gamma_c) (\bar{N}_{1+} + \bar{N}_{1-} + \bar{N}_{2+} + \bar{N}_{2-}) + 2R - \\ &\quad - 4g (\overline{a_+^* P_+} + \overline{a_+ P_+^*} + \overline{a_-^* P_-} + \overline{a_- P_-^*})] \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (1.128)$$

$$\begin{aligned} \overline{F_D(t)F_d(t')} &= \overline{F_d(t)F_D(t')} = \frac{1}{4} [\gamma (\bar{N}_{1+} - \bar{N}_{1-} + \bar{N}_{2+} - \bar{N}_{2-}) - \\ &\quad - 4g (\overline{a_+^* P_+} + \overline{a_+ P_+^*} - \overline{a_-^* P_-} - \overline{a_- P_-^*})] \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (1.129)$$

$$\overline{F_D(t)F_{P_{\pm}}(t')} = -\frac{1}{2} (\gamma + \gamma_c) \bar{P}_{\pm} \delta(t-t'). \quad (1.130)$$

$$\overline{F_d(t)F_{P_{\pm}}(t')} = \mp \frac{1}{2} (\gamma + \gamma_c) \bar{P}_{\pm} \delta(t-t'). \quad (1.131)$$

$$\overline{F_{P_{\pm}}^*(t)F_{P_{\pm}}(t')} = \left[(2\gamma_{\perp} - \gamma) \bar{N}_{1\pm} - \gamma_c (\bar{N}_{1\pm} - \bar{N}_{1\mp}) + R \right] \delta(t-t'), \quad (1.132)$$

$$\overline{F_{P_{\pm}}(t)F_{P_{\pm}}(t')} = 2g \overline{(a_{\pm} P_{\pm})} \delta(t-t'), \quad (1.133)$$

Далее находим решения этих уравнений используя метод, изложенный выше. Спектральные плотности квантовых параметров Стокса для x -поляризованного излучения вискела имеют вид:

$$(\delta S_1^2)_{\Omega} = n_x \kappa_x \left(2\Omega^2(r+1) + \gamma^2 r(p - pr + 4) \right) / \lambda_1(\Omega) \quad (1.134)$$

$$(\delta S_2^2)_{\Omega} = 2n_x \kappa_x \left(\Omega^4/4 (r+1) + a_2 \Omega^2 + b_2 \right) / \lambda(\Omega) \quad (1.135)$$

$$(\delta S_3^2)_{\Omega} = 2n_x \kappa_x \left(\Omega^4/4 (r+1) + a_3 \Omega^2 + b_3 \right) / \lambda(\Omega) \quad (1.136)$$

$$(\delta S_2 \delta S_3)_{\Omega} = 2n_x \kappa_x \gamma (r-1) \left(a_{23} \Omega^2/4 + b_{23} \right) / \lambda(\Omega) \quad (1.137)$$

где коэффициенты определены как

$$\begin{aligned} a_2 &= (\omega_p^2 + \kappa_a^2 + \Gamma_s^2/4)(r+1) + \gamma(r-1)\left(\alpha^2 r \Gamma_s/4 + (\alpha\omega_p - \kappa_x)(r+1)\right) \\ b_2 &= \gamma_s^2(\omega_p^2 + \kappa_a^2)(r+1) + \gamma_s\gamma(r-1)\left[r(\omega_p + \alpha\kappa_a)^2 + 2\kappa(\alpha\omega_p - \kappa_a)(r+1)\right] + \\ &+ \gamma^2(r-1)^2\left[\kappa^2(r+1)(\alpha^2 + 1) - (\omega_p + \alpha\kappa_a)^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (\omega_p^2 + \kappa_a^2 + \gamma_s^2/4)(r+1) + (\alpha\omega_p - \Gamma_s/2)(r-1)(r+1)\gamma + \gamma(r-1)r\Gamma_s/4 \\ b_3 &= \Gamma_s^2(r+1)(\kappa_a^2 + \omega_p^2) + \gamma(r-1)\Gamma_s\left[r(\alpha^2\omega_p^2 - \kappa_a^2) + 2\kappa_a(\alpha\omega_p - \kappa_a)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= \alpha\left[\Gamma_s + 2(r+1)(\kappa - \kappa_a)\right] \\ b_{23} &= \gamma_s\left[r(\omega_p + \alpha\kappa_a)(\alpha\omega_p - \kappa_a) + (r+1)\left(\omega_p(\alpha\omega_p - \kappa_a) + \kappa(\omega_p + \alpha\kappa_a)\right)\right] + \\ &+ \gamma(r-1)\left[(\omega_p + \alpha\kappa_a)(\alpha\omega_p - \kappa_a) + (r+1)(\alpha^2 + 1)\kappa\omega_p\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Omega) &= (\Omega^2 - 2\gamma\kappa_x(r-1))^2 + \Omega^2\gamma^2r^2 \\ \lambda(\Omega) &= \Omega^2\left[-\Omega^2/4 + \kappa_a^2 + \omega_p^2 - \kappa_a\gamma_s + \gamma(r-1)(\kappa - \kappa_a)/2\right]^2 + \left[\Omega^2(\kappa_a - \Gamma_s/4) + \right. \\ &+ \left. \gamma(r-1)\kappa_x(\alpha\omega_p - \kappa_a) + \Gamma_s(\kappa_a^2 + \omega_p^2)\right]^2. \end{aligned}$$

Сравним полученные нами результаты с расчетами, проведенными на основе феноменологического введения источников шумов в динамические уравнения [64], основываясь на анализе графиков, приведенных в работе [67].

Рис. 1.5а скопирован нами из работы [67]. На рис. 1.5б мы построили аналогичные кривые, основываясь на нашем анализе и выбирая соответствующие параметры расчета: $\gamma = 1GHz$, $\kappa = 300GHz$, $\kappa_a = 0$, $\omega_p = 1GHz$, $\alpha = -3$, $\gamma_s = 100GHz$, $r = 1,04$. Кривая с одним максимумом на рис. 1.5а представляет собой спектральную плотность флуктуаций полной мощности лазерного излучения, что соответствует спектральной плотности первого параметра Стокса. Для сравнения мы построили зави-

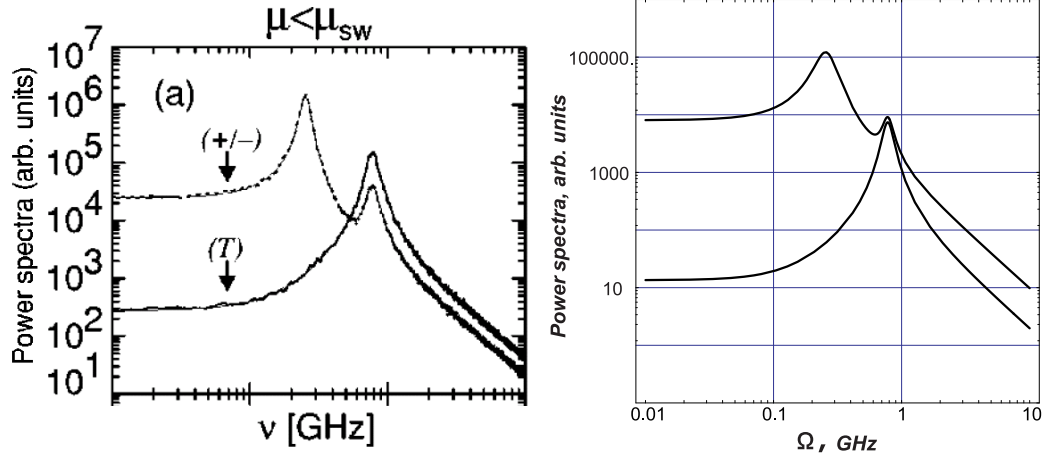


Рис. 1.5: (а) Фрагмент рисунка 1 из статьи [67]. Спектральные мощности, рассчитанные исходя из феноменологической модели статистики виксела. (б) Спектральные мощности, соответствующие представленным на рис. 1.5а, рассчитанные на основе квантово-статистической модели виксела. Значения параметров расчета: $\kappa = 300$, $\kappa_a = 0$, $\omega_p = 1$, $\alpha = -3$, $\gamma = 1$, $\gamma_s = 100$, $r = 1.04$.

симось от частоты спектральной плотности $(\delta S_1^2)_\Omega$. Что касается кривой с двумя максимумами, то можно увидеть, что речь идет о частотной зависимости величины $1/4((\delta S_1^2)_\Omega + (\delta S_2^2)_\Omega)$.

Сравнивая рисунки 1.5а и 1.5б, можем видеть, что качественно они очень похожи. Более того, положения максимумов по оси абсцисс с хорошей точностью совпадают. В то же самое время, видно по положению точек вдоль оси ординат, что уровень шумов для параметров Стокса, предсказываемый нашей теорией для выбранного набора параметров, несравненно ниже, чем предсказываемый в феноменологическом подходе. Легко объяснимо, почему частотное положение характерных максимумов на наших кривых оказалось точно совпадающим. Само по себе наличие максимумов связано с наличием релаксационных колебаний в системе, характерные частоты которых полностью определены динамическими свойствами виксела и никак не связаны, таким образом, со стохастическими источниками в уравнениях Ланжевена и, следовательно, не могут никак зависеть от способа их введения в теорию. Относительно расхождения в уровне шума, предсказываемом в двух обсуждаемых подходах, отме-

тим, что уравнения Ланжевена в работе [67] формировались не на основе полной системы динамических уравнений, а на основе укороченной системы, в которой фигурируют уже не заселенности всех подуровней $N_{1\pm}$ и $N_{2\pm}$, но только две величины D и d . Утерянные при этом источники оказывается трудно учесть феноменологически, и именно потому все корреляционные функции оказались пропорциональными разностям заселенностей $N_{1\pm} - N_{2\pm}$, а члены, зависящие от самих заселенностей, исчезли.

Обсудим теперь вопрос о возможности наблюдения поляризационного сжатия в викселе с одинаковыми временами жизни уровней. Как мы показали выше, наблюдение поляризационного сжатия в викселе связано с возможностью создания субпуассоновской статистики фотонов. Хорошо известно [28], что для организации субпуассоновской статистики необходимо подобрать такую среду, что время жизни нижнего лазерного уровня было бы гораздо меньше верхнего. В случае виксела с коротко живущим нижним уровнем, рассмотренного выше, атомы распределяются по подуровням случайным образом даже при регулярной накачке. Тем не менее, это оказывается несущественным при генерации линейно-поляризованного света. И причина этого простая - в формировании генерации роль играет только суммарная заселенность верхнего уровня, а не каждого из подуровней в отдельности.

Для виксела же с одинаково живущими лазерными уровнями помимо естественного ограничения, не позволяющего подавить дробовый шум более, чем наполовину [28], могут возникнуть еще дополнительные трудности, связанные со случайным возбуждением подуровней. Как можно увидеть из анализа уравнений [G2] в формировании статистики излучения роль теперь играет не только полная заселенность верхнего уровня, но и заселенности каждого из подуровней.

Убедимся в этом, анализируя спектр флуктуаций фототока (1.116) с учетом (1.134) при $p = 1$ и в отсутствие дихроизма $\kappa_a = 0$. Нам достаточно проследить только за

одной точкой $\Omega = 0$, которая определяет глубину провала ниже дробового шума. Мы будем иметь следующее:

$$(\delta i_-^2)_{\Omega=0}/\langle i_+ \rangle = 1 + \frac{1}{2} \frac{5-r}{r-1} \frac{r}{r-1} \xrightarrow{r \gg 1} \frac{1}{2} \quad (1.138)$$

Для сравнения приведем ту же самую формулу для случая двухуровневого лазера без вырождения уровней [28]:

$$(\delta i_-^2)_{\Omega=0}/\langle i_+ \rangle = 1 + \frac{1}{2} \frac{5-r}{r-1} \xrightarrow{r \gg 1} \frac{1}{2} \quad (1.139)$$

Как видим, поведение наблюдаемой точки в спектре шума очень похоже на то, которое имеет место и без вырождения. Дополнительный фактор $r/(r-1)$ говорит нам о том, что при $r < 5$ уровень шума оказывается выше, чем при отсутствие вырождения. Это, по-видимому, можно отнести на счет случайного распределения атомов по подуровням в процессе накачки. При $r > 5$ эффективность фактора оказывается минимизированной, и, по сути, системы оказываются эквивалентными.

Интересно также сравнить ситуацию с викселом с коротко живущим нижним уровнем:

$$(\delta i_-^2)_{\Omega=0}/\langle i_+ \rangle = 1 + \frac{3-r}{r-1} \frac{r}{r-1} \xrightarrow{r \gg 1} 0 \quad (1.140)$$

Сразу видно, что этом случае эффективность сжатия несравненно выше, чем при одинаковых временах жизни уровней. Например, при $r = 6$, когда в случае коротко живущего нижнего уровня достигается уже заметное подавление дробового шума до уровня 0.28, при равных временах жизни подавление остается еще едва заметным, и уровень шума от дробового уровня составляет величину 0.84.

Заключение к главе 1. В заключение отметим еще раз, что для корректного анализа квантово-статистических поляризационных свойств излучения виксела нам

необходимо рассматривать шумы всей системы, а не только излучающей моды.

В этой главе мы построили полностью квантовую модель вискела с учетом двойного лучепреломления и дихроизма в излучающей среде. Мы показали, что даже при наличии этих факторов можно обеспечить режим генерации неклассического излучения.

Мы теоретически предсказали эффект поляризационного сжатия в вискеле, проявляющийся в уменьшении флуктуаций квантового параметра Стокса S_1 ниже стандартного квантового предела. Природа этого квантового свойства излучения закладывается регулярностью накачки активной лазерной среды. Однако, только лишь требования регулярности накачки недостаточно, чтобы гарантировать поляризационное сжатие, в силу наличия шума, связанного со случайным перераспределением атомов между двумя верхними лазерными подуровнями.

Проанализированы динамические и квантово-статистические свойства излучения вискела для двух конфигураций (соответствующих различному соотношению между релаксационными константами), встречающихся в экспериментах. Показано, что эффективность поляризационного сжатия в лазере с коротко живущим нижним уровнем значительно выше, чем в лазере с одинаковыми временами жизни уровней: в последнем случае максимально достижимо подавление дробового шума наполовину, в то время как в лазере с короткоживущим нижним уровнем удастся (теоретически) обеспечить полное подавление дробового шума на низких частотах. Кроме того эффект переворачивания спина, присущий этим системам, существенно ухудшает статистику излучения в лазере с одинаковыми временами жизни уровней, и не вносит вклад в флуктуации полного числа фотонов и параметра Стокса S_1 для лазера с коротко живущим нижним уровнем.

Продемонстрирована несостоятельность феноменологической модели при описании шумов излучения. Показано, что в то время как данная модель адекватно опи-

сывает динамику излучения ви́ксела, квантово-статистические аспекты излучения, рассчитанные и помощью квантовой модели, отличаются от предсказаний, полученных в рамках феноменологической модели. Расхождение связано с потерей вкладов от источников шума, связанных с заселенностями подуровней.

Глава 2

Спектральные квантовые свойства излучения трехмодового параметрического генератора в надпороговом режиме

В этой главе мы рассмотрим другой существенно многомодовый источник квантового света: трехмодовый параметрический генератор света, все три актуальные моды которого (мода накачки, сигнальная и холостая моды) находятся в высокодобротных резонаторах и генерируются в надпороговом режиме. Мы включим в рассмотрение слабое поле, инжектируемое в сигнальную и холостую моды, и препятствующее диффузии фазы излучения. Мы введем и обсудим спектральную чистоту рассматриваемого квантового состояния, и покажем, что такое состояние не всегда является чистым. Покажем, что чистота существенно зависит от интенсивности слабого инжектируемого поля и симметрии этой инъекции. Получив выражение для трехмодовой R -функции Глаубера, обсудим совместное распределение вероятности числа фотонов в сигнальном и холостом полях, а также многочастотное сжатие и перепутывание.

Трехволновое нелинейное взаимодействие в среде с квадратичной нелинейностью является одной из основных модельных систем в квантовой оптике. Проблема описания такого взаимодействия упрощается, если рассматривают среду, помещенную

в оптический резонатор, поскольку тогда условия резонансности позволяют ограничить анализ собственными модами резонатора. В этом случае анализируемую систему принято называть "TROPO" (Triply Resonant Optical Parametric Oscillator). Кроме того, ниже порога генерации обычно поле накачки можно рассматривать как когерентное с фиксированной классической амплитудой (приближение неистощаемой накачки), и, таким образом, еще более упростить задачу, сведя ее к двухмодовой (для сигнальной и холостой мод). Было показано, что такая система излучает сжатый вакуум в условиях генерации ниже порога, когда сигнальная и холостая моды вырождены [87], или бифотоны - лучи с квантовыми корреляциями интенсивности, в случае надпороговой генерации невырожденных мод [88]. Оба теоретических предсказания получили экспериментальные подтверждения [89,90]. Также было показано, что данная система обладает и другими интересными квантовыми свойствами, особенно в невырожденном случае: фазовыми антикорреляциями [91], ЭПР-перепутыванием ниже и выше порога [92–94].

В надпороговом режиме, когда интенсивности трех взаимодействующих полей имеют одинаковый порядок величины, предположение о классическом представлении волны накачки уже не справедливо, и мы сталкиваемся с необходимостью решать трехмодовую задачу. В такой системе происходит не только конвертация фотонов накачки в сигнальные и холостые фотоны, но имеет место взаимная конвертация всех трех мод. Было показано теоретически [91] и подтверждено экспериментально [95], что в таких условиях волна накачки может быть заметно сжатой в некоторой области параметров системы. Кроме того, волна накачки квантово-коррелирована с суммой сигнальной и холостой волн, так что такая система проявляет трехчастичное перепутывание между тремя взаимодействующими полями [96].

2.1 Физическая модель и основные уравнения

TROPO состоит из нелинейного кристалла с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$, помещенного в высокочастотный резонатор таким образом, что все три моды (накачка, сигнальная и холостая) находятся в резонансе с этим резонатором. Подобная среда может обеспечить процесс $\omega_p \rightarrow \omega_i + \omega_s$ с обменом одного фотона накачки на один сигнальный и один холостой фотоны. Как хорошо известно взаимодействие мод, обеспечиваемое параметрическим взаимодействием, определяется гамильтонианом [97–100]:

$$\hat{V} = i\hbar g \left(\hat{a}_p \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_s^\dagger - \text{э.с.} \right), \quad (2.1)$$

где операторы \hat{a} и \hat{a}^\dagger подчиняются каноническим перестановочным соотношениям

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger] = 1, \quad m = p, i, s, \quad (2.2)$$

а индексы p, i, s означают принадлежность к волне накачки (pump), холостой (idler) и сигнальной (signal) волнам, соответственно.

В этом подходе все три моды квантованы, хотя внешнее поле, возбуждающее моду, которая затем осуществляет накачку, мы будем считать классической электромагнитной волной.

Пусть состояние трех мод описывается оператором плотности $\hat{\rho}$. Запишем уравнение для этого оператора в виде:

$$\dot{\hat{\rho}} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{V}, \hat{\rho}] + \sum_{m=p,i,s} \left(-\hat{R}_m + \hat{D}_m \right) \hat{\rho}. \quad (2.3)$$

Здесь операторы \hat{R}_m описывают затухание актуальных полевых осцилляторов так, что

$$\hat{R}_m \rho = \frac{\kappa_m}{2} \left(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m - 2\hat{a}_m \hat{\rho} \hat{a}_m^\dagger \right). \quad (2.4)$$

где κ_m - это скорость затухания осциллятора с индексом m .

Операторы \hat{D}_m , наоборот, обеспечивают возбуждение каждой из актуальных мод в когерентное состояние с амплитудой, равной $\sqrt{N_m^{in}}$ (для простоты выбираем фазы, равными нулю):

$$\hat{D}_m \hat{\rho} = \frac{\kappa_m}{2} \sqrt{N_m^{in}} [\hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m, \hat{\rho}] \quad (2.5)$$

Когерентное возбуждение холостой и сигнальной волн мы вносим в нашу модель, чтобы обеспечить подавление фазовой диффузии, которая иначе обязательно имеет место в случае невырожденной параметрической генерации. Чтобы добиться этого, не обязательно возбуждать обе волны. Однако, возбуждение обеих волн позволяет сделать систему симметричной и обеспечивает физически и математически более простые и наглядные ситуации. Здесь мы будем обсуждать и симметричное и асимметричное возбуждение.

Давайте перейдем от уравнения (7.4) к соответствующему диагональному представлению Глаубера. Оператор плотности может быть представлен через глауберовскую $P(\alpha_p, \alpha_i, \alpha_s, t)$ -функцию следующим образом:

$$\hat{\rho}(t) = \iiint d^2\alpha_p d^2\alpha_i d^2\alpha_s P(\alpha_p, \alpha_i, \alpha_s, t) |\alpha_p, \alpha_i, \alpha_s\rangle \langle \alpha_p, \alpha_i, \alpha_s|. \quad (2.6)$$

При симметричном возбуждении холостой и сигнальной волн кинетическое уравнение в диагональном представлении будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\alpha_p, \alpha_i, \alpha_s, t)}{\partial t} &= \frac{\kappa_p}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_p} \left(\alpha_p - \sqrt{N_p^{in}} \right) P + \sum_{m=i,s} \frac{\kappa_m}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left(\alpha_m - \sqrt{N_m^{in}} \right) P + \\ &+ g \left(\alpha_i \alpha_s \frac{\partial P}{\partial \alpha_p} - \alpha_p \alpha_s^* \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} - \alpha_p \alpha_i^* \frac{\partial P}{\partial \alpha_s} \right) + g \alpha_p \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_s} + c.c. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обычно это уравнение называется уравнением Фоккера-Планка. Нужно отметить, что кинетическое уравнение в диагональном представлении не всегда так хорошо определено, как здесь. Часто трудности возникают как раз тогда, когда квантовые

проявления становятся существенными для правильного описания процесса. В P -распределениях могут возникнуть сингулярности, что делает невозможным запись функции распределения в виде аналитической функции. Сударшан предложил записывать функцию распределения в этом случае в виде ряда по всем моментам распределения поля [102, 103]. Однако, это не исправляет ситуацию с записью самого кинетического уравнения. Например, такое уравнение для субпуассоновского лазера [28] содержит производные по комплексным амплитудам всех порядков. В этом случае используют положительное P -представление. Однако, в рассматриваемой задаче его применение не оправдано, поскольку, задача решается в рамках P -представления Глаубера, и в этом представлении записывается много проще (размерность фазового пространства в P -представлении Глаубера вдвое меньше, чем в положительном P -представлении).

2.2 Стационарные решения для классической теории TROPO

Мы будем полагать, что решения записанного выше уравнения мало отличаются от тех, которые соответствуют полуклассическому подходу, что позволит нам далее использовать метод линеаризации уравнений. Обоснованность такого предположения основывается на использовании синхронизации, подавляющей диффузию фаз световых полей. Поэтому нам в дальнейшем понадобятся некоторые соотношения, свойственные полуклассике. Для того чтобы написать уравнения классической теории, поступим следующим образом. В уравнении (7.8) отбросим все члены с производными по комплексным амплитудам второго порядка. Как известно, это означает, что мы не будем учитывать источники всех шумов в параметрической системе. Для полученного таким образом кинетического уравнения можно сопоставить следующую

систему уравнений Ланжевена для комплексных глауберовских амплитуд поля:

$$\dot{\alpha}_p = -\frac{\kappa_p}{2} (\alpha_p - \sqrt{N_p^{in}}) - g\alpha_i\alpha_s, \quad (2.8)$$

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\kappa}{2} (\alpha_i - \sqrt{N^{in}}) + g\alpha_p\alpha_s^*, \quad (2.9)$$

$$\dot{\alpha}_s = -\frac{\kappa}{2} (\alpha_s - \sqrt{N^{in}}) + g\alpha_p\alpha_i^*. \quad (2.10)$$

Это и есть классические уравнения для невырожденной параметрической генерации.

И здесь мы для простоты положили

$$\kappa_i = \kappa_s \equiv \kappa. \quad (2.11)$$

Как известно, параметрическая генерация существенно разная, если она имеет место для допороговой или надпороговой ситуацией. В силу симметрии задачи мы можем полагать при полуклассическом рассмотрении $\alpha_i = \alpha_s \equiv \alpha$. Кроме того, до тех пор, пока мощность холостой и сигнальной волн невелика, мы можем пренебречь влиянием этих волн на волну накачки и записать уравнения для амплитуды α в виде

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa}{2} (\alpha - \sqrt{N^{in}}) + g\sqrt{N_p^{in}}\alpha^*. \quad (2.12)$$

Здесь видно, что энергия холостой и сигнальной волн начинает нарастать неограниченно, если мощность накачки становится выше пороговой

$$\sqrt{N_p^{in}} > \left(\sqrt{N_p^{in}}\right)_{th.} = \frac{\kappa}{2g}. \quad (2.13)$$

В дальнейшем нас будет интересовать именно этот случай, для которого уравнение (2.12) оказывается неприемлемым, и мы должны рассматривать следующую систему

$$\dot{\alpha}_p = -\frac{\kappa_p}{2} (\alpha_p - \sqrt{N_p^{in}}) - g\alpha^2, \quad (2.14)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\kappa}{2} (\alpha - \sqrt{N^{in}}) + g\alpha_p\alpha^*. \quad (2.15)$$

Будем искать решения в виде

$$\alpha_p = \sqrt{N_p}, \quad \alpha = \sqrt{N}, \quad (2.16)$$

где нулевые фазы искомым полям заданы нулевыми фазами внешних вынуждающих полей.

Мы будем полагать, что внешние поля $\sqrt{N^{in}}$ настолько малы, что дают только малый вклад в мощность сигнальной и холостой волн так, что параметр инжекции

$$\mu = \sqrt{\frac{N^{in}}{N}} \quad (2.17)$$

всегда остается много меньшей единицы. Две причины побуждают нас ограничиться случаем малых значений параметра инжекции. Во-первых, мы намерены использовать в дальнейшем метод линеаризации, ограничиваясь рассмотрением малых флуктуаций чисел фотонов, что было бы невозможно в области бистабильной генерации. Кроме того, при значительной инжекции, пуассоновская статистика инжектируемого поля разрушала бы квантовые свойства резонаторной моды.

В рассматриваемых приближениях стационарные решения могут быть записаны в виде:

$$N_p = \frac{\kappa^2}{4g^2}, \quad N = \frac{\kappa_p \kappa}{4g^2} (\mu_p - 1), \quad (2.18)$$

где мы ввели параметр накачки μ_p как отношение мощности накачки к ее пороговому значению, который в нашем случае всегда больше единицы

$$\mu_p = \sqrt{\frac{N_p^{in}}{(N_p^{in})_{th}}} > 1. \quad (2.19)$$

В дальнейшем для нас будут полезны также равенства

$$g\sqrt{N_p} = \frac{\kappa}{2}(1 - \mu), \quad \frac{gN}{\sqrt{N_p}} = \frac{\kappa_p}{2}(\mu_p - 1), \quad \kappa(1 - \mu)N = \kappa_p(\mu_p - 1)N_p. \quad (2.20)$$

2.3 Линеаризация основного уравнения по малым флуктуациям амплитуд и фаз

Благодаря тому, что мы рассматриваем параметрическую генерацию с факторами синхронизации, мы можем полагать, что при оперировании выше порога генерации

относительные флуктуации амплитуд и флуктуации фаз актуальных полей оказываются малыми [101]. Запишем комплексные амплитуды в форме

$$\alpha_m = \sqrt{u_m} e^{i\varphi_m}, \quad m = p, i, s, \quad (2.21)$$

и потребуем, чтобы вещественные амплитуды и фазы в стационарном режиме слабо флуктуировали около соответствующих полуклассических стационарных решений, рассмотренных нами в предыдущем разделе. Это значит, что можно записать следующие соотношения:

$$u_m = N_m + \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m \ll N_m, \quad (N_i = N_s \equiv N) \quad (2.22)$$

$$\varphi_m \ll 1 \quad (2.23)$$

Тогда, линеаризуя уравнения по указанным малым величинам, мы можем факторизовать исходное распределение Глаубера в следующей форме

$$P(\alpha_p, \alpha_i, \alpha_s, t) = P(\varepsilon_p, \varepsilon_+, t)P(\varepsilon_-, t)P(\varphi_p, \varphi_+, t)P(\varphi_-, t), \quad (2.24)$$

где использовано обозначение

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_i \pm \varepsilon_s, \quad \varphi_{\pm} = \varphi_i \pm \varphi_s \quad (2.25)$$

Для каждого из сомножителей может быть записано свое уравнение Фоккера-Планка, описывающее соответственно амплитудные и фазовые флуктуации. Уравнения для амплитудных распределений имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\varepsilon_p, \varepsilon_+, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} (\kappa_p \varepsilon_p + \kappa(1 - \mu)\varepsilon_+) P(\varepsilon_p, \varepsilon_+, t) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_+} \left(\frac{\mu\kappa}{2} \varepsilon_+ - \kappa_p(\mu_p - 1)\varepsilon_p \right) P(\varepsilon_p, \varepsilon_+, t) + \kappa N(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_+^2} P(\varepsilon_p, \varepsilon_+, t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial P(\varepsilon_-, t)}{\partial t} = \kappa(1 - \mu/2) \frac{\partial}{\partial \varepsilon_-} \varepsilon_- P(\varepsilon_-, t) - \kappa N(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_-^2} P(\varepsilon_-, t), \quad (2.27)$$

Для фазовых распределений уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial P(\varphi_p, \varphi_+, t)}{\partial t} = \frac{\kappa_p}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi_p} (\varphi_p + (\mu_p - 1)\varphi_+) P(\varphi_p, \varphi_+, t) + \quad (2.28)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi_+} (\kappa(1 - \mu/2)\varphi_+ - \kappa(1 - \mu)\varphi_p) P(\varphi_p, \varphi_+, t) - \frac{\kappa}{4N}(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial \varphi_+^2} P(\varphi_p, \varphi_+, t),$$

$$\frac{\partial P(\varphi_-, t)}{\partial t} = \frac{\mu\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi_-} \varphi_- P(\varphi_-, t) + \frac{\kappa}{4N}(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial \varphi_-^2} P(\varphi_-, t). \quad (2.29)$$

Прежде всего следует отметить, что флуктуации числа фотонов и флуктуации фазы статистически независимы в рассматриваемом случае трехмодового резонансного взаимодействия. Кроме того, из последнего уравнения видно, что инжекция приводит к подавлению диффузии разностной фазы, как известно имеющей место для вырожденной надпороговой генерации. Однако, как было отмечено выше, инжектируемые поля портят квантовую статистику интересующих нас мод. Возникает вопрос, в какой мере возможно сохранить квантовые корреляции в исследуемом поле в присутствии инжекции, оказывающей на них одновременно и положительное и отрицательное влияние. Ответ на этот вопрос мы получим далее, переходя от уравнения Фоккера-Планка к уравнениям Ланжевена, которые записываются для самих амплитудных и фазовых флуктуаций.

2.4 Внутррезонаторные спектральные плотности шумов

За внутррезонаторными флуктуациями проще всего проследить, используя не уравнения Фоккера-Планка, но соответствующие им уравнения Ланжевена. Запишем их,

используя хорошо известные рецепты перехода, в форме

$$\dot{\varepsilon}_p = -\kappa_p/2 \varepsilon_p - \kappa/2(1 - \mu) \varepsilon_+, \quad (2.30)$$

$$\dot{\varepsilon}_+ = -\kappa\mu/2 \varepsilon_+ + \kappa_p(\mu_p - 1) \varepsilon_p + f_+(t), \quad (2.31)$$

$$\dot{\varepsilon}_- = -\kappa(1 - \mu/2) \varepsilon_- + f_-(t), \quad (2.32)$$

$$\dot{\varphi}_p = -\kappa_p/2 \varphi_p - \kappa_p/2(\mu_p - 1) \varphi_+, \quad (2.33)$$

$$\dot{\varphi}_+ = -\kappa(1 - \mu/2) \varphi_+ + \kappa(1 - \mu) \varphi_p + g_+(t), \quad (2.34)$$

$$\dot{\varphi}_- = -\kappa\mu/2 \varphi_- + g_-(t), \quad (2.35)$$

где стохастические источники f_{\pm} , g_{\pm} определяются своими парными корреляторами:

$$\langle f_+(t)f_+(t') \rangle = 2\kappa N(1 - \mu) \delta(t - t'), \quad (2.36)$$

$$\langle f_-(t)f_-(t') \rangle = -2\kappa N(1 - \mu) \delta(t - t'), \quad (2.37)$$

$$\langle g_+(t)g_+(t') \rangle = -\kappa(1 - \mu)/(2N) \delta(t - t'), \quad (2.38)$$

$$\langle g_-(t)g_-(t') \rangle = \kappa(1 - \mu)/(2N) \delta(t - t'). \quad (2.39)$$

Все остальные парные корреляторы равны нулю. Решая уравнения (2.30)-(2.35), мы сможем явным образом выразить все флуктуации через стохастические источники. Это даст нам возможность построить интересующие нас корреляционные функции. Запишем их не во временном представлении, а в частотном, посредством соответствующих Фурье-преобразований

$$\varepsilon_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varepsilon_m(t) e^{i\omega t} dt, \quad \varepsilon_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varepsilon_m(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.40)$$

$$\varphi_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi_m(t) e^{i\omega t} dt, \quad \varphi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi_m(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.41)$$

Поскольку мы рассматриваем задачу со стационарными световыми потоками, мы имеем возможность написать соответствующие корреляционные функции в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_m(\omega) \varepsilon_{m'}(\omega') \rangle &= (\varepsilon_m \varepsilon_{m'})_{\omega} \delta(\omega + \omega'), \quad m, m' = p, \pm, \\ \langle \varphi_m(\omega) \varphi_{m'}(\omega') \rangle &= (\varphi_m \varphi_{m'})_{\omega} \delta(\omega + \omega'), \end{aligned} \quad (2.42)$$

где множители перед δ -функциями называют спектральными плотностями соответствующих переменных. Из исходных уравнений Ланжевена (2.30)-(2.35), переписанных через Фурье-преобразование, с использованием свойств источников (2.36)-(2.39), также переписанных в Фурье-картине, получаются следующие выражения для амплитудных флуктуаций

$$(\varepsilon_+^2)_\omega = \frac{2N\kappa(\kappa_p^2 + 4\omega^2)(1 - \mu)}{[2\omega^2 - \kappa_p\kappa[\mu/2 + (\mu_p - 1)(1 - \mu)]]^2 + \omega^2(\kappa_p + \kappa\mu)^2}, \quad (2.43)$$

$$(\varepsilon_p^2)_\omega = \frac{2N_p\kappa^2\kappa_p(1 - \mu)^2(\mu_p - 1)}{[2\omega^2 - \kappa_p\kappa[\mu/2 + (\mu_p - 1)(1 - \mu)]]^2 + \omega^2(\kappa_p + \kappa\mu)^2}, \quad (2.44)$$

$$(\varepsilon_p\varepsilon_+)_\omega = -\frac{2N\kappa^2\kappa_p(1 - \mu)}{[2\omega^2 - \kappa_p\kappa[\mu/2 + (\mu_p - 1)(1 - \mu)]]^2 + \omega^2(\kappa_p + \kappa\mu)^2}, \quad (2.45)$$

$$(\varepsilon_-^2)_\omega = -\frac{2N\kappa(1 - \mu)}{\kappa^2(1 - \mu/2)^2 + \omega^2}, \quad (2.46)$$

$$(\varepsilon_i^2)_\omega = (\varepsilon_s^2)_\omega = \frac{1}{4} ((\varepsilon_+^2)_\omega + (\varepsilon_-^2)_\omega) \quad (2.47)$$

и для фазовых флуктуаций

$$2N_p(\varphi_p^2)_\omega = -\frac{\kappa^2\kappa_p(\mu_p - 1)(1 - \mu)^2}{[2\omega^2 - \kappa\kappa_p[\mu/2 + \mu_p(1 - \mu)]]^2 + \omega^2[\kappa_p + 2\kappa(1 - \mu/2)]^2}, \quad (2.48)$$

$$2N(\varphi_+^2)_\omega = -\frac{\kappa(\kappa_p^2 + 4\omega^2)(1 - \mu)}{[2\omega^2 - \kappa\kappa_p[\mu/2 + \mu_p(1 - \mu)]]^2 + \omega^2[\kappa_p + 2\kappa(1 - \mu/2)]^2}, \quad (2.49)$$

$$2N(\varphi_p\varphi_+)_\omega = \frac{\kappa\kappa_p^2(\mu_p - 1)(1 - \mu)}{[2\omega^2 - \kappa\kappa_p[\mu/2 + \mu_p(1 - \mu)]]^2 + \omega^2[\kappa_p + 2\kappa(1 - \mu/2)]^2}, \quad (2.50)$$

$$2N(\varphi_-^2)_\omega = \frac{\kappa(1 - \mu)}{(\kappa\mu/2)^2 + \omega^2}. \quad (2.51)$$

Напоминаем, что в силу того, что при вычислении этих величин мы использовали когерентное представление, то по сути мы вычислили не произведения величин, но их нормально упорядоченные произведения. Далее, разумеется, необходимо иметь это ввиду.

2.5 Корреляции для наблюдаемых полей снаружи резонатора

Вернемся снова к операторной записи актуальных амплитуд поля $\hat{a}_m(t)$ ($m = p, i, s$) внутри резонатора, для которых имеют место канонические перестановочные соотношения

$$[\hat{a}_m(t), \hat{a}_n^\dagger(t)] = \delta_{mn}, \quad [\hat{a}_m(t), \hat{a}_n(t)] = 0. \quad (2.52)$$

Квазимонохроматические волны, выходящие из резонатора в свободное пространство описываются операторами $\hat{A}_m(t)$, для которых канонические перестановочные соотношения оказываются другими

$$[\hat{A}_m(t), \hat{A}_n(t')^\dagger] = \delta_{mn}\delta(t-t'), \quad [\hat{A}_m(t), \hat{A}_n(t')] = 0. \quad (2.53)$$

Физический смысл операторов внутри и вне резонатора тоже оказывается разным. Если $\langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \rangle$ это среднее число фотонов, запасенное в объеме резонатора, то $\langle \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m \rangle$ это средний поток фотонов.

Используя граничные условия на выходном зеркале, возможно написать равенство, связывающее выходное поле из резонатора с внутриврезонаторным полем:

$$\hat{A}_m(t) = \sqrt{\kappa_m} \hat{a}_m(t) - \left(C_m + \hat{A}_{m,vac}(t) \right), \quad m = p, i, s. \quad (2.54)$$

Здесь, конечно, предполагается, что прохождение через зеркало не вызывает никаких потерь поля. Второе слагаемое справа связано с тем, что каждая из волн накачивается извне полями в когерентных состояниях со средними амплитудами $C_p = \sqrt{\kappa_p N_p^{in}}/2$ для волны накачки и $C_i = C_s = \sqrt{\kappa N^{in}}/2$ для сигнальной и холостой волн. Коэффициент отражения выходного зеркала предполагается равным 1.

Для вакуумных флуктуаций, как для любого поля снаружи резонатора, имеют место перестановочные соотношения вида

$$[\hat{A}_{m,vac}(t), \hat{A}_{n,vac}(t')^\dagger] = \delta_{mn}\delta(t-t'), \quad [\hat{A}_{m,vac}(t), \hat{A}_{n,vac}(t')] = 0. \quad (2.55)$$

Перепишем равенство (2.54), записанное для амплитуд актуальных полей, для флуктуаций полей $\delta\hat{A}_m = \hat{A}_m - \langle\hat{A}_m\rangle$ и $\delta\hat{a}_m = \hat{a}_m - \langle\hat{a}_m\rangle$. Тогда для их фурье-компонент можно написать

$$\delta\hat{A}_m(\omega) = \sqrt{\kappa_m} \delta\hat{a}_m(\omega) - \hat{A}_{m,vac}(\omega). \quad (2.56)$$

Давайте дискретизируем частотную шкалу следующим образом: разобьем всю шкалу на одинаковые участки размером Δ с центрами в точках ω_l . Введем в рассмотрение новые операторы такие, что

$$\delta\hat{A}_m^l = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{\omega_l-\Delta/2}^{\omega_l+\Delta/2} \delta\hat{A}_m(\omega) d\omega. \quad (2.57)$$

Нетрудно понять, что

$$\left[\delta\hat{A}_m^l, (\delta\hat{A}_m^k)^\dagger \right] = \delta_{lk}. \quad (2.58)$$

Введем в рассмотрение квадратуры полей согласно следующему

$$\delta\hat{X}_m^l = \frac{1}{2} \left((\delta\hat{A}_m^l)^\dagger + \delta\hat{A}_m^l \right), \quad \delta\hat{Y}_m^l = \frac{i}{2} \left((\delta\hat{A}_m^l)^\dagger - \delta\hat{A}_m^l \right). \quad (2.59)$$

и вычислим средние от квадратов этих величин. Легко видно, что

$$\begin{aligned} \langle \delta\hat{X}_m^2 \rangle_l &= \frac{1}{4} + \frac{1}{\Delta} \iint_{\omega_l-\Delta/2}^{\omega_l+\Delta/2} \langle : \delta\hat{X}_m(\omega) \delta\hat{X}_m(\omega') : \rangle d\omega d\omega' = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{\Delta} \int_{\omega_l-\Delta/2}^{\omega_l+\Delta/2} \langle : \delta\hat{X}_m^2(\omega) : \rangle d\omega = \frac{1}{4} + \frac{\kappa_m}{\Delta} \int_{\omega_l-\Delta/2}^{\omega_l+\Delta/2} \langle : \delta\hat{x}_m^2(\omega) : \rangle d\omega = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\kappa_m}{4N_m\Delta} \int_{\omega_l-\Delta/2}^{\omega_l+\Delta/2} (\varepsilon_m^2)_\omega d\omega. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Теперь пусть $\Delta \rightarrow 0$, тогда подынтегральное выражение может быть вынесено за знак интеграла, и мы можем записать окончательное выражение для спектральной плотности в форме

$$4\langle \delta\hat{X}_m^2(\omega) \rangle = 1 + \frac{\kappa_m}{N_m} (\varepsilon_m^2)_\omega. \quad (2.61)$$

Рассуждая аналогичным образом, получим другие спектральные плотности

$$4\langle\delta\hat{Y}_m^2(\omega)\rangle = 1 + 4\kappa_m N_m (\varphi_m^2)_\omega, \quad (2.62)$$

$$4\langle\{\delta\hat{X}_m, \delta\hat{X}_n\}(\omega)\rangle = \sqrt{\kappa_m \kappa_n / (N_m N_n)} (\varepsilon_m \varepsilon_n)_\omega,$$

$$4\langle\{\delta\hat{Y}_m, \delta\hat{Y}_n\}(\omega)\rangle = 4\sqrt{\kappa_m \kappa_n N_m N_n} (\varphi_m \varphi_n)_\omega, \quad m, n = p, i, s. \quad (2.63)$$

Таким образом мы выразили наблюдаемые средние через внутривибрационные нормально упорядоченные средние, которые в явном виде записаны нами в предыдущем разделе.

2.5.1 Ковариационная матрица

В нашей задаче с невырожденной параметрической генерацией набор различных спектральных плотностей формирует так называемую ковариационную матрицу, которая в нашем случае может быть представлена квазидиагональной матрицей вида

$$\mathcal{M}_\omega = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_\omega^\varepsilon & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\omega^\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

где 3×3 матрица

$$\mathcal{M}_\omega^\varepsilon = \begin{pmatrix} 4\langle\delta\hat{X}_p^2(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{X}_p, \delta\hat{X}_i\}(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{X}_p, \delta\hat{X}_s\}(\omega)\rangle \\ 4\langle\{\delta\hat{X}_i, \delta\hat{X}_p\}(\omega)\rangle & 4\langle\delta\hat{X}_i^2(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{X}_i, \delta\hat{X}_s\}(\omega)\rangle \\ 4\langle\{\delta\hat{X}_s, \delta\hat{X}_p\}(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{X}_s, \delta\hat{X}_i\}(\omega)\rangle & 4\langle\delta\hat{X}_s^2(\omega)\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

описывает амплитудные флуктуации, а 3×3 матрица

$$\mathcal{M}_\omega^\varphi = \begin{pmatrix} 4\langle\delta\hat{Y}_p^2(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{Y}_p, \delta\hat{Y}_i\}(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{Y}_p, \delta\hat{Y}_s\}(\omega)\rangle \\ 4\langle\{\delta\hat{Y}_i, \delta\hat{Y}_p\}(\omega)\rangle & 4\langle\delta\hat{Y}_i^2(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{Y}_i, \delta\hat{Y}_s\}(\omega)\rangle \\ 4\langle\{\delta\hat{Y}_s, \delta\hat{Y}_p\}(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{Y}_s, \delta\hat{Y}_i\}(\omega)\rangle & 4\langle\delta\hat{Y}_s^2(\omega)\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

описывает фазовые флуктуации. Здесь фигурные скобки означают равенство

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \frac{1}{2} (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}). \quad (2.67)$$

Напоминаем, что спектральные плотности определяются как коэффициенты перед дельта-функциями в выражениях

$$\begin{aligned} \langle\delta\hat{X}_m(\omega)\delta\hat{X}_n(\omega')(\omega)\rangle &= \langle\delta\hat{X}_m\delta\hat{X}_n(\omega)\rangle \delta(\omega + \omega'), \\ \langle\delta\hat{Y}_m(\omega)\delta\hat{Y}_n(\omega')\rangle &= \langle\delta\hat{Y}_m\delta\hat{Y}_n(\omega)\rangle \delta(\omega + \omega') \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ковариационную матрицу можно построить не только для полной системы, описывающей все три актуальные волны, а именно волну накачки, холостую и сигнальную волны, как записано выше, но и для интересующих подсистем. Наряду с матрицей (2.71), можно написать ковариационные матрицы для каждой из волн в отдельности:

$$\mathcal{M}_\omega^m = \begin{pmatrix} 4\langle\delta\hat{X}_m^2(\omega)\rangle & 0 \\ 0 & 4\langle\delta\hat{Y}_m^2(\omega)\rangle \end{pmatrix}, \quad m = p, i, s. \quad (2.69)$$

То, что мы выделили только одну m -волну, не означает, что мы следим только за одним полевым осциллятором. В соответствии с нашими построениями, снаружи резонатора каждой волне сопоставляется набор полевых осцилляторов с частотами $\omega_m \pm \omega$. Таким образом ковариационные матрицы (2.69) описывают по отдельности пары полевых осцилляторов с частотами $\omega_m \pm \omega$. В то же самое время матрица (2.71) описывает одновременно три пары полевых осцилляторов с частотами $\omega_p \pm \omega$, $\omega_i \pm \omega$ и $\omega_s \pm \omega$.

Разумеется можно ввести в рассмотрение ковариационные матрицы для любой пары волн

$$\mathcal{M}_\omega^{pi}, \quad \mathcal{M}_\omega^{ps}, \quad \mathcal{M}_\omega^{is}. \quad (2.70)$$

Например, для сигнальной и холостой волн можно написать

$$\mathcal{M}_\omega^{is} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_\omega^\varepsilon & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\omega^\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

где

$$\mathcal{M}_\omega^\varepsilon = \begin{pmatrix} 4\langle\delta\hat{X}_i^2(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{X}_i, \delta\hat{X}_s\}(\omega)\rangle \\ 4\langle\{\delta\hat{X}_s, \delta\hat{X}_i\}(\omega)\rangle & 4\langle\delta\hat{X}_s^2(\omega)\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

и

$$\mathcal{M}_\omega^\varphi = \begin{pmatrix} 4\langle\delta\hat{Y}_i^2(\omega)\rangle & 4\langle\{\delta\hat{Y}_i, \delta\hat{Y}_s\}(\omega)\rangle \\ 4\langle\{\delta\hat{Y}_s, \delta\hat{Y}_i\}(\omega)\rangle & 4\langle\delta\hat{Y}_s^2(\omega)\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Достоинством любой из рассмотренных ковариационных матриц является то, что они могут быть измерены экспериментально. Как нетрудно увидеть, наши вычисления в предыдущих разделах позволяют записать ковариационные матрицы в явном виде.

2.5.2 Степень чистоты для осциллятора в гауссовском состоянии

Важной характеристикой в квантовой оптике является чистота квантового состояния объекта [G18]. Если рассматриваемый объект находится в состоянии, описываемом матрицей плотности $\hat{\rho}$, то степень чистоты (СЧ) (или просто чистота) состояния определяется как

$$\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2). \quad (2.74)$$

Как件нятно, для чистого состояния, когда $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, эта величина равна единице. Для смешанных состояний $\mathcal{P} < 1$.

В случае, когда нашим объектом исследования является полевой осциллятор, СЧ удобно переписать через функцию Вигнера $W(\alpha)$ в виде

$$\mathcal{P} = \pi \int d^2\alpha W^2(\alpha). \quad (2.75)$$

Во многих реальных ситуациях функция Вигнера имеет гауссову форму

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sqrt{ab - c^2} e^{-2(a \delta x^2 + b \delta y^2 - 2c \delta x \delta y)}. \quad (2.76)$$

Здесь $a, b > 0$ и $ab > c^2$, и мы выразили флуктуацию глауберовской амплитуды $\delta\alpha$ через флуктуации квадратур в виде $\delta\alpha = \delta x + i\delta y$.

Подставляя (2.76) в (2.75), выполняя необходимые простые интегрирования, получим для СЧ следующее явное выражение

$$\mathcal{P} = \sqrt{ab - c^2}. \quad (2.77)$$

Например, вакуумное состояние ($a = b = 1$, $c = 0$), как и должно быть, оказывается чистым.

Теперь давайте построим ковариантную матрицу. Для этого вычислим с помощью (2.76) средние от квадрата квадратур. Нетрудно получить

$$\overline{\delta x^2} = \frac{1}{4} \frac{b}{ab - c^2}, \quad \overline{\delta y^2} = \frac{1}{4} \frac{a}{ab - c^2}, \quad \overline{\delta x \delta y} = \frac{1}{4} \frac{c}{ab - c^2}. \quad (2.78)$$

Мы можем написать ковариантную матрицу в явном виде

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 4\langle \delta \hat{x}^2 \rangle & 4\langle \{\delta \hat{x}, \delta \hat{y}\} \rangle \\ 4\langle \{\delta \hat{x}, \delta \hat{y}\} \rangle & 4\langle \delta \hat{y}^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

имея в виду следующие соотношения

$$\langle \delta \hat{x}^2 \rangle = \overline{\delta x^2}, \quad \langle \delta \hat{y}^2 \rangle = \overline{\delta y^2}, \quad \langle \{\delta \hat{x}, \delta \hat{y}\} \rangle = \overline{\delta x \delta y} \quad (2.80)$$

Нетрудно получить, что СЧ оказывается связанной с ковариантной матрицей соотношением

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{M}}}. \quad (2.81)$$

2.5.3 Спектральная чистота квантового состояния поля

В предыдущем разделе мы показали, что если имеется изолированный осциллятор (выделенная мода высокочастотного резонатора), то СЧ может быть связана с ковариационной матрицей соотношением (2.81). Однако, как мы все время подчеркиваем, наблюдаемым является поле не в резонаторе, а на выходе из резонатора, после прохождения через выходное зеркало. Для простоты предположим, что нас, как и прежде, интересует только одна резонаторная мода, для которой снаружи резонатора может быть записана ковариационная матрица вида

$$\mathcal{M}_\omega = \begin{pmatrix} 4\langle \delta \hat{X}^2(\omega) \rangle & 4\langle \{\delta \hat{X}, \delta \hat{Y}\}(\omega) \rangle \\ 4\langle \{\delta \hat{X}, \delta \hat{Y}\}(\omega) \rangle & 4\langle \delta \hat{Y}^2(\omega) \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Будем называть эту матрицу *спектральной ковариационной матрицей*. Ее матричные элементы - это соответствующие спектральные плотности шумов, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned}\langle \delta \hat{X}_m(\omega) \delta \hat{X}_n(\omega') \rangle &= \langle \delta \hat{X}_m \delta \hat{X}_n(\omega) \rangle \delta(\omega + \omega'), \\ \langle \delta \hat{Y}_m(\omega) \delta \hat{Y}_n(\omega') \rangle &= \langle \delta \hat{Y}_m \delta \hat{Y}_n(\omega) \rangle \delta(\omega + \omega').\end{aligned}\quad (2.83)$$

Напомним, что квадратуры выражаются через амплитуды поля следующим образом:

$$\delta \hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} \left((\delta \hat{A}(\omega))^\dagger + \delta \hat{A}(\omega) \right), \quad \delta \hat{Y}(\omega) = \frac{i}{2} \left((\delta \hat{A}(\omega))^\dagger - \delta \hat{A}(\omega) \right). \quad (2.84)$$

Перепишем эти выражения в виде

$$\delta \hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} \left((\delta \hat{A}^\dagger)(-\omega) + \delta \hat{A}(\omega) \right), \quad \delta \hat{Y}(\omega) = \frac{i}{2} \left((\delta \hat{A}^\dagger)(-\omega) - \delta \hat{A}(\omega) \right). \quad (2.85)$$

Отсюда явно видно, что мы следим не за одним осциллятором с модовой частотой ω_0 , как внутри резонатора, а за двумя, с частотами $\omega_0 \pm \omega$. Для того, чтобы найти СЧ, необходимо рассматривать матрицу плотности $\hat{\rho}_{\omega_0+\omega, \omega_0-\omega} \equiv \hat{\rho}_{\pm\omega}$, описывающую два осциллятора. Тогда степень чистоты будет определяться выражением

$$\mathcal{P}_{\pm\omega} = \text{Tr} \hat{\rho}_{\pm\omega}^2 \quad (2.86)$$

Эту величину в дальнейшем будем называть *спектральной степенью чистоты* (ССЧ).

Перепишем ее через распределение Вигнера $W(\alpha_\omega, \alpha_{-\omega})$

$$\mathcal{P}_{\pm\omega} = \pi^2 \iint d^2\alpha_{+\omega} d^2\alpha_{-\omega} W^2(\alpha_{\pm\omega}). \quad (2.87)$$

Здесь глауберовские амплитуды $\alpha_{\pm\omega}$ являются собственными числами неэрмитовских операторов $\hat{A}(\pm\omega)$

$$\hat{A}(\pm\omega)|\alpha_{\pm\omega}\rangle = \alpha_{\pm\omega}|\alpha_{\pm\omega}\rangle. \quad (2.88)$$

Перейдем к новым переменным:

$$x_\omega = \frac{1}{2} (\alpha_\omega + \alpha_{-\omega}^*), \quad y_\omega = \frac{1}{2i} (\alpha_\omega - \alpha_{-\omega}^*). \quad (2.89)$$

Тогда выражение (2.87) примет вид:

$$\mathcal{P}_{\pm\omega} = \pi^2 \iint d^2x_\omega d^2y_\omega W^2(x_\omega, y_\omega), \quad (2.90)$$

Распределение Вигнера в общем виде можно записать как

$$\begin{aligned} W(x_\omega, y_\omega) &= \\ &= \frac{4}{\pi^2} (ab - c^2) \exp \left[-2 \left(a |\delta x_\omega|^2 + b |\delta y_\omega|^2 - c (\delta x_\omega \delta y_\omega^* + \delta x_\omega^* \delta y_\omega) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.91)$$

Подставим это выражение в (2.90), произведем все необходимые интегрирования и получим следующую связь ССЧ с определителем спектральной ковариационной матрицы (2.82)

$$\mathcal{P}_\omega = \frac{1}{\det \mathcal{M}_\omega}. \quad (2.92)$$

Это выражение отличается от того, которое использовалось многими авторами и нами в том числе в работе [G8]. Оно учитывает, что на самом деле наблюдение, отражаемое ковариационной матрицей (2.82) ведется не за одним полевым осциллятором, а за двумя, с собственными частотами, симметрично расположенными относительно модовой частоты.

2.5.4 Спектральная степень чистоты для надпороговой генерации ТРОРО с симметричной синхронизацией

Введем в рассмотрение вместо квадратур сигнальной и холостой волн их суммы и разности согласно равенствам

$$\delta \hat{X}_\pm = \delta \hat{X}_i \pm \delta \hat{X}_s, \quad \delta \hat{Y}_\pm = \delta \hat{Y}_i \pm \delta \hat{Y}_s. \quad (2.93)$$

В новых переменных ковариационная матрица будет выглядеть как квазидиагональная

$$\mathcal{M}_\omega = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{x-y-} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_{x_px_+} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{y_py_+} \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

где на диагоналях стоят 2×2 матрицы вида

$$\mathcal{M}_{x-y-} = \begin{pmatrix} 2\langle\delta\hat{X}_-^2\rangle_\omega & 0 \\ 0 & 2\langle\delta\hat{Y}_-^2\rangle_\omega \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

$$\mathcal{M}_{x_px_+} = \begin{pmatrix} 2\langle\delta\hat{X}_+^2\rangle_\omega & 2\sqrt{2}\langle\{\delta\hat{X}_+, \delta\hat{X}_p\}\rangle_\omega \\ 2\sqrt{2}\langle\{\delta\hat{X}_+, \delta\hat{X}_p\}\rangle_\omega & 4\langle\delta\hat{X}_p^2\rangle_\omega \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

$$\mathcal{M}_{y_py_+} = \begin{pmatrix} 2\langle\delta\hat{Y}_+^2\rangle_\omega & 2\sqrt{2}\langle\{\delta\hat{Y}_+, \delta\hat{Y}_p\}\rangle_\omega \\ 2\sqrt{2}\langle\{\delta\hat{Y}_+, \delta\hat{Y}_p\}\rangle_\omega & 4\langle\delta\hat{Y}_p^2\rangle_\omega \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

Отсюда следует, что определитель ковариационной матрицы может быть записан в виде произведения определителей трех приведенных выше матриц

$$\det \mathcal{M}_\omega = (\det \mathcal{M}_{x-y-})(\det \mathcal{M}_{x_px_+})(\det \mathcal{M}_{y_py_+}), \quad (2.98)$$

где

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M}_{x-y-} &= 2\langle\delta\hat{X}_-^2\rangle_\omega 2\langle\delta\hat{Y}_-^2\rangle_\omega, \\ \det \mathcal{M}_{x_px_+} &= 2\langle\delta\hat{X}_+^2\rangle_\omega 4\langle\delta\hat{X}_p^2\rangle_\omega - 8\langle\delta\hat{X}_+ \delta\hat{X}_p\rangle_\omega^2, \\ \det \mathcal{M}_{y_py_+} &= 2\langle\delta\hat{Y}_+^2\rangle_\omega 4\langle\delta\hat{Y}_p^2\rangle_\omega - 8\langle\delta\hat{Y}_+ \delta\hat{Y}_p\rangle_\omega^2, \end{aligned} \quad (2.99)$$

Для того чтобы записать матричные элементы в явном виде, мы должны связать вне-резонаторные спектральные квадратуры с внутррезонаторными (2.43)-(2.51). Эта связь выглядит следующим образом

$$\langle\delta\hat{X}_-^2(\omega)\rangle = \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{4N}(\varepsilon_-^2)_\omega, \quad \langle\delta\hat{Y}_-^2(\omega)\rangle = \frac{1}{2} + \kappa N(\varphi_-^2)_\omega, \quad (2.100)$$

$$\langle\delta\hat{X}_+^2(\omega)\rangle = \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{4N}(\varepsilon_+^2)_\omega, \quad \langle\delta\hat{Y}_+^2(\omega)\rangle = \frac{1}{2} + \kappa N(\varphi_+^2)_\omega, \quad (2.101)$$

$$\langle\delta\hat{X}_p^2(\omega)\rangle = \frac{1}{4} + \frac{\kappa_p}{4N_p}(\varepsilon_p^2)_\omega, \quad \langle\delta\hat{Y}_p^2(\omega)\rangle = \frac{1}{4} + \kappa_p N_p(\varphi_p^2)_\omega \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} \langle\{\delta\hat{X}_p, \delta\hat{X}_+\rangle(\omega)\rangle &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\kappa_p\kappa}{NN_p}}(\varepsilon_p\varepsilon_+)_\omega, \\ \langle\{\delta\hat{Y}_p, \delta\hat{Y}_+\rangle(\omega)\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{2\kappa\kappa_p NN_p}(\varphi_p\varphi_+)_\omega \end{aligned} \quad (2.103)$$

Например, используя явные выражения (2.46) и (2.51), можем получить следующее

$$\langle \delta \hat{X}_-^2(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \mu^2 / 4 + \omega^2}{\kappa^2 (1 - \mu/2)^2 + \omega^2}, \quad \langle \delta \hat{Y}_-^2(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 (1 - \mu/2)^2 + \omega^2}{\kappa^2 \mu^2 / 4 + \omega^2} \quad (2.104)$$

и, как видно,

$$\det \mathcal{M}_{x-y_-} = 1. \quad (2.105)$$

Это соотношение верно при любых значениях параметров накачки μ_p и синхронизации μ , и справедливо для всех частот.

При вычислениях других средних мы будем использовать выражения (2.43)-(2.51) полагая для простоты, что κ , $\kappa(\mu_p - 1) \ll \kappa_p$, тогда получим следующее:

$$2\langle \delta \hat{X}_+^2(\omega) \rangle = 1 + \frac{\kappa^2(1 - \mu)}{\kappa^2[\mu/2 + (1 - \mu)(\mu_p - 1)]^2 + \omega^2}, \quad (2.106)$$

$$2\langle \delta \hat{Y}_+^2(\omega) \rangle = 1 - \frac{\kappa^2(1 - \mu)}{\kappa^2[\mu/2 + (1 - \mu)\mu_p]^2 + \omega^2}, \quad (2.107)$$

$$4\langle \delta \hat{X}_p^2(\omega) \rangle = 1 + \frac{2\kappa^2(\mu_p - 1)(1 - \mu)^2}{\kappa^2[\mu/2 + (1 - \mu)(\mu_p - 1)]^2 + \omega^2}, \quad (2.108)$$

$$4\langle \delta \hat{Y}_p^2(\omega) \rangle = 1 - \frac{2\kappa^2(1 - \mu)^2(\mu_p - 1)}{\kappa^2[\mu/2 + (1 - \mu)\mu_p]^2 + \omega^2}, \quad (2.109)$$

$$2\sqrt{2}\langle \{\delta \hat{X}_p, \delta \hat{X}_+\}(\omega) \rangle = -\frac{\kappa^2 \sqrt{(1 - \mu)(\mu_p - 1)}}{\kappa^2[\mu/2 + (\mu_p - 1)(1 - \mu)]^2 + \omega^2}, \quad (2.110)$$

$$2\sqrt{2}\langle \{\delta \hat{Y}_p, \delta \hat{Y}_+\}(\omega) \rangle = \frac{\kappa^2 \sqrt{(\mu_p - 1)(1 - \mu)^3}}{\kappa^2[\mu/2 + \mu_p(1 - \mu)]^2 + \omega^2}. \quad (2.111)$$

Отсюда нетрудно получить соотношения для сигнальной и холостой волн согласно равенствам

$$4\langle \delta \hat{X}_i^2(\omega) \rangle = 4\langle \delta \hat{X}_s^2(\omega) \rangle = \langle \delta \hat{X}_+^2(\omega) \rangle + \langle \delta \hat{X}_-^2(\omega) \rangle, \quad (2.112)$$

$$4\langle \delta \hat{Y}_i^2(\omega) \rangle = 4\langle \delta \hat{Y}_s^2(\omega) \rangle = \langle \delta \hat{Y}_+^2(\omega) \rangle + \langle \delta \hat{Y}_-^2(\omega) \rangle, \quad (2.113)$$

$$4\langle \{\delta \hat{X}_i(\omega), \delta \hat{X}_s(\omega)\} \rangle = \langle \delta \hat{X}_+^2(\omega) \rangle - \langle \delta \hat{X}_-^2(\omega) \rangle, \quad (2.114)$$

$$4\langle \{\delta \hat{Y}_i(\omega), \delta \hat{Y}_s(\omega)\} \rangle = \langle \delta \hat{Y}_+^2(\omega) \rangle - \langle \delta \hat{Y}_-^2(\omega) \rangle. \quad (2.115)$$

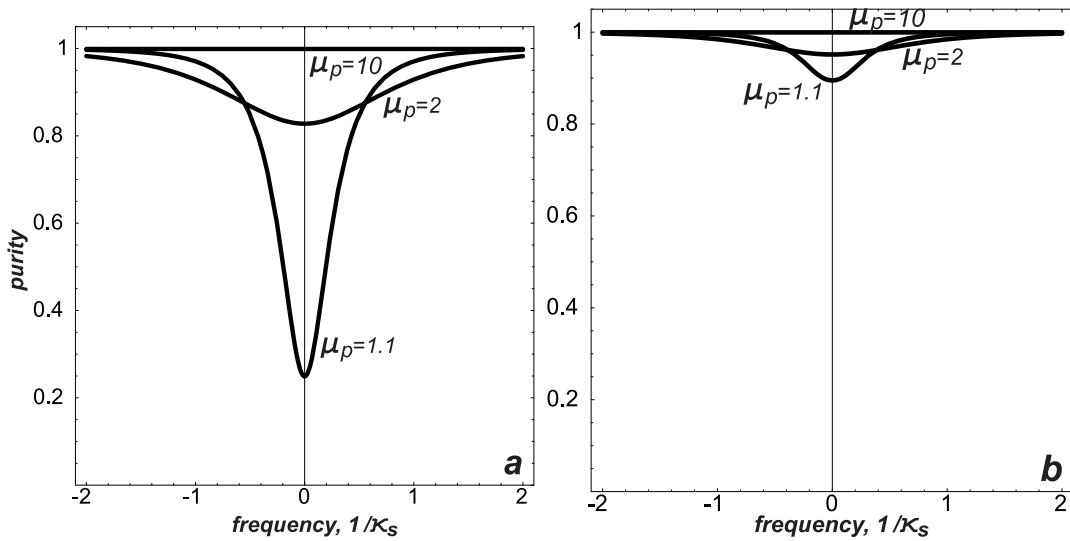


Рис. 2.1: Спектральная степень чистоты выходного поля в зависимости как функция безразмерной частоты при нескольких значениях параметра накачки и при значениях параметра синхронизации а) $\mu = 0.1$; б) $\mu = 0.35$.

На рис. 2.1 представлена зависимость ССЧ от частоты для системы трех волн - волны накачки, холостой и сигнальной волн. Вычисления производились на основе ковариационной матрицы (2.94). Рис. 2.1а отображает ситуацию, когда $\mu = 0.1$, рис. 2.1б - когда $\mu = 0.35$. Видно, что при больших μ состояние остается близким к чистому даже при достаточно слабой накачке $\mu_p = 1.1$. Это кажется естественным, поскольку синхронизирующий фактор определяется внешними полями в когерентном состоянии.

Если мы уменьшаем эффективность синхронизации, полагая $\mu = 0.1$, то при генерации вблизи порога $\mu_p = 1.1$ состояние становится существенно смешанным на частотах вблизи нулевых. На первый взгляд это может показаться странным, поскольку преобразование входных полей (волны накачки, синхронизирующих волн и континуума волн в вакуумном состоянии) в выходные в данной физической системе является унитарным. Однако, отметим, что мы следим не за полной системой полевых осцилляторов, состояние которых, разумеется, остается чистым, а только за подсистемами, соответствующими выделенной частоте ω . Таким образом, представлен-

ные рисунки демонстрируют, что рассматриваемые подсистемы могут оказываться в существенно смешанном состоянии вблизи порога генерации при достаточно малом значении параметра синхронизации μ .

Часто, невырожденный параметрический генератор рассматривают как двухмодовую систему, исключая из рассмотрения волну накачки. Интересно сравнить полученную выше ССЧ с аналогичной характеристикой в случае двухмодового наблюдения. Если эксперимент проводится таким образом, что волна накачки не участвует в измерительной процедуре, тогда актуальной будет следующая ковариационная матрица

$$\mathcal{M}_\omega^{is} = \begin{pmatrix} 4\langle\delta\hat{X}_i^2\rangle_\omega & 4\langle\{\delta\hat{X}_i, \delta\hat{X}_s\}\rangle_\omega & 0 & 0 \\ 4\langle\{\delta\hat{X}_i, \delta\hat{X}_s\}\rangle_\omega & 4\langle\delta\hat{X}_s^2\rangle_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\langle\delta\hat{Y}_i^2\rangle_\omega & 4\langle\{\delta\hat{Y}_i, \delta\hat{Y}_s\}\rangle_\omega \\ 0 & 0 & 4\langle\{\delta\hat{Y}_i, \delta\hat{Y}_s\}\rangle_\omega & 4\langle\delta\hat{Y}_s^2\rangle_\omega \end{pmatrix}, \quad (2.116)$$

и ССЧ выразится формулой

$$\mathcal{P}_\omega^{is} = \frac{1}{\det \mathcal{M}_\omega^{is}} \quad (2.117)$$

Она представлена графически на рис.2.2 в сравнении со ССЧ для полного наблюдения, рассмотренного ранее. Видно, что ССЧ при двухмодовом наблюдении всегда выше, чем при наблюдении за полной системой. На первый взгляд, это неожиданно, что чистота подсистемы оказывается выше, чем чистота полной системы, однако данный результат определяется наличием (или отсутствием) квантовых корреляций между подсистемами.

Режим генерации существенно выше порога

Если накачка значительно выше пороговой ($\mu_p \gg 1$), тогда

$$2\langle\delta\hat{X}_+^2(\omega)\rangle = 2\langle\delta\hat{Y}_+^2(\omega)\rangle = 4\langle\delta\hat{X}_p^2(\omega)\rangle = 4\langle\delta\hat{Y}_p^2(\omega)\rangle = 1. \quad (2.118)$$

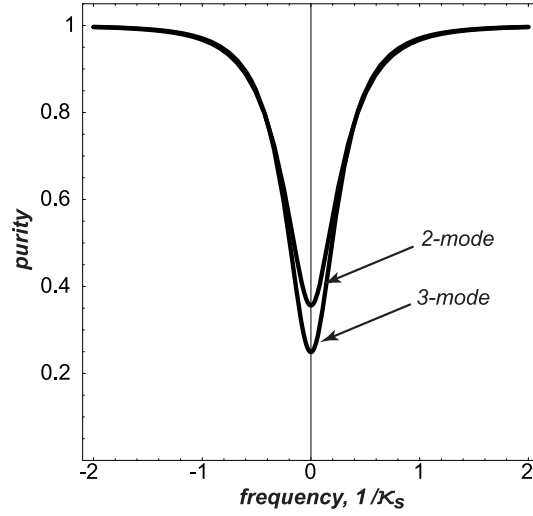


Рис. 2.2: Спектральная степень частоты для двухмодовом наблюдении излучения ТРОПО и при наблюдении за полной системой (включая моду накачки).

Явные выражения для $\langle \delta \hat{X}_-^2(\omega) \rangle$ и $\langle \delta \hat{Y}_-^2(\omega) \rangle$ не зависят от степени накачки и сохраняют свою форму

$$\langle \delta \hat{X}_-^2(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \mu^2 / 4 + \omega^2}{\kappa^2 (1 - \mu/2)^2 + \omega^2}, \quad \langle \delta \hat{Y}_-^2 \rangle_\omega = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 (1 - \mu/2)^2 + \omega^2}{\kappa^2 \mu^2 / 4 + \omega^2}. \quad (2.119)$$

В то же самое время корреляции $\delta \hat{X}_+(\omega)$ и $\delta \hat{Y}_+(\omega)$ с волной накачки исчезают,

$$\langle \{ \delta \hat{X}_p, \delta \hat{X}_+ \}(\omega) \rangle = \langle \{ \delta \hat{Y}_p, \delta \hat{Y}_+ \}(\omega) \rangle = 0, \quad (2.120)$$

а это означает, что сигнальная и холостая волны тоже не коррелируют с волной накачки.

Нетрудно увидеть, что при большой накачке $\det \mathcal{M}_\omega = 1$, откуда следует, что существенно выше порога трехмодовое поле сохраняет спектральную чистоту $\mathcal{P}_\omega = 1$ на любых частотах.

Волна накачки при большом превышении порога оказывается в когерентном состоянии. Для сигнальной и холостой волн нетрудно получить равенства

$$4\langle \delta \hat{X}_i^2(\omega) \rangle = 4\langle \delta \hat{X}_s^2(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2 \mu^2 / 4 + \omega^2}{\kappa^2 (1 - \mu/2)^2 + \omega^2} \right), \quad (2.121)$$

$$4\langle \delta \hat{Y}_i^2(\omega) \rangle = 4\langle \delta \hat{Y}_s^2(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2 (1 - \mu/2)^2 + \omega^2}{\kappa^2 \mu^2 / 4 + \omega^2} \right). \quad (2.122)$$

Таким образом в существенно надпороговом режиме сигнальная и холостая волны оказываются сжатыми наполовину по X -кватратуре и соответственно растянуты по Y -кватратуре на нулевой частоте.

Что касается корреляций между сигнальной и холостой волнами, то они могут быть выражены следующими формулами

$$4\langle\delta\hat{X}_i\delta\hat{X}_s(\omega)\rangle = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2(1-\mu)}{\kappa^2(1-\mu/2)^2 + \omega^2}, \quad (2.123)$$

$$4\langle\delta\hat{Y}_i\delta\hat{Y}_s(\omega)\rangle = -\frac{1}{2} \frac{\kappa^2(1-\mu)}{\kappa^2\mu^2/4 + \omega^2}. \quad (2.124)$$

На больших частотах корреляции полностью отсутствуют. Однако, поскольку там фактически отсутствует само излучение, данный предел не представляет практического интереса.

Перепутывание сигнальной и холостой волн

Существуют различные подходы оценки степени перепутывания. В частности, при исследовании чистых состояний удобно пользоваться критерием Федорова, представленным в работе [104]. Если при описании эволюции системы удастся построить разложение Шмидта для волновой функции, то степень перепутывания в такой системе удобно оценивать с помощью параметров разложения (собственных значений соответствующего интегрального преобразования) [105]. Другой метод оценки связан с применением критерия Дуана [106], сформулированного на языке квадратурных компонент; его мы и будем здесь использовать. Как известно, для двух волн (в нашем случае холостой и сигнальной) критерий Дуана может быть записан следующим образом: волны находятся в перепутанном состоянии, когда величина

$$2\langle\delta\hat{X}_-^2(\omega)\rangle + 2\langle\delta\hat{Y}_+^2(\omega)\rangle < 1 \quad (2.125)$$

оказывается меньше единицы. Подставляя сюда вычисленные выше выражения, мы получим

$$\begin{aligned} & 2\langle\delta\hat{X}_-^2(\omega)\rangle + 2\langle\delta\hat{Y}_+^2(\omega)\rangle = \\ & = 1 - \frac{\kappa^2(1-\mu)}{\kappa^2[\mu/2 + (1-\mu)\mu_p]^2 + \omega^2} + \frac{\kappa^2\mu^2/4 + \omega^2}{\kappa^2(1-\mu/2)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Сразу видно, что при $\mu_p \gg 1$ критерий Дуана не выполняется. В то же самое время для $\mu_p - 1 \ll \mu \ll 1$

$$2\langle\delta\hat{X}_-^2(0)\rangle + 2\langle\delta\hat{Y}_+^2(0)\rangle = 2(\mu_p - 1) + \mu^2/4 \ll 1 \quad (2.127)$$

Таким образом для надпороговой генерации при слабом превышении над порогом холостая и сигнальная волны оказываются в перепутанном состоянии. Кроме того, как было показано в предыдущем разделе, при значительном превышении порога генерации, обе волны находятся в сжатом состоянии.

Сжатие в волне накачки

В отличие от сигнальной и холостой волн, обнаруживающих амплитудное сжатие, волна накачки оказывается фазово-сжатой при промежуточных значениях параметра накачки μ_p . Из (2.109) нетрудно получить, что на нулевой частоте при малых значениях параметра синхронизации $\mu \ll 1$, выражение для спектральной плотности флуктуаций фазовой квадратуры волны накачки примет вид:

$$4\langle\delta\hat{Y}_p^2(0)\rangle = \frac{(\mu_p - 1)^2 + 1}{\mu_p^2}, \quad (2.128)$$

откуда следует, что максимальное сжатие $4\langle\delta\hat{Y}_p^2(0)\rangle = 1/2$ достигается при значении $\mu_p = 2$.

Заключение к главе 2. В этой главе мы построили модель трехмодового невырожденного параметрического генератора света, три актуальные моды которого находятся в высокочастотных резонаторах и генерируются в надпороговом режиме, с

учетом инъекции внешнего слабого поля, препятствующей диффузии фазы излучения.

Нашли трехмодовую функцию распределения квази-вероятности числа фотонов Глаубера и проанализировали на ее основе квантово-статистические особенности излучения генератора в зависимости от мощности поля накачки. Мы показали, что при значительном превышении мощностью накачки порогового значения, сигнальная и холостая волны оказываются амплитудно-сжатыми наполовину по сравнению с когерентным состоянием. Сжатие можно наблюдать и в волне накачки, однако это не амплитудное, а фазовое сжатие, наблюдаемое при промежуточных значениях параметра накачки, и достигающее максимума (наполовину по сравнению с когерентным состоянием) при значении $\mu_p = 2$. Наконец, при небольшом превышении порога, сигнальная и холостая волны оказываются в перепутанном состоянии.

Мы построили ковариационную матрицу, определяемую спектральными плотностями амплитудных и фазовых флуктуаций, размерности 6×6 , а также ковариационные матрицы для подсистем, связанные с различными условиями наблюдения. На этой основе мы обсудили вопрос о чистоте квантового состояния излучаемого поля, а также о спектральной степени чистоты, т.е. о чистоте состояния выделенной пары осцилляторов с частотами $\omega_0 \pm \omega$, симметрично расположенными относительно модовой частоты. Мы показали, что при исследовании многомодовых полей связь между ковариационной матрицей и спектральной степенью чистоты должна определяться из условий наблюдения, поскольку многомодовая постановка задачи допускает построение различных ковариационных матриц.

Показано, что рассматриваемые подсистемы (выделенные пары осцилляторов) могут оказываться в существенно смешанном состоянии вблизи порога генерации при достаточно малом значении параметра синхронизации μ . В то же время оказалось, что спектральная степень чистоты при двухмодовом наблюдении (т.е. при

наблюдении только за сигнальной и холостой волнами, исключая из рассмотрения волну накачки) всегда выше, чем при наблюдении за полной системой. На первый взгляд, это неожиданно, что чистота подсистемы оказывается выше, чем чистота полной системы, однако данный результат определяется наличием (или отсутствием) квантовых корреляций между подсистемами.

Глава 3

Источники широкополосного сжатого света

В этой главе мы остановимся на обсуждении двух источников широкополосного сжатого света: вырожденном параметрическом генераторе света (ВПГС) и субпуассоновском лазере с синхронизацией фазы (СПЛ). Мы кратко опишем используемые нами модели источников, запишем уравнения Гайзенберга-Ланжевена, найдем их решения в приближении малых фотонных флуктуаций, и обсудим границы применимости этих решений. Хотя результаты раздела, касающегося ВПГС не являются оригинальными, нам кажется необходимым включение этого раздела для последовательного изложения материала; кроме того, это дает нам возможность получить решение в форме, удобной для дальнейших применений и позволяет затронуть вопрос о степени сжатия, и связанности этого параметра с энергетическими затратами на достижение сжатия. Как будет видно далее, этот вопрос также является ключевым при оценке эффективности информационного канала.

3.1 Теория вырожденного параметрического генератора света над порогом генерации

3.1.1 Физическая модель ВПГС. Уравнения Гайзенберга-Ланжевена

Обсуждению квантового характера излучения ВПГС ниже порога генерации и над порогом посвящен значительный ряд работ (см., например, [107, 109–111]). Экспериментальное подтверждение теоретических предсказаний можно найти в [111, 112]. Отметим, что полученные нами результаты, касающиеся работы ВПГС, согласуются с результатами, полученными в процитированных работах.

В качестве модели ВПГС будем рассматривать высокодобротный плоский оптический резонатор с помещенным внутрь него нелинейным кристаллом. В вырожденном режиме генерации нелинейный кристалл параметрически преобразует фотон моды накачки с частотой ω_p в два одинаковых фотона сигнальной моды с частотами ω и наоборот

$$\omega_p \leftrightarrow 2\omega. \quad (3.1)$$

Следует сразу отметить, что, хотя добротности резонатора для поля накачки и параметрического излучения мы будем полагать различными, обе моды рассматриваются как высокодобротные моды резонатора, а внутррезонаторные поля - как квантовые. Процесс параметрического преобразования описывается Гамильтонианом взаимодействия:

$$\hat{V} = ig(\hat{a}_p\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger - h.c.), \quad (3.2)$$

где \hat{a}_p, \hat{a} - операторы рождения и уничтожения фотонов в моде накачки и сигнальной моде, соответственно; g - константа нелинейного взаимодействия этих мод. Рассматриваемые операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (3.3)$$

Мода накачки возбуждается внешним полем, которое мы будем считать классическим, с частотой равной частоте моды накачки. Как известно из классической теории ВПГС, генерация на частоте сигнальной моды возникает только если интенсивность возбуждающего внешнего поля превышает некоторое пороговое значение. Далее мы будем обсуждать только режим работы ВПГС выше порога генерации. В конце этого раздела мы покажем, что решения остаются верны даже при существенном приближении к порогу генерации.

На основе записанного гамильтониана несложно получить уравнения Гайзенберга-Ланжевена для операторов поля накачки и сигнального поля:

$$\dot{\hat{a}}_p = -\kappa_p/2 (\hat{a}_p - a_{in}) - g\hat{a}^2 + \hat{\xi}_p, \quad (3.4)$$

$$\dot{\hat{a}} = -\kappa/2 \hat{a} + 2g\hat{a}_p\hat{a}^\dagger + \hat{\xi}. \quad (3.5)$$

Здесь κ_p и κ - спектральные ширины моды накачки и сигнальной моды, соответственно; s -числовое значение a_{in} описывает классическую внешнюю вынуждающую силу. Физический смысл этой величины становится ясным, если рассмотреть случай пустого резонатора, положив в уравнениях $g = 0$. Тогда средняя стационарная амплитуда моды накачки равна

$$\langle \hat{a}_p \rangle = a_{in} = \sqrt{n_{in}} e^{i\varphi_{in}}. \quad (3.6)$$

Свойства квантовых источников шумов $\hat{\xi}_p$ и $\hat{\xi}$, входящих в уравнения, определяются следующими ненулевыми парными корреляционными функциями [108]:

$$\langle \hat{\xi}_p(t) \hat{\xi}_p^\dagger(t') \rangle = \kappa_p \delta(t - t'), \quad \langle \hat{\xi}(t) \hat{\xi}^\dagger(t') \rangle = \kappa \delta(t - t'). \quad (3.7)$$

При расчете параметров выходного излучения ВПГС важно знать нормально упорядоченные корреляционные функции этих шумов. Единственная ненулевая функция равна

$$\langle : \hat{\xi}(t) \hat{\xi}(t') : \rangle = 2g\langle \hat{a}_p \rangle \delta(t - t'). \quad (3.8)$$

Таким образом, уравнения (7.38)-(7.40) с учетом определений входящих в них величин полностью описывают квантовые характеристики излучения ВПГС в рамках физической модели.

3.1.2 Полуклассические стационарные решения

Чтобы использовать метод линеаризации уравнений по малым отклонениям от стационарных значений амплитуд, нам необходимо знать сами эти стационарные значения. Для этого перейдем от квантовых уравнений (7.38)-(7.40) к их классическим аналогам. Технически нам следует заменить в них операторные величины на c -числовые и отбросить источники шумов. В результате получим:

$$\dot{a}_p = -\kappa_p/2(a_p - a_{in}) - ga^2, \quad (3.9)$$

$$\dot{a} = -\kappa/2a + 2ga_p a^*. \quad (3.10)$$

Положив здесь производные равными нулю, найдем стационарные решения этих уравнений в виде:

$$a_p = \sqrt{n_p} e^{i\varphi_{in}}, \quad a = \sqrt{n} e^{i\varphi_{in}/2}, \quad (3.11)$$

где n_p и n - стационарные числа фотонов в моде накачки и сигнальной моде. Они определены следующими выражениями

$$n_p = n_{th}, \quad n = \frac{2\kappa_p}{\kappa} (\mu - 1) n_{th}, \quad (3.12)$$

где $n_{th} = \kappa^2/16g^2$ - пороговое число фотонов в моде накачки. Во второе выражение также входит параметр

$$\mu = \sqrt{\frac{n_{in}}{n_{th}}}. \quad (3.13)$$

Этот параметр характеризует степень превышения мощностью накачки порогового значения. В режиме генерации ВПГС выше порога всегда выполнено соотношение $\mu > 1$.

Отметим кратко основные следствия из полученных решений. Во-первых, фазы поля накачки и сигнального поля имеют фиксированные значения, определяемые фазой внешнего классического поля. Во-вторых, амплитуда сигнального поля возрастает от нуля по мере увеличения мощности накачки от порогового значения, тогда как амплитуда поля накачки внутри резонатора остается постоянной.

3.1.3 Флуктуации полей. Линеаризация уравнений Гайзенберга-Ланжевена

Рассмотрим флуктуации поля накачки и сигнального поля на основе традиционного для задач лазерной физики метода малых фотонных флуктуаций. Однако, в отличие от лазерных задач, где фаза излучения диффундирует, излучение ВПГС, как было продемонстрировано в предыдущем разделе, имеет фиксированное ("захваченное") стационарное значение фазы излучения, поэтому можно полагать, что малыми являются не только флуктуации числа фотонов, но и флуктуации фазы. Представим решения уравнений (7.38)-(7.40) в виде:

$$\hat{a}_p(t) = (\sqrt{n_p} + \delta\hat{a}_p(t)) e^{i\varphi_{in}}, \quad \hat{a}(t) = (\sqrt{n} + \delta\hat{a}(t)) e^{i\varphi_{in}/2}, \quad (3.14)$$

где $\delta\hat{a}_p(t)$ и $\delta\hat{a}(t)$ - флуктуации поля накачки и сигнального поля.

Предположим, что флуктуации полей малы по сравнению с их стационарными значениями, то есть выполнены соотношения:

$$\delta\hat{a}_p(t) \ll \sqrt{n_p}, \quad \delta\hat{a}(t) \ll \sqrt{n}. \quad (3.15)$$

Ниже мы покажем, что при работе ВПГС выше порога генерации эти условия выполняются. Подставляя решения в виде (3.14) в уравнения (7.38)-(7.40) и пренебрегая, в соответствии с условием (3.15), членами второго порядка малости, получим следу-

ющие линеаризованные уравнения для флуктуаций квадратурных компонент полей

$$\delta \dot{\hat{x}}_p = -\kappa_p/2 \delta \hat{x}_p - 2g\sqrt{n} \delta \hat{x} + \hat{\xi}'_p, \quad (3.16)$$

$$\delta \dot{\hat{y}}_p = -\kappa_p/2 \delta \hat{y}_p - 2g\sqrt{n} \delta \hat{y} + \hat{\xi}''_p, \quad \hat{\xi}_p e^{-i\varphi_{in}} = \hat{\xi}'_p + i\hat{\xi}''_p, \quad (3.17)$$

$$\delta \dot{\hat{x}} = 2g\sqrt{n} \delta \hat{x}_p + \hat{\xi}', \quad (3.18)$$

$$\delta \dot{\hat{y}} = -\kappa \delta \hat{y} + 2g\sqrt{n} \delta \hat{y}_p + \hat{\xi}'', \quad \hat{\xi} e^{-i\varphi_{in}/2} = \hat{\xi}' + i\hat{\xi}'', \quad (3.19)$$

определенных стандартным образом:

$$\delta \hat{a}_p = \delta \hat{x}_p + i\delta \hat{y}_p, \quad \delta \hat{a} = \delta \hat{x} + i\delta \hat{y}. \quad (3.20)$$

Корреляторы для новых источников получаются из корреляторов (7.41)-(7.42):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}'_p(t) \hat{\xi}'_p(t') \rangle &= \langle \hat{\xi}''_p(t) \hat{\xi}''_p(t') \rangle = \frac{\kappa_p}{4} \delta(t-t'), \\ \langle \hat{\xi}'(t) \hat{\xi}'(t') \rangle &= \langle \hat{\xi}''(t) \hat{\xi}''(t') \rangle = \frac{\kappa}{4} \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (3.21)$$

В дальнейшем нам понадобятся также выражения для нормально упорядоченных корреляторов:

$$\langle : \hat{\xi}'(t) \hat{\xi}'(t') : \rangle = -\langle : \hat{\xi}''(t) \hat{\xi}''(t') : \rangle = \frac{\kappa}{4} \delta(t-t'). \quad (3.22)$$

Полученная система линейных дифференциальных уравнений для флуктуаций квадратурных компонент полей легко решается в частотном представлении. Определим преобразование Фурье для произвольной функции $G(t)$ следующим образом:

$$G_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\omega t} dt, \quad G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\omega e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.23)$$

Тогда, применяя это преобразование к уравнениям (17)-(20), получим систему алгеб-

раических уравнений:

$$-i\omega \delta \hat{x}_{p\omega} = -\kappa_p/2 \delta \hat{x}_{p\omega} - 2g\sqrt{n} \delta \hat{x}_\omega + \hat{\xi}'_{p\omega}, \quad (3.24)$$

$$-i\omega \delta \hat{y}_{p\omega} = -\kappa_p/2 \delta \hat{y}_{p\omega} - 2g\sqrt{n} \delta \hat{y}_\omega + \hat{\xi}''_{p\omega}, \quad (3.25)$$

$$-i\omega \delta \hat{x}_\omega = 2g\sqrt{n} \delta \hat{x}_{p\omega} + \hat{\xi}'_\omega, \quad (3.26)$$

$$-i\omega \delta \hat{y}_\omega = -\kappa \delta \hat{y}_\omega + 2g\sqrt{n} \delta \hat{y}_{p\omega} + \hat{\xi}''_\omega. \quad (3.27)$$

Эта система имеет следующие решения:

$$\delta \hat{x}_{p\omega} = \frac{2i\omega \hat{\xi}'_{p\omega} + 4g\sqrt{n} \hat{\xi}'_\omega}{2\omega^2 + i\omega\kappa_p - (\mu - 1)\kappa\kappa_p}, \quad \delta \hat{y}_{p\omega} = \frac{-2(\kappa - i\omega) \hat{\xi}''_{p\omega} + 4g\sqrt{n} \hat{\xi}''_\omega}{2\omega^2 + i\omega(\kappa_p + 2\kappa) - \mu\kappa\kappa_p}, \quad (3.28)$$

$$\delta \hat{x}_\omega = -\frac{4g\sqrt{n} \hat{\xi}'_{p\omega} + (\kappa_p - 2i\omega) \hat{\xi}'_\omega}{2\omega^2 + i\omega\kappa_p - (\mu - 1)\kappa\kappa_p}, \quad \delta \hat{y}_\omega = -\frac{4g\sqrt{n} \hat{\xi}''_{p\omega} + (\kappa_p - 2i\omega) \hat{\xi}''_\omega}{2\omega^2 + i\omega(\kappa_p + 2\kappa) - \mu\kappa\kappa_p}. \quad (3.29)$$

3.1.4 Спектральные плотности квадратурных компонент света на выходе ВПГС

В случае стационарных полей для любой пары спектральных компонент \hat{A}_ω и \hat{B}_ω их корреляционная функция может быть записана как

$$\langle \delta \hat{A}_\omega \delta \hat{B}_{\omega'} \rangle = (\delta A \delta B)_\omega \delta(\omega + \omega'). \quad (3.30)$$

Множитель, стоящий перед дельта-функцией, является соответствующей спектральной плотностью.

Как известно, спектральные плотности снаружи резонатора связаны с внутрирезонаторными спектральными плотностями следующим образом:

$$(\delta X^2)_\omega = \frac{1}{4} + \kappa (: \delta x^2 :)_\omega, \quad (\delta Y^2)_\omega = \frac{1}{4} + \kappa (: \delta y^2 :)_\omega, \quad (3.31)$$

где $(: \dots :)_\omega$ означает, так называемую, нормально упорядоченную спектральную плотность. Эта величина по аналогии с уравнением (3.95) определяется через усреднение нормально упорядоченного произведения операторов

$$\langle : \delta \hat{A}_\omega \delta \hat{B}_{\omega'} : \rangle = (: \delta A \delta B :)_\omega \delta(\omega + \omega'). \quad (3.32)$$

Для того чтобы вычислить спектральные плотности флуктуаций поля накачки и сигнального поля необходимо знать спектральные плотности соответствующих источников шумов. Последние, согласно теореме Винера-Хинчина, получаются из корреляционных функций (А.10) и равны:

$$(\hat{\xi}'^2)_\omega = (\hat{\xi}''^2)_\omega = \frac{\kappa_p}{4}, \quad (\hat{\xi}'^2)_\omega = (\hat{\xi}''^2)_\omega = \frac{\kappa}{4} \quad (3.33)$$

Полученные выражения позволяют, пользуясь соотношениями (3.28) - (3.29), записать спектральные плотности флуктуаций квадратур полей внутри резонатора:

$$(\delta x_p^2)_\omega = \frac{(\mu - 1)\kappa_p\kappa^2/2 + \kappa_p\omega^2}{(2\omega^2 - (\mu - 1)\kappa\kappa_p)^2 + \omega^2\kappa_p^2}, \quad (3.34)$$

$$(\delta y_p^2)_\omega = \frac{(\mu - 1)\kappa_p\kappa^2/2 + \kappa_p(\kappa^2 + \omega^2)}{(2\omega^2 - \mu\kappa\kappa_p)^2 + \omega^2(\kappa_p + 2\kappa)^2}, \quad (3.35)$$

$$(\delta x^2)_\omega = \frac{(\mu - 1)\kappa_p^2\kappa/2 + \kappa/4(\kappa_p^2 + 4\omega^2)}{(2\omega^2 - (\mu - 1)\kappa\kappa_p)^2 + \omega^2\kappa_p^2}, \quad (3.36)$$

$$(\delta y^2)_\omega = \frac{(\mu - 1)\kappa_p^2\kappa/2 + \kappa/4(\kappa_p^2 + 4\omega^2)}{(2\omega^2 - \mu\kappa\kappa_p)^2 + \omega^2(\kappa_p + 2\kappa)^2}, \quad (3.37)$$

$$(\delta x_p\delta x)_\omega = -\frac{g\sqrt{n}(\kappa\kappa_p + 2i\omega(\kappa_p - \kappa))}{(2\omega^2 - (\mu - 1)\kappa\kappa_p)^2 + \omega^2\kappa_p^2}, \quad (3.38)$$

$$(\delta y_p\delta y)_\omega = \frac{g\sqrt{n}(\kappa\kappa_p - 2i\omega(\kappa_p - \kappa))}{(2\omega^2 - \mu\kappa\kappa_p)^2 + \omega^2(\kappa_p + 2\kappa)^2}. \quad (3.39)$$

В свою очередь практический интерес представляют характеристики полей, вышедших из резонатора.

Для их вычисления нам необходимо определить нормально упорядоченные спектральные плотности источников шумов, которые получаются из корреляционных функций (А.11):

$$(: \hat{\xi}'^2 :)_\omega = -(: \hat{\xi}''^2 :)_\omega = \frac{\kappa}{4}. \quad (3.40)$$

Тогда, проделывая вычисления аналогичные предыдущим, мы можем записать нормально упорядоченные спектральные плотности флуктуаций полей, входящие в вы-

ражения (3.31) и определяющие статистику выходного излучения:

$$\begin{aligned} (: \delta x_p^2 :)_{\omega} &= \frac{(\mu - 1)\kappa_p \kappa^2 / 2}{(2\omega^2 - (\mu - 1)\kappa \kappa_p)^2 + \omega^2 \kappa_p^2}, \\ (: \delta y_p^2 :)_{\omega} &= -\frac{(\mu - 1)\kappa_p \kappa^2 / 2}{(2\omega^2 - \mu \kappa \kappa_p)^2 + \omega^2 (\kappa_p + 2\kappa)^2}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} (: \delta x^2 :)_{\omega} &= \frac{\kappa / 4 (\kappa_p^2 + 4\omega^2)}{(2\omega^2 - (\mu - 1)\kappa \kappa_p)^2 + \omega^2 \kappa_p^2}, \\ (: \delta y^2 :)_{\omega} &= -\frac{\kappa / 4 (\kappa_p^2 + 4\omega^2)}{(2\omega^2 - \mu \kappa \kappa_p)^2 + \omega^2 (\kappa_p + 2\kappa)^2}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} (: \delta x_p \delta x :)_{\omega} &= -\frac{g\sqrt{n}\kappa (\kappa_p - 2i\omega)}{(2\omega^2 - (\mu - 1)\kappa \kappa_p)^2 + \omega^2 \kappa_p^2}, \\ (: \delta y_p \delta y :)_{\omega} &= -\frac{g\sqrt{n}\kappa (\kappa_p - 2i\omega)}{(2\omega^2 - \mu \kappa \kappa_p)^2 + \omega^2 (\kappa_p + 2\kappa)^2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Обычно в эксперименте добротности резонатора для моды накачки и сигнальной моды удовлетворяют условию $\kappa_p \gg \kappa$, и выражения (4.44) - (4.46) упрощаются следующим образом:

$$(: \delta x_p^2 :)_{\omega} = \frac{\kappa}{2\kappa_p} \frac{(\mu - 1)\kappa}{\omega^2 + (\mu - 1)^2 \kappa^2}, \quad (: \delta y_p^2 :)_{\omega} = -\frac{\kappa}{2\kappa_p} \frac{(\mu - 1)\kappa}{\omega^2 + \mu^2 \kappa^2} \quad (3.44)$$

$$(: \delta x^2 :)_{\omega} = \frac{\kappa / 4}{\omega^2 + (\mu - 1)^2 \kappa^2}, \quad (: \delta y^2 :)_{\omega} = -\frac{\kappa / 4}{\omega^2 + \mu^2 \kappa^2}, \quad (3.45)$$

$$(: \delta x_p \delta x :)_{\omega} = -\frac{g\sqrt{n}}{\kappa_p} \frac{\kappa}{\omega^2 + (\mu - 1)^2 \kappa^2}, \quad (: \delta y_p \delta y :)_{\omega} = -\frac{g\sqrt{n}}{\kappa_p} \frac{\kappa}{\omega^2 + \mu^2 \kappa^2} \quad (3.46)$$

Как видно из выражений (3.31) и (3.44) - (3.45), амплитудная квадратура выходного сигнального поля растянута (флуктуации больше уровня $1/4$, соответствующего когерентному состоянию), фазовая - сжата (флуктуации меньше $1/4$). Сжатие является частотнозависимым - оно максимально для нулевой частоты, убывает при ее увеличении и фактически пропадает на частотах больших спектральной ширины сигнальной моды. Кроме того сжатие зависит от параметра μ : оно тем больше, чем ближе режим генерации ВПГС к порогу. Что касается поля накачки, для него также наблюдается фазовое сжатие, однако оно столь невелико, что не представляет практического интереса.

3.1.5 Насколько близко возможно "подойти" к порогу?

Так как хорошее сжатие, как мы убедились, наблюдается вблизи порога генерации ВПГС, то естественным является вопрос сколь близкие к порогу генерации значения μ мы можем обсуждать. Как мы покажем, этот вопрос определяется в первую очередь экспериментальными возможностями, однако прежде чем сделать этот вывод мы должны рассмотреть возможные ограничения, связанные с применимостью используемых методов.

Как мы помним, наше решение ограничено рамками применимости метода малых фотонных флуктуаций. Так как флуктуации вблизи порога генерации могут нарастать, то необходимо выяснить, каков характер этого роста.

Мы покажем здесь, что даже при достижении значительного сжатия в фазовой квадратуре (и соответствующего растяжения амплитудной квадратуры поля), это ограничение не является принципиальным для работы с высокочастотными резонаторами.

Для оценки применимости теории определим дисперсии растянутых квадратур поля накачки и сигнального поля, проинтегрировав по частоте соответствующие внутрирезонаторные спектральные плотности (3.34), (3.36):

$$\langle \delta \hat{x}_p^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int (\delta \hat{x}_p^2)_\omega d\omega = \frac{\kappa_p + \kappa}{4\kappa_p} \quad (3.47)$$

$$\langle \delta \hat{x}^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int (\delta \hat{x}^2)_\omega d\omega = \frac{2(\mu - 1)(\kappa_p + \kappa) + \kappa_p}{8(\mu - 1)\kappa_p}, \quad (3.48)$$

При $\kappa_p \gg \kappa$ и в режиме генерации ВПГС выше порога ($\mu > 1$) выражения упрощаются:

$$\langle \delta \hat{x}_p^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (3.49)$$

$$\langle \delta \hat{x}^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{8(\mu - 1)}. \quad (3.50)$$

Видно, что для поля накачки условие малости флуктуаций выполняется, а при удо-

влетворении условия $\kappa_p \gg \kappa$ внутрирезонаторное состояние поля накачки становится когерентным (нетрудно показать, что в этом случае дисперсия фазовой квадратуры поля накачки также равна $1/4$). Выражение (3.50) необходимо сравнить со средним числом фотонов в сигнальной моде. Полученные нами решения справедливы до тех пор, пока

$$\langle \delta \hat{x}^2 \rangle \ll n, \quad (3.51)$$

которое можно переписать в виде:

$$\mu - 1 \gg \frac{1}{8n}. \quad (3.52)$$

Для высокочастотного резонатора среднее число фотонов при параметрической генерации обычно составляет $n \sim 10^9$, так что это условие очевидно выполняется для любых реальных значений μ и рассматриваемый подход применим. Так как условие (3.52) является очень "мягким" ограничением значений μ , а значит и степени сжатия фазовой квадратуры выходного излучения, то нам следует воспользоваться экспериментальными данными, показывающими возможность приближения к порогу генерации. Значения μ , фигурирующие в экспериментах, составляют на сегодня $\mu - 1 \sim 0.1$ [114]. Именно это значение мы будем использовать как оценочное в информационных приложениях.

3.2 Теория одномодового субпуассоновского лазера с захватом фазы

Первая из работ, посвященных теории субпуассоновского лазера [28] была опубликована 30 лет назад. Авторы, строили модель, основываясь на широко известном подходе Лэмба-Скалли [115] в терминах уравнения для полевой матрицы плотности. Спустя два года их идея была реализована экспериментально [30] в полупроводниковом лазере. На сегодня, наилучшие результаты по подавлению шума ниже кван-

тового предела удается достичь в низкоразмерных полупроводниковых лазерах (в частности, в вискселах, рассмотренных в Главе 1).

Субпуассоновские лазеры не получили широкого распространения в квантовых информационных приложениях в силу эффекта фазовой диффузии, присущего данным источникам излучения. Случайный набег фазы делает невозможным наблюдение квадратурного сжатия, что существенно ограничивает возможности применения лазеров в квантовых схемах.

Одной из возможностей подавить фазовую диффузию является использование внешнего электромагнитного поля в когерентном состоянии [116, 117]. Такой подход был использован в работе [118], где авторами решается задача о генерации сжатого света в цепи обратной связи. Для решения этой задачи ими выбран аппарат построения уравнения для функции распределения Вигнера. И хотя основное внимание в работе сосредоточено на исследовании роли обратной связи, некоторые из полученных там результатов представляют интерес и в свете данного обсуждения.

Две причины побуждают нас опять переформулировать квантовую теорию лазера с захватом фазы. Прежде всего, нам бы хотелось построить теорию, применимую не только к газовым, но и к полупроводниковым лазерам, поскольку именно они представляют наибольший интерес для квантовой оптики и квантовой теории информации. (Известно, что теоретический подход, основанный на построении основного уравнения применим только для газовых лазеров, где спектральная ширина моды резонатора много меньше, чем время релаксации атомной среды [119].) Мы сформулируем теорию в терминах уравнений Гайзенберга-Ланжевена. Следует отметить, что гайзенбергов формализм к тому же наиболее удобен для дальнейшего включения источников в информационные протоколы.

Кроме того, требует обсуждения вопрос о совместимости требований к внешнему синхронизирующему полю. С одной стороны оно должно быть достаточно слабым,

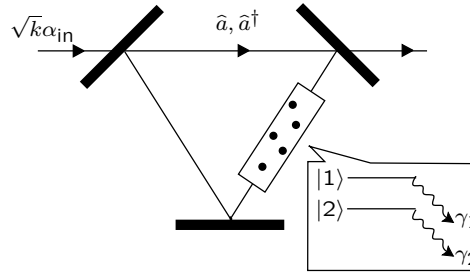


Рис. 3.1: Одномодовый лазер с захватом фазы.

чтобы не навязать собственную когерентную статистику излучению лазера и не разрушить его квантовые особенности. С другой стороны, поле должно обеспечить эффективный захват фазы, и необходимо выяснить, возможно ли реализовать захват фазы не разрушив статистику. Данный вопрос не обсуждался ранее.

3.2.1 Физическая модель и уравнения Гайзенберга-Ланжевена

Прежде всего определим физическую модель лазера, на которой будет основываться наше обсуждение (см рис. 3.1). Основные элементы модели не отличаются от рассматриваемых обычно при обсуждении лазерной теории Гайзенберга-Ланжевена [70, 71, 120]. Предполагается, что высокодобротный резонатор поддерживает только одну лазерную моду, которая описывается операторами рождения и уничтожения фотонов \hat{a}^\dagger и \hat{a} , подчиняющимися каноническим перестановочным соотношениям $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Одно из зеркал резонатора предполагается частично прозрачным, что дает возможность лазерному излучению покинуть резонатор; этот свет регистрируется фотоприемником.

Активная лазерная среда рассматривается как ансамбль невзаимодействующих двухуровневых атомов; состояние $|1\rangle$ соответствует верхнему лазерному уровню, состояние $|2\rangle$ - нижнему. Для упрощения модели мы будем предполагать, что атомный переход между этими уровнями находится в точном резонансе с модой резонатора. Времена жизни атомных состояний определяются скоростями спонтанного распада

γ_1 и γ_2 . Наиболее интересным с точки зрения квантовой статистики излучения является соотношение констант $\gamma_1 \ll \gamma_2$ [28].

Имея ввиду данную модель лазера, можно записать следующие уравнения Гайзенберга-Ланжевена:

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{\kappa}{2} (\hat{a} - a_{in}) + g\hat{P} + \hat{F}_a, \quad (3.53)$$

$$\dot{\hat{P}} = -\gamma_{\perp}\hat{P} + g(\hat{N}_1 - \hat{N}_2)\hat{a} + \hat{F}_p, \quad (3.54)$$

$$\dot{\hat{N}}_1 = R - \gamma_1\hat{N}_1 - g(\hat{a}^{\dagger}\hat{P} + \hat{a}\hat{P}^{\dagger}) + \hat{F}_1, \quad (3.55)$$

$$\dot{\hat{N}}_2 = -\gamma_2\hat{N}_2 + g(\hat{a}^{\dagger}\hat{P} + \hat{a}\hat{P}^{\dagger}) + \hat{F}_2. \quad (3.56)$$

Здесь \hat{a} и \hat{a}^{\dagger} - операторы уничтожения и рождения фотонов, упомянутые выше, \hat{P} - оператор медленно меняющейся коллективной атомной поляризации на лазерном переходе, \hat{N}_1 и \hat{N}_2 - операторы заселенностей соответствующих атомных состояний. Кроме того в уравнениях присутствуют следующие константы: спектральная ширина моды резонатора κ , константа связи g , скорости спонтанного распада γ_1 и γ_2 , скорость поперечной релаксации γ_{\perp} , и скорость некогерентной накачки на верхний лазерный уровень R .

Неоднородный член в первом уравнении $\kappa a_{in}/2$, который можно представить в виде

$$a_{in} = \sqrt{n_{in}} e^{i\varphi_{in}}, \quad (3.57)$$

обеспечивает когерентное возбуждение лазерной моды внешним классическим полем, такое что внутрирезонаторная амплитуда равна a_{in} .

Кроме члена a_{in} система уравнений (7.46)-(7.49) полностью совпадает с полученными в работах [70, 71, 120]. Отметим, что записанная система уравнений позволяет также учесть адиабатически медленное изменение фазы синхронизирующего поля, полагая $\varphi_{in} = \varphi_{in}(t)$. Нам достаточно потребовать, чтобы уширение, связанное с

диффузией фазы, было много меньше, чем κ , что обычно выполняется на практике, особенно для полупроводниковых лазеров, таких как виксел.

Неоднородные члены \hat{F} , присутствующие в уравнениях (7.46)-(7.49), отвечают шумовым процессам в лазерной системе. Они возникают из-за взаимодействия резонаторного поля и атомов со своими Ланжевеновскими резервуарами, которые для обеих подсистем представляют собой континуум мод в вакуумном состоянии. Средние значения этих операторов равны нулю, и они определяются своими парными корреляционными функциями. Используя формулу Эйнштейна, можно записать ненулевые парные корреляционные функции:

$$\langle \hat{F}_a(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle = \kappa \delta(t - t'), \quad (3.58)$$

$$\langle \hat{F}_1(t) \hat{F}_1(t') \rangle = [\gamma_1 \langle N_1 \rangle + R(1 - p)] \delta(t - t'), \quad (3.59)$$

$$\langle \hat{F}_2(t) \hat{F}_2(t') \rangle = \gamma_2 \langle N_2 \rangle \delta(t - t'), \quad (3.60)$$

$$\langle \hat{F}_p^\dagger(t) \hat{F}_p(t') \rangle = [(2\gamma_\perp - \gamma_1) \langle N_1 \rangle + R] \delta(t - t'), \quad (3.61)$$

$$\langle \hat{F}_p(t) \hat{F}_p^\dagger(t') \rangle = (2\gamma_\perp - \gamma_2) \langle N_2 \rangle \delta(t - t'), \quad (3.62)$$

$$\langle \hat{F}_p(t) \hat{F}_1(t') \rangle = \gamma_1 \langle P \rangle \delta(t - t') \quad (3.63)$$

$$\langle \hat{F}_2(t) \hat{F}_p(t') \rangle = \gamma_2 \langle P \rangle \delta(t - t'). \quad (3.64)$$

Как показано в работах [70, 71, 120], данная модель позволяет ввести статистику накачки. Ее можно смоделировать, вводя распределение моментов времени, в которые возбужденные атомы попадают в резонатор. Процесс моделируется одним параметром $p \leq 1$, значение $p = 1$ отвечает регулярной накачке, приводящей к субпуассоновской статистике фотонов, $p = 0$ соответствует пуассоновской накачке, а $p < 0$ - супер-пуассоновской статистике.

В дальнейшем, чтобы обсуждать статистику фототока, нам понадобятся не толь-

ко корреляторы (7.50)-(7.54), но также их нормально упорядоченные средние:

$$\langle : \hat{F}_1(t) \hat{F}_1(t') : \rangle = \left[\gamma_1 \langle \hat{N}_1 \rangle - g \langle \hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger \rangle + R(1-p) \right] \delta(t-t'), \quad (3.65)$$

$$\langle : \hat{F}_2(t) \hat{F}_2(t') : \rangle = \left[\gamma_2 \langle N_2 \rangle - g \langle \hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger \rangle \right] \delta(t-t'), \quad (3.66)$$

$$\langle : \hat{F}_1(t) \hat{F}_2(t') : \rangle = g \langle \hat{a}^\dagger \hat{P} + \hat{a} \hat{P}^\dagger \rangle \delta(t-t'), \quad (3.67)$$

$$\langle : \hat{F}_p^\dagger(t) \hat{F}_p(t') : \rangle = [(2\gamma_\perp - \gamma_1) \langle N_1 \rangle + R] \delta(t-t'), \quad (3.68)$$

$$\langle : \hat{F}_p(t) \hat{F}_p(t') : \rangle = 2g \langle \hat{a} \hat{P} \rangle \delta(t-t'), \quad (3.69)$$

$$\langle : \hat{F}_p(t) \hat{F}_2(t') : \rangle = \gamma_2 \langle P \rangle \delta(t-t'). \quad (3.70)$$

Здесь записаны все корреляторы отличные от нуля. Таким образом, определив модель исследуемой системы мы можем перейти к решению уравнений (7.46)-(7.49), используя возможные приближения.

Прежде всего мы исключим адиабатически поляризацию \hat{P} и заселенность нижнего уровня \hat{N}_2 . Такое исключение основывается на требовании $\gamma_2, \gamma_\perp \gg \gamma_1, \kappa$. Отметим, что указанное соотношение спектральных параметров является обычным для полупроводниковых лазеров. В результате, система уравнений существенно упрощается и сведется к системе двух уравнений: для заселенности верхнего атомного состояния \hat{N}_1 и амплитуды поля \hat{a} :

$$\dot{\hat{N}}_1 = -\gamma_1 \hat{N}_1 - c \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{N}_1 + R + \hat{\xi}_N(t), \quad c = 2g^2/\gamma_\perp, \quad (3.71)$$

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{\kappa}{2} (\hat{a} - a_{in}) + \frac{c}{2} \hat{N}_1 \hat{a} + \hat{\xi}_a(t), \quad (3.72)$$

где новые шумовые источники определяются равенствами:

$$\hat{\xi}_a = \hat{F}_a + g/\gamma_\perp \hat{F}_p - g^2/\gamma_2^2 \hat{F}_2 \hat{a}, \quad (3.73)$$

$$\hat{\xi}_N = \hat{F}_1 + c/\gamma_2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{F}_2 - g/\gamma_\perp (\hat{a}^\dagger \hat{F}_p + \hat{a} \hat{F}_p^\dagger). \quad (3.74)$$

Однако, это все еще система нелинейных дифференциальных уравнений, которая не решается аналитически. Следующее приближение позволит нам линеаризовать уравнения. Оно основывается на предположении, что в стационарном режиме переменные

испытывают лишь малые отклонения от своих средних значений, соответствующих полуклассическим решениям. Формально это означает, что операторы представимы в виде сумм слагаемых

$$\hat{a}(t) = (\sqrt{n} + \delta\hat{a}(t))e^{i\varphi_{in}}, \quad \hat{N}_1(t) = N_1 + \delta\hat{N}_1(t), \quad (3.75)$$

для которых выполняются соотношения

$$\sqrt{n} \gg \delta\hat{a}(t), \quad N_1 \gg \delta\hat{N}_1(t). \quad (3.76)$$

Необходимо подчеркнуть, что первое из этих неравенств справедливо только если в лазере подавлена фазовая диффузия.

Нетрудно найти полуклассические стационарные решения N_1, \bar{a} . Для лазера, работающего в режиме насыщения, т.е. когда $\gamma_1 \ll cn$, они имеют вид:

$$N_1 = \frac{R}{\gamma_1}, \quad \bar{a} = \sqrt{n} e^{i\varphi_{in}}. \quad (3.77)$$

Стационарная вещественная амплитуда \sqrt{n} удовлетворяет следующему квадратному уравнению:

$$\sqrt{n} (\sqrt{n} - \sqrt{n_{in}}) = \frac{R}{\kappa}. \quad (3.78)$$

Удобно ввести параметр

$$\mu = \sqrt{\frac{n_{in}}{n}}, \quad (3.79)$$

характеризующий долю фотонов внешнего синхронизирующего поля в полной выходной мощности лазерного излучения. Как было сказано выше, мы будем полагать, что мощность синхронизирующего поля очень мала, т.е.

$$\mu \ll 1. \quad (3.80)$$

Тогда уравнение (A.14) имеет решение $n \approx R/\kappa$.

3.2.2 Линеаризация уравнений относительно малых флуктуаций

Выполнение условий (7.65) позволяет линеаризовать адиабатические уравнения (7.61)-(7.62) и записать следующую систему уравнений:

$$\delta\dot{\hat{x}} = -\kappa\mu/2 \delta\hat{x} + c\sqrt{n}/2 \delta\hat{N}_1 + \hat{\xi}_x(t), \quad (3.81)$$

$$\delta\dot{\hat{y}} = -\kappa\mu/2 \delta\hat{y} + \hat{\xi}_y(t), \quad (3.82)$$

$$\delta\dot{\hat{N}}_1 = -\Gamma_1 \delta\hat{N}_1 - 2\kappa(1-\mu)\sqrt{n} \delta\hat{x} + \hat{\xi}_N(t), \quad \Gamma_1 = \gamma_1 + cn. \quad (3.83)$$

Здесь для дальнейшего удобства вместо оператора флуктуации амплитуды $\delta\hat{a}$ мы ввели два эрмитовских оператора квадратур

$$\delta\hat{x} = \frac{1}{2} (\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger), \quad \delta\hat{y} = -\frac{i}{2} (\delta\hat{a} - \delta\hat{a}^\dagger). \quad (3.84)$$

Необходимо отметить, что эти операторы не вполне совпадают с квадратурами поля внутри резонатора. В самом деле, согласно (4.60), необходимо учесть дополнительный экспоненциальный множитель, связанный с фазой внешнего поля. Тогда квадратурные компоненты будут иметь вид:

$$\delta\hat{x} = \frac{1}{2} (e^{-i\varphi_{in}} \delta\hat{a} + e^{i\varphi_{in}} \delta\hat{a}^\dagger), \quad \delta\hat{y} = -\frac{i}{2} (e^{-i\varphi_{in}} \delta\hat{a} - e^{i\varphi_{in}} \delta\hat{a}^\dagger). \quad (3.85)$$

Отметим, что эти операторы имеют различный физический смысл в зависимости от значения фазового множителя φ_{in} . Однако их можно интерпретировать как обычные амплитудную и фазовую квадратуры, но в системе координат, развернутой на угол φ_{in} (см. рис.3.2). Нетрудно видеть, что при $\varphi_{in} = 0$ определения (3.84) и (3.85) совпадают.

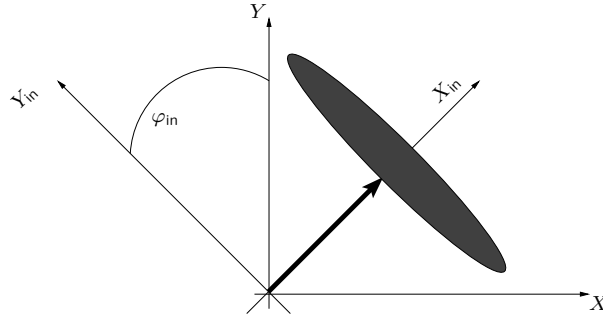


Рис. 3.2: Амплитудная и фазовая квадратуры в повернутой системе координат.

Новые источники шума в уравнениях (3.81)-(3.83) имеют вид:

$$\hat{\xi}_x = \frac{1}{2}(e^{-i\varphi_{in}} \hat{F}_a + e^{i\varphi_{in}} \hat{F}_a^\dagger) + \frac{g}{2\gamma_\perp} (e^{-i\varphi_{in}} \hat{F}_p + e^{i\varphi_{in}} \hat{F}_p^\dagger) - \frac{c\sqrt{n}}{2\gamma_2} \hat{F}_2, \quad (3.86)$$

$$\hat{\xi}_y = -\frac{i}{2}(e^{-i\varphi_{in}} \hat{F}_a - e^{i\varphi_{in}} \hat{F}_a^\dagger) - \frac{ig}{2\gamma_\perp} (e^{-i\varphi_{in}} \hat{F}_p - e^{i\varphi_{in}} \hat{F}_p^\dagger) \quad (3.87)$$

$$\hat{\xi}_N = \hat{F}_1 - \frac{g\sqrt{n}}{\gamma_\perp} (e^{-i\varphi_{in}} \hat{F}_p + e^{i\varphi_{in}} \hat{F}_p^\dagger) + \frac{cn}{\gamma_2} \hat{F}_2. \quad (3.88)$$

Чтобы найти частное решение неоднородных линейных уравнений (3.81)-(3.83) удобно перейти к фурье-представлению. Определим преобразование Фурье для функции $G(t)$ следующим образом:

$$G_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\omega t} dt, \quad G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.89)$$

Тогда, уравнения для фурье-компонент будут иметь вид:

$$-i\omega \delta \hat{N}_{1\omega} = -\Gamma_1 \delta \hat{N}_{1\omega} - 2\kappa(1-\mu)\sqrt{n} \delta \hat{x}_\omega + \hat{\xi}_{N\omega}, \quad (3.90)$$

$$-i\omega \delta \hat{x}_\omega = -\kappa\mu/2 \delta \hat{x}_\omega + c/2 \sqrt{n} \delta \hat{N}_{1\omega} + \hat{\xi}_{x\omega}, \quad (3.91)$$

$$-i\omega \delta \hat{y}_\omega = -\kappa\mu/2 \delta \hat{y}_\omega + \hat{\xi}_{y\omega}. \quad (3.92)$$

Решая эти алгебраические уравнения, получим для спектральных компонент квадратур флуктуаций амплитуды поля

$$\delta \hat{x}_\omega = \frac{c\sqrt{n}/2 \hat{\xi}_{N\omega} + (\Gamma_1 - i\omega) \hat{\xi}_{x\omega}}{(\kappa\mu/2 - i\omega)(\Gamma_1 - i\omega) + cn\kappa(1-\mu)}, \quad \delta \hat{y}_\omega = \frac{\hat{\xi}_{y\omega}}{\kappa\mu/2 - i\omega}, \quad (3.93)$$

и флуктуаций заселенности

$$\delta\hat{N}_{1\omega} = \frac{-2\kappa(1-\mu)\sqrt{n}\hat{\xi}_{x\omega} + (\kappa\mu/2 - i\omega)\hat{\xi}_{N\omega}}{(\kappa\mu/2 - i\omega)(\Gamma_1 - i\omega) + cn\kappa(1-\mu)}. \quad (3.94)$$

3.2.3 Среднеквадратичные флуктуации квадратур поля внутри и снаружи резонатора

В стационарном потоке для любой пары операторов A_ω и B_ω корреляционная функция может быть записана в виде:

$$\langle \delta\hat{A}_\omega \delta\hat{B}_{\omega'} \rangle = (\delta A \delta B)_\omega \delta(\omega + \omega'). \quad (3.95)$$

Множители перед дельта-функциями называют спектральными плотностями.

Найдем спектральные плотности стохастических источников в уравнениях (3.90)-(3.92):

$$(\xi_x^2)_\omega = (\xi_y^2)_\omega = 2i(\xi_y\xi_x)_\omega = -2i(\xi_x\xi_y)_\omega = \kappa/2 (1 - \mu/2). \quad (3.96)$$

$$(\xi_N^2)_\omega = \kappa(1 - \mu)/c \Gamma_1(2 - p). \quad (3.97)$$

$$(\xi_x\xi_N)_\omega = (\xi_N\xi_x)_\omega = -i(\xi_y\xi_N)_\omega = i(\xi_N\xi_y)_\omega = -\kappa/2 (1 - \mu) \sqrt{n}. \quad (3.98)$$

Это позволяет нам напрямую вычислить среднеквадратичные флуктуации внутрирезонаторных квадратур поля:

$$(\delta x^2)_\omega = \frac{\kappa(1 - \mu/2)}{2} \frac{\omega^2 + \Gamma_1^2 - cn\Gamma_1 p/2 (1 - \mu)/(1 - \mu/2)}{(\omega^2 - cn\kappa(1 - \mu) - \kappa\mu/2\Gamma_1)^2 + \omega^2(\Gamma_1 + \kappa\mu/2)^2}, \quad (3.99)$$

$$(\delta y^2)_\omega = \frac{\kappa(1 - \mu/2)}{2} \frac{1}{\omega^2 + \kappa^2\mu^2/4}. \quad (3.100)$$

В режиме насыщения $\gamma_1 \ll cn \rightarrow \Gamma_1 \approx cn$ выражение для $(\delta x^2)_\omega$ упрощается:

$$(\delta x^2)_\omega = \frac{\kappa}{2} \frac{1 - \mu/2 - (1 - \mu)p/2}{\kappa^2(1 - \mu/2)^2 + \omega^2}. \quad (3.101)$$

Отметим, что несмотря на то, что в наших расчетах параметр μ предполагается малым, мы обязаны удерживать здесь эту величину, поскольку члены старшего порядка сокращаются (например, при анализе соотношения неопределенностей).

Проанализируем теперь среднеквадратичные флуктуации квадратур поля снаружи резонатора. Статистика именно этого поля представляет реальный интерес, т.к. именно она может быть подвергнута проверке или использована для квантовых приложений. В то время как внутрирезонаторный свет описывается нормированной амплитудой $\hat{a}(t)$, такой что $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ дает среднее число фотонов внутри резонатора, амплитуда поля снаружи резонатора $\hat{A}(t)$ нормирована таким образом, что $\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle$ имеет смысл среднего потока фотонов в секунду через поперечное сечение выходного луча. Граничное условие на выходном зеркале можно записать в форме [109]:

$$\hat{A}(t) = \sqrt{\kappa} \hat{a}(t) - \hat{A}_{vac}(t). \quad (3.102)$$

Это условие учитывает не только поле покидающее резонатор, но и вакуумное поле, отраженное выходным зеркалом. Выходное поле удовлетворяет коммутационным соотношениям:

$$[\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t')] = \delta(t - t'), \quad [\hat{A}(t), \hat{A}(t')] = 0. \quad (3.103)$$

Вводя снова квадратурные компоненты поля снаружи резонатора, как вещественную и мнимую части амплитуды,

$$\hat{X} = \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger), \quad \hat{Y} = \frac{1}{2i} (\hat{A} - \hat{A}^\dagger), \quad (3.104)$$

можно выразить среднеквадратичные флуктуации квадратур снаружи резонатора, через внутрирезонаторные характеристики:

$$(\delta X^2)_\omega = \frac{1}{4} + \kappa (: \delta x^2 :)_\omega, \quad (\delta Y^2)_\omega = \frac{1}{4} + \kappa (: \delta y^2 :)_\omega, \quad (3.105)$$

где символ $(: \dots :)_\omega$ означает процедуру нормального упорядочивания. Рассчитав нормально упорядоченные спектральные плотности для источников шума

$$\begin{aligned} (: \xi_x^2 :)_\omega &= (: \xi_y^2 :)_\omega = \kappa/2(1 - \mu), \\ (: \xi_x \xi_N :)_\omega &= -\kappa(1 - \mu)\sqrt{n}, \\ (: \xi_N^2 :)_\omega &= \kappa(1 - \mu)/c \Gamma_1(2 - p), \end{aligned} \quad (3.106)$$

мы можем в явном виде записать искомые полевые характеристики:

$$(: \delta x^2 :)_\omega = \frac{\kappa(1 - \mu)}{2} \frac{\omega^2 + \Gamma_1^2 - cn\Gamma_1(1 + p/2)}{(\omega^2 - cn\kappa(1 - \mu) - \kappa\mu/2\Gamma_1)^2 + \omega^2(\Gamma_1 + \kappa\mu/2)^2}, \quad (3.107)$$

$$(: \delta y^2 :)_\omega = \frac{\kappa(1 - \mu)}{2} \frac{1}{\omega^2 + \kappa^2\mu^2/4}. \quad (3.108)$$

В режиме насыщения выражение (3.107) упрощается:

$$(: \delta x^2 :)_\omega = -\frac{\kappa(1 - \mu)p}{4} \frac{1}{\kappa^2(1 - \mu/2)^2 + \omega^2}. \quad (3.109)$$

На рис. 3.3 можно видеть как изменяется область неопределенности выходного излучения в зависимости от частоты.

Результаты этого расчета будут использованы ниже в главе, посвященной информационным приложениям широкополосного сжатого света.

3.2.4 Захват фазы лазерного излучения

Одна из главных целей рассмотрения теории синхронизованного субпуассоновского лазера - понять как внешнее синхронизирующее поле влияет на статистику лазерного излучения. Мощность синхронизирующего поля должна быть не высока. В противном случае оно будет навязывать собственную пуассоновскую статистику лазерному излучению, а значит разрушит сжатие. Именно по этой причине мы полагали в нашей теории $\mu \ll 1$.

Однако подчиняясь данному ограничению, мы рискуем тем, что захват фазы, ради которого вводится внешнее поле, не будет в полной мере реализован. То есть,

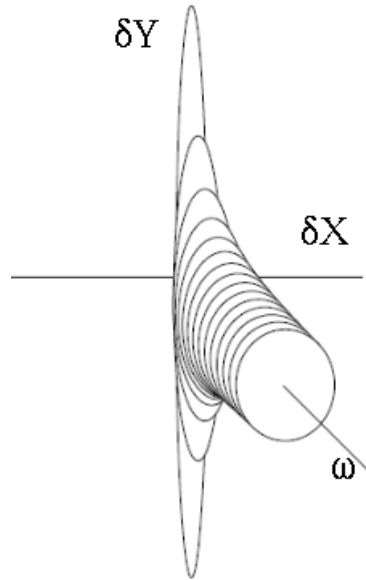


Рис. 3.3: Эллипс неопределенности выходного излучения лазера с захватом фазы в зависимости от частоты.

хотя фаза и будет захвачена, ее флуктуации $\delta\varphi$ окажутся достаточно высоки (порядка единицы или даже больше), что сделает данную систему непригодной для целей квантовой оптики. Докажем, что неравенства $\mu \ll 1$ и $\delta\varphi \ll 1$ могут быть удовлетворены одновременно.

Схематическое изображение на рис. 3.4 демонстрирует справедливость равенства:

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle = \langle \delta\hat{y}^2 \rangle / n. \quad (3.110)$$

Найдем интегральное значение дисперсии y -квadrатуры, проинтегрировав спектральное выражение по частоте:

$$\langle \delta\hat{y}^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int (\delta y^2)_\omega d\omega = \sqrt{\frac{n}{4n_{in}}} \gg 1, \quad (3.111)$$

где спектральная среднеквадратичная флуктуация квадратуры $(\delta y^2)_\omega$ определяется соотношением (3.100). Совмещая этот результат с равенством (3.110), получим

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4n_{in}n}}. \quad (3.112)$$

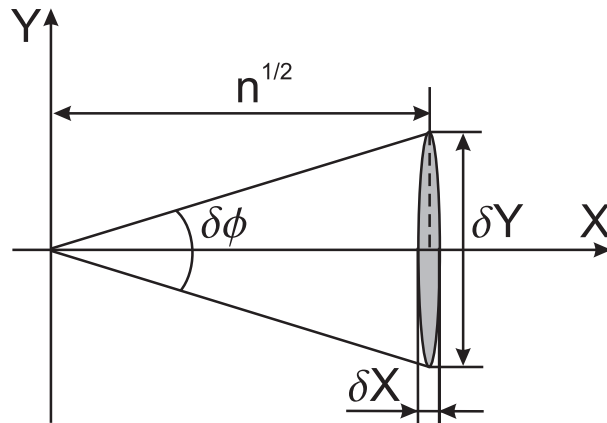


Рис. 3.4: Среднеквадратичные флуктуации амплитуды и фазы

Таким образом, условие $\langle \delta\varphi^2 \rangle \ll 1$ выполняется всегда, когда $n_{in} \gg 1/n$. Поскольку для лазерной генерации мы полагаем $n \gg 1$, то захват фазы реализуется и не противоречит другим требованиям.

Заключение к главе 3. Имея целью построение модели эффективного источника широкополосного сжатого света, необходимого нам далее как ключевой ресурс квантовых информационных схем, мы исследовали квантовые свойства субпуассоновского лазера с фазовой синхронизацией внешним полем и вырожденного параметрического генератора света, работающего в надпороговом режиме.

В отличие от лазера, ВПГС не требует специального механизма синхронизации, поскольку фаза внешнего классического поля, играющего роль вынуждающей силы генератора, определяет фазу волны накачки, которая, в свою очередь, однозначно связана с фазой сигнальной волны.

Излучение ВПГС оказывается сжатым по фазовой квадратуре (и растянутым по амплитудной квадратуре), притом сжатие это тем больше, чем ближе режим генерации к порогу (рассматривается только надпороговая ситуация). В этой связи возникает вопрос о границах применимости полученных решений. Мы показали, что полученные решения справедливы во всем диапазоне реалистичных значений пара-

метров, а степень сжатия ограничивается только экспериментальными возможностями приближения к порогу генерации.

Субпуассоновский лазер, синхронизированный достаточно слабым когерентным внешним электромагнитным полем, остается эффективным источником неклассического света, однако обнаруживает уже не субпуассоновскую статистику, а амплитудное сжатие, поскольку диффузия фазы оказывается полностью подавленной.

Встает вопрос о совместимости требований к внешнему синхронизирующему полю: с одной стороны оно должно быть достаточно слабым, чтобы не навязать собственную когерентную статистику излучению лазера и не разрушить его квантовые особенности, с другой - поле должно обеспечить эффективный захват фазы. Мы показали, что данные требования не противоречивы. Степень сжатия амплитудной квадратуры ограничивается степенью регулярности накачки, а в случае полностью регулярной накачки - мощностью синхронизирующего поля.

Глава 4

Пиксельный источник пространственно многомодового перепутанного света

В этой главе мы обсудим пространственно многомодовый источник света с неклассической статистикой излучения, сформированный как массив пикселей, каждый из которых представляет собой субпуассоновский лазер или параметрический генератор света. Мы обсудим в деталях разработанный нами метод детектирования пространственно многомодового излучения, позволяющий избежать сложностей гомодинного приема [G12, G13].

Наряду с широкополосными источниками квантового света, заслуженное внимание получила концепция пространственно многомодового сжатого света [121], доказавшая свою состоятельность как в квантовой оптике, так и в квантовой теории информации. Именно на использовании пространственно многомодового сжатого света построены схемы квантовой голографической телепортации [122], фантомных изображений [123–125], квантового плотного кодирования [G5].

Наиболее распространенным методом измерения такого света является метод *гомодинного детектирования* (ГД) (в частности, балансного гомодинного детектирования). Этот метод позволяет выделять любую требуемую квадратурную компоненту

поля посредством выбора подходящего локального осциллятора [126, 127]. Однако, схема ГД становится трудно осуществимой практически в квантовых задачах оптических изображений, поскольку требует создания нетривиальных пространственных профилей локального осциллятора (именно смещение с полем "правильной" формы позволяет уменьшить шумы ниже квантового предела). Здесь мы предложим метод детектирования пространственно-многомодового света, позволяющий обойти трудности, возникающие в гомодинном приеме, и применимый для широкого класса задач квантовой оптики.

Мы рассмотрим две измерительных схемы: с одиночным когерентным источником сжатого света и с двумя источниками. (Мы будем говорить о когерентности света в смысле наличия большой когерентной составляющей амплитуды, при этом характер флуктуаций будет определен особо.) В обоих случаях измерение будет производиться в дальней зоне. Во второй схеме два луча будут смешиваться на светоделительной пластине. Таким образом, в первой схеме мы будем оперировать сжатым светом, а во второй - перепутанным. Мы покажем, что обе схемы позволяют осуществить выделение квадратур поля без гомодинирования. Мы будем основывать наше исследование на методах измерения квантовых свойств световых полей в дальней зоне, изложенных в работах [123–125, 128, 129]. Принципиально важным элементом предлагаемого нами подхода является использование когерентных источников света, таких как лазеры с захватом фазы или параметрических генераторов света, работающих в надпороговом режиме. На основе таких источников будет сконструирован пиксельный источник [130, 131], обладающий интересными квантовыми особенностями.

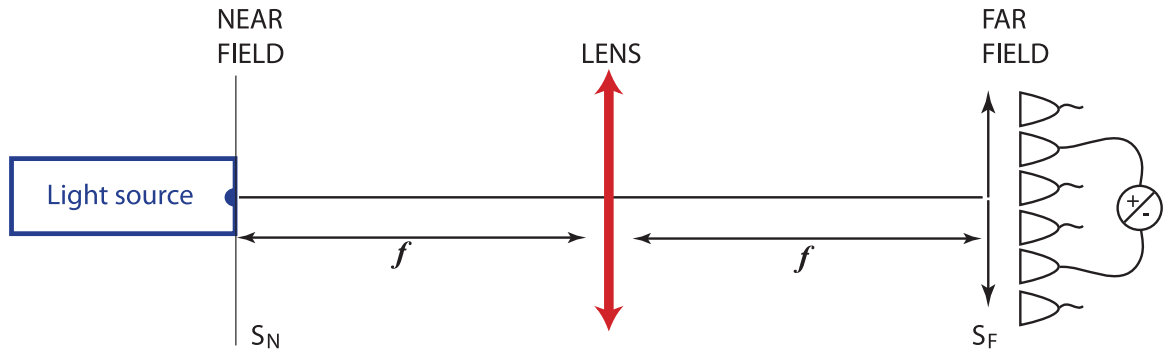


Рис. 4.1: Схема прямого детектирования сжатого света в дальней зоне с одиночным когерентным источником. Обозначения на рисунке: f - фокусное расстояние.

4.1 Прямое измерение квадратурных компонент поля в дальней зоне

4.1.1 Схема с одиночным источником яркого когерентного света

Поскольку основной интерес нашего исследования лежит в области квантовой оптики, мы будем говорить об источниках сжатого и перепутанного света. Однако, представленная здесь теория справедлива для полей в любом квантовом состоянии, а также для классических полей.

Рассмотрим две физические ситуации, представленные схематически на рис. 4.1 и рис.7.13. В первой схеме мы будем следить за четной и нечетной составляющими фототока при детектировании луча света с произвольным поперечным распределением интенсивности. Во второй схеме тот же подход будет применен для исследования в более сложной конфигурации с двумя лучами, генерируемыми двумя статистически независимыми источниками. Такая схема позволяет организовать перепутывание лучей, если исходно их квадратуры сжаты во взаимно-ортогональных направлениях.

Сделаем следующие предположения относительно источников сжатого света. Прежде всего, это должны быть источники когерентного (классического или неклассического) яркого света. Это означает, что гайзенбергову амплитуду $\hat{E}_N(\vec{r}, t)$ можно

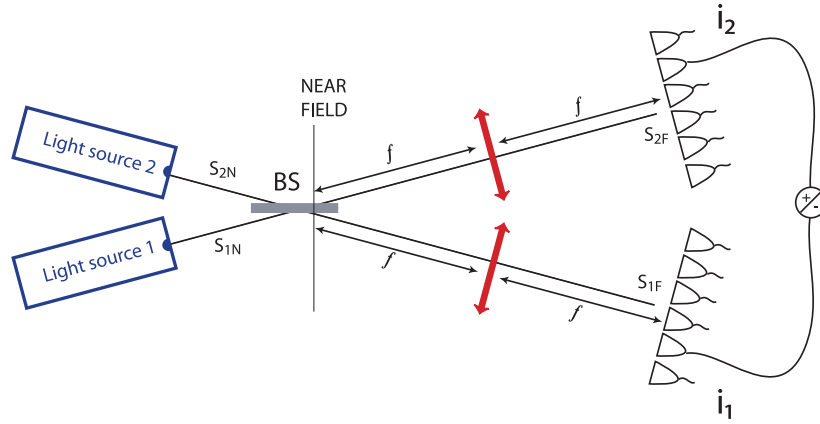


Рис. 4.2: Схема прямого детектирования перепутанных лучей света в дальней зоне с двумя когерентными источниками. Обозначения на рисунке: BS - светоделительная пластина, f - фокусное расстояние.

представить в виде:

$$\hat{E}_N(\vec{r}, t) = \langle \hat{E}_N(\vec{r}) \rangle + \delta \hat{E}_N(\vec{r}, t), \quad \langle \hat{E}_N(\vec{r}) \rangle \gg \delta \hat{E}_N(\vec{r}, t). \quad (4.1)$$

Здесь и далее нижний индекс $N(F)$ используется для указания на ближнюю (дальнюю) зону. Мы будем рассматривать только стационарные световые потоки, а значит первое слагаемое не зависит от времени t .

Луч света на выходе из источника описывается гайзенберговой амплитудой $\hat{E}_N(\vec{r}, t)$. В соответствии с представлением (4.1), квантовое состояние света в первом приближении можно считать когерентным, полагая, что средняя амплитуда $\langle \hat{E}_N(\vec{r}, t) \rangle$ равна нулю. Большой интерес для нас представляют флуктуации $\delta \hat{E}_N(\vec{r}, t)$. Именно от них зависит, будет ли статистика света классической или не классической. Пока мы не будем определять их свойства, оставляя квантовое состояние не вполне определенным, что позволит нам построить теорию в общем виде.

В приближении квази-монохроматической квази-плоской бегущей волны, поле можно представить в виде:

$$\hat{E}_N(z, \vec{\rho}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 c}} e^{ik_0 z - i \omega_0 t} \hat{S}_N(\vec{\rho}, t). \quad (4.2)$$

Оператор $\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)$ отвечает амплитуде поля, нормированной таким образом, что среднее значение $\langle \hat{S}^\dagger \hat{S} \rangle$ имеет смысл плотности потока фотонов в *сек* через $см^2$. При распространении в свободном пространстве эта амплитуда подчиняется каноническим перестановочным соотношениям:

$$\left[\hat{S}_N(\vec{\rho}, t), \hat{S}_N^\dagger(\vec{\rho}', t') \right] = \delta^2(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta(t - t'), \quad \left[\hat{S}_N(\vec{\rho}, t), \hat{S}_N(\vec{\rho}', t') \right] = 0. \quad (4.3)$$

Мы будем полагать, что источники света обладают цилиндрической симметрией, то есть,

$$\langle \hat{S}_N(\vec{\rho}) \rangle = \langle \hat{S}_N(-\vec{\rho}) \rangle. \quad (4.4)$$

В схеме, изображенной на рис. 4.1, линза расположена так, что источником света и плоскость детектирования, находятся в ее главных фокусах. Тогда поле перед фотодетектором можно рассматривать как поле в дальней зоне. Обозначим соответствующую нормированную амплитуду $\hat{S}_F(\vec{\rho}, t)$. Поля в дальней и ближней зонах связаны интегральным преобразованием (см., например, [123]):

$$\hat{S}_F(\vec{\rho}, t) = -\frac{i}{\lambda f} \int d^2 \rho' \hat{S}_N(\vec{\rho}', t) e^{-i\vec{Q}\vec{\rho}'} = -\frac{2\pi i}{\lambda f} \hat{s}_N(\vec{Q}, t), \quad \vec{Q} = \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{\rho}, \quad (4.5)$$

где $\hat{s}_N(\vec{Q}, t)$ - это фурье-образ функции $\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)$. Здесь и далее в этой главе мы будем обозначать заглавными буквами переменные в координатном пространстве, а их фурье-образы - соответствующими прописными буквами, т.е.,

$$g(\vec{q}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \rho G(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \quad \text{and} \quad G(\vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2 q g(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{\rho}}. \quad (4.6)$$

Очевидно, для амплитуд $\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)$ и $\hat{S}_F(\vec{\rho}, t)$ должны выполняться соотношения, аналогичные формуле (4.1).

Когда в ближней зоне применяется схема балансного ГД (см. рис. 3) оператор флуктуаций фототока $\delta \hat{i} = \hat{i} - \langle \hat{i}_N \rangle$ имеет вид:

$$\delta \hat{i}_N(\vec{\rho}, t) = \beta^*(\vec{\rho}) \delta \hat{S}_N(\vec{\rho}, t) + \beta(\vec{\rho}) \delta \hat{S}_N^\dagger(\vec{\rho}, t), \quad (4.7)$$

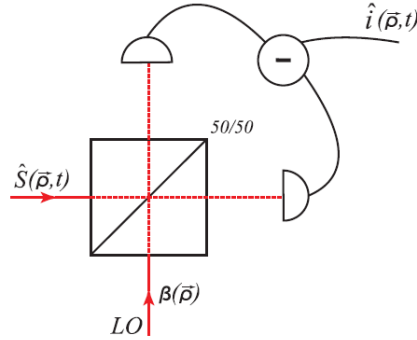


Рис. 4.3: Балансное гомодинное детектирование.

где β - комплексная амплитуда локального осциллятора. Понятно, что варьируя фазу β мы можем следить за любой из квадратур интересующего нас сигнала. Этот результат хорошо известен и не требует дальнейшего пояснения. Сравним его с результатом прямого измерения флуктуаций фототока в ближней зоне. Предполагая для простоты единичную эффективность работы детекторов, в отсутствие аппаратных потерь, оператор фототока записывается в форме

$$\hat{i}_N(\vec{\rho}, t) = \hat{S}_N^\dagger(\vec{\rho}, t)\hat{S}_N(\vec{\rho}, t). \quad (4.8)$$

Тогда, в случае когерентного излучения, для флуктуаций фототока получим:

$$\delta\hat{i}_N(\vec{\rho}, t) = \langle\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)\rangle^* \delta\hat{S}_N(\vec{\rho}, t) + \langle\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)\rangle \delta\hat{S}_N^\dagger(\vec{\rho}, t). \quad (4.9)$$

Здесь мы сохранили лишь члены первого порядка малости и отбросили квадратичный член $\delta\hat{S}_N^\dagger(\vec{\rho}, t)\delta\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)$ как пренебрежимо малый. Полученная формула по виду напоминает выражение (7.15). Однако, видно, что в данном случае мы теряем возможность контролировать, какую из квадратур измерять. Амплитуда $\langle\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)\rangle$ играет роль локального осциллятора, но измеряется таким осциллятором всегда только амплитудная квадратура.

В отличие от этого, если измерение проводится в дальней зоне, мы снова приобретаем возможность выбора измеряемой квадратурной компоненты поля - фазовой или

амплитудной. В самом деле, флуктуации фототока при детектировании в дальней зоне имеют вид:

$$\delta \hat{i}_F(\vec{\rho}, t) = \langle \hat{S}_F(\vec{\rho}) \rangle^* \delta \hat{S}_F(\vec{\rho}, t) + \langle \hat{S}_F(\vec{\rho}) \rangle \delta \hat{S}_F^\dagger(\vec{\rho}, t). \quad (4.10)$$

Подставляя (7.132), получим

$$\delta \hat{i}_F(\vec{\rho}, t) = \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^2 \left[\langle \hat{s}_N(\vec{Q}) \rangle^* \delta \hat{s}_N(\vec{Q}, t) + \langle \hat{s}_N(\vec{Q}) \rangle \delta \hat{s}_N^\dagger(\vec{Q}, t) \right]. \quad (4.11)$$

Чтобы упростить математические преобразования положим $\langle \hat{S}_N(\vec{\rho}, t) \rangle = \langle \hat{S}_N(\vec{\rho}, t) \rangle^*$. Тогда, принимая во внимание цилиндрическую симметрию источника (7.131), можем записать $\langle \hat{s}_N(\vec{Q}, t) \rangle = \langle \hat{s}_N(\vec{Q}, t) \rangle^*$, то есть,

$$\delta \hat{i}_F(\vec{\rho}, t) = \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^2 \langle \hat{s}_N(\vec{Q}) \rangle \left[\delta \hat{s}_N(\vec{Q}, t) + h.c. \right]. \quad (4.12)$$

Определим квадратурные компоненты поля в ближней зоне $\hat{X}_N(\vec{\rho}, t)$ и $\hat{Y}_N(\vec{\rho}, t)$:

$$\hat{S}_N(\vec{\rho}, t) = \hat{X}_N(\vec{\rho}, t) + i \hat{Y}_N(\vec{\rho}, t) \quad (4.13)$$

и, соответственно, в фурье-пространстве:

$$\hat{s}_N(\vec{Q}, t) = \hat{x}_N(\vec{Q}, t) + i \hat{y}_N(\vec{Q}, t) \quad (4.14)$$

Тогда, в предположении вещественности полей,

$$\langle \hat{s}_N(\vec{Q}) \rangle = \langle \hat{s}_N(\vec{Q}) \rangle^* = \langle \hat{x}_N(\vec{Q}, t) \rangle, \quad (4.15)$$

Видно, что в этом случае в выражение для фототока (7.138) дают вклад обе квадратуры, и вклад одной не отделим от вклада другой. Такое измерение неприемлемо для анализа квадратур.

Давайте теперь изменим процедуру детектирования, перейдя от измерения всего фототока к анализу его четной и нечетной частей по-отдельности. Четная (нечетная) часть пропорциональна сумме (разности) фототоков:

$$\delta \hat{i}_\pm(\vec{\rho}, t) = \delta \hat{i}_F(\vec{\rho}, t) \pm \delta \hat{i}_F(-\vec{\rho}, t). \quad (4.16)$$

Тогда не трудно получить

$$\delta \hat{i}_+(\vec{\rho}, t) = 2 \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^2 \langle \hat{x}_N(\vec{Q}) \rangle \left[\delta \hat{x}_N(\vec{Q}, t) + h.c. \right], \quad (4.17)$$

$$\delta \hat{i}_-(\vec{\rho}, t) = 2 \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^2 \langle \hat{x}_N(\vec{Q}) \rangle i \left[\delta \hat{y}_N(\vec{Q}, t) - h.c. \right]. \quad (4.18)$$

Как видим, данная измерительная процедура опять, как и ГД, обеспечивает нам возможность выбора измеряемой квадратуры поля. Однако, в отличие от ГД, здесь измеряемыми являются не сами квадратуры, но только их вещественная и мнимая части. Как известно, существует математическая процедура, основанная на теореме Коши, связывающей вещественную и мнимую части аналитической функции, которая, в принципе, позволяет полностью восстановить сигнал. Однако, вместо использования этого непростого подхода, мы предлагаем рассмотреть иную конфигурацию измерения, приводящую к желаемому результату.

4.1.2 Схема с двумя когерентными источниками

Пусть два независимых когерентных источника испускают два луча света (см. рис.7.13), описываемых в ближней зоне медленно меняющимися гайзенберговскими амплитудами $\hat{S}_{1N}(\vec{\rho}, t)$ и $\hat{S}_{2N}(\vec{\rho}, t)$. Соответствующие квадратурные компоненты определяются равенствами:

$$\delta \hat{S}_{mN}(\vec{\rho}, t) = \delta \hat{X}_{mN}(\vec{\rho}, t) + i \delta \hat{Y}_{mN}(\vec{\rho}, t), \quad m = 1, 2. \quad (4.19)$$

Хотя мы рассматриваем источники как статистически независимые, тем не менее, мы накладываем на них требования, касающиеся соотношения параметров излучения: будем полагать, что источники полностью совпадают по всем параметрам, за исключением одного - между когерентными составляющими генерируемых ими полей имеет место фазовый сдвиг $\pi/2$. Тогда для средних амплитуд справедливы равенства:

$$\langle \hat{S}_{1N}(\vec{\rho}) \rangle = \langle \hat{X}_{1N}(\vec{\rho}) \rangle, \quad \langle \hat{S}_{2N}(\vec{\rho}) \rangle = i \langle \hat{Y}_{2N}(\vec{\rho}) \rangle, \quad \langle \hat{Y}_{2N}(\vec{\rho}) \rangle = \langle \hat{X}_{1N}(\vec{\rho}) \rangle. \quad (4.20)$$

Поскольку, за исключением фазового сдвига, источники идентичны, то соответствующие корреляторы квадратур совпадают:

$$\langle \delta \hat{X}_{1N}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{X}_{1N}(\vec{\rho}', t') \rangle = \langle \delta \hat{Y}_{2N}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{Y}_{2N}(\vec{\rho}', t') \rangle, \quad (4.21)$$

$$\langle \delta \hat{Y}_{1N}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{Y}_{1N}(\vec{\rho}', t') \rangle = \langle \delta \hat{X}_{2N}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{X}_{2N}(\vec{\rho}', t') \rangle. \quad (4.22)$$

После смешивания на симметричной светоделительной пластине, поле в ближней зоне оказывается в перепутанном состоянии. Амплитуды лучей на выходе светоделителя записываются в виде:

$$\hat{E}_{1N}(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{1N}(\vec{\rho}, t) + \hat{S}_{2N}(\vec{\rho}, t)), \quad (4.23)$$

$$\hat{E}_{2N}(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{1N}(\vec{\rho}, t) - \hat{S}_{2N}(\vec{\rho}, t)). \quad (4.24)$$

Теперь снова проследим за суммарным и разностным фототоками при детектировании полей в дальней зоне. Они определяются как

$$\delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}, t) = \delta \hat{i}_{1F}(\vec{\rho}, t) \pm \delta \hat{i}_{2F}(-\vec{\rho}, t), \quad (4.25)$$

где i_{1F} и i_{2F} фототоки в цепи первого и второго детекторов, соответственно. Делая алгебраические преобразования, получим

$$\delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}, t) = \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^2 \langle x_{1N}(\vec{Q}) \rangle \begin{pmatrix} (1-i) [\delta \hat{x}_{1N}(\vec{Q}, t) + i \delta \hat{y}_{2N}(\vec{Q}, t)] + h.c. \\ (1-i) [\delta \hat{x}_{2N}(\vec{Q}, t) + i \delta \hat{y}_{1N}(\vec{Q}, t)] + h.c. \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Тогда, корреляционная функция (\pm)-фототоков будет иметь вид

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}', t') \rangle &= 4 \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^4 \langle x_{1N}(\vec{Q}) \rangle \langle x_{1N}(\vec{Q}') \rangle \times \\ &\times \left[\delta(t-t') \delta^2(\vec{Q} - \vec{Q}') + 4 \begin{pmatrix} \langle : \delta \hat{x}_{1N}(\vec{Q}, t) \delta \hat{x}_{1N}(\vec{Q}', t') : \rangle \\ \langle : \delta \hat{y}_{1N}(\vec{Q}, t) \delta \hat{y}_{1N}(\vec{Q}', t') : \rangle \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Здесь обозначение $\langle : \dots : \rangle$ указывает на усреднение нормально упорядоченных операторов. При выводе этого соотношения мы использовали равенства (А.9) и (А.10).

Полученная выражение показывает, что измерительная процедура, представленная на рис. 7.13 позволяет следить за нужной квадратурной компонентой излучения, детектируя суммарный или разностный фототок. В отличие от схемы, представленной на рис. 4.1, данная измерительная процедура не нуждается в дополнительной математической обработке для восстановления полного сигнала. Поскольку предлагаемая схема базируется на измерении суммарного и разностного фототоков, мы будем называть ее \pm детектирование.

4.2 \pm детектирование в схеме с вырожденным параметрическим генератором света (ВПГС) или субпуассоновским лазером с захватом фазы

Преыдущее рассмотрение касалось общей схемы детектирования, без конкретизации когерентных источников. Теперь обратимся к вычислению пространственно-временного спектра флуктуаций фототока для конкретных источников с выраженными квантовыми свойствами. Сперва получим результат для источников сжатого света, обсуждавшихся в предыдущей главе: для вырожденного параметрического генератора света (ВПГС) и субпуассоновского лазера с захватом фазы. Обе системы работают в надпороговом режиме и генерируют когерентный свет, что важно для рассматриваемой измерительной процедуры.

Определим интересующий нас спектр следующим образом:

$$(\delta\hat{i}_{\pm}^2)_{\vec{q},\Omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} dt dt' \int \int d^2\rho d^2\rho' \langle \delta\hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}, t) \delta\hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}', t') \rangle e^{i\Omega(t-t')} e^{i\vec{q}(\vec{\rho} - \vec{\rho}')}, \quad (4.28)$$

где T - время наблюдения сигнала.

Найдем парную корреляционную функцию суммарных и разностных фототоков (4.27). Для этого нам необходимо конкретизировать теоретическую модель источников света.

Мы будем опираться на модель ВПГС и СПЛ, представленную в предыдущей главе, немного дополнив ее: будем учитывать, что рассматриваемые источники света имеют ограниченную апертуру лучей.

Для квази-монохроматического излучения с ограниченной апертурой внутрирезонаторное поле на выходном зеркале (в точке $z = L$) может формально быть описано посредством гайзенберговой амплитуды

$$\hat{E}(\vec{\rho}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 L}} e^{-i\omega_0 t} f(\vec{\rho}) \hat{a}(t). \quad (4.29)$$

Здесь L - периметр резонатора, ω_0 - модовая частота. Нормированная амплитуда $\hat{a}(t)$ удовлетворяет каноническим перестановочным соотношениям:

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1, \quad [\hat{a}(t), \hat{a}(t')] = 0, \quad (4.30)$$

а величина $\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle$ равна среднему числу фотонов в резонаторе.

Поперечный размер моды ограничивается функцией $f(\vec{\rho})$, которая нормирована так, что

$$\int d^2\rho |f(\vec{\rho})|^2 = 1, \quad d^2\rho = dx dy; \quad (4.31)$$

Для простоты мы будем обсуждать здесь гауссов профиль моды:

$$f(\vec{\rho}) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (4.32)$$

Здесь w_0 имеет смысл размера светового пятна на выходном зеркале резонатора.

Эволюция амплитуды $\hat{a}(t)$ во времени определяется природой физических процессов в резонаторе. Для когерентного поля можно записать

$$\hat{a}(t) = \langle \hat{a} \rangle + \delta\hat{a}(t), \quad \langle \hat{a} \rangle \gg \delta\hat{a}. \quad (4.33)$$

Поле $\hat{E}_N(\vec{\rho}, t)$ в ближней зоне на выходе резонатора формируется как линейная суперпозиция поля вышедшего из резонатора и многомодового вакуумного поля, отраженного выходным зеркалом:

$$\hat{E}_N(\vec{\rho}, t) = \sqrt{T} \hat{E}(\vec{\rho}, t) - \sqrt{R} \hat{E}_{vac}(\vec{\rho}, t). \quad (4.34)$$

Здесь R и T - коэффициенты отражения и пропускания, соответственно. Мы полагаем, что внутри самого зеркала не происходит потерь излучения, т.е. $R + T = 1$.

Принимая во внимание выражения (4.2) и (4.29), можем переписать (A.17) в терминах нормированных амплитуд:

$$\hat{S}_N(\hat{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} f(\vec{\rho}) \hat{a}(t) - \hat{S}_{vac}(\vec{\rho}, t), \quad (4.35)$$

где

$$R \approx 1, \quad T \ll 1, \quad \text{and} \quad \kappa = \frac{cT}{2L}. \quad (4.36)$$

Нормированные амплитуды $\hat{S}_{vac}(\vec{\rho}, t)$ и $\hat{S}_N(\vec{\rho}, t)$ должны удовлетворять перестановочным соотношениям в свободном пространстве (4.3), поэтому, чтобы обеспечить корректность перестановочных соотношений, мы должны потребовать

$$\sqrt{\kappa} [\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t')] = [\hat{a}(t), \hat{S}_{vac}^\dagger(t')] + [\hat{S}_{vac}(t), \hat{a}^\dagger(t')] \quad (4.37)$$

Рассматривая схему \pm детектирования, будем говорить о двух источниках, поля которых описываются амплитудами $\hat{S}_{m,vac}(\vec{\rho}, t)$, $\hat{S}_{m,N}(\vec{\rho}, t)$ и $\hat{a}_m(t)$ (индекс m ($= 1, 2$) нумерует источник). Как и при обсуждении общей схемы \pm детектирования, мы будем полагать здесь что источники идентичны, и для них справедливы равенства (A.9), (A.10). Они отличаются друг от друга только наличием фазового сдвига между генерируемыми полями:

$$\langle \hat{a}_1 \rangle = \sqrt{n}, \quad \langle \hat{a}_2 \rangle = i\sqrt{n}, \quad (4.38)$$

Учитывая все вышесказанное, выразим квадратурные компоненты в виде:

$$\delta \hat{X}_{m,N}(\vec{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} f(\vec{\rho}) \delta \hat{q}_m(t) - \hat{X}_{m,vac}(\vec{\rho}, t), \quad (4.39)$$

$$\delta \hat{Y}_{m,N}(\vec{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} f(\vec{\rho}) \delta \hat{p}_m(t) - \hat{Y}_{m,vac}(\vec{\rho}, t), \quad (4.40)$$

$$\langle \hat{X}_{1,N}(\vec{\rho}) \rangle = \langle \hat{Y}_{2,N}(\vec{\rho}) \rangle = \sqrt{\kappa n} f(\vec{\rho}), \quad (4.41)$$

$$\langle \hat{X}_{2,N}(\vec{\rho}) \rangle = \langle \hat{Y}_{1,N}(\vec{\rho}) \rangle = 0. \quad (4.42)$$

Здесь $\delta\hat{q}_m(t)$ и $\delta\hat{p}_m(t)$ квадратурные компоненты внутриврезонаторного поля:

$$\delta\hat{a}_m(t) = \delta\hat{q}_m(t) + i\delta\hat{p}_m(t). \quad (4.43)$$

Выполним преобразование Фурье по поперечным координатам:

$$\delta\hat{x}_{m,N}(\vec{Q}, t) = \sqrt{\kappa} f_{\vec{Q}} \delta\hat{q}_m(t) - \hat{x}_{m,vac}(\vec{Q}, t), \quad (4.44)$$

$$\delta\hat{y}_{m,N}(\vec{Q}, t) = \sqrt{\kappa} f_{\vec{Q}} \delta\hat{p}_m(t) - \hat{y}_{m,vac}(\vec{Q}, t), \quad (4.45)$$

$$\langle \hat{x}_{1,N}(\vec{Q}) \rangle = \langle \hat{y}_{2,N}(\vec{Q}) \rangle = \sqrt{\kappa n} f_{\vec{Q}}. \quad (4.46)$$

Функции $f_{\vec{Q}}$ и $f(\vec{\rho})$ связаны преобразованием Фурье. В случае гауссовой моды вида (4.32) можем вычислить в явном виде

$$f_{\vec{Q}} = \sqrt{\frac{w_0^2}{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}w_0^2 Q^2}. \quad (4.47)$$

Подставляя выражения (4.44)-(4.46) в формулу для коррелятора фототоков (4.27), получим

$$\begin{aligned} \langle \delta\hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}, t) \delta\hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}', t') \rangle &= 4\kappa n \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^4 f_{\vec{Q}} f_{\vec{Q}'} \times \\ &\times \left[\delta(t-t') \delta^2(\vec{Q}-\vec{Q}') + 4\kappa \begin{pmatrix} \langle : \delta\hat{q}_1(t) \delta\hat{q}_1(t') : \rangle \\ \langle : \delta\hat{p}_1(t) \delta\hat{p}_1(t') : \rangle \end{pmatrix} f_{\vec{Q}} f_{\vec{Q}'} \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Теперь, для того чтобы получить окончательные выражения для искомым спектров, нужно подставить полученный результат в (4.28) и выполнить интегрирование, подставляя явные выражения для корреляционных функций

$$\langle : \delta\hat{q}_1(t) \delta\hat{q}_1(t') : \rangle \quad \text{и} \quad \langle : \delta\hat{p}_1(t) \delta\hat{p}_1(t') : \rangle \quad (4.49)$$

Эти корреляторы зависят от динамики внутриврезонаторных полей и могут быть найдены в предыдущей главе (а также в работах [118, G10] для СПЛ и [G9] для ВПГС).

В результате, спектр фототока для ВПГС имеет вид:

$$(\delta\hat{i}_{\pm}^2)_{\vec{q}, \Omega} = 4\kappa n \left[1 \pm e^{-\tilde{w}_0^2 q^2} \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{\kappa^2(\mu-1)^2 + \Omega^2} \\ \frac{\kappa^2}{\kappa^2\mu^2 + \Omega^2} \end{pmatrix} \right], \quad (4.50)$$

а для СПЛ равен

$$(\delta \hat{i}_{\pm}^2)_{\vec{q}, \Omega} = 4\kappa n \left[1 \mp e^{-\tilde{w}_0^2 q^2} \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \Omega^2} \\ \frac{2\kappa^2}{\kappa^2/4 + \Omega^2} \end{pmatrix} \right]. \quad (4.51)$$

Параметр \tilde{w}_0 связан с шириной гауссовой моды w_0 соотношением:

$$\tilde{w}_0 = \frac{\lambda f}{2\pi} \frac{1}{w_0}. \quad (4.52)$$

Параметр накачки в формуле (4.50)

$$\mu = \sqrt{\frac{n_p}{n_{th}}} > 1 \quad (4.53)$$

определяет уровень превышения мощностью накачки n_p порогового значения n_{th} . Небольшое превышение порога $\mu - 1 \ll 1$ наилучшим образом отвечает нашим потребностям.

Сравнивая выражения (4.50) и (4.51) с соответствующими формулами, полученными в работах [118, G9, G10] для гомодинного детектирования полей, можно убедиться, что они очень близки друг к другу. Отличаются они только общим множителем перед квадратными скобками: в обсуждаемой здесь процедуре \pm детектирования этот множитель равен $4\kappa n$, в то время как при ГД он пропорционален амплитуде локального осциллятора β .

4.3 \pm детектирование с пиксельным источником: массив когерентных точечных источников

Рассмотрим более сложный вид источника, который будем называть пиксельным источником (ПИ). Пусть N^2 условно точечных идентичных источников помещены периодически в одной плоскости так, что расстояние между соседними пикселями l много больше пятна излучения каждого из пикселей:

$$l \gg w_0. \quad (4.54)$$

Это требование позволяет утверждать, что все пиксели независимы. В то же время будем полагать, что все пиксели синхронизованы (полем накачки в случае ВПГС или внешним вспомогательным полем в случае СПЛ).

Результирующее излучение пиксельного источника можно записать, опираясь на принцип суперпозиции, и представляя полную гайзенбергову амплитуду такого источника как сумму амплитуд отдельных пикселей:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{m}} \hat{E}_{\vec{m}}(\vec{r} - l\vec{m}, t). \quad (4.55)$$

Положения N^2 пикселей в плоскости поперечной направлению распространения света, определяются векторами

$$\vec{\rho}_m = l \vec{m}, \quad m_x, m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)/2. \quad (4.56)$$

Обобщим выражение (6.15) для нормированной амплитуды одномодового поля на случай ПИ:

$$\hat{S}(\vec{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} \sum_{\vec{\rho}_m} f(\vec{\rho} - \vec{\rho}_m) \hat{a}_m(t) - \hat{S}_{vac}(\vec{\rho}, t). \quad (4.57)$$

Функция $f(\vec{\rho} - \vec{\rho}_m)$ описывает апертуру m -го луча. Требование $l \gg w_0$, обеспечивает выполнение нормировочного соотношения

$$\int |f(\vec{\rho})|^2 d^2\rho = 1, \quad (4.58)$$

а также коммутационного соотношения

$$[\hat{a}_m(t), \hat{a}_n^\dagger(t)] = \delta_{mn}. \quad (4.59)$$

Операторы \hat{a}_m - это нормированные амплитуды одномодовых полей внутри m -го резонатора. Поскольку поля внутри резонаторов известны, мы можем записать поля на выходе резонаторов и выразить измеряемый сигнал. Как и прежде будем полагать, что

$$\hat{a}_m(t) = \langle \hat{a}_m \rangle + \delta \hat{a}_m(t), \quad \langle \hat{a}_m \rangle \gg \delta \hat{a}_m(t). \quad (4.60)$$

Для простоты будем считать, что свойства индивидуальных пикселей идентичны, и что $\langle \hat{a}_m \rangle = \sqrt{n}$ для всех m .

Тогда, выражения (4.44)-(4.46) можно обобщить на случай двух ПИ ($i = 1, 2$):

$$\delta \hat{x}_{i,N}(\vec{Q}, t) = \sqrt{\kappa} f_{\vec{Q}} \sum_{\vec{\rho}_m} e^{-i\vec{Q}\vec{\rho}_m} \delta \hat{q}_{i,m}(t) - \hat{x}_{i,vac}(\vec{Q}, t), \quad (4.61)$$

$$\delta \hat{y}_{i,N}(\vec{Q}, t) = \sqrt{\kappa} f_{\vec{Q}} \sum_{\vec{\rho}_m} e^{-i\vec{Q}\vec{\rho}_m} \delta \hat{p}_{i,m}(t) - \hat{y}_{i,vac}(\vec{Q}, t), \quad (4.62)$$

$$\langle \hat{x}_{1,N}(\vec{Q}) \rangle = \langle \hat{y}_{2,N}(\vec{Q}) \rangle = \sqrt{\kappa n} f_{\vec{Q}} \Lambda_{\vec{Q}}. \quad (4.63)$$

Здесь $\delta \hat{q}_m(t)$ и $\delta \hat{p}_m(t)$ - квадратурные компоненты внутриврезонаторного одномодового поля m -го резонатора:

$$\delta \hat{a}_m = \delta \hat{q}_m(t) + i \delta \hat{p}_m(t), \quad (4.64)$$

а функция $\Lambda_{\vec{Q}}$ - сумма экспонент:

$$\Lambda_{\vec{Q}} = \sum_{\vec{\rho}_m} e^{-i\vec{Q}\vec{\rho}_m}. \quad (4.65)$$

Этот ряд является геометрической прогрессией, и может быть просуммирован в явном виде:

$$\Lambda_{\vec{Q}} = \frac{\sin Q_x l N / 2}{\sin Q_x l / 2} \frac{\sin Q_y l N / 2}{\sin Q_y l / 2}. \quad (4.66)$$

Результат хорошо известен из теории дифракции.

Используя выражения (4.61)-(4.63) получим корреляционные функции фототоков:

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}', t') \rangle &= 4\kappa n \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^4 f_{\vec{Q}} \Lambda_{\vec{Q}} f_{\vec{Q}'} \Lambda_{\vec{Q}'} \times \\ &\times \left[\delta(t-t') \delta^2(\vec{Q} - \vec{Q}') + 4\kappa \begin{pmatrix} \langle : \delta \hat{q}_m(t) \delta \hat{q}_m(t') : \rangle \\ \langle : \delta \hat{p}_m(t) \delta \hat{p}_m(t') : \rangle \end{pmatrix} f_{\vec{Q}} f_{\vec{Q}'} \Lambda_{\vec{Q}-\vec{Q}'} \right]. \quad (4.67) \end{aligned}$$

Отметим, что корреляторы флуктуаций фототока определяются корреляторами внутриврезонаторных квадратур индивидуального пикселя, притом пиксели идентичны и

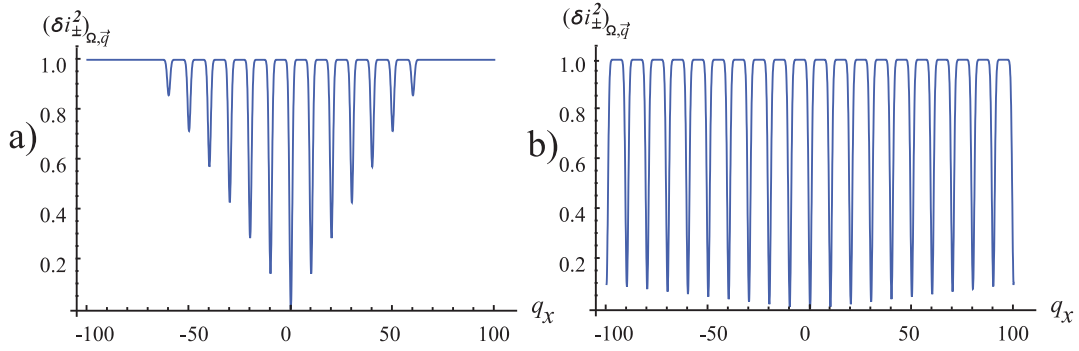


Рис. 4.4: \pm детектирование: пространственный спектр флуктуаций суммарного (для СПЛ) и разностного (для ВПГС) фототоков; Параметры расчета: $q_y = 0, \Omega = 0, l/w_0 = 10$, (a) $N = 7$, (b) $N = 99$.

по индексу m суммирование отсутствует. В результате, выполнив преобразования Фурье, получим спектр фототока. Он имеет вид, близкий к найденному в предыдущем разделе для ВПГС и СПЛ (4.50)-(4.51), но с заменой в формулах

$$e^{-\tilde{w}_0^2 q^2} \rightarrow \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{Q}_m, \vec{Q}_n} e^{-\tilde{w}_0^2 (\vec{q} + \vec{Q}_m - \vec{Q}_n)^2}, \quad \vec{Q}_{m,n} = \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{\rho}_{m,n}. \quad (4.68)$$

Анализируя полученный результат, можно отметить, что структура спектра флуктуаций излучения ПИ, состоящего из относительно большого числа пикселей, много богаче, чем для одного пикселя. Вместо одного провала ниже уровня дробового шума, локализованного в окрестности нулевой частоты, появляется целый набор подобных провалов на разных частотах. Как видно из рис. 4.4, чем больше пикселей составляют ПИ, тем большее число провалов в спектре мы получаем. При этом, в то время как для $N = 7$ только один из провалов достигает нулевого значения, при $N = 99$ мы видим уже несколько провалов в широком спектральном диапазоне, для которых уровень дробового шума существенно подавлен.

Спектральная ширина провалов d связана с размером пятна излучения индивидуального пикселя

$$d = \frac{2\pi}{\lambda f} w_0. \quad (4.69)$$

Провалы локализованы в области пространственных частот \vec{q}_m :

$$\vec{q}_m = \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{\rho}_m, \quad (4.70)$$

и расстояния между соседними провалами D зависят от расстояния между пикселями:

$$D = \frac{2\pi}{\lambda f} l. \quad (4.71)$$

Поскольку исходно для ПИ мы требовали, чтобы пиксели располагались достаточно далеко друг от друга ($l \gg w_0$), то $D \gg d$ и мы получаем хорошо выраженную периодическую структуру спектра похожую на спектр фототока в ближней зоне (но со скалирующим множителем $(2\pi/(\lambda f))$).

Представим, что с помощью ПИ мы исследуем некоторое слабо выраженное изображение с характерной шириной спектра $\Delta \sim d \gg D$ и амплитудой на уровне дробового шума. Результирующий спектр содержит как сигнал, так и шум источника. Если представить, что пиксели ПИ - это пуассоновские лазеры, то отношение сигнал-шум будет настолько мало, что полезная пространственная модуляция окажется неразличима. Напротив, в случае ПИ, состоящего из субпуассоновских лазеров, на частотах \vec{q}_m отношение сигнал-шум становится значительно выше и сигнальная модуляция может быть измерена. Отметим, что одиночный лазер даже с субпуассоновской статистикой не позволил бы исследовать спектрально широкий сигнал.

4.4 Прямое измерение с одним пиксельным источником

В начале этой главы мы рассматривали измерительную схему с одиночным когерентным источником (рис. 4.1). Обратимся вновь к этой схеме, используя вместо одиночного пиксельный источник когерентного света. В остальном сохраним процедуру измерения той же, т.е. будем следить за четной и нечетной частями фототока

при детектировании излучения в дальней зоне. Тогда, выражение для парных корреляционных функций суммарных и разностных фототоков будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{i}_{\pm}(\vec{\rho}', t') \rangle &= 2\kappa n \left(\frac{2\pi}{\lambda f} \right)^4 f_{\vec{Q}} \Lambda_{\vec{Q}} f_{\vec{Q}'} \Lambda_{\vec{Q}'} \left[\delta(t-t') \left(\delta^2(\vec{Q} - \vec{Q}') + \delta^2(\vec{Q} + \vec{Q}') \right) + \right. \\ &+ 4\kappa \left(\begin{array}{c} \langle : \delta \hat{q}_r(t) \delta \hat{q}_r(t') : \rangle \\ \langle : \delta \hat{p}_r(t) \delta \hat{p}_r(t') : \rangle \end{array} \right) f_{\vec{Q}} f_{\vec{Q}'} \left(\Lambda_{\vec{Q}+\vec{Q}'} \pm \Lambda_{\vec{Q}-\vec{Q}'} \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Используя определение спектра (4.28), опять получим спектры того же вида, что и ранее для ВПГС и СПЛ, определяемые выражениями (4.50) и (4.51), где следует произвести следующую замену:

$$e^{-\tilde{w}_0^2 q^2} \rightarrow \frac{1}{2N^2} \sum_{\vec{Q}_m \vec{Q}_n} \left[e^{-\tilde{w}_0^2 \left(\vec{q} + \frac{1}{2}(\vec{Q}_m - \vec{Q}_n) \right)^2} \pm e^{-\tilde{w}_0^2 \left(\vec{q} + \vec{Q}_m - \vec{Q}_n \right)^2} \right]. \quad (4.73)$$

Полученный спектр опять имеет богатую структуру, представляющую собой набор из резонансных гауссовых пиков и провалов относительно уровня дробового шума (см. рис. 4.5 и 4.6). Каждый пик или провал характеризуется шириной d (4.69), они центрированы на частотах \vec{q}_m и $\vec{q}_m/2$ (4.70).

Поскольку наибольший интерес для нас представляет анализ возможности подавления шума ниже дробового уровня, то мы будем следить за суммарным фототоком в случае ПИ, построенного на основе СПЛ, и разностным фототоком в случае ВПГС. На рис.4.5 можно видеть чередование провалов на частотах \vec{q}_m (в случае $l/w_0 = 10$ это нулевая частота, а также частоты кратные 10) и половинных провалов на частотах $\vec{q}_m/2$ (в нашем расчете это частоты, кратные 5). Обе последовательности провалов демонстрируют подавление шума ниже дробового уровня на ненулевых пространственных частотах. Эффективное число провалов определяется числом пикселей N . Из рис. 4.5а, видно, что при малых N полное подавление дробового шума достигается в окрестности нулевой частоты q_x . Для больших N , как видно из рис. 4.5б, частотный интервал, где имеет место значительное подавление шума, расширяется.

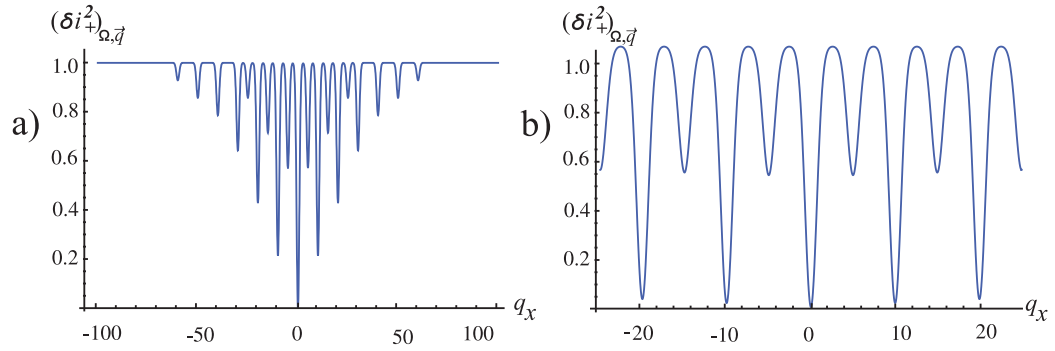


Рис. 4.5: Пространственный спектр флуктуаций суммарного фототока при детектировании в дальней зоне. В качестве пикселей ПИ выбраны СПЛ с параметрами $q_y = 0, \Omega = 0, l/w_0 = 10$; (a) $N = 7$, (b) $N = 99$. Безразмерные пространственные частоты приведены в единицах w_0^{-1} .

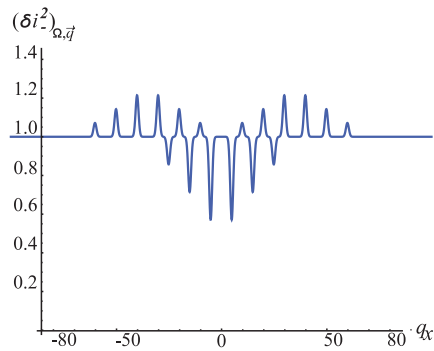


Рис. 4.6: Пространственный спектр флуктуаций разностного фототока при детектировании в дальней зоне. В качестве пикселей ПИ выбраны ВПГС с параметрами $q_y = 0, \Omega = 0, l/w_0 = 10$; $N = 7$. Безразмерные пространственные частоты приведены в единицах w_0^{-1} .

Измерение с ПИ, сформированным из ВПГС, менее предпочтительна для целей квантовой оптики, поскольку в спектре флуктуаций фототока провалы ниже уровня дробового шума чередуются с пиками (см. рис.4.6). Кроме того, максимальная глубина провалов в этом случае ограничена половиной уровня дробового шума.

Заключение к главе 4. Мы предложили измерительную процедуру, которая может рассматриваться как альтернатива универсальному подходу гомодинного детектирования. Как и гомодинное измерение, представленное в этой главе \pm детектирование позволяет следить за любой квадратурой сигнального поля. При этом, процедура гомодинирования требует точного согласования пространственно-временного профиля исследуемого сигнала и локального осциллятора, что зачастую является весьма трудно осуществимой экспериментальной задачей. Предлагаемый нами подход позволяет обойти это затруднение. Для его осуществления требуются два когерентных источника, а само измерение необходимо проводить над полями в дальней зоне, следя не за полным фототоком, а за суммарной и разностной комбинациями фототоков.

Кроме того мы построили модель пиксельного источника, сформированного как совокупность точечных источников сжатого света, расположенных периодически в пространстве на некоторой плоскости. Мы показали, что такой источник генерирует свет, сжатый не только во времени, как от индивидуального пиксела, но и в пространстве. Квантово-статистические свойства пиксельного источника апробированы на двух примерах, когда индивидуальными пикселями служат субпуассоновский лазер с захватом фазы или вырожденные параметрический генератор света. Достоинства предложенного источника многомодового неклассического света продемонстрированы на примере рассмотренной измерительной процедуры.

Мы показали, что структура пространственного спектра флуктуаций излучения пиксельного источника, состоящего из относительно большого числа пикселей, много богаче, чем для одного пикселя. Вместо одного провала ниже уровня дробового шума, локализованного в окрестности нулевой частоты, появляется целый набор подобных провалов на разных частотах.

Глава 5

Плотное кодирование оптических изображений

Квантовая информация возникла как активно развивающееся направление в последние 10 лет [132, 133]. Цель этой новой области теоретических и экспериментальных исследований состоит в приложении законов квантового мира к обработке и передаче информации. Здесь можно отметить такие направления как квантовая криптография, квантовые вычисления, квантовая телепортация, квантовое плотное кодирование и др.

С другой стороны в этот же период была разработана теория квантовых оптических изображений [134, 135], в основе которой лежит использование пространственно-многомодовых неклассических состояний света, квантовые флуктуации которого подавлены не только во времени, но и в пространстве. При этом основной особенностью, исходно присущей квантовым изображениям, является оптический параллелизм. Таким образом, кажется вполне естественным распространить концепции и подходы, развитые в квантовых изображениях, на квантово-информационные явления, вводя таким образом параллелизм и полностью оптические методы в эту область исследований и многократно увеличивая тем самым их информационные возможности.

Впервые квантовое плотное кодирование было предложено теоретически и реализовано экспериментально для дискретных переменных - кубитов [136, 137], а позд-

нее обобщено и тоже реализовано экспериментально для непрерывных переменных [138, 139]. Мы будем рассматривать здесь протокол квантового плотного кодирования оптических изображений в непрерывных переменных. Наша схема является обобщением предложенного ранее протокола кодирования в непрерывных переменных [138] на случай существенно многомодового в пространстве и времени оптического квантового коммуникационного канала. Подобно большинству явлений квантовой информации, основной используемый ресурс здесь обеспечивается квантовым перепутыванием. Это обобщение позволяет производить одновременное параллельное плотное кодирование входного изображения, состоящего из N элементов. В случае одной пространственной моды, рассмотренном в [138], $N = 1$. Сигнал создается отправителем (Алисой) в первом из двух каналов, находящихся в квантовом перепутанном состоянии. Благодаря эффективному квантовому перепутыванию второй канал играет роль идеальной системы отсчета для первого канала. Получатель (Боб) осуществляет белловское измерение сигнала, проводимое совместно в обоих каналах. Квантовое перепутывание делает возможным измерение сигнала с чувствительностью выше стандартного квантового предела для одиночного канала.

Мы будем оценивать качество информационного канала, вычисляя взаимную информацию Шеннона для потока классических входных изображений в когерентном состоянии. Чтобы оценить верхний предел пространственно-временной плотности информационного потока (в битах на $\text{см}^2 \cdot \text{сек}$), мы будем рассматривать луч света с произвольно большим поперечным размером, а также полагать, что схема фотодетектирования не ограничивает пространственное разрешение измеряемого сигнала. Рассматриваемая плотность информационного потока определяется степенью сжатия (и перепутывания) неклассического света, используемого как носитель информации. В нашем протоколе важную роль играют два набора пространственно-временных параметров: 1) длина когерентности и время когерентности пространственно-многомодового

сжатого (перепутанного) света, и 2) пространственно-временные характеристики потока входных изображений. Что касается второго пункта, то мы будем полагать, что отправитель (Алиса) производит ансамбль одинаковых изображений, характеризуемых конкретным выбранным разрешением в пространстве и времени (зерно Алисы) с гауссовой статистикой шумов этих изображений.

Мы покажем, что существенно многомодовый квантовый информационный канал обладает значительно более высокой информационной емкостью по-сравнению с одномодовым квантовым каналом. Плотность информационного потока ограничена дифракцией света. Однако мы покажем, что влияние дифракции может быть во-многом скомпенсировано с помощью линз, включенных в схему определенным образом. Важным отличием квантового коммуникационного канала от классического (где сигнал передается на фоне вакуумных флуктуаций вместо многомодового перепутанного света) является наличие в квантовом случае оптимального соотношения между пространственной плотностью элементов сигнального изображения и шириной пространственного спектра перепутывания света, обеспечивающего максимальную емкость канала.

5.1 Пространственно-многомодовый канал в схеме квантового плотного кодирования

5.1.1 Основы квантового плотного кодирования

На рис. 5.1 показаны две возможные схемы линии связи между Алисой (отправителем) и Бобом (получателем). Обе схемы основаны на использовании двух параллельных каналов, но в схеме обычного кодирования (а) каналы независимы, а в схеме плотного кодирования (b) принципиально важно, что объекты 1 и 2, распространяющиеся в каналах, находятся в перепутанном состоянии.

В случае обычного кодирования, входное квантовое состояние двух каналов яв-

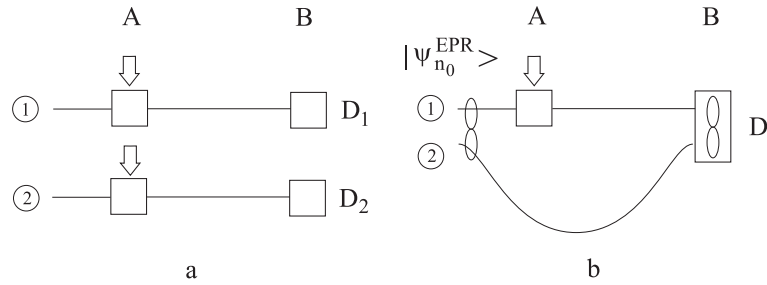


Рис. 5.1: Схема обычного (а) и плотного (b) кодирования.

ляется произведением по каналам, $|\psi^{(in)}\rangle_{1,2} = |\psi^{(in)}\rangle_1 |\psi^{(in)}\rangle_2$. Алиса независимо готовится каждый из объектов 1 и 2 в любых N ортогональных квантовых состояниях. Боб детектирует результирующее состояние $|\psi_n\rangle_1 |\psi_m\rangle_2$, $n, m = 1 \dots N$, путем независимых измерений в обоих каналах. Очевидно, это позволяет передать за один цикл любую из букв алфавита, составленного из N^2 букв.

В схеме плотного кодирования входное состояние двух каналов - это одно из квантовых перепутанных состояний $|\psi^{(in)}\rangle_{1,2} = |\psi_{n_0}^{EPR}\rangle_{1,2}$. Полный набор ортогональных ЭПР-состояний для двух каналов содержит N^2 состояний $|\psi_n^{EPR}\rangle_{1,2}$, $n = 1 \dots N^2$. Важная особенность ЭПР-базиса состоит в том, что Алиса может приготовить любое из N^2 состояний физически оперируя только с одним из двух каналов и оставляя второй незатронутым. В схеме плотного кодирования Боб измеряет квантовые ЭПР-состояния полученного сигнала с помощью ЭПР-детектора. Это обеспечивает равные пропускные способности двух схем - N^2 букв за один цикл, без какого-либо физического воздействия во втором вспомогательном канале в случае плотного кодирования.

С точки зрения физики, при наличии перепутывания вспомогательный канал служит оптимальной системой отсчета для детектирования слабых физических воздействий, производимых Алисой в канале 1.

5.1.2 Оптическая схема для квантового плотного кодирования изображений

Оптическая схема, осуществляющая протокол плотного кодирования оптических изображений в непрерывных переменных, изображена на рис. 5.2. На входе схемы два

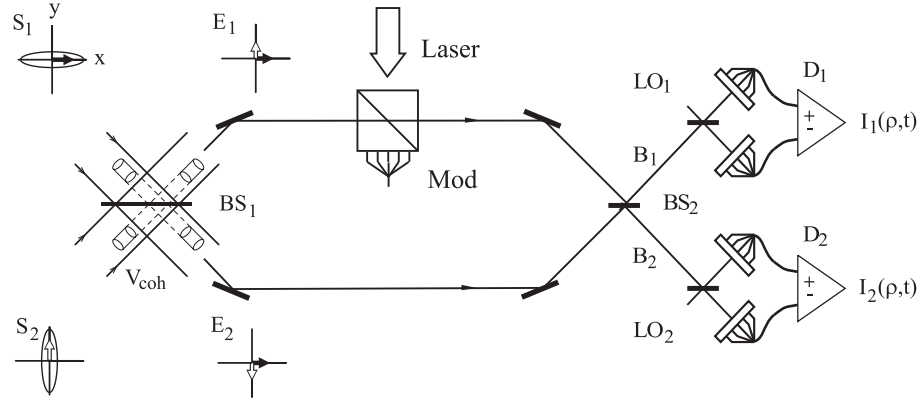


Рис. 5.2: Оптическая схема пространственно-многомодового плотного кодирования.

пространственно-многомодовых луча сжатого света, описываемые операторами медленных амплитуд $S_1(\vec{\rho}, t)$ и $S_2(\vec{\rho}, t)$ в представлении Гайзенберга, смешиваются на симметричной светоделительной пластине BS_1 . Если ориентация эллипсов сжатия входных полей подобрана правильно, то рассеянные светоделителем поля $E_1(\vec{\rho}, t)$ и $E_2(\vec{\rho}, t)$ окажутся в перепутанном состоянии, и квадратурные компоненты их амплитуд будут скоррелированы, как показано на рис. 5.2.

В первом луче Алисой создается классическое сигнальное поле изображения $A(\vec{\rho}, t)$. Такое изображение можно, например, ввести посредством, смешивающего устройства Mod с контролируемым разрешением в пространстве и во времени, и обеспечивающего фактически полное пропускание неклассического поля $E_1(\vec{\rho}, t)$. Измерительная процедура, осуществляемая Бобом, заключается в детектировании перепутанного состояния двух лучей, используя процедуру их оптического смешения на симметричном выходном светоделителе BS_2 , и последующего гомодинирования квадратурных компонент выходных полей $B_1(\vec{\rho}, t)$ и $B_2(\vec{\rho}, t)$. В результате, такая процедура позволя-

ет измерить обе квадратурные компоненты поля изображения на фоне эффективно подавленного квантового шума.

Можно привести более наглядное объяснение того, что сигнал в схеме, изображенной на рис. 5.2, детектируется на уровне шумов подавленных ниже дробового. Для симметричного светоделителя матрица рассеяния (матрица преобразования сигнала со входа на выход) имеет вид:

$$\{R_{nm}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Если оптические пути в обоих плечах интерферометра Маха-Цендера равны, то в результате двукратного применения преобразования (5.1), входное сжатое поле $S_1(\vec{\rho}, t)$ попадает на детектор D_1 , а сжатое поле $S_2(\vec{\rho}, t)$ - на детектор D_2 , то есть в обоих лучах детектируются сжатые квадратуры поля, что и обеспечивает понижение шумов ниже дробового уровня.

Таким образом, на вход гомодинных приемников D_1 и D_2 попадают поля

$$B_n(\vec{\rho}, t) = S_n(\vec{\rho}, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} A(\vec{\rho}, t), \quad (5.2)$$

где $n = 1, 2$. В параксиальном приближении медленно меняющиеся амплитуды световых полей $B_n(\vec{\rho}, t)$ связаны с операторами рождения и уничтожения фотонов $b_n^\dagger(\vec{q}, \Omega)$ и $b_n(\vec{q}, \Omega)$ в плоской волне с поперечной компонентой волнового вектора \vec{q} и частотой Ω соотношением:

$$B_n(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^2 T}} \sum_{\vec{q}, \Omega} b_n(\vec{q}, \Omega) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} - \Omega t)}. \quad (5.3)$$

Корректность данной процедуры дискретизации обеспечивается большим объемом квантования, поперечный размер которого определяется величиной L , а продольный - величиной cT . Суммирование выполняется по переменным \vec{q} и Ω : $\vec{q} = (q_x, q_y)$, $q_x = \frac{2\pi}{L} n_x$, $q_y = \frac{2\pi}{L} n_y$ и $\Omega = \frac{2\pi}{T} n$, где n_x, n_y и n принимают значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Коммутационные соотношения для полевых операторов в свободном пространстве имеют вид:

$$\begin{aligned} \left[B_n(\vec{\rho}, t), B_{n'}^\dagger(\vec{\rho}', t') \right] &= \delta_{n,n'} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta(t - t'), \\ \left[b_n(\vec{q}, \Omega), b_{n'}^\dagger(\vec{q}', \Omega') \right] &= \delta_{n,n'} \delta_{\vec{q}, \vec{q}'} \delta_{\Omega, \Omega'}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Величина $B_n^\dagger(\vec{\rho}, t)B_n(\vec{\rho}, t)$ определяет значение освещенности (в фотонах на $\text{см}^2 \cdot \text{сек}$), а $b_n^\dagger(\vec{q}, \Omega)b_n(\vec{q}, \Omega)$ характеризует число фотонов в полевой моде (\vec{q}, Ω) , локализованной в объеме квантования L^2cT . Наблюдаемые плотности фототока рассматриваются в этом разделе как непрерывные в пространстве и во времени переменные, то есть предполагается, что детекторы обладают произвольно высокой степенью разрешения и влияние конечного размера пиксела матрицы CCD-камеры на информационную пропускную способность не рассматривается. Операторы измеряемых плотностей фототоков определяются как

$$\begin{aligned} I_1(\vec{\rho}, t) &= B_0 [B_1(\vec{\rho}, t) + B_1^\dagger(\vec{\rho}, t)], \\ I_2(\vec{\rho}, t) &= B_0 \frac{1}{i} [B_2(\vec{\rho}, t) - B_2^\dagger(\vec{\rho}, t)], \end{aligned} \quad (5.5)$$

а соответствующие им фурье-амплитуды имеют вид:

$$\begin{aligned} i_1(\vec{q}, \Omega) &= B_0 [b_1(\vec{q}, \Omega) + b_1^\dagger(-\vec{q}, -\Omega)], \\ i_2(\vec{q}, \Omega) &= B_0 \frac{1}{i} [b_2(\vec{q}, \Omega) - b_2^\dagger(-\vec{q}, -\Omega)], \end{aligned} \quad (5.6)$$

где B_0 (выбираемая для простоты вещественной) и iB_0 - амплитуды локальных осцилляторов, используемых в схеме гомодинного приема (см. обсуждение в разделе 5.2.2). Здесь и далее в этой главе мы будем обозначать фурье-амплитуды полей и плотностей фототоков строчными символами, а сами поля и плотности фототоков (в прямом пространстве) - заглавными.

Для дальнейшей конкретизации схемы нам необходимо описать сжатый свет на

входе интерферометра Маха-Цендера. Мы будем полагать, что такой свет генерируется оптическим параметрическим усилителем (ОПУ).

5.1.3 Свойства пространственно-многомодового сжатого света

Основные результаты по пространственно-многомодовому сжатию можно найти в работе [134]. Преобразование сжатия, реализуемое оптическими параметрическими усилителями, освещающими два входа интерферометра Маха-Цендера, записывается следующим образом:

$$s_n(\vec{q}, \Omega) = u_n(\vec{q}, \Omega)c_n(\vec{q}, \Omega) + v_n(\vec{q}, \Omega)c_n^\dagger(-\vec{q}, -\Omega). \quad (5.7)$$

Здесь операторы $c_n(\vec{q}, \Omega)$ описывают входные моды ОПУ; предполагается, что эти поля находятся в вакуумном состоянии. Коэффициенты $u_n(\vec{q}, \Omega)$ и $v_n(\vec{q}, \Omega)$ для каждого ОПУ зависят от амплитуды поля накачки ОПУ, нелинейной восприимчивости кристалла и условий фазового синхронизма. Эти коэффициенты должны удовлетворять соотношениям

$$|u_n(\vec{q}, \Omega)|^2 - |v_n(\vec{q}, \Omega)|^2 = 1, \quad (5.8)$$

$$u_n(\vec{q}, \Omega)v_n(-\vec{q}, -\Omega) = u_n(-\vec{q}, -\Omega)v_n(\vec{q}, \Omega).$$

Выполнение этих равенств является необходимым и достаточным условием для сохранения коммутационных соотношений (5.4). В случае, когда рассматривается преобразование сжатия вакуумных входных полей (а только такой случай нас и будет интересовать), пространственные и временные свойства сжатых полей существенно зависят от двух параметров: от углов $\psi_n(\vec{q}, \Omega)$ ориентации главных осей эллипсов сжатия,

$$\psi_n(\vec{q}, \Omega) = \frac{1}{2} \arg \{u_n(\vec{q}, \Omega)v_n(-\vec{q}, -\Omega)\}, \quad (5.9)$$

и от степени сжатия $r_n(\vec{q}, \Omega)$,

$$e^{\pm r_n(\vec{q}, \Omega)} = |u_n(\vec{q}, \Omega)| \pm |v_n(\vec{q}, \Omega)|. \quad (5.10)$$

Если говорить о создании перепутанных состояний света на основе сжатых состояний, то аналогично одномодовому перепутыванию, многомодовые ЭПР-лучи образуются если сжатие свет достаточно эффективно в обоих каналах, а эллипсы сжатия ориентированы во взаимно ортогональных направлениях.

В случае однопроходных ОПУ с фазовым синхронизмом первого типа¹ коэффициенты $u(\vec{q}, \Omega)$ и $v(\vec{q}, \Omega)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} u(\vec{q}, \Omega) &= \exp \left\{ i \left[(k_z(\vec{q}, \Omega) - k)l - \delta(\vec{q}, \Omega)/2 \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left[\cosh \Gamma(\vec{q}, \Omega) + \frac{i\delta(\vec{q}, \Omega)}{2\Gamma(\vec{q}, \Omega)} \sinh \Gamma(\vec{q}, \Omega) \right], \\ v(\vec{q}, \Omega) &= \exp \left\{ i \left[(k_z(\vec{q}, \Omega) - k)l - \delta(\vec{q}, \Omega)/2 \right] \right\} \frac{g}{\Gamma(\vec{q}, \Omega)} \sinh \Gamma(\vec{q}, \Omega). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь l - это длина нелинейного кристалла, $k_z(\vec{q}, \Omega)$ - продольная компонента волнового вектора $\vec{k}(\vec{q}, \Omega)$ волны с частотой $\omega + \Omega$ и поперечной компонентой \vec{q} . Безразмерная функция фазовой расстройки $\delta(\vec{q}, \Omega)$ имеет вид

$$\delta(\vec{q}, \Omega) = \left(k_z(\vec{q}, \Omega) + k_z(-\vec{q}, -\Omega) - k_p \right) l \approx (2k - k_p)l + k''_{\Omega} l \Omega^2 - q^2 l / k, \quad (5.12)$$

где k_p - волновое число волны накачки; в вырожденном случае $k_p - 2k = 0$. Здесь принято параксиальное приближение. Параметр $\Gamma(\vec{q}, \Omega)$ определен как

$$\Gamma(\vec{q}, \Omega) = \sqrt{g^2 - \delta^2(\vec{q}, \Omega)/4}, \quad (5.13)$$

где g - безразмерная константа связи нелинейного взаимодействия, выбранная для простоты вещественной. Она пропорциональна нелинейной восприимчивости, длине кристалла и амплитуде поля накачки.

¹В трёхчастотных нелинейно-оптических процессах различают два типа фазового синхронизма. В отрицательных нелинейно-оптических кристаллах при синхронизме первого типа волна накачки соответствует необыкновенной волне, а сигнальная и холостая волны - обыкновенные. При синхронизме второго типа одна из усиливаемых волн - необыкновенная.

5.1.4 Плотности фототоков

Проведя некоторые вычисления, получим для фурье-амплитуд плотностей фототоков:

$$i_n(\vec{q}, \Omega) = B_0 \{f_n(\vec{q}, \Omega) + a_n(\vec{q}, \Omega)\}, \quad (5.14)$$

где

$$f_1(\vec{q}, \Omega) = [e^{r_1(\vec{q}, \Omega)} \cos \psi_1(\vec{q}, \Omega) + ie^{-r_1(\vec{q}, \Omega)} \sin \psi_1(\vec{q}, \Omega)] c_1(\vec{q}, \Omega) + \\ [\text{э.с.}, (\vec{q}, \Omega) \rightarrow (-\vec{q}, -\Omega)], \quad (5.15)$$

и

$$f_2(\vec{q}, \Omega) = [e^{-r_2(\vec{q}, \Omega)} \cos \psi_2(\vec{q}, \Omega) + ie^{r_2(\vec{q}, \Omega)} \sin \psi_2(\vec{q}, \Omega)] c_2(\vec{q}, \Omega) + \\ [\text{э.с.}, (\vec{q}, \Omega) \rightarrow (-\vec{q}, -\Omega)], \quad (5.16)$$

- представляют квантовые флуктуации полей на обоих фотодетекторах, а

$$a_1(\vec{q}, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a(\vec{q}, \Omega) + a^*(-\vec{q}, -\Omega)], \\ a_2(\vec{q}, \Omega) = \frac{1}{i\sqrt{2}} [a(\vec{q}, \Omega) - a^*(-\vec{q}, -\Omega)], \quad (5.17)$$

- это компоненты сигнального изображения Алисы, измеряемые Бобом. Здесь $a(\vec{q}, \Omega)$

- фурье-амплитуда классического поля $A(\vec{\rho}, t)$, определенная аналогично (5.3).

5.2 Пропускная способность канала связи

5.2.1 Степени свободы в шумовом и сигнальном полях

Чтобы оценить пропускную способность канала надо определить степени свободы шума и сигнала в нашей пространственно многомодовой схеме.

Будем предполагать, что все элементы в схеме - нелинейные кристаллы ОПУ, светоделители, модулятор, ССD-матрицы детекторов - имеют большие поперечные размеры. Медленные амплитуды сжатых световых полей являются стационарными

во времени и однородными в поперечном сечении пучков случайными функциями, то есть все их корреляционные функции обладают трансляционной инвариантностью в пространстве $\vec{\rho}, t$. Для наблюдаемых плотностей фототока это значит, что любая пара фурье-амплитуд шума (5.15) и (5.16) для данных (\vec{q}, Ω) и $(-\vec{q}, -\Omega)$ является результатом сжатия входных полей $c(\vec{q}, \Omega)$ и $c(-\vec{q}, -\Omega)$ и, следовательно, не зависит от других пар.

С другой стороны, поскольку наблюдаемые плотности фототоков вещественны, фурье-амплитуды $i_n(\vec{q}, \Omega)$ и $i_n^\dagger(-\vec{q}, -\Omega)$ не являются независимыми, и

$$i_n(\vec{q}, \Omega) = i_n^\dagger(-\vec{q}, -\Omega). \quad (5.18)$$

По этой причине мы рассматриваем как независимые случайные переменные только шумовые члены в фурье-амплитудах $i_n(\vec{q}, \Omega)$ при $\Omega > 0$. Действительная и мнимая части комплексных амплитуд $i_n(\vec{q}, \Omega)$ при $\Omega > 0$ связаны с амплитудами действительных гармоник шума фототока $\sim \cos(\vec{q} \cdot \vec{\rho} - \Omega t)$ и $\sim \sin(\vec{q} \cdot \vec{\rho} - \Omega t)$, непосредственно восстанавливаемых Бобом из его измерений.

Фурье-амплитуды плотностей фототока (5.14) удовлетворяют соотношению (5.18) и, следовательно, достаточно учитывать при рассмотрении только $\Omega > 0$. Полагаем, что случайный сигнал, посылаемый Алисой, стационарен и однороден в поперечном сечении пучка. Амплитуды $a_n(\vec{q}, \Omega)$ при $\Omega > 0$, $n = 1, 2$, рассматриваются как независимые комплексные гауссовские переменные с дисперсией $\sigma^A(\vec{q}, \Omega)$, зависящей от (\vec{q}, Ω) . Так как преобразование (5.17) - унитарное, следовательно классические фурье-амплитуды $a(\vec{q}, \Omega)$ для любых (\vec{q}, Ω) также являются статистически независимыми, и величина

$$\sigma^A(\vec{q}, \Omega) = \langle |a(\vec{q}, \Omega)|^2 \rangle, \quad (5.19)$$

имеет смысл среднего числа фотонов в сигнальной волне Алисы (\vec{q}, Ω) в объеме квантования, где $\sigma^A(\vec{q}, \Omega) = \sigma^A(-\vec{q}, -\Omega)$. Здесь статистическое усреднение по гауссовско-

му ансамблю сигналов Алисы выполнено с комплексной весовой функцией

$$\mathcal{P}_{\vec{q}, \Omega}^A(a(\vec{q}, \Omega)) = \frac{1}{\pi \sigma^A(\vec{q}, \Omega)} \exp \left\{ -\frac{|a(\vec{q}, \Omega)|^2}{\sigma^A(\vec{q}, \Omega)} \right\}. \quad (5.20)$$

В дальнейшем мы полагаем, что ансамбль входных изображений в области пространственных частот обладает гауссовским спектральным профилем с шириной q_A :

$$\sigma^A(\vec{q}, \Omega) = (2\pi)^3 \frac{P}{\pi(q_A/2)^2} \exp \left(-\frac{q_x^2 + q_y^2}{(q_A/2)^2} \right) \Pi(\Omega), \quad (5.21)$$

$$\Pi(\Omega) = \begin{cases} 1/\Omega_A & |\Omega| \leq \Omega_A/2, \\ 0 & |\Omega| > \Omega_A/2, \end{cases}$$

и, для упрощения, в области временных частот характеризуется узким прямоугольным спектральным профилем $\Pi(\Omega)$ с шириной Ω_A и высотой $1/\Omega_A$. Поскольку

$$\sum_{\vec{q}, \Omega} \sigma_A(\vec{q}, \Omega) = L^2 T P, \quad (5.22)$$

то полная средняя плотность потока фотонов в поле изображения через см^2 за секунду равна P . В результате, дисперсии наблюдаемых $i_n(\vec{q}, \Omega)$ принимают вид:

$$\left\langle \frac{1}{2} \{i_n(\vec{q}, \Omega), i_n^\dagger(\vec{q}, \Omega)\}_+ \right\rangle = B_0^2 [\sigma_n^{BA}(\vec{q}, \Omega) + \sigma^A(\vec{q}, \Omega)], \quad (5.23)$$

где $\{ , \}_+$ означает антикоммутатор. Дисперсии квантового шума в обоих каналах детектирования записываются как:

$$\sigma_n^{BA}(\vec{q}, \Omega) = \left\langle \frac{1}{2} \{f_n(\vec{q}, \Omega), f_n^\dagger(\vec{q}, \Omega)\}_+ \right\rangle, \quad (5.24)$$

$$\sigma_1^{BA}(\vec{q}, \Omega) = e^{2r_1(\vec{q}, \Omega)} \cos^2 \psi_1(\vec{q}, \Omega) + e^{-2r_1(\vec{q}, \Omega)} \sin^2 \psi_1(\vec{q}, \Omega), \quad (5.25)$$

$$\sigma_2^{BA}(\vec{q}, \Omega) = e^{-2r_2(\vec{q}, \Omega)} \cos^2 \psi_2(\vec{q}, \Omega) + e^{2r_2(\vec{q}, \Omega)} \sin^2 \psi_2(\vec{q}, \Omega). \quad (5.26)$$

Используя полученные результаты, можно оценить взаимную информацию Шеннона для рассматриваемой схемы плотного кодирования.

5.2.2 Взаимная информация Шеннона и пропускная способность пространственно-многомодового канала плотного кодирования

Хорошо известно, что в одномодовом сжатом световом поле статистика квадратурных амплитуд - гауссовская, и, например, в представлении Вигнера ее можно охарактеризовать гауссовской весовой функцией. При гомодинном детектировании сжатого света статистика фотоотсчетов также является гауссовской, благодаря линейности преобразования между амплитудой поля в плотностью фототока. В [140] можно найти обсуждение гомодинного приема в терминах характеристических функций. В [141] рассмотрены некоторые особенности гомодинного приема пространственно-многомодовых полей.

В рассматриваемой схеме квантового плотного кодирования статистически независимые степени свободы шума и сигнала нумеруются частотами (\vec{q}, Ω) при $\Omega > 0$. Можно рассматривать наш квантовый канал как совокупность статистически независимых параллельных гауссовых каналов связи в фурье-представлении. Взаимная информация между Алисой и Бобом для данного детектора и частот (\vec{q}, Ω) определяется выражением:

$$I_n^S(\vec{q}, \Omega) = H_n^B(\vec{q}, \Omega) - \overline{H_n^{(B|A)}(\vec{q}, \Omega)}^A. \quad (5.27)$$

Здесь $H^B(\vec{q}, \Omega)$ - энтропия наблюдаемых Боба, и

$$\overline{H_n^{(B|A)}(\vec{q}, \Omega)}^A$$

- усредненная по ансамблю сигналов Алисы энтропия шума, поступающего в канал [142]. Для гауссовых каналов взаимная информация имеет вид:

$$I_n^S(\vec{q}, \Omega) = \ln \left(1 + \frac{\sigma^A(\vec{q}, \Omega)}{\sigma_n^{BA}(\vec{q}, \Omega)} \right). \quad (5.28)$$

Подавление квантового шума в полосе частот эффективного сжатия и перепутывания увеличивает отношение сигнала к шуму в правой части (5.28). Полная взаимная

информация I^S , относящаяся к большой области наблюдения L^2 и большому времени наблюдения T , определяется как сумма по всем степеням свободы и связана с *плотностью потока информации* J (измеряемой в битах, а точнее, в нитах на $\text{см}^2 \cdot \text{сек}$) следующим образом:

$$I^S = \sum_{n, \vec{q}, \Omega > 0} I_n^S(\vec{q}, \Omega) = L^2 T J, \quad (5.29)$$

где

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} \int_{\Omega > 0} d\Omega \sum_{n=1,2} I_n^S(\vec{q}, \Omega). \quad (5.30)$$

Для количественного и численного анализа естественно связать такие величины как плотность информационного потока и плотность потока фотонов с физическими параметрами, фигурирующими в схеме квантового плотного кодирования. Сжатие и перепутывание, производимые оптическим параметрическим усилителем первого типа, характеризуются эффективной шириной спектров q_c и Ω_c в пространственном и временном частотном представлении. Площадь когерентности в поперечном сечении пучков и время когерентности вводятся как $S_c = (2\pi/q_c)^2$ и $T_c = 2\pi/\Omega_c$. Для упрощения предполагаем, что оба ОПУ имеют одинаковые площади и времена когерентности. Площадь корреляций S_A и время корреляций T_A нестационарного изображения, посылаемого Алисой, связаны со спектральными ширинами сигнала q_A и Ω_A как $S_A = (2\pi/q_A)^2$ и $T_A = 2\pi/\Omega_A$. Мы рассматриваем широкополосный вырожденный коллинеарный фазовый синхронизм в однопроходных ОПУ первого типа. Соответствующее время когерентности спонтанного параметрического рассеяния T_C обычно короче временной протяженности "кадра" T_A из нестационарного потока изображений Алисы.

Безразмерный поток информации \mathcal{J} и безразмерный поток входных фотонов \mathcal{P} определяются как $\mathcal{J} = S_c T_A J$, $\mathcal{P} = S_c T_A P$, то есть мы относим обе эти величины к длительности "кадра" Алисы и к площади когерентности сжатия и перепутывания.

Условия оптимального перепутывания в ОПУ достигаются при выполнении соот-

ношений:

$$\begin{aligned}
 r_1(\vec{q}, \Omega) &= r_2(\vec{q}, \Omega) \equiv r(\vec{q}, \Omega), \\
 \psi_1(\vec{q}, \Omega) &= \psi_2(\vec{q}, \Omega) \pm \pi/2 \equiv \psi(\vec{q}, \Omega), \\
 \psi(0, 0) &= \pi/2.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Используя введенные выше определения, находим безразмерный поток информации \mathcal{J} в виде:

$$\mathcal{J} = \int d\vec{\kappa} \ln \left\{ 1 + \mathcal{P} \frac{1}{\sigma^{BA}(\vec{\kappa}, 0)} \frac{1}{\pi(d_A/2)^2} \exp \left(-\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{(d_A/2)^2} \right) \right\}, \tag{5.32}$$

где

$$\sigma^{BA}(\vec{\kappa}, 0) = e^{2r(\vec{\kappa}, 0)} \cos^2 \psi(\vec{\kappa}, 0) + e^{-2r(\vec{\kappa}, 0)} \sin^2 \psi(\vec{\kappa}, 0), \tag{5.33}$$

и введены безразмерные пространственные частоты $\vec{\kappa} = \vec{q}/q_c$. Относительную спектральную ширину сигнала Алисы $d_A = q_A/q_c = (S_c/S_A)^{1/2}$ можно интерпретировать как число элементов изображения на длине когерентности, то есть как относительную линейную плотность элементов изображения. Далее используется простая оценка $q_c/2 = \sqrt{2k/l}$, связанная с дифракционным уширением света параметрического рассеяния, распространяющегося внутри кристалла ОПУ, где k - волновое число, а l - длина кристалла.

При оптимальном согласовании фаз сжатых пучков квантовый шум в схеме плотного кодирования эффективно подавлен. Как обсуждалось в [134, 143, 144], важным фактором является пространственно-частотная дисперсия сжатия, то есть зависимость фазы квадратурных компонент от \vec{q} . Эта дисперсия обусловлена дифракцией внутри ОПУ. С помощью тонкой линзы, подходящим образом помещенной в световой пучок, можно эффективно скорректировать зависимость ориентации эллипсов сжатия от пространственной частоты \vec{q} , как показано на рис. 5.3.

Улучшение отношения сигнала к шуму для различных пространственных частот можно охарактеризовать с помощью обратной дисперсии шума $\sigma^{BA}(\vec{\kappa}, 0)$, изобраа-

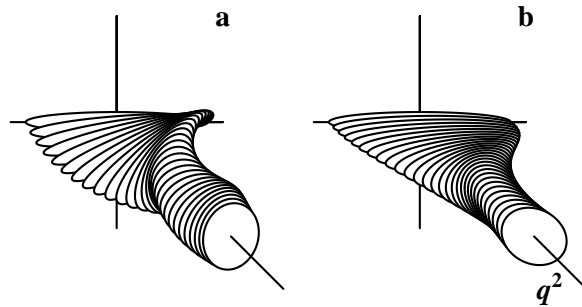


Рис. 5.3: Эллипсы сжатия (а) для широкополосного по пространственным и временным частотам поля $\hat{s}_1(\vec{q}, \Omega)$ в зависимости от расстройки $\delta(\vec{q}, 0)$ (в произвольных единицах) при вырожденном коллинеарном фазовом синхронизме первого типа, $\exp[r(0, 0)] = 3$. На рис. (b) показаны те же эллипсы сжатия для систем отображения с правильно подобранными линзами.

женной на рис. 5.4. Как видно из рисунка, коррекция фазы с помощью линз делает возможной передачу сигнала с низкими шумами в полосе пространственных частот эффективного сжатия.

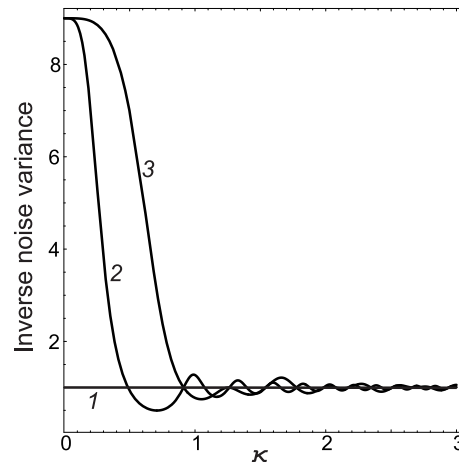


Рис. 5.4: Величина, обратная дисперсии шума, в зависимости от пространственной частоты κ для вакуумного шума на входе (1) и для сжатого света с $\exp[r(0, 0)] = 3$ без коррекции фазы (2) и с коррекцией (3).

При построении графиков для плотности взаимной информации \mathcal{J} брались неизменными площадь когерентности S_c , степень сжатия $r(0, 0)$ и плотность потока сигнальных фотонов \mathcal{P} . Зависимость плотности взаимной информации от относительной линейной плотности элементов изображения d_A приведена на рис. 5.5. При $d_A \ll$

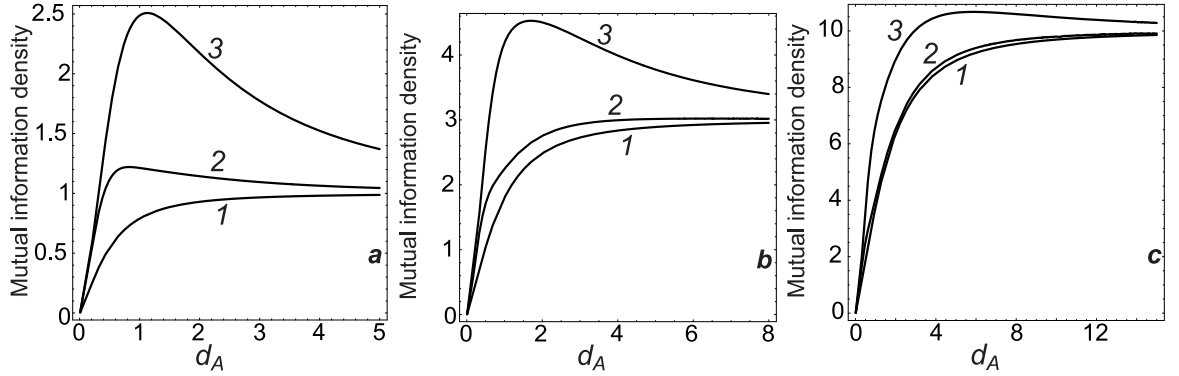


Рис. 5.5: Плотность взаимной информации для вакуумного шума на входе схемы (1) и сжатого света с $\exp(r(0,0)) = 3$ без коррекции фазы (2) и с коррекцией (3). Плотность сигнальных фотонов равна $\mathcal{P} = 1$ (a), $\mathcal{P} = 3$ (b), $\mathcal{P} = 10$ (c).

1 (большие элементы изображения, $S_A \gg S_c$) плотность взаимной информации растет линейно с увеличением d_A , поскольку это означает увеличение пространственного разрешения входного сигнала. В классическом пределе (вакуумный шум на входе схемы) увеличение плотности взаимной информации с ростом плотности элементов изображения имеет место до тех пор, пока информация, приходящаяся на один элемент сигнала Алисы не оказывается порядка одного бита или меньше:

$$\ln \left\{ 1 + \frac{4 \mathcal{P}}{\pi d_A^2} \right\} \sim \frac{\mathcal{P}}{d_A^2} \leq 1. \quad (5.34)$$

Дальнейшее увеличение d_A не приводит ни к какому эффекту, так как оно полностью компенсируется уменьшением информации, приходящейся на каждый элемент изображения. На наших рисунках это соответствует значениям $d_A \sim \sqrt{\mathcal{P}} \sim 1$ при $\mathcal{P} = 1$, $d_A \sim 1.7$ при $\mathcal{P} = 3$, и $d_A \sim 3$ при $\mathcal{P} = 10$ (см. соответственно рис. 5.5a,b,c).

Интересно оценить влияние сжатия и перепутывания на информационную пропускную способность канала плотного кодирования. Стандартным предположением для такой оценки является приближенное равенство:

$$\langle n_{squeezed} \rangle \sim \langle n_{signal} \rangle, \quad (5.35)$$

означающее, что энергия, затрачиваемая на сжатие и перепутывание (число фото-

нов сжатого света в каждой моде на данном детекторе) имеет тот же порядок по величине, что и число сигнальных фотонов на моду. Здесь

$$\langle n_{squeezed} \rangle = \sinh^2 r \sim \frac{e^{2r}}{4}. \quad (5.36)$$

Выберем для простоты $d_A \sim 1$, то есть размер элемента изображения S_A приблизительно равен размеру площади когерентности сжатого света S_c . При выполнении такого условия объем когерентности $cS_A T_A$ можно рассматривать как степень свободы как для сигнального, так и для сжатого света. Тогда

$$\langle n_{signal} \rangle \sim \mathcal{P}, \quad (5.37)$$

и предположение (5.35) означает, что

$$\mathcal{P} \sim \frac{e^{2r}}{4}. \quad (5.38)$$

На наших рисунках $e^{2r} = 9$, и $\mathcal{P} = 1 < e^{2r}/4$, $\mathcal{P} = 3 \sim e^{2r}/4$, $\mathcal{P} = 10 > e^{2r}/4$ на рис. 11.12a,b,c соответственно. Из вида кривых при $d_A \leq 1$ следует, что при $\langle n_{squeezed} \rangle \sim \langle n_{signal} \rangle$ (кривые 3 и 1 на рис. 5.5b) информационная пропускная способность канала плотного кодирования превышает информационную пропускную способность классического канала примерно в 2 раза.

Этот результат согласуется с общими свойствами квантового плотного кодирования и с оценкой [138] для одномодовой схемы плотного кодирования в непрерывных переменных.

При $\mathcal{P} < e^{2r}/4$ (кривые 3 и 1 на рис. 5.5a) преимущество квантового канала еще более существенно, но энергия затрачиваемая на сжатие в этом случае превышает мощность самого сигнала. Кривые 3 и 1 на рис. 5.5c иллюстрируют обратный предел относительно низкой энергии, затрачиваемой в квантовом канале и малого увеличения информационной пропускной способности.

Когда $d_A \gg 1$ (элементы изображения много меньше длины когерентности), влияние перепутывания на пропускную способность канала пропадает и значение \mathcal{J} падает до величины классического предела. Это объясняется тем, что в пределе $S_A \ll S_c$ почти все пространственные частоты сигнала лежат вне полосы пространственных частот, где присутствует эффективное подавление шума, и пропускная способность канала ограничивается вакуумным шумом.

Коррекция фазы сжатого света существенно увеличивает пропускную способность канала, поскольку расширяет полосу пространственных частот эффективного подавления шума до оптимального значения. Это устраняет деструктивное влияние усиленной (растянутой) квадратуры шумового поля на больших пространственных частотах, как видно из рис. 5.5 (кривые 3 и 2).

Заключение к главе 5. В этой главе мы рассмотрели обобщение на случай пространственно многомодовых полей протокола плотного кодирования в непрерывных переменных, предложенного в работе [138], и вычислили пространственно-временную плотность взаимной информации Шеннона. Продемонстрировали, что многомодовый квантовый коммуникационный канал обладает значительно более высокой пропускной способностью благодаря присущей ему природе оптического параллелизма. Мы оценили роль дифракции и рассматриваемой схеме и показали, как можно оптимизировать ее работу с помощью правильно подобранных линз, включенных в схему. Мы продемонстрировали, что в отличие от классического канала передачи информации, в квантовом канале существует оптимальное значение пространственной плотности элементов изображения, соответствующее пространственной полосе

сжатия/перепутывания света на входе канала.

Глава 6

Широкополосное плотное кодирование и телепортация

Из обсуждений, приведенных в предыдущих главах, видно, что концепция многомодового сжатия [121] оказалась весьма продуктивной как для целей квантовой оптики, так и в квантовых информационных приложениях. Это ярко демонстрируют работы по квантовой голографической телепортации, фантомным изображениям [127], квантовому плотному кодированию [G5]. Все эти схемы базируются на использовании излучения однопроходного оптического параметрического усилителя (ОПУ) с пространственно-многомодовой структурой. Эффективность этих схем оказывается существенно выше в сравнении с одномодовыми моделями, поскольку пространственные моды обеспечивают многоканальный параллелизм при передаче информации. В упомянутых выше работах временная структура поля не принимается во внимание, так как спектральный диапазон излучения ОПУ очень широк. В самом деле, излучение ОПУ, рождающееся в процессе параметрического преобразования фотона накачки в сигнальный и холостой фотоны, являясь существенно многомодовым в пространстве, обладает временным спектром порядка 10^{14} Гц. В результате, эффективное использование временных мод такого источника фактически невозможно, т.к. необходимым условием эффективности является требование, чтобы спектр квантового излучения был одного порядка по величине, что и спектр Алисы (источника ин-

формационного сигнала, передаваемого по квантовому каналу). Кроме того необходимо, чтобы характерная полоса частот фотодетектора была бы шире полосы частот детектируемого излучения. Невозможность обеспечения этих условий для ОПУ привела к снижению интереса к проблеме временной многомодовости квантового света в целом. Очевидно, что если бы удалось указать систему, обладающую аналогичной пространственной структурой, а, с другой стороны, имеющей не слишком широкий временной спектр, то число степеней свободы такой системы увеличилось бы мультипликативно, а значит, и эффективность информационных протоколов стала бы еще выше.

С этой точки зрения нам кажутся весьма перспективными источники, построенные на основе одномодовых лазеров (с субпуассоновской статистикой и захватом фазы излучения) или вырожденных параметрических генераторов света (ВПГС), работающих в надпороговом режиме. С одной стороны (как показано в главе 4), на основе таких источников можно создать излучение с пространственно-многомодовой структурой. Наш интерес к использованию данных источников для информационных приложений связан с тем, что для них ширина временного спектра определяется добротностью резонатора и обычно имеет порядок величины $10^{10} - 10^{11}$ Гц, что позволяет надеяться на возможность использования временной многомодовой структуры такого излучения.

В этой главе мы рассмотрим временные свойства сжатого излучения одномодовых субпуассоновских лазеров (СПЛ) с захватом фазы и надпороговых ВПГС в приложении к двум информационным протоколам: протоколу квантового плотного кодирования и протоколу квантовой телепортации спектрально широкого сигнала. Мы оценим отношение сигнал/шум, найдем величину взаимной информации Шеннона в зависимости от ширины временного спектра сигнала Алисы, рассчитаем верность (fidelity) переноса квантового состояния, вводя понятие "спектральной верности и

сравнивая эту величину с другими, принятыми для описания процесса многомодовой телепортации.

6.1 Субпуассоновский лазер в схеме квантового плотного кодирования

6.1.1 Критерий Дуана для перепутывания света в непрерывных переменных

Критерий Дуана [106] позволяет предсказать, может ли быть применение того или иного излучения в принципе эффективным для квантовых информационных приложений. Для случая многомодового перепутывания этот критерий можно сформулировать следующим образом: два луча являются перепутанными, если существует частотная область, в которой коллективные канонические координаты $\delta\hat{Q}_{1\omega}$ и $\delta\hat{Q}_{2\omega}$ и канонические импульсы $\delta\hat{P}_{1\omega}$ и $\delta\hat{P}_{2\omega}$ удовлетворяют неравенству

$$2((\delta Q_1 + \delta Q_2)^2)_\omega, 2((\delta P_1 - \delta P_2)^2)_\omega < 1. \quad (6.1)$$

Проследим за смешением двух лучей света от двух независимых лазеров с захватом фазы на симметричном светоделителе. Преобразование исходных амплитуд \hat{S}_1 и \hat{S}_2 подчиняется соотношениям

$$\hat{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_1 + \hat{S}_2), \quad \hat{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_1 - \hat{S}_2). \quad (6.2)$$

Определяя квадратурные компоненты полей на входе и выходе светоделителя,

$$\hat{E}_i = \hat{Q}_i + i\hat{P}_i, \quad \hat{S}_i = \hat{X}_i + i\hat{Y}_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.3)$$

получим для амплитудной квадратуры

$$\delta\hat{Q}_{1,\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\hat{X}_{1,\omega} + \delta\hat{X}_{2,\omega}), \quad \delta\hat{Q}_{2,\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\hat{X}_{1,\omega} - \delta\hat{X}_{2,\omega}), \quad (6.4)$$

и для фазовой квадратуры

$$\delta\hat{P}_{1,\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\hat{Y}_{1,\omega} + \delta\hat{Y}_{2,\omega}), \quad \delta\hat{P}_{2,\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\hat{Y}_{1,\omega} - \delta\hat{Y}_{2,\omega}). \quad (6.5)$$

Предполагая, что излучения лазеров статистически независимы (см. обсуждение в Главе 3), можем записать

$$((\delta Q_1 + \delta Q_2)^2)_\omega = 2(\delta X_1^2)_\omega, \quad ((\delta P_1 - \delta P_2)^2)_\omega = 2(\delta Y_2^2)_\omega. \quad (6.6)$$

Потребуем теперь, чтобы параметры излучения обоих лазеров были идентичны за исключением фазы внешнего инжектируемого поля, обеспечивающего захват фазы лазерного излучения, φ_{in} : выберем значение $\varphi_{in} = 0$ для первого лазера, и $\varphi_{in} = \pi/2$ для второго лазера. Тогда, принимая во внимание результаты, полученные для этого случая в Главе 3, можем записать

$$2((\delta Q_1 + \delta Q_2)^2)_\omega = 2((\delta P_1 - \delta P_2)^2)_\omega = \frac{\omega^2 + \kappa^2[\mu^2/4 + (1-p)(1-\mu)]}{\omega^2 + \kappa^2(1-\mu/2)^2}. \quad (6.7)$$

При пуассоновской статистике накачки лазеров ($p=0$),

$$2((\delta Q_1 + \delta Q_2)^2)_\omega = 2((\delta P_1 - \delta P_2)^2)_\omega = 1,$$

а значит в системе не возникает никакого перепутывания.

Однако, при $p = 1$ (суб-пуассоновская статистика),

$$2((\delta Q_1 + \delta Q_2)^2)_\omega = 2((\delta P_1 - \delta P_2)^2)_\omega = \frac{\omega^2 + \kappa^2\mu^2/4}{\omega^2 + \kappa^2}. \quad (6.8)$$

Видно, что в этом случае критерий Дуана выполнен для частот, лежащих в диапазоне $\omega \ll \kappa$.

Таким образом, можно заключить, что система из двух суб-пуассоновских лазеров с захватом фазы может служить источником перепутанного света, что позволяет рассматривать ее как ресурс для квантовых информационных приложений. Ниже мы рассмотрим особенности использования такого источника широкополосного перепутанного света в схемах квантового плотного кодирования и квантовой телепортации.

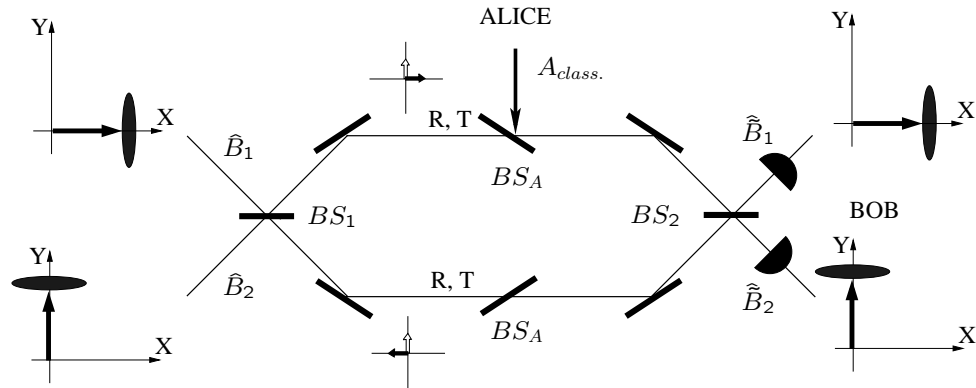


Рис. 6.1: Схема квантового плотного кодирования.

6.1.2 Схема плотного кодирования

Схема плотного кодирования, которую мы будем рассматривать здесь, аналогична обсуждавшейся в Главе 5. Принципиальное отличие заключается в свойствах излучения, в котором закодирована информация, а также в свойствах световых полей, на фоне которых она передается. В предыдущей главе мы обсуждали кодирование пространственно-многомодового сигнала, игнорируя его временные степени свободы, что было продиктовано особенностями излучения ОПУ, временной спектр которого слишком широк для использования в информационных протоколах. Здесь мы, напротив, оставим за рамками рассмотрения пространственную структуру излучения лазера и обсудим, как его временные степени свободы могут быть задействованы для передачи информации.

Условная схема для реализации протокола изображена на рис. 6.1. Схема базируется на использовании интерферометра Маха-Цендера. Оптические элементы разделяют схему на несколько частей, для каждой из которых удобно использовать свои обозначения для полевых амплитуд. Два источника сжатого света испускают лучи с амплитудами $\hat{S}_1(t)$ и $\hat{S}_2(t)$. Как было сказано выше, потребуем полной идентичности источников, но будем полагать, что их поля сжаты во взаимно ортогональных квадратурах. Смешиваясь на симметричном светоделителе BS_1 , эти поля превращаются

в два луча в перепутанном состоянии. Обозначим амплитуды перепутанных лучей $\hat{E}_1(t)$ и $\hat{E}_2(t)$ (6.2).

Луч \hat{E}_1 в верхнем плече интерферометра смешивается на светоделителе BS_A с сигналом Алисы $\hat{A}(t)$, содержащем информацию, передаваемую Бобу. Сигнал Алисы можно представить в виде суммы с-числовой амплитуды $A(t)$, содержащей информацию, (классический сигнал) и оператора вакуумного шума $\hat{A}_{vac.1}$:

$$\hat{A}(t) = A(t) + \hat{A}_{vac.1}(t). \quad (6.9)$$

Таким образом, амплитуда поля в верхнем плече интерферометра после светоделительной пластины BS_A преобразуется следующим образом:

$$\hat{E}_1(t) \rightarrow \sqrt{\mathcal{T}}\hat{E}_1(t) + \sqrt{\mathcal{R}}\left(A(t) + \hat{A}_{vac.1}(t)\right), \quad (6.10)$$

где \mathcal{T} и \mathcal{R} - коэффициенты пропускания и отражения светоделительной пластины BS_A , соответственно ($\mathcal{T} + \mathcal{R}=1$).

Важным свойством интерферометра Маха-Цендера является восстановление квантового состояния входного поля на выходе интерферометра. Т.е., если бы в верхнем плече интерферометра отсутствовал светоделитель BS_A , примешивающий сигнал Алисы, то два независимых входных сжатых луча превратились бы после светоделителя BS_2 в идентичные независимые сжатые поля. Другими словами, свойство сохранять квантовое состояние поля присуще симметричному интерферометру. Таким образом для сохранения симметрии интерферометра в нижнее плечо необходимо ввести светоделитель, аналогичный по пропускным свойствам пластине BS_A (но, конечно, не предполагающий наличия сигнального воздействия) Тогда луч \hat{E}_2 трансформируется следующим образом:

$$\hat{E}_2(t) \rightarrow \sqrt{\mathcal{T}}\hat{E}_2(t) + \sqrt{\mathcal{R}}\hat{A}_{vac.2}(t). \quad (6.11)$$

В результате, лучи на выходе интерферометра, приходящие к Бобу, имеют вид:

$$\hat{B}_1(t) = \sqrt{\mathcal{R}/2} \left(A(t) + \hat{A}_{vac.1}(t) + \hat{A}_{vac.2}(t) \right) + \sqrt{\mathcal{T}} \hat{S}_1(t), \quad (6.12)$$

$$\hat{B}_2(t) = \sqrt{\mathcal{R}/2} \left(A(t) + \hat{A}_{vac.1}(t) - \hat{A}_{vac.2}(t) \right) + \sqrt{\mathcal{T}} \hat{S}_2(t). \quad (6.13)$$

Видно, что сигнал, отправленный Алисой появляется в обоих выходных лучах, хотя исходно он был введен только в один из них. Следующий этап протокола - это измерение Бобом квадратур выходных полей и извлечение информации, отправленной Алисой.

6.1.3 Отношение сигнал-шум в спектральном представлении

Боб мог бы измерять два выходных поля $\hat{B}_1(t)$ и $\hat{B}_2(t)$ на двух независимых фотодетекторах. Этой процедуре соответствовали бы операторы фототоков

$$\hat{i}_m(t) = \hat{B}_m^\dagger(t) \hat{B}_m(t), \quad m = 1, 2. \quad (6.14)$$

Однако, схема плотного кодирования требует измерения квадратурных компонент полей, так что предполагается, что Боб будет производить балансное гомодинное детектирование. Операторы флуктуаций фототока $\delta \hat{i}_m(t) = \hat{i}_m(t) - \langle \hat{i}_m \rangle$ в этом случае записываются в виде

$$\delta \hat{i}_m(t) = \beta_m^* \delta \hat{B}_m(t) + \beta_m \delta \hat{B}_m^\dagger(t), \quad (6.15)$$

где β_m - это амплитуды локальных осцилляторов на первом и втором детекторах. Выберем фазы локальных осцилляторов так, чтобы $\beta_1 = \beta_1^* \equiv \beta$ и $\beta_2 = -\beta_2^* \equiv i\beta$.

Тогда флуктуации фототоков примут вид

$$\delta \hat{i}_1(t) = \beta \left(\delta \hat{B}_1(t) + \delta \hat{B}_1^\dagger(t) \right), \quad \delta \hat{i}_2(t) = i\beta \left(\delta \hat{B}_2(t) - \delta \hat{B}_2^\dagger(t) \right). \quad (6.16)$$

Такой выбор обеспечивает выделение на каждом из детекторов одной из двух взаимно ортогональных квадратур, притом измеряются именно сжатые квадратуры полей.

Опуская хорошо известную процедуру вычислений, получим спектр фототока на каждом из фотодетекторов:

$$(\delta i_m^2)_\omega = \beta^2 [\mathcal{R} + \mathcal{T} 4(\delta X_1^2)_\omega + \mathcal{R} \sigma_\omega^A]. \quad (6.17)$$

Здесь мы воспользовались сделанным ранее предположением об идентичности лазерных источников перепутанного света во всем, за исключением фаз синхронизирующего поля, обеспечивающих фазовые сдвиги, равные, соответственно, нулю и $\pi/2$. Такое требование обеспечивает равенства $(\delta X_1^2)_\omega = (\delta Y_2^2)_\omega$ и $(\delta Y_1^2)_\omega = (\delta X_2^2)_\omega$. Отношение сигнал-шум в обсуждаемой измерительной схеме имеет вид

$$\text{SNR}_\omega = \frac{\mathcal{R} \sigma_\omega^A}{\mathcal{R} + \mathcal{T} 4(\delta X_1^2)_\omega}, \quad (6.18)$$

откуда не трудно получить, что в режиме насыщения лазерной генерации эта величина равна

$$\text{SNR}_\omega = \frac{\mathcal{R} \sigma_\omega^A [\omega^2 + (1 - \mu/2)^2 \kappa^2]}{\omega^2 + (1 - \mu/2)^2 \kappa^2 - \mathcal{T} p (1 - \mu) \kappa^2}. \quad (6.19)$$

Выражение (6.24) получено в предположении, что фурье-компоненты A_ω амплитуды сигнала Алисы являются взаимно независимыми случайными величинами, которым можно сопоставить вероятностное распределение; мы выберем его в виде гауссовской функции:

$$W(A_\omega) = \frac{1}{\pi \sigma_\omega^A} \exp\left(-\frac{|A_\omega|^2}{\sigma_\omega^A}\right). \quad (6.20)$$

Тогда среднее значение сигнала Алисы равно нулю $\bar{A}_\omega = 0$, его спектральная плотность определяется дисперсией

$$\overline{|A_\omega|^2} = \sigma_\omega^A, \quad (6.21)$$

для которой мы также будем предполагать гауссовскую форму зависимости от частоты:

$$\sigma_\omega^A = \frac{P}{\sqrt{\pi \Delta \omega_A^2 / 2}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\Delta \omega_A^2 / 2}\right), \quad (6.22)$$

где P - это интегральная плотность потока сигнала Алисы (среднее число фотонов в секунду) и $\Delta\omega_A$ - спектральная ширина сигнала Алисы.

Если лазеры генерируют излучение с пуассоновской статистикой ($p = 0$), то сигнал наблюдается на фоне дробового шума. Это позволяет нам оценить минимальное значение отношения сигнал-шум (в отсутствие технических шумов):

$$\text{SNR}_\omega^{\min} = \mathcal{R} \sigma_\omega^A. \quad (6.23)$$

В суб-пуассоновском режиме генерации лазеров $p = 1$ полученное выражение становится частотно-зависимым

$$\text{SNR}_\omega = \frac{\omega^2 + \kappa^2}{\omega^2 + (\mathcal{R} + \mu^2/4)\kappa^2} \mathcal{R} \sigma_\omega^A. \quad (6.24)$$

и достигает своего максимума при $\Delta\omega_A \ll \kappa$.

Множитель перед минимальным отношением сигнал-шум зависит от трех параметров: \mathcal{R} и \mathcal{T} ($\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$) определяют возможности оптимально ввести в канал передачи сигнал Алисы, параметр $\mu \ll 1$ ограничивает мощность синхронизирующего поля в лазерах. Не трудно увидеть, что этот множитель может стать очень большим, когда режим генерации лазеров выбран подходящим образом и $\mathcal{R} \ll 1$.

6.1.4 Взаимная информация Шеннона

Информационная емкость квантового канала в протоколе плотного кодирования оценивается посредством *взаимной информации Шеннона (ВИШ)* для плотности потока сигнальных фотонов [G5]. Предполагая гауссову статистику информационного канала, можем выразить плотность потока ВИШ через отношение сигнал-шум:

$$I^{Sh} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + \text{SNR}_\omega) d\omega. \quad (6.25)$$

Подставляя в это выражение формулу (6.24) и выбирая спектральную дисперсию сигнала Алисы в виде распределения Гаусса (6.22), можем вычислить плотность потока ВИШ в явном виде.

В случае пуассоновского лазера ($p=0$), плотность потока ВИШ имеет вид:

$$I^{Sh} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{R}P}{\sqrt{\pi\Delta\omega_A^2/2}} e^{-\frac{\omega^2}{\Delta\omega_A^2/2}} \right] d\omega. \quad (6.26)$$

Если сигнал Алисы достаточно слаб, так что $\mathcal{R}P \ll \Delta\omega_A$ (а именно передача слабых сигналов и требует использования квантового канала связи, т.е. является основным приложением квантового плотного кодирования), этот интеграл можно вычислить в явном виде:

$$I^{Sh} = \mathcal{R}P, \quad (6.27)$$

что означает, что плотность потока ВИШ в точности равна плотности сигнальных фотонов Алисы, попадающих в информационный канал.

Для нас наибольший интерес представляет квантовый режим работы канала связи, а следовательно работа лазеров в суб-пуассоновском режиме генерации $p = 1$. В этом случае ВИШ приобретает вид

$$I^{Sh} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[1 + \frac{\omega^2 + \kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2(\mathcal{R} + \mu^2/4)} \frac{\mathcal{R}P}{\sqrt{\pi\Delta\omega_A^2/2}} e^{-\frac{\omega^2}{\Delta\omega_A^2/2}} \right] d\omega. \quad (6.28)$$

Выражение (6.28) удобно исследовать численно, вводя безразмерные параметры

$$2\pi I^S/\kappa = \mathcal{I}^S \quad \omega/\kappa \rightarrow \omega, \quad 2\pi\Delta\omega_A/\kappa = d_A, \quad 2\pi P/\kappa = \mathcal{P}. \quad (6.29)$$

Результат численного интегрирования представлен на рис. 6.2. Кривые представляют зависимости безразмерного потока взаимной информации \mathcal{I}^S от нормированной спектральной ширины сигнала Алисы d_A . Нижняя кривая отвечает случаю пуассоновского режима генерации лазеров ($p = 0$), в то время как все остальные кривые соответствуют суб-пуассоновскому режиму ($p = 1$) с различными значениями параметра синхронизации $\lambda = \mu^2/4$, лежащими в диапазоне от 0.1 до 0.001. Самая верхняя

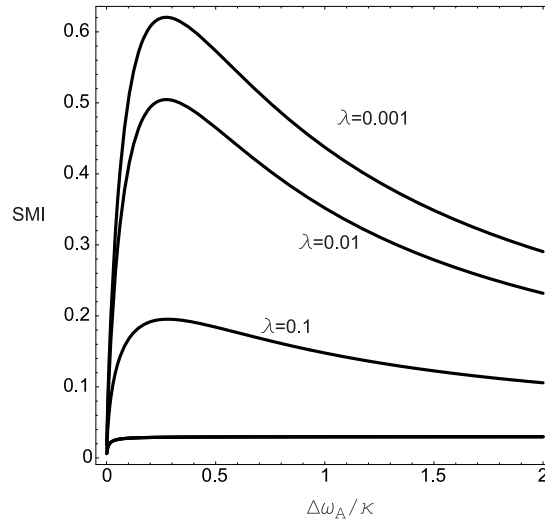


Рис. 6.2: Частотная зависимость потока взаимной информации. Параметры расчета: $\sqrt{\mathcal{R}} = 0.1$, $\mathcal{P} = 2\pi P/\kappa = 3$

кривая отвечает значению $\lambda = 0.001$. Следует отметить, что дальнейшее уменьшение значения λ не приводит к изменению хода верхней кривой. Причина такого насыщения кроется в том, что параметр синхронизации λ фигурирует в выражении для взаимной информации не сам по себе, а только в комбинации $\lambda + \mathcal{R}$, а в наших расчетах выбрано значение $\mathcal{R} = 0.01$. Таким образом, видно, что передаваемая информация может быть увеличена путем уменьшения коэффициента отражения светоделителя BS_A (т.е. когда квантовый свет еще меньше теряется в канале).

Как видно, рис. 6.2 демонстрирует значительное преимущество от использования лазера в суб-пуассоновском режиме. В этом случае обезразмеренное значение ВИШ достигает 0.6, в то время как при передаче информации в классическом канале связи (на фоне вакуумных шумов) эта величина достигает лишь значения 0.04. Это различие зависит от величины P/κ , которая выбрана в нашем расчете так, что $\mathcal{P} = 2\pi P/\kappa = 3$. При увеличении P/κ разница между использованием классического и квантового каналов становится менее выраженной и практически пропадает при $P/\kappa = 3000$.

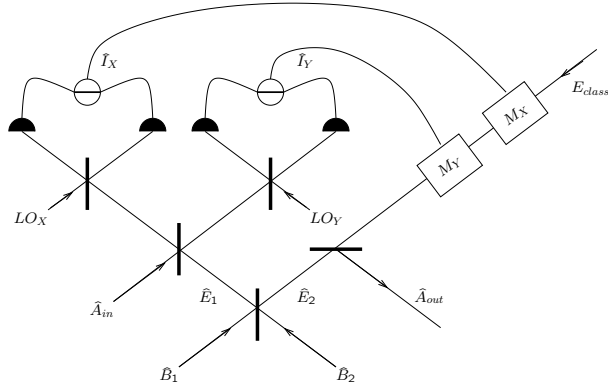


Рис. 6.3: Протокол квантовой телепортации.

6.2 Протокол квантовой телепортации с использованием лазерного излучения

6.2.1 Принципиальная схема

Обсуждая протокол квантовой телепортации, мы будем опираться на схему, предложенную и реализованную в работе [127]. Она изображена на рис. 6.3. Также как и в схеме квантового плотного кодирования, амплитуды $\hat{S}_1(t)$ и $\hat{S}_2(t)$ описывают излучение двух независимых лазерных источников, генерирующих сжатый свет, преобразуемое на симметричном светоделителе в два луча $\hat{E}_1(t)$ и $\hat{E}_2(t)$, находящиеся в перепутанном состоянии. Один из перепутанных лучей смешивается на симметричном светоделителе с сигналом Алисы $\hat{A}_{in}(t)$:

$$\hat{B}_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{A}_{in}(t) + \hat{E}_1(t) \right), \quad \hat{B}_y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\hat{A}_{in}(t) + \hat{E}_1(t) \right). \quad (6.30)$$

Затем, выбирая подходящим образом фазы и амплитуды локальных осцилляторов LO_X и LO_Y , Алиса производит измерение амплитудной квадратурной компоненты поля $\hat{B}_x(t)$ и фазовой квадратурной компоненты $\hat{B}_y(t)$. При этом в ее распоряжении оказываются фототоки

$$\hat{i}_x(t) = \beta \left(\hat{B}_x^\dagger(t) + \hat{B}_x(t) \right), \quad \hat{i}_y(t) = i\beta \left(\hat{B}_y^\dagger(t) - \hat{B}_y(t) \right) \quad (6.31)$$

Значения этих измеренных фототоков Алиса передает Бобу по классическим линиям связи. Боб использует эти фототоки для реконструкции поля $\hat{A}_{out}(t)$ с помощью двух модуляторов M_x и M_y , которые модулируют соответствующие квадратурные компоненты вспомогательной плоской когерентной световой волны со средней амплитудой E_0 . После прохождения через модуляторы амплитуда поля имеет вид

$$\hat{E}(t) = E_0 + \xi \left(\hat{i}_x(t) - i \hat{i}_y(t) \right), \quad (6.32)$$

где коэффициент ξ описывает эффективность модуляции. Смешивая это поле со вторым лучом из ЭПР-пары на светоделительной пластине с высоким коэффициентом отражения ($\mathcal{R} \approx 1$, $\mathcal{T} \ll 1$, $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$), Боб воспроизводит свою копию сигнала Алисы:

$$\hat{A}_{out}(t) = \hat{A}_{in}(t) + \hat{F}(t), \quad \hat{F}(t) = \sqrt{2} \left(\delta \hat{X}_1(t) - i \delta \hat{Y}_2(t) \right). \quad (6.33)$$

Эти равенства предполагают выполнение следующих соотношений:

$$\xi \beta \sqrt{2\mathcal{T}} = 1, \quad \sqrt{\mathcal{T}}/2 E_0 + \langle X_1 \rangle - i \langle Y_2 \rangle = 0. \quad (6.34)$$

Здесь квадратурные компоненты \hat{X} и \hat{Y} введены согласно определению:

$$\hat{S}_m = \hat{X}_m + i \hat{Y}_m, \quad m = 1, 2, \quad (6.35)$$

а флуктуации этих квадратур подчиняются равенствам

$$\hat{X}_m = \langle \hat{X}_m \rangle + \delta \hat{X}_m, \quad \hat{Y}_m = \langle \hat{Y}_m \rangle + \delta \hat{Y}_m. \quad (6.36)$$

Таким образом, сигнал Боба тем лучше восстанавливает сигнал Алисы, чем меньше слагаемое $\hat{F}(t)$, отвечающее избыточному шуму, связанному с процессом передачи сигнала. Это слагаемое связано с вакуумными флуктуациями взаимно ортогональных сжатых квадратур полей суб-пуассоновских лазеров, используемых в протоколе телепортации. Очевидно, что для идеально сжатых полей оно равно нулю. Однако, как мы уже видели, степень сжатия отличается для разных спектральных мод, поэтому здесь мы считаем разумным перейти к спектральному представлению.

В фурье-представлении оператор поля на выходе схемы телепортации имеет вид:

$$\hat{A}_{out,\omega} = \hat{A}_{in,\omega} + \hat{F}_\omega, \quad \hat{F}_\omega = \sqrt{2} (\delta\hat{X}_{1,\omega} - i \delta\hat{Y}_{2,\omega}). \quad (6.37)$$

В следующем разделе мы продемонстрируем насколько эффективно, используя сжатые состояния лазерного излучения, можно добиться уменьшения шумовой составляющей и увеличить верность телепортации. Отличительной особенностью нашего рассмотрения будет не только выбор конкретного источника сжатого света, но и учет широкополосности передаваемого сигнала. При этом мы перейдем от понятия верности телепортации к определению спектральной верности.

6.2.2 Спектральная верность протокола телепортации

Как хорошо известно, количественной мерой качества телепортации является так называемая верность (fidelity), введенная в работе [113] для одномодового поля. Обобщение этой величины для оценки многомодовой телепортации [145, 146], сделанное для пространственно многомодовых полей, показало, что оценка качества телепортации многомодового объекта как целого оказывается не достаточно информативной величиной. В самом деле, если хоть одна мода существенно многомодового объекта передается не точно (с верностью много меньше 1), значение верности телепортации всего объекта стремится к 0. Более того, если каждая из мод передается с высокой, но не идеальной верностью, то совокупный результат, являясь произведением верностей для каждой из мод, опять же стремится к 0 для существенно многомодового объекта. Таким образом, парадоксальность этой общей характеристики и необходимость обсуждать телепортацию поля в свободном пространстве (объекта заведомо многомодового), побудили нас к рассмотрению спектральной верности телепортации:

$$\mathcal{F}_\omega = \text{Tr} (\hat{\rho}_\omega^{in} \hat{\rho}_\omega^{out}) / \text{Tr} (\hat{\rho}_\omega^{in})^2. \quad (6.38)$$

Здесь $\hat{\rho}_\omega^{in}$ и $\hat{\rho}_\omega^{out}$ - матрицы плотности осциллятора с частотой ω на входе и выходе схемы телепортации, соответственно. Введенная таким образом величина характе-

ризует верность телепортации состояния одного монохроматического осциллятора с частотой ω . Так как схема передачи сигнала линейна, ее работу можно представить как параллельную телепортацию состояний монохроматических осцилляторов.

Для чистого состояния это выражение превращается в хорошо известную меру $\mathcal{F} = |\langle \psi_{in} | \psi_{out} \rangle|^2$.

Используя формализм функции Вигнера это определение можно записать в форме:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}_\omega^{in} \hat{\rho}_\omega^{out}) &= \pi \int d^2\alpha W_\omega^{in}(\alpha) W_\omega^{out}(\alpha), \\ \text{Tr}(\hat{\rho}_\omega^{in})^2 &= \pi \int d^2\alpha (W_\omega^{in}(\alpha))^2. \end{aligned} \quad (6.39)$$

где $W_\omega^{in}(\alpha)$ и $W_\omega^{out}(\alpha)$ - функции Вигнера осциллятора с частотой ω на входе и выходе схемы телепортации, соответственно. В нашем случае функции Вигнера имеют гауссовскую форму:

$$W_\omega^{in}(\alpha_\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x,\omega}^{in}}} \exp\left(-\frac{\delta X_\omega^2}{2\sigma_{x,\omega}^{in}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{y,\omega}^{in}}} \exp\left(-\frac{\delta Y_\omega^2}{2\sigma_{y,\omega}^{in}}\right), \quad (6.40)$$

$$W_\omega^{out}(\alpha_\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x,\omega}^{out}}} \exp\left(-\frac{\delta X_\omega^2}{2\sigma_{x,\omega}^{out}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{y,\omega}^{out}}} \exp\left(-\frac{\delta Y_\omega^2}{2\sigma_{y,\omega}^{out}}\right), \quad (6.41)$$

$$\alpha_\omega = X_\omega + iY_\omega.$$

Подставляя эти функции в уравнения (6.39) и вычисляя интегралы, получим:

$$\mathcal{F}_\omega = \frac{2\sqrt{\sigma_{x,\omega}^{in}\sigma_{y,\omega}^{in}}}{\sqrt{(\sigma_{x,\omega}^{in} + \sigma_{x,\omega}^{out})(\sigma_{y,\omega}^{in} + \sigma_{y,\omega}^{out})}}. \quad (6.42)$$

Из выражения (6.37) следует, что

$$(\delta X_{out}^2)_\omega = (\delta X_{in}^2)_\omega + 2(\delta X_1^2)_\omega, \quad (\delta Y_{out}^2)_\omega = (\delta Y_{in}^2)_\omega + 2(\delta Y_2^2)_\omega, \quad (6.43)$$

Так как $\sigma_{x,\omega}^{in,out} = (\delta X_{in,out}^2)_\omega$ и $\sigma_{y,\omega}^{in,out} = (\delta Y_{in,out}^2)_\omega$, то спектральная верность телепортации принимает вид:

$$\mathcal{F}_\omega = \left[\frac{1}{1 + (\delta X_1^2)_\omega / (\delta X_{in}^2)_\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1 + (\delta Y_2^2)_\omega / (\delta Y_{in}^2)_\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.44)$$

При телепортации света, находящегося в когерентном состоянии, $(\delta X_{in}^2)_\omega = (\delta Y_{in}^2)_\omega = 1/4$, спектральная верность приобретает вид:

$$\mathcal{F}_\omega = \left[\frac{1}{1 + 4(\delta X_1^2)_\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1 + 4(\delta Y_2^2)_\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.45)$$

Подставляя в это выражение $(\delta X_1^2)_\omega = (\delta Y_2^2)_\omega$, и используя результаты, полученные в Главе 3 для спектральных плотностей квадратурных компонент суб-пуассоновского лазера с захватом фазы, приходим к следующим равенствам для спектральной верности:

$$\mathcal{F}_\omega = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2(1 - p/2)}, \quad \mathcal{F}_{\omega=0} = \frac{1}{2 - p}. \quad (6.46)$$

В случае, если лазеры работают в пуассоновском режиме генерации ($p = 0$), мы получаем ожидаемый результат для верности телепортации сигнала $\mathcal{F}_\omega = 1/2$, который, как видим, не зависит от частоты. Это классический предел верности телепортации. Однако, в случае суб-пуассоновской статистики генерации лазеров ($p = 1$) формула для верности приобретает вид

$$\mathcal{F}_\omega = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2/2}. \quad (6.47)$$

Мы видим, что на нулевой частоте $\mathcal{F}_{\omega=0} = 1$, что свидетельствует об уверенном преодолении классического предела. Мы видим, что величина спектральной верности телепортации (в отличие от верности многомодового объекта как целого) количественно характеризует возможности телепортации сигнала Алисы на фоне неклассического света и помогает оценить информационные свойства широкополосного протокола.

6.3 Особенности использования ВПГС в схемах плотного кодирования и телепортации

Нам кажется полезным привести здесь результаты использования в обсуждавшихся выше информационных протоколах другого источника широкополосного сжатого света - вырожденного параметрического генератора, основы теории генерации которого рассмотрены в Главе 3. Хотя принципиальных отличий в использовании этого излучения по-сравнению с излучением суб-пуассоновского лазера не возникает, тем не менее полезно иметь как аналитические выражения для обоих источников, так и численные оценки эффективности их использования в зависимости от параметров генераторов света. Поскольку механизм образования сжатого света для ВПГС и СПЛ существенно различается, то для нас важно не только продемонстрировать принципиальные возможности протоколов, но и показать реально достижимые на сегодня значения информационных характеристик в зависимости от конкретных параметров генераторов.

Рассмотрим сперва результаты протокола квантового плотного кодирования с использованием излучения ВПГС, предполагая, что в остальном схема соответствует предыдущему рассмотрению в этой главе, а два используемых ВПГС отличаются друг от друга только фазовыми сдвигами, выбираемыми так, чтобы создать перепутанный свет в информационном канале. Тогда, используя результаты для ВПГС, можем записать выражение для плотности потока взаимной информации Шеннона при генерации ВПГС вблизи порога:

$$I^{Sh} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[1 + \frac{\omega^2 + \kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2(\mathcal{R} + \mathcal{T}2(\mu - 1))} \frac{\mathcal{R}P}{\sqrt{\pi\Delta\omega_A^2/2}} e^{-\frac{\omega^2}{\Delta\omega_A^2/2}} \right] d\omega. \quad (6.48)$$

Напомним, что параметр μ здесь характеризует степень превышения мощностью накачки порогового значения: мы рассматриваем надпороговый режим работы ВПГС, т.е. $\mu > 1$, а значение $\mu = 1$ соответствует порогу генерации.

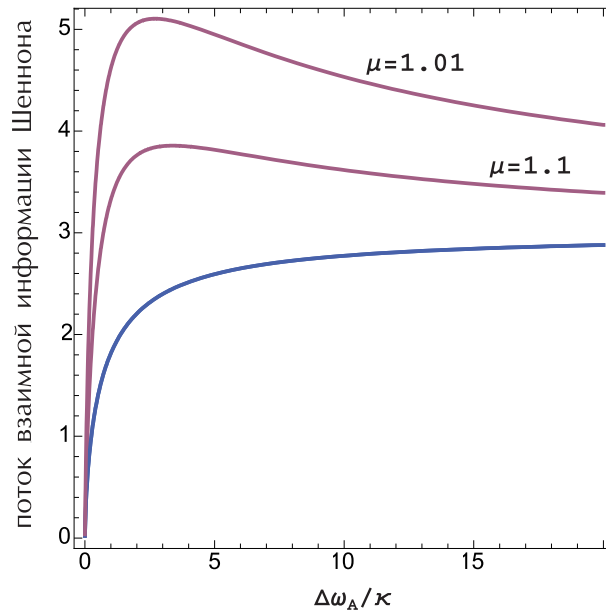


Рис. 6.4: Зависимость потока информации Шеннона $2\pi I^{Sh}/\kappa$ от спектральной ширины сигнала Алисы $\Delta\omega_A/\kappa$. Нижняя кривая отвечает генерации ВПГС высоко над порогом, две другие - при работе вблизи порога генерации при $\mu = 1.1$ и $\mu = 1.01$, соответственно. Параметры расчета: $\mathcal{R} = 0.01$, $\mathcal{P} = 2\pi P/\kappa = 300$.

Если же генератор работает высоко над порогом, то явное выражение для вычисления плотности потока информации совпадает с полученной ранее формулой (6.26) для лазера с пуассоновской накачкой.

Величина, имеющая прозрачный физический смысл, это поток взаимной информации Шеннона за время когерентности ВПГС $2\pi\kappa^{-1}$. Результаты численного расчета этой величины в двух предельных случаях, исходя из выражений (6.26) и (6.48), приведены на рис. 6.4 в зависимости от спектральной ширины сигнала Алисы, нормированной на время когерентности ВПГС.

Нижняя кривая соответствует генерации ВПГС существенно выше порога (в отсутствие сжатия). Две другие кривые вычислены для режима генерации ВПГС вблизи порога при различных значениях параметра μ . Значение $\mu = 1.1$ соответствует экспериментально реализуемым на сегодня возможностям; кривая при $\mu = 1.01$ приведена для демонстрации потенциальных возможностей схемы. Отметим, что умень-

шение μ ниже значения 1.01 не приводит к существенному изменению кривой. Это связано с тем, что фактор подавления шума $\mathcal{T}2(\mu-1)$ начинает конкурировать со значением коэффициента отражения светоделительной пластины, отвечающей за ввод сигнала Алисы, имеющий фиксированное значение в данном расчете.

Из рис. 6.4 видно, что при начальном увеличении спектральной ширины сигнала Алисы происходит линейный рост потока взаимной информации, связанный с увеличением временного разрешения во входном сигнале, другими словами, Алиса все более детализирует сигнал и поэтому он становится все более информативен.

Видно, что линейный рост на начальном участке кривых тем быстрее, чем больше сжатие сигнального излучения (чем ближе режим генерации ВПГС к порогу), так как при этом сигнал передается при более выгодном отношении сигнал/шум.

Для классического случая (при отсутствии сжатия в канале) рост продолжается до тех пор, пока поток информации приходящийся на один "элемент" сигнала Алисы не достигнет одного бита ($\mathcal{R}P/\Delta\omega_A \leq 1$). Поток взаимной информации при этом стремится к стационарному значению, равному $I^{Sh} = \mathcal{R}P$.

В отличие от классического случая, при использовании сжатого излучения поток взаимной информации имеет максимум при характерном значении спектральной ширины сигнала Алисы. При этом значении выигрыш в использовании квантового плотного кодирования по сравнению с классическим максимален. Наличие максимума, а значит "оптимальной" спектральной ширины сигнала Алисы, связано с тем, что сигнальное поле, осуществляющее передачу информации в протоколе, сжато в конечной спектральной области с шириной порядка ширины сигнальной моды κ .

Поэтому, если спектр сигнала Алисы не превышает спектральной области сжатия сигнального поля, то имеет место отмеченный выигрыш в потоке передаваемой информации по сравнению с классическим случаем.

В противной ситуации подавляющая часть сигнала передается с отношением сиг-

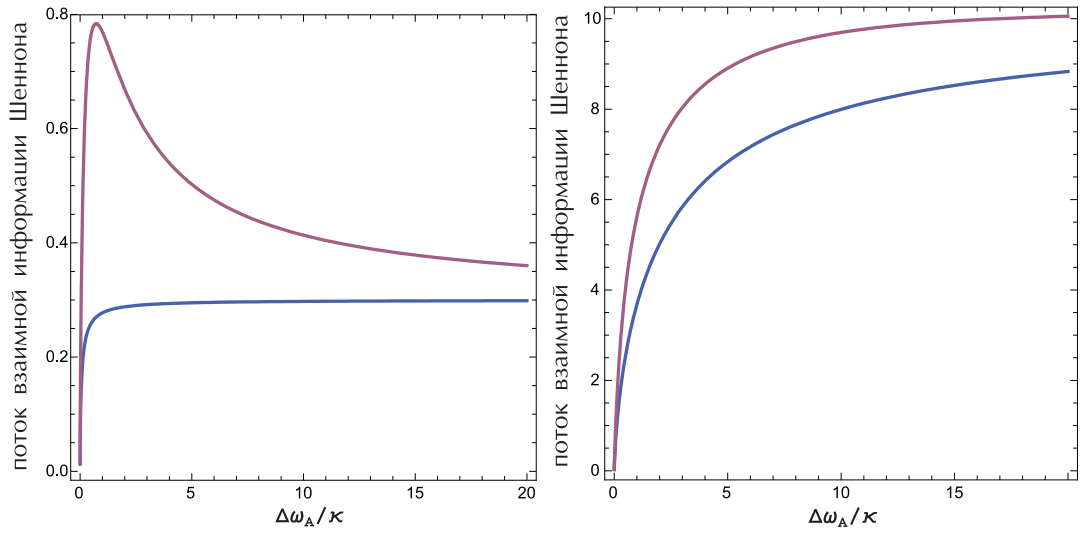


Рис. 6.5: Зависимость потока информации Шеннона $2\pi I^{Sh}/\kappa$ от спектральной ширины сигнала Алисы при значениях мощности Алисиного сигнала $\mathcal{P} = 2\pi P/\kappa = 30$ (слева) и $\mathcal{P} = 2\pi P/\kappa = 1000$ (справа). Верхние кривые на графиках отвечают генерации вблизи порога ($\mu = 1.1$), нижние - генерации ВПГС высоко над порогом. $\mathcal{R} = 0.01$.

нал/шум близким к классическому случаю, что проявляется в асимптотическом приближении кривых потока информации с $\mu = 1.1$ и $\mu = 1.01$ к значению $\mathcal{R}P$ при большой спектральной ширине сигнала Алисы.

Рис. 6.5 показывает, как будут меняться кривые при выборе различных значений мощности сигнала Алисы. При выборе меньшей мощности Алисиного сигнала, мы видим, что пик кривой потока информации становится более острым, но и более спектрально узким. В этом случае мы имеем наибольший выигрыш в использовании сжатого света ВПГС по сравнению с когерентным - кривые в максимуме различаются в 2.5 раза. Заметим, что именно малые мощности сигнала Алисы представляют наибольший интерес, т.к. как раз в этом случае прямая передача сигнала невозможна из-за низкого отношения сигнал/шум. Кривые справа на рисунке рассчитаны при высокой мощности сигнала Алисы. Видно, что, хотя абсолютные значения передаваемой информации в этом случае выше, выигрыш от использования квантового света

значительно ниже.

Обратимся теперь к результатам квантовой телепортации спектрально широкого сигнала в случае использования излучения ВПГС для подавления шумов, оценивая качество работы протокола с помощью спектральной верности, определенной ранее. Тогда выражение для спектральной верности принимает вид:

$$\mathcal{F}_\omega = \left[\frac{(\delta X_{in}^2)_\omega}{(\delta X_{in}^2)_\omega + (\delta X_2^2)_\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(\delta Y_{in}^2)_\omega}{(\delta Y_{in}^2)_\omega + (\delta Y_1^2)_\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.49)$$

Получим результат для телепортации света, находящегося в когерентном состоянии, когда $(\delta X_{in}^2)_\omega = (\delta Y_{in}^2)_\omega = 1/4$. Также как и в схеме плотного кодирования, предположим, что ВПГС отличаются друг от друга только фазовым сдвигом $\pi/2$, то есть $(\delta Y_1^2)_\omega = (\delta X_2^2)_\omega$. В итоге, используя явное выражение для спектра сжатия ВПГС, работающего выше порога, получим

$$\mathcal{F}_\omega = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \kappa^2 \mu^2}{\omega^2 + \kappa^2 (\mu^2 - 1/2)}. \quad (6.50)$$

Это выражение зависит от параметра накачки ВПГС, то есть от режима его генерации. Для ВПГС, работающего существенно выше порога ($\mu \gg 1$), сигнальное поле не обладает сжатием, что приводит к верности телепортации $\mathcal{F}_\omega = 1/2$ не зависящей от частоты. В свою очередь, при генерации ВПГС вблизи порога, когда $\mu - 1 \ll 1$, спектральную верность телепортации можно записать в виде:

$$\mathcal{F}_\omega = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 + \kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2/2}, \quad (6.51)$$

что в точности совпадает с выражением (6.47), полученным нами для схемы с лазерами.

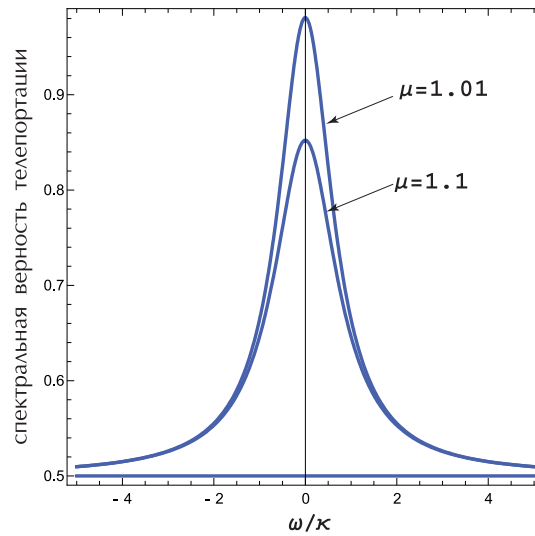


Рис. 6.6: Спектральная верность телепортации при различных значениях параметра превышения порога генерации μ . Прямая, параллельная оси абсцисс отвечает генерации ВПГС высоко над порогом, т.е. "классическому" пределу телепортации.

Интересно отметить, что, хотя прямое сравнение результатов нашего расчета с допороговым случаем [147] невозможно из-за существенного различия систем, а также, потому что оба описания неправомерно непосредственно на пороге генерации, они приводят к одинаковому результату при пороговом значении параметра накачки $\mu = 1$.

На рис. 6.6 приведены кривые спектральной верности телепортации в зависимости от безразмерной частоты излучения для различных значений превышения над порогом генерации ВПГС. Для демонстрации нами опять выбраны три режима работы ВПГС: высоко над порогом генерации $\mu \gg 1$, экспериментально достижимое на сегодня приближение к порогу $\mu = 1.1$ и значение, демонстрирующее потенциальные возможности метода $\mu = 1.01$. Видно, что верность телепортации непрерывно убывает от максимального значения на нулевой частоте $\mathcal{F}_{\omega=0}$ близкого к 1 для околупороговых значений μ до значения, соответствующего "классической" верности $\mathcal{F}_{\omega} = 1/2$, для частот $\omega \gg \kappa$. Это связано с тем, что сигнальное поле ВПГС эффективно сжато только в конечном диапазоне частот, поэтому при телепортации

широкополосного сигнала это обстоятельство необходимо учитывать.

Заключение к главе 6. Оценивая эффективность использования многомодового квантового света по сравнению с одномодовым, мы должны говорить о выигрыше применения того или другого квантового излучения по отношению к классической передаче сигнала. Как известно [138] информационная емкость одномодового квантового канала в 2 раза больше емкости классического канала. В то же время, при определенных соотношениях параметров мы можем превысить это соотношение, используя многомодовый свет. Фактически, использование многомодового света в протоколе квантового плотного кодирования приводит к возникновению дополнительной степени свободы: мы имеем возможность варьировать соотношение времени когерентности неклассического света и сигнала Алисы. При одномодовой постановке задачи, когда корректное введение этих параметров невозможно, мы ограничены случаем равенства времени когерентности сигнала Алисы и квантового света, с помощью которого этот сигнал передается (оба они формально равны бесконечности). Другими словами, оказывается, что для получения максимального выигрыша от использования квантового света Алисе следует не "закладывать" информацию в одну моду, но распределить ее по модам и использовать для передачи многомодовое квантовое излучение с оптимально подобранным временем когерентности.

Еще раз подчеркнем, что схема квантового плотного кодирования эффективна только для передачи слабо выраженных сигналов, когда отношение сигнал/шум при отсутствии сжатия много меньше единицы, так что прямая передача информации невозможна. Именно в этом случае использование сжатого света позволяет повы-

сигнал шум до значений, доступных для измерения. Как показали наши расчеты, в этом случае мы имеем максимальное преимущество в передаче информации на фоне квантового света по сравнению с классическим каналом.

Что касается схемы многомодовой телепортации, то здесь мы не можем ожидать преимуществ при передаче каждого из осцилляторов многомодового излучения, напротив, только центральная мода излучения передается с максимальной верностью, а остальные - с меньшей в меру их отстройки от несущей частоты. Однако здесь следует ставить вопрос не об улучшении качества телепортации за счет использования многомодового света, а о принципиальной возможности телепортировать спектрально широкий сигнал с верностью передачи каждой из мод выше классической. Мы показали, что даже на современном уровне экспериментальной техники многомодовое состояние со спектральной шириной порядка (или меньше) модовой ширины резонатора может быть телепортировано с верностью передачи каждой моды, заметно превосходящей классический предел.

Глава 7

Широкополосная и пространственно многомодовая квантовая память

Запись квантовых состояний света на атомную среду, с возможностью их хранения и последующего восстановления, является одним из главных вопросов квантовой коммуникации и информатики на сегодня [37–39, 148–150]. В течение последнего десятилетия, начиная с первых теоретических работ в этой области [43, 151] и появления первых экспериментальных иллюстраций возможности квантового хранения информации [152, 173], было предложено большое количество различных схем квантовой памяти (см., например, обзоры [41, 42, 153]). Основной целью квантовой памяти является хранение световых импульсов без разрушения их квантовых состояний, то есть поиск таких систем хранения, которые могли бы обеспечить возможность записи, сохранения и последующего считывания одновременно двух некоммутирующих переменных (например, двух квадратурных компонент поля). Протокол квантовой памяти для однофотонных состояний был предложен и экспериментально исследован в работах [154–157], где используется механизм отображения квантовых состояний света на долгоживущие степени свободы атомных ансамблей и ансамблей ионов в кристаллах, в работах [158–160] исследуется сохранение когерентных световых импульсов, а в работах [161, 162] - сжатых световых импульсов. Среди ключевых экспериментов по квантовой памяти нельзя не назвать работу по сохранению импульса света

в QND-протоколе памяти [163], эксперимент по записи и считыванию перепутанного света [164], экспериментальные реализации протокола фотонного эхо [165, 166].

Следует отметить, что первый из предложенных, и наиболее хорошо изученный на сегодня протокол квантовой памяти, основывается на эффекте ЕИТ, эксплуатирующем контролируемое уменьшение групповой скорости светового импульса [44, 152, 171–173]. Поиск систем, демонстрирующих существенное снижение групповой скорости проводился не только среди Λ -атомов, но и для других конфигураций атомных уровней (например, для атомов с N -конфигурацией уровней [G7]). Однако скоро проявился и главный недостаток ЕИТ-памяти: снижение групповой скорости света за счет повышения дисперсии показателя преломления неизбежно сопровождается сужением рабочей полосы частот [174, 175]. В то время как были выяснены принципиальные аспекты сохранения одной временной и одной пространственной моды [41, 167–170], потребность в увеличении числа мод стала очевидной и возник вопрос о разработке многомодовых протоколов квантовой памяти. Различные варианты спектрально-многомодовой памяти предложены в работах [176–181]. Недавно были представлены экспериментальные демонстрации спектрально-многомодовых протоколов памяти на парах щелочных металлов [182, 183], и на кристаллах с вкраплениями редкоземельных ионов [184–187].

В направлении пространственной многомодовости был также предложен ряд схем квантовой голографической памяти: в работе [122] рассмотрен протокол квантового хранения изображений, основанный на неразрушающем взаимодействии, в работе [188] используется рамановское взаимодействие с неколлинеарной конфигурацией полей. Что касается экспериментальных исследований в этой области, можно указать на работу [189], где на основе взаимодействия, описываемого эффектом электромагнитной индуцированной прозрачности (ЕИТ), было продемонстрировано хранение классического изображения на атомных парах.

Здесь мы подробно рассмотрим схему квантовой голографической памяти для коротких импульсов на основе Λ -атомов, основываясь на материалах статей [G14, G17]. Построив квантовую модель взаимодействия атомного ансамбля с импульсами сигнального и управляющего полей, мы проанализируем процессы записи и считывания информации. Подробно обсудим механизмы возникновения потерь на каждом из этапов протокола, и пути оптимизации работы схемы. Получим аналитические решения и проведем численные оценки достижимых эффективностей. Проанализируем число сохраняемых пространственных мод.

Важной частью нашего исследования будет исследование роли отстройки полей от частот переходов лямбда-атомов в работе протокола. Построив общую теорию для произвольного значения отстройки от точного резонанса до рамановского предела, мы покажем, при каких условиях можно пользоваться широко распространенными приближенными моделями (резонансной или рамановской) и к каким неточностям в оценках это приводит.

Другая схема памяти, которой мы уделим внимание здесь, предполагает сохранение достаточно длительных импульсов [G15]. В отличие от широкополосной памяти, где, благодаря краткости взаимодействия полей со средой, не успевают сработать релаксационные процессы возбужденного состояния, здесь релаксация играет значительную роль, позволяя, с одной стороны, использовать адиабатическое приближение, упрощающее задачу, а с другой - приводя к возникновению шумовых ланжевенских источников.

Для того чтобы оценить возможность сохранения в памяти не только числа фотонов, но и корреляционных свойств света, мы исследуем вопрос о сохранении сжатого света в двух указанных выше протоколах квантовой памяти [G19]. Данное исследование потребует некоторого отступления. Поскольку сама постановка задачи квантовой памяти имеет сугубо импульсный характер, прежде чем говорить о сохранении или

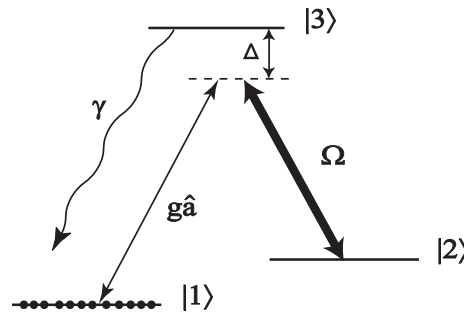


Рис. 7.1: Трехуровневая атомная среда взаимодействует с управляющим полем Ω и сигнальным полем \hat{a} .

ухудшении сжатия за счет его записи, хранения и считывания, мы должны оценить, насколько оно разрушится уже на входе системы, при вырезании импульса из стационарного потока сжатого света [G16]. Мы проверим это на примере двух источников широкополосного сжатого света, представленных в Главе 3.

Наконец, следующий аспект нашего исследования здесь касается анализа собственных мод схем памяти, выяснения их роли в оценке сохранения квантовых состояний. Основываясь на анализе спектрального состава собственных мод мы оценим потенциальные возможности протоколов с точки зрения хранения широкополосных сигналов.

7.1 Модель широкополосной квантовой памяти

Рассмотрим ансамбль трехуровневых атомов с Λ -конфигурацией энергетических уровней (см. рис. 7.1), который будет использоваться для хранения временных и пространственных мод многомодового квантового поля. Нижние энергетические уровни $|1\rangle$ и $|2\rangle$ рассматриваются как долгоживущие, распадом этих уровней на интересующих нас времена хранения информации, мы пренебрегаем. Когерентность между уровнями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, создаваемая при взаимодействии полей с атомной средой, является базовым "инструментом" для записи, хранения и считывания информации о поперечной пространственной структуре квантового поля. В начальный момент вре-

мени все атомы находятся на уровне $|1\rangle$.

Атомы взаимодействуют с двумя электромагнитными полями: сигнальным полем E_s и управляющим полем E_d , каждое из которых связывает соответствующее основное состояние атома с возбужденным. Мы полагаем, что прямоугольные импульсы управляющего и сигнального поля распространяются в положительном направлении оси z . Управляющее поле - это классическая, плоская монохроматическая волна. Квантовое сигнальное поле - это квазимонохроматическая волна с поперечным распределением, описываемая в рамках параксиального приближения. Строго говоря, в рамках квантовой механики мы не можем говорить о включении и выключении сигнального поля, так как оно существует всегда, хотя бы в вакуумном состоянии. Поэтому, говоря об импульсе сигнального поля, мы подразумеваем, что это та заведомо невакуумная часть сигнального поля, которая используется в схеме как носитель поперечного распределения поля. Здесь необходимо также подчеркнуть, что наша цель не просто записать все, что содержит в себе сигнальный импульс, но запомнить поперечное распределение поля, которое, разумеется, никак не может быть реализовано на вакуумных флуктуациях сигнального поля.

Длительности импульсов управляющего и сигнального полей T совпадают. Будем полагать, что импульсы как сигнального, так и управляющего полей очень коротки - много короче времени жизни возбужденного состояния γ^{-1} , так что в течение времени взаимодействия полей с атомами (на этапах записи и считывания) мы можем пренебречь спонтанным распадом возбужденного состояния. Отметим, что такое предположение не справедливо для времени хранения информации, таким образом, если на конец времени записи заселенность верхнего энергетического уровня окажется отличной от нуля, то нам необходимо учесть распад этой заселенности (и соответствующих когерентностей) за время хранения сигнала.

Другое предположение ограничивает длительность импульсов снизу: выбираем

ее достаточно большой по сравнению с длиной L атомного слоя: $T \gg L/c$ (c - скорость света). Такое соотношение времен позволит нам не рассматривать времена, на которых поля только начинают распространяться вдоль среды и лишь часть среды вовлечена во взаимодействие с ними. То же самое относится и к выходу импульсов из среды. Мы будем считать управляющее поле постоянным на временном интервале $[0, T]$, полагая, что как состояние сигнального поля, так и состояние среды, фактически не меняется на коротких временах входа/выхода импульса управляющего поля в/из среды. В результате, условие на соотношение времен можно записать в виде:

$$L/c \ll T_{W,R} \ll \gamma^{-1}, \quad (7.1)$$

где индексы W и R указывают на то, что данное ограничение справедливо и для процесса записи информации на среду (writing) и для процесса ее последующего считывания (readout).

Атомы будем описывать как неподвижные, положение каждого атома в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}_j = (\vec{\rho}_j, z_j)$, где z отвечает продольной координате, вектор $\vec{\rho}$ описывает положение в поперечной плоскости, а индекс j нумерует атомы в ансамбле (начало координат совместим с передней границей атомного слоя). Атомный слой имеет длину L по оси z и бесконечно протяжен в поперечной плоскости.

В дипольном приближении гамильтониан взаимодействия света с атомами имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= - \sum_j \hat{d}_j(t) \hat{E}(t, \vec{r}_j), \\ \hat{E}(t, \vec{r}_j) &= \hat{E}_s(t, \vec{r}_j) + \hat{E}_a(t, \vec{r}_j). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь $\hat{d}_j(t)$ - это оператор электрического дипольного момента j -го атома, локализованного в точке \vec{r}_j . В параксиальном и квазирезонансном приближениях гамильто-

ниан можно переписать в форме:

$$\begin{aligned} \hat{V} = & \iiint dz d^2\rho \left[i\hbar g \left[\hat{a}(z, \vec{\rho}, t) \hat{\sigma}_{31}(z, \vec{\rho}, t) e^{ik_s z - i\Delta t} \right. \right. \\ & \left. \left. - \hat{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) \hat{\sigma}_{13}(z, \vec{\rho}, t) e^{-ik_s z + i\Delta t} \right] \right. \\ & \left. + i\hbar \left[\Omega(t) \hat{\sigma}_{32}(z, \vec{\rho}, t) e^{ik_d z - i\Delta t} \right. \right. \\ & \left. \left. - \Omega^*(t) \hat{\sigma}_{23}(z, \vec{\rho}, t) e^{-ik_d z + i\Delta t} \right] \right]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь k_s и k_d - проекции на ось z волновых векторов сигнального и управляющего полей, соответственно, а $\vec{\rho} = \vec{\rho}(x, y)$. Отстройки сигнального и управляющего полей от соответствующих атомных переходов предполагаются совпадающими между собой и равными Δ , таким образом, выполнено условие двухфотонного резонанса между уровнями $|1\rangle$ и $|2\rangle$:

$$\Delta = \omega_s - \omega_{13} = \omega_d - \omega_{23}. \quad (7.4)$$

Можем определить нормированную амплитуду сигнального поля $\hat{a}(z, \vec{\rho}, t)$ соотношением

$$\hat{E}_s(\vec{r}, t) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_0 c}} e^{-i\omega_s t + ik_s z} \hat{a}(z, \vec{\rho}, t) + h.c. \quad (7.5)$$

Тогда оператор $\hat{a}(z, \vec{\rho}, t)$ является оператором уничтожения фотонов сигнального поля и при распространении поля в свободном пространстве следующие коммутационные соотношения должны быть выполнены [134]:

$$[\hat{a}(z, \vec{\rho}, t), \hat{a}^\dagger(z', \vec{\rho}', t')] = \delta^2(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta(t - t'), \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} & [\hat{a}(z, \vec{\rho}, t), \hat{a}^\dagger(z', \vec{\rho}', t)] = \\ & = c \left(1 - \frac{i}{k_s} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{c}{2k_s^2} \Delta_\perp \right) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Амплитуда $\hat{a}(z, \vec{\rho}, t)$ нормирована таким образом, что величина $\langle \hat{a}^\dagger(z, \vec{\rho}, t) \hat{a}(z, \vec{\rho}, t) \rangle$ имеет смысл среднего числа фотонов в секунду в единичном объеме. Символ Δ_\perp со-

ответствует векторному дифференциальному оператору Лапласа в поперечном пространстве векторов $\vec{\rho}$:

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (7.8)$$

Мы определили интенсивность управляющего поля с помощью частоты Раби Ω . Для простоты будем полагать эту величину вещественной $\Omega = \Omega^*$.

Константа связи между атомами и сигнальным полем определяется как

$$g = \left(\frac{\omega_s}{2\epsilon_0 \hbar c} \right)^{1/2} d_{31}. \quad (7.9)$$

где d_{31} - это элемент электрического дипольного момента, отвечающий переходу $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$. Мы определили коллективные операторы когерентностей и заселенностей как сумму по всем атомам соответствующих микроскопических переменных:

$$\hat{\sigma}_{ik}(\vec{r}, t) = \sum_j \hat{\sigma}_{ik}^j(t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_j), \quad (7.10)$$

$$\hat{N}_i(\vec{r}, t) = \sum_j \hat{\sigma}_{ii}^j(t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (7.11)$$

Для этих коллективных операторов может быть записано коммутационное соотношение, которое является прямым следствием их определения:

$$[\hat{\sigma}_{ik}(\vec{r}, t), \hat{\sigma}_{ki}(\vec{r}', t)] = \left[\hat{N}_i(\vec{r}, t) - \hat{N}_k(\vec{r}, t) \right] \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (7.12)$$

Теперь, на основе построенного гамильтониана (7.3) и коммутационных соотношений (7.7), (7.12), используя хорошо известные рецепты квантовой теории, можем записать полную систему уравнений Гайзенберга для коллективных атомных опера-

торов и амплитуды сигнального поля в параксиальном приближении:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ic}{2k_s} \Delta_{\perp} \right) \hat{a} = -cg\hat{\sigma}_{13}, \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma}_{13} = -i\Delta\hat{\sigma}_{13} + \Omega\hat{\sigma}_{12} + g\hat{a}(\hat{N}_1 - \hat{N}_3), \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma}_{12} = -\Omega\hat{\sigma}_{13} - g\hat{a}\hat{\sigma}_{32}, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma}_{32} = i\Delta\hat{\sigma}_{32} - \Omega(\hat{N}_3 - \hat{N}_2) + g\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{12}, \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{N}_1 = -g\hat{a}\hat{\sigma}_{31} - g\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{13}, \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{N}_2 = -\Omega(\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{23}), \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{N}_3 = -\frac{\partial}{\partial t} \hat{N}_1 - \frac{\partial}{\partial t} \hat{N}_2. \quad (7.19)$$

При записи уравнений (7.13)-(A.3) мы перешли к медленно меняющимся в пространстве атомным когерентностям, которые возникают вследствие замен:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{13} &\rightarrow e^{ik_s z - i\Delta t} \hat{\sigma}_{13}, \\ \hat{\sigma}_{23} &\rightarrow e^{ik_d z - i\Delta t} \hat{\sigma}_{23}, \\ \hat{\sigma}_{12} &\rightarrow e^{-i(k_d - k_s)z} \hat{\sigma}_{12}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

В построенной системе уравнений Гайзенберга мы опустили члены, связанные со спонтанной релаксацией $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$, поскольку, как было отмечено выше, мы полагаем, что скорость релаксации γ мала настолько, что ею можно пренебречь на временах взаимодействия коротких импульсов с атомами. Систему уравнений можно существенно упростить, используя приближения, представленные ниже.

Согласно определениям (7.10),(7.11), пространственное распределение коллективных атомных операторов обладает острой негладкой формой в силу дельта-локализации атомов. Каждый из атомов расположен в какой-то конкретной пространственной точке \vec{r}_i , таким образом коллективные переменные - это функции от вектора \vec{r} . В дальнейшем мы будем полагать, что атомов много, и они находятся на довольно

близких расстояниях друг от друга, хотя это расстояние и много больше длины волны рассматриваемого излучения. Таким образом, среднее расстояние между атомами в каждый момент времени много меньше, чем интересующие нас пространственные интервалы. Эта быстрая пространственная зависимость, разумеется, переносится и на все другие параметры, полевые и атомные. Упростим физическую ситуацию считая, что атомы пространственно "размазаны", тогда в среднем задача становится пространственно однородной. Мы можем формально усреднить систему уравнений (7.13)-(A.3) по положениям атомов.

В уравнении (7.14) заменим разность операторов $\widehat{N}_1 - \widehat{N}_3$ на s -число, отвечающее средней плотности атомов N . Как мы помним, в начальный момент времени атомы находятся в состоянии $|1\rangle$, что возможно обеспечить путем оптической накачки. Сделанная замена оправдана тем, что заселенность состояния $|1\rangle$ остается очень близкой к начальной в течении всего процесса памяти (записи, хранения и считывания информации), поскольку число фотонов в сигнальном импульсе много меньше числа атомов в ячейке памяти.

В уравнении (7.15), мы пренебрегаем вторым членом в правой части по сравнению с первым, поскольку, с одной стороны, $g\hat{a}$ много меньше, чем Ω (предполагается, что $|\Omega|^2 \gg g^2\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$). Кроме того, $\hat{\sigma}_{32} \ll \hat{\sigma}_{13}$, так как заселенности N_2 и N_3 малы по сравнению с N .

Таким образом построенная система уравнений (7.13)-(A.3) расцепляется и мы можем записать упрощенную систему всего из трех дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую эволюцию сигнального поля и двух

когерентностей:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_s} \nabla_{\perp}^2 \right) \hat{a}(z, \vec{\rho}, t) = -g \hat{\sigma}_{13}(z, \vec{\rho}, t), \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma}_{13}(z, \vec{\rho}, t) = -i\Delta \hat{\sigma}_{13}(z, \vec{\rho}, t) + gN \hat{a}(z, \vec{\rho}, t) + \Omega \hat{\sigma}_{12}(z, \vec{\rho}, t), \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma}_{12}(z, \vec{\rho}, t) = -\Omega \hat{\sigma}_{13}(z, \vec{\rho}, t). \quad (7.23)$$

Здесь и далее, производя усреднение по положениям атомов, мы для упрощения записи опустим соответствующие значки.

Перенормируем когерентности $\hat{\sigma}_{13}$ и $\hat{\sigma}_{12}$

$$\hat{\sigma}_{12}(z, \vec{\rho}, t) / \sqrt{N} = \hat{b}(z, \vec{\rho}, t), \quad (7.24)$$

$$\hat{\sigma}_{13}(z, \vec{\rho}, t) / \sqrt{N} = \hat{c}(z, \vec{\rho}, t) \quad (7.25)$$

так, чтобы они удовлетворяли перестановочным соотношениям для бозонных операторов:

$$[\hat{b}(\vec{r}, t), \hat{b}^{\dagger}(\vec{r}', t)] = [\hat{c}(\vec{r}, t), \hat{c}^{\dagger}(\vec{r}', t)] = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (7.26)$$

Здесь мы также приняли во внимание приближенную замену $\hat{N}_1 - \hat{N}_{2,3} \rightarrow N$.

Переходя к фурье-представлению относительно поперечных координат $\vec{\rho}$, уравнения принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}(z, t; \vec{q}) = -g\sqrt{N} \hat{c}(z, t; \vec{q}), \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{c}(z, t; \vec{q}) = -i\Delta \hat{c}(z, t; \vec{q}) + g\sqrt{N} \hat{a}(z, t; \vec{q}) + \Omega \hat{b}(z, t; \vec{q}), \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{b}(z, t; \vec{q}) = -\Omega \hat{c}(z, t; \vec{q}), \quad (7.29)$$

где мы ввели поперечный волновой вектор \vec{q} и сделали следующие замены:

$$\hat{a}(z, t; \vec{q}) \rightarrow \hat{a}(z, t; \vec{q}) e^{-iq^2 z / (2k_s)}, \quad (7.30)$$

$$\hat{b}(z, t; \vec{q}) \rightarrow \hat{b}(z, t; \vec{q}) e^{-iq^2 z / (2k_s)}, \quad (7.31)$$

$$\hat{c}(z, t; \vec{q}) \rightarrow \hat{c}(z, t; \vec{q}) e^{-iq^2 z / (2k_s)}. \quad (7.32)$$

Система уравнений (7.27)-(7.29) позволяет записать уравнение непрерывности для числа возбуждений:

$$\frac{\partial \hat{a}^\dagger \hat{a}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{b}^\dagger \hat{b}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{c}^\dagger \hat{c}}{\partial t} = 0. \quad (7.33)$$

Это уравнение означает, что процесс запоминания заключается в превращении входных фотонов слабого квантового поля в возбуждения атомных когерентностей $\hat{\sigma}_{13}$ и $\hat{\sigma}_{12}$. Как мы помним, нашей целью является конвертация информации, переносимой сигнальным полем, в долгоживущую когерентность нижних состояний $\hat{\sigma}_{12}$, таким образом, возбуждение состояния $|3\rangle$ является нежелательным эффектом, приводящим к потерям. Однако, как будет показано ниже, этот канал потерь возможно уменьшить путем выбора подходящего управляющего поля. Если, с одной стороны, интенсивность управляющего поля выбрать достаточно большой, так что осцилляции Раби на переходе $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ будут более эффективны, чем процессы спонтанного распада ($\Omega \gg \gamma$) и, с другой стороны, подобрать длительность импульсов малой настолько, чтобы атомы, под действием Раби-осцилляций не имели времени, чтобы вернуться в состояние $|3\rangle$, тогда роль третьего члена в уравнении (7.33) окажется пренебрежимо малой. Мы исследуем этот вопрос в деталях, обсуждая оптимизацию процесса памяти.

Кроме того, оставаясь в рамках наших приближений, мы пренебрегаем эффектами, связанными с запаздыванием при распространении импульса через атомную среду. Это значит, что рассматривая достаточно длительный импульс, такой что его пространственная протяженность cT много больше длины атомной ячейки L , $cT \gg L$, мы можем пренебречь временными интервалами, в течении которых фронты импульсов пробегают по среде. Формально это означает, что производная по времени в уравнении (7.21) полагается пренебрежимо малой. Для простоты далее мы будем полагать, что импульс управляющего поля имеет прямоугольный профиль во времени, т.е. в уравнениях будем считать частоту Раби постоянной на интервале

действия управляющего поля ($\Omega(t) = \text{const}$ при $0 < t < T$). Варианты управления профилем управляющего поля для увеличения эффективности памяти можно найти в работах [167–170]. Здесь мы покажем, что значительно более простой в реализации метод оптимизации протокола памяти приводит к близким результатам для эффективности протокола.

7.1.1 Общие решения

Для того чтобы решить уравнения (7.27)–(7.29), перепишем их, применяя преобразование Лапласа по времени t , которое вводится интегральным преобразованием:

$$f_s = \int_0^\infty dt f(t)e^{-st}. \quad (7.34)$$

Тогда в системе (7.27)–(7.29) второе и третье уравнения превращаются в алгебраические, а в первом уравнении частная производная заменяется на обычную:

$$\frac{d}{dz}\hat{a}_s(z; \vec{q}) = -g\sqrt{N}\hat{c}_s(z; \vec{q}) \quad (7.35)$$

$$-\hat{c}(z, 0; \vec{q}) + (s + i\Delta)\hat{c}_s(z; \vec{q}) = g\sqrt{N}\hat{a}_s(z; \vec{q}) + \Omega\hat{b}_s(z; \vec{q}), \quad (7.36)$$

$$-\hat{b}(z, 0; \vec{q}) + s\hat{b}_s(z; \vec{q}) = -\Omega\hat{c}_s(z; \vec{q}). \quad (7.37)$$

Отсюда нетрудно получить замкнутое дифференциальное уравнение для амплитуды поля $\hat{a}_s(z; \vec{q})$:

$$\frac{d\hat{a}_s(z; \vec{q})}{dz} = -\Gamma_s\hat{a}_s(z; \vec{q}) - g\sqrt{N}\hat{\alpha}_s(z; \vec{q}). \quad (7.38)$$

Здесь коэффициент Γ_s определяет скорость затухания амплитуды $\hat{a}_s(z; \vec{q})$ вдоль оси z и записывается в виде

$$\Gamma_s = \frac{g^2 N}{2} \left(\frac{\mu}{s + i\mu\tilde{\Omega}} + \frac{\nu}{s - i\nu\tilde{\Omega}} \right), \quad (7.39)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{1+r^2}, \quad \mu = 1+r, \quad \nu = 1-r. \quad (7.40)$$

Параметр r определяет безразмерную частотную отстройку $r = \Delta/(2\Omega)$.

Неоднородный член в правой части уравнения (7.38) определяется начальными условиями для среды:

$$\hat{\alpha}_s(z; \vec{q}) = \frac{1}{s(s+i\Delta) + \Omega^2} \left[\Omega \hat{b}(0, z; \vec{q}) + s \hat{c}(0, z; \vec{q}) \right]. \quad (7.41)$$

Решение уравнения (7.38) имеет вид

$$\hat{a}_s(z; \vec{q}) = \hat{a}_s(0; \vec{q}) e^{-\Gamma_s z} - g\sqrt{N} \int_0^z dz' \hat{\alpha}_s(z'; \vec{q}) e^{-\Gamma_s(z-z')}. \quad (7.42)$$

Тогда, решая уравнения (7.36)-(7.37), можно получить

$$\hat{c}_s(z; \vec{q}) = g\sqrt{N} \frac{s}{s(s+i\Delta) + \Omega^2} \hat{a}_s(z; \vec{q}) + \hat{\alpha}_s(z; \vec{q}), \quad (7.43)$$

$$\hat{b}_s(z; \vec{q}) = \frac{1}{s} \left[\hat{b}(0, z; \vec{q}) - \Omega \hat{c}_s(z; \vec{q}) \right]. \quad (7.44)$$

Теперь можно применить к решениям (7.42)-(7.44) обратное преобразование Лапласа, и найти искомые операторы. Поскольку дальнейший анализ удобно проводить в безразмерных переменных, мы запишем решения, вводя обозначения

$$\tilde{t} = \Omega t, \quad \tilde{z} = \frac{2g^2 N}{\Omega} z. \quad (7.45)$$

Физический смысл введенного обезразмеривания мы обсудим позднее.

Тогда, общие решения при произвольных начальных и граничных условиях мож-

но записать в виде:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\tilde{t}, \tilde{z}; \vec{q}) = & \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}_{in}(\tilde{t} - \tilde{t}'; \vec{q}) G_{aa}(\tilde{t}', \tilde{z}) \\ & - \frac{1}{2p} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}(0, \tilde{z} - \tilde{z}'; \vec{q}) G_{ba}(\tilde{t}, \tilde{z}') \\ & - \frac{1}{2p} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{c}(0, \tilde{z} - \tilde{z}'; \vec{q}) G_{ca}(\tilde{t}, \tilde{z}'), \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}(\tilde{t}, \tilde{z}; \vec{q}) = & -p \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}_{in}(\tilde{t} - \tilde{t}'; \vec{q}) G_{ab}(\tilde{t}', \tilde{z}) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}(0, \tilde{z} - \tilde{z}'; \vec{q}) G_{bb}(\tilde{t}, \tilde{z}') \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{c}(0, \tilde{z} - \tilde{z}'; \vec{q}) G_{cb}(\tilde{t}, \tilde{z}'), \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}(\tilde{t}, \tilde{z}; \vec{q}) = & p \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}_{in}(\tilde{t} - \tilde{t}'; \vec{q}) G_{ac}(\tilde{t}', \tilde{z}) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}(0, \tilde{z} - \tilde{z}'; \vec{q}) G_{bc}(\tilde{t}, \tilde{z}') \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{c}(0, \tilde{z} - \tilde{z}'; \vec{q}) G_{cc}(\tilde{t}, \tilde{z}'), \end{aligned} \quad (7.48)$$

где ядра $G_{ik}(\tilde{t}, \tilde{z})$ представляют собой билинейные комбинации функций $f(\tilde{t}, \tilde{z}; r)$, $f_0(\tilde{t}, \tilde{z}; r)$ и $f_1(\tilde{t}, \tilde{z}; r)$, которые, в свою очередь, зависят от нулевой и первой функции Бесселя первого ряда J_n :

$$f(\tilde{t}, \tilde{z}; r) = \delta(\tilde{t}) - e^{-i(\sqrt{1+r^2}+r)\tilde{t}} \sqrt{\frac{(1+r)\tilde{z}}{4\tilde{t}}} J_1\left(\sqrt{(1+r)\tilde{t}\tilde{z}}\right) \Theta(\tilde{t}), \quad (7.49)$$

$$f_1(\tilde{t}, \tilde{z}; r) = e^{-i(\sqrt{1+r^2}+r)\tilde{t}} \sqrt{\frac{4(1+r)\tilde{t}}{\tilde{z}}} J_1\left(\sqrt{(1+r)\tilde{t}\tilde{z}}\right) \Theta(\tilde{t}), \quad (7.50)$$

$$f_0(\tilde{t}, \tilde{z}; r) = e^{-i(\sqrt{1+r^2}+r)\tilde{t}} J_0\left(\sqrt{(1+r)\tilde{t}\tilde{z}}\right) \Theta(\tilde{t}). \quad (7.51)$$

Ядра в выражении (7.46) имеют вид

$$G_{aa}(\tilde{t}, \tilde{z}) = [f(r) * f^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}), \quad (7.52)$$

$$G_{ba}(\tilde{t}, \tilde{z}) = [f_0(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}), \quad (7.53)$$

$$G_{ca}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \frac{1+r}{2} [f_0(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}) + \frac{1-r}{2} [f(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}). \quad (7.54)$$

Здесь мы использовали обозначение для свертки двух произвольных функций $X(\tilde{t}, \tilde{z}; r)$ и $Y(\tilde{t}, \tilde{z}; r)$:

$$[X(r) * Y^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}) = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' X(\tilde{t} - \tilde{t}', \tilde{z}; r) Y^*(\tilde{t}', \tilde{z}; -r). \quad (7.55)$$

Эффективный коэффициент взаимодействия p в формулах (7.46)-(7.48) равен

$$p = \frac{g\sqrt{N}}{\Omega}. \quad (7.56)$$

В выражениях (7.49)-(7.51) $\Theta(\tilde{t})$ -это функция пропускания: $\Theta(\tilde{t}) = 1$ при $0 < \tilde{t} < \tilde{T}$ и нулю снаружи этого интервала, \tilde{T} - время взаимодействия ($\tilde{T} = \tilde{T}^W$ для процесса записи и $\tilde{T} = \tilde{T}^R$ при считывании).

Выпишем остальные ядра в выражениях (7.47) и (7.48)

$$G_{ab}(\tilde{t}, \tilde{z}) = [f_0(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}), \quad (7.57)$$

$$G_{bb}(\tilde{t}, \tilde{z}) = 2 \delta(\tilde{z}) F_1(\tilde{t}) + [f_1(r) * f_1^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}), \quad (7.58)$$

$$G_{cb}(\tilde{t}, \tilde{z}) = 2 \delta(\tilde{z}) F_2(\tilde{t}) + \frac{1+r}{2} [f_1(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}) + \frac{1-r}{2} [f_0(r) * f_1^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}), \quad (7.59)$$

и

$$G_{ac}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \frac{1+r}{2} [f_0(r) * f^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}) + \frac{1-r}{2} [f(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}), \quad (7.60)$$

$$G_{bc}(\tilde{t}, \tilde{z}) = 2 \delta(\tilde{z}) F_2(\tilde{t}) - \frac{1+r}{2} [f_1(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}) - \frac{1-r}{2} [f_0(r) * f_1^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}), \quad (7.61)$$

$$G_{cc}(\tilde{t}, \tilde{z}) = 2 \delta(\tilde{z}) F_3(\tilde{t}) - \frac{(1+r)^2}{4} [f_1(r) * f^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}) - \frac{(1-r)^2}{4} [f(r) * f_1^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}) - \frac{1-r^2}{2} [f_0(r) * f_0^*(-r)](\tilde{t}, \tilde{z}). \quad (7.62)$$

В этих формулах введены функциональные временные зависимости $F_i(\tilde{t})$, ($i = 1, 2, 3$):

$$F_1(\tilde{t}) = \left[\cos \left(\sqrt{1+r^2} \tilde{t} \right) + \frac{ir}{\sqrt{1+r^2}} \sin \left(\sqrt{1+r^2} \tilde{t} \right) \right] e^{-ir\tilde{t}}, \quad (7.63)$$

$$F_2(\tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \sin \left(\sqrt{1+r^2} \tilde{t} \right) e^{-ir\tilde{t}}, \quad (7.64)$$

$$F_3(\tilde{t}) = \left[\cos \left(\sqrt{1+r^2} \tilde{t} \right) - \frac{ir}{\sqrt{1+r^2}} \sin \left(\sqrt{1+r^2} \tilde{t} \right) \right] e^{-ir\tilde{t}}. \quad (7.65)$$

Вернемся к физическому смыслу введенных в этом разделе безразмерных координаты и времени (см. определения (7.45)). Наш анализ относится к временной шкале, на которой спонтанный распад верхнего уровня пренебрежимо мал, так что эффективная скорость эволюции системы определяется частотой Раби Ω . Тогда, величина Ω^{-1} - это естественная единица времени для нашей системы. Если теперь в определении оптической толщины среды заменить константу релаксации верхнего уровня γ на эффективную скорость распада для рассматриваемой среды (равную частоте Раби), то мы получим эффективную оптическую толщину $2g^2Nz/\Omega$, совпадающую с введенным здесь определением безразмерной координаты \tilde{z} .

Как мы видим, общий вид решения громоздок и труден в интерпретации. Однако для задач памяти нас будет интересовать лишь частный случай, определяемый модельной постановкой задачи, описанной выше.

7.1.2 Решения для процессов записи и считывания сигнала

Дальнейший анализ требует от нас конкретизации параметров, с помощью которых мы будем оценивать качество памяти. Детально вопрос о мерах оценки квантовой памяти будет рассмотрен ниже (см. раздел 7.6), здесь же мы скажем, что нашей ближайшей целью будет оценка эффективности протокола памяти, т.е. отношения полного числа фотонов в восстановленном после считывания импульсе к

полному числу входных фотонов в сигнальном поле. Такую оценку можно провести на полуклассическом языке. В самом деле, вычисление чисел фотонов адресует нас к нормально упорядоченным средним от операторов, при этом все подсистемы, находящиеся в вакуумных состояниях, не повлияют на ответ, их вклады окажутся равными нулю. Например, глядя на выражение (7.46), можно утверждать, что если перед началом записи когерентности $b(0, z; \vec{q})$ и $c(0, z; \vec{q})$ были в вакуумном состоянии (поскольку все атомы находились в состоянии $|1\rangle$), то второе и третье слагаемые не внесут вклад в вычисление эффективности. Такое рассуждение позволяет нам перейти к полуклассическим переменным при расчете эффективности, т.е. убрать "шляпки" над операторами и заменить операторы вакуумных подсистем нулями.

Отметим сразу, что анализ как эффективности, так и других характеристик квантовой памяти возможен и на квантовом языке, что будет продемонстрировано в разделе 7.4.

Используя общие решения (7.46)-(7.48) и полагая $b(0, z; \vec{q}) = c(0, z; \vec{q}) = 0$ на стадии записи сигнала и $a_{in}(t; \vec{q}) = c(0, z; \vec{q}) = 0$ на стадии его считывания, можем записать полуклассические решения для амплитуды поля $a^W(t, z; \vec{q})$ и атомной когерентности $b^W(t, z; \vec{q})$ в процессе записи:

$$a^W(\tilde{t}, \tilde{z}; \vec{q}) = \int_0^{\tilde{T}^W} d\tilde{t}' a_{in}(\tilde{t}', \vec{q}) G_{aa}(\tilde{t} - \tilde{t}', \tilde{z}), \quad (7.66)$$

$$b^W(\tilde{t}, \tilde{z}; \vec{q}) = -p \int_0^{\tilde{T}^W} d\tilde{t}' a_{in}(\tilde{t}', \vec{q}) G_{ab}(\tilde{t} - \tilde{t}', \tilde{z}), \quad (7.67)$$

где пространственные и временные переменные обезразмерены согласно (7.45).

В результате записи поля на среду формируются две когерентности - $b^W(t, z; \vec{q})$ и $c^W(t, z; \vec{q})$. Первая из них связывает два нижних уровня и является долгоживущей, именно она - главный, желательный результат процесса записи. Мы полагаем, что она сохраняется неизменной с момента окончания записи вплоть до начала считывания, так что $b^R(0, z; \vec{q}) = b^W(T^W, z; \vec{q})$. Когерентность $c^W(t, z; \vec{q})$ связывает нижний и

верхний уровни системы, а значит после окончания стадии записи она релаксирует (что приведет к неизбежным потерям, которые необходимо минимизировать). В результате к моменту считывания эта когерентность окажется в вакуумном состоянии, и мы можем положить $c^R(0, z; \vec{q}) = 0$. Полевой осциллятор сигнального поля перед началом считывания также находится в вакуумном состоянии (на входе в среду присутствует только управляющее поле), т.е. $a_{in}^R(t; \vec{q}) = 0$.

Определив начальные и граничные условия для стадии считывания, можем найти амплитуду поля на выходе из ячейки при считывании. Результат зависит от геометрии эксперимента. В случае прямого считывания (когда считывающее управляющее поле сонаправлено с полями при записи), амплитуда имеет вид

$$a_{for}^R(\tilde{t}, \tilde{L}; \vec{q}) = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{T}^W} d\tilde{t}' a_{in}(\tilde{t}', \vec{q}) \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z} G_{ab}(\tilde{t}, \tilde{z}) G_{ba}(\tilde{t}', \tilde{L} - \tilde{z}), \quad (7.68)$$

$$G_{ba}(\tilde{t}, \tilde{z}) = G_{ab}(\tilde{t}, \tilde{z}).$$

При обратном считывании (когда управляющее поле при считывании противонаправлено полям при записи), получим

$$a_{back}^R(\tilde{t}, \tilde{L}; \vec{q}) = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{T}^W} d\tilde{t}' a_{in}(\tilde{t}', \vec{q}) \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z} G_{ab}(\tilde{t}, \tilde{z}) G_{ba}(\tilde{t}', \tilde{z}). \quad (7.69)$$

Две последних формулы справедливы лишь при условии малости дифракционных вкладов, описываемых соотношениями (7.30)-(7.32). В разделе 7.3.1 мы проанализируем допустимость этого предположения и покажем, что дифракционные явления не вносят существенных изменений в случае считывания вперед, однако при обратном считывании они ограничивают число поперечных мод, доступных для хранения сигнала.

В следующем разделе мы рассмотрим процедуру оптимизации записи, основанную на выборе правильного соотношения между безразмерной длиной ячейки памяти \tilde{L} и длительностью \tilde{T}^W сигнального и управляющего импульсов. Мы сравним пред-

лагаемый подход с методом оптимизации, развитым в работе [168], в основе которого лежит выбор формы управляющего поля.

7.2 Обсуждение: процесс записи

В этом разделе мы обсудим в деталях процесс записи, то есть конвертацию сигнального поля в атомную когерентность. Для начала проведем простой расчет этого процесса на входной плоскости атомной ячейки. Для этого запишем решение (7.67) в плоскости $\tilde{z} = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{b}^W(\tilde{t}, 0) &= b^W(\tilde{t}, 0; \vec{q}) / (-2pa_{in}(\vec{q})) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - e^{-ir\tilde{t}} \left[\cos(\tilde{t}\sqrt{r^2 + 1}) + \frac{ir}{\sqrt{r^2 + 1}} \sin(\tilde{t}\sqrt{r^2 + 1}) \right] \right). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Для простоты мы положили здесь $a_{in}(\tilde{t}, \vec{q}) = \text{const}(\tilde{t})$. Нормированная атомная когерентность, определяемая первым равенством, изменяется в пределах от 0 до 1. В пределе очень малых или очень больших отстроек частоты, получим простые функциональные зависимости:

$$r \ll 1: \quad |\tilde{b}^W(\tilde{t}, 0)|^2 = \sin^4 \frac{\tilde{t}}{2}, \quad (7.71)$$

$$r \gg 1: \quad |\tilde{b}^W(\tilde{t}, 0)|^2 = \sin^2 \frac{\tilde{t}}{4r} \quad (7.72)$$

На рис. 7.2а показаны Раби-осцилляции нормированной амплитуды в отсутствие отстройки, $r = 0$, а на рис. 7.2f видим модуляцию когерентности с периодом $4\pi r$ при большом значении нормированной отстройки, $r = 10$. Увеличение r , как видно из рис.7.2b,c, сопровождается появлением биений когерентности на двух близких частотах. Дальнейший рост r (рис.7.2d,e) приводит к появлению медленных осцилляций (соответствующих слагаемому с частотой $\sqrt{r^2 + 1} - r$ в выражении (7.70)), промодулированных быстрыми осцилляциями (с частотой $\sqrt{r^2 + 1} + r$), глубина модуляции уменьшается с ростом r .

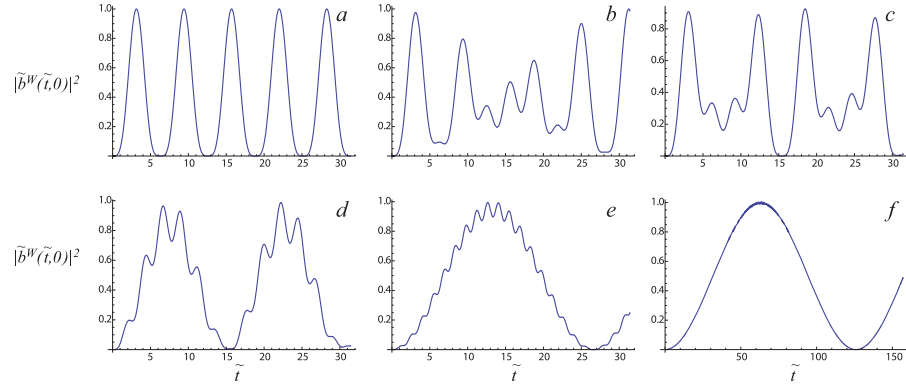


Рис. 7.2: Нормированная когерентность в плоскости $\tilde{z} = 0$ как функция времени при (a) $r = 0$, (b) $r = 0.1$, (c) $r = 0.2$, (d) $r = 1$, (e) $r = 2$, (f) $r = 10$.

Исследование изменений в поведении когерентности $|\tilde{b}^W(\tilde{t}, 0)|^2$ в зависимости от величины расстройки r позволяют нам сделать первые выводы о поведении системы при изменении отстройки. Рисунок 7.2 показывает, что даже при малых отстройках, $r = 0.1$, можно видеть значительные искажения профиля когерентности на входе среды по сравнению с резонансным взаимодействием. С другой стороны, при $r = 2$ высокочастотная модуляция медленных осцилляций уже достаточно мала, и возбуждение среды можно рассматривать как нерезонансное; для этого случая можно использовать хорошо известные решения задачи, полученные в рамановском пределе. Ниже мы проведем детальное исследование распределения когерентности для всех \tilde{z} , чтобы точнее выделить области применимости резонансной теории, рамановской теории, и проанализировать промежуточные ситуации.

При продвижении вглубь среды поведение когерентности становится значительно сложнее, поскольку теряет свой простой гармонический характер. Рисунок 7.3 демонстрирует перемещение максимума когерентности вдоль среды. Проследим за зависимостью $|\tilde{b}^W(\tilde{t}, \tilde{z})|^2$ от \tilde{z} при некотором конкретном значении $\tilde{t} = \tilde{T}^W = \pi$, представленной на рис. 7.4.

Сравнивая кривые, построенные при разных значениях отстройки, можно видеть, что величина когерентности на входе в среду, при $\tilde{z} = 0$ заметно уменьшается с

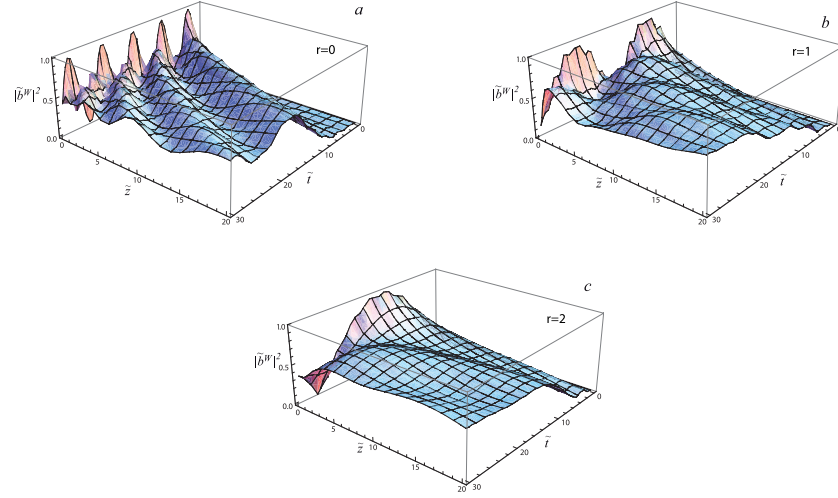


Рис. 7.3: Распределение когерентности $|\tilde{b}^W(\tilde{t}, \tilde{z})|^2$ в пространстве и времени при (a) $r = 0$, (b) $r = 1$ и (c) $r = 2$.

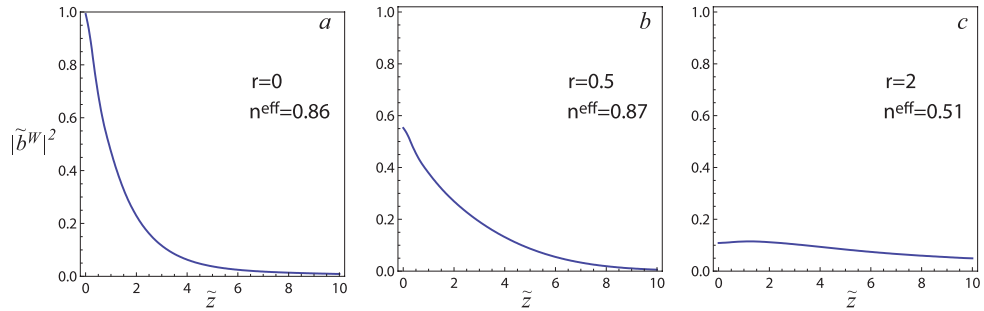


Рис. 7.4: Нормированное распределение атомной когерентности вдоль среды в момент времени $\tilde{t} = \pi$ при (a) $r = 0$, (b) $r = 0.5$, (c) $r = 2$.

ростом отстройки. Глядя на эти кривые, можно было бы подумать, что с ростом r количество информации, записанной в ячейку, уменьшается. Однако, это неверное утверждение. Для количественной оценки процесса записи введем величину n^{eff} , равную доле сигнальных фотонов, конвертируемых в когерентность \tilde{b}^W за время записи:

$$n^{eff}(\tilde{T}^W, \tilde{L}) = 2 \frac{1}{\tilde{T}^W} \int_0^{\tilde{L}} |\tilde{b}^W(\tilde{T}^W, \tilde{z})|^2 d\tilde{z}. \quad (7.73)$$

Здесь множитель $1/\tilde{T}^W$ перед интегралом является следствием вычисления энергии

входного импульса (амплитуда которого, как мы предположили, не зависит от времени), а множитель 2 - результат введенных ранее обезразмеривания и нормировки. Интеграл равен нормированной заселенности N_2 атомной среды длины \tilde{L} , формирующейся за время взаимодействия \tilde{T}^W . Поскольку, согласно нашей модели, заселение состояния $|2\rangle$ происходит исключительно вследствие когерентного рассеяния фотонов из сигнальной волны, то это значение отражает число сигнальных фотонов, записанных в атомную когерентность. Таким образом, величина n^{eff} представляет собой долю сигнальных фотонов, которую нам удалось записать. На рис. 7.4а-с. указаны результаты численного расчета этой величины. Видно, что значения n^{eff} на первых двух рисунках практически совпадают (мы видим незначительное повышение n^{eff} при $r = 0.5$ по сравнению с резонансным значением), а при $r = 2$ величина n^{eff} уменьшается менее чем в два раза.

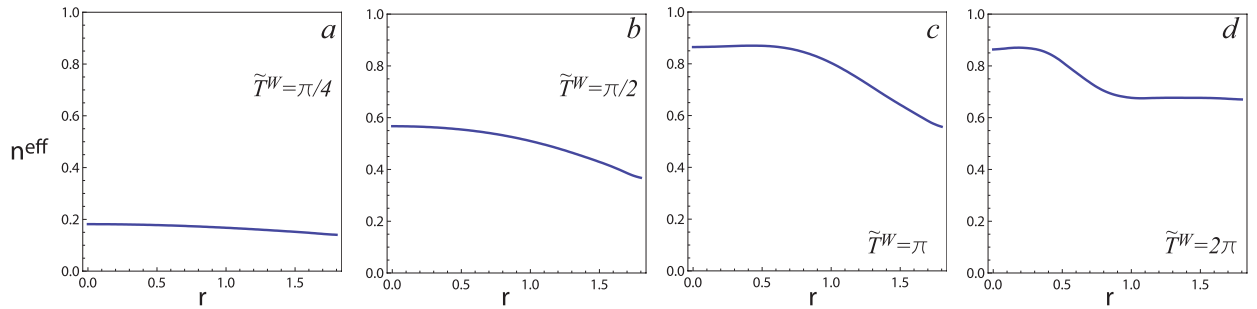


Рис. 7.5: Доля сигнальных фотонов (нормированная на энергию входного сигнального импульса) конвертированных в атомную когерентность b^W в процессе записи сигнала как функция параметра частотной отстройки r при $\tilde{L} = 10$ и (а) $\tilde{T}^W = \pi/4$, (б) $\tilde{T}^W = \pi/2$, (в) $\tilde{T}^W = \pi$, (д) $\tilde{T}^W = 2\pi$.

Интересно также проследить за зависимостью n^{eff} от r при выбранном значении длины среды и различных длительностях сигнального импульса (см. рис. 7.5). Мы видим, что доля записанных фотонов уменьшается с ростом отстройки, однако характер этого уменьшения зависит длительности записи. В частности, можно видеть, что эффективность записи слабо зависит от отстройки при $\tilde{T}^W = \pi/4$, но остается при этом довольно низкой. С увеличением длительности импульса ($\tilde{T}^W = \pi$) на

кривой появляется плато в области отстроек от 0 до 0.7. Это плато сокращается при $\tilde{T}^W = 2\pi$, однако при этом мы видим формирование второго плато в диапазоне $r \in [1, 1.8]$.

Как видно из рис. 7.3, 7.4 и 7.5, эффективность процесса записи нетривиально зависит от длительности процесса, отстройки частот и длины атомной среды. В следующем разделе мы рассмотрим оптимизацию процесса записи.

7.2.1 Оценка потерь в процессе записи

В работе [G14] нами рассмотрен алгоритм оптимизации записи, связанный с минимизацией утечки (leakage) поля. Утечка поля характеризует число сигнальных фотонов, прошедших через ячейку памяти без взаимодействия, или, другими словами, число фотонов покинувших ячейку за время записи:

$$\mathcal{L}(\tilde{T}^W, \tilde{L}) = \frac{\int_0^{\tilde{T}^W} |a^W(\tilde{t}, \tilde{L})|^2 d\tilde{t}}{\int_0^{\tilde{T}^W} |a_{in}(\tilde{t})|^2 d\tilde{t}} \times 100\%, \quad (7.74)$$

Такая оценка потерь оправдана, когда утечка является основным источником потерь в системе. Однако, как будет показано ниже, можно указать диапазон значений \tilde{T}^W , при которых решающую роль играют потери, связанные с заселением верхнего энергетического уровня. Мы покажем, что в случае рассмотрения коротких временных процессов (широкополосная память), трехуровневая атомная среда не может быть редуцирована и эффективно заменена двухуровневой моделью. Отметим, что такая ситуация специфична для случая одновременного взаимодействия сигнального и управляющего полей с атомной средой, и не проявляется в протоколах памяти, базирующихся на эффекте фотонного эхо [193]. В предыдущем разделе мы ввели величину эффективности записи n^{eff} , отражающую долю записанных сигнальных фотонов. Тогда, величина полных потерь (отнесенная к числу фотонов сигнального поля на входе в систему) может быть выражена следующим образом:

$$\mathcal{L}_c(\tilde{T}^W, \tilde{L}) = (1 - n^{eff}(\tilde{T}^W, \tilde{L})) \cdot 100\%. \quad (7.75)$$

На рис. 7.6 показаны потери, связанные с утечкой поля \mathcal{L} (синие пунктирные кривые), а также полные потери фотонов \mathcal{L}_c , (красные сплошные кривые) в зависимости от длительности процесса записи при выбранной длине среды и при трех различных значениях отстройки r .

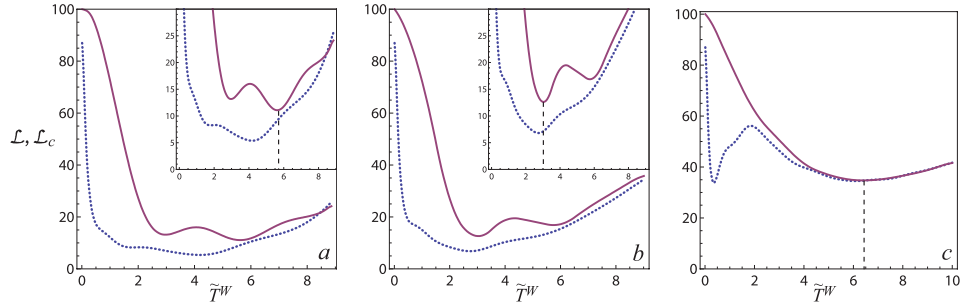


Рис. 7.6: Процесс записи: относительные потери, связанные с утечкой поля (синие пунктирные кривые) и относительные полные потери (красные сплошные кривые) (в процентах от интенсивности входного сигнала) на выходе ячейки памяти как функция времени взаимодействия \tilde{T}^W при $\tilde{L} = 10$ и (a) $r = 0$, (b) $r = 0.5$, (c) $r = 2$.

Прежде всего отметим, что эти кривые не монотонны и обладают одним или несколькими минимумами. Это означает, что для любой выбранной длины атомного слоя \tilde{L} можно указать длительность импульса, такую что данный импульс будет записываться на данную среду с минимальными потерями. Существенные различия между кривыми, отвечающими утечке поля и полным потерям, указывают на важную роль верхнего энергетического уровня в описании взаимодействия таких импульсов со средой. Однако в области минимумов, расстояние между этими кривыми не велико. Таким образом, можно сказать, что метод оптимизации, основанный на анализе утечки поля, позволяет примерно выявить "окно" значений \tilde{T}^W , при которых можно ожидать эффективную запись сигнала. В то же время, анализ полных потерь является более тонким инструментом поиска оптимального соотношения между \tilde{T}^W

и \tilde{L} . Как видно из графиков, выше некоторого значения \tilde{T}^W две кривые совпадают, т.е. все потери в системе связаны только с утечкой поля, а уровень $|3\rangle$ оказывается не заселенным в конце процесса записи. Отметим, что это вовсе не значит, что в ходе процесса записи заселения верхнего уровня не происходило, напротив, можно видеть, что на малых временах он был заселен. Можно видеть, что чем больше величина отстройки r , тем при меньших значениях \tilde{T}^W происходит опустошение верхнего уровня.

Также можем проследить за зависимостью потерь от безразмерной длины атомного слоя \tilde{L} при выбранной длительности взаимодействия \tilde{T}^W (см. рис. 7.7). В отличие

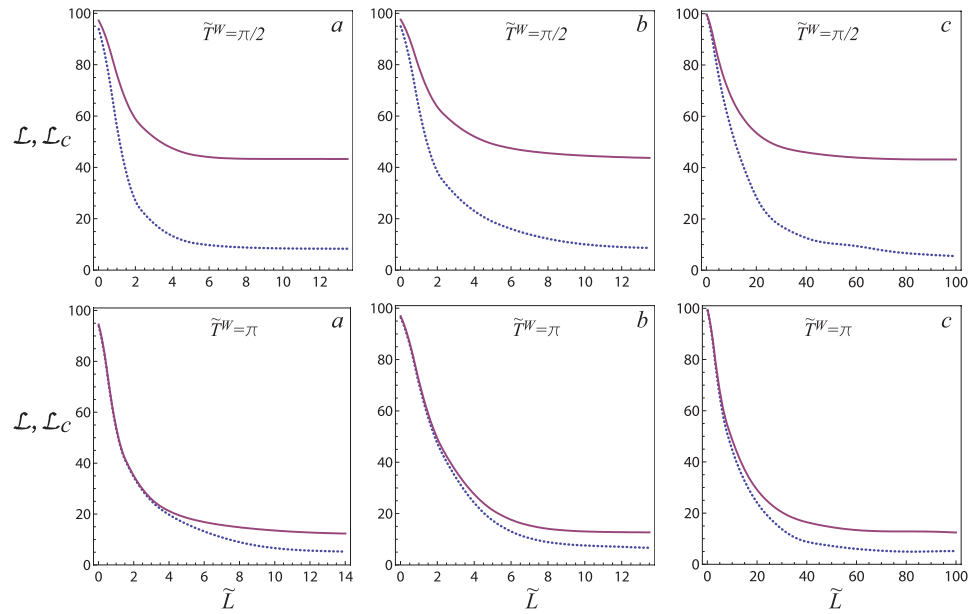


Рис. 7.7: Процесс записи: относительные потери, связанные с утечкой поля (синие пунктирные кривые) и относительные полные потери (красные сплошные кривые) (в процентах от интенсивности входного сигнала) на выходе ячейки памяти как функция безразмерной длины атомного слоя \tilde{L} при (a) $r = 0$, (b) $r = 0.5$ и (c) $r = 2$ и длительностях импульсов $\tilde{T}^W = \pi/2$ (первая строка) и $\tilde{T}^W = \pi$ (вторая строка).

от предыдущей серии зависимостей, эти кривые изменяются монотонно и демонстрируют рост эффективности с увеличением длины среды. При увеличении длительности записи кривые потерь \mathcal{L} и \mathcal{L}_c сближаются, что согласуется с анализом графиков

7.6. Отличительной особенностью этих кривых является их насыщение при больших значениях \tilde{L} . Наличие плато у кривых утечки в действительности отражает принятые ранее приближения. Напомним, что при выводе уравнений мы пренебрегли изменениями актуальных переменных на временных интервалах, связанных с распространением волновых фронтов импульса вдоль среды. Мы связали начало процесса взаимодействия $\tilde{t} = 0$ с моментом времени, когда передний волновой фронт достигает выходной грани ячейки, и окончание процесса $\tilde{t} = \tilde{T}^W$ - с моментом, когда задний волновой фронт импульса оказывается на входе ячейки. Таким образом, наша модель подразумевает, что мы всегда имеем утечку в начальный момент, не зависимо от длины атомного слоя.

Отличие уровней плато кривых \mathcal{L} и \mathcal{L}_c характеризует потери, связанные с ненулевой заселенностью атомного уровня $|3\rangle$. Можно видеть, что при достаточно больших значениях \tilde{L} эта величина постоянна (для выбранной длительности импульса). Насыщение этой величины происходит вследствие истощения сигнального поля, когда дальнейшее увеличение длины среды не может изменить заселенностей N_2 и N_3 . При этом разность между \mathcal{L} и \mathcal{L}_c определяется только длительностью импульсов. В частности, если импульс очень короткий, то многие атомы остаются к концу взаимодействия в верхнем энергетическом состоянии. Кроме того, из рисунков 7.7с можно заметить, что увеличение отстройки приводит к увеличению значений \tilde{L} , при которых происходит насыщение кривых, а также, что при значительных отстройках мы тем не менее можем добиться эффективной записи импульса, существенно увеличивая длину атомного слоя. Отметим, что существует несколько техник оптимизации протокола квантовой памяти, разработанных для схем, где верхнее состояние может быть адиабатически исключено [168, 191]. В частности, метод численной оптимизации, основанный на выборе подходящего профиля управляющего поля, предлагаемый в статье [168] позволяет добиться максимально достижимой эффективно-

сти для достаточно длительного процесса записи, однако перестает работать, если длительность взаимодействия T^W оказывается меньше отношения времени жизни возбужденного состояния γ^{-1} и оптической толщины среды d . В работе [170] авторы распространяют предложенный метод оптимизации на случай неадиабатического взаимодействия, что позволяет добиться лучших результатов для эффективного хранения коротких импульсов. С одной стороны, данная техника, пригодна лишь для случая строго резонансного взаимодействия, с другой - оптимальные значения эффективностей, достигаемые в результате ее применения, очень близки к результатам, полученным нами здесь. Таким образом, мы можем утверждать, что обсуждаемый здесь подход к оптимизации записи, наряду с явной простотой реализации, обладает преимуществом применимости в случае произвольных отстроек, и демонстрирует возможность эффективного хранения сигнала.

Интересно оценить, насколько реалистичными являются найденные нами параметры, обеспечивающие оптимальную запись сигнала. Из рис. 7.6 видно, что отношение \tilde{L}/\tilde{T}^W , обеспечивающее минимум потерь примерно равно 2. Возвращаясь к размерным переменным, можем представить это отношение в виде произведения трех сомножителей:

$$\frac{\tilde{L}}{\tilde{T}^W} = \frac{2g^2NL}{\gamma} \frac{1}{\gamma T^W} \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \quad (7.76)$$

где γ - скорость спонтанного распада верхнего энергетического уровня. Первый множитель представляет собой оптическую толщину среды (реальную, а не эффективную, о которой было сказано выше). Эта величина достигает в современных экспериментах значений 1 – 30. Вторым множителем, согласно предположению (7.1), много больше 1. Таким образом, частота Раби определяется неравенством $\gamma^2/\Omega^2 \ll 1$. Также нетрудно видеть, что данное оптимальное условие совместимо с приближенным равенством $g\sqrt{Nc} \sim \Omega$. Можно заключить, что условия, требуемые для достижения высокой эффективности, вполне реалистичны.

7.2.2 Применимость резонансного и рамановского приближений

Решения, полученные нами выше, справедливы для произвольных значений отстройки: от нулевого значения, соответствующего резонансному взаимодействию полей с атомами, до больших значений, когда применимо рамановское приближение, суть которого сводится к эффективному исключению верхнего состояния и редуцированию трехуровневой системы к двухуровневой. Таким образом, мы имеем возможность сравнить общее решение и решения, полученные в указанных пределах и выявить, с одной стороны, наибольшее значение отстройки, при котором решения, полученные в резонансном приближении, все еще остаются справедливыми (приводя к тем же значениям эффективности квантовой памяти), и с другой, наименьшее значение отстройки Δ , при котором упрощенное рамановское описание не приводит к заметным ошибкам в оценке эффективности.

На рис. 7.2b можно видеть заметное искажение по сравнению с резонансным случаем временного профиля атомной когерентности основных состояний на входе среды уже при отстройке $r = 0.1$. Однако, можно убедиться, что такая отстройка почти не влияет на эффективность всего процесса записи (характеристику, интегральную по всем слоям среды). На рис. 7.8a показана зависимость полных потерь от времени записи при фиксированной длине среды в двух случаях: при точном резонансе (синяя пунктирная кривая) и в случае отстройки $r = 0.1$ (красная сплошная кривая). Кривые совпадают с точностью до 1.5% во всем диапазоне значений \tilde{T}^W . Таким образом, несмотря на локальные различия во взаимодействии полей с атомной средой, наличие малой отстройки фактически не меняет свойств ячейки памяти как в целом. В то же время, увеличение отстройки приводит к увеличению расхождения между кривыми (при $r = 0.2$ максимальное различие достигает 4.5%, см. рис. 7.8b), однако в интересующей нас области значений \tilde{T}^W , обеспечивающей минимум потерь, кри-

вые по-прежнему близки друг к другу (совпадают в пределах 1.5%). Дальнейшее увеличение отстройки приводит к большему искажению профиля потерь, при этом сдвигаются значения \tilde{T}^W , отвечающие минимальным потерям (см. рис. 7.8с,d).

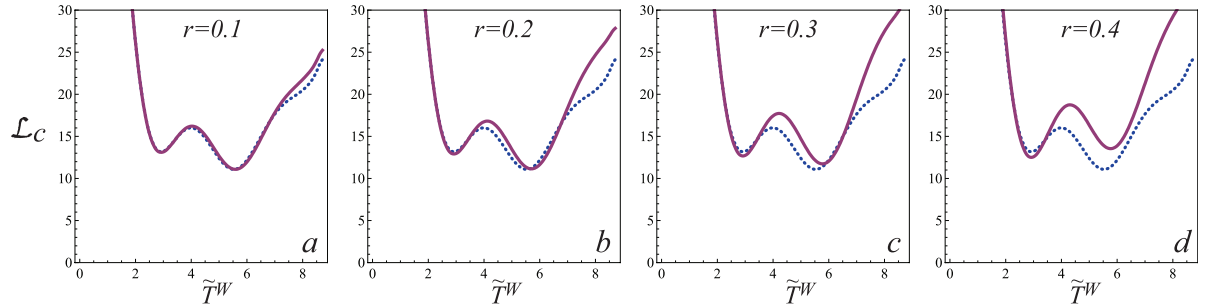


Рис. 7.8: Сравнение относительных полных потерь (в процентах от интенсивности входного сигнала) на выходе ячейки памяти как функция времени взаимодействия \tilde{T}^W в случае резонансного взаимодействия (синие пунктирные кривые) и при наличии отстройки (красные сплошные кривые); $\tilde{L} = 10$, (a) $r = 0.1$, (b) $r = 0.2$, (c) $r = 0.3$, (d) $r = 0.4$.

Перейдем теперь к анализу взаимодействия вдали от резонанса. Как можно видеть из рис. 7.9, при $r = 3$ профиль полных потерь, рассчитанный по общим формулам (7.66)-(7.67) с хорошей точностью совпадает с аналогичной кривой, вычисленной в рамановском приближении $r \gg 1$ (различие составляет порядка 2.5%, притом в минимуме кривых оно не превосходит 1%). Для меньшего значения отстройки (при $r = 2$) расхождение кривых увеличивается до 7% (около 3% в области минимума): расчет потерь, выполненный в рамановском пределе приводит к занижению значения минимально достижимых потерь и к сдвигу минимума в область меньших значений T^W . Таким образом, можно заключить, что при $r = 3$ и выше для оценки эффективности ячейки квантовой памяти с хорошей точностью можно использовать рамановское описание, однако в случае меньших отстроек необходимо пользоваться общими решениями.

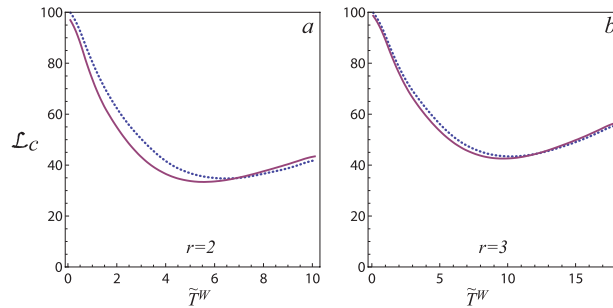


Рис. 7.9: Сравнение точных вычислений (синие пунктирные кривые) и вычислений в рамановском пределе (красные сплошные кривые). Процесс записи: относительные полные потери (в процентах от интенсивности входного сигнала) на выходе ячейки памяти как функция времени взаимодействия \tilde{T}^W при $\tilde{L} = 10$ и значениях отстроек (a) $r = 2$ и (b) $r = 3$.

7.3 Обсуждение процесса считывания

Как известно, эффективность считывания (а точнее, эффективность полного цикла памяти) определяется в первую очередь тем, насколько эффективно была проведена запись поля, от этого зависит максимально достижимое значение эффективности. Таким образом, оптимизация считывания сводится к оптимизации записи, а также выбору подходящего времени и геометрии считывания. Здесь мы еще раз сравним две стратегии оптимизации - минимизацию утечки поля и минимизацию полных потерь - и увидим к каким результатам они приводят на стадии считывания. Мы проследим, что при увеличении времени считывания эффективность увеличивается немонотонно и, сравнивая прямое и обратное считывание, покажем, что, также как и в других протоколах квантовой памяти, обратное считывание обеспечивает значительно большую эффективность. Наконец, мы проследим как частотная отстройка влияет на эффективность памяти.

Используя результаты расчета, представленного на рис. 7.6а, выберем значение длительности входного сигнала равным $\tilde{T}^W = 5.5$, что обеспечивает минимум полных потерь в процессе записи.

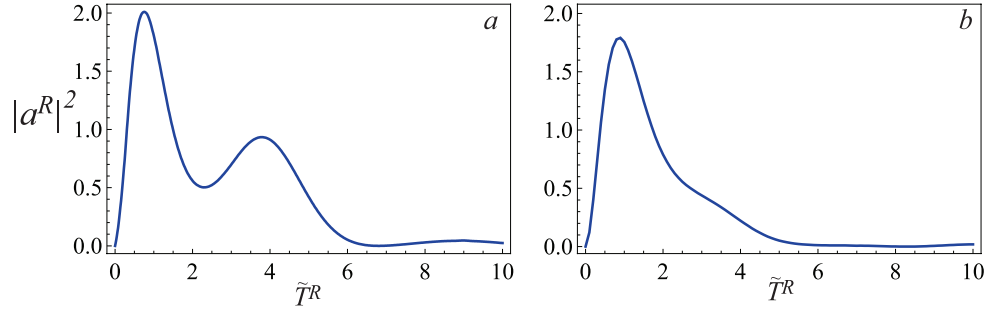


Рис. 7.10: Процесс считывания: интенсивность поля $|a^R(\tilde{T}^R, \tilde{L})|^2$ на выходе атомной среды при $\tilde{L} = 10$ и $r = 0$ в геометрии обратного считывания для двух техник оптимизации: (а) минимизации полных потерь ($\tilde{T}^W = 5.5$) и (б) минимизации утечки поля ($\tilde{T}^W = 4.2$).

При выбранном значении \tilde{T}^W найдем интенсивность восстановленного поля (нормированную на интенсивность входного сигнала) как функцию времени считывания (см. рис. 7.10а). Для сравнения приведем аналогичную кривую, но полученную из оптимизации утечки [G14] (рис. 7.10б). Эффективность полного цикла памяти для каждой моды \vec{q} определяется отношением:

$$\mathcal{E}(\vec{q}) = \frac{\int_0^{\tilde{T}^R} |a^R(\tilde{t}, \tilde{L}, \vec{q})|^2 d\tilde{t}}{\int_0^{\tilde{T}^W} |a_{in}(\tilde{t}, \vec{q})|^2 d\tilde{t}} \times 100\% \quad (7.77)$$

При оптимизации по полным потерям эффективность считывания равна 88% при $\tilde{T}^R = 2\tilde{T}^W$. Поскольку, как мы увидели ранее, потери при записи в этом процессе составляют $\mathcal{L}_c = 11.2\%$, видим, что за время считывания $\tilde{T}^R = 2\tilde{T}^W$ мы восстанавливаем практически всю информацию, записанную в среду. При этом, оптимизация по утечке приводит к эффективности полного цикла $\mathcal{E} = 84\%$ при $\tilde{T}^R = 3\tilde{T}^W$. Это сравнение еще раз демонстрирует достоинства предлагаемого метода оптимизации по полным потерям.

Необходимо отметить, что временной профиль восстановленного поля в обоих случаях сильно отличается от исходного временного профиля входного сигнала. Это обычный результат для большинства схем памяти. Задача с сохранением временного профиля будет рассмотрена ниже в разделе 7.5. Здесь же еще раз подчеркнем,

что нашей целью является сохранение поперечного распределения, и проведенный расчет показывает, что, при оптимальном соотношении параметров задачи, каждая поперечная мода \vec{q} сохраняется эффективно и независимо от других мод.

Теперь проследим как меняется эффективность в нерезонансном взаимодействии (см. рис. 7.11 при $r = 0.5$).

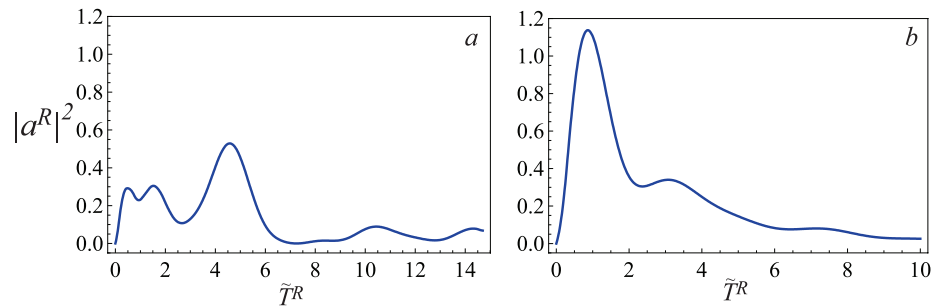


Рис. 7.11: Процесс считывания: интенсивность поля $|a^R(\tilde{t}, \tilde{L})|^2$ на выходе атомной среды при $\tilde{L} = 10$, $\tilde{T}^W = 3$ и $r = 0.5$ в случае (а) прямого и (б) обратного считывания.

Аналогично резонансному взаимодействию, эффективность процесса при прямом считывании сигнала много меньше, чем при обратном: при $\tilde{T}^R = 10$ (т.е. $\tilde{T}^R \approx 3.3\tilde{T}^W$) эффективность прямого считывания составляет $\mathcal{E} = 58\%$, в то время как эффективность обратного равна $\mathcal{E} = 85.6\%$. Более того, можно видеть, что в последнем случае в среде остается не более 2% от всех доступных для считывания фотонов, поскольку потери при записи составляли 12.6%. Сравнение с резонансным случаем показывает, что наличие отстройки замедляет процесс считывания.

Здесь мы хотели бы обсудить наблюдаемые различия кривых интенсивности поля на выходе ячейки при прямой и обратной геометриях взаимодействия. Как видно из рис. 7.11, в процессе прямого считывания мы наблюдаем значительные осцилляции интенсивности считываемого поля. Такое поведение указывает на то, что процесс считывания в этом случае сопровождается перезаписью поля со слоя на слой при распространении вглубь среды. Можно говорить, что сигнальные фотоны, будучи считаны в близких ко входу в среду слоях, под действием управляющего поля вновь

записываются на более отдаленные слои, затем опять подвергаются считыванию и перезаписи, и так вплоть до выхода из среды. Этим объясняется значительное замедление процесса прямого восстановления сигнального поля (по сравнению с длиной исходного импульса). Другая ситуация наблюдается при обратном считывании сигнала. Как было показано ранее (см. рис. 7.4), при записи не слишком длинных импульсов, информация в среде локализуется ближе ко входу в среду (обратная ситуация приводила бы к значительным утечкам). Таким образом, при обратном считывании "выталкивание" считываемых фотонов из среды сопровождается меньшим количеством перезаписей (если таковые вообще успевают произойти), поскольку большая часть когерентности сконцентрирована на выходе ячейки, и ее не надо "проталкивать" через все слои атомов.

Наконец, коснемся еще одного важного аспекта, а именно, покажем, что даже при больших отстройках от резонансности, можно эффективно записать на среду короткий импульс, при условии, что длина среды \tilde{L} достаточно велика. На рис. 7.12 красная (осциллирующая) кривая отвечает интенсивности восстановленного сигнала при обратной геометрии считывания, рассчитанной при значениях параметров $\tilde{L} = 100$, $r = 2$, и для длительности входного сигнала $\tilde{T}^W = 4\pi$, обеспечивающей минимум полных потерь при записи (эффективность записи равна $n^{eff} = 95.6\%$). Нетрудно заметить, что период осцилляций равен $4\pi r$, аналогично модуляции, наблюдавшейся нами на рис. 7.2. Если произвести расчет интенсивности восстановленного сигнала в рамановском приближении, общий ход кривой сохранится, но осцилляции исчезнут (синяя пунктирная кривая на рис. 7.12). Эффективности полного цикла памяти, вычисленные с помощью этих двух кривых отличаются лишь на 1.4% (78.6% для точного расчета и 77.2% при расчете в рамановском приближении), что еще раз подтверждает, что рамановский предел вполне хорошо применим при оценке эффективности квантовой памяти при $r = 2$. Отметим, что подобно осцилляциям на рис.

7.2, глубина осцилляций уменьшается с ростом отстройки.

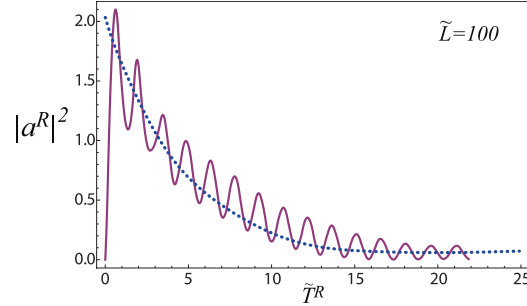


Рис. 7.12: Процесс считывания: интенсивность поля $|a^R(\tilde{t}, \tilde{L})|^2$ на выходе атомной среды при $\tilde{L} = 100$, $\tilde{T}^W = 4\pi$ и $r = 2$ для случая обратного считывания. Численный расчет выполнен по точным формулам (красная сплошная кривая) и в рамановском приближении (синяя пунктирная кривая).

7.3.1 Оценка числа сохраняемых мод

Важной характеристикой представленного протокола многомодовой памяти является оценка числа мод, доступных для восстановления. В предыдущем разделе мы продемонстрировали возможность эффективного хранения отдельной поперечной моды при достаточно высокой оптической плотности среды. Однако, чтобы обеспечить хранение оптического изображения нам требуется не только восстановить с высокой эффективностью значительное число мод, но также определить условия, при которых дифракционное распыление восстанавливаемого объекта окажется несущественным или легко компенсируется. Принимая это во внимание, посмотрим еще раз на выражения (7.68)-(7.69) для восстановленного поля при прямом и обратном считывании, вернувшись к исходным обозначениям (7.30)-(7.32):

$$a_{for}^R(\tilde{t}, \tilde{L}; \vec{q}) = \frac{1}{2} e^{-iq^2 L / (2k_s)} \int_0^{\tilde{T}^W} d\tilde{t}' a_{in}(\tilde{t}', \vec{q}) \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z} G_{ab}(\tilde{t}, \tilde{z}) G_{ba}(\tilde{t}', \tilde{L} - \tilde{z}), \quad (7.78)$$

$$a_{back}^R(\tilde{t}, \tilde{L}; \vec{q}) = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{T}^W} d\tilde{t}' a_{in}(\tilde{t}', \vec{q}) \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z} e^{-iq^2 z / (2k_s)} G_{ab}(\tilde{t}, \tilde{z}) G_{ba}(\tilde{t}', \tilde{z}). \quad (7.79)$$

где $G_{ab}(\tilde{t}, \tilde{z}) = G_{ba}(\tilde{t}, \tilde{z})$ определяется соотношением (7.53). Эти выражения записаны в безразмерных переменных за исключением дифракционных экспоненциальных

множителей. Видно, что дифракционные множители по разному входят в формулы для поля при прямом и обратном считывании. При прямом считывании имеет место конструктивная дифракция: дифракционные искажения на этапе записи фактически полностью компенсируются соответствующими факторами на этапе считывания. В результате, в выражении (7.78) дифракция присутствует лишь в виде общего множителя перед интегралом, который в точности равен набегу фазы при распространении света в вакууме и может быть легко компенсирован установкой соответствующей линзы. Иная ситуация возникает при обратном считывании, где подобная компенсация отсутствует. В выражении (7.79) дифракционный множитель входит в подынтегральное выражение и существенно искажает исходное поперечное распределение. Поэтому нам следует выбрать такие условия, при которых влияние данного фактора было бы несущественно: $q^2 L/k_s \ll 1$. Только в этом приближении наши оценки эффективности обратного считывания будут верны. Данное условие существенным образом влияет на число мод, доступных для восстановления: как уже было показано в работах [188, G14], в этом случае число сохраняемых мод \mathcal{N} не превышает числа Френеля $\mathcal{N} \leq F_N$.

При прямом считывании число сохраняемых мод не ограничено условием отсутствия дифракционного расплывания и может быть значительно увеличено. В самом деле, число мод можно записать как отношение площади поперечного сечения ячейки S к квадрату линейного размера зерна изображения на входе ячейки d (размеру пиксела): $\mathcal{N} = S/d^2$; единственным ограничением на число мод, при отсутствии дифракционного ограничения, остается чисто геометрическое соотношение между площадью поперечного сечения ячейки и линейным размером зерна изображения на выходе ячейки D : $D \leq \sqrt{S}$. Тогда, учитывая, что $D = L\lambda/d$ (λ - длина волны света), получим $\mathcal{N} \leq S^2/(\lambda L)^2 = F_N^2$. Такие же оценки для числа мод получены и в других многомодовых схемах [188, G14]. Поскольку прямое считывание значительно

уступает по эффективности обратному, то нам предоставляется выбор: либо сохранять меньшее число мод, но с хорошей эффективностью, либо увеличивать число сохраняемых мод, но "платить" за это уменьшением эффективности памяти.

7.4 Сохранение сжатого света в ячейках памяти

В предыдущем разделе мы показали, что протокол широкополосной квантовой памяти на атомах в Λ -конфигурации позволяет добиться высокой эффективности хранения пространственных изображений. Однако связь эффективности квантовой памяти и других информационных мер, характеризующих сохранение квантовых особенностей поля, не вполне очевидна. Такая связь строго доказана только для моделей квантовых информационных каналов типа светоделительной пластины (СДП) [194]. Показано, что в этом случае квантовый режим памяти реализуется при значениях эффективности больше $1/2$.

Остановимся подробнее на взаимодействии типа СДП. Хорошо известно, что если рассматривается нерезонансное взаимодействие между атомным ансамблем (приготовленным в основном состоянии) и двумя полями - управляющим и сигнальным, то гамильтониан взаимодействия такой системы, после исключения возбужденного состояния, может быть преобразован к виду $\hat{H} \sim ab^\dagger + h.c.$ В квантовой оптике такой гамильтониан хорошо известен как гамильтониан светоделителя. Такой интерфейс преобразует входные состояния атомов и света по типу СДП, и в том случае, когда "коэффициент отражения" такого делителя равен единице, имеет место идеальный обмен состояниями между световым и атомным осцилляторами.

Однако эта идеология может быть применима не всегда. Если по каким-либо причинам верхнее возбужденное состояние не может быть исключено из рассмотрения, то такие схемы нельзя назвать подобными СДП, а значит, утверждения, доказанные для СДП-схем, не могут быть использованы для них без дополнительных обоснова-

ний. Более того, даже в случае нерезонансных моделей памяти, если рассматривается распространение полей в толстом атомном слое, где необходим учет пространственных аспектов взаимодействия между полем и средой, прямая аналогия с моделями типа СДП также не применима.

Мы рассмотрим два протокола квантовой памяти, основанных на резонансном взаимодействии сигнального и управляющего полей с атомным ансамблем. Схемы отличаются друг от друга длительностью взаимодействия, что приводит к различию в механизмах формирования атомной когерентности, на которой "записывается" состояние сигнального поля. В этом разделе мы обсудим вопрос о сохранении сжатия в рассматриваемых здесь протоколах адиабатической и широкополосной памяти. Для этого мы проанализируем как сжатый свет от конкретного источника с заданными свойствами записывается на среду и считывается с нее. Сохранение сжатого света рассматривалось ранее в работе [195], однако там авторы не интересовались пространственными аспектами взаимодействия и решали задачу в приближении плоского спектра входного сигнала. Демонстрируя сохранение существенно квантовых особенностей света, мы подтвердим, что рассматриваемые протоколы памяти действительно являются квантовыми, т.е. работают лучше любого возможного классического протокола. С другой стороны, нам будет интересно выяснить на рассматриваемых примерах, можем ли мы, зная эффективность схемы, предсказать, насколько хорошо сохранится в ней то или иное квантовое состояние. Интуитивное понимание того, что связь сохранения сжатия и эффективности памяти должна иметь место, подтверждается для тех моделей памяти, в которых полный цикл записи-воспроизведения сигнала может рассматриваться как прохождение этого сигнала через СДП. Действительно, давайте запишем связь входного и выходного сигналов на оптическом делителе. Как хорошо известно, считываемый сигнал \hat{a}_{out} может

быть выражен через входной \hat{a}_{in} в виде

$$\hat{a}_{out}(t) = \sqrt{\mathcal{T}} \hat{a}_{in}(t) - \sqrt{1 - \mathcal{T}} \hat{a}_{vac}(t). \quad (7.80)$$

Здесь коэффициент "прохождения" через пластину \mathcal{T} имеет смысл эффективности процесса памяти. Перепишем это в фурье-картине

$$\hat{a}_{out,\omega} = \sqrt{\mathcal{T}} \hat{a}_{in,\omega} - \sqrt{1 - \mathcal{T}} \hat{a}_{vac,\omega}. \quad (7.81)$$

Переходя от амплитуд поля $\hat{a} = \hat{x} + i\hat{y}$ к флуктуациям их квадратур $\delta\hat{x}$ и $\delta\hat{y}$, получим выражение

$$\langle \delta\hat{x}_{out,\omega} \delta\hat{x}_{out,-\omega} \rangle = \mathcal{T} \langle \delta\hat{x}_{in,\omega} \delta\hat{x}_{in,-\omega} \rangle + (1 - \mathcal{T}) \langle \hat{x}_{vac,\omega} \hat{x}_{vac,-\omega} \rangle. \quad (7.82)$$

Имея в виду, что для сжатого состояния может быть введен параметр сжатия для входного $r_{in}(\omega)$ и для выходного $r_{out}(\omega)$ импульсов, запишем

$$\langle \delta\hat{x}_{out,\omega} \delta\hat{x}_{out,-\omega} \rangle = \frac{1}{4} e^{-r_{out}(\omega)}, \quad \langle \delta\hat{x}_{in,\omega} \delta\hat{x}_{in,-\omega} \rangle = \frac{1}{4} e^{-r_{in}(\omega)}. \quad (7.83)$$

В то же самое время для вакуумной амплитуды

$$\langle \delta\hat{x}_{vac,\omega} \delta\hat{x}_{vac,-\omega} \rangle = \frac{1}{4}. \quad (7.84)$$

Теперь нетрудно получить соотношение

$$1 - e^{-r_{out}(\omega)} = \mathcal{T} \left[1 - e^{-r_{in}(\omega)} \right]. \quad (7.85)$$

Таким образом мы можем заключить, что эффективность вполне достаточная характеристика для квантовой памяти в том случае, когда для выбранной модели применима аналогия СДП без потерь. Если эффективность близка к единице, то и квантовое свойство сжатия света в импульсе также хорошо сохранится в считанном импульсе.

Мы будем рассматривать две модели квантовой памяти, основанные на резонансном взаимодействии атомов в Λ -конфигурации с управляющим и сигнальным полями - адиабатическую и широкополосную [G14, G15]. По сравнению с нерезонансными

ситуациями здесь оказывается важным заселение самого верхнего атомного уровня, что автоматически приводит к потерям сигнального поля в процессе записи и последующего хранения сигнального импульса. Как результат, аналогия этих схем памяти с делительной пластиной не имеет места, а следовательно и соотношение (7.85) может не выполняться.

7.4.1 Адиабатическая модель: описание в терминах неканонических амплитуд

Модель адиабатической квантовой памяти [G15] отличается от модели широкополосной памяти, описанной в разделе 7.1 длительностью взаимодействия полей и атомного ансамбля. Адиабатическое приближение применимо, когда характерное время эволюции системы значительно превышает время жизни верхнего атомного состояния $|3\rangle$: $T \gg \gamma^{-1}$. Изменение времени взаимодействия приводит к появлению релаксационного члена в системе уравнений (7.27)-(7.29), и связанного с ним ланжевенковского источника шума:

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}(z, t; \vec{q}) = -g\sqrt{N} \hat{c}(z, t; \vec{q}), \quad (7.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{c}(z, t; \vec{q}) = -\gamma \hat{c}(z, t; \vec{q}) + g\sqrt{N} \hat{a}(z, t; \vec{q}) + \Omega \hat{b}(z, t; \vec{q}) + \sqrt{2\gamma} \hat{\xi}(z, t; \vec{q}), \quad (7.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{b}(z, t; \vec{q}) = -\Omega \hat{c}(z, t; \vec{q}), \quad (7.88)$$

Здесь мы для простоты предполагаем, что имеет место строго резонансное взаимодействие полей с атомной средой: $\Delta = 0$. Ланжевенковский источник $\hat{\xi}(z, t; \vec{q})$, возникающий из-за распада оптической когерентности $\hat{c}(z, t; \vec{q})$, определяется соотношениями для средних первого и второго порядка (записанными в тех же приближениях,

что и уравнения (7.86)-(7.88)):

$$\langle \hat{\xi}(z, t; \vec{q}) \rangle = 0, \quad (7.89)$$

$$\langle \hat{\xi}(z, t; \vec{q}) \hat{\xi}^\dagger(z', t'; \vec{q}') \rangle = \delta(t - t') \delta(z - z') \delta^2(\vec{q} - \vec{q}'), \quad (7.90)$$

$$\langle \hat{\xi}^\dagger(z, t; \vec{q}) \hat{\xi}(z', t'; \vec{q}') \rangle = 0. \quad (7.91)$$

Опираясь на соотношение $T \gg \gamma^{-1}$, мы можем пренебречь динамикой быстрых процессов, полагая $\partial \hat{c}(z, t; \vec{q}) / \partial t = 0$ в (7.87). Тогда система уравнений (7.86)-(7.88) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{a}(z, t; \vec{q}) = -C_1 \hat{a}(z, t; \vec{q}) - C \hat{b}(z, t; \vec{q}) - 2g\sqrt{N/\gamma} \hat{\xi}(z, t; \vec{q}), \quad (7.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{b}(z, t; \vec{q}) = -C_2 \hat{b}(z, t; \vec{q}) - C \hat{a}(z, t; \vec{q}) - 2\Omega/\sqrt{\gamma} \hat{\xi}(z, t; \vec{q}). \quad (7.93)$$

В уравнениях (7.92)-(7.93) введены следующие обозначения для постоянных коэффициентов:

$$C_1 = \frac{2g^2 N}{\gamma}, \quad C_2 = \frac{2\Omega^2}{\gamma}, \quad C = \frac{2g\sqrt{N} \Omega}{\gamma} \quad (C_1 C_2 = C^2), \quad (7.94)$$

позволяющие определить безразмерные переменные координаты и времени:

$$\tilde{z} = C_1 z, \quad \tilde{t} = C_2 t. \quad (7.95)$$

Отметим сразу, что эти переменные отличаются, от введенных нами при построении решений для широкополосной памяти. Здесь безразмерная длина \tilde{z} совпадает с оптической толщиной слоя z (не эффективной, а реальной), а время отсчитывается не в обратных частотах Раби, как это было в предыдущей модели, но включает в себя дополнительный малый множитель $2\Omega/\gamma \ll 1$. Однако именно такое обезразмеривание удобно для решения этой задачи, а различие в безразмерных параметрах выявится при сравнении результатов для двух моделей.

Как показано в [G15], используя преобразование Лапласа можно найти общее решение системы уравнений (7.92)-(7.93):

$$\begin{aligned} \hat{a}(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}(0, \tilde{t}'; \vec{q}) G_{aa}(\tilde{z}, \tilde{t} - \tilde{t}') \\ &\quad - p \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}(\tilde{z}', 0; \vec{q}) G_{ba}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) + \hat{D}_a(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}), \end{aligned} \quad (7.96)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}(\tilde{z}', 0; \vec{q}) G_{bb}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}(0, \tilde{t}'; \vec{q}) G_{ab}(\tilde{z}, \tilde{t} - \tilde{t}') + \hat{D}_b(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}). \end{aligned} \quad (7.97)$$

$$p = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \frac{\Omega}{g\sqrt{N}}. \quad (7.98)$$

Ядра интегральных преобразований выражаются через модифицированные функции Бесселя I_0 и I_1 :

$$G_{aa}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \left[e^{-\tilde{z}} \delta(\tilde{t}) + e^{-\tilde{t} - \tilde{z}} \sqrt{\tilde{z}/\tilde{t}} I_1(2\sqrt{\tilde{t}\tilde{z}}) \right] \Theta(\tilde{t}), \quad (7.99)$$

$$G_{bb}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \left[e^{-\tilde{t}} \delta(\tilde{z}) + e^{-\tilde{t} - \tilde{z}} \sqrt{\tilde{t}/\tilde{z}} I_1(2\sqrt{\tilde{t}\tilde{z}}) \right] \Theta(\tilde{t}), \quad (7.100)$$

$$G_{ba}(\tilde{z}, \tilde{t}) = G_{ab}(\tilde{z}, \tilde{t}) = e^{-\tilde{t} - \tilde{z}} I_0(2\sqrt{\tilde{t}\tilde{z}}) \Theta(\tilde{t}). \quad (7.101)$$

Здесь $\Theta(\tilde{t})$ - функция пропускания: $\Theta(\tilde{t}) = 1$ при $0 < \tilde{t} < \tilde{T}$ и нулю снаружи этого интервала; \tilde{T} - время взаимодействия полей и атомного ансамбля ($\tilde{T} = \tilde{T}_W$ на стадии записи и $\tilde{T} = \tilde{T}_R$ на стадии считывания). Операторы $\hat{D}_a(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q})$ и $\hat{D}_b(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q})$ - функции ланжевеновского источника шума $\hat{\xi}(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q})$:

$$\begin{aligned} \hat{D}_a(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{t}' d\tilde{z}' \hat{\xi}(\tilde{z}', \tilde{t}'; \vec{q}) \left(-\sqrt{2C_1} G_{aa}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t} - \tilde{t}') \right. \\ &\quad \left. + p\sqrt{2C_2} G_{ba}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t} - \tilde{t}') \right), \end{aligned} \quad (7.102)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_b(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{t}' d\tilde{z}' \hat{\xi}(\tilde{z}', \tilde{t}'; \vec{q}) \left(-\sqrt{2C_2} G_{bb}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t} - \tilde{t}') \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2C_1}}{p} G_{ab}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t} - \tilde{t}') \right). \end{aligned} \quad (7.103)$$

Важно отметить, что шумовые операторы \hat{D}_a и \hat{D}_b не зависят от начальных условий задачи.

Используем общие решения (7.96)-(7.97), чтобы сначала описать процесс записи сигнала. При этом нам необходимо учесть граничные условия для полевого оператора \hat{a} : $\hat{a}^W(0, \tilde{t}; \vec{q}) = \hat{a}_{in}(\tilde{t}; \vec{q})$, т.е. на вход ячейки $\tilde{z} = 0$ падает сигнальное поле в некотором интересующем нас квантовом состоянии. До начала процесса записи все атомы находятся в состоянии $|1\rangle$, и начальное состояние оператора когерентности $\hat{b}^W(\tilde{z}, 0; \vec{q})$ - вакуумное. Тогда выражения (7.96)-(7.97) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \hat{a}^W(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}_{in}(\tilde{t}'; \vec{q}) G_{aa}(\tilde{z}, \tilde{t} - \tilde{t}') \\ &\quad - p \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}^W(\tilde{z}', 0; \vec{q}) G_{ba}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) + \hat{D}_a(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}), \end{aligned} \quad (7.104)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}^W(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}^W(\tilde{z}', 0; \vec{q}) G_{bb}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) \\ &\quad - \frac{1}{p} \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}_{in}(\tilde{t}'; \vec{q}) G_{ab}(\tilde{z}, \tilde{t} - \tilde{t}') + \hat{D}_b(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}). \end{aligned} \quad (7.105)$$

В выражении (7.105), второе слагаемое как раз связано с процессом "запоминания" сигнала; оно отражает появление долгоживущей атомной когерентности \hat{b}^W благодаря взаимодействию со входным сигналом \hat{a}_{in} и управляющим полем Ω , в то время как первое слагаемое отвечает динамическому развитию начальной атомной когерентности $\hat{b}^W(z, t = 0; \vec{q})$ в присутствии управляющего поля, а третье слагаемое - шумам системы. При $z = L$, выражение (7.104) отражает сигнальное поле, покидающее ячейку памяти; первое слагаемое отвечает утечке сигнального поля, второе - генерации поля в сигнальной моде при взаимодействии начальной атомной $\hat{b}^W(z, t = 0; \vec{q})$ с управляющим полем, и третье - также шумовой добавке.

Поскольку мы решаем задачу в формализме Гайзенберга, то переменными во времени и пространстве являются операторы, которые действуют на неизменные в течении всего процесса векторы состояния системы. В начальный момент (до взаимодействия) все три подсистемы (сигнальное поле, атомная когерентность и ланжевеновский резервуар), составляющие рассматриваемую систему, независимы, а значит

вектор состояния полной системы $|\psi\rangle$ факторизуется и может быть представлен в виде трех сомножителей:

$$|\psi^W\rangle = |\psi^W\rangle_a |\psi^W\rangle_b |\psi^W\rangle_\xi = |\psi^W\rangle_a |vac\rangle_b |vac\rangle_\xi, \quad (7.106)$$

где $|\psi^W\rangle_a$ начальное (приготовленное нами) состояние сигнального поля, $|\psi^W\rangle_b$ - начальное состояние атомной когерентности (вакуумное состояние), и $|\psi^W\rangle_\xi$ состояние ланжевеновского резервуара $\hat{\xi}$ (вакуумное состояние).

После окончания стадии записи ($\tilde{t} = \tilde{T}_W$), сигнальное поле оказывается в вакуумном состоянии, управляющее поле равно нулю, а сформированная когерентность $\hat{b}^W(\tilde{z}, \tilde{t} = \tilde{T}_W; \vec{q})$ не распадается на характерных временах хранения информации.

Переходя к анализу стадии считывания, мы опять используем решения уравнений Гайзенберга-Ланжевена (7.96)-(7.97), но с другими начальными условиями и с другим начальным вектором состояния. Мы полагаем, что на вход ячейки не подается сигнал (сигнальная мода в вакуумном состоянии), а когерентность в момент начала считывания совпадает с той, что была при окончании записи $\hat{b}^R(\tilde{z}, 0; \vec{q}) = \hat{b}^W(\tilde{z}, \tilde{T}_W; \vec{q})$. Вектор состояния полной системы перед считыванием также факторизуется:

$$|\psi^R\rangle = |\psi^R\rangle_a |\psi^R\rangle_b |\psi^R\rangle_\xi = |vac\rangle_a |\psi^R\rangle_b |vac\rangle_\xi, \quad (7.107)$$

Запишем оператор сигнального поля при считывании:

$$\begin{aligned} \hat{a}^R(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}^R(0, \tilde{t}'; \vec{q}) G_{aa}(\tilde{z}, \tilde{t} - \tilde{t}') \\ &- p \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{b}^W(\tilde{z}', \tilde{T}_W; \vec{q}) G_{ba}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) + \hat{D}_a(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}). \end{aligned} \quad (7.108)$$

В этом выражении второй член отражает генерацию сигнального поля при взаимодействии атомной когерентности $\hat{b}^W(z, T_W; \vec{q})$ с управляющим полем - это и есть восстановление сигнала. Первое слагаемое отвечает взаимодействию входного (вакуумного) поля с атомами и управляющим полем, а последний - шумам ланжевеновского резервуара.

Подставляя (7.105) в (7.108), получим:

$$\begin{aligned}
\hat{a}^R(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) &= \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' \hat{a}^R(0, \tilde{t}'; \vec{q}) G_{aa}(\tilde{z}, \tilde{t} - \tilde{t}') \\
&+ \int_0^{\tilde{T}_W} \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{t}' d\tilde{z}' \hat{a}_{in}(\tilde{t}'; \vec{q}) G_{ab}(\tilde{z}', \tilde{T}_W - \tilde{t}') G_{ba}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) \\
&- p \int_0^{\tilde{z}} \int_0^{\tilde{z}'} d\tilde{z}'' d\tilde{z}'' \hat{b}^W(\tilde{z}'', 0; \vec{q}) G_{bb}(\tilde{z}' - \tilde{z}'', \tilde{T}_W) G_{ba}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) \\
&- p \int_0^{\tilde{z}} d\tilde{z}' \hat{D}_b(\tilde{z}', \tilde{T}_W; \vec{q}) G_{ba}(\tilde{z} - \tilde{z}', \tilde{t}) + \hat{D}_a(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}), \tag{7.109}
\end{aligned}$$

Теперь произведем усреднение этого выражения по вакуумным подсистемам. Тогда вместо канонической амплитуды поля $\hat{a}^R(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q})$ появится оператор:

$$\hat{A}(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) \equiv \langle vac^R | \langle vac^W | \hat{a}^R(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) | vac^W \rangle | vac^R \rangle, \tag{7.110}$$

где $|vac^W\rangle = |vac\rangle_b |vac\rangle_\xi$ - вакуумные векторы состояния перед началом процесса записи, и $|vac^R\rangle = |vac\rangle_a |vac\rangle_\xi$ - вакуумные векторы состояния перед началом считывания. Мы будем называть оператор $\hat{A}(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q})$, построенный по такому алгоритму, *неканонической амплитудой* (НКА) поля, поскольку перестановочные соотношения для него принимают неканонический вид.

Необходимо подчеркнуть, что мы не производим усреднения по полной волновой функции системы, но только по тем подсистемам, которые находятся в вакуумном состоянии. При таком подходе мы сохраняем в рассмотрении квантовую природу входного сигнала, а значит можем проанализировать важные квантовые особенности выходного поля. Такой подход оказывается возможен благодаря линейности рассматриваемых преобразований, когда вклады разных подсистем аддитивны. В результате, в выражении (7.109) все члены кроме второго обнуляются:

$$\hat{A}^R(\tilde{L}, \tilde{t}; \vec{q}) = \int_0^{\tilde{T}_W} d\tilde{t}' \hat{a}_{in}(\tilde{T}_W - \tilde{t}'; \vec{q}) G(\tilde{t}, \tilde{t}'). \tag{7.111}$$

Таким образом мы построили интегральное преобразование оператора сигнального поля со входа на выход квантового канала.

В случае прямого считывания (когда управляющее поле при считывании распространяется в том же направлении, что и при записи), ядро $G(\tilde{t}, \tilde{t}')$ имеет вид:

$$G(\tilde{t}, \tilde{t}') = \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z}' G_{ab}(\tilde{z}', \tilde{t}') G_{ba}(\tilde{L} - \tilde{z}', \tilde{t}). \quad (7.112)$$

При обратном считывании (когда эти два управляющих поля противоположны) преобразование сохраняет вид (7.111) с ядром

$$G(\tilde{t}, \tilde{t}') = \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z}' G_{ab}(\tilde{z}', \tilde{t}') G_{ba}(\tilde{z}', \tilde{t}), \quad (7.113)$$

где G_{ab} и G_{ba} определяются выражением (7.101). Хотя введенные нами частично усредненные операторы не отражают всех квантовых свойств поля (поскольку, к примеру, они не удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, в чем нетрудно убедиться, сравнивая формулы для канонической и неканонической амплитуды, (7.109) и (7.111)), они могут быть весьма полезны в некоторых вычислениях. Например, если мы хотим вычислить нормально упорядоченной среднее квадратурных x -компонент канонических полевых операторов в считываемом сигнале \hat{a}^R , то мы можем пользоваться более простыми выражениями для неканонических амплитуд \hat{A}^R , поскольку

$$\begin{aligned} \langle : \hat{x}_a(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) \hat{x}_a(\tilde{z}', \tilde{t}'; \vec{q}) : \rangle &= \langle : \hat{X}_A(\tilde{z}, \tilde{t}; \vec{q}) \hat{X}_A(\tilde{z}', \tilde{t}'; \vec{q}) : \rangle, \\ \hat{A}^R &= \hat{X}_A + i\hat{Y}_A, \quad \hat{a}^R = \hat{x}_a + i\hat{y}_a, \end{aligned} \quad (7.114)$$

где обозначение $\langle : \dots : \rangle$ указывает на нормальный порядок операторов.

7.4.2 Широкополосная квантовая память: решение для неканонической амплитуды поля

Модель и общие решения для широкополосной квантовой памяти подробно рассмотрены в разделе 7.1. Здесь мы лишь запишем необходимые для дальнейшего анализа соотношения, ограничившись резонансным случаем. Основываясь на операторных

решениях (7.46)-(7.48), и применяя к ним технику частичного усреднения по вакуумным подсистемам, рассмотренную в предыдущем разделе, мы можем записать решение для неканонической амплитуды восстановленного поля, которое формально будет иметь тот же вид, что и для адиабатической модели:

$$\hat{A}^R(\tilde{L}, \tilde{t}; \vec{q}) = \int_0^{\tilde{T}_W} d\tilde{t}' \hat{a}_{in}(\tilde{T}_W - \tilde{t}'; \vec{q}) G(\tilde{t}, \tilde{t}'), \quad (7.115)$$

Здесь ядро $G(\tilde{t}, \tilde{t}')$ выражается как

$$G(\tilde{t}, \tilde{t}') = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z}' G_{ab}(\tilde{z}', \tilde{t}') G_{ba}(\tilde{L} - \tilde{z}', \tilde{t}) \quad (7.116)$$

- для прямой геометрии считывания

$$G(\tilde{t}, \tilde{t}') = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{z}' \tilde{G}_{ab}(\tilde{z}', \tilde{t}') G_{ba}(\tilde{z}', \tilde{t}) \quad (7.117)$$

- для обратной геометрии считывания,

а функции G_{ab} и G_{ba} являются свертками по времени:

$$G_{ab}(\tilde{z}, \tilde{t}) = G_{ba}(\tilde{z}, \tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' g_{ab}(\tilde{z}, \tilde{t} - \tilde{t}') g_{ab}^*(\tilde{z}, \tilde{t}'), \quad (7.118)$$

$$g_{ab}(\tilde{z}, \tilde{t}) = e^{-i\tilde{t}} J_0(\sqrt{\tilde{t}\tilde{z}}) \Theta(\tilde{t}). \quad (7.119)$$

Здесь J_0 - это функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Здесь и далее при обсуждении широкополосной модели квантовой памяти мы используем безразмерные переменные \tilde{t} и \tilde{z} определенные равенствами (7.45).

7.4.3 Способность широкополосной и адиабатической памяти к сохранению сжатия

В этом разделе мы исследуем способность рассматриваемых моделей памяти к сохранению сжатия света, и сравним результаты с расчетом эффективности для каждой из моделей. Как было показано в начале раздела 7.4, эффективность и степень сжатия однозначно связаны в моделях памяти, работающих по типу светоделительной пластины. Интересно выяснить, сохраняется ли подобная связь в той или иной форме в рассматриваемых моделях.

Рассмотрим ситуацию, когда на вход ячейки памяти подается импульс сжатого света. Мы будем предполагать, что импульс одиночный вырезается из стационарного потока с заданными квантовыми свойствами излучения путем открывания затвора на требуемое время. Отметим, что именно такой свет использовался в экспериментах по квантовой памяти со сжатым светом [161].

Мы проведем расчеты для двух конкретных источников сжатого света, когда импульс получают из потока излучения 1) одномодового суб-пуассоновского лазера с захватом фазы (СПЛ) (сжатый свет в состоянии, близком к когерентному, см. главу 3), и 2) вырожденного параметрического генератора света (ВПГС), работающего в допороговом режиме (сжатый вакуум, см., например, [G11]). Чтобы оценить сохранение квантовых свойств света в схемах памяти, мы сравним сжатие выходного (восстановленного) поля со сжатием в исходном импульсе.

Определим *степень сжатия света* $\mathcal{S}_{in,\omega,\vec{q}}$ и $\mathcal{S}_{out,\omega,\vec{q}}$ для входного и выходного импульсов, соответственно:

$$\mathcal{S}_{out,\tilde{\omega},\vec{q}} = e^{-r_{out}(\tilde{\omega},\vec{q})}, \quad \mathcal{S}_{in,\tilde{\omega},\vec{q}} = e^{-r_{in}(\tilde{\omega},\vec{q})}, \quad \tilde{\omega} = \omega/\Omega. \quad (7.120)$$

Отношение этих параметров будем использовать для оценки сохранения сжатия. Принимая во внимание (7.83), это отношение можно переписать в виде

$$\frac{1 - \mathcal{S}_{out,\tilde{\omega},\vec{q}}}{1 - \mathcal{S}_{in,\tilde{\omega},\vec{q}}} = \frac{\langle : \delta \hat{x}_{out,\tilde{\omega},\vec{q}} \delta \hat{x}_{out,-\tilde{\omega},-\vec{q}} : \rangle}{\langle : \delta \hat{x}_{in,\tilde{\omega},\vec{q}} \delta \hat{x}_{in,-\tilde{\omega},-\vec{q}} : \rangle}. \quad (7.121)$$

Согласно (7.111) и (7.115) корреляционные функции на входе и выходе квантового канала связаны соотношением:

$$\begin{aligned} & \langle : \delta \hat{x}^R(\tilde{L}, \tilde{t}, \vec{q}) \delta \hat{x}^R(\tilde{L}, \tilde{t}', \vec{q}') : \rangle = \\ & = \int_0^{\tilde{T}_W} d\tilde{t}_1 \int_0^{\tilde{T}_W} d\tilde{t}_2 \langle : \delta \hat{x}_{in}(\tilde{T}_W - \tilde{t}_1, \vec{q}) \delta \hat{x}_{in}(\tilde{T}_W - \tilde{t}_2, \vec{q}') : \rangle G(\tilde{t}, \tilde{t}_1) G(\tilde{t}', \tilde{t}_2). \end{aligned} \quad (7.122)$$

Переходя в фурье-представление, можем записать:

$$\begin{aligned} & \langle : \delta \hat{x}_{out, \tilde{\omega}, \tilde{q}} \delta \hat{x}_{out, \tilde{\omega}', \tilde{q}'} : \rangle = \\ & = \int_0^{\tilde{T}_W} d\tilde{t}_1 \int_0^{\tilde{T}_W} d\tilde{t}_2 \langle : \delta \hat{x}_{in}(\tilde{T}_W - \tilde{t}_1, \tilde{q}) \delta \hat{x}_{in}(\tilde{T}_W - \tilde{t}_2, \tilde{q}') : \rangle G(\tilde{\omega}, \tilde{t}_1) G(\tilde{\omega}', \tilde{t}_2), \end{aligned} \quad (7.123)$$

где преобразование Фурье определено на ограниченном временном интервале:

$$\delta x_{out, \tilde{\omega}, \tilde{q}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{T}_R}} \int_0^{\tilde{T}_R} d\tilde{t} \delta x^R(\tilde{L}, \tilde{t}, \tilde{q}) e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}}. \quad (7.124)$$

Корреляционные функции для входных полей $\langle : \delta \hat{x}_{in, \tilde{\omega}, \tilde{q}} \delta \hat{x}_{in, \tilde{\omega}', \tilde{q}'} : \rangle$ в знаменателе выражения (7.121), записанные в явном виде для СПЛ и ВПГС, могут быть найдены в приложении А.

Прежде чем приступить к сравнению сжатия выходного и входного излучения, следует отметить, что степень сжатия во входном импульсе уже меньше, чем в стационарном потоке [G16]. Этот факт важен для нас, т.к. механизм квантовой памяти существенно зависит от импульсного характера записываемого света, и им мы пренебречь никак не можем. Однако в работе [G16] было показано, что при выполнении условия на соотношение длительности импульса T и времени когерентности стационарного излучения κ^{-1} : $\kappa T \gg 1$, степень сжатия в импульсе не зависит от его длительности и совпадает со степенью сжатия стационарного сигнала. Именно такое соотношение параметров мы будем рассматривать для излучения на входе ячейки памяти. Необходимые детали, конкретизирующие параметры излучения исследуемого входного света, а также формальные выражения для степени сжатия входного импульса света от суб-пуассоновского лазера с захватом фазы и от вырожденного параметрического генератора света в допороговом режиме, можно найти в приложении А. Графически спектры сжатия входного импульса приведены на рис. 7.13.

Далее мы будем следить за сжатием импульса как целого, которому соответствует нулевая частотная компонента спектра сжатия $\mathcal{S}_{out, \tilde{\omega}, q}$, т.е. величина $\mathcal{S}_{out, 0, 0}$. Именно

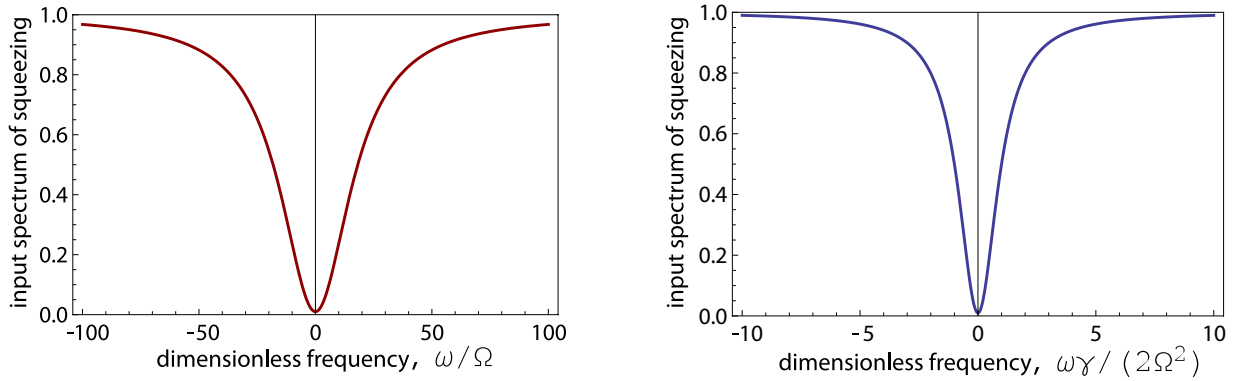


Рис. 7.13: Спектр сжатия для импульса света на входе ячейки памяти в случае (а) широкополосной и (б) адиабатической моделей. Ширина входных спектров выбрана таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\kappa T \sim 100$.

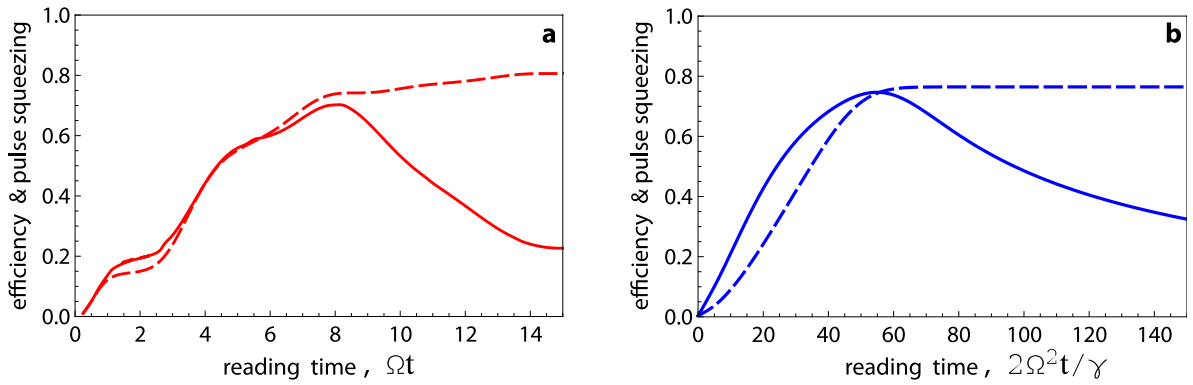


Рис. 7.14: Сжатие импульса (сплошные кривые) и эффективность (пунктирные кривые) в зависимости от времени считывания \tilde{T}_R для двух моделей памяти: (а) широкополосной и (б) адиабатической в случае прямого считывания.

она характеризует максимально достижимую степень сжатия.

На рис. 7.14 представлены результаты численного расчета степени сжатия импульса $\mathcal{S}_{out,0,0}$ (точнее, $1 - \mathcal{S}_{out,0,0}$) в зависимости от времени считывания \tilde{T}_R в прямой геометрии считывания для двух моделей памяти: широкополосной (рис. 7.14а) и адиабатической (рис. 7.14б). Для сравнения на тех же графиках показаны кривые эффективности \mathcal{E} , рассчитанные согласно (7.77), но без пересчета в проценты для удобства сравнения.

Параметры расчета выбирались следующим образом: в схеме широкополосной

квантовой памяти для выбранной безразмерной длины среды $\tilde{L} = 10$, мы выбираем длительность взаимодействия на этапе записи $\tilde{T}_W = 5.5$, обеспечивающую минимум потерь (см. [G17]). Эффективность на рис. 7.14а построена для этих параметров. Для расчета сжатия импульса мы использовали те же значения \tilde{T}_W и \tilde{L} , а кроме того выбрали параметры входного сигнала $\tilde{\kappa} = 100/5.5$, $p = 1$, чтобы обеспечить заведомо хорошее сжатие входного сигнала (ниже мы покажем как оптимизировать выбор спектральной ширины входного сигнала).

При вычислениях в адиабатическом пределе мы выбрали $\tilde{T}_W = \tilde{L} = 55$, обеспечивающие приблизительно ту же эффективность памяти, которую мы наблюдали для широкополосной модели. Величина $\tilde{\kappa}$ выбрана так, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\tilde{\kappa}\tilde{T}_W \gg 1$. График на рис. 7.14b получен при $\tilde{\kappa} = 100/55$, однако следует отметить, что увеличение κ не влияет на ход этой кривой.

Прежде всего отметим, что, как видно из рис. 7.14, сжатие импульса и эффективность не всегда совпадают. Эффективность увеличивается монотонно и выходит в насыщение, тогда как сжатие импульса убывает после некоторого момента \tilde{T}_R . Этот результат укладывается в наши представления о роли шумов в этих моделях памяти. Не трудно представить, что, продлевая считывание слишком долго, мы можем достичь высокой эффективности, но потерять сжатие излучения из-за вклада вакуумных шумов в считываемый сигнал.

С другой стороны из рисунка видно, что можно указать область значений \tilde{T}_R , где сжатие импульса превышает эффективность. Аналогичная ситуация имеет место и при обратном считывании (см. рис. 7.15). На первый взгляд эти кривые кажутся парадоксальными: при некоторых значениях \tilde{T}_R мы имеем довольно низкую эффективность (около 50%), т.е. восстановили только половину фотонов исходного поля, но при этом хорошо восстановили сжатие. Ключ к разгадке этого кажущегося парадокса следует искать в многомодовой природе взаимодействия света и среды. В

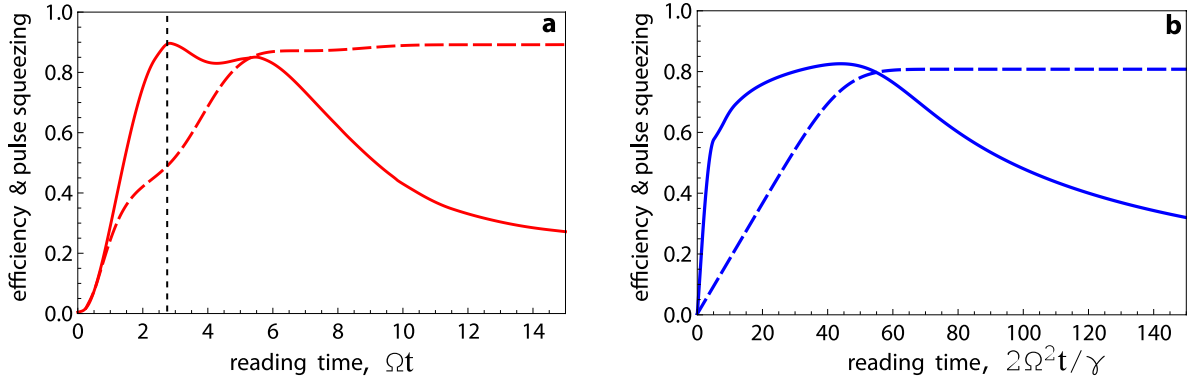


Рис. 7.15: Сжатие импульса (сплошные кривые) и эффективность (пунктирные кривые) в зависимости от времени считывания \hat{T}_R для двух моделей памяти: (а) широкополосной и (б) адиабатической в случае обратного считывания.

следующем разделе мы проведем анализ модовой структуры двух обсуждавшихся здесь моделей памяти.

7.5 Анализ собственных временных мод широкополосной и адиабатической квантовой памяти

Уравнения (7.111) и (7.115), описывающие преобразование оператора поля со входа на выход ячейки памяти, можно рассматривать как интегральные уравнения. Нетрудно видеть, что ядра этих уравнений эрмитовы (более того, в наших моделях они симметричны по отношению к перестановке аргументов $t \leftrightarrow t'$) для обеих моделей и обеих геометрий считывания. Тогда, для этих уравнений может быть решена задача на поиск собственных значений $\sqrt{\lambda_i}$ и собственных функций $\psi_i(t)$ в виде

$$\sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) = \int_0^{T_w} dt' \psi_i(t') G(t, t'). \quad (7.125)$$

Здесь функции $\psi_i(t)$ формируют полный ортонормированный набор:

$$\int_0^{T_w} dt \psi_i^*(t) \psi_j(t) = \delta_{ij}, \quad \sum_i \psi_i^*(t) \psi_i(t') = \delta(t - t'). \quad (7.126)$$

Уравнение (7.125) может быть решено для каждого из четырех ядер интегральных преобразований (7.111) и (7.115). Мы здесь остановимся на обсуждении считывания

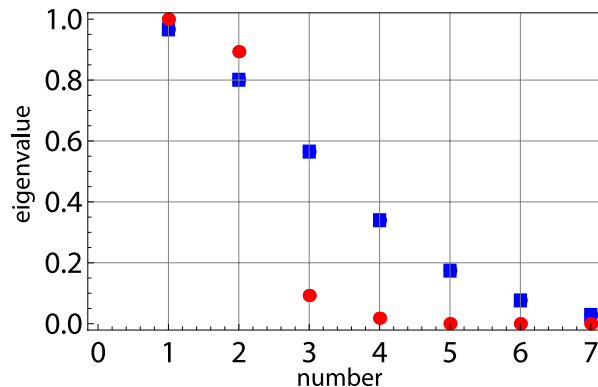


Рис. 7.16: Первые семь собственных значений для широкополосной (красные кружки) и адиабатической (синие квадраты) моделей памяти.

назад, поскольку, с одной стороны, он более интересен практически, т.к. позволяет добиться большей эффективности памяти, а с другой, именно в этом случае проявляется больший контраст между сохранением сжатия и сохранением энергии импульса.

Численные расчеты будем проводить при тех же значениях параметров, что и прежде (на рис. 7.14 и 7.15). Прежде всего отметим, что собственные значения в обоих случаях быстро убывают (рис. 7.16). Особенно резкое убывание наблюдается для модели широкополосной памяти, где фактически отличны от нуля лишь первые два собственных значения. Такое поведение собственных значений показывает, что данная схема является хорошим фильтром для первых двух собственных мод ядра. На рисунках 7.17 и 7.18 изображены три первые собственные моды (первая строка) для широкополосной и адиабатической моделей, соответственно, а также квадраты этих функций (вторая строка).

Можно заметить, что отличительной особенностью схемы быстрой памяти является не только выделение ею только двух мод, но и локализация этих мод в различных областях временной шкалы (первая мода фактически локализована на интервале $T_R \in [0, 2.75]$, а вторая - на интервале $T_R \in [2.75, 5.5]$). Отметим сразу, что указанные границы интервалов локализации мод совпадают с двумя максимумами на кривой 7.15а. Для адиабатической памяти подобного "разделения" мод не наблюдается.

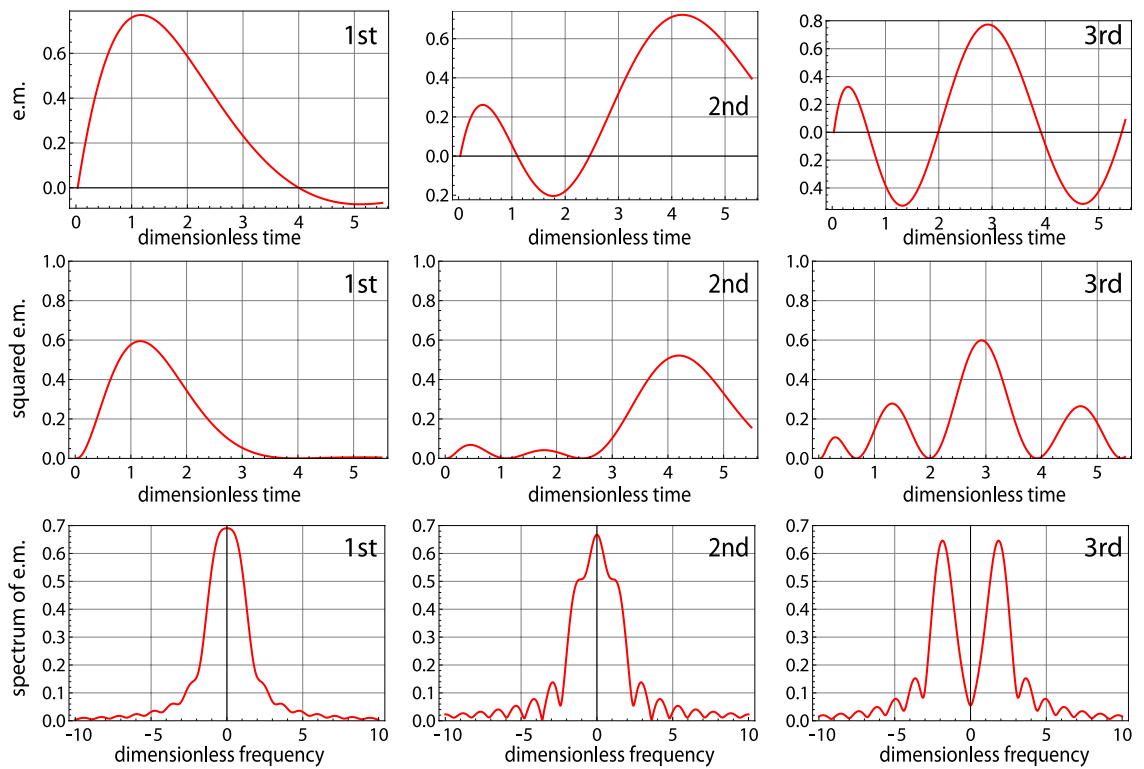


Рис. 7.17: Первые три собственные моды интегрального преобразования поля со входа на выход ячейки памяти (верхняя строка), их квадраты (средняя строка) и их Фурье-спектры (нижняя строка) в схеме широкополосной квантовой памяти. Безразмерное время определено как Ωt , безразмерная частота - как ω/Ω .

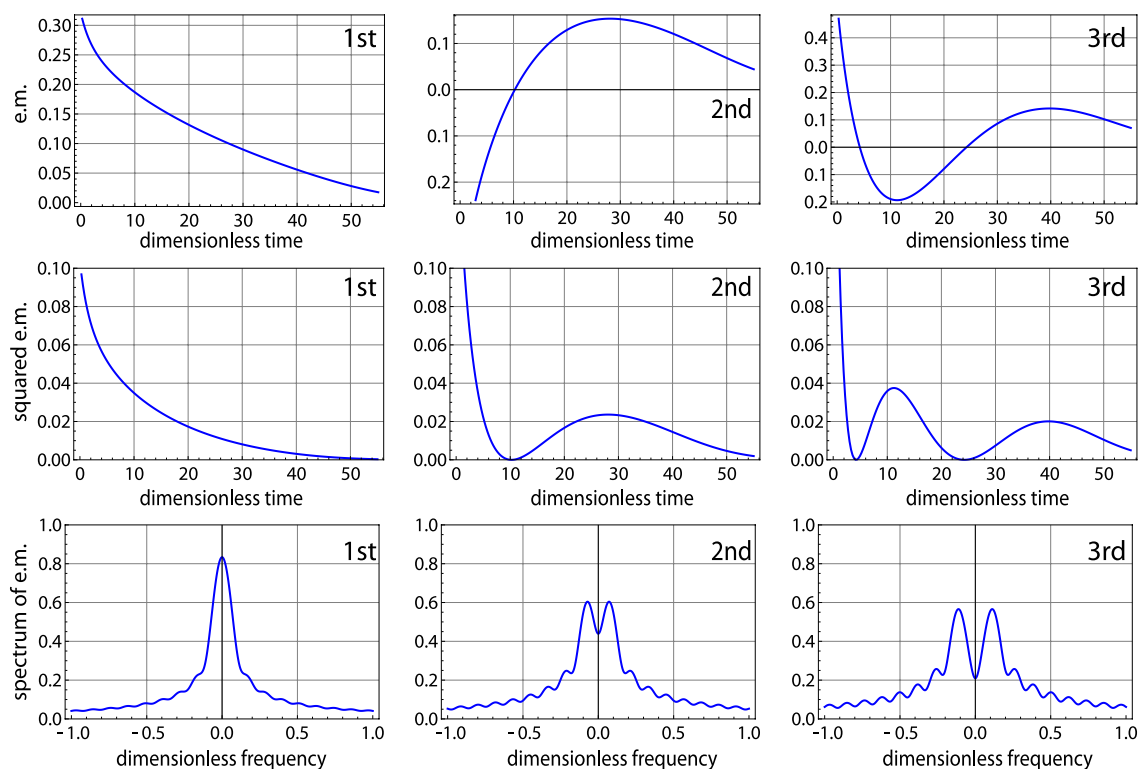


Рис. 7.18: Первые три собственные моды интегрального преобразования поля со входа на выход ячейки памяти (верхняя строка), их квадраты (средняя строка) и их Фурье-спектры (нижняя строка) в схеме адиабатической квантовой памяти. Безразмерное время определено как $2\Omega^2 t/\gamma$, безразмерная частота - как $\omega\gamma/(2\Omega^2)$.

Теперь проследим как сжатие распределено по модам памяти, то есть проверим все ли собственные моды являются сжатыми. С этой целью построим спектры трех первых мод (см. третью строку на рис. 7.17 и 7.18). Напомним, что входное поле имело широкий спектр сжатия (рис. 7.13). Не трудно заметить, что все найденные спектры собственных мод локализуются в области хорошего сжатия, то есть они хорошо сжаты. Однако не все из них вносят вклад в сжатие импульса как целого (сжатие на нулевой частоте).

Возвращаясь к обсуждению кривых на рис. 7.15а, теперь мы можем интерпретировать их ход с точки зрения модовой структуры моделей памяти. Мы видим, что с увеличением времени считывания сжатие достигает своего максимального значения и затем начинает уменьшаться, хотя эффективность продолжает нарастать. Это может означать только то, что "хвост" импульса сжат хуже, чем его начало. Такая ситуация может, например, иметь место, когда начало и конец импульса формируются двумя различными собственными модами, разделенными по временной шкале. Таким образом наличие расхождения в поведении кривых сжатия и эффективности существенно определяется модовой структурой памяти, которая различается не только от схемы к схеме, но и для одной схемы в зависимости от геометрии считывания. Величина сжатия импульса определяется двумя факторами: тем, какие из мод содержат нулевую частотную компоненту, и насколько хорошо активные моды разделены во времени. Если все активные моды содержат нулевую частотную компоненту и хорошо перекрываются на временной оси, то сжатие и эффективность будут достигать максимальных значений одновременно. В противном случае можем ожидать различных условий для достижения максимума этими параметрами.

Для случая, рассмотренного на рис. 7.15а, видим, что в момент времени $\tilde{T}_R = 2.75$ первая мода поля по-большой части считана, вторая мода энергетически локализована на другом временном интервале, а все остальные отфильтровываются памятью.

Нулевая спектральная компонента первой моды велика и хорошо сжата (т.е. первая мода как целое хорошо сжата). Таким образом, хотя половина фотонов все еще не считана (они будут восстановлены из второй моды), мы наблюдаем хорошее сжатие восстановленного импульса.

7.5.1 Сравнение актуальных параметров для двух моделей памяти

Следует отметить, что две рассматриваемые модели квантовой памяти спектрально весьма различны. Чтобы оценить ширины спектральных диапазонов собственных функций в том и другом случаях, нам необходимо вернуться от безразмерных переменных к размерным. Вспомним, что процедура обезразмеривания для рассматриваемых моделей различна. Для обезразмеривания времени в рассматриваемых схемах мы пользовались соотношениями (7.45) и (7.95), соответственно:

$$\Omega_{HS} t \rightarrow t_{HS}, \quad \frac{2\Omega_{AD}^2}{\gamma} t \rightarrow t_{AD}, \quad (7.127)$$

где с мы добавили нижние индексы, чтобы указать на используемую модель. При этом, требования, накладываемые на величину частоты Раби, противоположны:

$$\gamma \ll \Omega_{HS}, \quad \gamma \gg \Omega_{AD}, \quad (7.128)$$

откуда следует, что $\Omega_{AD} \ll \Omega_{HS}$, и их отношение должно составлять как минимум 2 порядка. Опираясь на представленные здесь неравенства, а также, обращая внимание, что отношение безразмерной ширины спектров на рис. 7.17 и 7.18 составляет $\Delta\omega_{HS}/\Delta\omega_{AD} \approx 10$, получим, что ширина собственных мод адиабатической модели памяти как минимум на 4 порядка меньше, чем соответствующая ширина для широкополосной модели. При этом можно увидеть, что, хотя безразмерные значения L различны, можно полагать, что оба расчета проводились при одной и той же оптической плотности $d \sim 55$ (полагая справедливым соотношение $\Omega_{HS}/\gamma \approx 10$). Отметим,

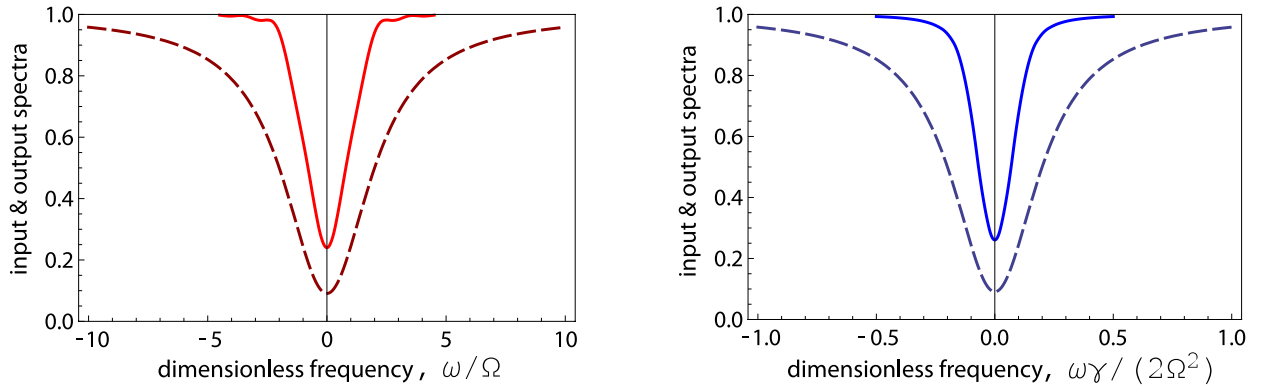


Рис. 7.19: Входной (пунктирная линия) и восстановленный (сплошная линия) спектры сжатия для широкополосной (а) и адиабатической (б) моделей квантовой памяти.

что соотношение параметров задачи, характерное для модели широкополосной памяти, легче достижимо в экспериментах с резонансными Λ -атомами, особенно в случае холодных атомных ансамблей, чем условие адиабатичности процесса.

Из рисунков 7.17 и 7.18 видно, что спектральная пропускная способность схем много меньше выбранной нами ширины спектра входного сигнала. Можно сказать, что такой выбор был не оптимален, и необходимо согласовывать передаваемый сигнал с возможностями ячейки памяти. В этом смысле модель широкополосной памяти выглядит более привлекательной, поскольку обеспечивает значительно большую спектральную полосу пропускания сигнала, как было отмечено выше. Отметим, что уменьшение значения спектральной ширины κ при сохранении длительности входного импульса приводит к потерям в сжатии входного импульса (см. рис. 7.19). Однако видно, что при выборе $\kappa \approx 2$ широкополосной модели и $\kappa \approx 0.2$ для адиабатической памяти эти потери оказываются относительно не велики, и соотношение $\kappa T \gg 1$ все еще можно приближенно считать выполненным.

На рис. 7.19 изображены спектры сжатия входного и восстановленного сигналов, когда полоса сжатия входного поля согласована с полосой пропускания ячейки памяти.

Отметим, что поскольку рассматриваемые ячейки памяти являются модовыми фильтрами, т.е. чувствительны только к нескольким первым модам входного сигнала, то наличие на входе других мод не влияет на величину полного сжатия в импульсе. Из представленных спектров можно видеть, что нулевая спектральная компонента достаточно велика только в спектрах 1-ой и 2-ой собственных мод. В то же время, входной прямоугольный импульс хорошо аппроксимируется суперпозицией первых двух мод. Именно поэтому проведенное сравнение кривых эффективности и степени сжатия вполне оправданно, несмотря на различный характер сигналов на входе. Например, если зная свойства нашей схемы как модового фильтра мы сформируем входной сигнал в виде суперпозиции двух первых мод в схеме широкополосной памяти, то кривые, представленные на рис. 7.15а практически не изменятся.

Мы показали, что понятие квантовой эффективности записи-считывания хоть и может быть введено для импульса произвольной формы, но не является при этом универсальной характеристикой ячейки памяти, через которую могут быть выражены другие свойства данной ячейки (например, способность к сохранению сжатия). Только эффективность, определенная по отношению к какой-либо одиночной собственной моде памяти, является такой исчерпывающей характеристикой. Т.о. для импульса произвольной формы не достаточно обеспечить высокую эффективность памяти, чтобы говорить о сохранении квантового состояния света.

7.6 Эффективность и другие характеристики качества хранения информации

В предыдущем разделе мы показали, что, в отличие от одномодовой модели, при решении задач многомодовой квантовой памяти эффективность не является исчерпывающей характеристикой способности системы к сохранению квантовых свойств света.

Можно говорить не просто об эффективности квантовой памяти, но о многих эффективностях по отношению к запоминанию конкретных свойств поля.

Напомним, что традиционная эффективность квантовой памяти вводится как отношение средних чисел фотонов в выходном и входном импульсах. Таким образом это может трактоваться как эффективность по отношению к сохранению полного среднего числа фотонов в сигнальном импульсе:

$$\mathcal{E}_{ph.number} = \langle \hat{n}_{out} \rangle / \langle \hat{n}_{in} \rangle. \quad (7.129)$$

где операторы числа фотонов во входном и выходном сигнальных импульсах с длительностями соответственно T_{in} и T_{out} могут быть записаны в виде

$$\hat{n}_{in} = \int_0^{T_{in}} dt \hat{a}_{in}^\dagger(t) \hat{a}_{in}(t), \quad \hat{n}_{out} = \int_0^{T_{out}} dt \hat{a}_{out}^\dagger(t) \hat{a}_{out}(t). \quad (7.130)$$

Хотя в определении $\mathcal{E}_{ph.number}$ упоминается о фотонах, тем не менее эта величина по физическому смыслу совершенно классическая и может трактоваться как отношение средних интенсивностей на входе и выходе квантового канала. Для того, чтобы обсуждать сохранение квантово-статистических аспектов сигнала, мы должны следить за флуктуационными характеристиками. Например, если мы хотим знать, насколько хорошо сохраняется статистика фотонов в импульсах, достаточно проследить за соответствующим отношением параметров Манделя:

$$\mathcal{E}_{ph.stat.} = \xi_{out} / \xi_{in}, \quad (7.131)$$

которые определяются через флуктуации числа фотонов $\delta \hat{n}_{in,out} = \hat{n}_{in,out} - \langle \hat{n}_{in,out} \rangle$ в виде

$$\xi_{in} = \langle : \delta \hat{n}_{in}^2 : \rangle / \langle \hat{n}_{in} \rangle, \quad \xi_{out} = \langle : \delta \hat{n}_{out}^2 : \rangle / \langle \hat{n}_{out} \rangle. \quad (7.132)$$

Здесь символ $\langle : \dots : \rangle$ означает нормально упорядоченное среднее.

Если статистика запоминаемого излучения гауссова, то характеристика квантовых аспектов сводится к вычислению корреляторов не выше второго порядка. Если же мы имеем дело с негауссовым источником, то задача становится еще сложнее, и для полного описания такой системы, вообще говоря, требуются корреляционные функции всех порядков. Динамических и статистических аспектов задачи очень много, и для каждого из них могла бы быть введена своя эффективность. Здесь мы ограничимся еще только одной характеристикой, рассмотренной нами ранее на конкретных примерах, а именно, эффективностью памяти по отношению к запоминанию сжатия светового импульса:

$$\mathcal{E}_{squeez.} = \langle : \delta \hat{x}_{out, \omega} \delta \hat{x}_{out, -\omega} : \rangle / \langle : \delta \hat{x}_{in, \omega} \delta \hat{x}_{in, -\omega} : \rangle. \quad (7.133)$$

Здесь мы вводим в рассмотрение квадратурные флуктуации как реальную и мнимую части соответствующей неэрмитовской амплитуды и полагаем, что во входном импульсе сжатой была x -квадратура.

Возвращаясь к модели светоделительной пластины, видим, что соотношение (7.80) позволяет вычислить индивидуальные эффективности в явном виде. В результате нетрудно получить, что для квантового канала типа светоделителя

$$\mathcal{E}_{ph.number} = \mathcal{E}_{ph.stat.} = \mathcal{E}_{squeez.} = \mathcal{T}. \quad (7.134)$$

Если мы захотим проследить за любыми другими статистическими характеристиками, то увидим, что эффективность их сохранности в этом случае точно также однозначно будет выражаться через коэффициент \mathcal{T} .

Иначе обстоит дело в моделях, рассмотренных нами выше. Как уже было сказано, здесь связь между входным полем $a_{in}(t) = \hat{a}(z = 0, t)$ и выходным полем $\hat{a}_{out}(t) = \hat{a}(z = L, t)$ перестает быть локальной во времени и определяется интегральным соотношением вида:

$$\hat{a}_{out}(t) = \int_0^{T_{in}} dt' \hat{a}_{in}(T_{in} - t') G(t, t') + \hat{v}(t) \quad (7.135)$$

Здесь мы опустим упоминание о поперечном волновом векторе, поскольку, как было показано выше, развитие каждой плоской волны происходит независимо от других волн, и данные соотношения можно рассматривать для каждого \vec{q} в отдельности.

Первое слагаемое справа в уравнении (7.135) описывает вклад входного сигнального поля в выходное. С точки зрения классической электродинамики это единственное, что надо принимать во внимание. Однако, в квантовой электродинамике мы обязаны также учитывать еще и те члены, которые формируются другими подсистемами. Они изначально находятся в вакуумных состояниях, и их единственная, но крайне важная роль состоит в том, чтобы перестановочные соотношения для операторов сохраняли бы свою каноническую форму:

$$\left[\hat{a}_{out}(t_1), \hat{a}_{out}^\dagger(t_2) \right] = \left[\hat{a}_{in}(t_1), \hat{a}_{in}^\dagger(t_2) \right] = \delta(t_1 - t_2). \quad (7.136)$$

Далее мы будем полагать, что операторы $\hat{v}(t)$ и $\hat{a}_{in}(t)$ независимы друг от друга и потому соответствующий коммутатор $[\hat{v}(t), \hat{a}_{in}(t')]$ равен нулю. Теперь, принимая во внимание (7.136), нетрудно получить ненулевое коммутационное соотношение

$$\left[\hat{v}(t_1), \hat{v}^\dagger(t_2) \right] = \delta(t_1 - t_2) - \int_0^{T_{in}} dt G(t_1, t) G(t_2, t). \quad (7.137)$$

Для анализа интегрального преобразования (7.135) может быть использовано уравнение для собственных функций и собственных значений:

$$\sqrt{\lambda_j} \varphi_j(t) = \int_0^T dt' \varphi_j(t') G(t, t'), \quad (7.138)$$

где набор собственных функций $\varphi_j(t)$ образует полный ортонормированный базис:

$$\int_0^T dt \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) = \delta_{ij}, \quad \sum_j \varphi_j(t) \varphi_j^*(t') = \delta(t - t'). \quad (7.139)$$

Для нас в дальнейшем более полезным оказывается так называемое разложение Шмидта (см., например, [105]) для ядра $G(t, t')$, которое имеет вид

$$G(t, t') = \sum_j \sqrt{\lambda_j} \varphi_j^*(t) \varphi_j(t'). \quad (7.140)$$

Это разложение и интегральное уравнение (7.138) однозначно друг с другом связаны.

Разложим теперь все характерные амплитуды по полному ортонормированному набору $\varphi_j(t)$ в виде

$$\begin{aligned}\hat{a}_{out}(t) &= \sum_i \hat{e}_{out,i} \varphi_i(t), \\ \hat{a}_{in}(T-t) &= \sum_i \hat{e}_{in,i} \varphi_i(t), \\ \hat{v}(t) &= \sum_i \hat{e}_i k_i \varphi_i(t).\end{aligned}\tag{7.141}$$

Нетрудно убедиться, что для сохранения коммутационных соотношений мы должны положить $k_i = 1 - \lambda_i$. Тогда имеют место соотношения

$$\left[\hat{e}_{in,i}, \hat{e}_{in,j}^\dagger \right] = \left[\hat{e}_{out,i}, \hat{e}_{out,j}^\dagger \right] = \left[\hat{e}_i, \hat{e}_j^\dagger \right] = \delta_{ij}.\tag{7.142}$$

Подставим (7.140)-(7.141) в уравнение (7.135), и получим равенство

$$\sum_i \hat{e}_{out,i} \varphi_i(t) = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \hat{e}_{out,i} \varphi_i(t) + \sum_i \sqrt{1 - \lambda_i} \hat{e}_i \varphi_i(t).\tag{7.143}$$

Умножим это равенство на функцию $\varphi_j(t)$ и проинтегрируем полученное по времени в интервале $[0, T]$, тогда для каждой j -моды получится соотношение

$$\hat{e}_{out,j} = \sqrt{\lambda_j} \hat{e}_{in,j} + \sqrt{1 - \lambda_j} \hat{e}_j.\tag{7.144}$$

Нужно отметить, что часто, когда говорят о светоделительной модели памяти, имеют в виду именно равенства (7.144), уточняя, что для каждой моды имеется свой собственный светоделитель. В то же самое время, равенство (7.144) может быть сведено к (7.80) только при условии, что все собственные числа λ_i ядра $G(t, t')$ оказываются одинаковыми, чего, разумеется, быть не может для адекватных моделей памяти.

Теперь на основе определений (7.129)-(7.133) и соотношения (7.144) можно получить выражения для эффективностей относительно сохранения определенных квантовых свойств поля. Эффективность относительно числа фотонов:

$$\mathcal{E}_{ph.number} = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_j \langle \hat{n}_{in,j} \rangle}{\sum_{j=1}^N \langle \hat{n}_{in,j} \rangle},\tag{7.145}$$

Эффективность относительно статистики фотонов:

$$\mathcal{E}_{ph.stat.} = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \langle \hat{n}_{in,j} \rangle \xi_{in,j}}{\sum_{j=1}^N \langle \hat{n}_{in,j} \rangle \xi_{in,j}} \times \mathcal{E}_{ph.number}^{-1}, \quad (7.146)$$

Эффективность относительно квадратурного сжатия:

$$\mathcal{E}_{squeeze.} = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_j \langle : \delta \hat{x}_{in,j} \delta \hat{x}_{in,j} : \rangle |\varphi_j(\omega)|^2}{\sum_{j=1}^N \langle : \delta \hat{x}_{in,j} \delta \hat{x}_{in,j} : \rangle |\varphi_j(\omega)|^2}, \quad \delta \hat{x}_{in,j} = \hat{x}_{in,j} - \langle \hat{x}_{in,j} \rangle \quad (7.147)$$

Здесь $\hat{n}_{in,j} = \hat{e}_{in,j}^\dagger \hat{e}_{in,j}$ оператор числа фотонов в j -ой моде для входного сигнального поля ($\hat{e}_{in,j}^\dagger$, $\hat{e}_{in,j}$ - соответствующие операторы рождения и уничтожения фотонов). Эрмитовские квадратурные компоненты вводятся как реальная и мнимая части оператора $\hat{e}_{in,j} = \hat{x}_{in,j} + i\hat{y}_{in,j}$. Параметры Манделя $\xi_{in,j}$ для каждой из мод входного поля вводятся согласно соотношению $\langle \hat{n}_{in,j}^2 \rangle - \langle \hat{n}_{in,j} \rangle^2 = \langle \hat{n}_{in,j} \rangle (1 + \xi_{in,j})$. Величины $\varphi_j(\omega)$ являются фурье-образами соответствующих мод Шмидта $\varphi_j(t)$.

Как видим, для многомодовой ситуации разные частные эффективности определяются, вообще говоря, существенно разными формулами. Они оказываются зависимыми не только от собственных чисел λ_j , но и от параметров поля (статистических и динамических) в исходном сигнальном импульсе. Если же мы будем предполагать, что в исходном импульсе возбуждена только одна из мод, то формулы значительно упрощаются, и ситуация сводится к модели светоделительной пластины.

С точки зрения практического применения конкретной схемы памяти для нас наиболее интересен тот случай, когда среди большого набора N мод существует несколько (n) актуальных мод, для которых собственные числа близки к единице $\lambda_j \sim 1$ (при $j \leq n$), а остальные λ_j (при $(n+1) < j < N$). Это позволяет оборвать суммирование рядов в формулах (7.145)-(7.147), и ввести параметр

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad (7.148)$$

где суммирование ведется только по модам, для которых $|\lambda_j - \bar{\lambda}| \ll \lambda_j \sim 1$. Это дает нам возможность заменить в формулах для эффективностей все актуальные λ_j на

$\bar{\lambda}$, и тогда нетрудно увидеть, что

$$\mathcal{E}_{ph.number} = \mathcal{E}_{ph.stat.} = \mathcal{E}_{squeez.} = \bar{\lambda}. \quad (7.149)$$

Таким образом может возникнуть впечатление, что мы снова можем говорить о единственном параметре (7.149), характеризующем качество памяти, и в этом смысле ситуация становится схожей с одномодовой. Однако, это не так. В отличие от (7.134), равенства (7.149) следует интерпретировать не как равенство разных эффективностей при любой процедуре записи-считывании, но как равенства для их максимальных значений, однако, достигаемых при различных процедурах записи-считывания. Эта интерпретация подтверждается расчетом, представленным в предыдущем разделе.

Заключение к главе 7 В этой главе мы построили модель ячейки квантовой памяти для коротких импульсов. Мы показали, что эффективный перенос характеристик квантового поля на долгоживущую когерентность атомного ансамбля осуществляется благодаря коллективным когерентным процессам взаимодействия света со средой. Представленная модель опирается на полностью квантовое описание взаимодействия атомного ансамбля со световыми импульсами, и описывает процессы записи и считывания при распространении света через среду. Мы проследили за эволюцией когерентности, сохраняющей квантовую информацию, переносимую сигнальным импульсом, а также за свойствами переизлучаемого поля. На этой основе мы нашли эффективности процесса записи и полного цикла записи-восстановления, оценили информационную емкость многомодовой ячейки памяти. Мы предложили простой и эффективный механизм оптимизации работы протокола, основанный на согласовании оптической толщины ячейки и длительности импульсов. Проанализировав прямую и обратную геометрии считывания, мы показали, что последняя обеспечивает лучшие условия для эффективного восстановления сигнала.

Представленная модель справедлива для случая произвольных отстроек сигнального и управляющего полей от резонанса с атомной средой, при условии, что двухфотонный резонанс имеет место. Это позволило нам получить решение для двух предельных случаев - резонансного взаимодействия и рамановского взаимодействия - в рамках одной модели, а также оценить влияние отстройки на эффективность памяти в промежуточных случаях. Найдены пороговые условия, при которых пригодны упрощенные модели. Показано, что при значении нормированной отстройки $r = \Delta/(2\Omega) > 2$ система может быть эффективно сведена к двухуровневой рамановской модели. Напротив, вблизи от резонанса наличие третьего энергетического уровня оказывает существенное влияние на эволюцию системы. Заселение верхнего энергетического уровня может приводить к значительным потерям, и необходимо контролировать длительность процесса взаимодействия так, чтобы к моменту его окончания раби-осцилляции по большей части опустошили уровень $|3\rangle$, заселив уровень $|2\rangle$.

Проанализировав собственные моды предложенной здесь модели широкополосной квантовой памяти и сравнив их с модовой структурой адиабатической памяти, мы показали, что обе схемы работают как модовые фильтры, но спектральная ширина широкополосной памяти как минимум на 4 порядка больше, чем адиабатической. Это позволяет говорить о преимуществе представленной здесь модели памяти для хранения широкополосных сигналов.

Решив задачу о сохранении сжатого света в двух упомянутых выше моделях памяти мы показали, что наилучшее воспроизведение квантовых свойств света (сжатие) достигается необязательно при максимальной эффективности памяти, что связано с особенностями мод Шмидта для ячейки памяти. Понятие квантовой эффективности записи-считывания хоть и может быть введено для импульса произвольной формы, но не является при этом универсальной характеристикой ячейки памяти, через

которую могут быть выражены другие свойства данной ячейки (например, способность к сохранению сжатия). Только эффективность, определенная по отношению к какой-либо одиночной собственной моде памяти, является такой исчерпывающей характеристикой. Т.о. для импульса произвольной формы не достаточно обеспечить высокую эффективность памяти, чтобы говорить о сохранении квантового состояния света.

Приложение А

Спектр сжатия изолированного импульса входного поля

Согласно расчетам, представленным в главе 3, среднеквадратичные флуктуации квадратурных компонент одномодового субпуассоновского лазера с захватом фазы определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} (: \delta x_{\omega}^2 :) &= -\frac{p(1-\mu)}{4} \frac{\kappa}{\kappa^2(1-\mu/2)^2 + \omega^2}, \\ (: \delta y_{\omega}^2 :) &= \frac{1-\mu}{2} \frac{\kappa}{\kappa^2\mu^2/4 + \omega^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{n_0}{n}} \ll 1. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Здесь параметр $0 < p < 1$ отражает степень регулярности возбуждения верхнего лазерного уровня: $p = 0$ отвечает полностью случайной (пуассоновской) накачке, а $p = 1$ - регулярной накачке; κ - спектральная ширина лазерной моды, n - среднее число фотонов в моде излучения в стационарном режиме, n_0 - среднее число фотонов, запасаемое пустым резонатором под действием внешнего захватывающего поля, которое используется для подавления фазовой диффузии и проявления эффективного сжатия излучения лазера. Параметр μ , определяется относительной мощностью внешнего захватывающего поля, и предполагается малым. Несмотря на это, игнорирование величины μ может привести к нарушению соотношения неопределенностей Гайзенберга на малых частотах.

Аналогичные соотношения могут быть записаны и для среднеквадратичных флук-

туаций квадратурных компонент вырожденного параметрического генератора света, оперирующего в допороговом режиме [G11]:

$$\begin{aligned} (: \delta x_\omega^2 :) &= \frac{1}{4} \frac{\kappa s}{\kappa^2/4(1-s)^2 + \omega^2}, \\ (: \delta y_\omega^2 :) &= -\frac{1}{4} \frac{\kappa s}{\kappa^2/4(1+s)^2 + \omega^2}, \quad s = \sqrt{n_p/n_0} < 1. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Здесь n_p - среднее стационарное число фотонов в моде накачки, n_0 - пороговое число фотонов в моде накачки, κ - спектральная ширина сигнальной моды, параметр s характеризует степень приближения к порогу генерации.

Выражения (A.1)-(A.2) характеризуют спектральные квантовые свойства стационарных потоков СПЛ и ВПГС. Для оценки квантовых особенностей импульсного света, проведем следующие вычисления (на примере излучения СПЛ).

Применим обратное преобразование Фурье к выражению (A.1):

$$\langle : \delta x(t) \delta x(t') : \rangle = -\frac{p}{8} \frac{1-\mu}{1-\mu/2} e^{-\kappa(1-\mu/2)|t-t'|}, \quad (\text{A.3})$$

$$\langle : \delta y(t) \delta y(t') : \rangle = \frac{1-\mu}{\mu} e^{-\kappa\mu/2|t-t'|}. \quad (\text{A.4})$$

Описывая импульс света в квантовой теории, необходимо помнить, что снаружи импульса мы также имеем электромагнитное поле, но в вакуумном состоянии. Этот факт можно формально выразить, записав формулу для амплитуды поля снаружи резонатора в виде:

$$\hat{A}(t) \rightarrow \Theta^T(t)\hat{A}(t) + (1 - \Theta^T(t)) \hat{A}_{vac}(t). \quad (\text{A.5})$$

Здесь индекс *vac* у оператора Гайзенберга означает, что при вычислении измеряемых величин этот оператор следует усреднять по вакуумному состоянию поля. Функция $\Theta^T(t)$ равна нулю снаружи интервала $0 < t < T$ и единице внутри этого интервала.

Чтобы оценить сжатие, введем, наряду с квадратурными компонентами поля внутри резонатора $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$, квадратуры поля вышедшего из резонатора и рас-

пространяющегося в свободном пространстве:

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{A}^\dagger(t) + \hat{A}(t) \right), \quad \hat{Y}(t) = \frac{i}{2} \left(\hat{A}^\dagger(t) - \hat{A}(t) \right). \quad (\text{A.6})$$

Квадратурное сжатие для стационарного светового потока определено через корреляторы этих операторов $\langle \hat{X}(t)\hat{X}(t') \rangle$ и $\langle \hat{Y}(t)\hat{Y}(t') \rangle$. В свою очередь эти корреляторы связаны с известными нам нормально упорядоченными средними внутрирезонаторных полей:

$$\langle \hat{X}(t)\hat{X}(t') \rangle = \frac{1}{4} \delta(t-t') + \kappa \langle : \hat{x}(t)\hat{x}(t') : \rangle. \quad (\text{A.7})$$

$$\langle \hat{Y}(t)\hat{Y}(t') \rangle = \frac{1}{4} \delta(t-t') + \kappa \langle : \hat{y}(t)\hat{y}(t') : \rangle. \quad (\text{A.8})$$

В случае изолированного импульса выражения (A.7) и (A.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \Theta^T(t)\delta\hat{X}(t) \Theta^T(t')\delta\hat{X}(t') \rangle &= \\ &= \frac{1}{4} \Theta^T(t)\Theta^T(t') \delta(t-t') + \kappa \langle : \Theta^T(t)\delta\hat{x}(t) \Theta^T(t')\delta\hat{x}(t') : \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \langle \Theta^T(t)\delta\hat{Y}(t) \Theta^T(t')\delta\hat{Y}(t') \rangle &= \\ &= \frac{1}{4} \Theta^T(t)\Theta^T(t') \delta(t-t') + \kappa \langle : \Theta^T(t)\delta\hat{y}(t) \Theta^T(t')\delta\hat{y}(t') : \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Тогда, определяя фурье-преобразование функции $F(t)$ на ограниченном интервале $[0, T]$

$$F_\omega^T = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt F(t) e^{i\omega t}, \quad (\text{A.11})$$

можем применить его к выражениям (A.9) и (A.10). В результате получим:

$$\langle \delta\hat{X}_\omega^T \delta\hat{X}_{\omega'}^T \rangle = \frac{1}{4} \delta^T(\omega + \omega') + \kappa \langle : \delta\hat{x}_\omega^T \delta\hat{x}_{\omega'}^T : \rangle, \quad (\text{A.12})$$

$$\langle \delta\hat{Y}_\omega^T \delta\hat{Y}_{\omega'}^T \rangle = \frac{1}{4} \delta^T(\omega + \omega') + \kappa \langle : \delta\hat{y}_\omega^T \delta\hat{y}_{\omega'}^T : \rangle, \quad (\text{A.13})$$

где введено обозначение

$$\delta^T(\omega + \omega') = \frac{\sin(\omega + \omega')T/2}{(\omega + \omega')T/2} e^{i(\omega + \omega')T/2}. \quad (\text{A.14})$$

Второе слагаемое в (A.12)-(A.13), различно для различных источников света. В случае одномодового суб-пуассоновского лазера с захватом фазы нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} \langle : \delta \hat{x}_\omega^T \delta \hat{x}_{\omega'}^T : \rangle = & \frac{p}{8} \frac{1 - \mu}{1 - \mu/2} \left[- \left(\frac{1}{\kappa_x + i\omega'} + \frac{1}{\kappa_x + i\omega} \right) \delta^T(\omega + \omega') + \right. \\ & + \frac{1}{T} \frac{1}{(\kappa_x - i\omega)(\kappa_x + i\omega')} \left(1 - e^{-\kappa_x T + i\omega T} \right) \\ & \left. + \frac{1}{T} \frac{1}{(\kappa_x - i\omega')(\kappa_x + i\omega)} \left(1 - e^{-\kappa_x T + i\omega' T} \right) \right], \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

где

$$\kappa_x = \kappa(1 - \mu/2)$$

Пользуясь определением (7.83) и подставляя в него (A.12) и (A.15), можем выразить параметр сжатия для импульса СПЛ в виде:

$$e^{-r_{in}(\omega)} = 1 - \frac{p\kappa^2(1 - \mu)}{\kappa_x^2 + \omega^2} + \frac{p\kappa^2(1 - \mu)}{2\kappa_x T} \left[\frac{1}{(\kappa_x - i\omega)^2} \left(1 - e^{-\kappa_x T + i\omega T} \right) + \text{к.с.} \right]. \quad (\text{A.16})$$

В случае параметрической генерации наибольший интерес представляет коррелятор флуктуаций фазовой квадратуры, его величина определяет степень сжатия излучения. Проводя те же вычисления, что и для СПЛ, получим

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{Y}_\omega^T \delta \hat{Y}_{\omega'}^T \rangle = & \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\kappa s}{1 + s} \left(\frac{1}{\kappa/2(1 + s) + i\omega'} + \frac{1}{\kappa/2(1 + s) + i\omega} \right) \right] \delta^T(\omega + \omega') + \\ & + \frac{\kappa}{4T} \frac{s}{1 + s} \frac{1}{(\kappa/2(1 + s) - i\omega)(\kappa/2(1 + s) + i\omega')} \left(1 - e^{-\kappa/2(1 + s)T + i\omega T} \right) - \\ & + \frac{\kappa}{4T} \frac{s}{1 + s} \frac{1}{(\kappa/2(1 + s) - i\omega')(\kappa/2(1 + s) + i\omega)} \left(1 - e^{-\kappa/2(1 + s)T + i\omega' T} \right). \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Это выражение позволяет оценить степень сжатия импульса света произвольной длительности T на любой частоте:

$$e^{-r_{in}(\omega)} = \langle \delta \hat{Y}_\omega^T \delta \hat{Y}_{-\omega}^T \rangle \quad (\text{A.18})$$

Заклучение

В данной диссертационной работе мы теоретически рассмотрели комплекс вопросов, касающихся генерации яркого широкополосного неклассического света, его использования в квантовых информационных каналах, а также возможности его хранения в ячейках квантовой памяти. Был получен ряд результатов, из которых главными являются следующие.

Основные результаты работы, относящиеся к генерации яркого широкополосного неклассического света:

- 1.1 Построена квантовая теория вискела с учетом двулучепреломления и дихроизма в активной среде. Показано, что для корректного анализа квантово-статистических свойств излучения вискела необходимо следить не только за генерирующей надпороговой модой, но и за подпороговой. Предсказан эффект поляризационного сжатия в этой системе.
- 1.2 Проанализированы динамические и квантово-статистические свойства излучения вискела для двух конфигураций (соответствующих различному соотношению между релаксационными константами), встречающихся в экспериментах. Показано, что эффективность поляризационного сжатия в лазере с короткоживущим нижним уровнем значительно выше, чем в лазере с одинаковыми временами жизни уровней: в последнем случае максимально достижимо подавление дробового шума наполовину, в то время как в лазере с короткоживущим

нижним уровнем возможно обеспечить полное подавление дробового шума на низких частотах. Кроме того эффект переворачивания спина, присущий этим системам, существенно ухудшает статистику излучения в лазере с одинаковыми временами жизни уровней, и не вносит вклад в флуктуации полного числа фотонов и параметра Стокса S_1 для лазера с коротко живущим нижним уровнем.

- 1.3 Продемонстрирована несостоятельность феноменологической модели при описании шумов излучения виксела. Показано, что в то время как данная модель адекватно описывает динамику излучения виксела, квантово-статистические аспекты излучения, рассчитанные с помощью квантовой модели, отличаются от предсказаний, полученных в рамках феноменологической модели. Расхождение связано с потерей вкладов от источников шума, связанных с заселенностями подуровней.
- 1.4 Теоретически исследована модель внутривибраторного надпорогового трехмодового (мода накачки, сигнальная и холостая моды) невырожденного параметрического генератора света в условиях инжекции в сигнальную и холостую моды слабого внешнего синхронизирующего поля. На основе анализа распределения квази-вероятностей Глаубера были изучены квантово-статистические особенности излучения генератора в зависимости от мощности поля накачки. Показано, что при значительном превышении мощностью накачки порогового значения, сигнальная и холостая волны оказываются амплитудно-сжатыми наполовину по сравнению с когерентным состоянием. Сжатие можно наблюдать и в волне накачки, однако это не амплитудное, а фазовое сжатие, эффективное при промежуточных значениях параметра накачки. При небольшом превышении порога, сигнальная и холостая волны оказываются в перепутанном

состоянии.

1.5 Мы обсудили для параметрического генератора возможность наблюдения трех, двух и одной моды. В соответствие с этим теория дает возможность записать различные ковариационные матрицы размерности 6×6 , 4×4 , и 2×2 . Они определяются подходящим набором спектральных квадратурных компонент поля. На этой основе мы обсудили вопрос о чистоте квантового состояния излучаемого поля, а также о спектральной степени чистоты, т.е. о чистоте состояния выделенной пары осцилляторов с частотами $\omega_0 \pm \omega$, симметрично расположенными относительно модовой частоты. Мы показали, что при исследовании многомодовых полей связь между ковариационной матрицей и спектральной степенью чистоты должна определяться из условий наблюдения, поскольку многомодовая постановка задачи допускает построение различных ковариационных матриц. Показано, что рассматриваемые подсистемы (выделенные пары осцилляторов) могут оказываться в существенно смешанном состоянии вблизи порога генерации. В то же время оказалось, что спектральная степень чистоты при двухмодовом наблюдении (т.е. при наблюдении только за сигнальной и холостой волнами, исключая из рассмотрения волну накачки) всегда выше, чем при наблюдении за полной системой, что определяется наличием квантовых корреляций между подсистемами.

1.6 Исследованы квантово-статистические свойства излучения субпуассоновского лазера с фазовой синхронизацией внешним полем. Субпуассоновский лазер, синхронизированный достаточно слабым когерентным внешним электромагнитным полем, остается эффективным источником неклассического света, однако обнаруживает уже не субпуассоновскую статистику, а амплитудное сжатие, поскольку диффузия фазы оказывается полностью подавленной. Встает

вопрос о совместимости требований к внешнему синхронизирующему полю: с одной стороны оно должно быть достаточно слабым, чтобы не навязать собственную когерентную статистику излучению лазера и не разрушить его квантовые особенности, с другой - поле должно обеспечить эффективный захват фазы. Мы показали, что данные требования не противоречивы. Степень сжатия амплитудной квадратуры ограничивается степенью регулярности накачки, а в случае полностью регулярной накачки - мощностью синхронизирующего поля. Параллельно с СПЛ исследованы предельные возможности генерации фазово-сжатого света при работе ВПГС выше порога генерации; показано, что степень сжатия ограничивается только экспериментальными возможностями приближения к порогу генерации.

1.7 Для того чтобы увеличить емкость информационных каналов, необходимо воздействовать не только продольную координату и время, но и поперечные координаты. Для построения такого канала мы используем пиксельный источник, сформированный как совокупность точечных источников сжатого света (СПЛ или ВПГС), расположенных периодически на некоторой плоскости. Мы показали, что такой источник генерирует свет, сжатый не только во времени, как от индивидуального пикселя, но и в пространстве. Мы показали, что структура пространственного спектра флуктуаций излучения пиксельного источника, состоящего из относительно большого числа пикселей, много богаче, чем для одного пикселя. Вместо одного провала ниже уровня дробового шума, локализованного в окрестности нулевой частоты, появляется гребенка подобных провалов на разных частотах.

1.8 При обсуждении пространственно-многомодового источника яркого когерентного излучения нами предложена измерительная процедура, которая может

рассматриваться как альтернатива универсальному подходу гомодинного детектирования. Как и гомодинное измерение, она позволяет следить за любой квадратурой сигнального поля. При этом, процедура гомодинирования требует точного согласования пространственно-временного профиля исследуемого сигнала и локального осциллятора, что зачастую является весьма трудно осуществимой экспериментальной задачей. Предлагаемый нами подход позволяет обойти это затруднение.

Основные результаты работы, относящиеся к использованию широкополосного неклассического света в квантовых информационных каналах:

- 2.1 Протокол квантового плотного кодирования в непрерывных переменных обобщен на случай пространственно многомодовых полей. Мы показали, что многомодовый квантовый коммуникационный канал обладает значительно более высокой пропускной способностью благодаря присущей ему природе оптического параллелизма. Исследована роль дифракции и рассматриваемой схеме и показано, как можно оптимизировать ее работу. Мы продемонстрировали, что в отличие от классического канала передачи информации, в квантовом канале существует оптимальное значение пространственной плотности элементов изображения, соответствующее пространственной полосе сжатия/перепутывания света на входе канала.
- 2.2 Показано, что при использовании широкополосного света информационная емкость соответствующего канала связи может превышать емкость классического канала более, чем в 2 раза. Фактически, использование многомодового света в протоколе квантового плотного кодирования приводит к возникновению дополнительной степени свободы: мы имеем возможность варьировать соотношение времени когерентности неклассического света и сигнала Алисы. При одномодо-

вой постановке задачи, когда корректное введение этих параметров невозможно, мы ограничены случаем равенства времени когерентности сигнала Алисы и квантового света, с помощью которого этот сигнал передается (оба они формально равны бесконечности).

2.3 Что касается схемы многомодовой телепортации, то здесь мы не можем ожидать преимуществ при передаче каждого из осцилляторов многомодового излучения, напротив, только центральная мода излучения передается с максимальной верностью, а остальные - с меньшей в меру их отстройки от несущей частоты. Однако здесь следует ставить вопрос не об улучшении качества телепортации за счет использования многомодового света, а о принципиальной возможности телепортировать спектрально широкий сигнал с верностью передачи каждой из мод выше классической. Мы показали, что даже на современном уровне экспериментальной техники многомодовое состояние со спектральной шириной порядка (или меньше) модовой ширины резонатора может быть телепортировано с верностью передачи каждой моды, заметно превосходящей классический предел.

Основные результаты работы, относящиеся к сохранению широкополосного неклассического света в ячейках квантовой памяти:

3.1 Разработана теоретически модель быстрой (широкополосной) квантовой памяти, дающей возможность сохранять сигнальные импульсы с длительностью, много меньшей характерного атомного времени жизни. Мы показали, что эффективный перенос характеристик квантового поля на долго живущую когерентность атомного ансамбля осуществляется благодаря коллективным когерентным процессам взаимодействия света со средой. Мы проследили за эволюцией когерентности, сохраняющей квантовую информацию, переносимую сиг-

нальным импульсом, а также за свойствами переизлучаемого поля. На этой основе мы нашли эффективности процесса записи и полного цикла записи-восстановления, оценили информационную емкость многомодовой ячейки памяти. Мы предложили простой и эффективный механизм оптимизации работы протокола, основанный на согласовании оптической толщины ячейки и длительности импульсов. Проанализировав прямую и обратную геометрии считывания, мы показали, что последняя обеспечивает лучшие условия для эффективного восстановления сигнала.

3.2 Проанализировав собственные моды разработанной модели широкополосной квантовой памяти и сравнив их с модовой структурой адиабатической памяти, мы показали, что обе схемы работают как модовые фильтры, но полоса пропускания широкополосной памяти как минимум на 4 порядка больше, чем адиабатической. Это позволяет говорить о преимуществе представленной здесь модели памяти для хранения широкополосных сигналов.

3.3 Решив задачу о сохранении сжатого света в двух упомянутых выше моделях памяти мы показали, что наилучшее воспроизведение квантовых свойств света (сжатие) достигается необязательно при максимальной эффективности памяти, что связано с особенностями мод Шмидта для ячейки памяти.

3.4 Представленная модель справедлива для случая произвольных отстроек сигнального и управляющего полей от резонанса с атомной средой, при условии, что двухфотонный резонанс имеет место. Это позволило нам получить решение для двух предельных случаев - резонансного взаимодействия и рамановского взаимодействия - в рамках одной модели, а также оценить влияние отстройки на эффективность памяти в промежуточных случаях. Найдены пороговые условия, при которых пригодны упрощенные модели.

Я глубоко признательна Ю.М.Голубеву за то, что увлек меня задачами квантовой оптики, за неоценимую школу теоретической подготовки, творческую и продуктивную атмосферу, созданную им в лаборатории, всемерную помощь и поддержку. Хочу поблагодарить своего соавтора и коллегу проф. И.В.Соколова за полезные дискуссии, а также французских коллег — профессоров М.Колобова (Lille University), Э. Джакобино и К. Фабра (Pierre and Marie Curie University, Paris) за содержательное многолетнее сотрудничество. Для меня хорошей школой оказалось сотрудничество с проф. А.С.Чиркиным (МГУ), с которым мы подготовили к изданию на русском языке книгу "Квантовое изображение я благодарна ему также за побуждение к написанию этого текста. Я не могу не отметить наших молодых сотрудников и аспирантов (бывших и настоящих) В.Аверченко, Д.Васильева, К.Самбурскую, К.Тихонова, А.Лосева и А.Ветлугина. Именно их живой интерес к физике и дух молодого авантюризма обеспечивают профессиональный рост лаборатории и помогают в работе. Также хочется выразить признательность участникам городского семинара по квантовой оптике на базе Педагогического университета им. Герцена под руководством проф. А.С. Трошина. Этот семинар существует уже не одно десятилетие и позволяет привлечь к профессиональной дискуссии самые лучшие силы в Санкт-Петербурге. Я благодарна коллективу кафедры Общей Физики-1 и ее заведующему проф. И.Ч. Машеку за содействие в написании диссертации.

Список используемых сокращений

VCSEL — виксел — Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser;

PBS — поляризационный светоделитель;

TROPO — Triply Resonant Optical Parametric Oscillator - трехмодовый оптический параметрический генератор света;

СЧ — степень чистоты (квантового состояния);

ССЧ — спектральная степень чистоты (квантового состояния);

ВПГС — вырожденный параметрический генератор света;

СПЛ — субпуассоновский лазер с синхронизацией фазы;

ГД — гомодинное детектирование;

BS, СДП — светоделительная пластина;

ПИ — пиксельный источник;

ЭПР-состояния — состояния Эйнштейна-Подольского-Розена;

ОПУ — оптический параметрический усилитель;

ВИШ — взаимная информация Шеннона;

EIT — Electromagnetically Induced Transparency — электромагнитно-индуцированная прозрачность;

Литература

- [G1] Ю. М. Голубев, Т. Ю. Зернова (Голубева), Е. Giacobino. Нестабильность линейно поляризованной генерации в одномодовом вискеле // Оптика и спектроскопия.— 2003.— Т. 94. № 1.— С.81-89.
- [G2] Yu. M. Golubev, T. Yu. Golubeva, E. Giacobino. Polarization statistical properties of the emission from the single mode Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers with the equally living laser levels // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics.— 2004.— Vol. 6., no. 12.— pp. 525-532.
- [G3] Yu. M. Golubev, T. Yu. Golubeva, M. I. Kolobov, E. Giacobino. Polarization squeezing in vertical-cavity surface-emitting lasers // Physical Review A.— 2004.— Vol. 70, iss.5.— pp. 053817-1 - 053817-13.
- [G4] Ю. М. Голубев, Т. Ю. Голубева, О статистике фотонов лазерного излучения в цепи обратной связи // в сборнике: Лазерные исследования в С.Петербургском государственном университете.— 2006.— С.72-82.
- [G5] T. Yu. Golubeva, Yu. M. Golubev, I. V. Sokolov, and M. I. Kolobov. Quantum parallel dense coding of optical images // Journal of Modern Optics.— 2006.— Vol. 53, no. 5-6.— pp. 699-711.
- [G6] T. Golubeva, D. Ivanov, and Yu. Golubev. Induced photon statistics in three-level lasers // Physical Review A.— 2007.— Vol. 75, iss.2.— pp. 023815-1- 023815-8.

- [G7] Yu. M. Golubev, T. Yu. Golubeva, Yu. V. Rostovtsev and M. O. Scully. Control of group velocity of light via magnetic field // *Optics Communications*.— 2007.— Vol. 278, no.2.— pp. 350-362.
- [G8] T. Golubeva, Yu. Golubev, C. Fabre, N. Treps. Quantum state of an injected TROPO above threshold: purity, Glauber function and photon number distribution // *European Physical Journal D*.— 2008.— Vol. 46, no.1.— pp. 179-193.
- [G9] В. А. Аверченко, Т. Ю. Голубева, Ю. М. Голубев, С. Fabre. Широкополосное излучение вырожденного параметрического генератора света над порогом генерации в информационных приложениях // *Оптика и спектроскопия*.— 2008.— Т. 105, № 5.— С. 831-843.
- [G10] T. Golubeva, D. Ivanov, and Yu. Golubev. Broadband squeezed light from phase-locked single-mode sub-Poissonian lasers // *Physical Review A*.— 2008.— Vol. 77, iss. 5.— pp. 052316-1 - 052316-10.
- [G11] Ю. М. Голубев, Т. Ю. Голубева, А. А. Гавриков, С. Fabre. Чистые и смешанные состояния в вырожденной параметрической генерации // *Оптика и спектроскопия*.— 2009.— Т. 106, № 5.— С. 803-809.
- [G12] T. Golubeva, Yu. Golubev, K. Samburskaya, C. Fabre, N. Treps, M. Kolobov. Entanglement measurement of the quadrature components without the homodyne detection in the spatially multi-mode far-field // *Physical Review A*.— 2010.— Vol. 81, iss. 1.— pp. 013831-1 - 013831-8.
- [G13] T. Golubeva, Yu. Golubev, K. Samburskaya. Multi-pixel Sources of Entangled Light in the Correlation Measurements Without Homodyne Detection // in book "Quantum cryptography and computing".- Edited by R. Horodecki et. al.— IOS Press.— 2010.— pp. 179-194.

- [G14] T. Golubeva, Yu. Golubev, O. Mishina, A. Bramati, J. Laurat, and E. Giacobino, High speed spatially multimode atomic memory // *Physical Review A*.— 2011.— Vol. 83, iss. 5.— pp. 053810-1 - 053810-12.
- [G15] К. Самбурская, Т. Голубева, Ю. Голубев, Е. Giacobino. Квантовая голография при резонансном адиабатическом взаимодействии полей с атомной средой в Lambda-конфигурации // *Оптика и спектроскопия*.— 2011.— Т. 110, № 5.— С. 827-840.
- [G16] К. С. Самбурская, Т. Ю. Голубева, В. А. Аверченко, Ю. М. Голубев. Квадратурное сжатие в изолированном импульсе света // *Оптика и спектроскопия*.— 2012.— Т. 113, № 1.— С. 88-98.
- [G17] T. Golubeva, Yu. Golubev, O. Mishina, A. Bramati, J. Laurat, E. Giacobino. High speed spatially multimode Lambda-type atomic memory with arbitrary frequency detuning // *European Physical Journal D*.— 2012.— Vol. 66.— pp. 275-1 - 275-13.
- [G18] T. Golubeva, Yu. Golubev. Purity and Covariance Matrix // *Journal of Russian Laser Research*.— 2014.— Vol. 35, iss. 1.— pp. 47-55.
- [G19] K. Tikhonov, K. Samburskaya, T. Golubeva, Yu. Golubev. Storage and retrieval of squeezing in multimode resonant quantum memories // *Physical Review A*.— 2014.— Vol. 89.— pp. 013811-1 - 013811-15.
- [20] Введение в квантовую теорию информации. Холево А.С. // М.: МЦНМО. 2002. 128 с.
- [21] R. Loudon. // *Rep. Progr. Phys.* **43**. 913-949 (1980)
- [22] H. Paul. // *Rev. Mod. Phys.* **54**. 1061-1102 (1982)
- [23] D. Walls. // *Nature*. **306**. 141 (1983)

- [24] R. E. Slusher et al. // *Phys. Rev. Lett.* **55**(22). 2409 (1985)
- [25] Д. Ф. Смирнов, А. С. Трошин. // *ЖЭТФ.* **153**(2). 233-271 (1987)
- [26] *Фотоны и нелинейная оптика.* Клышко Д.Н. // М.: Наука. 1986
- [27] H. Ritsch, P. Zoller, C. W. Gardiner, D. F. Walls. // *Phys. Rev. A.* **44.** 3361-3364 (1991)
- [28] Y. M. Golubev and I. V. Sokolov. // *Sov. Phys. JETP.* **60.** 234 (1984)
- [29] Д. Ф. Смирнов, А. С. Трошин. // *Оптика и спектр.* **59**(1). 3-5 (1985)
- [30] Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilsson. // *Phys. Rev. A.* **34.** 4025 (1986)
- [31] *Nanoparticles: From Theory to Application.* Gunter Schmid. // Wiley-VCH, Weinheim. 2010
- [32] W. K. Wootters and W. H. Zurek. // *Nature.* **299.** 802-803 (1982)
- [33] D. Dieks. // *Physics Letters A.* **92**(6). 271-272 (1982)
- [34] V. Buzek and M. Hillery. // *Physics World.* **14**(11). 25-29 (2001)
- [35] C. H. Bennett and G. Brassard. // in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing.* Bangalore. p. 175 (1984)
- [36] C. H. Bennett , F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail, and J. Smolin. // *J. Cryptol.* **5**(3)(1992)
- [37] L. M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller. // *Nature.* **414**(6862). 413-418 (2001)
- [38] N. Sangouard, C. Simon, B. Zhao et al. // *Phys. Rev. A.* **77**(6). 062301 (2008)

- [39] Nicolas Sangouard, Christoph Simon, Hugues de Riedmatten, and Nicolas Gisin. // *Rev. Mod. Phys.* **83**. 33-80 (2011)
- [40] Christoph Simon, Hugues de Riedmatten, Mikael Afzelius et al. // *Phys. Rev. Lett.* **98**. 190503 (2007)
- [41] K. Hammerer, A.S. Sorensen and E.S. Polzik. // *Rev. Mod. Phys.* **82**. 1041 (2010)
- [42] A.I. Lvovsky, B.C. Sanders, and W. Tittel. // *Nature Photonics*. **3**. 706 (2009)
- [43] M. Fleischhauer and M. D. Lukin. // *Phys. Rev. Lett.* **84**. 5094 (2000)
- [44] C. Liu, Z. Dutton, C.H. Behroozi and L.V. Hau. // *Nature*. **409**. 490 (2001)
- [45] Е. Б. Александров и В. С. Запасский. // *Химия и жизнь*. **2** 26-34 (2008)
- [46] J. Nunn, N. K. Langford, W. S. Kolthammer, T. F. M. Champion, M. R. Sprague, P. S. Michelberger, X.-M. Jin, D. G. England, and I. A. Walmsley. // *Phys. Rev. Lett.* **110**. 133601 (2013)
- [47] Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. // *Оптика и спектр*. **59**(1). 3-5 (1985)
- [48] Катанаев И.И., Трошин А.С. // *ЖЭТФ*. **92**(2). 475-483 (1987)
- [49] Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. // *Оптика и спектр*. **63**(5). 956-957 (1987)
- [50] Трошин А.С., Трубилко А.И., Ибарра Р. // *Оптика и спектр*. **65**(5). 1145-1149 (1988)
- [51] Трошин А.С. // *Оптика и спектр*. **70**(3). 662-665 (1991)
- [52] Shapiro J.H., Saplacoglu G., Ho S.-T., Kumar P., Saleh B.E.A., Teich M.C. // *J. Opt. Soc. Am. B*. **4**. 1604-1620 (1987)
- [53] Фофанов А.Я. // *Опт. и спектр*. **70**. 666-669 (1991)

- [54] A.V.Masalov, A.A.Putilin, M.V.Vasilyev. // *Journal of Modern Optics*. **41**. 1941-1953 (1994)
- [55] A.V.Masalov, A.A.Putilin, M.V.Vasilyev. // *Laser Physics*. **4** 653-662 (1994)
- [56] Хорошко Д.В., Килин С.Я. // *ЖЭТФ*. **106**. 1278-1285 (1994)
- [57] Хорошко Д.В., Килин С.Я. // *Опт. и спектр*. **82**. 913-922 (1997)
- [58] Горбачев В.Н., Трубилко А.И. // *Опт. и спектр*. **82**. 932-935 (1997)
- [59] P. Schnitzer, M. Grabherr, R. Jager, F. Mederer, R. Michalzik, D. Wiedenmann, and K. J. Ebeling. // *IEEE Photonics Technol. Lett.* **11**. 769 (1999)
- [60] C. Degen, J. L. Vey, W. Elsässer, P. Schnitzer, and K. J. Ebeling. // *Elect. Lett.* **34**. 1585 (1998)
- [61] J. P. Hermier, A. Bramati, A. Z. Khoury, V. Josse, E. Giacobino, P. Schnitzer, R. Michalzik, and K. J. Ebeling. // *IEEE J. Quant. Elect.* **37**. 87 (2001)
- [62] M. P. van Exter, M. B. Willemsen, and J. P. Woerdman. // *Phys. Rev. A*. **58**. 4191 (1998)
- [63] M. B. Willemsen, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman. // *Phys. Rev. A*. **60**. 4105 (1999)
- [64] M. San Miguel, Q. Feng, and J. V. Moloney. // *Phys. Rev. A*. **52**. 1728 (1995)
- [65] M. P. van Exter, A. Al-Remawi, and J. P. Woerdman. // *Phys. Rev. Lett.* **80**. 4875 (1998)
- [66] M. P. van Exter, M. B. Willemsen, and J. P. Woerdman. // *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **1**. 637 (1999)

- [67] J. Mulet, C. R. Mirasso, and M. San Miguel. // Phys. Rev. A **64**. 023817 (2001)
- [68] J.-P. Hermier, M. I. Kolobov, I. Maurin, and E. Giacobino. // Phys. Rev. A. **65**. 053825 (2002)
- [69] III.Semiconductor-Laser Physics. W. W. Chow, S. W. Koch, and M. Sargent. // Springer-Verlag, Berlin (1994)
- [70] C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou, L. Davidovich, M. Hillery, and M. Orszag. // Phys. Rev. A. **41**. 2756 (1990)
- [71] M. I. Kolobov, L. Davidovich, E. Giacobino, and C. Fabre. // Phys. Rev. A. **47**. 1431 (1993)
- [72] J. Martin-Regalado, F. Prati, M. San Miguel, and N. B. Abraham. // IEEE J. Quantum Electron. **33**. 765 (1997)
- [73] Principles of Optics. M. Born and E. Wolf. // 7th ed. Cambridge University Press. Cambridge, England (1999)
- [74] The Theory of Photons and Electrons. J. M. Jauch and F. Rohrlich. // Springer, Berlin (1976)
- [75] The Theory of Polarization Phenomena. B. A. Robson. // Clarendon Press. Oxford (1974)
- [76] A. S. Chirkin, A. A. Orlov, and D. Yu. Paraschuk. //Quantum Electron. **23**. 870 (1993)
- [77] D. N. Klyshko. // JEPT. **84**. 1065 (1997)
- [78] N. V. Korolkova and A. S. Chirkin. // Quantum Electron. **24**. 805 (1994)
- [79] A. S. Chirkin and V. V. Volokhovskiy. // J. Russ. Laser Res. **16**. 6 (1995)

- [80] A. P. Alodjants, A. M. Arakelian, and A. S. Chirkin. // JETP. **108**. 63 (1995)
- [81] N. V. Korolkova and A. S. Chirkin. // J. Mod. Opt. **43**. 869 (1996)
- [82] N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon, T. C. Ralph, and C. Silberhorn. // Phys. Rev. A. **65**. 052306 (2002)
- [83] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke, and A. LaPorta. // Phys. Rev. Lett. **59**. 2153 (1987)
- [84] V. P. Karasev and A. V. Masalov. // Opt. Spectrosc. **74**. 551 (1993)
- [85] P. A. Bushev, V. P. Karassiov, A. V. Masalov, and A. A. Putilin. // Opt. Spectrosc. **91**. 526 (2001)
- [86] W. P. Bowen, R. Schnabel, H.-A. Bachor, and P. K. Lam. // Phys. Rev. Lett. **88**. 093601 (2002)
- [87] G. Milburn and D. F. Walls. // Opt. Comm. **39**. 401 (1981)
- [88] S. Reynaud, C. Fabre and E. Giacobino. // JOSA B. **4**. 1520 (1987)
- [89] L. Wu, H. Kimble, J. Hall, and H. Wu. // Phys. Rev. Lett. **57**. 2520 (1986).
- [90] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre and G. Camy. // Phys. Rev. Lett. **59**. 2555 (1987)
- [91] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, L. Lugiato, S. Reynaud, M. Vadamchino and Wang Kaige. // Quantum Opt. **2**. 159 (1990)
- [92] M.D. Reid and P.D. Drummond. // Phys. Rev. Lett. **60**. 2731 (1988)
- [93] Z.Y. Ou, S.F. Pereira, H.J. Kimble and K.C. Peng. // Phys. Rev. Lett. **68**. 3663 (1992)

- [94] A. S. Villar, L. S. Cruz, K. N. Cassemiro, M. Martinelli, and P. Nussenzveig. // Phys. Rev. Lett. **95**. 243603 (2005)
- [95] K. Kasai, G. Jiang and C. Fabre. // Europhys. Lett. **40**. 25 (1997)
- [96] A. S. Villar, M. Martinelli, C. Fabre, and P. Nussenzveig. // Phys. Rev. Lett. **97**. 140504 (2006)
- [97] R.Graham, H.Haken. // Z.Phys. **210**. 276 (1968)
- [98] R.Graham, H.Haken. // Z.Phys. **210**. 319 (1968)
- [99] R.Graham, H.Haken. // Z.Phys. **211**. 469 (1968)
- [100] K.L.McNeil, C.W.Gardiner. // Phys.Rev. A. **28**(3). 1560 (1983)
- [101] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, C. Fabre. // Prog. Opt. **30**. 1–85 (1992)
- [102] E. Sudarshan. // Phys. Rev. Lett. **10**. 277 (1963)
- [103] R.J. Glauber. // Phys. Rev. Lett. **10**. 84 (1963)
- [104] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, P.A. Volkov, and J.H. Eberly. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**(13). 467-483 (2006)
- [105] M.V. Fedorov, N.I. Miklin. // Contemporary Physics. **55**(2). 1-16 (2014)
- [106] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller. // Phys. Rev. Lett. **84**. 2722 (2000)
- [107] B. Yurke. // Phys. Rev. A. **29**. 408 (1984)
- [108] C. W. Gardiner, M. J. Collett. // Phys. Rev. A. **31**. 3761 (1985)
- [109] M. J. Collett and C. W. Gardiner. // Phys. Rev. A. **30**. 1386 (1984)

- [110] C. W. Gardiner and C. M. Savage. // *Opt. Commun.* **50**. 173 (1984)
- [111] M. J. Collett and D. F. Walls. // *Phys. Rev. A.* **32**. 2887 (1985)
- [112] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall, and H. Wu. // *Phys. Rev. Lett.* **57**. 2520 (1986)
- [113] S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, and H. J. Kimble. // *J. Mod. Opt.* **47**. 267 (2000)
- [114] G. Keller, V. D'Auria, N. Treps, T. Coudreau, J. Laurat, C. Fabre. // *Optics Express.* **16**. 9351-6 (2008)
- [115] M. O. Scully, W. E. Lamb. // *Phys. Rev. A.* **159**. 208 (1967)
- [116] T. C. Ralph, C. C. Harb, and H.-A. Bachor. // *Phys. Rev. A.* **54**. 4359 (1996)
- [117] J. Belfi, I. Galli, G. Giusfredi, and F. Marin. // *J. Opt. Soc. Am. B.* **23**. 1276 (2006)
- [118] H. M. Wiseman and G. J. Milburn. // *Phys. Rev. A.* **49**. 1350 (1994)
- [119] I. R. Senitzky. // *Phys. Rev.* **115**. 227 (1959)
- [120] L. Davidovich. // *Rev. Mod. Phys.* **68**. 127 (1996)
- [121] *Optical Coherence and Quantum Optics.* L. Mandel and E. Wolf. // Cambridge University Press, New York (1995)
- [122] D. Vasilyev, I. Sokolov, E. Polzik. // *Phys. Rev. A.* **77**. 020302 (2008)
- [123] E. Brambilla, A. Gatti, L. A. Lugiato, and M. I. Kolobov. // *Eur. Phys. J. D.* **15**. 127 (2001)
- [124] A. Gatti, E. Brambilla, L. A. Lugiato, and M. I. Kolobov. // *Phys. Rev. Lett.* **83**. 1763 (1999)
- [125] P. Navez, E. Brambilla, A. Gatti, L. A. Lugiato. // *Phys. Rev. A.* **65**. 013813 (2001)

- [126] Quantum Optics. M. O. Scully, M. S. Zubairy. // Cambridge University Press (1997)
- [127] Quantum Imaging. ed. M. I. Kolobov. // Springer (2007)
- [128] F. Devaux and E. Lantz. // Eur. Phys. J. D. **8**. 117 (2000)
- [129] E. Lantz and F. Devaux. // Eur. Phys. J. D. **17**. 93 (2001)
- [130] R. A. Salvatore, I. Imamoglu, and L. A. Coldren. // IEEE, J.Quant.Electron. **34**. 2188-2195 (1998)
- [131] Arunas Varanaviccus, Algis Piskarskas, Paolo Di Trapani, Stefano Minardi. // Opt. Communic. **224**. 301-307 (2003)
- [132] The Physics of Quantum Information. D. Bouwmeester, A. Eckert and A. Zeilinger (Editors). // Springer, Berlin (2000)
- [133] Quantum Information with Continuous Variables. S. Braunstein and A. Pati (Editors). // Kluwer, Dordrecht (2003)
- [134] M. I. Kolobov. // Rev. Mod. Phys. **71**. 1539 (1999)
- [135] L. A. Lugiato, A. Gatti and E. Brambilla. // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **4**. 176 (2002)
- [136] C. H. Bennett and S. J. Wiesner. // Phys. Rev. Lett. **69**. 2881 (1992)
- [137] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger. // Phys. Rev. Lett. **76**. 4656 (1996)
- [138] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Phys. Rev. A **61**(4) 042302 (2000).
- [139] X. Y. Li et al. // Phys. Rev. Lett. **88**. 047904 (2002)
- [140] S. L. Braunstein. // Phys. Rev. A. **42**. 474 (1990)

- [141] A. Gatti, I. V. Sokolov, M. I. Kolobov and L. A. Lugiato. // *Eur. Phys. J. D.* **30**. 123 (2004)
- [142] *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. A. S. Holevo. // North-Holland. Amsterdam (1982)
- [143] M. I. Kolobov, I. V. Sokolov. // *Sov. Phys. JETP*. **69**. 1097 (1989)
- [144] M. I. Kolobov and I. V. Sokolov. // *Phys. Lett. A*. **140**. 101 (1989)
- [145] I. V. Sokolov, M. I. Kolobov, A. Gatti, L. A. Lugiato. // *Opt. Commun.* **193**. 175 (2001)
- [146] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein et al. // *Science* **282**. 706 (1998)
- [147] P. van Loock, S. L. Braunstein, H. J. Kimble. // *Phys. Rev. A*. **62**. 022309 (2000)
- [148] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn. // *Nature* **409**(6816). 46-52 (2001)
- [149] Pieter Kok, W. J. Munro, Kae Nemoto, T. C. Ralph, Jonathan P. Dowling, and G. J. Milburn. // *Rev. Mod. Phys.* **79**(1). 135 (2007)
- [150] F. Bussi eres, N. Sangouard, M. Afzelius, H. de Riedmatten, C. Simon, and W. Tittel. // *J. Mod. Opt.* **60**. 1519 (2013)
- [151] A.E. Kozhekin, K.Molmer, adn E. Plozik. // *Phys. Rev. A*. **62**. 033809 (2000)
- [152] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, and M. D. Lukin. // *Phys. Rev. Lett.* **86**. 783 (2001)
- [153] Christoph Simon et al. // *Eur. Phys. J. D.* **58**. 1 (2010)
- [154] T. Chaneli ere, D. N. Matsukevich, S. D. Jenkins, S. Y. Lan, T. A. B. Kennedy, and A. Kuzmich. // *Nature (London)*. **438**. 833 (2005)

- [155] M. D. Eisaman, A. Andre, F. Massou, M. Fleischhauer, A. S. Zibrov, and M. D. Lukin. // *Nature (London)*. **438**. 837 (2005)
- [156] C. W. Chou, H. de Riedmatten, D. Felinto, S. V. Polyakov, S. J. van Enk, and H. J. Kimble. // *Nature (London)*. **438**. 828 (2005)
- [157] Bo Zhao, Yu-Ao Chen, Xiao-Hui Bao, Thorsten Strassel, Chih-Sung Chuu, Xian-Min Jin, Jorg Schmiedmayer, Zhen-Sheng Yuan, Shuai Chen, and Jian-Wei Pan. // *Nature Physics* **5**(2). 95-99 (2008)
- [158] I. Novikova et al. // *Phys. Rev. Lett.* **98**. 123601 (2007)
- [159] J. Cviklinski et al. // *Phys. Rev. Lett.* **101**. 133601 (2008)
- [160] G. Hétet, M. Hosseini, B.M. Sparkes, D. Oblak, P.K. Lam, B.C. Buchler. // *Opt. Lett.* **33**. 2323 (2008)
- [161] J. Appel, E. Figueroa, D. Korystov, M. Lobino and A. I. Lvovsky. // *Phys. Rev. Lett.* **100**. 093602 (2008)
- [162] K. Honda, D. Akamatsu, M. Arikawa, Y. Yokoi, K. Akiba, S. Nagatsuka, T. Tanimura, A. Furusawa and M. Kozuma. // *Phys. Rev. Lett.* **100**. 093601 (2008)
- [163] Brian Julsgaard, Jacob Sherson, J. Ignacio Cirac, Jaromir Fiurasek, and Eugene S. Polzik. // *Nature*. **432**(7016). 482-486 (2004)
- [164] K. S. Choi, H. Deng, J. Laurat, and H. J. Kimble. // *Nature*. **452**(7183). 67-71 (2008)
- [165] K. F. Reim, J. Nunn, V. O. Lorenz, B. J. Sussman, K. C. Lee, N. K. Langford, D. Jaksch, and I. A. Walmsley. // *Nature Photonics*. **4**. 218-221 (2010)

- [166] B. Kraus, W. Tittel, N. Gisin, M. Nilsson, S. Kröll, and J. I. Cirac. // *Phys. Rev. A.* **73**. 020302 (2006)
- [167] Alexey V. Gorshkov, Axel André, Mikhail D. Lukin, and Anders S. Sorensen. // *Phys. Rev. A.* **76**. 033804 (2007)
- [168] Alexey V. Gorshkov, Axel André, Mikhail D. Lukin, and Anders S. Sorensen. // *Phys. Rev. A.* **76**. 033805 (2007)
- [169] Alexey V. Gorshkov, Axel André, Mikhail D. Lukin, and Anders S. Sorensen. // *Phys. Rev. A.* **76**. 033806 (2007)
- [170] Alexey V. Gorshkov, Tommaso Calarco, Mikhail D. Lukin, and Anders S. Sorensen. // *Phys. Rev. A.* **77**. 043806 (2008)
- [171] S.E. Harris. // *Phys. Today* **50**(7). 36-42. (1997)
- [172] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos. // *Reviews Modern Physics.* **77**. 633 (2005)
- [173] Hau L.V., Harris S.E., Dutton Z., Behroozi C.H. // *Nature.* **397**. 594–598 (1999)
- [174] Е. Б. Александров и В. С. Запасский. // *Успехи физических наук.* **174**(10). 1105–1108 (2004)
- [175] Е. Б. Александров и В. С. Запасский. // *Успехи физических наук.* **176**(10). 1093–1102 (2006)
- [176] O.S. Mishina, D.V. Kupriyanov, J.H. Müller, E.S. Polzik. // *Phys. Rev. A.* **75**. 042326 (2007)
- [177] G. Hétet, J. J. Longdell, A. L. Alexander, P. K. Lam, and M. J. Sellars. // *Phys. Rev. Lett.* **100**. 023601 (2008)

- [178] J. Nunn, K. Reim, K. C. Lee, V. O. Lorenz, B. J. Sussman, I. A. Walmsley, and D. Jaksch. // *Phys. Rev. Lett.* **101**. 260502 (2008)
- [179] G. Hétet, J. J. Longdell, M. J. Sellars, P. K. Lam, and B. C. Buchler. // *Phys. Rev. Lett.* **101**. 203601 (2008)
- [180] C. Simon et. al. // *Phys. Rev. Lett.* **98**. 190503 (2007)
- [181] Ivan Iakoupov, Anders S. Sorensen. // *New J. Phys.* **15**. 085012 (2013)
- [182] K. F. Reim, J. Nunn, V. O. Lorenz, B. J. Sussman, K. C. Lee, N. K. Langford, D. Jaksch, I. A. Walmsley. // *Nature Photonics.* **4**. 218-221 (2010)
- [183] M. Hosseini, B. M. Sparkes, G. Campbell, P. K. Lam and B. C. Buchler. // *Nat. Commun.* **2**. 174 (2010)
- [184] C. Clausen, I. Usmani, F. Bussi eres, N. Sangouard, M. Afzelius, H. de Riedmatten, and N. Gisin. // *Nature.* **469**. 508-511 (2011)
- [185] E. Saglamyurek, N. Sinclair, J. Jin, J. A. Slater, D. Oblak, F. Bussi eres, M. George, R. Ricken, W. Sohler, W. Tittel. // *Nature.* **469**. 512-515 (2011)
- [186] Valentina Caprara Vivoli, Nicolas Sangouard, Mikael Afzelius, Nicolas Gisin. // *New J. Phys.* **15**. 095012 (2013)
- [187] Neil Sinclair, Erhan Saglamyurek, Hassan Mallahzadeh, Joshua A. Slater, Mathew George, Raimund Ricken, Morgan P. Hedges, Daniel Oblak, Christoph Simon, Wolfgang Sohler, Wolfgang Tittel, A solid-state memory for multiplexed quantum states of light with read-out on demand, arXiv:1309.3202 (2013)
- [188] Denis V. Vasilyev, Ivan V. Sokolov, and Eugene S. Polzik. // *Phys. Rev. A.* **81**. 020302 (2010)

- [189] M. Shuker, O. Firstenberg, R. Pugatch, A. Ron, and N. Davidson. // *Phys. Rev. Lett.* **100**. 223601 (2008)
- [190] I. Novikova, N. B. Phillips, A. Gorshkov. // *Phys. Rev. A.* **78**. 021802(R) (2008)
- [191] J. Nunn, I. A. Walmsley, M. G. Raymer, K. Surmacz, F. C. Waldermann, Z. Wang, and D. Jaksch. // *Phys. Rev. A.* **75**. 011401(R) (2007)
- [192] A. S. Sheremet, L. V. Gerasimov, I. M. Sokolov, D. V. Kupriyanov, O. S. Mishina, E. Giacobino, and J. Laurat. // *Phys. Rev. A.* **82**. 033838 (2010)
- [193] S. A. Moiseev and S. Kröll. // *Phys. Rev. Lett.* **87**. 173601 (2001)
- [194] M. M. Wolf, D. Prerez-García, G. Giedke. // *Phys. Rev. Lett.* **98**. 130501 (2007)
- [195] A. Dantan, J. Cviklinski, M. Pinard, and Ph. Grangier. // *Phys. Rev. A.* **73**. 032338 (2006)