

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

на правах рукописи

Грешнов Андрей Анатольевич

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА
И ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС В ДВУМЕРНОМ
ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ С РАЗЪЕДИНЕННЫМИ
УРОВНЯМИ ЛАНДАУ

Специальность:

01.04.10 - физика полупроводников

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Г.Г. Зегря

Санкт-Петербург

2008

Оглавление

Введение	4
1 Исторический обзор	10
1.1 Эффект Шубникова-де Гааза в двумерном электронном газе, само- согласованное борновское приближение	10
1.2 Целочисленный квантовый эффект Холла, скейлинг и нелинейная σ -модель	13
1.3 Пиковые величины продольной проводимости: эксперимент и чис- ленные расчеты	18
1.4 Циклотронный резонанс в двумерном электронном газе в попереч- ном и наклонном магнитных полях	21
1.5 Выводы	24
2 Спектр носителей и структура двумерных электронных состояний в сильных магнитных полях	25
2.1 Модель уширенных разъединенных уровней Ландау.	25
2.2 Плотность состояний и подмешивание уровней Ландау	28
2.3 Плавный хаотический потенциал	30
2.4 Резкий хаотический потенциал	34
2.5 Модель равномерно делокализованных уровней Ландау	42

2.6	Спектр носителей в магнитном поле с учетом самосогласованного электростатического потенциала в квантовых ямах с несколькими заполненными уровнями размерного квантования	45
2.7	Выводы	51
3	Целочисленный квантовый эффект Холла в резком и плавном хаотическом потенциале	53
3.1	Формулы линейного отклика для расчета компонент тензора проводимости в системе конечных размеров	53
3.2	Влияние асимметричности хаотического потенциала на вид зависимости холловской проводимости от фактора заполнения	56
3.3	Анализ точности квантования холловской проводимости в образцах конечных размеров	60
3.4	Зависимость продольной и холловской проводимостей от корреляционной длины хаотического потенциала	63
3.5	Пиковые величины продольной проводимости для резкого и плавного хаотических потенциалов	67
3.6	Выводы	74
4	Циклотронный резонанс в двумерных полупроводниковых гетероструктурах в поперечном и наклонном магнитных полях	75
4.1	Влияние наклонного магнитного поля на спектр носителей в одиночных и двойных квантовых ямах	75
4.2	Циклотронный резонанс в разьединенных гетероструктурах II типа в наклонном магнитном поле	82

4.3 Циклотронный резонанс в режиме целочисленного квантового эффекта Холла	90
4.4 Выводы	93
Заключение	94
Публикации автора по теме диссертации	97
Литература	100

Введение

Актуальность темы диссертации.

Двумерные полупроводниковые гетероструктуры являются в настоящее время предметом интенсивных экспериментальных и теоретических исследований и представляют собой динамично развивающуюся область физики полупроводников [1]. Движение носителей заряда в таких системах ограничено слоями гетероструктуры, что приводит к квантованию спектра носителей вдоль оси роста (эффекту размерного квантования). Варьирование параметров гетероструктур позволяет модифицировать вид спектра носителей, и тем самым управлять их оптическими и транспортными свойствами.

Приложение к полупроводниковым материалам магнитного поля является мощным инструментом, позволяющим экспериментально определить базовые параметры полупроводника, такие как тип и концентрация носителей, их эффективную массу [2],[3]. Этим и определяется актуальность теоретических и экспериментальных исследований оптических и транспортных свойств полупроводниковых материалов и гетероструктур на их основе в магнитных полях. Поскольку движение носителей в плоскости двумерной гетероструктуры не является, строго говоря, свободным, а сопровождается рассеянием на колебаниях кристаллической решетки, примесях и дефектах, для надежного определения параметров энергетического спектра необходимы сильные магнитные поля и низкие температуры.

Теория циклотронного резонанса, эффектов Холла, Шубникова-де Гааза, де Гааза-ван Альфена, разработанная для трехмерного случая, может быть непосредственно обобщена на случай двумерных гетероструктур лишь в области достаточ-

но высоких температур и слабых магнитных полей. При низких температурах в сильных магнитных полях в двумерных гетероструктурах наблюдается квантовый эффект Холла – принципиально новое по сравнению с трехмерным случаем явление, открытое в 1980г. Клаусом фон Клитцингом [4]. Сутью квантового эффекта Холла является наличие серии плато на зависимостях внедиагональной (холловской) компоненты тензора проводимости от магнитного поля или концентрации носителей, в области которых диагональная компонента тензора проводимости обращается в нуль. Актуальность диссертации обусловлена отсутствием последовательных микроскопических теорий, описывающих поведение компонент тензора проводимости двумерного электронного газа при низких температурах в зависимости от напряженности приложенного магнитного поля.

Целью работы является теоретическое исследование спектра носителей и вида одночастичных состояний в сильных магнитных полях с учетом хаотического потенциала, создаваемого случайно расположенными примесями и дефектами, изучение влияния вида хаотического потенциала на зависимости компонент тензора проводимости от магнитного поля и концентрации носителей, исследование эффектов самосогласованного электростатического потенциала в двумерных гетероструктурах с несколькими уровнями размерного квантования в сильных магнитных полях, изучение особенностей циклотронного резонанса в разьединенных гетероструктурах II типа InAs/GaSb.

Научная новизна работы состоит в решении следующих задач:

1. Определение спектров носителей и вида одночастичных состояний в сильных магнитных полях при наличии хаотического потенциала, корреляционная длина которого сравнима с магнитной длиной. Расчет спектров носителей в одиночных и двойных квантовых ямах в наклонном магнитном поле.
2. Расчет компонент тензора проводимости двумерного электронного газа в пределе сильного магнитного поля (разьединенных уровней Ландау) и анализ их зависимостей от фактора заполнения в случае резкого и плавного

хаотических потенциалов.

3. Расчет спектров циклотронного резонанса в разьединенных гетероструктурах II типа InAs/GaSb. Анализ влияния наклона магнитного поля на форму линии циклотронного резонанса.
4. Анализ эффектов самосогласованного электростатического потенциала в квантовых ямах с несколькими уровнями размерного квантования в сильных магнитных полях.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней впервые комплексно исследовано влияние вида хаотического потенциала примесей и дефектов на компоненты тензора проводимости двумерного электронного газа в случае сильного магнитного поля (разьединенных уровней Ландау); впервые аналитически описано влияние самосогласованного электростатического потенциала на спектр носителей в гетероструктурах с несколькими уровнями размерного квантования в присутствии сильного магнитного поля. Показано, что анализ поведения компонент тензора проводимости в сильных магнитных полях может быть полезен для определения параметров хаотического потенциала. Теоретическое исследование спектра носителей в наклонных магнитных полях позволило объяснить эффект подавления расщепления линии циклотронного резонанса.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В квантовых ямах с несколькими заполненными уровнями размерного квантования уровни Ландау, относящиеся к разным уровням размерного квантования, могут быть вырожденными в определенных диапазонах концентрации носителей и магнитных полей.
2. Пиковые величины продольной проводимости в режиме целочисленного квантового эффекта Холла в случае резкого хаотического потенциала возрастают с номером уровня Ландау n . Имеет место приближенная линейная зависимость $\sigma_{xx}^{(n)}$ от n , причем $\sigma_{xx}^{(0)} = (0.55 \pm 0.03)e^2/h$, $\sigma_{xx}^{(1)} = (1.08 \pm 0.04)e^2/h$.

3. Увеличение корреляционной длины хаотического потенциала по сравнению с магнитной длиной приводит к увеличению ширины плато целочисленного квантового эффекта Холла и уменьшению пиковых величин продольной проводимости.
4. Наклон магнитного поля относительно оси роста приводит к подавлению расщепления линии циклотронного резонанса в разъединенных гетероструктурах InAs/GaSb.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на научных семинарах ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, университета г.Дарем (Великобритания), на международных конференциях “Nanostructures: Physics and Technology” (С.-Петербург, 2003; Новосибирск, 2007), “International Conference on the Physics and Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics” (Вюрцбург, Германия, 2006; Сан-Педро, Бразилия, 2008), “17th International Conference on Electronic Properties of Two-dimensional Systems” (Генуя, Италия, 2007), на VI и VIII Российских Конференциях по физике полупроводников (С.-Петербург, 2003; Екатеринбург, 2007).

Публикации. По результатам исследований, проведенных в диссертации, опубликовано 7 статей в реферируемых российских и международных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Заключения и списка литературы. Она содержит 110 страниц текста, включая 28 рисунков и 1 таблицу. Список цитируемой литературы содержит 93 наименования.

В первой главе выполнен исторический обзор литературы, посвященной теоретическим и экспериментальным исследованиям двумерного электронного газа в сильных магнитных полях. Описаны существующие теоретические концепции и главные экспериментальные результаты в области магнетотранспорта и циклотронного резонанса в двумерных полупроводниковых гетероструктурах. Детально обсуждаются достижения и проблемы теории целочисленного квантового эффекта Холла.

Вторая глава диссертации посвящена спектру носителей заряда и структуре электронных состояний в двумерных гетероструктурах в сильном магнитном поле. Основное содержание главы посвящено задаче о квантово-механическом движении невзаимодействующих носителей в хаотическом потенциале, создаваемом примесями и дефектами, в присутствии магнитного поля, циклотронная энергия которого превосходит ширину уровней Ландау. Получены аналитические выражения и численные результаты для плотности состояний и вида волновых функций на последовательных уровнях Ландау. Показано, что учет самосогласованного электростатического потенциала в квантовых ямах с несколькими заполненными уровнями размерного квантования приводит к возможности вырождения уровней Ландау, относящихся к разным уровням размерного квантования.

Третья глава диссертации посвящена анализу влиянию вида хаотического потенциала примесей и дефектов на зависимости компонент тензора проводимости от фактора заполнения в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. Проанализировано, в какой мере сказывается асимметрия хаотического потенциала. Показано, что качество квантово-холловских кривых сильно зависит от отношения корреляционной длины хаотического потенциала к магнитной длине. Получены аналитические и численные результаты для пиков продольной проводимости для случаев резкого и плавного хаотического потенциалов.

В четвертой главе теоретически исследуются спектры носителей заряда в наклонном магнитном поле в одиночных и двойных квантовых ямах, циклотронный резонанс в разьединенных гетероструктурах II типа InAs/GaSb в поперечном и наклонном магнитных полях. Показано, что наклон магнитного поля относительно оси гетероструктуры приводит к подавлению расщепления линии циклотронного резонанса, наблюдавшемуся в гетероструктуре InAs/GaSb. Также изучен циклотронный резонанс с режиме целочисленного квантового эффекта Холла, проанализированы зависимости ширины и формы линии циклотронного резонанса от вида хаотического потенциала примесей и дефектов.

В Заключении сформулированы основные результаты работы.

Формулы и рисунки диссертации нумеруются по главам, нумерация литературы единая для всего текста.

Глава 1

Исторический обзор

1.1 Эффект Шубникова-де Гааза в двумерном электронном газе, самосогласованное борновское приближение

Хорошо известно, что транспортные свойства двумерного электронного газа сильно меняются при приложении магнитного поля. Считается, что в области наиболее слабых магнитных полей можно пользоваться классической кинетической теорией, в рамках которой зависимости компонент тензора проводимости от магнитного поля описываются следующими формулами [2]:

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{1 + (\omega_c\tau)^2}, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{nes}{B} \frac{(\omega_c\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2}, \quad (1.2)$$

где n – двумерная концентрация носителей, $\omega_c = eB/(m^*c)$ – циклотронная частота, τ – время релаксации импульса (которое при низких температурах можно считать постоянным в интервале kT вблизи энергии Ферми). Учет квантовомеханического характера рассеяния носителей приводит к слаболокализационным поправкам к проводимости [5], которые, как было впервые показано Альтшулером и соавторами [6], подавляются с ростом магнитного поля, приводя к отрицательному магнетосопротивлению. Магнитные поля, в которых наблюдается полное подавление слаболокализационной поправки к проводимости в типичных двумерных

полупроводниковых структурах, не превышают 10мТ. В сильных магнитных полях, $B \gtrsim 0.1\text{T}$, эффект слабой локализации подавлен, а вот квантования Ландау не учитывать уже нельзя. Впервые осцилляции диагональной компоненты тензора проводимости в двумерном случае были обнаружены в 1966г. Фаулером и соавторами, изучавшими магнетотранспорт в инверсионном канале на поверхности кремния [7]. Использование сильных магнитных полей, $B > 5\text{T}$, позволило также выявить дополнительную структуру шубниковских осцилляций, связанную со спиновым и долинным расщеплением уровней Ландау, характерным для кремния. Поскольку причиной эффекта Шубникова-де Гааза является осциллирующий характер плотности состояний, при относительно высоких температурах имеет место подавление осцилляций, аналогичное трехмерному случаю. Поэтому первоначально шубниковские осцилляции в двумерных структурах описывались по аналогии с трехмерным случаем, для которого последовательная теория была разработана Кубо и соавторами [8]. Сложности с построением теории в двумерном случае связаны с сингулярным видом плотности состояний в магнитном поле без учета рассеяния,

$$D_0(E) = -\frac{1}{2\pi^2 a_H^2} \text{Im} G_0^R(E) = \frac{1}{2\pi a_H^2} \sum_n \delta(E - \hbar\omega_c(n + 1/2)). \quad (1.3)$$

Другими словами, каждый из уровней Ландау в двумерном случае является многократно вырожденным (фактор вырождения равен $S/(2\pi a_H^2)$, $a_H^2 = \hbar c/(eB)$), и обычную теорию возмущений, применимую в случае невырожденных (или слабо вырожденных) уровней, применять нельзя, поскольку поправка к функции Грина, найденная в k -м порядке теории возмущений, содержит произведение k дельта-функций. Андо и Уемура предложили в 1974г. процедуру регуляризации ряда теории возмущений для усредненной по беспорядку функции Грина (т.е. фактически плотности состояний) [9], основанную на хорошо известном самосогласованном борновском приближении для функции Грина [8]. Вообще говоря, такая процедура не является строго обоснованной, т.к. вывод постулированной в работе [9] системы уравнений основан на суммировании бесконечного числа членов теории возмуще-

ний, сингулярный характер которых описан выше. Этим аспектом определяется актуальность задачи обоснования самосогласованного борновского приближения для усредненной по беспорядку функции Грина, или же получения результата другим методом. Аналогичным образом авторы использовали предположение о применимости стандартного диаграммного ряда теории возмущений для проводимости, корректность которого также нуждается в доказательстве. Более того, как показано в работе [9], в случае гауссовского беспорядка с дельта-функциональным коррелятором проводимость определяется сверткой усредненных по беспорядку функций Грина (т.е. плотностей состояний) с номерами n и $n \pm 1$. В рамках использованного Андо и Уемурой подхода продольная проводимость вблизи центра уровня Ландау с номером n определяется в случае разъединенных уровней Ландау, $\Gamma/\hbar\omega_c \ll 1$ (где Γ – ширина уровней Ландау), следующим выражением:

$$\sigma_{xx}^{(n)} = \frac{2n+1}{\pi} \frac{e^2}{h} + O(\Gamma/\hbar\omega_c). \quad (1.4)$$

Помимо наиболее простого приближения, описанного в работе [9], Андо также были учтены эффекты негауссовости беспорядка [10], рассчитаны поправки к самосогласованному борновскому приближению [11] и продольная проводимость в режиме сильно перекрывающихся уровней Ландау [12]. Полученные Андо результаты позволили описать экспериментально наблюдаемые в двумерных структурах осцилляции Шубникова-де Гааза, а развитый подход (самосогласованное борновское приближение) стал стандартом в теоретических исследованиях магнетотранспортных свойств двумерных систем [13],[14],[15],[16]. Заметим, что осцилляции Шубникова-де Гааза, наблюдавшиеся уже в первой работе [7] в магнитном поле $9T$, умели величину, сравнимую с самой проводимостью (при этом σ_{xx} в некоторых точках почти обращалось в нуль), в то время как теория, разработанная в работе [12], предполагает амплитуду осцилляций малой. Кроме того, интенсивные экспериментальные исследования [17] показали, что в области промежуточных и сильных магнитных полей, в которой теория Андо и дает существенные отличия по сравнению с трехмерным случаем, согласие между теорией и экспериментом

крайне посредственное. С теоретической точки зрения самосогласованное борновское приближение, сводящее расчет проводимости к плотности состояний, находилось в плохом согласии с работой Тсукада, оценившего в публикации 1976г. [18] долю локализованных электронных состояний в случае плавного хаотического потенциала. Позднее к выводу о большой доле локализованных состояний в двумерной системе в присутствии магнитного поля пришел Аоки на основании численных расчетов для примесей с короткодействующим (дельта-функциональным) потенциалом [19] и авторы работы [20], экспериментально обнаружившие глубокие провалы на кривых $\sigma_{xx}(B)$. Практически одновременно было показано, что все состояния в двумерной системе невзаимодействующих электронов являются локализованными [21],[5], что находилось в прямом противоречии с теорией Андо, предсказывающей обращение продольной проводимости в нуль лишь при обращении в нуль плотности состояний на уровне Ферми.

1.2 Целочисленный квантовый эффект Холла, скейлинг и нелинейная σ -модель

Революционным, но в то же время совершенно логичным, как следует из содержания предыдущего раздела, событием в области магнетотранспорта двумерных систем явилось открытие в 1980г. целочисленного квантового эффекта Холла [4]. Сутью квантового эффекта Холла является появление с уменьшением температуры плато на зависимостях холловского сопротивления ρ_{xy} (или холловской проводимости, σ_{xy}) от магнитного поля B (или концентрации носителей n). При этом диагональные компоненты тензоров сопротивления и проводимости в области плато обращаются в нуль, $\rho_{xx} \approx 0$, $\sigma_{xx} \approx 0$, а σ_{xy} принимает целые значения (ρ_{xy} – обратные целым),

$$\sigma_{xy}^{(N)} = N \frac{e^2}{h}, \quad \rho_{xy}^{(N)} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}. \quad (1.5)$$

Относительная точность, с которой экспериментально установлены соотношения (1.5), ограничена современными возможностями прецизионных измерений сопро-

тивления и составляет 10^{-9} [22]. Объяснение целочисленного квантового эффекта Холла состоит из двух частей. Прежде всего, наличие плато объясняется локализацией электронных состояний в магнитном поле [23], на возможность которой обращалось внимание в работах [18],[19],[20]. Более сложным является вопрос о точности квантования, поскольку учесть всевозможные факторы, способные в принципе давать поправки, превышающие 10^{-9} , довольно непросто. Наиболее строгое из существующих объяснений точности квантования приведено в работе [24]. В ней показано, что усредненная по некоторому классу граничных условий холловская проводимость целого числа полностью заполненных разьединенных уровней Ландау равна целому числу в единицах e^2/h . Поскольку характеристики макроскопической системы не должны зависеть от специфики граничных условий, этим доказывається квантование на серединах плато.

Помимо наиболее фундаментального и важного вопроса о точности квантования, в теории целочисленного квантового эффекта Холла существует ряд формально менее значимых вопросов, которые, однако, и составляют физику явления. Прежде всего это вопрос о том, как происходит локализация электронных состояний в двумерном случае в присутствии магнитного поля. Наиболее наглядным является предел сильного магнитного поля, когда уровни Ландау являются разьединенными, и их можно рассматривать независимо. В отличие от случая нулевого магнитного поля, в котором локализация определяется минимумами потенциала, в магнитном поле локализация происходит как на потенциальных ямах, так и на потенциальных холмах. Наиболее наглядным является случай плавного хаотического потенциала, поскольку в этом случае волновые функции носителей представляют собой уширенные в меру магнитной длины линии постоянного потенциала [18]. Из этого непосредственно следует, что локализованными являются все одноэлектронные состояния, кроме лежащих вблизи центров уровней Ландау. В случае резкого хаотического потенциала столь простое рассуждение неприменимо, поскольку в этом случае магнитная длина оказывается сравнимой с корреля-

ционной длиной эффективного хаотического потенциала. Тем не менее, считается, что вне зависимости от особенностей хаотического потенциала длина локализации обращается в бесконечность лишь в дискретном наборе точек $E = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, соответствующих центрам уровней Ландау. Поскольку вблизи этих точек длина локализации ξ значительно превосходит имеющиеся в задаче микроскопические длины – магнитную длину a_H и корреляционную длину хаотического потенциала λ , в этой области применимы феноменологические соображения подобия (скейлинга), откуда

$$\xi(E) \propto |E - \hbar\omega_c(n + 1/2)|^{-v}, \quad (1.6)$$

причем показатель степени $v \approx 2.3$ считается не зависящим от номера уровня Ландау n [25], хотя все численные расчеты, дающие это значение v , выполнены для основного уровня Ландау $n = 0$ [26]. В то же время такое значение v согласуется с экспериментальными данными работы [27], в которой изучалась зависимость ширины плато целочисленного квантового эффекта Холла от размера образца. Однако достоверность экспериментальных данных работы [27] не является абсолютной, поскольку влияние на ширины плато могло оказывать повышение температуры образца ввиду увеличения плотности тока при уменьшении размеров образца, а повторных измерений такого рода до сих пор не проведено. Заметим, что при всей своей важности скейлинговый показатель v не определяет свойства квантово-холловской системы при нулевой температуре $T = 0$ (поскольку в этом пределе ширины переходных областей между последовательными плато обращаются в нуль), а лишь описывает приближение к ней. Единственными нетривиальными величинами, характеризующими квантово-холловскую систему в пределе нулевой температуры, являются пиковые величины диагональной компоненты тензора проводимости, определенные как

$$\sigma_{xx}^{(n)} = \lim_{T \rightarrow 0} \sigma_{xx}[\hbar\omega_c(n + 1/2)], \quad (1.7)$$

где аргумент у σ_{xx} в правой части формулы (1.7) указывает на положение уровня

химического потенциала.

Теорию целочисленного квантового эффекта Холла можно условно разделить на две ветви, одна из которых связана с численными расчетами, проводимыми в рамках простых и наглядных моделей, а вторая в полной мере использует аппарат квантовой теории поля. Например, в работах [28],[29] утверждалось, что проблема целочисленного квантового эффекта Холла эквивалентна топологической квантовой теории поля Черна-Саймонса, и найдены точные значения пиков продольной проводимости,

$$\sigma_{xx}^{(n)} = 0.5 \frac{e^2}{h}. \quad (1.8)$$

Наибольшего прогресса в построении теории поля, одновременно описывающей квантование холловской проводимости и локализацию электронных состояний на уровнях Ландау в случае резкого хаотического потенциала, достигли Пруискен и соавторы, использовавшие для описания целочисленного квантового эффекта Холла нелинейную σ -модель с топологическим членом [30],[31],[32],[33] (краткое изложение этих работ также приведено в книге [23]). На основе полученных в этих работах результатов Хмельницким были выведены уравнения ренормгруппы [34], описывающие эволюцию компонент тензора проводимости при изменении размера системы,

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d \ln L} = \beta_{xx}(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}), \quad (1.9)$$

$$\frac{d\sigma_{xy}}{d \ln L} = \beta_{xy}(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}), \quad (1.10)$$

и построен качественный фазовый портрет системы уравнений (1.9-1.10). Уравнения (1.9,1.10) лежат в основе так называемой концепции двухпараметрического скейлинга. Поскольку правая часть уравнений (1.9),(1.10) не содержит в явном виде номера уровня Ландау, согласно гипотезе универсальности Пруискена-Хмельницкого пиковые величины продольной проводимости не зависят от номера уровня Ландау,

$$\sigma_{xx}^{(n)} = \text{const}(n). \quad (1.11)$$

Непосредственный расчет константы в правой части уравнения (1.11) требует знания явного вида функций β_{xx}, β_{xy} , который может быть получен лишь приближенно. В частности, в работе [35] получена следующая оценка для $\sigma_{xx}^{(*)}$, основанная на двухпетлевом приближении для β -функций:

$$\sigma_{xx}^{(n)} \approx 0.88 \frac{e^2}{h}. \quad (1.12)$$

Поскольку точность, с которой выполняется соотношение (1.12), не может быть оценена в рамках теоретико-полевого подхода, главным результатом теории является соотношение (1.11). Фактически именно оно является ключом к проверке предложенной Пруискеном и соавторами теории. Необходимость в такой проверке определяется следующим набором факторов.

1. Вывод эффективного лагранжиана в теории Пруискена и соавторов существенно опирается на представления о краевой природе квантово-холловских токов. В то же время строгое доказательство квантования холловской проводимости, данное в работе [24], такого предположения не использует. Строгого обоснования вида граничных условий, накладываемых на матричное поле $Q(\mathbf{r})$, не представлено.
2. Эффективный лагранжиан содержит "затравочные" величины $\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0$, т.е. значения, рассчитанные в самосогласованном борновском приближении. В то же время вывод уравнений ренормгруппы предполагает, что вид эффективного лагранжиана не меняется при изменении масштаба системы и соответствующей перенормировке σ_{xx}, σ_{xy} , что не является очевидным.
3. Использование метода реплик. В отличие от метода суперсимметрии этот метод не является математически безупречным ввиду необходимости предельного перехода к нулевому числу реплик.
4. Использование инстантонов при расчете свободной энергии. В частности, согласно Пруискену "большинство выводов работ [36],[31],[32],[33], относящихся

к инстантонам, не верно, причем, к сожалению, не вследствие ошибок, а из-за неправильного подхода к задаче” ([23], стр. 168).

1.3 Пиковые величины продольной проводимости: эксперимент и численные расчеты

Описанный в разделе 1.2 набор факторов формирует актуальность независимой теоретической и экспериментальной проверки теории Пруискена и соавторов. Эксперименты, первоначально приводившиеся в поддержку теории, такие как [37], на самом деле отражают на ”диаграммах траекторий” лишь факт обращения продольной проводимости в нуль в областях плато и наличия непрерывных зависимостей $\sigma_{xx}(B)$, $\sigma_{xy}(B)$ в переходных областях при различных температурах T .

Более содержательными являются результаты работ, посвященных пиковым величинам $\sigma_{xx}^{(n)}$, поскольку именно соотношение (1.11) является ключевым выводом. Прежде всего, при сравнении экспериментальных данных с предсказаниями теории необходимо иметь в виду, что случай резкого хаотического потенциала, для которого развита теория Пруискена и соавторов, реализуется лишь в части экспериментальных образцов, как правило квантовых ям на основе твердых растворов с не очень высокой концентрацией носителей. В таких образцах, как правило, локализация имеет место лишь для основного уровня Ландау $n = 0$, и предметом исследования является обычно переход между последним квантово-холловским плато и фазой изолятора. Часть исследователей предполагает очевидным значение холловской компоненты тензора проводимости в точке перехода, $\sigma_{xy} = 0.5e^2/h$, поэтому в литературе часто приводятся лишь значения ρ_{xx} , но не σ_{xx} . Считая это предположение и формулу (1.8) верными, получаем ожидаемое значение $\rho_{xy} \approx 1h/e^2$. Близкие значения действительно сообщаются в литературе для различных экспериментальных образцов: 1.05, 0.87, 1.16, 1.12, 0.97, 0.77, 0.89, 1.32, $0.93h/e^2$ [38], $0.86h/e^2$ [39], , однако разброс экспериментальных данных слишком велик, чтобы из них можно было с хорошей точностью определить $\sigma_{xx}^{(0)}$. В работах [40],[41],[42]

изучались не только компоненты тензора сопротивления, но и проводимости, и с хорошей ($\sim 10\%$) точностью было получено значение $0.5e^2/h$. Недостатком всех приводимых в литературе экспериментальных данных при сравнении с теорией является то, что они относятся хотя и к низкой, но не нулевой температуре. В целом экспериментальные данные для структур с резким хаотическим потенциалом подтверждают скорее соотношение (1.8), а не (1.12).

В структурах с модуляционно-легированными квантовыми ямами на основе чистого материала (чаще всего GaAs) реализуется плавный хаотический потенциал, при этом экспериментальные значения пиков $\sigma_{xx}^{(n)}$ значительно меньше, чем для структур с резким хаотическим потенциалом, на что впервые обратили внимание авторы работы [43]. Отметим, что данная работа является единственной, в которой приведены графики зависимостей $\sigma_{xx}^{(n)}$ от температуры. Найденные в работе [43] значения составляют от $0.1e^2/h$ до $0.2e^2/h$ для трех различных пиков, относящихся к $n = 0$ и $n = 1$. В работе [44] были найдены следующие значения: $0.09, 0.20, 0.17, 0.21e^2/h$ для структуры с концентрацией носителей $n = 4.85 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$ и $0.17, 0.16, 0.40, 0.75e^2/h$ для структуры с концентрацией носителей $n = 4.0 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$ (последнее значение относится к неразделенным по спину уровням Ландау, и, будучи поделенным на 2, оказывается меньше $0.5e^2/h$). В работах [45],[46],[47] были получены значения $0.20, 0.35, 0.17, 0.33, 0.30, 0.23e^2/h$, также значительно меньшие $0.5e^2/h$. В работе [45] измерения проводились на дисках Корбино, т.е. измерялись напрямую пики σ_{xx} , которые имели одинаковую высоту вплоть до фактора заполнения $\nu \sim 14$ (с точностью лучше 10%). Авторы работы [45] интерпретировали такой результат, совпадающий по форме с уравнением (1.11), в качестве подтверждения теории Пруискена и соавторов, имеющей прямое отношение, однако, лишь к случаю резкого хаотического потенциала. Обобщение этой теории на случай плавного хаотического потенциала на данный момент отсутствует, что подчеркивает особую важность численных исследований пиковых величин $\sigma_{xx}^{(n)}$.

Первоначально численные исследования были сосредоточены главным образом на скейлинговом индексе ν , который хотя и является достаточно важной характеристикой квантово-холловских систем, не характеризует их при нулевой температуре. Что более важно, с практической точки зрения достаточно сложно провести эксперимент по измерению показателя ν , и сделано это было лишь в одной работе [44], где было найдено $\nu \approx 2.3$, что хорошо согласуется с результатами численных расчетов [25]. Однако абсолютно достоверными эти данные не являются, во всех же остальных работах измерялся температурный скейлинговый индекс κ [25]. Поскольку точное соответствие между ν и κ неизвестно, отличить скейлинговый показатель $\nu \approx 2.3$ от его классического аналога, равного $4/3$ [48], достаточно сложно.

Первым численным исследованием, в рамках которого были получены надежные значения первого пика $\sigma_{xx}^{(0)}$, является работа [49]. В ней было найдено $\sigma_{xx}^{(0)} \approx 0.5e^2/h$, причем эффекты асимметрии хаотического потенциала и его плавности не были заметны на фоне вычислительной погрешности, составлявшей около 10%. В работе [50] этот результат был интерпретирован как $\sigma_{xx}^{(n)} = 0.5e^2/h$. В работе [51] было получено значение $\sigma_{xx}^{(0)} = (0.5 \pm 0.02)e^2/h$ для случая резкого хаотического потенциала, причем заявленная точностью, как показали более поздние исследования других авторов, являлась завышенной. Авторы работы [51] нашли полученный результат находящимся в ”отличном согласии с гипотезой универсальности”. В работе [52] были проведены расчеты пиков продольной проводимости в более широком, чем ранее, диапазоне отношений корреляционной длины хаотического потенциала λ к магнитной длине a_H , и было отмечено убывание пиков продольной проводимости с ростом параметра λ/a_H , вплоть до $0.44e^2/h$. Такой результат был интерпретирован, однако, следующим образом: ”В случае плавного потенциала σ_{xx} достигает квазиклассического значения $e^2/2h$ вне зависимости от номера уровня Ландау”. Авторы работы [53] получили следующие значения пиков для резкого и плавного хаотических потенциалов, проведя расчет для основного

уровня Ландау $n = 0$: $\sigma_{xx}^{(0)} \approx 0.869e^2/h$ в пределе $\lambda/a_H \rightarrow 0$ и $\sigma_{xx}^{(0)} \approx 0.330e^2/h$ в пределе $\lambda/a_H \rightarrow \infty$. В работе [54] была проведена аккуратная экстраполяция численных данных к бесконечному размеру образца $L \rightarrow \infty$ и получены следующие результаты: $\sigma_{xx}^{(0)} = (0.58 \pm 0.03)e^2/h$, $\sigma_{xx}^{(1)} = (0.61 \pm 0.03)e^2/h$. Заметим, что ответ для первого возбужденного уровня Ландау $n = 1$ был получен в работе [54] с применением формулы Ландауэра, расчет этим же методом для основного уровня Ландау дал значение $\sigma_{xx}^{(0)} = (0.60 \pm 0.02)e^2/h$. Таким образом, в литературе присутствуют неполные и частично противоречивые теоретические данные о пиковых величинах продольной проводимости $\sigma_{xx}^{(n)}$. В частности, $\sigma_{xx}^{(1)}$ для случая резкого хаотического потенциала изучалось лишь в работах [52] и [54], и были получены значения $1.07e^2/h$ и $0.58e^2/h$ соответственно. Пики продольной проводимости на более высоких уровнях Ландау не изучались. Предельный случай плавного хаотического потенциала изучался в работах [52] и [53]. В обеих работах было получено ненулевое значение $\sigma_{xx}^{(0)}$ в пределе $\lambda/a_H \rightarrow \infty$, в работе [52] оно составляло $(0.44-0.5)e^2/h$, в работе [53] – $0.330e^2/h$. Противоречия в данных различных литературных источников подчеркивают важность задачи независимого и последовательного анализа пиков σ_{xx} .

1.4 Циклотронный резонанс в двумерном электронном газе в поперечном и наклонном магнитных полях

Циклотронный резонанс является традиционным методом экспериментального определения эффективных масс (вообще говоря – законов дисперсии) носителей заряда в полупроводниковых материалах и гетероструктурах на их основе. Согласно классической теории циклотронного резонанса, спектр поглощения определяется динамической проводимостью [2]

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1 + (\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2}{[1 + (\omega_c\tau)^2 - (\omega\tau)^2]^2 + 4(\omega\tau)^2}, \quad (1.13)$$

сводящейся в статическом пределе $\omega \rightarrow 0$ к формуле (1.1). Считается, что в двумерном случае формула (1.13) применима только в области относительно слабых магнитных полей, $\omega_c \tau \ll 1$ [55]. В более интересной с практической точки зрения области $\omega_c \tau \gg 1$ форма линии циклотронного резонанса в случае резкого хаотического потенциала становится сильно нелоренцевской, а ее ширина определяется не временем релаксации импульса τ , а шириной уровней Ландау, так что [55]

$$\Delta\omega = 0.73\sqrt{\omega_c \tau}. \quad (1.14)$$

Особенности формы линии в случае резкого хаотического потенциала исследовались в работе [56], и была получена гауссовская форма хвостов спектра циклотронного резонанса, соответствующих переходам между флуктуационными хвостами уровней Ландау. Случай плавного хаотического потенциала рассматривался в работах [57],[55]. В работе [57] для анализа плавного хаотического потенциала было использовано самосогласованное борновское приближение, которое, как было показано в работе [14], в этом пределе не применимо. В работе [55] утверждалось, что в случае плавного хаотического потенциала имеет место немонотонная зависимость ширины линии циклотронного резонанса от параметра $\omega_c \tau$, а именно, резкое уменьшение ширины линии до классического значения τ^{-1} при достижении магнитных полей $\omega_c \tau \sim (V/E_F)^2$, где $V = \sqrt{\langle V_{imp}^2(\mathbf{r}) \rangle}$ – амплитуда хаотического потенциала. Однако представляется маловероятным, что такой сценарий (как и концепция классической локализации, описанная в работе [58]) может реализоваться на практике, поскольку расчет динамической проводимости в работе [55] проведен по классической формуле, пренебрегающей квантово-механической спецификой задачи (по крайней мере какие-либо экспериментальные свидетельства эффектов, описанных в работах [58],[55], на данный момент отсутствуют). Этими обстоятельствами определяется актуальность последовательного квантово-механического расчета формы линии циклотронного резонанса в двумерном электронном газе.

Поскольку эффективная масса носителей в двумерных гетероструктурах может в силу ряда причин существенно отличаться от объемного значения, метод

циклотронного резонанса активно используется для определения законов дисперсии двумерных электронов и дырок. Дополнительные возможности предоставляет использование магнитных полей, наклоненных под углом к оси роста. Поскольку зеемановская энергия зависит от полной величины магнитного поля B , а циклотронная энергия определяется главным образом ее проекцией на ось роста $B \cos \alpha$, изменение угла наклона α позволяет управлять относительным положением спин-расщепленных уровней Ландау. Приложение продольной компоненты магнитного поля позволяет в ряде случаев увеличить величину спинового расщепления до значений, разрешающих наблюдение плато целочисленного квантового эффекта Холла, соответствующих переходам между спиновыми подуровнями одного уровня Ландау, как это было реализовано в работе [59].

Однако дополнительной особенностью, возникающей в случае сильных магнитных полей (таких, что магнитная длина a_H сравнима с шириной квантовой ямы) и больших углов наклона α является существенное зацепление циклотронного вращения и движения носителей вдоль оси роста квантовой ямы [60]. Поскольку точное разделение переменных в такой задаче возможно лишь в случае параболического потенциала квантовой ямы, расчет спектров носителей для менее специфичных потенциалов, в частности прямоугольного, выполняется, как правило, численно. Типичная процедура такого расчета описана в работе [61]. Подробный анализ и сравнение экспериментальных данных с результатами численных расчетов выполнены на примере одиночной квантовой ямы $\text{In}_{0.09}\text{Ga}_{0.91}\text{As}/\text{GaAs}$ в работе [62].

Особый интерес представляют исследования влияния наклонного магнитного поля на спектр носителей и циклотронный резонанс в двойных квантовых ямах и разьединенных гетероструктурах II типа, в которых возможно перекрытие спектров электронных и дырочных состояний. В работе [63] была изучена межъямная люминесценция в двойной квантовой яме в наклонном магнитном поле и магнетостарковский эффект. Исследования разьединенных гетероструктур II типа имеют

большое прикладное значение для разработки лазеров инфракрасного диапазона, поэтому расчету их зонной структуры в магнитном поле посвящено большое число публикаций, в частности работы [64],[65]. Анализ оптических переходов в таких структурах (в нулевом магнитном поле) проведен в работе [66]. В главе 4 данной диссертации выполнен анализ спектров циклотронного резонанса в разьединенных структурах InAs/GaSb в поперечном и наклонном магнитных полях.

1.5 Выводы

В первой главе выполнен исторический обзор основных теоретических и экспериментальных достижений в области магнетотранспорта и циклотронного резонанса в двумерных полупроводниковых системах. В разделе 1.1 описаны базовые представления о транспорте носителей в двумерных системах в присутствии магнитного поля, разработанные до момента открытия квантового эффекта Холла. Во разделе 1.2 сформулирована концепция целочисленного квантового эффекта Холла, представлены главные теоретические модели, дающие описание явления, обозначены наиболее существенные предположения, используемые при формулировке нелинейной σ -модели и выводе уравнений ренормгруппы. В разделе 1.3 обосновывается важность исследований пиковых величин продольной проводимости, представлен детальный обзор имеющихся в литературе экспериментальных результатов и данных численных расчетов. Продемонстрированы сильные расхождения в данных различных литературных источников. В разделе 1.4 выполнен обзор работ, посвященных экспериментальным и теоретическим исследованиям циклотронного резонанса в двумерном электронном газе. Особое внимание уделено работам, посвященным анализу формы линии циклотронного резонанса в двумерном случае в пределе сильных магнитных полей и влиянию наклона магнитного поля на спектры носителей в квантовых ямах и гетероструктурах II типа.

Глава 2

Спектр носителей и структура двумерных электронных состояний в сильных магнитных полях

2.1 Модель уширенных разьединенных уровней Ландау.

Предметом рассмотрения в данной главе является спектр носителей и структура двумерных электронных состояний в сильных магнитных полях. Хотя собственные энергии и волновые функции носителей заряда и не являются напрямую измеряемыми в эксперименте величинами, по существу именно они определяют электронные свойства двумерных полупроводниковых гетероструктур (квантовых ям). Поскольку одновременный учет всех факторов, оказывающих заметное влияние на физические величины, изучаемые в экспериментах, проводимых в сильных магнитных полях, представляет собой идеологически и технически трудную задачу, прежде всего мы сформулируем простую и наглядную модель, позволяющую описать квантово-механическое движение носителей заряда в квантовых ямах в присутствии магнитного поля.

Прежде всего, здесь и в дальнейшем мы ограничимся случаем строго нулевой температуры $T = 0$. Это связано с отсутствием на данный момент микроскопической теории, учитывающей процессы неупругого рассеяния в сильных магнитных

полях при низких температурах, т.е. в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. С другой стороны, поправки, связанные с отличием вида функции распределения Ферми-Дирака от ступенчатой, соответствующей $T = 0$, являются тривиальными и не требуют глубокого анализа. Кроме того, на протяжении всей работы, помимо раздела 2.6, мы пренебрежем кулоновским взаимодействием носителей. Такое приближение обычно оправдано при рассмотрении целочисленного квантового эффекта Холла, не связанного принципиально с кулоновским взаимодействием носителей [23]. Мы также будем считать несущественным трехмерный характер распределения примесей и дефектов, описывая их влияние двумерным хаотическим потенциалом $V_{imp}(\mathbf{r}) = V_{imp}(x, y)$.

Гамильтониан невзаимодействующих носителей заряда с эффективной массой m^* , помещенных во внешнее магнитное поле $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, направленное вдоль оси роста квантовой ямы z , и хаотический потенциал $V_{imp}(\mathbf{r})$, имеет вид

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - e/c\mathbf{A})^2}{2m^*} + g^* \hat{s}_z \hbar \omega_c^0 + V_{imp}(\mathbf{r}), \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

где g^* – эффективный g -фактор, $\omega_c^0 = |e|B/(m_0c)$ (эффектами спин-орбитального взаимодействия мы также пренебрегаем). Удобно представить хаотический потенциал $V_{imp}(\mathbf{r})$ в виде ряда Фурье

$$V_{imp}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (2.2)$$

Это позволяет свести задачу вычисления матричных элементов хаотического потенциала на базисных волновых функциях вида

$$|nk\rangle = \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} a_H L_x} \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2a_H^2}\right) H_n\left(\frac{\tilde{y}}{a_H}\right), \quad (2.3)$$

$$\tilde{y} = y - ka_H^2, \quad a_H^2 = \frac{\hbar c}{|e|B} \quad (2.4)$$

к матричным элементам $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$,

$$\begin{aligned} \langle n_1 k_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | n_2 k_2 \rangle &= \delta_{k_1 - k_2, q_x} e^{i \frac{k_1 + k_2}{2} q_y a_H^2} e^{-\frac{q^2 a_H^2}{4}} \left[\frac{(q_x + iq_y) a_H}{\sqrt{2}} \right]^{|n_1 - n_2|} \\ &\times \sqrt{\frac{\min(n_1, n_2)!}{\max(n_1, n_2)!}} L_{\min(n_1, n_2)}^{|n_1 - n_2|} \left(\frac{q^2 a_H^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $H_n(x)$ – полиномы Эрмита, $L_n^m(x)$ – присоединенные полиномы Лагерра, a_H – магнитная длина. Как следует из формулы (2.5), влияние коротковолновой составляющей потенциала, соответствующей $qa_H \gg 1$, является экспоненциально малым благодаря множителю $\exp(-q^2 a_H^2/4)$. Такое поведение матричного элемента (2.5) позволяет выделить две физически различных ситуации: случай резкого хаотического потенциала и случай плавного хаотического потенциала. В первом случае мы будем считать корреляционную длину хаотического потенциала λ много меньшей магнитной длины, $\lambda \ll a_H$. Во втором случае мы будем считать корреляционную длину λ много большей циклотронного радиуса, $\lambda \gg r_c = a_H \sqrt{2n+1}$. В случае некоррелированного расположения отдельных примесей усредненный по беспорядку квадрат фурье-образа хаотического потенциала пропорционален квадрату фурье-образа потенциала отдельной примеси, $|\overline{V_{\mathbf{q}}}|^2 \propto |v_{\mathbf{q}}|^2$, и корреляционная длина λ определяется радиусом потенциала одной примеси. Поэтому случай резкого хаотического потенциала соответствует примесям с малым радиусом действия, случай плавного хаотического потенциала – примесям с большим радиусом действия. В случае ионизованных примесей в качестве λ фигурирует радиус экранирования кулоновского потенциала.

Поскольку знание матричных элементов (2.5) само по себе не позволяет существенно продвинуться в решении задачи о нахождении собственных энергий и волновых функций гамильтониана (2.1), мы воспользуемся следующим упрощением. Ширина уровней Ландау Γ растет с магнитным поле медленнее, чем расстояние между ними, т.е. циклотронная энергия $\hbar\omega_c = \hbar|e|B/(m^*c)$, поэтому в достаточно сильном магнитном поле заведомо выполнено условие $\Gamma \ll \hbar\omega_c$, а значит соседние уровни Ландау практически не перекрываются. В этом случае для нахождения приближенных волновых функций и энергий нулевого приближения достаточно независимой диагонализации блоков гамильтониана \hat{H}_n , задаваемых матричными элементами $\langle nk_1 | \hat{H} | nk_2 \rangle$. После этого поправки к волновым функциям и энергиям могут быть найдены по теории возмущений. Обозначим набор гамильтонианов ну-

левого приближения \hat{H}_n , собственные энергии и волновые функции – $E_{ns\alpha}^{(0)}$ и $|\Psi_{ns\alpha}^{(0)}\rangle$ (s – проекция спина на ось z). Вид волновых функций нулевого приближения не зависит от амплитуды хаотического потенциала $V = \sqrt{\langle V_{imp}^2(\mathbf{r}) \rangle} = \sqrt{\sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q}}|^2}$, а энергии, отсчитанные от центра n -го уровня Ландау, – пропорциональны V , поэтому мы можем записать

$$\hat{H}_n |\Psi_{ns\alpha}\rangle = \hat{H}_n |\Psi_{ns\alpha}^{(0)}\rangle = E_{ns\alpha}^{(0)} |\Psi_{ns\alpha}^{(0)}\rangle = (\hbar\omega_c(n + 1/2) + g^* s \hbar\omega_c^0 + V e_{n\alpha}) |\Psi_{ns\alpha}^{(0)}\rangle, \quad (2.6)$$

$$|\Psi_{ns\alpha}^{(0)}\rangle = \sum_k C_{n\alpha k} |nsk\rangle, \quad (2.7)$$

где $\alpha = 1..N_L$ – номер одночастичного состояния на n -м уровне Ландау, $N_L = S/(2\pi a_H^2)$ – кратность вырождения уровней Ландау, S – площадь образца, безразмерные энергии $e_{n\alpha}$ не зависят от амплитуды хаотического потенциала V . Координатная часть базисных волновых функций $|nsk\rangle$ определяется формулой (2.3), а спиновая – квантовым числом s .

2.2 Плотность состояний и подмешивание уровней Ландау

Для аналитического расчета плотности состояний в данной работе мы используем метод моментов [67]. Пусть $D_{ns}(\mathcal{E})$ – плотность состояний в расчете на единицу площади образца, соответствующая уровню Ландау с номером n и спином s , отделенному от других уровней Ландау некоторым интервалом энергий, $\mathcal{E} = E - (\hbar\omega_c(n + 1/2) + g^* s \hbar\omega_c^0)$ – энергия, отсчитанная от центра соответствующего уровня Ландау. Введем фурье-образ плотности состояний,

$$D_{ns}(\mathcal{E}) = \int_{-\infty}^{\infty} D_{ns}(\theta) \exp(i\mathcal{E}\theta) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad (2.8)$$

тогда

$$D_{ns}(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D^{(p)}}{2\pi a_H^2} \frac{(-i\theta)^p}{p!}, \quad (2.9)$$

$$D^{(p)} = \int_{-\infty}^{\infty} D_{ns}(\mathcal{E}) \mathcal{E}^p d\mathcal{E} = N_L^{-1} \text{Tr}_n(\hat{V}_{imp})^p. \quad (2.10)$$

Здесь Tr_n подразумевает суммирование по всем базисным состояниям, образующим уровень Ландау с номером n . Используя введенный выше базис (2.3), имеем

$$\begin{aligned} D^{(p)} &= N_L^{-1} \text{Tr}_n (V_{imp})^p = N_L^{-1} \sum_{k_1 k_2 \dots k_p} \langle nk_1 | V_{imp} | nk_2 \rangle \langle nk_2 | V_{imp} | nk_3 \rangle \dots \langle nk_p | V_{imp} | nk_1 \rangle = \\ &= N_L^{-1} \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_p} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} \dots V_{\mathbf{q}_p} \sum_{k_1 k_2 \dots k_p} \langle nk_1 | e^{i\mathbf{q}_1 \mathbf{r}} | nk_2 \rangle \langle nk_2 | e^{i\mathbf{q}_2 \mathbf{r}} | nk_3 \rangle \dots \langle nk_p | e^{i\mathbf{q}_p \mathbf{r}} | nk_1 \rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Входящие в выражение (2.11) матричные элементы вида $\langle nk_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | nk_2 \rangle$ даются формулой (2.5). Дальнейшие вычисления требуют знания вида хаотического потенциала $V(\mathbf{r})$ и могут быть проведены в двух предельных случаях плавного и резкого хаотического потенциалов, рассмотренных в разделах (2.3) и (2.4) соответственно.

Вид волновых функций (2.7), полученный в разделе 2.1, не учитывает подмешивания уровней Ландау, возникающего в меру параметра $V/\hbar\omega_c$. Поскольку учет такого подмешивания является необходимым уже в пределе $V/\hbar\omega_c \rightarrow 0$, найдем соответствующую поправку по теории возмущений:

$$\begin{aligned} |\Psi_{ns\alpha}\rangle &= |\Psi_{ns\alpha}^{(0)}\rangle + |\delta\Psi_{ns\alpha}\rangle + O(V^2) \quad (2.12) \\ |\delta\Psi_{ns\alpha}\rangle &= \sum_{\substack{n' \neq n \\ \beta}} \frac{\langle \Psi_{n's\beta}^{(0)} | V_{imp} | \Psi_{ns\alpha}^{(0)} \rangle}{E_{ns\alpha}^{(0)} - E_{n's\beta}^{(0)}} |\Psi_{n's\beta}^{(0)}\rangle = \sum_{\substack{n' \neq n \\ \beta}} \frac{\langle \Psi_{n's\beta}^{(0)} | V_{imp} | \Psi_{ns\alpha}^{(0)} \rangle}{\hbar\omega_c(n - n')} |\Psi_{n's\beta}^{(0)}\rangle + O(V^2) \quad (2.13) \end{aligned}$$

Поскольку фактически формула (2.13) содержит не только суммирование по N_L электронным состояниям на уровне Ландау с номером n' , но также двойное суммирование по квантовым числам, нумерующим коэффициенты разложения волновых функций $\Psi_{ns\alpha}^{(0)}$ и $\Psi_{n's\beta}^{(0)}$ по базисным волновым функциям (2.3), ее непосредственное использование при проведении конкретных расчетов оказывается нерациональным. Вместо формулы (2.13) удобно использовать следующее выражение, имеющее тот же порядок точности $(V/\hbar\omega_c)^2$:

$$|\delta\Psi_{ns\alpha}\rangle = \sum_{\substack{n' \neq n \\ k}} \frac{\langle n'sk | V_{imp} | \Psi_{ns\alpha}^{(0)} \rangle}{\hbar\omega_c(n - n')} |n'sk\rangle + O(V^2). \quad (2.14)$$

Конкретные расчеты поправок к волновым функциям, связанных с подмешиванием уровней Ландау, требуют знания структуры электронных состояний на каждом из уровней Ландау и могут быть проведены до некоторой степени в аналитическом виде в двух предельных случаях плавного и резкого хаотического потенциалов, рассмотренных в разделах 2.3 и 2.4 соответственно.

2.3 Плавный хаотический потенциал

Рассмотрим случай плавного хаотического потенциала, характерного для модуляционно-легированных квантовых ям GaAs, подвижность электронов в которых при низких температурах превышает $\mu \gtrsim 10^5 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$ [43],[44],[45],[47]. Если корреляционная длина хаотического потенциала значительно превышает циклотронный радиус, $\lambda \gg r_c = \sqrt{2n+1}a_H$, зависимость "внутризонных" матричных элементов $\langle nk_1 | \hat{H} | nk_2 \rangle$ от номера уровня Ландау n исчезает, поскольку в пределе малых q , $q^2 a_H^2 / 2 \ll 1/n$, полиномы Лагерра в выражении (2.5) могут быть заменены на 1. При выполнении критерия $\lambda \gg r_c = \sqrt{2n+1}a_H$ структура всех уровней Ландау вплоть до n -го в нулевом приближении (т.е. без учета подмешивания соседних уровней Ландау) совпадает. Это означает, что совпадают энергии $V e_{n\alpha}$, отсчитанные от центра соответствующих уровней Ландау, и вид волновых функций:

$$e_{n\alpha} = e_{\alpha}, \quad C_{n\alpha k} = C_{\alpha k}. \quad (2.15)$$

Другими словами, имеется полная корреляция структуры соседних уровней Ландау. Такой вывод подтверждает и непосредственный численный расчет. На рис. 2.1 представлена структура матрицы гамильтониана (2.1) в базисе волновых функций $\tilde{\Psi}_{n\alpha} = \sum_k C_{0\alpha k} |nk\rangle$, диагонализующих блок \hat{H}_0 , соответствующий основному уровню Ландау (на рис. 2.1 $\lambda = 4a_H$). Как видно из графика, выбор коэффициентов $C_{n\alpha k}$ для $n \geq 1$ согласно соотношению (2.15) приводит практически к диагональной структуре блоков \hat{H}_1, \hat{H}_2 . Численная диагонализация матрицы гамильтониана (2.1) в базисе (2.3) позволяет получить набор собственных

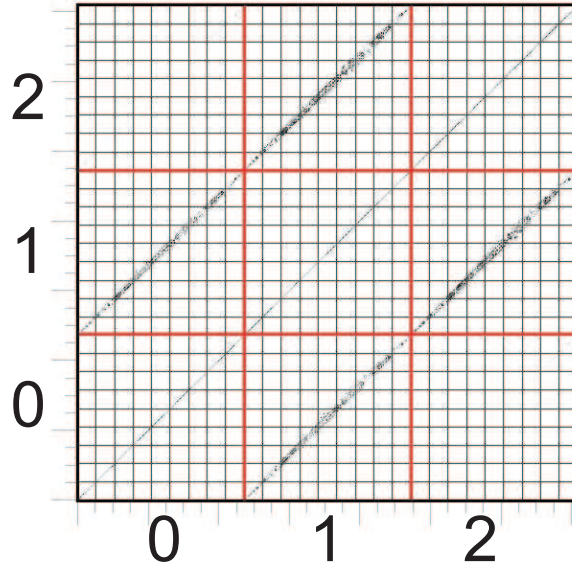


Рис. 2.1: Структура матрицы гамильтониана в случае плавного хаотического потенциала, $\lambda = 4a_H$.

энергий и вычислить плотность состояний $D(E)$. На рис. 2.2 показан вид рассчитанной плотности состояний для плавного хаотического потенциала, $\lambda = 4a_H$, в случае разьединенных уровней Ландау (рис. 2.2(a)) и перекрывающихся уровней Ландау (рис. 2.2(b)). В согласии с формулами (2.15) плотность состояний на каждом следующем уровне Ландау повторяет плотность состояний на предыдущем, $D_n(E) = \text{const}(n)$. Небольшой рост максимумов плотности состояний, заметный на рис. 2.2(a), связан с постепенным нарушением условия $\lambda \gg r_c$, поскольку для $n = 7$ циклотронный радиус составляет $r_c = \sqrt{15}a_H \approx 4a_H$. Некоторое отличие максимумов плотности состояний для $n = 0$ и $n = 1$, заметное на рис. 2.2(b), связано с перекрытием уровней Ландау, поскольку для основного уровня Ландау отсутствует нижележащий уровень. Структура волновых функций, соответствующих последовательным уровням Ландау, также может быть найдена из численного расчета. Состояния, соответствующие хвостам плотности состояний каждого из уровней Ландау, являются локализованными, причем относительная доля локализованных состояний стремится к 1 при стремлении размера образца к бесконечности. Примеры локализованных и делокализованных состояний, соответствующих

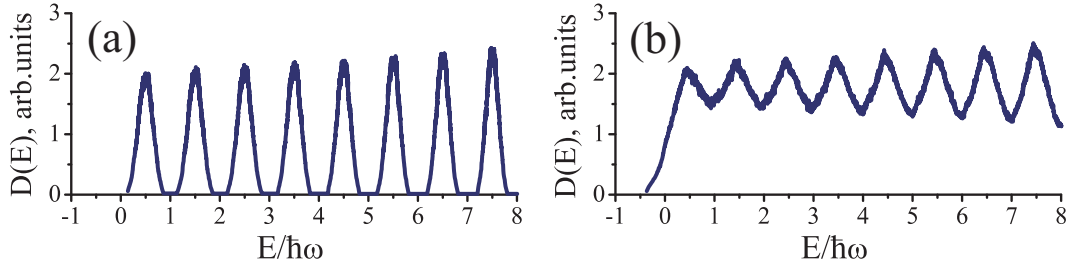


Рис. 2.2: Плотность состояний в случае плавного хаотического потенциала, $\lambda = 4a_H$. (a) – разьединенные уровни Ландау, (b) – перекрывающиеся уровни Ландау.

основному и двум первым возбужденным уровням Ландау, показаны на рис. 2.3. Как видно из рис. 2.3, волновые функции на каждом уровне Ландау в случае плавного хаотического потенциала и разьединенных уровней Ландау, $V \ll \hbar\omega_c$, описываются квазиклассическими траекториями $V(r) = \text{const}$, в согласии с аналитическими результатами, полученными в работах [18],[68]. Отличие волновых функций, соответствующих последовательным уровням Ландау, состоит только в ширине циклотронных траекторий: в случае основного уровня Ландау траектории являются ”одинарными”, для $n = 1$ – ”двойными”, для $n = 2$ – ”тройными” (см. рис. 2.3).

Для аналитического расчета плотности состояний используем метод моментов, приняв во внимание, что фурье-компоненты хаотического потенциала $V_{\mathbf{q}}$ не являются малыми лишь для волновых векторов $q \ll r_c^{-1}$, где $r_c = \sqrt{2n + 1}a_H$. Для соответствующих q полиномы Лагерра и экспоненциальный множитель $\exp(-q^2 a_H^2/4)$ в выражении (2.5) могут быть заменены на 1,

$$\langle nk_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | nk_2 \rangle \approx \delta_{q_x, k_1 - k_2} e^{i \frac{k_1 + k_2}{2} q_y a_H^2}. \quad (2.16)$$

Использование дельта-символа Кронекера, входящего в выражение (2.16), позволяет снять в формуле (2.11) суммирование по всем квантовым числам k_i , кроме одного, одновременно получив множитель $\delta_{q_{1x} + q_{2x} + \dots + q_{px}}$. Суммирование по оставшемуся квантовому числу k_1 приводит к множителю $N_L \delta_{q_{1y} + q_{2y} + \dots + q_{py}}$. В результате

имеем для p -го момента плотности состояний:

$$D^{(p)} = \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_p} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} \dots V_{\mathbf{q}_p} \exp(i\Phi) \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_p}, \quad (2.17)$$

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{p-1} \text{sign}(i-j) q_{ix} q_{jy} a_H^2. \quad (2.18)$$

Поскольку в сумму (2.17) входят лишь малые $q \ll r_c^{-1}$, осциллирующий множитель $\exp(i\Phi)$ в выражении (2.17) может быть заменен на 1, по крайней мере для не слишком высоких моментов p . В этом приближении

$$D^{(p)} = S^{-1} \int V_{imp}^p(\mathbf{r}) d^2r = \langle V_{imp}^p(\mathbf{r}) \rangle. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в формулы (2.8-2.9), получаем окончательный ответ для плотности состояний в случае плавного хаотического потенциала,

$$D_{ns}(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi a_H^2} f(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi a_H^2} \text{Prob}\{\mathcal{E} = V_{imp}(\mathbf{r})\}, \quad (2.20)$$

в согласии с работой [18], где формула (2.20) была получена принципиально иным методом. Поскольку согласно формуле (2.20) плотность состояний пропорциональна функции распределения хаотического потенциала $f(\mathcal{E})$, максимумы плотности состояний в случае плавного хаотического потенциала не зависят от номера уровня Ландау, с точностью до поправок по малым параметрам $V/\hbar\omega_c$ и r_c/λ .

Подмешивание уровней Ландау будем описывать с помощью формулы (2.14), используя соотношение (2.15) и упрощенное выражение для матричных элементов (2.5), подобное формуле (2.16). В результате

$$|\delta\Psi_{ns\alpha}\rangle = \sum_{k\mathbf{q}} C_{\alpha k + q_x} V_{\mathbf{q}} e^{i(k+q_x/2)q_y a_H^2} \sum_{n' \neq n} \frac{C_{\max(n,n')}^{\min(n,n')} [(q_x + iq_y)a_H/\sqrt{2}]^{|n_1-n_2|} |n' sk\rangle}{\hbar\omega_c(n-n')} \quad (2.21)$$

Наиболее важным является подмешивание соседних уровней Ландау, что соответствует $|n-n'| = 1$. В этом случае коэффициенты разложения в выражении (2.21) пропорциональны биномиальному коэффициенту $C_{\max(n,n\pm 1)}^{\min(n,n\pm 1)} = \max(n, n\pm 1)$, т.е. степень подмешивания соседних уровней линейно растет с n .

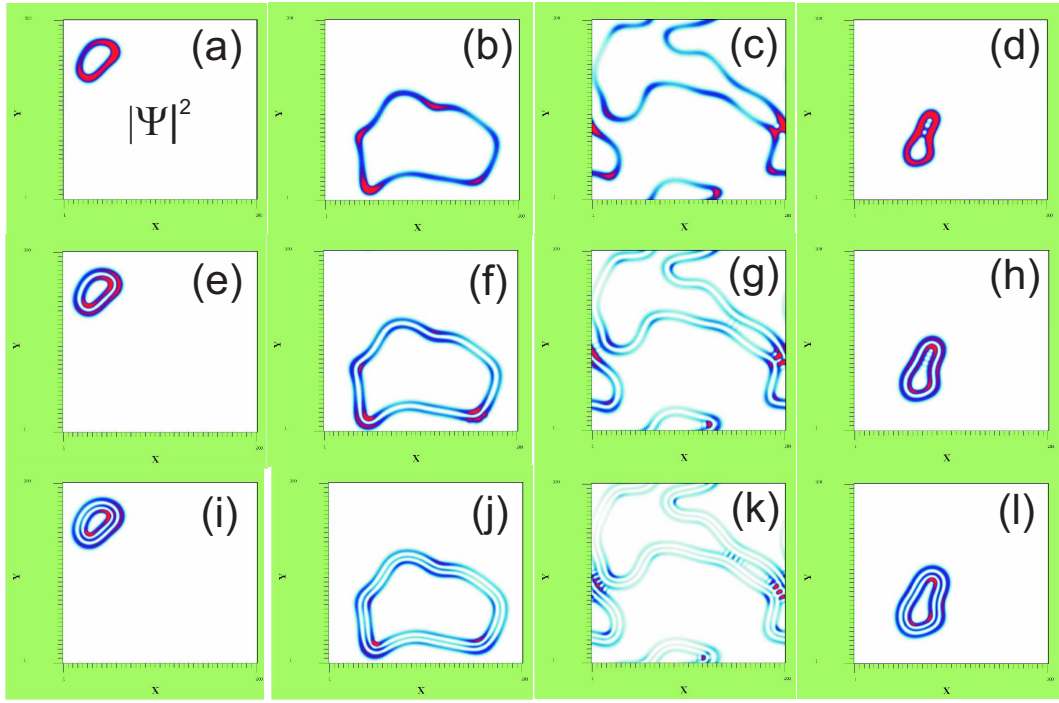


Рис. 2.3: Электронная плотность одночастичных состояний в случае плавного хаотического потенциала, $\lambda = 4a_H$. (a-d) – $n = 0$, (e-h) – $n = 1$, (i-l) – $n = 2$.

2.4 Резкий хаотический потенциал

Рассмотрим случай резкого хаотического потенциала, характерного для квантовых ям на основе твердых растворов, например InGaAs, при не слишком высоких концентрациях носителей [39],[42],[69],[70],[71]. Поскольку хаотический потенциал в этом случае обусловлен флуктуациями состава твердого раствора, т.е. случайностью в расположении атомов In и Ga, корреляционная длина λ составляет несколько постоянных решетки, и условие $\lambda \ll a_H$ заведомо выполнено для типичных магнитных полей, используемых в экспериментах по квантовому эффекту Холла и циклотронному резонансу, $B \sim 10T$. При более высоких концентрациях носителей, $n_s > 10^{12} \text{cm}^{-2}$, необходимо принимать в расчет экранирование обусловленного флуктуациями состава хаотического потенциала, что приводит к увеличению корреляционной длины λ , и реализуется скорее случай плавного хаотического потенциала, рассмотренный в разделе 2.3. Также резкий хаотический потенциал

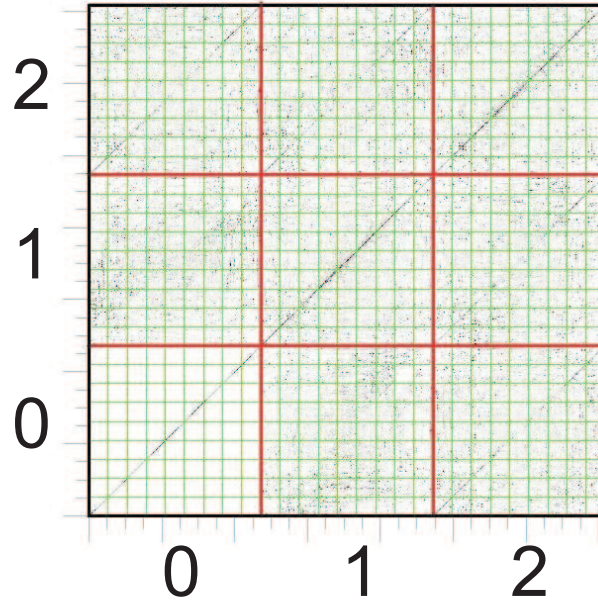


Рис. 2.4: Структура матрицы гамильтониана в случае резкого хаотического потенциала, $\lambda = 0.25a_H$.

может быть реализован в непосредственно легированных квантовых ямах, однако в этом случае уровни Ландау обычно сильно перекрываются.

Будем считать отдельные примеси (или атомы твердого раствора) некоррелированным образом распределенными в плоскости образца, тогда величина $|\overline{V_{\mathbf{q}}}|^2$ пропорциональна фурье-образу квадрата потенциала одной примеси, $|v_{\mathbf{q}}|^2$, который мы считаем короткодействующим, и на этом основании $|\overline{V_{\mathbf{q}}}|^2 = \text{const}$ вплоть до волновых векторов q , много больших обратной магнитной длины a_H^{-1} . В отличие от случая плавного хаотического потенциала мы не можем пренебречь зависимостью "внутризонных" матричных элементов (2.5) от номера уровня Ландау, поэтому структура соседних уровней Ландау оказывается некоррелированной. Этот вывод также подтверждается и прямым численным расчетом. На рис. 2.4 представлена структура матрицы гамильтониана (2.1) в базисе волновых функций $\tilde{\Psi}_{n\alpha} = \sum_k C_{0\alpha k} |nk\rangle$, диагонализующих блок \hat{H}_0 , соответствующий основному уровню Ландау (на рис. 2.4 $\lambda = 0.25a_H$). Как видно из графика, выбор коэффициентов $C_{n\alpha k}$ для $n \geq 1$ согласно соотношению (2.15) оставляет блоки \hat{H}_1, \hat{H}_2 практически

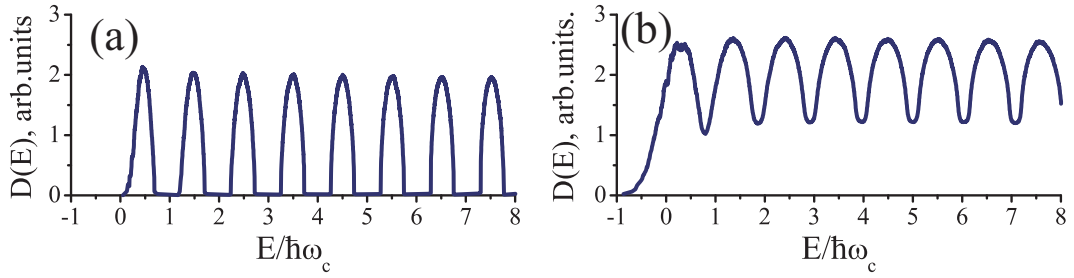


Рис. 2.5: Плотность состояний в случае резкого хаотического потенциала, $\lambda = 0.25a_H$. (a) – разъединенные уровни Ландау, (b) – перекрывающиеся уровни Ландау.

равномерно заполненными. Численная диагонализация матрицы гамильтониана (2.1) в базисе (2.3) позволяет получить набор собственных энергий и вычислить плотность состояний $D(E)$. На рис. 2.5 показан вид рассчитанной плотности состояний для резкого хаотического потенциала, $\lambda = 0.25a_H$, в случае разъединенных уровней Ландау (рис. 2.5(a)) и перекрывающихся уровней Ландау (рис. 2.5(b)). К вопросу о точном виде плотности состояний и зависимости от номера уровня Ландау n мы вернемся ниже.

На рис. 2.6 приведены распределения электронной плотности для основного и двух первых возбужденных уровней Ландау. Как и в случае плавного хаотического потенциала электронные состояния, соответствующие хвостам плотности состояний каждого из уровней Ландау, являются локализованными, в центре уровней Ландау – делокализованными. Однако в отличие от случая плавного хаотического потенциала волновые функции не имеют ”квазиклассического” вида, повторяющего эквипотенциальные линии $V_{imp}(\mathbf{r}) = \text{const}$. Вместо этого волновые функции имеют характерный масштаб изменения, совпадающий с магнитной длиной a_H , во всех направлениях, а не только поперек эквипотенциалей. Естественно, что при этом условия локализации электронных состояний хуже, чем для плавного хаотического потенциала, особенно на возбужденных уровнях Ландау $n \geq 1$. Подробнее на этом вопросе мы остановимся в главе 3.

Для аналитического расчета плотности состояний используем метод моментов, однако в отличие от случая плавного хаотического потенциала учтем зависимость

”внутризонных” матричных элементов (2.5) от номера уровня Ландау n . Так же, как и в случае плавного хаотического потенциала суммирование по квантовым числам k_i в формуле (2.11) приводит к множителю $N_L \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_p}$. В результате имеем для p -го момента плотности состояний:

$$D^{(p)} = \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_p} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} \cdot \dots \cdot V_{\mathbf{q}_p} \exp\left(-\frac{(q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_p^2) a_H^2}{4}\right) \times \\ \times L_n\left(\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) L_n\left(\frac{q_2^2 a_H^2}{2}\right) \cdot \dots \cdot L_n\left(\frac{q_p^2 a_H^2}{2}\right) \exp(i\Phi) \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_p}, \quad (2.22)$$

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{p-1} \text{sign}(i-j) q_{ix} q_{jy} a_H^2. \quad (2.23)$$

Будем считать среднее значение потенциала равным нулю $\langle V_{imp}(\mathbf{r}) \rangle = 0$, сместив начало отсчета энергии, и вычислим ширину уровней Ландау Γ , определенную как квадратный корень второго момента плотности состояний,

$$\Gamma^2 = D^{(2)} = \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q}}|^2 \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 = \\ = \frac{S}{2\pi} \int_0^\infty U_q \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 q dq, \quad (2.24)$$

где $U_q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |V_{q \cos \varphi, q \sin \varphi}|^2 d\varphi$. В случае короткодействующих примесей величина U_q является постоянной вплоть до волновых векторов $q \gg a_H^{-1}$, заменяя ее на константу U , имеем

$$D^{(2)} = N_L U \int_0^\infty \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 d\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) = N_L U = \Gamma^2. \quad (2.25)$$

Заметим, что введенная таким образом ширина уровней Ландау Γ не зависит от номера n . Для расчета высших моментов плотности состояний необходима дополнительная информация о хаотическом потенциале, описываемом в наиболее общем виде весовым функционалом $P[V_{imp}(r)]$. Дальнейший расчет проведем в гауссовской модели хаотического потенциала [72], считая, что высшие корреляторы хаотического потенциала выражаются через $\overline{V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2}}$. В такой модели все нечетные моменты плотности состояний равны нулю (т.е. плотность состояний для каждого

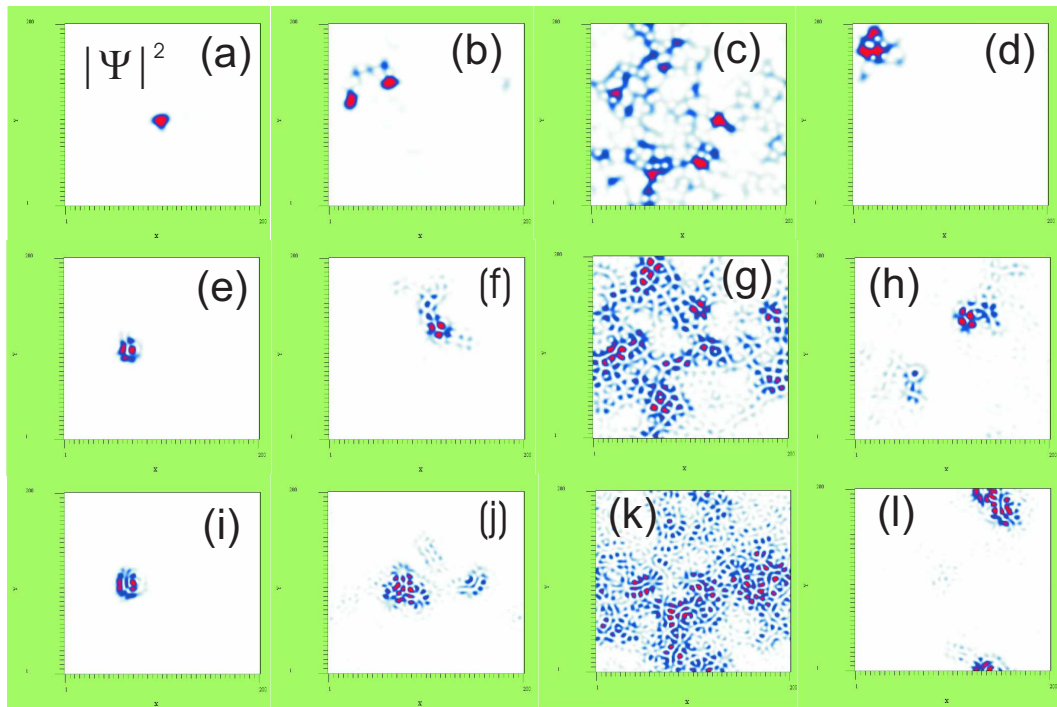


Рис. 2.6: Электронная плотность одночастичных состояний в случае резкого хаотического потенциала, $\lambda = 0.25a_H$. (a-d) – $n = 0$, (e-h) – $n = 1$, (i-l) – $n = 2$.

уровня Ландау имеет строго симметричный вид), а расчет четных моментов сводится к последовательности интегралов гауссовского типа. В частности, для $p = 4$

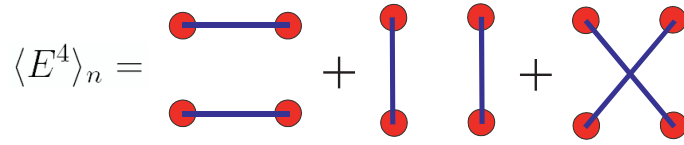


Рис. 2.7: Диаграммы, дающие вклад в $D^{(4)}$.

имеем

$$\begin{aligned}
D^{(4)} &= \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_4} \overline{V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}_3} V_{\mathbf{q}_4}} \exp\left(-\frac{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)a_H^2}{4}\right) \times \\
&\quad \times L_n\left(\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) L_n\left(\frac{q_2^2 a_H^2}{2}\right) L_n\left(\frac{q_3^2 a_H^2}{2}\right) L_n\left(\frac{q_4^2 a_H^2}{2}\right) \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} \times \\
&\quad \times \exp[i(q_{1x}q_{2y} + q_{1x}q_{3y} - q_{2x}q_{1y} + q_{2x}q_{3y} - q_{3x}q_{1y} - q_{3x}q_{2y})a_H^2] = \\
&= \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_4} \left\{ \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} \overline{|V_{\mathbf{q}_1}|^2} \exp\left(-\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 \delta_{\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} \overline{|V_{\mathbf{q}_3}|^2} \times \right. \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{q_3^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q_3^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 + \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4} \overline{|V_{\mathbf{q}_1}|^2} \exp\left(-\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 \times \\
&\quad \times \delta_{\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3} \overline{|V_{\mathbf{q}_2}|^2} \exp\left(-\frac{q_2^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q_2^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 + \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3} \overline{|V_{\mathbf{q}_1}|^2} \exp\left(-\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) \times \\
&\quad \times \left[L_n\left(\frac{q_1^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 \delta_{\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4} \overline{|V_{\mathbf{q}_2}|^2} \exp\left(-\frac{q_2^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q_2^2 a_H^2}{2}\right) \right]^2 \times \\
&\quad \left. \times \exp[2i(q_{1x}q_{2y} - q_{2x}q_{1y})a_H^2] \right\} = \Gamma^4(2 + \chi_n). \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Три слагаемых в формуле (2.26) соответствуют диаграммам, изображенным на рис. 2.7. Вклады, соответствующие первым двум диаграммам на рис. 2.7, факторизуются благодаря отсутствию пересечений примесных линий, в то время как диаграмма 3 требует взятия двойного интеграла гауссовского типа и приводит к слагаемому χ_n в правой части формулы (2.26). Его расчет с использованием производящей функции полиномов Лагерра [73] приводит к ответу

$$\chi_n = \frac{1}{n!^4} \frac{\partial^{4n} P(s, t, u, v)}{\partial^n s \partial^n t \partial^n u \partial^n v} \Bigg|_{s=t=u=v=0}, \quad (2.27)$$

$$P = \frac{1}{2 - s - t - u - v + su + sv + tu + tv - stu - stv - suv - tuv + 2stuv}. \quad (2.28)$$

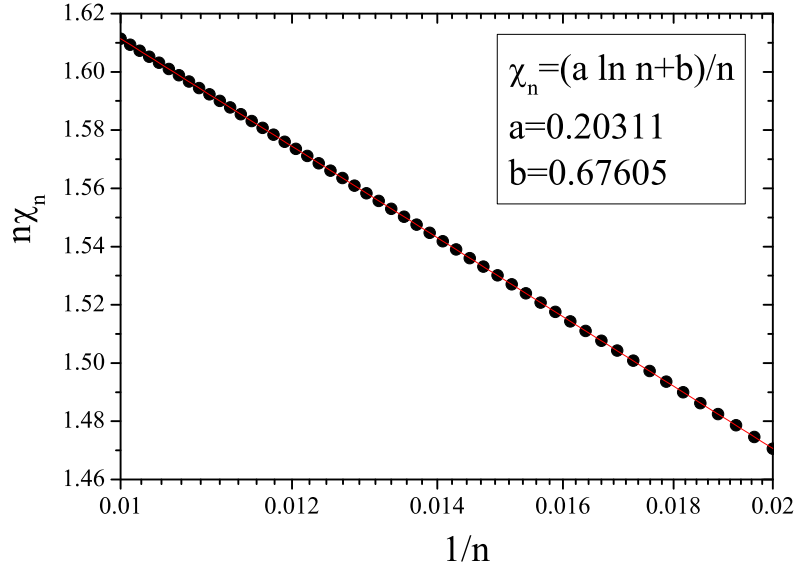


Рис. 2.8: Зависимость функции χ_n от номера уровня Ландау n .

При больших n для расчета функции χ_n воспользуемся асимптотическим видом полиномов Лагерра [73],

$$L_n(x) \sim \frac{\exp(x/2)}{\sqrt{\pi}} (nx)^{-1/4} \cos(2\sqrt{nx} - \pi/4). \quad (2.29)$$

Подставляя (2.29) в выражение для χ_n , получаем формально расходящийся ответ,

$$\chi_n \sim \frac{2}{\pi^2 n} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \cos^4(2\sqrt{x} - \pi/4). \quad (2.30)$$

Поскольку, однако, асимптотика (2.29) неприменима в областях $x \lesssim 1/n$, где $L_n(x) \sim 1 - nx$ и $x \gtrsim n$, где полиномы перестают экспоненциально возрастать как $e^{x/2}$, правильную асимптотику χ_n получим, заменив верхний и нижний пределы интегрирования в формуле (2.30) на n и $1/n$ соответственно, откуда

$$\chi_n \sim A \frac{\ln n}{n} + \frac{B}{n} + \dots, \quad (2.31)$$

где значения $A \approx 0.203$, $B \approx 0.676$ получены из экстраполяции численных данных, представленных на рис. 2.8.

В пределе $n \rightarrow \infty$ все моменты плотности состояний могут быть вычислены аналитически, поскольку диаграммы, содержащие пересечения примесных

линий, обращаются в этом пределе в нуль благодаря присутствию в выражении (2.22) под интегралом произведения быстро осциллирующих полиномов Лагерра L_n на множитель $\exp(i\Phi)$. Количество диаграмм, не содержащих пересечения примесных линий, для $2p$ -го момента плотности состояний равно $p^{-1}C_{p+1}^{2p} = (2p)!/(p!(p+1)!)$, вклад каждой из таких диаграмм равен Γ^{2p} . Подставляя ответ для величины $D^{(p)}$ в формулы (2.8-2.9), получаем следующее выражение для плотности состояний в пределе $n \rightarrow \infty$:

$$D_{\infty s}(\theta) = \frac{1}{2\pi a_H^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{p!(p+1)!} \frac{(-i\theta\Gamma)^{2p}}{(2p)!} = \frac{1}{2\pi a_H^2} \frac{J_1(2\theta\Gamma)}{\theta\Gamma}, \quad (2.32)$$

$$D_{\infty s}(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi a_H^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(2\theta\Gamma)}{\theta\Gamma} \exp(i\mathcal{E}\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{\sqrt{4\Gamma^2 - \mathcal{E}^2}}{4\pi^2 \Gamma^2 a_H^2}. \quad (2.33)$$

Ранее выражение (2.33) было получено в работе [9] принципиально иным методом.

Степень подмешивания уровней Ландау в случае резкого хаотического потенциала может быть вычислена явным образом. Запишем поправку к волновой функции $|\Psi_{n\alpha}\rangle$ в виде $|\delta\Psi_{ns\alpha}\rangle = \sum_{n' \neq n, k} D_{n\alpha n' k'} |n' s k'\rangle$, где коэффициенты $D_{n\alpha n' k'}$ даются выражением (2.14). Будем характеризовать степень подмешивания величиной

$$P_{n\alpha n'} = \sum_{k'} |\langle n' k' | \delta\Psi_{n\alpha} \rangle|^2 = \sum_{k'} |D_{n\alpha n' k'}|^2, \quad (2.34)$$

т.е. квадратом нормы проекции состояния $|\Psi_{n\alpha}\rangle$ на уровень Ландау с номером n' . Используя формулы (2.5) и (2.14), имеем

$$\begin{aligned} P_{n\alpha n'} &= [\hbar\omega_c(n - n')]^{-2} \sum_{k_1 k_2 k_3} C_{n\alpha k_1}^* C_{n\alpha k_2} \sum_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}_1}^* V_{\mathbf{q}_2} \delta_{k_3 - k_1, q_{1x}} \delta_{k_3 - k_2, q_{2x}} \times \\ &\times e^{-i\frac{k_1 + k_3}{2} q_{1y} a_H^2} e^{i\frac{k_2 + k_3}{2} q_{2y} a_H^2} e^{-\frac{(q_1^2 + q_2^2) a_H^2}{4}} \left[\frac{(q_{1x} - iq_{1y})(q_{2x} + iq_{2y}) a_H^2}{2} \right]^{|n - n'|} \times \\ &\times \frac{\min(n_1, n_2)!}{\max(n_1, n_2)!} L_{\min(n, n')}^{|n - n'|} \left(\frac{q_1^2 a_H^2}{2} \right) L_{\min(n, n')}^{|n - n'|} \left(\frac{q_2^2 a_H^2}{2} \right). \quad (2.35) \end{aligned}$$

Выполняя усреднение по беспорядку, переходя от суммирования к интегрированию по волновому вектору \mathbf{q} (подобно выводу формулы (2.25)), и используя

нормировку волновых функций $\sum_k |C_{n\alpha k}|^2 = 1$, получаем следующее выражение для $\overline{P_{n\alpha n'}}$:

$$\begin{aligned} \overline{P_{n\alpha n'}} &= [\hbar\omega_c(n - n')]^{-2} \frac{\min(n, n')!}{\max(n, n')!} \frac{S}{2\pi} \times \\ &\times \int_0^\infty U_q \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n^1\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right)\right]^2 \left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right)^{|n-n'|} q dq = \left(\frac{\Gamma}{(n - n')\hbar\omega_c}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Таким образом, степень подмешивания определяется отношением ширины уровней Ландау Γ к разности энергий соответствующих уровней Ландау, $\hbar\omega_c(n - n')$. В то же время величина $\overline{P_{n\alpha n'}}$ не зависит от номера α одночастичного состояния на n -м уровне Ландау, а значит степень подмешивания не зависит от положения энергетического уровня относительно центра уровня Ландау.

2.5 Модель равномерно делокализованных уровней Ландау

В данном разделе мы рассмотрим статистическую модель, позволяющую описать структуру электронных состояний на уровнях Ландау в случае резкого хаотического потенциала без учета локализации, и проверим адекватность такой модели, рассчитав характерные одночастичные энергии и подмешивание уровней Ландау. Строго говоря, коэффициенты $C_{n\alpha k}$ являются функционалами хаотического потенциала $V_{imp}(\mathbf{r})$, поэтому усреднение случайных величин, зависящих от $C_{n\alpha k}$, требует знания зависимости $C_{n\alpha k}[V_{imp}(\mathbf{r})]$. На практике такая зависимость может быть получена лишь для конкретных реализаций хаотического потенциала $V(\mathbf{r})$ с помощью численной диагонализации гамильтониана (2.1), поэтому проведение аналитических оценок требует нетривиальных модельных предположений. Будем считать коэффициенты $C_{n\alpha k} = M \exp(i\varphi)$ некоррелированными случайными величинами, фаза φ которых равномерно распределена на промежутке $[0, 2\pi]$, а распределение модуля $M \geq 0$ описывается некоторой функцией распределения $P(M)$,

обладающей следующими свойствами:

$$\int_0^\infty F(M)dM = 1 \quad (2.37)$$

$$\int_0^\infty M^2 F(M)dM = \frac{1}{N_L}. \quad (2.38)$$

Хотя $C_{n\alpha k}$ и являются случайными величинами, сумма большого числа слагаемых вида $C_{n_1\alpha_1 k_1} C_{n_2\alpha_2 k_2}$ является детерминированной величиной. В пределе большого образца $S \rightarrow \infty$ из формулы (2.38) следует правильная нормировка волновой функции,

$$\lim_{N_L \rightarrow \infty} F\left(\sum_k |C_{n\alpha k}|^2\right) = \delta\left(\sum_k |C_{n\alpha k}|^2 - 1\right), \quad (2.39)$$

т.е. $\sum_k |C_{n\alpha k}|^2 = 1$. Поскольку мы считаем $V_{\mathbf{q}}$ и $C_{n\alpha k}$ нескоррелированными случайными величинами, усреднение энергии данного электронного состояния по беспорядку в рассматриваемой модели приводит к нулевому ответу для энергии \mathcal{E} , отсчитанной от центра уровня Ландау с номером n :

$$\bar{\mathcal{E}} = \overline{\langle \Psi_{n\alpha}^{(0)} | V_{imp} | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle} = \sum_{\mathbf{q}} \overline{V_{\mathbf{q}}} \langle \Psi_{n\alpha}^{(0)} | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle = 0. \quad (2.40)$$

Типичное отклонение одночастичной энергии от усредненного по беспорядку значения при этом может быть рассчитано следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}^2} &= \overline{|\langle \Psi_{n\alpha}^{(0)} | V_{imp} | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle|^2} = \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \overline{V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2}} \langle \Psi_{n\alpha}^{(0)} | e^{i\mathbf{q}_1\mathbf{r}} | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle \langle \Psi_{n\alpha}^{(0)} | e^{i\mathbf{q}_2\mathbf{r}} | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle = \\ &= \sum_{\mathbf{q}} \overline{|V_{\mathbf{q}}|^2} \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right)\right]^2 \sum_{k_1 k_2} \overline{C_{n\alpha k_1}^* C_{n\alpha k_2} C_{n\alpha k_2 - q_x}^* C_{n\alpha k_1 - q_x}} e^{i(k_1 - k_2)q_y a_H^2} = \\ &= \frac{S}{2\pi N_L} \int_0^\infty U_q \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right)\right]^2 q dq = \frac{\Gamma^2}{N_L}. \quad (2.41) \end{aligned}$$

Таким образом, энергия типичного делокализованного состояния, описываемого в рамках рассматриваемой модели, стремится к нулю при увеличении размера образца $S \rightarrow \infty$. Это связано с пренебрежением двумя факторами: локализацией волновых функций и корреляцией между видом конкретной реализации хаотического потенциала $V_{imp}(\mathbf{r})$ и волновой функции $\Psi_{n\alpha}^{(0)}(\mathbf{r})$. В случае плавного

хаотического потенциала волновые функции следуют эквипотенциалам хаотического потенциала $V_{imp}(\mathbf{r}) = \text{const}$, поэтому локализация волновых функций имеет классический протекательный характер и не зависит от номера уровня Ландау n до тех пор, пока выполнен критерий плавности хаотического потенциала, $\lambda \gg r_c = \sqrt{2n+1}a_H$. В случае резкого хаотического потенциала вид волновой функции не может полностью "подстроиться" под хаотический потенциал $V(\mathbf{r})$, при этом число локализованных состояний на каждом из уровней Ландау существенно зависит от номера n . Состояния на хвостах каждого из уровней Ландау локализованы на масштабе магнитной длины a_H и могут быть описаны волновыми функциями вида

$$\begin{aligned} |\Psi_{ns}^{(loc)}\rangle &= \sum_k C_{n\alpha k} |nsk\rangle = \sum_k \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi}a_H}{L_x}} \exp\left(-\frac{k^2 a_H^2}{2}\right) |nsk\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{L_x a_H}{2\pi^{3/2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left(-\frac{k^2 a_H^2}{2}\right) |nsk\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_H} \exp\left(-\frac{r^2}{4a_H^2} + i\frac{xy}{2a_H^2}\right) L_n\left(\frac{r^2}{2a_H^2}\right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Подставляя соответствующий вид коэффициентов $C_{n\alpha k}$ в формулу (2.41), имеем

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}^2} &= \sum_{\mathbf{q}} \overline{|V_{\mathbf{q}}|^2} \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) \left[L_n\left(\frac{q^2 a_H^2}{2}\right)\right]^2 \cdot \exp\left(-\frac{q^2 a_H^2}{2}\right) = \\ &= \Gamma^2 \int_0^{\infty} e^{-2x} [L_n(x)]^2 dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\Gamma^2}{2} \sim \frac{\Gamma^2}{2\sqrt{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Уменьшение типичной энергии электронного состояния, локализованного на масштабе магнитной длины, с ростом n означает, что доля таких состояний в плотности состояний на высших уровнях Ландау меньше, т.е. условия локализации существенно ухудшаются с ростом n , чего не происходит в случае плавного хаотического потенциала. С другой стороны, поскольку волновые функции имеют правильную нормировку, $\sum_k |C_{n\alpha k}|^2 = 1$, степень подмешивания уровней Ландау в рамках рассматриваемой модели дается формулой (2.36).

Таким образом, модель равномерно делокализованных уровней Ландау может быть использована для расчета подмешивания соседних уровней Ландау в том

случае, если можно пренебречь локализацией носителей. В то же время ее использование для описания плотности состояний недопустимо, поскольку для этого необходим учет локализации электронных состояний и корреляций между видом волновых функций и хаотического потенциала. Как мы увидим в главе 3, использование модели равномерно делокализованных состояний для расчета матричного элемента оператора скорости совместно с выражением (2.33) для плотности состояний приводит к ответу для продольной проводимости, полученному в работе [9] в рамках самосогласованного борновского приближения.

2.6 Спектр носителей в магнитном поле с учетом самосогласованного электростатического потенциала в квантовых ямах с несколькими заполненными уровнями размерного квантования

Традиционно считается, что при анализе кулоновских эффектов в двумерных полупроводниковых системах в сильном магнитном поле можно не учитывать неоднородное распределение электронной плотности вдоль оси квантовой ямы и соответствующий электростатический потенциал, накладывающийся на потенциал квантовой ямы. Выход за рамки такого приближения действительно не приводит к каким-либо качественно новым эффектам, но лишь в том случае, если заполненной остается исключительно нижняя подзона размерного квантования. Как было впервые обнаружено в численных расчетах, проведенных в работах [74],[75], согласованное решение уравнений Шредингера и Пуассона приводит к необычному спектру одночастичных состояний, при котором уровни Ландау, относящиеся к разным уровням размерного квантования, могут иметь одинаковую энергию в некотором диапазоне концентраций носителей/магнитных полей. Такое вырождение энергетических уровней и их аномальный наклон приводят к нарушению периодичности осцилляций Шубникова-де Гааза [76] и де Гааза-ван Альфена [77]. В

данном разделе развита аналитическая теория влияния самосогласованного электростатического потенциала на спектр носителей и выполнено обобщение на случай магнитного поля, наклоненного относительно оси квантовой ямы.

Рассмотрим двумерный электронный газ в квантовой яме с несколькими уровнями размерного квантования в сильном магнитном поле \mathbf{B} , направленном перпендикулярно оси роста z . Спектр электронных состояний e_{mn} и волновые функции носителей ψ_{mnk} в отсутствие взаимодействия между ними определяются решениями одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi_m}{dz^2} + U(z)\psi_m = e_m\psi_m, \quad (2.44)$$

$$\psi_{mnk}(x, y, z) = \psi_m(z)|nk\rangle, \quad (2.45)$$

$$e_{mn} = e_m + \hbar\omega_c(n + 1/2). \quad (2.46)$$

Здесь $U(z)$ – потенциал квантовой ямы, функции $|nk\rangle$ даются формулой (2.3). Для простоты будем считать уровни Ландау вырожденными по спину (т.е. рассматривать нулевой g -фактор), учитывая это при подсчете числа состояний, приходящихся на один уровень Ландау. Для описания эффектов кулоновского взаимодействия мы воспользуемся самосогласованным приближением Томаса-Ферми, введя одномерный электростатический потенциал $\Phi(z)$ (при этом мы считаем электронную плотность равномерно распределенной в плоскости квантовой ямы, что оправдано для систем с не слишком низкой концентрацией носителей. Выход за рамки этого приближения приводит к эффектам, связанным с корреляциями в распределении носителей в плоскости квантовой ямы, таким как дробный квантовый эффект Холла и вигнеровская кристаллизация):

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\Psi_m}{dz^2} + [U(z) + \Phi(z)]\Psi_m = E_m\Psi_m, \quad (2.47)$$

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} [N(z) - n_s \sum_{mn} f_{mn} |\Psi_m(z)|^2], \quad (2.48)$$

$$\Psi_{mnk}(x, y, z) = \Psi_m(z)|nk\rangle, \quad (2.49)$$

$$E_{mn} = E_m + \hbar\omega_c(n + 1/2). \quad (2.50)$$

Здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость, $N(z)$ – распределение концентрации ионизованных примесей, так что $\int N(z)dz = n_s$,

$$f_{mn} = \frac{1}{\nu} \int D_{mn}(E) f_0(E, T, \mu) dE \quad (2.51)$$

– относительные числа заполнения соответствующих уровней Ландау, $\sum f_{mn} = 1$, $D_{mn}(E)$ – плотность состояний, $\int D_{mn}(E) dE = 1$, $\nu = n_s/n_L$ – фактор заполнения вырожденных по спину уровней Ландау, $n_L = \pi^{-1} a_H^{-2}$. Приближенное решение системы уравнений (2.47-2.50) можно найти, учтя поправки к невозмущенным энергиям e_m в первом порядке теории возмущений,

$$E_m = e_m + \mathcal{E}_C J_m - \mathcal{E}_C \sum_{m'n'} f_{m'n'} I_{mm'}, \quad (2.52)$$

$$J_m = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^2(z) dz \int_{-\infty}^z dz' \int_{-\infty}^{z'} dz'' N(z''), \quad (2.53)$$

$$I_{mm'} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^2(z) dz \int_{-\infty}^z dz' \int_{-\infty}^{z'} dz'' \psi_{m'}^2(z''). \quad (2.54)$$

Здесь мы ввели характерную кулоновскую энергию $\mathcal{E}_C = 4\pi e^2 n_s L / \epsilon$, где L – ширина квантовой ямы. Ограничимся далее случаем нулевой температуры $T = 0$, при этом система находится в основном состоянии, которое может быть найдено минимизацией полной энергии

$$E = \sum_{mn} f_{mn} (e_{mn} + \mathcal{E}_C J_m) - \frac{\mathcal{E}_C}{2} \sum_{m,n,m',n'} f_{mn} f_{m'n'} I_{mm'} \quad (2.55)$$

при дополнительных условиях $\sum f_{mn} = 1$, $0 \leq f_{mn} \leq 1/\nu$. В качестве примера рассмотрим наиболее простой и наглядный случай заполнения трех уровней Ландау, два из которых принадлежат основному уровню размерного квантования, $m = 1$, а третий – первому возбужденному уровню размерного квантования, $m = 2$. При этом пренебрежем уширением уровней, что оправдано при условии, что их ширина много меньше циклотронной энергии и энергии размерного квантования. Поскольку при нулевой температуре отличными от нуля или единицы могут быть лишь числа заполнения состояний, энергии которых совпадают с уровнем химического

Потенциал КЯ	I_{11}	$I_{12}=I_{21}$	I_{22}	I
Прямоугольный	0.103	0.135	0.151	0.016
Параболический	0.399	0.598	0.698	0.100

Таблица 2.1: Значения безразмерных электростатических интегралов (2.54) для прямоугольных и параболических квантовых ям.

потенциала μ , $f_{10} = 1/\nu$. Кроме того, фиксирована сумма $f_{10} + f_{11} + f_{20} = 1$, следовательно, независимым является лишь один параметр, в качестве которого удобно выбрать f_{20} . Минимизируя полную энергию (2.55) относительно f_{20} , получаем

$$\hbar\omega_c = e_2 - e_1 + \mathcal{E}_C(J_2 - J_1 + I_{11} - I_{21}) + \mathcal{E}_C f_{20} I, \quad (2.56)$$

где $I = I_{12} + I_{21} - I_{11} - I_{22}$. Заметим, что уравнение (2.56) в точности совпадает с условием равенства энергетических уровней E_{11} и E_{20} . Ширину области магнитных полей, в которой реализуется вырождение E_{11} и E_{20} найдем из ограничения на f_{20} , $0 \leq f_{20} \leq \min(1/\nu, 1 - 1/\nu)$:

$$\frac{\Delta B}{B} = 2I \frac{e^2}{\epsilon L} \frac{2m^* L^2}{\hbar^2} \min(1, \nu - 1). \quad (2.57)$$

В рассматриваемой области магнитных полей энергетические уровни E_1 и E_2 приобретают существенную зависимость от магнитного поля, что приводит к аномальному наклону уровней Ландау,

$$\frac{dE_{20}}{d\hbar\omega_c} = \frac{dE_{11}}{d\hbar\omega_c} = \frac{3}{2} - \mathcal{E}_C(I_{12} - I_{11}) \frac{df_{20}}{d\hbar\omega_c} = \frac{I_{12} + 3I_{21} - I_{11} - 3I_{22}}{2I}. \quad (2.58)$$

При этом расстояние между последовательными уровнями Ландау, принадлежащими одной и той же подзоне размерного квантования, остается равным циклотронной энергии $\hbar\omega_c$, в соответствии с формулой (2.50) и теоремой Кона [78].

В качестве конкретного примера рассмотрим прямоугольную квантовую яму GaAs шириной $L = 200\text{\AA}$, считая барьеры достаточно высокими. Разность энергий между первыми уровнями размерного квантования в такой квантовой яме составляет $e_2 - e_1 \approx 56 - 14 = 42\text{meV}$. Магнитное поле, соответствующее пересечению уровней $(1, 1)$ и $(2, 0)$ находится из условия $\hbar\omega_c = e_2 - e_1$, что дает $B^* \approx 23T$.

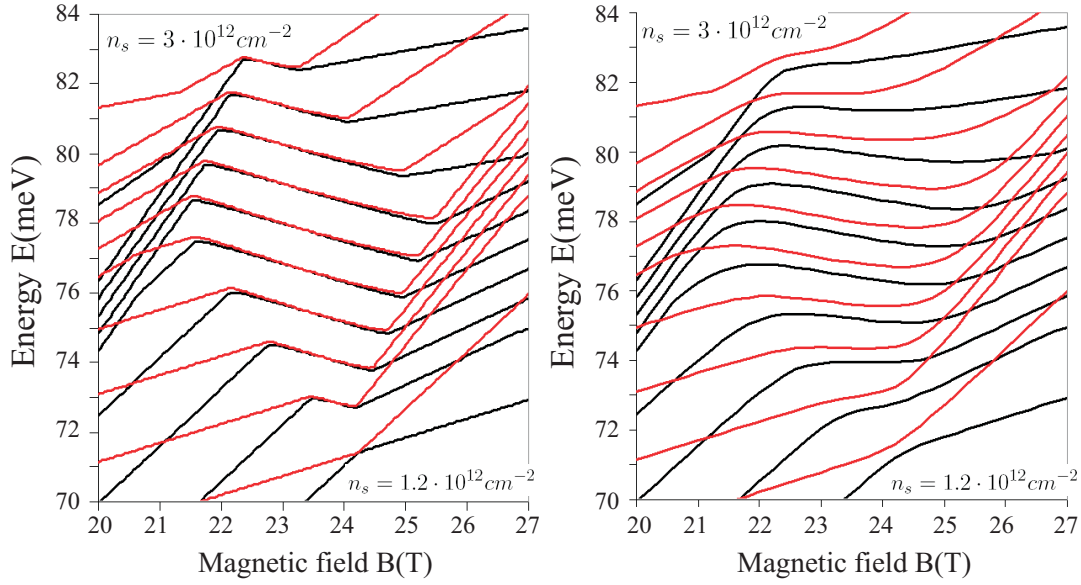


Рис. 2.9: Спектр электронных состояний вблизи точки пересечения первого возбужденного уровня Ландау, относящегося к основной подзоне размерного квантования, и основного уровня Ландау, относящегося к первой возбужденной подзоне размерного квантования, для различных концентраций носителей. (a) – поперечное магнитное поле, $\alpha = 0^\circ$, (b) – наклонное магнитное поле, $\alpha = 2^\circ$.

При концентрации носителей $n_s = 2 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-2}$ система находится в состоянии с фактором заполнения $\nu \approx 1.8$ (в расчете на вырожденные по спину уровни Ландау). Значения электростатических интегралов (2.54) для случаев прямоугольной и параболической квантовых ям приведены в таблице 1. Подставляя численные значения параметров в формулу (2.57), получаем для ширины области, в которой происходит вырождение уровней $\Delta B/B^* \approx 0.13$, что соответствует промежутку магнитных полей приблизительно в $3T$. При этом наклон уровней Ландау в аномальной области дается формулой (2.58),

$$\frac{dE_{20}}{d\hbar\omega_c} = \frac{dE_{11}}{d\hbar\omega_c} = \frac{I_{12} + 3I_{21} - I_{11} - 3I_{22}}{2I} = -0.5. \quad (2.59)$$

Таким образом, имеются достаточно широкие области концентраций/магнитных полей, в которых уровни Ландау, принадлежащие разным уровням размерного квантования, оказываются вырожденными и имеют отрицательный наклон. Данный вывод подтверждают и результаты численного решения

согласованной системы уравнений Шредингера и Пуассона (2.47-2.48), приведенные на рис. 2.9(a). Аналогичным образом численный расчет спектра электронных состояний с учетом самосогласованного электростатического потенциала может быть выполнен в случае наклонного магнитного поля, однако поскольку в этом случае переменные не разделяются, необходимо численное решение двумерного уравнения Шредингера. Результаты такого расчета для тех же параметров, но слегка наклоненного магнитного поля ($\alpha = 2^\circ$) приведены на рис. 2.9(b). Как и в случае строго перпендикулярного магнитного поля, вид спектра носителей с учетом самосогласованного электростатического потенциала существенно отличается от рассчитанного без его учета. Поскольку по соображениям симметрии ветви зависимости $E(B)$, соответствующие состояниям $(1, 1)$ и $(2, 0)$ не могут пересекаться, вблизи от точки их возможного пересечения возникает щель, величина которой быстро нарастает по мере смещения в область больших или меньших магнитных полей. При учете же самосогласованного электростатического потенциала величина щели остается практически постоянной в том же диапазоне магнитных полей, ширина которого описывается формулой (2.57).

Как показывает построенная аналитическая теория, кулоновское взаимодействие носителей может существенно изменить спектр одноэлектронных состояний, а вместе с ним – и вид осцилляций Шубникова-де Гааза и де Гааза-ван Альфена. Согласно проведенным оценкам, свойства двумерного электронного газа в квантовых ямах с высокой концентрацией носителей должны резко меняться в некоторой, достаточно широкой области магнитных полей/концентраций вблизи точек пересечения уровней Ландау, относящихся к разным уровням размерного квантования. Причем такие особенности должны наблюдаться не только в поперечной, но и в наклонной ориентации магнитного поля. Этот случай особенно интересен, поскольку варьируя угол наклона магнитного поля можно управлять величиной энергетической щели между уровнями Ландау, при этом ее величина не должна меняться в некотором диапазоне концентраций/магнитных полей.

2.7 Выводы

- Аналитически и численно изучен спектр носителей заряда и структура двумерных электронных состояний в сильном магнитном поле в рамках модели невзаимодействующих носителей, находящихся в хаотическом потенциале примесей и дефектов, амплитуда которого значительно меньше циклотронной энергии. Предложен подход к вычислению плотности состояний, основанный на методе моментов.
- Показано, что в случае плавного хаотического потенциала имеется сильная корреляция в структуре последовательных уровней Ландау, которая связана с квазиклассическим характером движения в плавном потенциале и может быть использована в аналитических расчетах. В случае резкого хаотического потенциала такого рода корреляции отсутствуют.
- Предложена модель равномерно делокализованных уровней Ландау, в рамках которой коэффициенты разложения волновых функций, отвечающих движению в магнитном поле и хаотическом потенциале, по базисным волновым функциям считаются случайными величинами, некоррелированными с конкретной реализацией хаотического потенциала. Показано, что в рамках такой модели получается правильный ответ для степени подмешивания уровней Ландау, но не для плотности состояний.
- Изучено влияние самосогласованного электростатического потенциала на спектр двумерных электронных состояний в сильном магнитном поле при условии заполнения более чем одной подзоны размерного квантования. Показано, что в случае строго поперечной ориентации имеются диапазоны концентраций/магнитных полей, в которых реализуется вырождение двух или более уровней Ландау, относящихся к разным подзонам размерного квантования. Наклон магнитного поля относительно оси квантовой ямы приводит

к возникновению энергетической щели между этими уровнями, однако величина щели остается практически постоянной в том же диапазоне параметров.

Глава 3

Целочисленный квантовый эффект Холла в резком и плавном хаотическом потенциале

3.1 Формулы линейного отклика для расчета компонент тензора проводимости в системе конечных размеров

Предметом рассмотрения в данной главе являются особенности целочисленного квантового эффекта Холла, связанные с видом примесного потенциала. Хорошо известно, что квантование холловского сопротивления, открытое в 1980г. Клаусом фон Клитцингом [4], связано с локализацией носителей в хаотическом потенциале, формируемом случайно расположенными примесями и дефектами. При этом электрон-электронным и электрон-фононным взаимодействием в первом приближении можно пренебречь. Тем не менее, даже в этом случае задача расчета компонент тензора проводимости двумерной системы в магнитном поле при нулевой температуре $T = 0$ является достаточно сложной, поскольку для этого необходимо знание спектра носителей и вида одноэлектронных состояний, рассмотренных в главе 2. Последние существенно зависят от вида хаотического потенциала, что должно отражаться и на виде зависимостей продольной и холловской проводимостей от фактора заполнения.

Поскольку знание вида двумерных электронных состояний в магнитном поле требует численной диагонализации гамильтониана (2.1), для расчета компонент тензора проводимости необходимы формулы линейного отклика, адаптированные к системе конечных размеров. Выполним вывод соответствующих формул в формализме матрицы плотности, предполагая известными точные собственные энергии и волновые функции невозмущенного гамильтониана

$$\hat{H}_0 \Psi_i(\mathbf{r}) = \left[\frac{(\hat{\mathbf{p}} - e/c\mathbf{A})^2}{2m^*} + V_{imp}(\mathbf{r}) \right] \Psi_i(\mathbf{r}) = E_i \Psi_i(\mathbf{r}), \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Для простоты мы опускаем спиновое квантовое число, поскольку в случае хорошо разделенных уровней Ландау, когда спиновое расщепление превышает ширину уровней Ландау, и малого спин-орбитального взаимодействия уровни Ландау с противоположными направлениями спина могут быть рассмотрены независимо. В присутствии слабого переменного электрического поля, направленного вдоль оси x , гамильтониан носителей приобретает зависящую от времени добавку,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' = \hat{H}_0 + eE_x x e^{-i(\omega - i0)t}. \quad (3.2)$$

Одночастичная матрица плотности в линейном по приложенному электрическому полю приближении имеет вид $\rho = \rho_0 + \rho_1 e^{-i(\omega - i0)t}$, причем неравновесная добавка удовлетворяет линеаризованному квантовому уравнению Лиувилля

$$\hbar(\omega - i0)\rho_1 - [\hat{H}_0, \rho_1] = [eE_x x, \rho_0]. \quad (3.3)$$

Решая уравнение (3.3) в собственном базисе гамильтониана (3.1), имеем

$$(\rho_1)_{fi} = \frac{eE_x x_{fi} [f_0(E_i) - f_0(E_f)]}{\hbar(\omega - i0) + E_n - E_m}, \quad (3.4)$$

где $f_0(E)$ – равновесная (фермиевская) одночастичная функция распределения. Подставляя выражение (3.4) в формулу для плотности электрического тока $\mathbf{j} = \text{Tr}(\hat{\mathbf{j}}\rho)$, и используя связь между матричным элементом координаты и скорости

$$x_{fi} = \frac{\hbar(v_x)_{fi}}{i(E_f - E_i)}, \quad (3.5)$$

получаем для продольной и холловской проводимости следующие формулы:

$$\sigma_{xy} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma_{xy}(\omega) = \frac{ie^2\hbar}{S} \sum_{i,f} \frac{[f_0(E_i) - f_0(E_f)][(v_x)_{if}(v_y)_{fi} - (v_x)_{fi}(v_y)_{if}]}{(E_f - E_i)^2}, \quad (3.6)$$

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \frac{\pi e^2\hbar}{S} \sum_{i,f} \frac{f_0(E_i) - f_0(E_f)}{E_f - E_i} |(v_x)_{if}|^2 \delta(E_i - E_f + \hbar\omega). \quad (3.7)$$

Непосредственный расчет продольной проводимости по формуле (3.7) в статическом пределе в случае системы конечных размеров, характеризуемой дискретным спектром одноэлектронных состояний, приводит к некорректному (нулевому) ответу. Для устранения этого недостатка учтем, что реально прикладываемое в эксперименте электрическое поле представляет собой волновой пакет с неким разбросом частот Ω , значительно превышающим типичное расстояние между одноэлектронными уровнями. Поэтому корректное выражение для статической продольной проводимости имеет вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(\Omega)} = \int_0^\infty g_\Omega(\omega) \text{Re } \sigma_{xx}(\omega) d\omega, \quad (3.8)$$

где функция $g(\omega)$ характеризует спектральное распределение гармоник волнового пакета и удовлетворяет условию $\int_0^\infty g_\Omega(\omega) d\omega = 1$, кроме того, выполнены условия

$$\delta E \ll \hbar\Omega \ll \Gamma, \hbar\omega_c, E_F, \quad (3.9)$$

где δE – характерное расстояние между одноэлектронными энергиями, Γ – ширина уровней Ландау. Подставляя (3.7) в формулу (3.8), получаем следующее выражение для продольной проводимости в статическом пределе:

$$\sigma_{xx} = \pi e^2 \hbar S D^2(E_F) \langle |v_x|^2 \rangle, \quad (3.10)$$

где

$$D^2(E_F) = \frac{1}{S^2} \sum_{E_i < E_F, E_f > E_F} \frac{g_\Omega(E_f - E_i)}{E_f - E_i} \quad (3.11)$$

квадрат плотности состояний на уровне Ферми,

$$\langle |v_x|^2 \rangle = \frac{\sum_{E_i < E_F, E_f > E_F} \frac{g_\Omega(E_f - E_i)}{E_f - E_i} |(v_x)_{if}|^2}{\sum_{E_i < E_F, E_f > E_F} \frac{g_\Omega(E_f - E_i)}{E_f - E_i}} \quad (3.12)$$

усредненный по поверхности Ферми квадрат матричного элемента оператора скорости \hat{v}_x . Действительно, усредняя выражение (3.11) по беспорядку, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{S^2} \overline{\sum_{E_i < E_F, E_f > E_F} \frac{g_\Omega(E_f - E_i)}{E_f - E_i}} &= \int_0^\infty \frac{g_\Omega(E_f - E_i) d(E_f - E_i)}{E_f - E_i} \int_{E_F - \frac{E_f - E_i}{2}}^{E_F + \frac{E_f - E_i}{2}} d\left(\frac{E_f + E_i}{2}\right) \times \\ &\times \frac{1}{S^2} \overline{\sum_{i', f'} \delta(E_i - E_{i'}) \delta(E_f - E_{f'})} = D^2(E_F) \int_0^\infty g_\Omega(\omega) d\omega = D^2(E_F). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Самоусредняемость выражений (3.11-3.12) и замена энергий порядка $E_F \pm \hbar\Omega$ на E_F оправданы выполнением условий (3.9).

Помимо практической значимости при проведении конкретных расчетов, формула (3.10) дает наглядный физический смысл статической продольной проводимости как произведения квадрата плотности состояний, $D^2(E_F)$, на усредненный по поверхности Ферми квадрат матричного элемента оператора скорости, $\langle |v_x|^2 \rangle$. Как показано в главе 2, плотность состояний определяется уширением каждого из уровней Ландау за счет хаотического потенциала примесей, и для ее расчета в главном порядке по $V/\hbar\omega_c$ не требуется учитывать подмешивание уровней Ландау. В противоположность плотности состояний матричный элемент оператора скорости отличен от нуля лишь при учете подмешивания соседних уровней Ландау, описываемого формулой (2.13). Ниже формулы линейного отклика (3.6), (3.10) будут использоваться как для численных, так и аналитических расчетов компонент тензора проводимости.

3.2 Влияние асимметричности хаотического потенциала на вид зависимости холловской проводимости от фактора заполнения

В большинстве работ, посвященных проблеме транспорта носителей в двумерных гетероструктурах, в том числе при наличии сильного магнитного поля, используется наиболее простая, так называемая гауссовская модель беспорядка. В рамках этой модели считается, что различные гармоники хаотического потенциала

распределены независимо, по гауссовскому закону, подразумевающему строгую симметричность хаотического потенциала $V_{imp}(\mathbf{r})$ относительно среднего значения $\langle V_{imp}(\mathbf{r}) \rangle$, которое можно обнулить сдвигом начала отсчета энергии. Однако в реальных квантовых ямах предположение о симметричности хаотического потенциала выполнено не всегда. Поскольку гетероструктуры обычно характеризуются одним типом примесей/дефектов, то в случае, если потенциалы отдельных примесей перекрываются слабо, результирующий хаотический потенциал является существенно асимметричным (притягивающим или отталкивающим в зависимости от типа примесей). Ниже мы проанализируем, как асимметричность хаотического потенциала сказывается на виде зависимостей холловской проводимости от фактора заполнения.

Прежде всего рассмотрим случай отдельной примеси, характеризующейся положительным (отталкивающим) или отрицательным (притягивающим) потенциалом радиуса d ,

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \exp\left(-\frac{r^2}{d^2}\right). \quad (3.14)$$

Выбор модельного потенциала отдельной примеси в виде гауссиана позволяет произвести аналитический расчет матричных элементов гамильтониана (3.1), поскольку фурье-образ потенциала также имеет гауссовский вид, $V(\mathbf{q}) \propto \exp(-q^2 d^2/4)$, а матричные элементы $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ на базисных волновых функций (2.3) даются выражением (2.5). Выполняя численную диагонализацию гамильтониана (3.1), и подставляя полученные собственные энергии и волновые функции в формулу (3.6), мы получаем вид зависимостей σ_{xy} от фактора заполнения ν . Результаты расчетов приведены на рис. 3.1(a) для дальнедействующей примеси(ей) ($d = 2a_H$) и рис. 3.1(b) для короткодействующей примеси(ей) ($d = 0.5a_H$). Прежде всего заметим, что в случае дальнедействующей примеси(ей) картина квантования холловской проводимости имеет более выраженный характер, при этом переходы между плато являются практически вертикальными. В случае отталкивающей примеси ($V_0 > 0$) переходы происходят справа от целочисленных факторов запол-

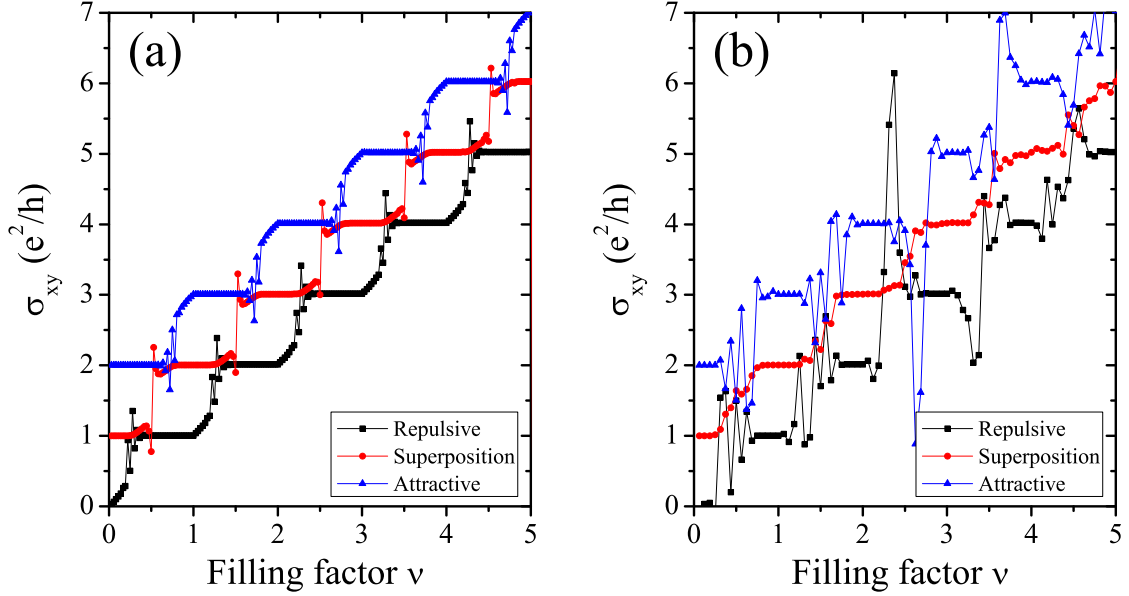


Рис. 3.1: Зависимости холловской проводимости σ_{xy} от фактора заполнения для образца с размерами $L_x = L_y = 12a_H$, содержащего одну притягивающую или отталкивающую примесь и две разноименные симметрично расположенные примеси. Радиус потенциала примеси: (a) – $d = 2a_H$, (b) – $d = 0.5a_H$. Для удобства последовательные кривые смещены по вертикали.

нения, т.е. первое плато целочисленного квантового эффекта Холла лежит левее $\nu = 1$. Напротив, в случае притягивающего потенциала ($V_0 < 0$) переходы происходят левее целочисленных факторов заполнения, т.е. первое плато целочисленного квантового эффекта Холла лежит правее $\nu = 1$. Если присутствует одна притягивающая и одна отталкивающая примесь, то результирующий потенциал является симметричным, и в этом случае переходы между плато происходят при полуцелых факторах заполнения. В случае короткодействующих примесей, $d < a_H$, картина качественно отличается – плато имеют меньшую ширину, поведение холловской проводимости между плато испытывает значительные флуктуации. Однако и в этом случае факторы заполнения, соответствующие переходам между соседними плато, лежат в случае притягивающего потенциала левее, чем в случае отталкивающего.

Подобная картина сохраняется и для большого числа случайно расположенных

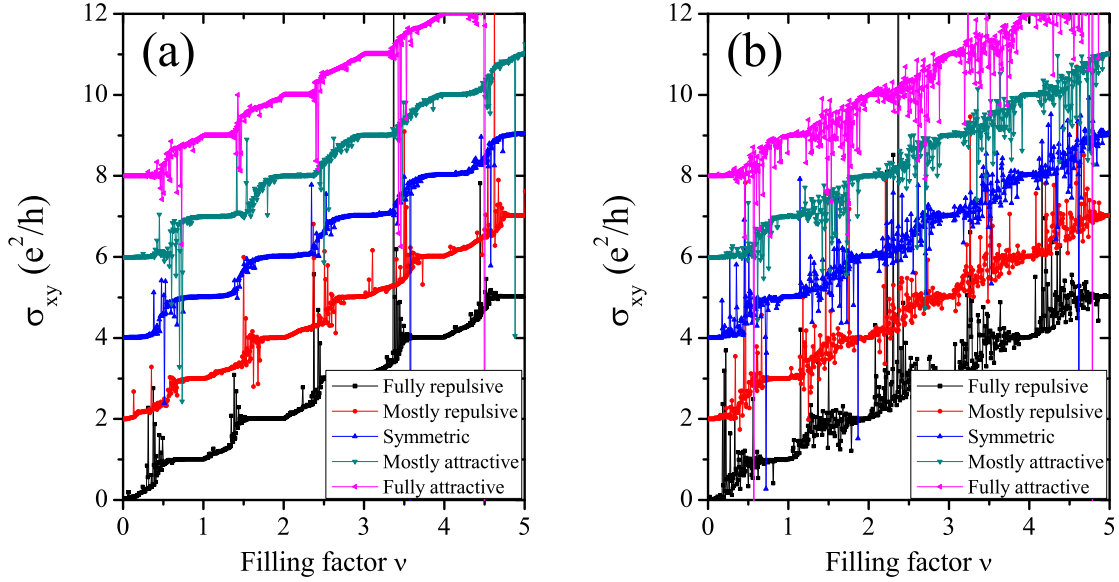


Рис. 3.2: Зависимости холловской проводимости σ_{xy} от фактора заполнения для образца с размерами $L_x = L_y = 30a_H$, содержащего различную долю случайно расположенных притягивающих и отталкивающих примесей (0, 0.3, 0.5, 0.7 и 1). Радиус потенциала примеси: (a) – $d = 2a_H$, (b) – $d = 0.5a_H$. Для удобства последовательные кривые смещены по вертикали.

примесей, когда можно ввести понятие хаотического потенциала. В зависимости от соотношения числа притягивающих и отталкивающих примесей, факторы заполнения, соответствующие переходам между соседними плато, смещены вправо или влево относительно полуцелых факторов заполнения $\nu = n + 1/2$. На рис. 3.2 приведены результаты расчетов зависимости холловской проводимости от фактора заполнения для разных долей притягивающих и отталкивающих примесей, для дальнедействующих примесей (рис. 3.2(a), $d = 2a_H$) и короткодействующих примесей (рис. 3.2(b), $d = 0.5a_H$). Как и в случае одной примеси, уменьшение радиуса потенциала d по сравнению с магнитной длиной a_H приводит к значительному ухудшению качества квантово-холловских плато. При этом симметричная форма хаотического потенциала является более предпочтительной для наблюдения целочисленного квантового эффекта Холла, как видно из рис. 3.2(a). Увеличение числа притягивающих примесей по сравнению с отталкивающими приводит

к уменьшению ширин плато и сдвигу факторов заполнения, соответствующих переходам между соседними плато, влево от полуцелых значений, увеличение числа отталкивающих примесей – к сдвигу вправо. Такое же поведение формы квантово-холловских кривых при изменении степени симметричности хаотического потенциала проявляется и в случае короткодействующих примесей, как видно из рис. 3.2(b).

Таким образом, асимметрия хаотического потенциала приводит к двум эффектам: уменьшению ширин плато по сравнению со случаем симметричного хаотического потенциала и сдвигу факторов заполнения, соответствующих переходам между плато, в сторону целых значений. При этом направление сдвига определяется тем, какой тип примесей преобладает. Как показывают эксперименты, на практике критические факторы заполнения могут существенно отличаться от полуцелых значений (0.56, 0.67, 0.61, 0.58, 0.65, 0.62, 0.61, 0.55 [38], 0.55 [71], 0.75 [79], 0.53, 0.58 [70]), что указывает на важность учета асимметрии хаотического потенциала при расчете квантово-холловских кривых. Таким образом, экспериментальные значения факторов заполнения, соответствующих переходам между последовательными плато целочисленного квантового эффекта Холла, могут быть использованы для определения степени асимметрии присутствующего в гетероструктурах хаотического потенциала.

3.3 Анализ точности квантования холловской проводимости в образцах конечных размеров

Как показывают прецизионные эксперименты [22], холловское сопротивление ρ_{xy} и холловская проводимость σ_{xy} на плато отличаются от целых значений (в единицах h/e^2 и e^2/h соответственно) на величину, меньшую 10^{-9} . Такая точность является беспрецедентной для физики полупроводников, и любое ее объяснение должно учитывать большое число различных факторов, таких как конечная температура и размеры образца, наличие электрон-электронного и электрон-фононного взаи-

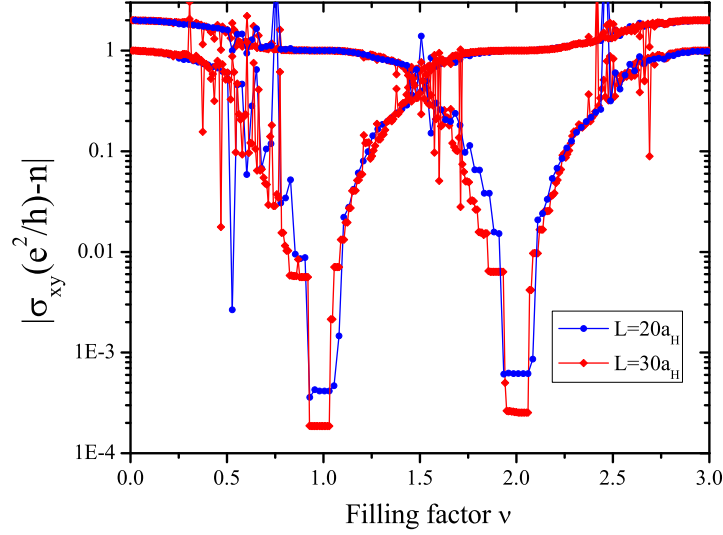


Рис. 3.3: Результаты расчета холловской проводимости как функции фактора заполнения ν для образцов с размерами $L = 20a_H$ и $L = 30a_H$.

модействий, особенности зонной структуры полупроводникового образца, влияние контактов и т.д. Строгое доказательство квантования σ_{xy} разработано лишь в условиях нулевой температуры $T = 0$ и годится лишь в случае, если последовательные уровни Ландау разделены энергетической щелью [24]. Ключевым приемом, позволяющим переписать формулу (3.6) для холловской проводимости в виде топологического инварианта, является усреднение по всевозможным (периодическим, антипериодическим и т.д.) граничным условиям. Хотя фаза, приобретаемая волновой функцией при обходе двумерного полупроводникового образца, и не является обычно параметром, которой возможно измерить экспериментально, с теоретической точки зрения она должна быть фиксирована. Поэтому усреднение по граничным условиям, предложенное в работе [24], подразумевает усреднение по ансамблю образцов, не предполагаемое экспериментом. В частности, в области достаточно низких температур проводимость образцов малых (“мезоскопических”) размеров является уникальной характеристикой образца, отражающей распределение имеющихся в структуре примесей и дефектов [80]. В данном разделе мы проанализируем, в какой мере учет конечных размеров образца может сказаться

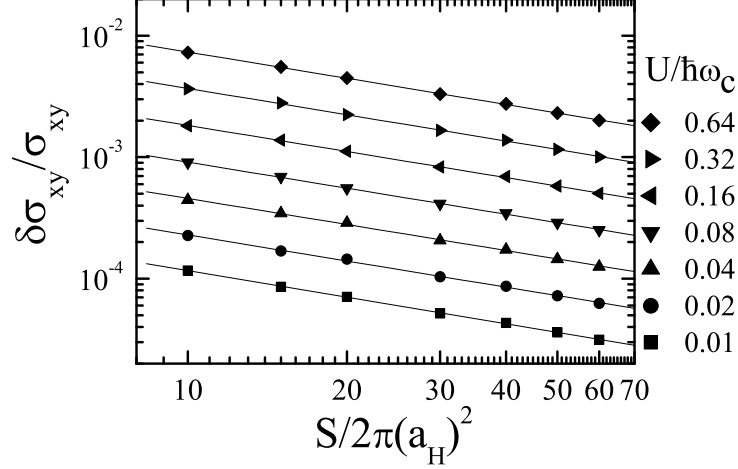


Рис. 3.4: Среднеквадратичное отклонение холловской проводимости в центре первого плато от e^2/h как функция отношения площади образца S к квадрату магнитной длины a_H^2 . Эквидистантные в двойном логарифмическом масштабе прямые отвечают удвоению амплитуды хаотического потенциала (снизу вверх).

на точности квантования.

Рассмотрим случай симметричного хаотического потенциала и проанализируем точность квантования. Для этого удобно построить кривые зависимостей холловского сопротивления от фактора заполнения в логарифмическом масштабе, отсчитывая σ_{xy} от квантованных значений ne^2/h , как это сделано на рис.3.3. Такая процедура позволяет однозначно определить, каково отличие рассчитанного значения σ_{xy} на плато от целого числа n в зависимости от размера образца и отношения амплитуды хаотического потенциала V к циклотронной энергии $\hbar\omega_c$. Результаты расчетов для различных отношений $V/\hbar\omega_c$ в зависимости от безразмерной площади образца $S/(2\pi a_H^2)$ показаны на рис. 3.4. Данные численных расчетов хорошо описываются следующим законом:

$$\frac{\delta\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}} \approx \frac{V}{\hbar\omega_c} \left(\frac{a_H^2}{S} \right)^b, \quad (3.15)$$

где $b \approx 0.7$. Поскольку в сильных магнитных полях магнитная длина a_H имеет порядок 10^{-6} см, в случае образцов больших (макроскопических) размеров поправ-

ка, описываемая формулой (3.15), составляет $\delta\sigma_{xy}/\sigma_{xy} \sim 10^{-8}$, что согласуется с экспериментальными данными [22], указывающими на очень высокую точность квантования. Кроме того, в случае макроскопических образцов обязателен учет неупругих процессов, поскольку размер образца заведомо превышает характерные неупругие длины. Иначе обстоит дело в случае мезоскопических образцов, обладающих размерами порядка 10^{-4} см, т.к. при достаточно низких температурах длина неупругого рассеяния в таких структурах может превышать размер образца и становится оправданным прямое сравнение экспериментальных данных с данными численных расчетов, проводимых при $T = 0$. Как показывает оценка по формуле (3.15), относительное отклонение холловского сопротивления на плато от квантованного значения в этом случае может составлять $10^{-3} - 10^{-2}$, т.е. должна быть заметна в эксперименте. Как показывает эксперимент [81], существенные отклонения холловского сопротивления на плато от квантованного значения в мезоскопических образцах действительно имеют место.

3.4 Зависимость продольной и холловской проводимостей от корреляционной длины хаотического потенциала

Двумерные полупроводниковые гетероструктуры, в которых наблюдается целочисленный квантовый эффект Холла, можно разделить на две принципиальных класса: в модуляционно-легированных квантовых ямах на основе чистого GaAs в качестве материала квантовой ямы обычно реализуется случай плавного хаотического потенциала, когда корреляционная длина $\lambda \gg r_c = \sqrt{2n+1}a_H$. Напротив, в случае квантовых ям, материалом которых является твердый раствор, например $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, характерным является случай резкого хаотического потенциала, когда корреляционная длина $\lambda \ll a_H$. В данном разделе мы изучим вопрос о влиянии вида хаотического потенциала на кривые зависимостей продольной и холловской проводимостей от фактора заполнения.

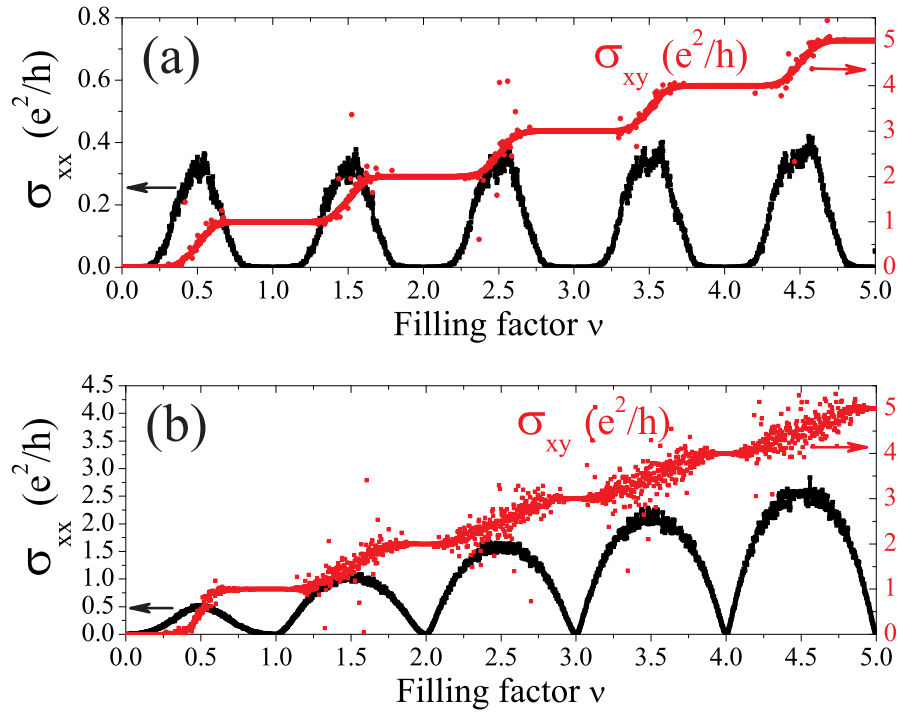


Рис. 3.5: Зависимости продольной и холловской проводимости от фактора заполнения ν для (a) – плавного, $\lambda = 4a_H$, (b) – резкого, $\lambda = 0.25a_H$, хаотического потенциала.

При расчете компонент тензора проводимости в данном разделе воспользуемся упрощенной моделью хаотического потенциала, предполагая, что отдельные примеси сильно перекрываются, и фурье-компоненты хаотического потенциала $V_{\mathbf{q}}$ можно считать независимо распределенными. Воспользуемся следующей простой моделью, дающей однозначное количественное определение корреляционной длины хаотического потенциала λ :

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{|\mathbf{q}| \leq q_0} V_0 e^{i\varphi_{\mathbf{q}}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (3.16)$$

где случайные фазы $\varphi_{\mathbf{q}}$ равномерно распределены на отрезке $[0, 2\pi]$, $q_0 = 1/\lambda$ – обратная корреляционная длина хаотического потенциала. Поскольку в рамках такой модели хаотический потенциал является заведомо симметричным, то переходы между соседними плато в точности соответствуют полуцелым факторам заполнения. Результаты конкретных расчетов продольной и холловской проводи-

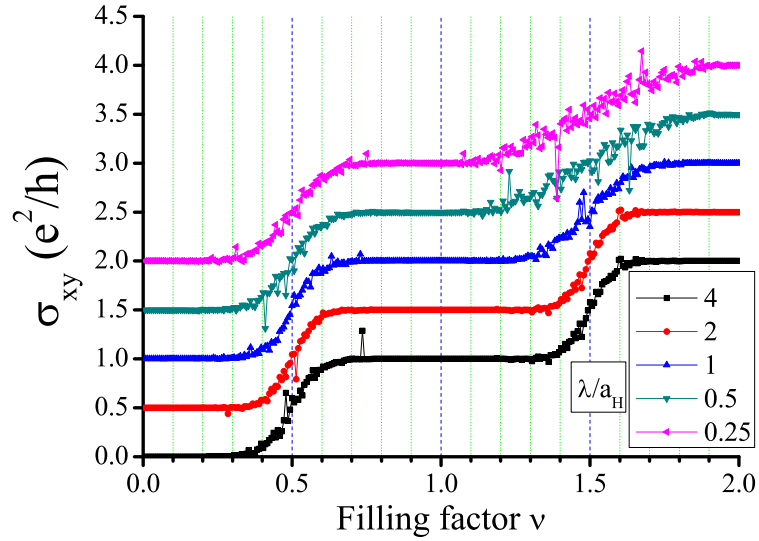


Рис. 3.6: Зависимости холловской проводимости σ_{xy} от фактора заполнения для различных отношений корреляционной длины хаотического потенциала λ к магнитной длине a_H . Для удобства последовательные кривые смещены по вертикали.

мости, выполненные для образца с линейными размерами $L_x = L_y = 60a_H$, и затем усредненные по 200 реализациям хаотического потенциала, представлены на рис. 3.5(a) для плавного хаотического потенциала, $\lambda = 4a_H$, и рис. 3.5(b) для резкого хаотического потенциала, $\lambda = 0.25a_H$. В случае плавного хаотического потенциала все 4 показанных на рис. 3.5(a) плато холловской проводимости σ_{xy} ярко выражены, имеют практически максимальную ширину. Пиковые величины продольной проводимости $\sigma_{xx}^{(n)}$ не зависят от номера уровня Ландау n , составляя около $0.35e^2/h$ при $\lambda = 4a_H$ и уменьшаясь с ростом λ . Слабая зависимость пиков продольной проводимости от номера уровня Ландау и величины пиков находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными работы [45]. В случае резкого хаотического потенциала лишь первое плато холловской проводимости σ_{xy} на рис. 3.5(b) является ярко выраженным, ширина же высших плато быстро уменьшается с ростом номера уровня Ландау n , что свидетельствует о сильном подавлении локализации на возбужденных уровнях Ландау $n \geq 1$. Зависимость пиков продольной проводимости от номера уровня Ландау n будет детально обсуждена в разделе 3.5. На рис. 3.6 представлены начальные участки зависимостей холловской

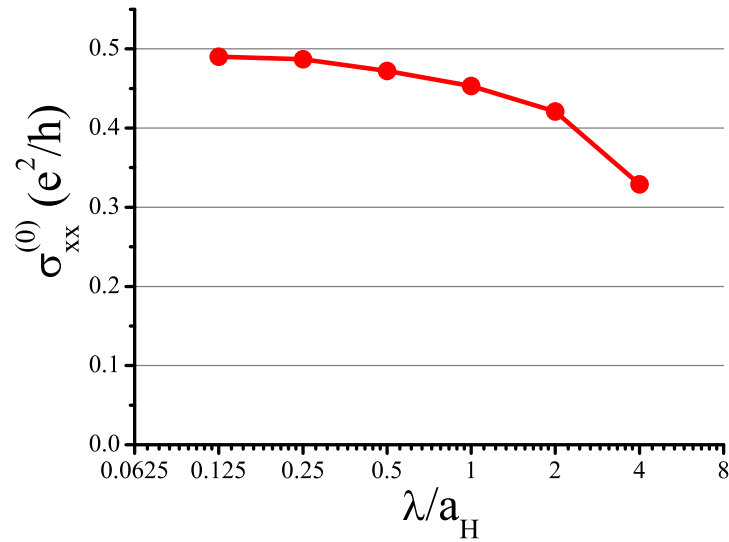


Рис. 3.7: Зависимость величины первого пика $\sigma_{xx}^{(0)}$ от отношения корреляционной длины хаотического потенциала λ к магнитной длине a_H .

проводимости от фактора заполнения для различных отношений корреляционной длины хаотического потенциала λ к магнитной длине a_H . Как видно из рис. 3.6, уменьшение параметра λ/a_H приводит к драматическому сужению плато, отвечающему первому возбужденному уровню Ландау $n = 1$, в то время как плато, отвечающему основному уровню Ландау $n = 0$, является в этом отношении более устойчивым. Это означает, что локализация электронных состояний на высоких уровнях Ландау $n \geq 1$, а вместе с этим и наблюдение целочисленного квантового эффекта Холла, может иметь место лишь в случае плавного хаотического потенциала, по крайней мере при экспериментально достижимых температурах. На рис. 3.7 представлена зависимость величины первого пика продольной проводимости $\sigma_{xx}^{(0)}$ от отношения λ/a_H . Как видно из рис. 3.7, значение $\sigma_{xx}^{(0)}$ насыщается в области малых λ/a_H , в то время как в области больших λ/a_H , т.е. плавных потенциалов, имеется заметное падение.

Таким образом, экспериментальные данные по зависимостям компонент тензора проводимости от магнитного поля и концентрации носителей могут быть использованы для определения вида хаотического потенциала примесей и дефек-

тов. В частности, в двумерных структурах с резким хаотическим потенциалом ($\lambda \ll a_H$) выраженная картина целочисленного квантового эффекта Холла имеет место лишь для основного уровня Ландау, а пики $\sigma_{xx}^{(n)}$ растут с номером уровня Ландау n . В структурах с плавным хаотическим потенциалом ($\lambda \gg r_c$) выраженная картина целочисленного квантового эффекта Холла и независимость пиков $\sigma_{xx}^{(n)}$ от номера уровня Ландау n сохраняется вплоть до больших n .

3.5 Пиковые величины продольной проводимости для резкого и плавного хаотических потенциалов

Данные численных расчетов, представленные на рис. 3.5 свидетельствуют о принципиально различном поведении пиков продольной проводимости в случае резкого хаотического потенциала, $\lambda \ll a_H$, и плавного хаотического потенциала, $\lambda \gg r_c = \sqrt{2n+1}a_H$. В данном разделе мы выполним аналитический расчет пиков продольной проводимости в этих двух предельных случаях, используя полученные в главе 2 результаты относительно вида плотности состояний и структуры волновых функций. Работая в предположении о симметричной форме хаотического потенциала $V(\mathbf{r})$, будем вычислять пиковые величины продольной проводимости по формуле (3.10), подставляя в качестве E_F энергию, соответствующую середине уровня Ландау с номером n . После этого плотность состояний может быть рассчитана по формулам (2.20), (2.33), дающим не зависящий от номера уровня Ландау n ответ для максимума плотности состояний. К вопросу о влиянии поправок к плотности состояний на пиковые величины продольной проводимости мы вернемся ниже. Более сложным компонентом формулы (3.10), чем плотность состояний, является усредненный квадрат матричного элемента оператора скорости, $\langle |v_x|^2 \rangle$, определенный формулой (3.12). Для вычисления матричного элемента \hat{v}_x в главном порядке по параметру $V/\hbar\omega_c$ воспользуемся полученным в разделе 2.2

выражением (2.13) для поправок к волновым функциям нулевого приближения,

$$\begin{aligned}
(v_x)_{n\beta, n\alpha} &= \langle \Psi_{n\beta}^{(0)} + \delta\Psi_{n\beta} | v_x | \Psi_{n\alpha}^{(0)} + \delta\Psi_{n\alpha} \rangle = \langle \delta\Psi_{n\beta} | v_x | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle + \langle \Psi_{n\beta}^{(0)} | v_x | \delta\Psi_{n\alpha} \rangle = \\
&= \frac{v_H}{\hbar\omega_c} \sum_{\gamma, k} \left\{ C_{n-1, \gamma k}^* C_{n\alpha k} \sqrt{\frac{n}{2}} \langle \Psi_{n-1, \gamma}^{(0)} | V | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle - C_{n+1, \gamma k}^* C_{n\alpha k} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \langle \Psi_{n+1, \gamma}^{(0)} | V | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle + \right. \\
&\quad \left. + C_{n\beta k}^* C_{n-1, \gamma k} \sqrt{\frac{n}{2}} \langle \Psi_{n\beta}^{(0)} | V | \Psi_{n-1, \gamma}^{(0)} \rangle - C_{n\beta k}^* C_{n+1, \gamma k} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \langle \Psi_{n\beta}^{(0)} | V | \Psi_{n+1, \gamma}^{(0)} \rangle \right\}, \quad (3.17)
\end{aligned}$$

где $v_H = \hbar/(m^*a_H)$. В случае плавного хаотического потенциала формула (3.17) существенно упрощается благодаря соотношениям (2.15) и упрощению матричных элементов (2.5),

$$\langle n-1, k_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | nk_2 \rangle \approx \delta_{q_x, k_1 - k_2} e^{-\frac{k^2 a_H^2}{4}} e^{i\frac{(k_1 + k_2)q_y a_H^2}{2}} (q_x + iq_y) a_H \sqrt{\frac{n}{2}}, \quad (3.18)$$

$$\langle n+1, k_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | nk_2 \rangle \approx \delta_{q_x, k_1 - k_2} e^{-\frac{k^2 a_H^2}{4}} e^{i\frac{(k_1 + k_2)q_y a_H^2}{2}} (-q_x + iq_y) a_H \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \quad (3.19)$$

в результате вклады от подмешивания нижележащего и вышележащего уровней Ландау частично компенсируются и ответ не зависит от номера уровня Ландау,

$$(v_x)_{n\beta, n\alpha} = -i \frac{v_H}{\hbar\omega_c} \sum_{q_y} q_y a_H \sum_{k_1 k_2} C_{\beta k_1}^* C_{\alpha k_2} V_{k_1 - k_2, q_y} e^{i\frac{(k_1 + k_2)q_y a_H^2}{2}} = \text{const}(n). \quad (3.20)$$

Возводя правую часть формулы (3.20) в квадрат и производя усреднение по беспорядку, получаем

$$\overline{|(v_x)_{n\beta, n\alpha}|^2} = \left(\frac{v_H}{\hbar\omega_c} \right)^2 \sum_{\mathbf{q}} (q_y a_H)^2 \overline{|V_{\mathbf{q}}|^2} \sum_{k_1, k_2} C_{\beta k_1}^* C_{\alpha k_1 + q_x} C_{\beta k_2} C_{\beta k_2 + q_x}^* e^{i(k_1 - k_2)q_y a_H^2}. \quad (3.21)$$

Поскольку фурье-образ хаотического потенциала (3.16) содержит волновые векторы $q \lesssim 1/\lambda$, сомножитель q_y^2 в правой части выражения (3.21) приводит к квадратичной зависимости усредненного квадрата матричного элемента оператора скорости от обратной корреляционной длины λ^{-1} . Поскольку ни плотность состояний (2.20), ни матричный элемент (3.20) не зависят от номера уровня Ландау n , таким же свойством обладают пиковые величины продольной проводимости

$$\sigma_{xx}^{(n)} \propto \text{const}(n) \cdot \lambda^{-2}, \quad (3.22)$$

при всех n таких, что $\lambda \gg r_c = \sqrt{2n+1}a_H$. Соотношение (3.22) находится в хорошем согласии с результатами численных расчетов, представленных на рис. 3.5(а), 3.7 и экспериментальными данными работ [43],[44],[45],[46],[47].

В случае резкого хаотического потенциала структура уровней Ландау некоррелирована и использованные выше упрощения неприменимы, поэтому расчет пиковых величин продольной проводимости возможен лишь с использованием дополнительных модельных предположений. Фактически отсутствие корреляций между структурой соседних уровней Ландау позволяет рассчитывать на хорошую точность результатов, полученных с использованием описанной в разделе 2.5 модели равномерно делокализованных уровней Ландау. Как было показано в разделе 2.5, такая статистическая модель правильно описывает степень подмешивания уровней Ландау, чем и оправдывается ее использование при расчете матричного элемента оператора скорости, отличного от нуля именно в меру подмешивания соседних уровней Ландау. В общем случае квадрат выражения (3.17) содержит 16 слагаемых, однако ненулевой вклад при использовании формул (2.37,2.38) дают лишь слагаемые, содержащие квадраты случайных величин $|C_{n\alpha k}|^2$,

$$\begin{aligned} |(v_x)_{n\beta, n\alpha}|^2 = & \left(\frac{v_H}{\hbar\omega_c}\right)^2 \sum_{\gamma, k} \left\{ \frac{n}{2} |C_{n-1, \gamma k}|^2 |C_{n\alpha k}|^2 \left| \langle \Psi_{n-1, \gamma}^{(0)} | V | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle \right|^2 + \right. \\ & + \frac{n+1}{2} |C_{n+1, \gamma k}|^2 |C_{n\alpha k}|^2 \left| \langle \Psi_{n+1, \gamma}^{(0)} | V | \Psi_{n\alpha}^{(0)} \rangle \right|^2 + \frac{n}{2} |C_{n\beta k}|^2 |C_{n-1, \gamma k}|^2 \left| \langle \Psi_{n\beta}^{(0)} | V | \Psi_{n-1, \gamma}^{(0)} \rangle \right|^2 + \\ & \left. + \frac{n+1}{2} |C_{n\beta k}|^2 |C_{n+1, \gamma k}|^2 \left| \langle \Psi_{n\beta}^{(0)} | V | \Psi_{n+1, \gamma}^{(0)} \rangle \right|^2 \right\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Поскольку величины $C_{n\pm 1, \alpha k}$ и $C_{n\beta k}$ являются некоррелированными и равномерно распределенными по квантовому числу k , суммирование по k в каждом из слагаемых снимается и дает одинаковый множитель $1/N_L$. Далее, ненулевой вклад в величину квадрата матричного элемента потенциала также дают лишь слагаемые,

содержащие квадраты $|C_{n\alpha k}|^2$, и здесь суммирование по k снимается, так что

$$\begin{aligned} |\langle \Psi_{n\beta}^{(0)} | V | \Psi_{n+1,\gamma}^{(0)} \rangle|^2 &= \frac{1}{N_L} \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q}}|^2 e^{-q^2 a_H^2/2} \frac{q^2 a_H^2}{2(n+1)} [L_n^1(q^2 a_H^2/2)]^2 = \\ &= \frac{1}{N_L} \sum_q U_q e^{-q^2 a_H^2/2} \frac{q^2 a_H^2}{2(n+1)} [L_n^1(q^2 a_H^2/2)]^2 = U \int_0^\infty \frac{dx e^{-x} x}{n+1} [L_n^1(x)]^2 = U = \frac{\Gamma^2}{N_L}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где Γ – ширина уровней Ландау, смысл постоянной U разъяснен после формулы (2.24). Такой же ответ получается и для остальных матричных элементов потенциала, входящих в выражение (3.23). В результате квадрат матричного элемента оператора скорости приобретает в пределе $S \rightarrow \infty$ простой вид

$$\begin{aligned} |(v_x)_{n\beta, n\alpha}|^2 &= \left(\frac{v_H}{\hbar\omega_c} \right)^2 \frac{1}{N_L} \sum_{\gamma} \frac{n}{2} \frac{\Gamma^2}{N_L} + \frac{n+1}{2} \frac{\Gamma^2}{N_L} + \frac{n}{2} \frac{\Gamma^2}{N_L} + \frac{n+1}{2} \frac{\Gamma^2}{N_L} = \\ &= \frac{(2n+1)v_H^2}{N_L} \left(\frac{\Gamma}{\hbar\omega_c} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Заметим, что левые части формул (3.24), (3.25) содержат величины, не усредненные по беспорядку, и, следовательно, обязаны содержать нетривиальную зависимость от квантовых чисел (n, α, β) . Отсутствие такой зависимости есть прямое следствие использованной модели, в рамках которой мы считали коэффициенты $C_{n\alpha k}$ некоррелированными случайными величинами, распределенными одинаковым образом вне зависимости от n , α и k . Согласно формуле (3.25) квадрат матричного элемента оператора скорости линейно растет с ростом номера уровня Ландау n .

Подставляя в формулу (3.10) плотность состояний согласно формуле (2.33), получим для пиковых величин продольной проводимости

$$\sigma_{xx}^{(n)} = \pi e^2 \hbar S D_n^2(\hbar\omega_c(n+1/2)) \langle |v_x|^2 \rangle_n = \frac{2n+1}{\pi} \frac{e^2}{h}, \quad (3.26)$$

в соответствии с ответом, полученным в работе [12] методом функций Грина в рамках самосогласованного борновского приближения. В частности, для основного уровня Ландау $\sigma_{xx}^{(0)} = 1/\pi \approx 0.32e^2/h$, что существенно меньше значений,

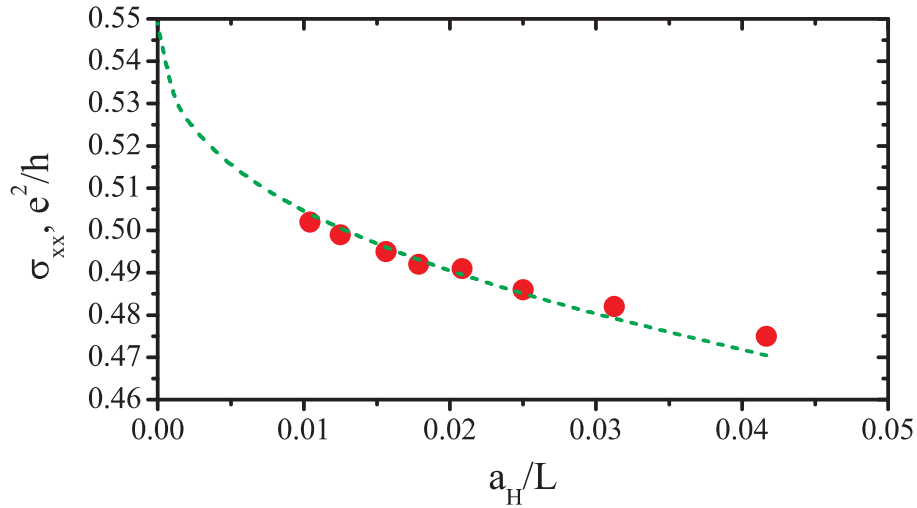


Рис. 3.8: Зависимость величины первого пика $\sigma_{xx}^{(0)}$ в пределе резкого хаотического потенциала от обратного размера образца $1/L$. Пунктирная кривая соответствует зависимости $\sigma_{xx}^{(0)}(L) = \sigma_{xx}^{(0)}(\infty) - \alpha L^{-y}$, где $\sigma_{xx}^{(0)}(\infty) = 0.55e^2/h$, $y = 0.5$.

полученных в численном расчете, представленном на рис. 3.5(b), 3.7 и экспериментальных данных работ [40],[41],[42],[38],[39]. Поскольку численные расчеты, проведенные для конкретного размера образца L , не дают достоверных данных о величине пика $\sigma_{xx}^{(0)}$ в пределе бесконечного образца $L \rightarrow \infty$, проанализируем зависимость $\sigma_{xx}^{(0)}(L)$. На рис. 3.8 представлена зависимость рассчитанных значений первого пика продольной проводимости от размера образца и показана степенная аппроксимация зависимости $\sigma_{xx}(L) = A - BL^{-y}$. Полученная зависимость позволяет сделать вывод о росте $\sigma_{xx}^{(0)}$ с увеличением размера образца и оценить значение $\sigma_{xx}^{(0)}(L \rightarrow \infty)$ как $(0.55 \pm 0.03)e^2/h$. Это значение хорошо согласуется с экспериментальными данными относительно величины первого пика продольной проводимости в структурах с резким хаотическим потенциалом [40],[41],[42],[38],[39]. Аналогичный анализ для первого возбужденного уровня Ландау дает значение $\sigma_{xx}^{(1)}(L \rightarrow \infty) \approx (1.08 \pm 0.04)e^2/h$, а последовательность пиковых значений приближенно описывается линейным законом, приведенным на рис. 3.9. Ранее в ряде работ [49],[50],[51],[52] приводилось заниженное значение для величины первого пика, связанное с отсутствием экстраполяции результатов к пределу $L \rightarrow \infty$.

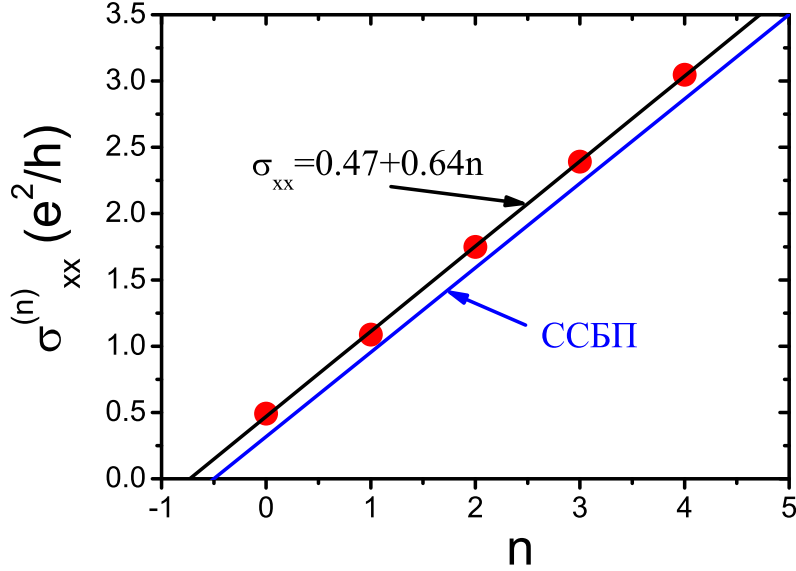


Рис. 3.9: Зависимость пиков продольной проводимости $\sigma_{xx}^{(n)}$ от номера уровня Ландау n в пределе резкого хаотического потенциала. Представлена линейная аппроксимация результатов и сравнение с формулой (3.26).

Для величина второго пика, соответствующего $n = 1$, ранее было получено существенно иное значение, $\sigma_{xx}^{(1)} \approx 0.6e^2/h$ [54]. Мы связываем такое расхождение с использованием авторами работы [54] принципиально иного подхода к расчету проводимости, основанного на формуле Ландауэра.

Причиной существенного расхождения данных численного расчета (и экспериментальных данных) с формулой (3.26) являются два фактора. Прежде всего, поправки к плотности состояний, возникающие за пределами самосогласованного борновского приближения, увеличивают максимумы плотности состояний, что ведет к соответствующим добавкам к величинам пиков продольной проводимости. В частности, для основного уровня Ландау плотность состояний может быть

найдена точно [82],

$$D_0(E) = \frac{1}{2\pi\mathcal{N}a_H^2\Gamma} \frac{\exp(E^2/\Gamma^2)}{1 + \Phi(E/\Gamma)^2}, \quad (3.27)$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(y^2) dy, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(x^2)}{1 + \Phi^2(x)} dx \approx 2.784. \quad (3.29)$$

Используя формулу (3.27) вместо (2.33), имеем

$$\sigma_{xx}^{(0)} \approx 0.41e^2/h. \quad (3.30)$$

Это значение примерно на 25% меньше, чем значение $0.55e^2/h$, полученное из численных расчетов в пределе $L \rightarrow \infty$. Причиной этого является увеличение среднего квадрата матричного элемента оператора скорости $\langle |v_x|^2 \rangle$, входящего в формулу (3.7), по сравнению с найденным в модели равномерно делокализованных уровней Ландау, формула (3.25):

$$\langle |v_x|^2 \rangle_{exact}^{(0)} \approx 1.35 \langle |v_x|^2 \rangle_{deloc}^{(0)}. \quad (3.31)$$

Таким образом, для основного уровня Ландау $n = 0$ локализация состояний на хвостах уровней Ландау, где $\lim_{L \rightarrow \infty} \langle |v_x|^2 \rangle = 0$, приводит к увеличению среднего квадрата матричного элемента оператора скорости в центре уровня (т.е. состояния в центре уровня Ландау являются "сверхделокализованными"). Поскольку для более высоких уровней Ландау $n \gtrsim 1$ локализации на хвостах уровней Ландау является гораздо более слабой, чем в случае основного уровня Ландау, то уловить подобный эффект в численном расчете не удастся и отличие между расчетной величиной $\sigma_{xx}^{(1)} \approx 1.08e^2/h$ и найденной по формуле (3.26), $0.96e^2/h$, связано главным образом с поправками к плотности состояний. Поскольку условия локализации на высоких уровнях Ландау $n \gtrsim 1$ значительно хуже, чем для основного уровня Ландау, как видно, например, из рис. 3.5(b), экспериментально целочисленный квантовый эффект Холла в гетероструктурах с резким хаотическим потенциалом наблюдается лишь для основного уровня Ландау, как видно из экспериментальных данных работ [69],[71],[70],[42],[39].

3.6 Выводы

- Изучено влияние асимметричности хаотического потенциала на квантово-холловские кривые. Показано, что асимметрия хаотического потенциала приводит к двум эффектам: уменьшению ширины плато целочисленного квантового эффекта Холла и сдвигу факторов заполнения, соответствующих переходам между соседними плато, в сторону больших или меньших целых значений в зависимости от притягивающего или отталкивающего характера потенциала превалирующих примесей/дефектов.
- Показано, что вид хаотического потенциала примесей оказывает существенное влияние на зависимости компонент тензора проводимости от фактора заполнения. В случае плавного хаотического потенциала плато целочисленного квантового эффекта Холла ярко выражены, а их ширина практически не зависит от номера плато. Пиковые величины продольной проводимости в этом случае также не зависят от номера уровня Ландау n , уменьшаясь с ростом корреляционной длины потенциала λ .
- Уменьшение корреляционной длины хаотического потенциала λ приводит к сужению квантово-холловских плато вследствие ухудшения условий локализации. В случае резкого хаотического потенциала ярко выраженными остаются лишь несколько первых плато, а пиковые величины продольной проводимости приобретают приближенно линейную зависимость от номера уровня Ландау n . Величина первого пика, соответствующего $n = 0$, составляет $0.55e^2/h$, второго пика, соответствующего $n = 1$, -- $1.08e^2/h$.
- Показано, что отличие рассчитанного пикового значения $\sigma_{xx}^{(0)} \approx 0.55e^2/h$ от предсказываемого в рамках самосогласованного борновского приближения значения $0.32e^2/h$ связано с двумя факторами – поправкой к квадрату плотности состояний, составляющей 28%, и поправкой к усредненному квадрату матричного элемента оператора скорости, составляющей 35%.

Глава 4

Циклотронный резонанс в двумерных полупроводниковых гетероструктурах в поперечном и наклонном магнитных полях

4.1 Влияние наклонного магнитного поля на спектр носителей в одиночных и двойных кван- товых ямах

Использование наклонных магнитных полей при исследовании спектров носителей заряда методом циклотронного резонанса открывает дополнительные возможности благодаря различной зависимости циклотронной и зеемановской энергии от угла наклона магнитного поля относительно оси квантовой ямы α . В наиболее простом приближении [83]

$$E_c = \frac{\hbar e B \cos \alpha}{m^* c}, \quad E_Z = \frac{g^* \hbar e B}{m_0 c}, \quad (4.1)$$

где g^* – эффективное значение g -фактора. Однако в случае сильных магнитных полей, в которых магнитная длина a_H сравнима с шириной квантовой ямы, и углов наклона α продольная составляющая магнитного поля оказывает существенное влияние на квантово-механическое движение носителей, изменяя вид спектра носителей и форму волновых функций. Точное решение задачи с наклонным магнитным полем возможно лишь в частном случае параболического потенциала кванто-

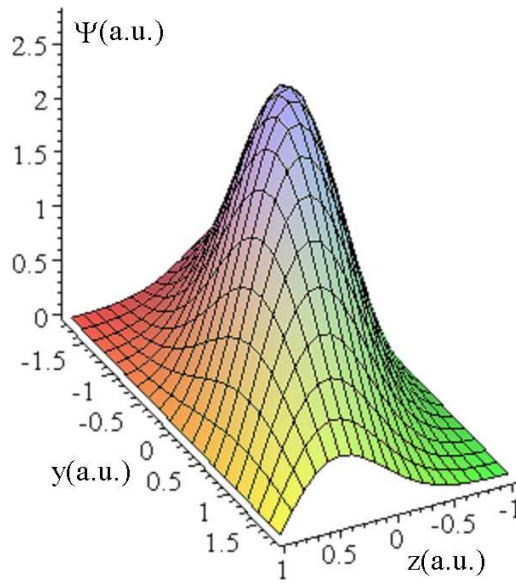


Рис. 4.1: Вид пробной волновой функции (4.3). При расчете использованы значения параметров $a = 1.39$, $b = 1.1$ ($\varphi = 48^\circ$), $c = 1.07$, вычисленных для $\beta = 6$, $\alpha = 70^\circ$.

вой ямы $U(Z) = \Upsilon Z^2$. Поскольку такой вид потенциала не характеризуется какой-либо характерной длиной L , а его экспериментальная реализация требует непрерывного изменения параметров в процессе роста (например параметра x в случае параболических квантовых ям на основе твердого раствора $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ [84]), актуальна задача расчета спектра и волновых функций для более распространенных потенциалов квантовых ям (главным образом прямоугольного). Кроме того, поскольку параболические квантовые ямы выращиваются на основе твердых растворов, в них неминуемо рассеяние на флуктуациях состава, что приводит, как показано в главе 3, к ухудшению картины целочисленного квантового эффекта Холла.

Рассмотрим двумерную полупроводниковую гетероструктуру с эффективным потенциалом $U(Z)$, к которой приложено магнитное поле \mathbf{B} под углом α к оси Z . Выберем ось X перпендикулярно направлению магнитного поля, так что $B = (0, B \sin \alpha, B \cos \alpha)$. В дальнейшем будем называть поперечным магнитное поле, направленное вдоль оси Z , продольным – направленное вдоль оси Y . Удобно выбрать калибровку векторного потенциала \mathbf{A} в следующем виде: $\mathbf{A} =$

$(BZ \sin \alpha - BY \cos \alpha, 0, 0)$. В этом случае движение в направлении, перпендикулярном одновременно магнитному полю и оси гетероструктуры, отделяется и описывается плоской волной $\Psi(\mathbf{r}) = \exp(iK_X X)\Psi(Y, Z)$. Введем вместо магнитного поля B пропорциональную ему безразмерную величину $\beta = eBL^2/(\hbar c)$, где L – характерный масштаб потенциала $U(Z)$, а также безразмерные величины $y = (Y - \hbar K_X/(eB \cos \alpha))/L$, $z = Z/L$ и $V(z) = 2m^*L^2U(zL)/\hbar^2$, $E = 2m^*L^2\mathcal{E}/\hbar^2$. Тогда эффективный гамильтониан \hat{H} , описывающий движение носителей в наклонном магнитном поле, будет иметь вид

$$\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2(y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 + V(z) = \hat{H}_0 + V_A. \quad (4.2)$$

Здесь мы отделили симметричную часть гамильтониана \hat{H}_0 , допускающую разделение переменных, и антисимметричную, $V_A = -\beta^2 yz \sin 2\alpha$, и для простоты пренебрегли спином. Полное разделение переменных возможно в двух предельных случаях ориентации магнитного поля, когда $\sin 2\alpha = 0$. В поперечном магнитном поле решением будут являться обычные уровни Ландау, т.к. магнитное поле не будет оказывать влияния на движение вдоль оси Z . В продольном магнитном поле движение вдоль оси y будет описываться плоской волной, а на потенциал гетероструктуры $V(z)$ наложится квадратичная по z добавка, связанная с присутствием продольного магнитного поля.

Рассмотрим случай прямоугольной квантовой ямы с бесконечно высокими стенками, пусть L – полуширина квантовой ямы. В рамках классической механики электроны совершают движение по циклотронным траекториям, перпендикулярным направлению наклонного магнитного поля, испытывая регулярные столкновения со стенками квантовой ямы. Точное решение соответствующей квантовомеханической задачи требует численных расчетов, подобных проведенным в работе [61], и не дающих наглядной физической картины. Поэтому для нахождения основного состояния в рассматриваемой задаче мы воспользуемся вариационным

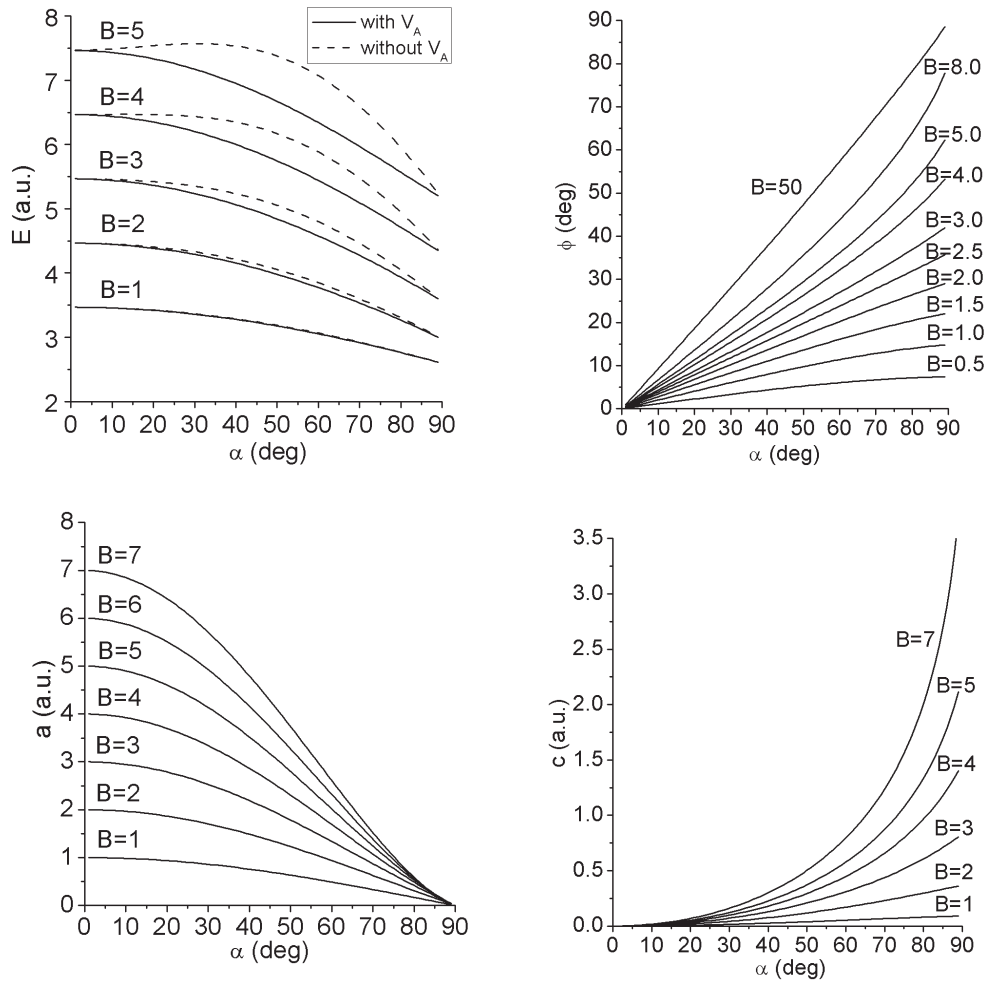


Рис. 4.2: Зависимость энергии основного состояния E_0 (а) и вариационных параметров: (б) – $\varphi = \arctan b$, (с) – a и (д) – c от угла наклона магнитного поля α для разных значений параметра β , характеризующего напряженность магнитного поля.

методом. Выберем вариационную волновую функцию в следующем виде:

$$\Psi_0(y, z) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a(y-bz)^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{cz^2}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right). \quad (4.3)$$

Вариационные параметры a , $b = \tan \varphi$ и c имеют наглядный физический смысл – они описывают изменение эффективной магнитной длины, наклон циклотронной траектории относительно плоскости квантовой ямы и сжатие волновой функции вдоль оси квантовой ямы, характерное для случая продольного магнитного поля, ее вид изображен на рис. 4.1. Заметим, что волновая функция (4.3) является точной в случае поперечного магнитного поля $\alpha = 0$ (при этом $a = \beta$, $b = 0$, $c = 0$) и

хорошо описывает случай сильного продольного магнитного поля $\alpha = \pi/2, \beta \gg 1$ (при этом $a = 0, c \neq 0$). На рис. 4.2(a) представлен график зависимости энергии основного состояния E_0 от угла наклона магнитного поля α , при этом продемонстрирована важность с учета слагаемого V_A . Результат вариационного расчета, учитывающего антисимметричное слагаемое V_A в гамильтониане (4.2), совпадает при $\beta \geq 1$, показанных на рис. 4.2(a), с точным значением энергии основного состояния с хорошей ($< 1\%$) точностью. На рис. 4.2(b)-(d) приведены кривые зависимости вариационных параметров $\varphi = \arctan b, a$ и c от угла наклона магнитного поля α . В случае сильных магнитных полей, $\beta \gg 1$, углы α и φ совпадают, поскольку ширина квантовой ямы $2L$ существенно превосходит магнитную длину a_H . Существенным недостатком вариационной волновой функции (4.3) является невозможность провести расчеты до конца в аналитическом виде, что становится возможным, если из трех вариационных параметров оставить только один:

$$\Psi_0(y, z) = \left(\frac{\beta \cos \alpha}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\beta \cos \alpha (y - bz)^2}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi z}{2} \right). \quad (4.4)$$

Как видно из графиков, приведенных на рис. 4.2(c), (d), такое приближение хорошо работает в области не слишком сильных магнитных полей β и углов наклона α . Вариационная энергия выражается через параметр b как

$$E_0(b) = \frac{\pi^2}{4} + \beta \cos \alpha \left(1 + \frac{b^2}{2} \right) + \frac{\beta^2 \cos^2 \alpha}{2\beta_0} (b - \tan \alpha)^2, \quad (4.5)$$

где $\beta_0 = 3\pi^2/[2(\pi^2 - 6)] \approx 3.8$ – характерное значение параметра β , при котором происходит переход между случаями слабого и сильного магнитного поля. Минимизация выражения (4.5) приводит к следующим формулам для вариационного параметра b и энергии основного состояния E_0 :

$$b = \tan \varphi = \frac{\beta \sin \alpha}{\beta_0 + \beta \cos \alpha}, \quad (4.6)$$

$$E_0 = \frac{\pi^2}{4} + \beta \cos \alpha + \frac{\beta^2 \sin^2 \alpha}{2(\beta_0 + \beta \cos \alpha)}. \quad (4.7)$$

Как видно из рис. 4.2(a), (b), выражения (4.6-4.7) действительно дают хорошую аппроксимацию результатов в области не слишком больших α и β . На рис. 4.3

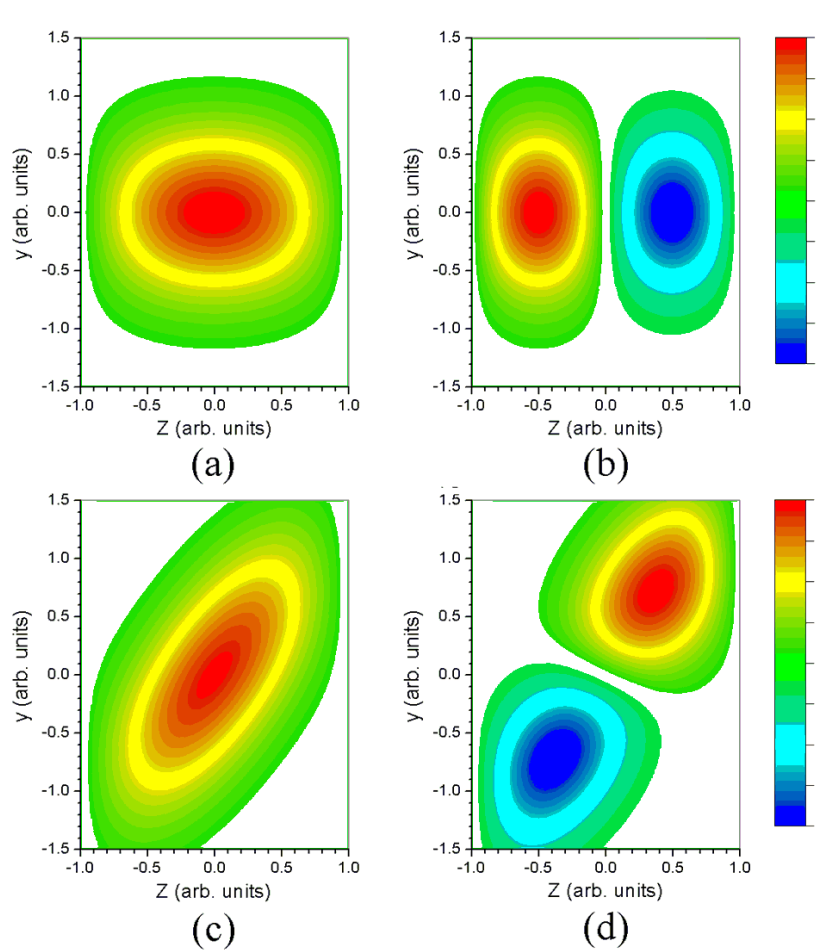


Рис. 4.3: Вид волновых функций основного и первого возбужденного состояний в поперечном и наклонном магнитных полях в одиночной прямоугольной квантовой яме: (a) $\beta = 4$, $\alpha = 0^\circ$ ($E = 6.467$), (b) $\beta = 4$, $\alpha = 0^\circ$ ($E = 13.870$), (c) $\beta = 8$, $\alpha = 60^\circ$ ($E = 9.142$), (d) $\beta = 8$, $\alpha = 60^\circ$ ($E = 12.093$).

приведен вид волновых функций основного и первого возбужденного состояний в прямоугольной квантовой яме с бесконечно высокими стенками в присутствии поперечного и наклонного магнитных полей.

Знание вида волновых функций в одиночной квантовой яме в присутствии наклонного магнитного поля позволяет решить аналогичную задачу о двойной квантовой яме с узким слабопроницаемым потенциальным барьером между слоями. Пусть Ψ_{LQW} и Ψ_{RQW} – волновые функции носителей в идентичных квантовых

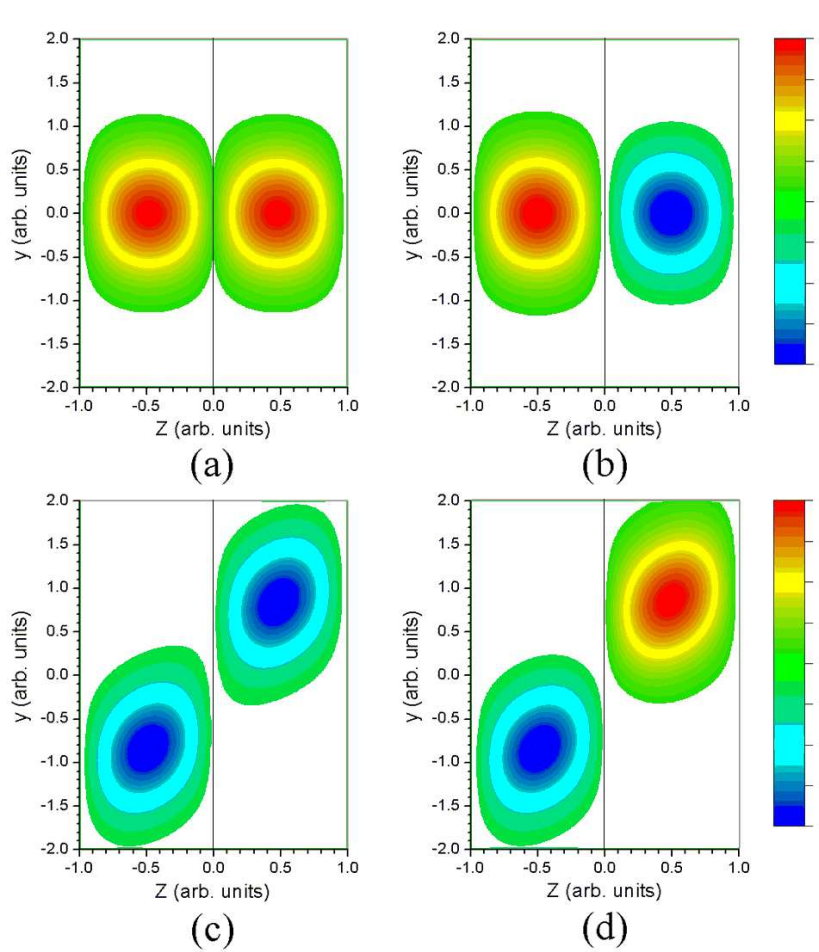


Рис. 4.4: Вид волновых функций основного и первого возбужденного состояний в поперечном и наклонном магнитных полях в двойной квантовой яме: (a) $\beta = 4$, $\alpha = 0^\circ$ ($E = 13.158$), (b) $\beta = 4$, $\alpha = 0^\circ$ ($E = 13.870$), (c) $\beta = 8$, $\alpha = 60^\circ$ ($E = 14.710$), (d) $\beta = 8$, $\alpha = 60^\circ$ ($E = 14.811$).

ямах, тогда решение для двойной квантовой ямы может быть представлено в виде

$$\Psi(\mathbf{R}) = l\Psi_{LQW} + r\Psi_{RQW}, \quad (4.8)$$

где коэффициенты l и r могут рассматриваться как вариационные параметры. Пусть, по-прежнему, L – полуширина отдельных квантовых ям, так что ширина всей структуры в безразмерных единицах равна 4, точку $z = 0$ выберем совпадающей с местоположением барьера. Как следует из вида эффективного гамильтониана (4.2), являющегося инвариантными при преобразовании $z \rightarrow z + \delta z$, $y \rightarrow y + \delta z \tan \alpha$, основные состояния в левой и правой квантовых ямах центрированы

относительно точек $\mathbf{r}_L = (-\tan \alpha, -1)$ и $\mathbf{r}_R = (\tan \alpha, 1)$ соответственно. Существование, что в наклонном магнитном поле электронные состояния в отдельных квантовых ямах сдвинуты по оси y на величину $2 \tan \alpha$. Вид волновых функций в двойной квантовой яме для поперечной и наклонной ориентаций магнитного поля приведен на рис. 4.4. Разница энергий симметричного и антисимметричного состояний определяется подбарьерным перекрытием волновых функций, соответствующих левой и правой ямам [85],

$$\Delta \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(y + \tan \alpha, 1) \Psi_0(y - \tan \alpha, -1) dy, \quad (4.9)$$

откуда, используя явный вид волновой функции основного состояния (4.3), получаем зависимость энергетического расщепления уровней в двойной квантовой яме от угла наклона магнитного поля α :

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} \simeq \exp[-\beta \cos \alpha (b - \tan \alpha)^2] = \exp\left[-\frac{\beta \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \beta \cos \alpha / \beta_0)^2}\right], \quad (4.10)$$

где Δ_0 – расстояние между уровнями в нулевом магнитном поле. Таким образом, как видно из формулы (4.10), наклон магнитного поля приводит к существенному уменьшению расщепления между симметричным и антисимметричным состояниями в двойных квантовых ямах.

4.2 Циклотронный резонанс в разьединенных гетероструктурах II типа в наклонном магнитном поле

В гетероструктуре InAs/GaSb потолок валентной зоны GaSb лежит по энергии выше дна зоны проводимости InAs, что приводит к возможности подмешивания состояний электронов и дырок [86]. В результате экспериментально наблюдается расщепление линии циклотронного резонанса [87]. В ранних публикациях эффект связывался с кулоновским взаимодействием электронов, локализованных в квантовой яме InAs, и дырок, локализованных в слое GaSb [88], [89]. Однако такой

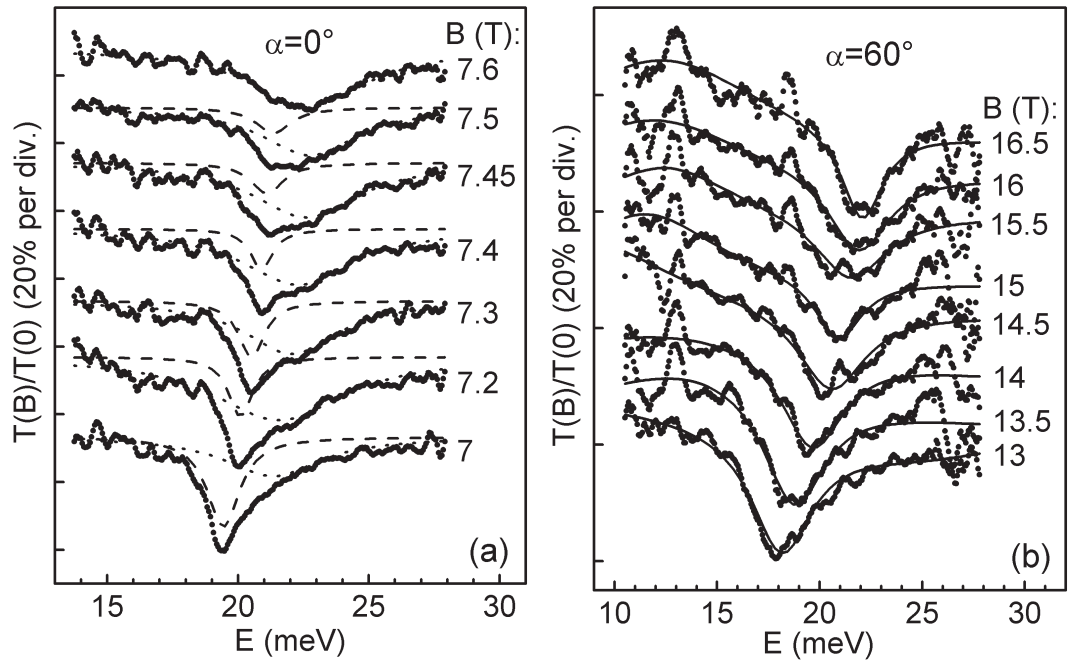


Рис. 4.5: Спектры циклотронного резонанса в гетероструктуре InAs/GaSb в (a) поперечном магнитном поле; (b) наклонном магнитном поле.

механизм, действующий одновременно с подмешиванием состояний электронов и дырок на гетерогранице, не дает видимого вклада в спектры циклотронного резонанса. В данной работе расщепление линии циклотронного резонанса объясняется подмешиванием электронов из InAs и дырок из GaSb [90], [91]. Это подмешивание, как показано ниже, приводит к антипересечениям уровней Ландау электронов и дырок. Оптические переходы на антипересекающиеся уровни разрешены, что и приводит к расщеплению линии циклотронного поглощения. Как показали проведенные эксперименты по наблюдению циклотронного резонанса в наклонных магнитных полях, при углах наклона $\alpha \gtrsim 60^\circ$ расщепление линии циклотронного резонанса пропадает. Ранее подавление расщепления линии циклотронного резонанса в наклонном магнитном поле также наблюдалось в работе [92], однако объяснение этого эффекта отсутствовало.

Экспериментально исследовались квантовые ямы InAs толщиной 200Å, отделенные от слоя GaSb барьером AlSb, толщина которого для различных образцов

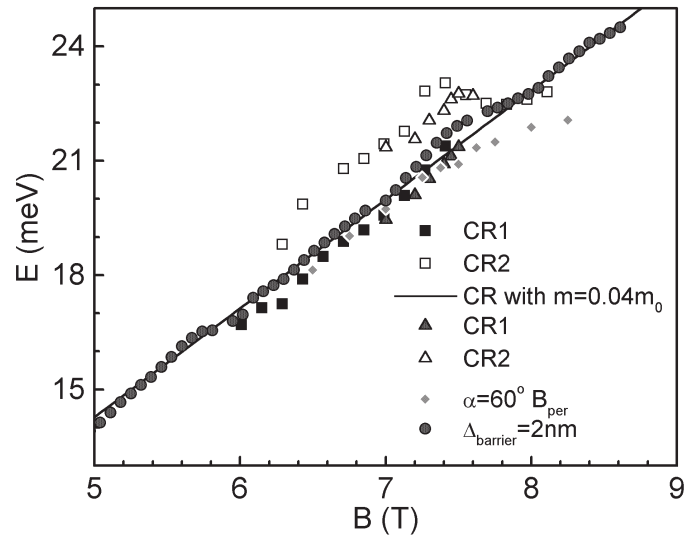


Рис. 4.6: Зависимость энергии оптических переходов в гетероструктуре InAs/GaSb от напряженности внешнего магнитного поля.

составляла 0, 6 и 20Å. При этом квантовая яма для дырок формировалась в результате электростатического изгиба зон. Магнитооптические измерения в дальней инфракрасной области проводились в магнитных полях до 23Т при температуре около 2К. На рис. 4.5 показаны спектры циклотронного резонанса в поперечном и наклоненном на угол $\alpha = 60^\circ$ относительно оси гетероструктуры магнитном поле для образца с барьером AlSb толщиной 6Å. Оба спектра показаны вблизи значений поперечной составляющей магнитного поля $B \cos \alpha$ порядка 7Т, что соответствует условию сильного подмешивания двух уровней Ландау: электронного и дырочного. Спектры циклотронного резонанса были аппроксимированы суммой двух лоренцианов, CR1 и CR2. В случае поперечного магнитного поля (рис.4.5(a)) кривая CR2 становится заметной при полях порядка 6.5Т, при этом ее пик находится при больших энергиях, чем пик CR1, а полуширина в несколько раз превосходит полуширину CR1. С увеличением магнитного поля амплитуда пика второй кривой (CR2) увеличивается, в то время как интенсивность первой кривой (CR1) уменьшается. При дальнейшем увеличении магнитного поля кривая CR1 пропадает, и форма линии циклотронного резонанса хорошо аппроксимируется CR2.

На рис. 4.6 представлен график зависимости энергии переходов от магнитно-

го поля для линий CR1 и CR2. Энергия переходов, относящихся к CR1, имеет линейную зависимость от магнитного поля, соответствующую эффективной массе $0.04m_0$. Линия CR2 также имеет линейную зависимость от магнитного поля, однако она сдвинута относительно CR1 на 1.5 meV . Похожие особенности линии циклотронного резонанса наблюдались в образце без барьера между слоями InAs и GaSb, в этом случае энергетическое расщепление составило 3.5 meV , что объясняется увеличением подмешивания электронных и дырочных состояний при уменьшении ширины барьера. Для образца с барьером шириной 20 \AA расщепления линии циклотронного резонанса не наблюдалось, а форма линии хорошо описывалась параметрами кривой CR1, как видно из рис. 4.6. В случае наклонного магнитного поля форма линии циклотронного резонанса также хорошо аппроксимируется одним лоренцианом с параметрами, близкими к CR1. Причиной исчезновения расщепления линии циклотронного резонанса в обоих случаях служит подавление подмешивания электронных состояний квантовой ямы InAs и дырочных состояний квантовой ямы GaSb. В то время как механизм подавления при увеличении ширины барьера является прозрачным, эффект наклона магнитного поля требует теоретического анализа.

Для анализа экспериментальных результатов необходимо определить спектр и волновые функции носителей в гетероструктуре InAs/GaSb, для чего мы воспользуемся четырехзонной моделью Кейна, в рамках которой волновые функции носителей заряда представляют собой суперпозицию электронных состояний s -типа и дырочных состояний p -типа, $\Psi = U|s\rangle + \mathbf{V}|\mathbf{p}\rangle$. В присутствии внешнего магнитного поля система уравнений для огибающих в сферическом приближении имеет вид [93]

$$\begin{cases} (E_c - E)U + \gamma \hat{\mathbf{K}}\mathbf{V} = 0, \\ \gamma \hat{\mathbf{K}}U + (E_v - \delta - \frac{\hbar^2 \hat{\mathbf{K}}^2}{2m_h} - E)\mathbf{V} + i\frac{\Delta_{so}}{3}[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V}] = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Здесь γ – кейновский матричный элемент, m_h – масса тяжелых дырок, Δ_{so} – константа спин-орбитального расщепления, $\hat{\mathbf{K}} = -i\nabla - \frac{e}{c\hbar}\mathbf{A}$ – обобщенный волновой вектор. При решении уравнений Кейна для гетероструктуры InAs/GaSb мы ап-

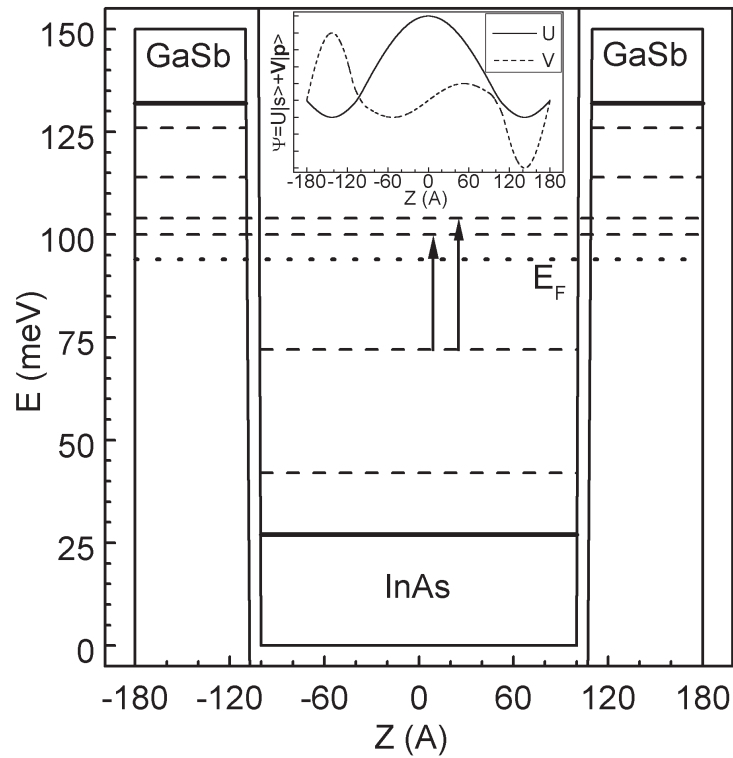


Рис. 4.7: Аппроксимация потенциала и схема уровней энергии электронов и дырок гетероструктуре InAs/GaSb. Стрелками указаны разрешенные оптические переходы между уровнями Ландау. На вставке схематически представлены волновые функции смешанных состояний.

проксимировали квантовые ямы для электронов и дырок прямоугольным потенциалом. Ось z направлена перпендикулярно гетерограницам; квантовая яма для электронов расположена в области $|z| < a$, квантовая яма для дырок – в области $a < |z| < b$. На рис. 4.7 изображена описанная геометрия системы, а также качественная картина энергетических уровней для случая поперечного магнитного поля.

В общем случае наклонного магнитного поля удобно выбрать векторный потенциал \mathbf{A} и провести частичное разделение переменных аналогично тому, как это сделано в разделе 4.1 в однозонном приближении. Полное разделение переменных так же возможно в случаях поперечной и продольной ориентаций магнитных полей. В случае поперечного магнитного поля решение системы уравнений Кейна (4.11) является суперпозицией состояний $l \uparrow$ и $(l + 1) \downarrow$, отвечающих различным

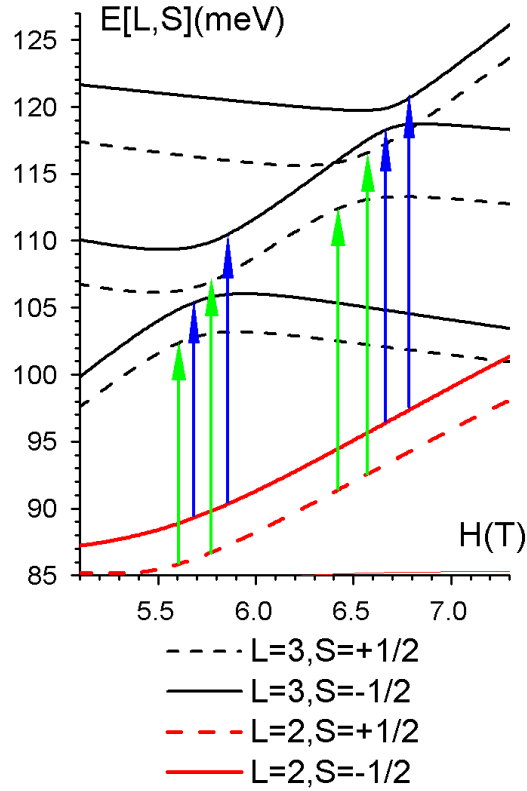


Рис. 4.8: Зависимость энергии смешанных электрон-дырочных состояний от напряженности поперечного внешнего магнитного поля и схема разрешенных оптических переходов в области антикроссинга.

направлениям спина. Квантовое число l здесь является суммой углового момента блоховской функции и номера уровня Ландау. В частности, для чисто электронных состояний $|s\rangle$ -типа l совпадает с номером уровня магнитного квантования.

На рис. 4.8 приведен участок графика зависимости энергии состояний от магнитного поля вблизи энергий ~ 100 meV выше дна зоны проводимости InAs. Кривые, соответствующие $s_z = -\frac{1}{2}$ изображены сплошной линией, с $s_z = +\frac{1}{2}$ - пунктирной. Идущие вниз по энергии кривые соответствуют двум ветвям тяжелых дырок, вырожденным при $B=0$. При этом как электронные, так и дырочные кривые отвечают основному уровню размерного квантования. При некотором значении магнитного поля, как видно из рис. 4.8, имеет место антипересечение уровней Ландау электронов и дырок. Это значит, что при таком значении маг-

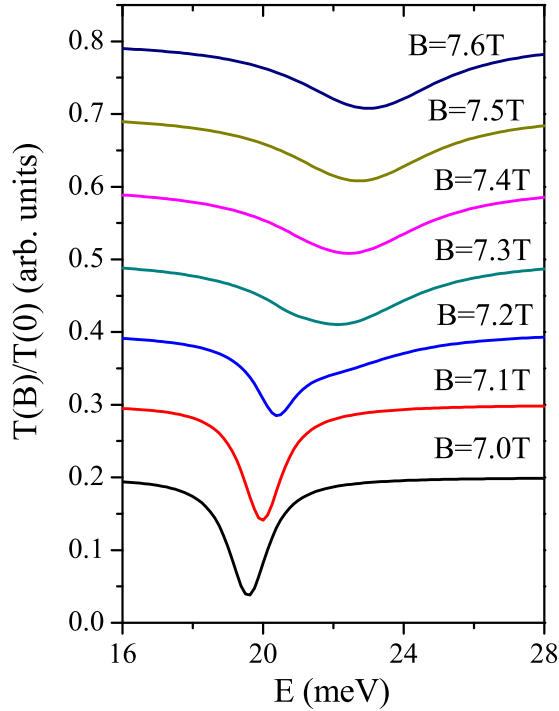


Рис. 4.9: Моделирование формы линии циклотронного резонанса в гетероструктуре InAs/GaSb в поперечном магнитном поле в рамках модели Кейна.

нитного поля существует сильное подмешивание состояний электронов и дырок. Величина антикроссинга (щели по энергии) для каждой пары электронных и дырочных дисперсионных кривых согласуется с экспериментальными данными, при этом точное значение определяется количественным соотношением между $|s\rangle$ - и $|p\rangle$ - компонентами волновых функций электронных и дырочных состояний, отвечающих антипересекающимся кривым. Согласуется с экспериментом и интервал магнитных полей $\Delta B \approx 0.5T$, в котором происходит трансформация кривой $E(B)$ из электронной в дырочную. Точная ширина этого интервала также определяется конкретным соотношением между компонентами волновой функции. На вставке к рис. 4.7 качественно изображен вид волновых функций вблизи антикроссинга. При переходе через область антикроссинга наблюдается постепенная трансформация волновой функций из электронной в дырочную. Расчет спектра носителей

в рамках модели Кейна позволяет с хорошей точностью аппроксимировать форму линии циклотронного резонанса, наблюдающуюся в поперечном магнитном поле, как показано на рис. 4.9.

Строгое решение задачи в случае наклонного магнитного поля требует численного решения системы уравнений Кейна (4.11) для восьми компонент волновой функции, зависящих от двух пространственных координат, которое не дает, однако, качественного понимания или простой оценки степени подавления подмешивания электронных и дырочных состояний в наклонном магнитном поле. Для достижения этих целей используем аналогию между двойной квантовой ямой, рассмотренной в разделе 4.1, и разъединенной гетероструктурой InAs/GaSb. Как и в случае двойной квантовой ямы, в первом приближении состояния электронов и дырок могут быть рассмотрены независимо, а наличие продольной составляющей магнитного поля сдвигает центры волновых функций в плоскости квантовой ямы на величину $D \tan \alpha$, где D – расстояние между центрами электронной и дырочной квантовых ям, как проиллюстрировано на рис. 4.4(c),(d). Воспользуемся формулой (4.10) для оценки степени подавления энергетического расщепления между смешанными состояниями при угле наклона магнитного поля $\alpha = 60^\circ$ (приняв $\beta \approx 1$, что соответствует суммарной ширине электронной и дырочной квантовых ям $\sim 300\text{\AA}$):

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} \simeq \exp \left[-\frac{\beta \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \beta \cos \alpha / \beta_0)^2} \right] \approx 0.3. \quad (4.12)$$

Поскольку экспериментальное значение энергетического расщепления в поперечном магнитном поле $\Delta_0 \approx 1.5 \text{ meV}$, величина Δ при угле наклона $\alpha \sim 60^\circ$ составляет значение порядка 0.4 meV , которое трудно разрешить в эксперименте. Таким образом, использование достаточно простой модели позволяет не только качественно объяснить эффект подавления расщепления линии циклотронного резонанса в наклонных магнитных полях, но и описать его количественно.

4.3 Циклотронный резонанс в режиме целочисленного квантового эффекта Холла

Традиционно теоретический анализ циклотронного резонанса в двумерных полупроводниковых гетероструктурах в сильных магнитных полях проводится в рамках самосогласованного борновского приближения [57]. Первоначально такой же подход безоговорочно использовался для расчета статической проводимости, однако, как показало открытие квантового эффекта Холла, при достаточно низких температурах он заведомо неприменим. Поэтому актуальна задача расчета формы линии циклотронного резонанса в режиме наблюдения целочисленного квантового эффекта Холла. В данном разделе мы применим методику расчета, описанную в главе 3 для статической проводимости, к проблеме циклотронного резонанса, т.е. динамической проводимости в окрестности циклотронной частоты, поскольку коэффициент поглощения $\alpha(\omega) \propto \text{Re } \sigma_{xx}(\omega)$ [57].

Для расчета динамической проводимости воспользуемся обобщением формулы (3.10),

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \pi e^2 \hbar S \int dE D(E) D(E + \hbar\omega) \frac{f_0(E) - f_0(E + \hbar\omega)}{\hbar\omega} \left\langle |(v_x)_{fi}|^2 \right\rangle_{\substack{E_i=E \\ E_f=E+\hbar\omega}} \quad (4.13)$$

В пределе нулевой частоты выражение $[f_0(E) - f_0(E + \hbar\omega)]/(\hbar\omega)$ переходит в производную функции распределения Ферми-Дирака, и формула (4.13) сводится к (3.10). Будем считать малой амплитуду хаотического потенциала по сравнению с циклотронной энергией $V \ll \hbar\omega_c$ и воспользуемся моделью разъединенных уровней Ландау, описанной в разделе 2.1. Также для простоты будем считать полностью заполненным уровень Ландау с номером n , что соответствует середине плато целочисленного квантового эффекта Холла. Также пренебрежем влиянием спина, считая несущественными эффекты спин-орбитального взаимодействия и непараболичности спектра носителей. В главном порядке по параметру $V/\hbar\omega_c$ можно пренебречь подмешиванием уровней Ландау при расчете матричного элемента оператора скорости между состояниями, отделенными циклотронной энер-

гией, в этом приближении

$$|\Psi_i\rangle = |\Psi_{n\alpha}\rangle = \sum_k C_{n\alpha k} |nk\rangle, \quad |\Psi_f\rangle = |\Psi_{n+1,\beta}\rangle = \sum_k C_{n+1,\beta k} |nk\rangle, \quad (4.14)$$

$$(v_x)_{fi} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} v_H \sum_k C_{n+1,\beta k}^* C_{n\alpha k}. \quad (4.15)$$

Таким образом, знание спектра носителей и волновых функций позволяет, используя формулы (4.13), (4.15), рассчитать форму линии циклотронного резонанса в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. В наиболее простом приближении для расчета квадрата матричного элемента (4.15) можно воспользоваться описанной в разделе 2.5 моделью равномерно делокализованных уровней Ландау,

$$\left\langle |(v_x)_{fi}|^2_{\substack{E_i=E \\ E_f=E+\hbar\omega}} \right\rangle = \frac{(n+1)v_H}{2} \sum_{k_1 k_2} \overline{C_{n+1,\beta k_1} C_{n\alpha k_1}^* C_{n+1,\beta k_2}^* C_{n\alpha k_2}} = \frac{(n+1)v_H^2}{2N_L}. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) отличается от формулы (3.25), полученной в той же модели в разделе (3.5), отсутствием фактора $(\Gamma/\hbar\omega_c)^2$, поскольку переходы между соседними уровнями Ландау разрешены уже в отсутствие примесного потенциала. Подстановка (4.16) в формулу для динамической проводимости (4.13) приводит к следующему ответу:

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) \propto \frac{1}{\hbar\omega} \int_{E_F-\hbar\omega}^{E_F} D_n(E) D_{n+1}(E+\hbar\omega) dE, \quad (4.17)$$

т.е. форма линии циклотронного резонанса определяется сверткой плотностей состояний соседних уровней Ландау, лежащих по разные стороны от уровня Ферми. Аналогичное выражение было получено в работе [15] в рамках самосогласованного борновского приближения. Сравнение результатов численных расчетов формы линии циклотронного резонанса с учетом локализации носителей и по формуле (4.17) представлено на рис. 4.10 для хаотических потенциалов с различным отношением корреляционной длины к магнитной длине λ/a_H . Как видно из сравнения рис. 4.10(a) и 4.10(b), соотношение (4.17), отождествляющее ширину линии циклотронного резонанса и ширину уровней Ландау, приближенно выполняется лишь для случая резкого хаотического потенциала, $\lambda \ll a_H$. При увеличении λ

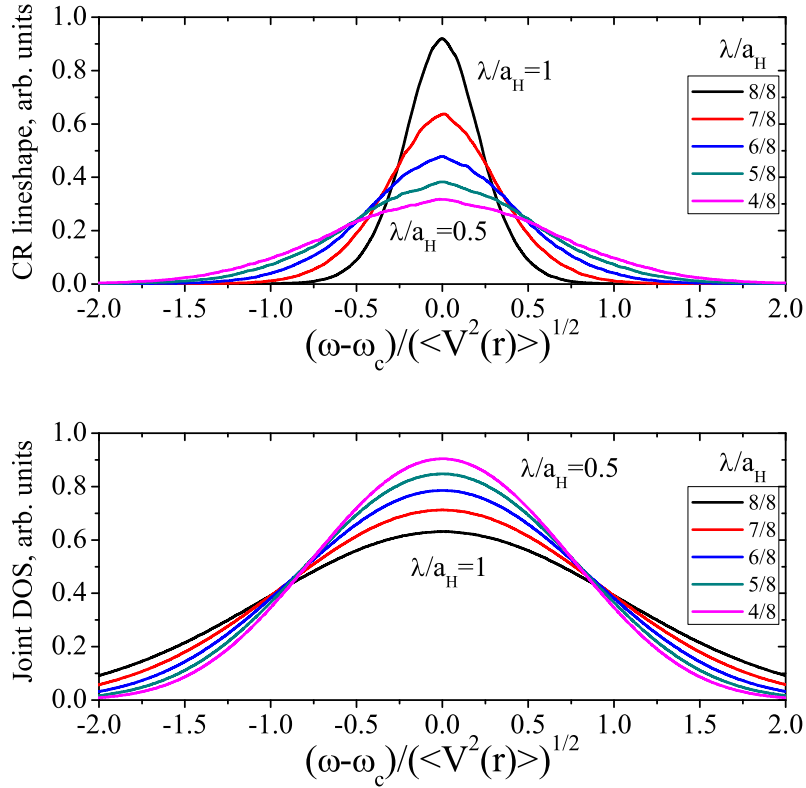


Рис. 4.10: Форма линии циклотронного резонанса (а) и совместной плотности состояний нижних уровней Ландау (b) для хаотических потенциалов с разным отношением корреляционной длины λ к магнитной длине a_H при фиксированной амплитуде хаотического потенциала $V = \sqrt{\langle V_{imp}^2(\mathbf{r}) \rangle}$.

совместная плотность состояний уширяется, в то время как ширина линии циклотронного резонанса быстро убывает, при $\lambda = a_H$ ширины спектров отличаются уже более чем в три раза. Причиной резкого уменьшения ширины линии циклотронного резонанса с ростом параметра λ/a_H служит квазиклассический характер локализации в случае плавного хаотического потенциала. Поскольку в этом случае реализуется когерентная структура последовательных уровней Ландау, и квантово-механическое движение на разных уровнях Ландау происходит по одинаковым траекториям (см. рис. 2.3), то оптические переходы разрешены лишь между состояниями, разность энергий которых мало отличается от циклотронной по сравнению с шириной уровней Ландау. Заметим, что влияние плавности

хаотического потенциала сказывается на спектрах циклотронного резонанса сильнее, чем на ширинах квантово-холловских плато и пиковых величинах продольной проводимости. Именно, увеличение параметра λ/a_H с 0.5 до 1 привело к уменьшению ширины линии более чем в два раза, в то время как эффекты, заметные на графиках рис. 3.7,3.6 при том же изменении λ/a_H , на порядок слабее. Таким образом, вид хаотического потенциала примесей и дефектов существенно сказывается не только на качестве плато целочисленного квантового эффекта Холла и пиковых величинах продольной проводимости, но и на форме и ширине линии циклотронного резонанса.

4.4 Выводы

- Изучен спектр электронных состояний в одиночной и двойной прямоугольных квантовых ямах в наклонном магнитном поле. Предложена наглядная вариационная волновая функция, с высокой точностью описывающая энергию основного состояния. Получена простая формула для оценки степени подавления расщепления симметричного и антисимметричного состояний в двойных квантовых ямах наклонным магнитным полем.
- Показано, что наклонное магнитное поле подавляет экспериментально наблюдаемое в разъединенных гетероструктурах II типа InAs/GaSb расщепление линии циклотронного резонанса, связанное с подмешиванием электронных и дырочных состояний.
- Изучен циклотронный резонанс в условиях целочисленного квантового эффекта Холла. Показано, что вид хаотического потенциала примесей и дефектов существенно влияет на ширину и форму линии циклотронного резонанса. Сильный рост отношения ширины уровней Ландау к ширине линии циклотронного резонанса обнаружен уже при значении параметра $\lambda/a_H \gtrsim 0.5$.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Аналитически и численно изучен спектр носителей заряда и структура двумерных электронных состояний в сильном магнитном поле в рамках модели невзаимодействующих носителей, находящихся в хаотическом потенциале примесей и дефектов, амплитуда которого меньше циклотронной энергии. Предложен подход к вычислению плотности состояний, основанный на методе моментов.
- Показано, что в случае плавного хаотического потенциала имеется сильная корреляция в структуре последовательных уровней Ландау, которая связана с квазиклассическим характером движения в плавном потенциале и может быть использована в аналитических расчетах. В случае резкого хаотического потенциала такого рода корреляции отсутствуют.
- Предложена модель равномерно делокализованных уровней Ландау, в рамках которой коэффициенты разложения волновых функций, отвечающих движению в магнитном поле и хаотическом потенциале, по базисным волновым функциям считаются случайными величинами, некоррелированными с конкретной реализацией хаотического потенциала. Показано, что в рамках такой модели получается правильный ответ для степени подмешивания уровней Ландау, но не для плотности состояний.
- Изучено влияние самосогласованного электростатического потенциала на спектр двумерных электронных состояний в сильном магнитном поле при

условии заполнения более чем одной подзоны размерного квантования. Показано, что в случае строго поперечной ориентации имеются диапазоны концентраций/магнитных полей, в которых реализуется вырождение двух или более уровней Ландау, относящихся к разным подзонам размерного квантования. Наклон магнитного поля относительно оси квантовой ямы приводит к возникновению энергетической щели между этими уровнями, однако величина щели остается практически постоянной в том же диапазоне параметров.

- Изучено влияние асимметричности хаотического потенциала на квантово-холловские кривые. Показано, что асимметрия хаотического потенциала приводит к двум эффектам: уменьшению ширины плато целочисленного квантового эффекта Холла и сдвигу факторов заполнения, соответствующих переходам между соседними плато, в сторону больших или меньших целых значений в зависимости от притягивающего или отталкивающего характера потенциала преобладающих примесей.
- Показано, что вид хаотического потенциала примесей оказывает существенное влияние на зависимости компонент тензора проводимости от фактора заполнения. В случае плавного хаотического потенциала плато целочисленного квантового эффекта Холла ярко выражены, а их ширина практически не зависит от номера плато. Пиковые величины продольной проводимости в этом случае также не зависят от номера уровня Ландау n , уменьшаясь с ростом корреляционной длины потенциала λ .
- Уменьшение корреляционной длины хаотического потенциала λ приводит к сужению квантово-холловских плато вследствие ухудшения условий локализации. В случае резкого хаотического потенциала ярко выраженными остаются лишь несколько первых плато, а пиковые величины продольной проводимости приобретают приближенно линейную зависимость от номера уровня Ландау n . Величина первого пика, соответствующего $n = 0$, состав-

ляет $0.55e^2/h$, второго пика, соответствующего $n = 1$, -- $1.08e^2/h$.

- Показано, что отличие рассчитанного пикового значения $\sigma_{xx}^{(0)} \approx 0.55e^2/h$ от предсказываемого в рамках самосогласованного борновского приближения значения $0.32e^2/h$ связано с двумя факторами – поправкой к квадрату плотности состояний, составляющей 28%, и поправкой к усредненному квадрату матричного элемента оператора скорости, составляющей 35%.
- Изучен спектр электронных состояний в одиночной и двойной прямоугольных квантовых ямах в наклонном магнитном поле. Предложена наглядная вариационная волновая функция, с высокой точностью описывающая энергию основного состояния. Получена простая формула для оценки степени подавления расщепления симметричного и антисимметричного состояний в двойных квантовых ямах наклонным магнитным полем.
- Показано, что наклонное магнитное поле подавляет экспериментально наблюдаемое в разьединенных гетероструктурах II типа InAs/GaSb расщепление линии циклотронного резонанса, связанное с подмешиванием электронных и дырочных состояний.
- Изучен циклотронный резонанс в условиях целочисленного квантового эффекта Холла. Показано, что вид хаотического потенциала примесей и дефектов существенно влияет на ширину и форму линии циклотронного резонанса. Сильный рост отношения ширины уровней Ландау к ширине линии циклотронного резонанса обнаружен уже при значении параметра $\lambda/a_H \gtrsim 0.5$.

Публикации автора по теме диссертации

- [A1] А.А. Грешнов, Э.Н. Колесникова, Г.Г. Зегря. Пиковые величины продольной проводимости в режиме целочисленного квантового эффекта Холла для резкого и плавного хаотических потенциалов // *ЖЭТФ* **134**, 577–586 (2008).
- [A2] A.A. Greshnov, G.G. Zegrya. Theory of σ_{xx} peaks in the IQHE regime with correlated disorder potential // *Physica E* **40**, 1185–1188 (2008).
- [A3] А.А. Грешнов, Г.Г. Зегря. Целочисленный квантовый эффект Холла в коррелированном хаотическом потенциале // *ФТП* **41**, 1347–1352 (2007).
- [A4] А.А. Грешнов, Э.Н. Колесникова, Г.Г. Зегря. Точность квантования холловской проводимости в образце конечных размеров: степенной закон // *ФТП* **40**, 93–97 (2006).
- [A5] А.А. Грешнов, Г.Г. Зегря, Ю.Б. Васильев, С.Д. Сучалкин, Б.Ю. Мельцер, С.В. Иванов, П.С. Копьев. Циклотронный резонанс в гетероструктуре InAs/GaSb в наклонном магнитном поле // *Письма ЖЭТФ* **76**, 258–262 (2002).
- [A6] A.A. Greshnov, E.N. Kolesnikova, G.G. Zegrya. Spectrum of carriers and optical properties of 2d heterostructures in tilted magnetic field // *Int. J. Nanosci.* **2**, 401–404 (2003).
- [A7] А.А. Грешнов, Г.Г. Зегря. Эффекты самосогласованного электростатического

потенциала в квантовых ямах с несколькими уровнями размерного квантования в сильных магнитных полях // ФТП **42**, 994–997 (2008).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Г.Г. Зегря. Работа под его руководством, его внимание и постоянная поддержка были для меня очень важны. Большое влияние на работу в секторе теоретических основ микроэлектроники всегда оказывало общение с его сотрудниками и участие в семинарах.

Также я признателен участникам Низкоразмерного и Чайного семинаров ФТИ. Обсуждение на этих семинарах работ, вошедших в диссертацию, принесло мне большую пользу.

Я благодарен М.М. Глазову, Р.А. Сурису, Н.С. Аверкиеву, П.С. Штернину, В.Ю. Качоровскому, А.П. Дмитриеву, М.А. Семиной, И.С. Бурмистрову, А.Д. Мирлину и В.А. Зюзину за полезные обсуждения и ценные замечания.

Литература

- [1] *Shik A.* Quantum Wells: Physics and Electronics of Two-dimensional Systems. — World Scientific, 1997.
- [2] *Бонч-Бруевич В. Л., Калашиников С. Г.* Физика полупроводников. — М. Наука, 1990.
- [3] Landau Level Spectroscopy / Ed. by G. Landwehr, E. I. Rashba. — North-Holland, 1990.
- [4] *von Klitzing K., Dorda G., Pepper M.* Realization of a resistance standart based on fundamental constants // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 45. — P. 494.
- [5] *Горьков Л. П., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* Проводимость частицы в двумерном случайном потенциале // *Письма ЖЭТФ.* — 1979. — Vol. 30. — P. 248.
- [6] Magnetoresistance and Hall effect in a disordered two-dimensional electron gas / B. L. Altshuler, D. Khmel'nitzkii, A. I. Larkin, P. A. Lee // *Phys. Rev. B.* — 1980. — Vol. 22, no. 11. — Pp. 5142–5153.
- [7] Magneto-oscillatory conductance in silicon surfaces / A. B. Fowler, F. F. Fang, W. E. Howard, P. J. Stiles // *Phys. Rev. Lett.* — 1966. — Vol. 16, no. 20. — Pp. 901–903.
- [8] *Kubo R., Miyake S. J., Hashitsume N.* // Solid State Physics. — Academic Press, New York, 1965. — Vol. 17. — P. 269.

- [9] *Ando T., Uemura Y.* Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. I. Characteristics of level broadening and transport under strong fields // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1974. — Vol. 36. — P. 959.
- [10] *Ando T.* Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. II. Single-site approximation under strong fields // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1974. — Vol. 36. — P. 1521.
- [11] *Ando T.* Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. III. Many-site approximation // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1974. — Vol. 37. — P. 622.
- [12] *Ando T.* Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. IV. Oscillatory conductivity // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1974. — Vol. 37. — P. 1233.
- [13] *Isihara A., Smrcka L.* Density and magnetic field dependences of the conductivity of two-dimensional electron systems // *J. Phys. C: Solid State Phys.* — 1986. — Vol. 19. — P. 6777.
- [14] *Raikh M. E., Shahbazyan T. V.* High Landau levels in a smooth random potential for two-dimensional electrons // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 47, no. 3. — Pp. 1522–1531.
- [15] *Dmitriev I. A., Mirlin A. D., Polyakov D. G.* Cyclotron-resonance harmonics in the ac response of a 2d electron gas with smooth disorder // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 91. — P. 226802.
- [16] Theory of magneto-oscillation effects in quasi-two-dimensional semiconductor structures / N. S. Averkiev, L. E. Golub, S. A. Tarasenko, M. Willander // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 2001. — Vol. 13. — P. 2517.

- [17] *Lakhani A. A., Stiles P. J.* Critical tests of the theory of magnetoconductance in two dimensions // *Phys. Rev. B.* — 1976. — Vol. 13, no. 12. — Pp. 5386–5391.
- [18] *Tsukada M.* On the tail states of the Landau subbands in MOS structures under strong magnetic field // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1976. — Vol. 41. — P. 1466.
- [19] *Aoki H.* Transport properties of two-dimensional disordered electron systems in strong magnetic fields // *J. Phys. C: Solid State Phys.* — 1978. — Vol. 11. — P. 3823.
- [20] Electron localization in silicon inversion layers under strong magnetic fields / *S. Kawaji, J. Wakabayashi, M. Namiki, K. Kusuda* // *Surface Sci.* — 1978. — Vol. 73. — P. 121.
- [21] Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions / *E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, T. V. Ramakrishnan* // *Phys. Rev. Lett.* — 1979. — Vol. 42, no. 10. — Pp. 673–676.
- [22] *Jeckelmann B., Jeanneret B.* The quantum Hall effect as an electrical resistance standart // *Rep. Prog. Phys.* — Vol. 64. — P. 1603.
- [23] Квантовый эффект Холла / Под ред. Р. Пренджа, С. Гирвина. — М. Мир, 1989.
- [24] *Niu Q., Thouless D. J., Wu Y.-S.* Quantized Hall conductance as a topological invariant // *Phys. Rev. B.* — 1985. — Vol. 31, no. 6. — Pp. 3372–3377.
- [25] *Huckestein B.* Scaling theory of the integer quantum Hall effect // *Rev. Mod. Phys.* — 1995. — Vol. 67, no. 2. — Pp. 357–396.
- [26] *Kramer B., Ohtsuki T., Kettmann S.* Random network models and quantum phase transitions in two dimensions // *Phys. Rep.* — 2005. — Vol. 417. — P. 211.

- [27] Experimental studies of the localization transition in the quantum Hall regime / S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing, K. Ploog // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46, no. 3. — Pp. 1596–1602.
- [28] *Kivelson S., Lee D.-H., Zhang S.-C.* Global phase diagram in the quantum Hall effect // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46, no. 4. — Pp. 2223–2238.
- [29] *Lee D.-H., Wang Z., Kivelson S.* Quantum percolation and plateau transitions in the quantum Hall effect // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 70, no. 26. — Pp. 4130–4133.
- [30] *Pruisken A. M. M.* On localization in the theory of the quantized Hall effect: A two-dimensional realization of the θ -vacuum // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B235. — P. 277.
- [31] *Levine H., Libby S. B., Pruisken A. M. M.* Theory of the quantized Hall effect (I) // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B240. — P. 30.
- [32] *Levine H., Libby S. B., Pruisken A. M. M.* Theory of the quantized Hall effect (II) // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B240. — P. 49.
- [33] *Levine H., Libby S. B., Pruisken A. M. M.* Theory of the quantized Hall effect (III) // *Nucl. Phys.* — 1984. — Vol. B240. — P. 71.
- [34] *Хмельницкий Д. Е.* О квантовании холловской проводимости // *Письма ЖЭТФ.* — 1983. — Vol. 38. — P. 454.
- [35] *Pruisken A. M. M., Burmistrov I. S.* The instanton vacuum of generalized CP^{N-1} model // *Annals of Physics.* — 2005. — Vol. 316. — P. 285.
- [36] *Levine H., Libby S. B., Pruisken A. M. M.* Electron delocalization by a magnetic field in two dimensions // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — Vol. 51, no. 20. — Pp. 1915–1918.

- [37] *Wei H. P., Tsui D. C., Pruisken A. M. M.* Localization and scaling in the quantum hall regime // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Vol. 33, no. 2. — Pp. 1488–1491.
- [38] Universal conductivity at the quantum Hall liquid to insulator transition / D. Shahar, D. C. Tsui, M. Shayegan et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74, no. 22. — Pp. 4511–4514.
- [39] Quantum Hall liquid-to-insulator transition in $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}/\text{InP}$ heterostructures / W. Pan, D. Shahar, D. C. Tsui et al. // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 55, no. 23. — Pp. 15431–15433.
- [40] *Coleridge P. T.* Universality in an integer quantum Hall transition // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 60, no. 7. — Pp. 4493–4496.
- [41] Phase diagram of the integer quantum hall effect in p-type germanium / M. Hilke, D. Shahar, S. H. Song et al. // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62, no. 11. — Pp. 6940–6943.
- [42] Observation of a quantized Hall resistivity in the presence of mesoscopic fluctuations / E. Peled, D. Shahar, Y. Chen et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90, no. 24. — P. 246802.
- [43] Effect of long-range potential fluctuations on scaling in the integer quantum Hall effect / H. P. Wei, S. Y. Lin, D. C. Tsui, A. M. M. Pruisken // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 45, no. 7. — Pp. 3926–3928.
- [44] Size-dependent analysis of the metal-insulator transition in the integral quantum Hall effect / S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing, K. Ploog // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 67, no. 7. — Pp. 883–886.
- [45] *Rokhinson L. P., Su B., Goldman V. J.* Peak values of conductivity in integer and fractional quantum Hall effect // *Solid State Commun.* — 1995. — Vol. 96. — P. 309.

- [46] Скейлинг в режиме квантового эффекта холла и локализация дырок в гетероструктурах p-Ge/Ge_{1-x}Si_x / Ю. Г. Арапов, Н. А. Городилов, В. Н. Неверов и др. // *ФТП*. — 1997. — Т. 31. — С. 273.
- [47] High frequency conductivity in the quantum Hall effect / F. Hols, U. Zeitler, R. J. Haug, K. Pierz // *Physica B*. — 2001. — Vol. 298. — P. 88.
- [48] Мильников Г. В., Соколов И. М. О "квазиклассической" локализации в магнитном поле // *Письма ЖЭТФ*. — 1988. — Vol. 48. — P. 494.
- [49] Huo Y., Hetzel R. E., Bhatt R. N. Universal conductance in the lowest Landau level // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 70, no. 4. — Pp. 481–484.
- [50] Yang S.-R. E., MacDonald A. H., Huckestein B. Interactions, localization, and the integer quantum Hall effect // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74, no. 16. — Pp. 3229–3232.
- [51] Gammel B. M., Brenig W. Scaling of the static conductivity in the quantum Hall effect // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73, no. 24. — Pp. 3286–3289.
- [52] Gammel B. M., Evers F. Universal scaling and diagonal conductivity in the integral quantum Hall effect // *Phys. Rev. B*. — 1998. — Vol. 57, no. 23. — Pp. 14829–14832.
- [53] Sinova J., Meden V., Girvin S. M. Liouvillian approach to the integer quantum Hall effect transition // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 62, no. 3. — Pp. 2008–2015.
- [54] Schweitzer L., Markos P. Universal conductance and conductivity at critical points in integer quantum Hall systems // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 256805.
- [55] Fogler M. M., Shklovskii B. I. Cyclotron resonance in a two-dimensional electron gas with long-range randomness // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80, no. 21. — Pp. 4749–4752.

- [56] *Иоффе Л. Б., Ларкин А. И.* Флуктуационные уровни и циклотронный резонанс в случайном потенциале // *ЖЭТФ*. — 1981. — Т. 81. — С. 1048.
- [57] *Ando T.* Theory of cyclotron resonance lineshape in a two-dimensional electron system // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1975. — Vol. 38. — P. 989.
- [58] Suppression of chaotic dynamics and localization of two-dimensional electrons by a weak magnetic field / M. M. Fogler, A. Y. Dobin, V. I. Perel, B. I. Shklovskii // *Phys. Rev. B*. — 1997. — Vol. 56. — P. 6823.
- [59] Scaling in spin-degenerate landau levels in the integer quantum hall effect / S. W. Hwang, H. P. Wei, L. W. Engel et al. // *Phys. Rev. B*. — 1993. — Vol. 48, no. 15. — Pp. 11416–11419.
- [60] Энергетический спектр двумерных электронов в наклонном магнитном поле / В. Е. Кирпичев, И. В. Кукушкин, В. Б. Тимофеев, В. И. Фалько // *Письма ЖЭТФ*. — 1990. — Vol. 51. — P. 383.
- [61] *Mitrinović D. M., Milanović V., Ikonić Z.* Electronic structure of semiconductor quantum wells in a tilted magnetic field // *Phys. Rev. B*. — 1996. — Vol. 54, no. 11. — Pp. 7666–7669.
- [62] Coupling of geometric confinement and magnetic confinement in $\text{In}_{0.09}\text{Ga}_{0.91}\text{As}/\text{GaAs}$ quantum wells in magnetic fields with varying orientations / M. Bayer, A. A. Dremin, V. D. Kulakovskii et al. // *Phys. Rev. B*. — 1995. — Vol. 52, no. 20. — Pp. 14728–14738.
- [63] *Lyo S. K.* Effect of electron-hole separation on the landau-level photoluminescence in layered structures in a tilted magnetic field: Magneto-stark effect // *Phys. Rev. B*. — 1998. — Vol. 58, no. 16. — Pp. R10187–R10190.

- [64] Conduction-valence landau level mixing effect / J.-C. Chiang, S.-F. Tsay, Z. M. Chau, I. Lo // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77, no. 10. — Pp. 2053–2056.
- [65] $k \cdot p$ finite-difference method: Band structures and cyclotron resonances of $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{Sb}/\text{InAs}$ quantum wells / S.-F. Tsay, J.-C. Chiang, Z. M. Chau, I. Lo // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 56, no. 20. — Pp. 13242–13251.
- [66] Halvorsen E., Galperin Y., Chao K. A. Optical transitions in broken gap heterostructures // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61, no. 24. — Pp. 16743–16749.
- [67] Kuehnel F., Pryadko L. P., Dykman M. I. Single-electron magnetoconductivity of a nondegenerate two-dimensional electron system in a quantizing magnetic field // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 63, no. 16. — P. 165326.
- [68] Trugman S. A. Localization, percolation, and the quantum Hall effect // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Vol. 27, no. 12. — Pp. 7539–7546.
- [69] The effect of carrier density gradients on magnetotransport data measured in Hall bar geometry / L. A. Ponomarenko, D. T. N. de Lang, A. de Visser et al. // *Solid State Commun.* — 2004. — Vol. 130. — P. 705.
- [70] New insights into the plateau–insulator transition in the quantum Hall regime / L. A. Ponomarenko, D. T. N. de Lang, A. de Visser et al. // *Physica E.* — 2004. — Vol. 22. — P. 236.
- [71] Observation of the quantized Hall insulator in the quantum critical regime of the two-dimensional electron gas / D. T. N. de Lang, L. A. Ponomarenko, A. de Visser, A. M. M. Pruisken // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75. — P. 035313.
- [72] Электронная теория неупорядоченных полупроводников / В. Л. Бонч-Бруевич, И. П. Звягин, Р. Кайпер и др. — М. Мир, 1981.

- [73] *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. Физматгиз, 1963.
- [74] Self-consistent calculation of the electronic properties of a selectively doped $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs quantum well under high magnetic fields / J. Sanchez-Dehesa, F. Meseguer, F. Borondo, J. C. Maan // *Phys. Rev. B.* — 1987. — Vol. 36, no. 9. — Pp. 5070–5073.
- [75] Magnetic-field-dependent self-consistent electronic structure of an inversion layer in the two-subband state / S. Trott, G. Paasch, G. Gobsch, M. Trott // *Phys. Rev. B.* — 1989. — Vol. 39, no. 14. — Pp. 10232–10235.
- [76] Second subband population of the two-dimensional electron gas in strongly coupled GaAs/ $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$ double quantum wells / I. Lo, J. K. Tsai, P. C. Ho et al. // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67, no. 19. — P. 195317.
- [77] Magnetization of a two-dimensional electron gas with a second filled subband / M. R. Schaapman, U. Zeitler, P. C. M. Christianen et al. // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68, no. 19. — P. 193308.
- [78] *Kohn W.* Cyclotron resonance and de Haas-van Alphen oscillations of an interacting electron gas // *Phys. Rev.* — 1961. — Vol. 123, no. 4. — Pp. 1242–1244.
- [79] Experimental evidence for a two-dimensional quantized Hall insulator / M. Hilke, D. Shahar, S. H. Song et al. // *Nature (London).* — 1998. — Vol. 395. — P. 675.
- [80] *Imry Y.* Introduction to Mesoscopic Physics. — Oxford University Press, 1997.
- [81] *Cobden D. H., Kogan E.* Measurement of the conductance distribution function at a quantum Hall transition // *Phys. Rev. B.* — 1996. — Vol. 54, no. 24. — Pp. R17316–R17319.

- [82] *Wegner F.* Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential superfield representation for interacting systems // *Z. Phys. B.* — 1983. — Vol. 51. — P. 279.
- [83] *Fang F. F., Stiles P. J.* Effects of a tilted magnetic field on a two-dimensional electron gas // *Phys. Rev.* — 1968. — Vol. 174, no. 3. — Pp. 823–828.
- [84] Quantum Hall ferromagnet in a parabolic well / G. M. Gusev, A. A. Quivy, T. E. Lamas et al. // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67, no. 15. — P. 155313.
- [85] *Гольдман И. И., Кривченко В. Д.* Сборник задач по квантовой механике. — М. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. — С. 78–81.
- [86] *Altarelli M.* Electronic structure and semiconductor-semimetal transition in InAs-GaSb superlattices // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Vol. 28, no. 2. — Pp. 842–845.
- [87] *Heitman D., Ziesmann M., Chang L. L.* Cyclotron-resonance oscillations in InAs quantum wells // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Vol. 34, no. 10. — Pp. 7463–7466.
- [88] Cyclotron-resonance oscillations in a two-dimensional electron-hole system / J. Kono, B. D. McCombe, J.-P. Cheng et al. // *Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 50, no. 16. — Pp. 12242–12245.
- [89] Cyclotron resonance of electron-hole systems in InAs/GaSb/AlSb / R. J. Warburton, B. Brar, C. Gauer et al. // *Solid State Electronics.* — 1996. — Vol. 40. — P. 679.
- [90] Evidence of a hybridization gap in "semimetallic" InAs/GaSb systems / M. J. Yang, C. H. Yang, B. R. Bennett, B. V. Shanabrook // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78, no. 24. — Pp. 4613–4616.

- [91] Minigaps and novel giant negative magnetoresistance in InAs/GaSb semimetallic superlattices / M. Lakrimi, S. Khym, R. J. Nicholas et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79, no. 16. — Pp. 3034–3037.
- [92] Ground state of a two-dimensional coupled electron-hole gas in InAs/GaSb narrow gap heterostructures / T. P. Marlow, L. J. Cooper, D. D. Arnone et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82, no. 11. — Pp. 2362–2365.
- [93] *Samsonidze G. G., Zegrya G. G.* Auger recombination in semiconductor quantum wells in a magnetic field // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 63, no. 7. — P. 075317.