

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
им. А.Ю. Ишлинского РАН

На правах рукописи



КАЛИНИЧЕНКО Владимир Анатольевич

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ
В ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ
ФАРАДЕЯ**

01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2010

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ЖИДКОСТИ - ОБЗОР. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА.....	9
1.1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЖИДКОСТИ – ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ.....	10
1.1.1. Поверхностные волны Фарадея	11
1.1.2. Внутренние волны Фарадея.....	21
1.1.3. Эффекты вырождения в волнах Фарадея.....	23
1.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ	24
1.2.1. Предельный профиль стоячей поверхностной волны.....	25
1.2.2. Разрушение стоячих поверхностных волн	28
1.2.3. Разрушение стоячих внутренних волн	30
1.2.4. Массоперенос в стоячих волнах	33
1.3. ЛАБОРАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН ФАРАДЕЯ - ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА ПР-2М	37
ГЛАВА 2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ	44
2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ	44
2.2. ДИАГРАММЫ УСТОЙЧИВОСТИ.	49
2.3. РЕЗОНАНСНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ. ВОЛНОВЫЕ ПРОФИЛИ.....	53
2.4. ЭФФЕКТЫ ВЯЗКОГО ЗАТУХАНИЯ.....	60
2.5. ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ	67
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	71
ГЛАВА 3. ЭФФЕКТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ.....	73
3.1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА	74
3.2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.	75
3.3. ДИАГРАММЫ УСТОЙЧИВОСТИ.....	76
3.4. РЕЗОНАНСНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ	82
3.5. ЭФФЕКТЫ ВЯЗКОГО ЗАТУХАНИЯ.....	86
3.6. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ФАРАДЕЯ	92
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	99
ГЛАВА 4. ЭФФЕКТЫ ВЫРОЖДЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНОСТИ В ВОЛНАХ ФАРАДЕЯ.....	101
4.1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА	102
4.2. ЭФФЕКТ КРИТИЧЕСКОЙ ГЛУБИНЫ	104
4.3. СОСТАВНЫЕ ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ	111
4.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ МОД	115
4.5. СРЫВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ.....	119
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	128
ГЛАВА 5. ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА И РАЗРУШЕНИЕ ВОЛН ФАРАДЕЯ	130
5.1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА	131
5.2. ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ	132
5.3. РАЗРУШЕНИЕ ВОЛН ФАРАДЕЯ И ФОРМИРОВАНИЕ СТРУЙНОГО ВСПЛЕСКА	143
5.4. РАЗВИТИЕ СДВИГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПРИУЗЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ	165
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	175
ГЛАВА 6. ВТОРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ВОЛНАХ ФАРАДЕЯ	177
6.1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА	178
6.2. ЭФФЕКТ МАССОПЕРЕНОСА В СТОЯЧИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ.....	179
6.3. ЭФФЕКТ МАССОПЕРЕНОСА В СТОЯЧИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ	190
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	194
ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ	195
ЛИТЕРАТУРА	197

АННОТАЦИЯ

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию волн Фарадея. Этим термином в гидродинамике определяют стоячие волны, возбуждаемые при параметрическом резонансе в жидкости, подверженной вертикальным колебаниям. Частота этих волн кратна половине частоты колебаний сосуда с жидкостью, причем в отличие от чисто вынужденных стоячих волн только учет нелинейных эффектов позволяет определить характеристики установившегося волнового режима.

В работе методами экспериментальной гидродинамики исследованы гравитационные волны Фарадея на свободной поверхности однородной жидкости и на границе раздела двухслойной жидкости. Установлены новые и малоизученные эффекты в поверхностных и внутренних волнах Фарадея: механизмы разрушения поверхностных и внутренних волн, наличие медленных вторичных стационарных течений в колеблющейся жидкости, эффект критической глубины для поверхностных волн, эффект срыва параметрических колебаний жидкости. Предложены теоретические модели, описывающие наблюдаемые в эксперименте явления.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы определяется широтой и многообразием нелинейных колебаний жидкости в природе и технике. Одной из форм таких волновых движений являются стоячие волны в ограниченных объемах жидкости, подверженной вертикальным колебаниям. Вопросы, связанные с возбуждением волн Фарадея, традиционно возникают в контексте развития авиационно-космической техники, гражданского строительства, ядерной технологии, транспортировки нефтепродуктов морским и наземным транспортом. В гидродинамике волновые движения жидкости при параметрическом резонансе представляют не только прикладной, но и фундаментальный интерес. Традиционно эти волны исследуются и теоретически, и экспериментально. В значительной мере интерес к волнам Фарадея обусловлен именно возможностью изучения волновых движений жидкости с точки зрения общей теории волн. Нелинейные по своей природе волны Фарадея обладают рядом малоисследованных эффектов, характерных для стоячих волн большой амплитуды. К ним относятся механизмы разрушения стоячих волн, процесс массопереноса в колеблющейся жидкости и особенности взаимодействия стоячих волн с размываемым слоем донных осадков.

Объектами исследования в диссертации являются поверхностные и внутренние волны Фарадея, возбуждаемые в колеблющемся в вертикальном направлении сосуде с жидкостью.

Цель работы – экспериментальное исследование новых и малоизученных эффектов в стоячих волнах, возбуждаемых при параметрическом резонансе в однородной и двухслойной жидкости.

Направление исследований

1. Создание экспериментальной установки для возбуждения гравитационных волн Фарадея в однородной и двухслойной жидкости.

2. Разработка методологического подхода к лабораторным экспериментам по исследованию параметрического возбуждения колебаний жидкостей со свободной поверхностью и границей раздела.
3. Развитие методов наблюдений за волновыми движениями жидкости.
4. Экспериментальное изучение волн Фарадея и построение теоретической модели исследуемого явления.
5. Использование параметрического резонанса в жидкости как способа генерации стоячих гравитационных волн.

Методы исследований, достоверность и обоснованность результатов. Изучение поверхностных и внутренних волн Фарадея проводилось на специально созданной установке, позволяющей сообщать сосуду с жидкостью гармонические колебания в вертикальном направлении с заданной частотой и амплитудой. Основным способом наблюдений является регистрация волновых процессов жидкости посредством современных методов высокоскоростной видеозаписи. Характеристики волн определялись при обработке материалов видеосъемки колебаний свободной поверхности жидкости или границы раздела двухслойной жидкости. Интерпретация полученных результатов проводилась на основании представленных теоретических моделей. Достоверность результатов подтверждается данными прямых наблюдений колебаний жидкости. Построение теоретических моделей базируется на основных уравнениях гидродинамики и теории колебаний.

На защиту выносятся:

1. Эффект возбуждения поверхностных и внутренних гравитационных волн Фарадея и его теоретическое описание.
2. Механизм срыва параметрических колебаний жидкости.
3. Эффект критической глубины в случае поверхностных волн Фарадея.
4. Механизм разрушения поверхностных волн Фарадея

5. Механизм разрушения внутренних волн Фарадея
6. Эффект массопереноса в поверхностных и внутренних волнах Фарадея.

Научная новизна

1. Разработаны экспериментальные методы изучения параметрического резонанса в жидкости, включающие строго контролируемый способ возбуждения гравитационных волн Фарадея, прецизионную регистрацию волновых движений жидкости с целью выявления ряда новых гидродинамических явлений.
2. Установлена возможность возбуждения волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости.
3. Разработана модель срыва параметрических колебаний жидкости.
4. Обнаружен эффект критической глубины для поверхностных волн Фарадея.
5. Разработаны модели разрушения поверхностных и внутренних волн Фарадея.
6. Установлен эффект массопереноса в поверхностных и внутренних волнах Фарадея.

Практическая ценность работы

1. Выявленные в диссертации особенности возбуждения волн Фарадея являются основой для тестирования существующих и построения новых гидродинамических моделей параметрического резонанса в жидкости.
2. Разработанные в диссертации модели разрушения волн Фарадея могут быть использованы в геофизических приложениях – воздействие набегающих морских волн на вертикальную стенку и перемешивание океанских вод.
3. Установленный в работе эффект массопереноса в волнах Фарадея представляет интерес для ряда прикладных задач, связанных с переносом примесей и образованием донных форм в прибрежной зоне океана.

4. Параметрический резонанс в жидкости как эффективный способ генерации стоячих волн может быть использован при лабораторном моделировании волновых движений жидкости в сосудах сложной геометрической формы.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения работ в рамках задания (темы) «Разработка математических моделей волновых процессов, описываемых обобщенными краевыми задачами» (гос. рег. № 01.20.0108554); «Сложные жидкости в технологических процессах и подземная гидромеханика» (2006-2008 и 2009-2011); грантов РФФИ №97-05-64472, №99-01-01080, № 05-01-00043, №08-01-00180; межсекционных программ ОЭММПУ РАН «Динамика и акустика неоднородных жидкостей, газожидкостных систем и суспензий» (2003-2006), «Динамика многофазных и неоднородных жидкостей» (2006-2008), «Механика неоднородных жидкостей в полях внешних сил»; программа Президиума РАН «Фундаментальные проблемы океанологии»; государственного контракта «Проведение исследований в области рационального природопользования с использованием уникальных установок».

Ниже представлен список публичных научных мероприятий, на которых были доложены материалы диссертации: III и IV школа-семинар «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости» (Колюбякино, 1980 и 1982), VIII и IX Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (Львов, 1981; Тбилиси, 1985), II и III Всесоюзный съезд океанологов (Ялта, 1982; Ленинград, 1987), Int. Symp.IUTAM on Nonlinear. Water Waves (Japan, Tokyo, 1987), Всесоюзная конференция по проблемам стратифицированных течений (Саласпилс, 1988), 6th ASEAN Conference on Energy Technology (Bangkok, 1995), ASME Fluids' Engineering Division Summer Meeting (Vancouver, Canada. 1997), 5th ASIAN Symposium on Visualization (Puspiptek Serpong, Indonesia, 1998), 4th

Euromech Nonlinear Oscillation Conference (Moscow, 1989), Int. Conf. Modern Approaches to Flows in Porous Media (Moscow, 1999), VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001), 57th RGJ Mechanical Seminar Series: Mechanical Engineering Research and Applications (Bangkok, 2007), Международная конференция “Потоки и структуры в жидкостях” (Москва, 2001, 2005, 2009; Санкт-Петербург, 2007), итоговый научный семинар-совещании по программе ОЭ-14 «Динамика многофазных и неоднородных жидкостей» (Москва, 2008), 3-я Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения” (Бийск, 2008); Семинары ИПМех РАН «Механика систем им. акад. А.Ю. Ишлинского», «Проблемы механики сплошной среды», «Прикладная механика сплошных сред», «Динамика природных систем» (1979-2009); Семинар по механике сплошных сред (Институт Механики МГУ, 2007); Семинар «Прикладная гидродинамика» (ИГиЛ СО РАН, 2009); Пермский городской гидродинамический семинар им. Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого (ПГУ, 2009); Ученый совет Физического направления Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН (2010).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 45 публикациях, в том числе 17 содержатся в изданиях, учитываемых ВАК Министерства образования и науки РФ при защитах докторских диссертаций.

Глава 1. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ЖИДКОСТИ - ОБЗОР. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Обзор представляет явление параметрического резонанса в жидкости – поверхностные и внутренние волны Фарадея. Рассматриваются закономерности и особенности возбуждения этих волн в однородной и двухслойной жидкости, причем неразрывно с обсуждением ранее известных положений приводятся результаты соискателя. Особое внимание уделено малоизученным в теории нелинейных волн эффектам – эффекту критической глубины, явлению массопереноса в стоячих волнах и механизмам их разрушения.

Приводится описание экспериментальной установки ПР-2М, использованной при лабораторном моделировании поверхностных и внутренних волн Фарадея.

Исследования динамики жидкости в неподвижном или колеблющемся сосуде имеет большое значение для решения практических задач авиационно-космической техники, гражданского строительства, ядерной технологии, транспортировки нефтепродуктов морским и наземным транспортом. С теоретической точки зрения задача о нелинейных волнах в сосуде, совершающем поступательные гармонические колебания с фиксированной амплитудой и частотой, также представляет значительный интерес, и этот раздел волновой гидродинамики в определенном смысле стал классическим [*Сретенский* (1977); *Моисеев, Румянцев* (1965); *Черноустько* (1969); *Ibrahim* (2005) и др.].

Движение жидкости в колеблющемся сосуде в рамках теории волн малой амплитуды рассматривалось в работах [*Сретенский* (1951); *Моисеев* (1953); *Benjamin, Ursell* (1954)]. При колебаниях сосуда с жидкостью в горизонтальной плоскости имеем вынужденные волновые движения

жидкости, частота которых в точности равна частоте колебаний сосуда, а высота волны может быть рассчитана в рамках линейной модели [Сретенский (1977)]. Решение нелинейной задачи может потребоваться только при описании волн большой высоты вблизи резонанса. Отметим, что при горизонтальных перемещениях сосуда на свободной поверхности жидкости возбуждаются только нечетные волновые моды.

Влияние вертикальных колебаний сосуда на поведение жидкости со свободной поверхностью или границей раздела носит разносторонний характер. Кроме резонансных движений, высокочастотные колебания сосуда могут при определенных условиях приводить к стабилизации неустойчивости Рэлея-Тейлора (напр., [Wolf (1969); Любимов, Любимова, Черепанов (2003)] и др.).

Под волнами Фарадея в обзоре понимаются стоячие гравитационные волны, возбуждаемые в однородной или двухслойной жидкости в сосуде, который совершает периодическое движение в направлении силы тяжести. Рассмотрение ограничено низкочастотными колебаниями жидкости в жестком сосуде в условиях идеального параметрического возбуждения, когда источник вертикальных колебаний сосуда с жидкостью имеет неограниченную мощность. При такой постановке проблемы можно пренебречь взаимодействием жидкость - стенки сосуда, а также влиянием сосуда с жидкостью на источник возбуждения колебаний.

1.1. Параметрический резонанс в жидкости – волны Фарадея

К параметрическому возбуждению или резонансу относят такой процесс в колебательной системе, при котором внешнее воздействие приводит непосредственно к относительно малым периодическим изменениям во времени параметров системы, что, в свою очередь, вызывает в системе стационарные колебания достаточно большой амплитуды. Колебания этого типа довольно полно изучены для механических и

электрических систем с конечным числом степеней свободы [Мандельштам и др. (1936); Каудерер (1961); Мандельштам (1972); Андронов, Витт, Хайкин (1981); Шмидт (1978);]. В меньшей степени явление параметрического резонанса исследовано для жидкостей.

Начало исследованиям параметрического резонанса в жидкости было положено экспериментами Фарадея по возбуждению гравитационно-капиллярных волн на свободной поверхности тонкого слоя жидкости, находящейся на вертикально колеблющейся пластинке [Faraday (1831)]. Фарадей отметил поразительный для того времени факт, что частота возникающих на поверхности волн вдвое меньше частоты колебаний пластины. Рэлей указал на параметрический характер возбуждаемых в экспериментах Фарадея волн [Стретт (Рэлей) (1955)].

В гидродинамике систематическое изучение параметрического возбуждения волн в жидкости начинается примерно с 50-х годов прошлого столетия в связи с нуждами аэрокосмической промышленности. Это было связано с необходимостью решения задачи о колебаниях жидкости в топливных баках [Abramson (1966); Микишев, Рабинович (1968); Колесников (2003); Богоряд и др. (1977); Луковской (1990)].

1.1.1. Поверхностные волны Фарадея

Большинство работ по изучению параметрического резонанса в однородной жидкости объединяет постановка эксперимента - рассматривается сосуд, совершающий колебания в вертикальном направлении. В системе координат, жестко связанной с сосудом, в уравнения гидродинамики к ускорению силы тяжести, входящему в коэффициенты уравнений или граничных условий (т.е. являющемуся параметром), добавляется периодически изменяющееся ускорение сосуда рис. 1-1.

Экспериментально исследовались различные формы движения жидкости. Так, например, в [Сорокин (1957); Brand, Nyborg (1965); Hashimoto, Sudo (1984); Kiyashko et al (1996)] изучалось возбуждение гравитационно-капиллярных волн, сопровождающееся фонтанированием капель жидкости, а также возникновением сложных пространственных структур и их разрушением.

Частотный диапазон возбуждения гравитационных волн на свободной поверхности жидкости в круговом цилиндрическом сосуде экспериментально исследован в [Benjamin, Ursell (1954)].

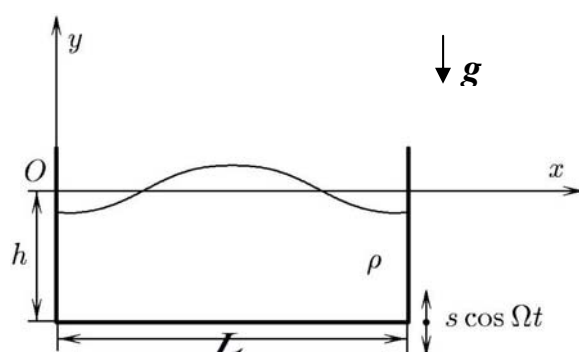


Рис. 1-1. Параметрическое возбуждение волн в жидкости:

$$g^* = -g \left(1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos \Omega t \right)$$

При вертикальных колебаниях сосуда движение жидкости характеризуется широким спектром частот, которые по величине могут отличаться от частоты внешнего воздействия. Экспериментально установлено, что даже при малых амплитудах движения сосуда высота возбуждаемых волн достигает больших значений в нескольких узких диапазонах частот внешнего воздействия - относительное равновесие жидкости становится неустойчивым и возникают ее интенсивные колебания. Теория этого явления была независимо разработана [Моисеев (1954); Benjamin, Ursell (1954); Болотин (1956)]. Показано, что малые колебания идеальной жидкости в случае гармонического движения сосуда описываются уравнением Матье

$$\frac{d^2 H_n(t)}{dt^2} + (\omega_n^2 - \Omega^2 \kappa s \cos \Omega t) H_n(t) = 0 \quad (1.1)$$

где ω_n – одна из собственных частот колебаний свободной поверхности жидкости; H_n – высота соответствующей волновой моды номера n , измеренная относительно подвижного сосуда; $\kappa = \pi n / L$ – волновое число; Ω и s – частота и амплитуда колебаний сосуда.

Решение уравнения (1.1) может быть или устойчивым, или неустойчивым [Мак-Лахлан (1953)]. Начальное возмущение свободной поверхности остается ограниченным по величине или экспоненциально возрастает до бесконечности, если выполняется условие

$$\omega_n \sim \frac{m\Omega}{2} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

В обоих случаях невозможно предсказать конечное значение H_n . Определение высоты возбуждаемых волн может быть сделано только при решении нелинейной задачи.

Области устойчивости и неустойчивости решения уравнения (1.1) обычно показываются на диаграмме устойчивости на (Ω, s) -плоскости. На рис. 1-2 приведена такая диаграмма устойчивости для слоя воды глубины $h=15$ и 20 см в прямоугольном сосуде, имеющем размеры $50 \times 4 \times 50$ см и используемом в настоящих исследованиях. Для второй волновой моды $n=2$ показаны две области неустойчивости, где при сколь угодно малых s возникают незатухающие колебания жидкости с частотами кратными $\Omega/2$. Наиболее широкой является область неустойчивости, отвечающая колебаниям с частотой $\omega_2 \sim \Omega/2$ – **основной параметрический резонанс**. **Гармонический резонанс**, $\omega_2 \sim \Omega$, определяется более узкой областью неустойчивостью. Приведенные на рис. 1-2 границы областей неустойчивости получены экспериментально [Калиниченко и др. (2000а)] и рассчитаны по формулам [Нестеров (1969); Кравцов, Секерж-Зенькович (1993)] для идеальной жидкости. Отметим, что в литературе возбуждение

волн Фарадея при гармоническом резонансе часто рассматривается только в рамках теоретических моделей и ставится под сомнение его реализация в эксперименте.

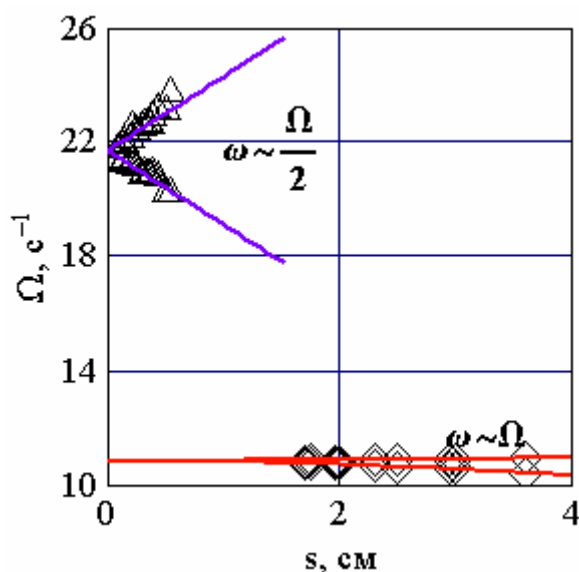


Рис. 1-2. Диаграмма устойчивости для второй волновой моды на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде (50×4×50см): $\omega_2 \sim \Omega/2$ – основной параметрический резонанс ($h=15$ см); $\omega_2 \sim \Omega$ – гармонический резонанс ($h=20$ см); прямые – границы зон неустойчивости, рассчитанные в рамках линейной теории

В случае реальной жидкости необходимо, чтобы амплитуда колебаний сосуда s превышала определенное критическое значение s^* , причем порог возбуждения оказывается наименьшим в случае основного параметрического резонанса – рис. 1-2, хотя учет диссипативных факторов в линейной модели параметрического резонанса в жидкости влияет только на скорость экспоненциального нарастания начального возмущения свободной поверхности жидкости, но не на стационарное значение H_n [Болотин (1956); Сорокин (1957); Brand, Nyborg (1965)].

Экспериментально влияние вязкости на параметрические колебания жидкости изучалось в [Сорокин (1957); Григорян и др. (1969)]. В [Сорокин (1957)] экспериментально подтверждено полученное теоретическое значение порога возбуждения капиллярно-гравитационных волн Фарадея. Экспериментальная зависимость критической величины глубины модуляции от вязкости при параметрических колебаниях жидкости в сообщающихся сосудах получена в [Григорян и др. (1969)]. В [Богачева,

Моисеев (1964); Болотин (1956); Крушинская С.И. (1965)] предлагается учитывать влияние диссипативных факторов, воспользовавшись результатами линейной теории периодического пограничного слоя [Кочин, Кибель, Розе (1963); Ламб (1947)].

В [Брискман, Иванова, Шайдулов (1976)] экспериментально исследованы параметрический резонанс и конечно-амплитудные колебания, возникающие в заполненной жидкостью U -образной трубке при переменных вертикальных перегрузках. В [Левин, Трубников (1986); Левин, Носов (2005)] экспериментально и теоретически исследованы условия формирования и развития стационарных волновых структур на поверхности колеблющейся в вертикальном направлении жидкости в диапазоне частот $50\text{-}200\text{ с}^{-1}$.

Учет нелинейности в задаче о возбуждении поверхностных волн Фарадея проводился в [Dodge et al (1965); Skalak, Yarymovich (1962); Ockendon, Ockendon (1973); Miles (1984) и др.]. Подробный обзор существующих теоретических моделей и анализ границ их применимости к описанию нелинейных волн Фарадея можно найти в [Неволин (1984); Miles, Henderson (1990); Ibrahim (2005); Faltinsen, Timokha (2009)].

Проведенные эксперименты по возбуждению волн Фарадея в случае основного параметрического резонанса показали, что совпадение с теоретическими результатами получается лишь в случае слабой нелинейности, а именно для начального участка резонансной зависимости [Dodge et al (1965)]. Отмечено, что для жидкости, как и для маятника с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса [Skalak, Yarymovich (1960)], существуют зоны мягкого и жесткого возбуждения – гистерезисный характер резонансной зависимости, определяемой как зависимость высоты волны H от частоты Ω колебаний сосуда - рис. 1-3.

Задача о параметрическом возбуждении гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде была решена в [Нестеров

(1969; 1972)]. На основе метода Крылова-Боголюбова-Митропольского, широко применяемого в нелинейной механике [*Боголюбов, Митропольский* (1974); *Акуленко, Нестеров* (1998)], было получено решение основных уравнений гидродинамики, записанных в переменных Лагранжа, при этом предполагалось, что крутизна волн $\Gamma = H/\lambda$ и отношение амплитуды ускорения сосуда к ускорению силы тяжести $s\Omega^2/g$ (перегрузка) малые величины. Учитываемая в модели сила трения, действующая между частицами жидкости, пропорциональна скорости движения жидкости. Получены выражения, описывающие ширину резонансной зоны данной волновой моды и ее резонансную зависимость, а также формулы для волновых профилей. Очень важен тот факт, что в рамках этой теоретической модели поверхностные волны Фарадея удастся рассчитать теоретически, причем не только частотные характеристики, но и высоту волн.

В экспериментах [*Калиниченко и др.* (1985); *Калиниченко и др.* (1995)] возбуждались волны большой амплитуды. Картина наблюдаемых волновых движений зависит от частоты Ω и амплитуды s колебаний сосуда. Исследовались частотный диапазон и порог возбуждения таких волн, а также волновые профили и зависимости высоты генерируемых волн от частоты колебаний сосуда. Для этих волн становятся существенными нелинейные эффекты, проявляющиеся в асимметрии волновых профилей, колебаниях узлов, обрушении волн, возникновении неустойчивых форм движения, скачках амплитуды и т.п. Проведен детальный анализ линейной и нелинейной стадий колебаний свободной поверхности жидкости. Выявлены пределы применимости модели [*Нестеров* (1969); *Нестеров* (1972)].

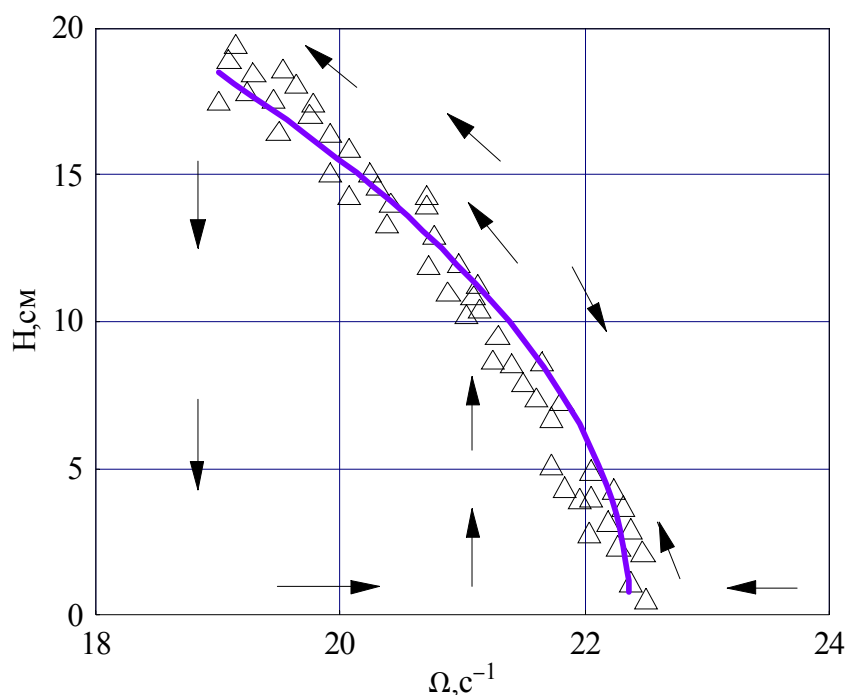


Рис. 1-3. Резонансная зависимость для второй волновой моды на свободной поверхности воды ($h=15$ см) в прямоугольном сосуде ($50 \times 4 \times 50$ см); $\omega_2 \sim \Omega/2$, $s=0.25$ см. Стрелками показано направление «обхода» резонансной кривой

Диссипативные факторы в случае волн Фарадея проявляются в наличии пороговых амплитуд колебаний сосуда с жидкостью. В приближении ламинарного периодического пограничного слоя [Ламб (1947); *Keulegan* (1959)] процесс нарастания малых начальных возмущений до значений, отвечающих стационарным режимам параметрических колебаний, исследован в [Базилевский и др. (2001)]. Экспериментально исследовано влияние структуры дна на энергетические характеристики стоячих волн.

Частота свободных нелинейных стоячих волн на поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины уменьшается с увеличением амплитуды волн [Rayleigh (1915); Penny, Price (1952); Aoki (1980)]. Такая зависимость сохраняется [Tadjakhish, Keller (1960)] и для жидкости конечной глубины, но большей, чем некоторая критическая. При конечных глубинах, меньших критической, имеет место обратная зависимость [Tadjakhish, Keller (1960)]. Эти свойства были выведены путем применения асимптотических методов и

подтверждены в эксперименте [Fultz (1962)], где возбуждение стоячих волн осуществлялось двумя волнопродукторами на торцевых стенках прямоугольного сосуда по методике [Taylor (1953)]. Изменение наклона резонансной зависимости с уменьшением глубины жидкости отмечено в экспериментах со стоячими волнами, возбуждаемыми волнопродуктором поршневого типа [Chester, Bones (1968)] и при горизонтальных колебаниях сосуда с жидкостью [Kobine (2008)].

Для волн Фарадея отмечено изменение знака наклона резонансной кривой на противоположный при уменьшении глубины жидкости [Калиниченко и др. (1985); Калиниченко и др. (1995)] – в исследуемой гидродинамической системе наблюдался переход от мягкой к жесткой характеристике. Предполагалось, что глубина жидкости не очень близка к критической, т.е. той, при которой указанное явление происходит. Естественно встает вопрос, каков же характер зависимости частоты волн от амплитуды при глубинах жидкости, равных или близких к критической.

Значение критической глубины жидкости $h^*=7.5$ см было получено экспериментально для первой волновой моды с длиной волны $\lambda=61$ см в [Virnig, Berman, Sethna (1988)] – рис. 1-4,(e).

Зависимость высоты волн Фарадея при глубине жидкости, равной или близкой к критической, была получена в работах [Бордаков и др. (1994); Sekerj-Zenkovitch et al. (1998)]. Аналитическое решение задачи о параметрическом возбуждении волн Фарадея в пятом приближении строилось в виде рядов по малому параметру (крутизне волны). Вывод о немонотонности резонансной зависимости волн Фарадея вблизи критического значения глубины жидкости инициировал проведение серии лабораторных экспериментов. Было показано [Sekerj-Zenkovitch et al. (1998)], что резонансные зависимости вблизи критической глубины жидкости не являются однозначными функциями частоты колебаний сосуда, а имеют две устойчивые ветви. Одна ветвь отображает эффект мягкой

восстанавливающей силы (увеличение высоты волны с уменьшением частоты колебаний сосуда); а вторая ветвь – эффект жесткой восстанавливающей силы (увеличение высоты волны с ростом частоты).

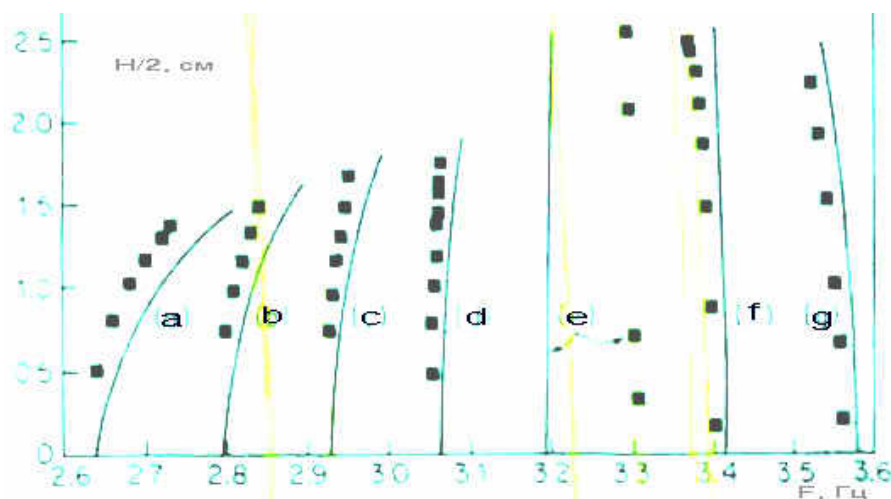


Рис. 1-4. Изменение наклона резонансной зависимости для первой волновой моды, $\lambda=61$ см: (a)-(g) – $h=4.27, 4.98, 5.69, 6.60, 7.47, 8.18, 10.16$ см. Случай (e) отвечает критической глубине [Virnig, Berman, Sethna (1988)]

Гармонический резонанс Фарадея, $\omega \sim \Omega$, изучен недостаточно полно по сравнению с основным резонансом ($\omega \sim \Omega/2$). Гармоническое возбуждение гравитационных волн на поверхности воды отмечалось в экспериментах [Dodge et al (1965)]; линейная теория, описывающая возможность зарождения волн на поверхности вязкой жидкости малой глубины в сосуде бесконечно больших горизонтальных размеров предложена в [Kumar (1996)]. Возбуждение капиллярных волн Фарадея ($\lambda \sim h=0.8$ мм) в условиях гармонического резонанса описано в [Muller et al. (1997)]. В [Кравцов, Секерж-Зенькович (1993)] для решения линейной задачи о гармоническом параметрическом возбуждении стоячих трехмерных гравитационных волн на свободной поверхности маловязкой жидкости производится разбиение поля скорости жидкости на потенциальную и вихревую компоненты и используется погранслоная методика и метод усреднения Крылова-Боголюбова. Впервые

эффективность такого подхода была продемонстрирована [*Моисеев* (1961); *Черноусько* (1966)] при изучении свободных колебаний маловязкой жидкости. Результаты экспериментов по возбуждению волн Фарадея при гармоническом резонансе приведены в [*Калиниченко, Кравцов и др.* (2000); *Калиниченко, Лизаррага-Селайа, Секерж-Зенькович* (2000)].

Амплитуда параметрических колебаний нелинейной системы при выполнении резонансных условий всегда имеет конечное значение, причем при изменении частоты параметрического возбуждения возможны резкие скачки амплитуды [*Боголюбов, Митропольский* (1974); *Каудерер* (1961)]. В экспериментах по параметрическому резонансу в жидкости указанный эффект проявляется во внезапном исчезновении волн Фарадея [*Dodge, Kana, Abramson* (1965); *Калиниченко др.* (1995); *Jiang et al.* (1996); *Wright, Yon, Pozdrikidis* (2000)] - в условиях резонанса Фарадея высота волны H зависит от частоты колебаний сосуда Ω и при плавном изменении последней может возрасти до некоторого максимального значения, после которого H скачком падает до нуля. Отметим, что задача о срыве параметрических колебаний жидкости пока еще не решена. С ростом H принципиально изменяется характер колебаний свободной поверхности жидкости — происходит переход от волн регулярных к волнам нерегулярным и затем к волнам разрушающимся [*Калиниченко, Секерж-Зенькович* (2007)]. Из экспериментов следует, что срыву параметрических колебаний предшествует интенсивное разрушение волн Фарадея с образованием струйных выбросов и отрывами капель на волновом гребне. Указанная картина разрушения волн характерна не только для волн Фарадея, но и для стоячих поверхностных гравитационных волн, возбуждаемых волнопродукторами на торцевых стенках прямоугольного сосуда [*Taylor* (1953)] и при гармонических колебаниях сосуда в горизонтальном направлении [*Bredmose et al* (2003)].

В эксперименте [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2010)] для нескольких мод поверхностных и внутренних волн измерены частоты срыва; отмечено, что при подходе к ним наблюдается интенсивное разрушение волн. Теоретическое моделирование основано, как и в теории параметрических колебаний механических систем с одной степенью свободы, на предположении о главенствующей роли диссипативных факторов. По экспериментальным резонансным кривым был введен и оценен эквивалентный коэффициент затухания разрушающихся волн Фарадея, определяющий срыв колебаний.

1.1.2. Внутренние волны Фарадея

К настоящему времени достаточно полно изучено параметрическое возбуждение поверхностных волн в однородной жидкости, но имеется относительно мало результатов по параметрическому возбуждению внутренних волн в неоднородной жидкости. Экспериментально это явление изучалось в [McEwan, Robinson (1975); Ганиев и др. (1976); Секерж-Зенькович, Калиниченко (1979); Калиниченко (1986); Hashimoto, Sudo (1984); Benielli, Sommeria (1998)], а теоретически – для двухслойной жидкости в [Нестеров (1972); Секерж-Зенькович (1983б); Hill (2002)] и для непрерывно стратифицированной жидкости в [Владимиров (1981); Нестеров А.В. (1982); Секерж-Зенькович (1983а)].

Границы резонансных зон параметрически возбуждаемых внутренних волн на границе раздела двухслойной жидкости были найдены в [Нестеров (1972)], а выражения, описывающие амплитуды и профили возбуждаемых волн Фарадея, получены в [Секерж-Зенькович (1983б)].

Экспериментально явление параметрического резонанса на границе двухслойной жидкости было зафиксировано в [Wolf (1969)], но оно рассматривалось как «паразитное», поскольку оценивались условия стабилизации неустойчивости Рэлея-Тейлора [Брискман (1976); Любимов,

Любимова, Черепанов (2003)]. Параметрическое возбуждение внутренних волн было отмечено [*Ганиевым и др. (1976)*] в ходе экспериментов по исследованию динамического поведения несмешивающихся сред (воздух, вода и конденсаторное масло) при вибрационных воздействиях в условиях невесомости. В [*Зеньковская, Новосядлый (2008)*] представлена модель, описывающая устойчивость границы раздела несмешивающихся жидкостей, подверженных вертикальным колебаниям. В экспериментах [*McEwan, Robinson (1975)*] показано, что непрерывно стратифицированная жидкость под действием малых периодических горизонтальных ускорений подвержена параметрической неустойчивости, когда возбуждение длинноволновой внутренней волны локально обеспечивает условия движения жидкости близкие к твердотельно колеблющейся жидкости и параметрическому усилению коротковолновых возмущений.

Возможность параметрического возбуждения внутренних гравитационных волн в двухслойной жидкости была установлена в [*Секерж-Зенькович, Калиниченко (1979)*], где также приведены отдельные характеристики этого процесса - рис. 1-5. Аналогично поверхностным волнам возбуждение внутренних волн Фарадея зависит от частоты и амплитуды колебаний сосуда, а также от вязкости жидкостей. Результаты экспериментов по исследованию областей неустойчивости границы раздела, резонансных зависимостей, волновых профилей, поля скоростей частиц жидкости и влиянию диссипативных факторов приведены в [*Калиниченко (1986); Калиниченко и др. (1991б)*]. Используемая в этих работах методика экспериментов была применена в [*Benielli, Sommeria (1998); Tipton, Mullin (2004)*].

В двухслойной жидкости со свободной поверхностью возможна генерация волн двух различных видов [*Сретенский (1977)*]. В случае волн первого вида колебания жидкости классифицируются как поверхностные. Для волн второго вида смещения границы раздела и свободной поверхности

происходят в противофазе. В экспериментах [Калиниченко, Секерж-Зенькович, Тимофеев (1991)] для возбуждения волн второго вида использовалось явление параметрического резонанса, и определен горизонт, на котором вертикальные гармонические составляющие скорости равны нулю.

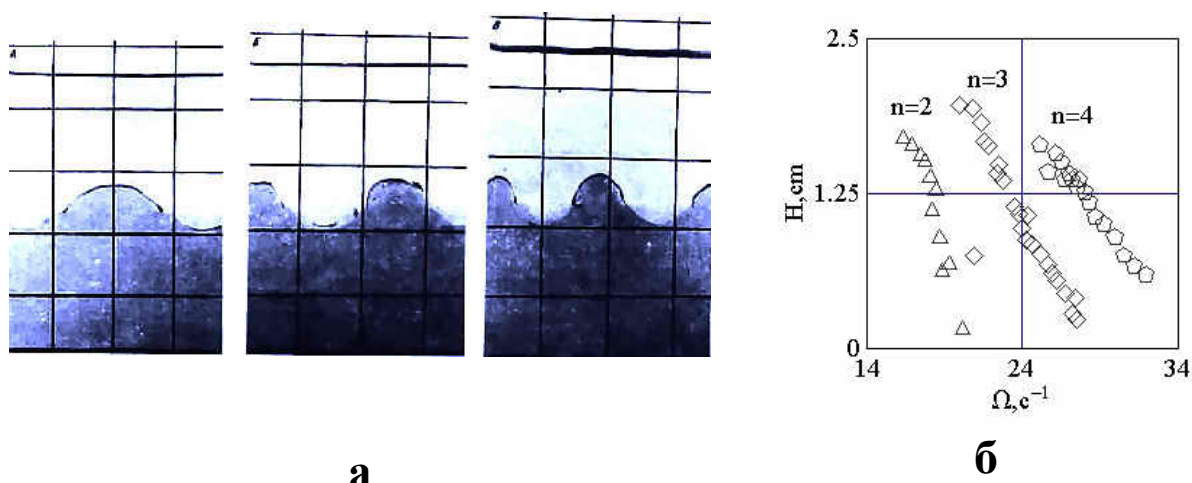


Рис. 1-5. (а) Внутренние волны Фарадея на границе раздела керосин-вода; (б) резонансные зависимости. Параметрическое возбуждение внутренних осуществлялось в прямоугольной кювете ($11.2 \times 2.5 \times 18.3$ см) при равных глубинах $h_{1,2} = 6.8$ см жидкости; амплитуда вертикальных колебаний сосуда $s = 1.3$ см [Секерж-Зенькович, Калиниченко (1979)]

1.1.3. Эффекты вырождения в волнах Фарадея

Выполнено очень мало исследований гравитационных волн более сложной структуры, чем одномодовая, причем в основном рассматривались только поверхностные волны Фарадея.

Многомодовая пространственная картина наблюдалась в экспериментах по возбуждению гравитационно-капиллярных и капиллярных поверхностных волн [Сорокин (1957); Simonelli, Gollub (1989); Goodridge, Shi., Lathrop (1997)].

Периодический обмен энергией между двумя двумерными модами гравитационных поверхностных волн Фарадея, частоты которых равны $\frac{1}{2}$ и

$\frac{1}{4}$ частоты возбуждения, наблюдался в экспериментах [Калиниченко и др. (1985)].

Если собственные частоты двух волновых мод близки к $\frac{1}{2}$ частоте параметрического возбуждения, то возможно их одновременное существование. Для волн такого типа используется термин «составные волны», а само понятие составных нелинейных волн введено в гидродинамике в [Секерж-Зенькович Я.И. (1951), (1969)]. По определению стоячая составная волна в линейном приближении есть суперпозиция линейных мод. Устойчивое параметрическое возбуждение составных трехмерных гравитационных волн на границе раздела двухслойной жидкости наблюдалось в [Калиниченко, Секерж-Зенькович, Чайковский (1988)] и объясняется вырождением – близостью частот взаимодействующих мод и нелинейностью.

1.2. Нелинейные стоячие волны

В экспериментальной гидродинамике известны различные способы возбуждения стоячих волн в жидкости. Как правило, используются волнопродукторы различного типа [Taylor (1953); Chester, Bones (1968); Dean R.G., Dalrymple R.A. (1991); и др.]. Для генерации волн также можно применять электрическое [Калиниченко и др. (1982)] или магнитное [Potts, Diver (2001)] поле.

С точки зрения лабораторного моделирования волновых движений жидкости параметрический резонанс может рассматриваться как эффективный способ генерации стоячих волн. Волны Фарадея удобны для экспериментального исследования, поскольку возбуждаются и существуют без каких-либо волнопродукторов – их крутизну можно изменять, варьируя частоту колебаний сосуда. Кроме того, возбуждение волн Фарадея происходит при малых относительных ускорениях сосуда, поэтому их профиль близок к профилю свободных стоячих волн.

Несмотря на отличия режима параметрического резонанса в

колеблющемся сосуде с жидкостью от режима свободных колебаний жидкости в неподвижном сосуде, свойства нелинейных свободных волн переносятся на стационарные волны, возбуждаемые в сосуде при параметрическом резонансе. Перечислим некоторые из этих свойств [Секерж-Зенькович Я.И. (1947); Penney, Price (1952); Сретенский (1977)]: 1) неподвижные узлы отсутствуют; 2) пучности волн неподвижны; ордината гребня больше ординаты впадины волны - асимметрия волнового профиля; 3) свободная поверхность однородной жидкости или граница раздела двухслойной жидкости ни в какой момент времени не становится прямолинейной. Все эти теоретические результаты верифицированы в экспериментах по возбуждению волн Фарадея, результаты которых представлены в главе 2.

В теории нелинейных волн до настоящего времени остаются открытыми вопросы о предельной форме стоячей волны, о механизмах разрушения стоячих поверхностных и внутренних волн, а также о явлении массопереноса в стоячих волнах. Остановимся кратко на наиболее известных результатах.

1.2.1. Предельный профиль стоячей поверхностной волны

Первые решения задачи о форме профиля прогрессивной стационарной волны максимальной высоты на свободной поверхности жидкости были получены еще Стоксом и Мичеллом в предположении, что гребень предельного профиля должен быть заострённым [Уизем (1977)]. Стокс установил аналитически, что у такой волны угол заострения равен 120° , а Мичелл численно получил оценку $\Gamma_{\max}=0.142$ для максимума ее крутизны $\Gamma=H/\lambda$, где H и λ - высота и длина волны, соответственно. Эти результаты были подтверждены многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями. Отметим, что реальные волны, будучи нестационарными, не доходят до критической конфигурации и имеют крутизну меньше критического значения [Longuet-Higgins (1981)].

Для стоячих волн вопрос о форме предельного профиля остается открытым и в настоящее время [Уизем (1977)], причем исследования в этом направлении вызывали и продолжают вызывать полемику в научной литературе [Perlin, Schultz (2000)]. Остановимся кратко на наиболее известных результатах. В теоретическом исследовании [Penney, Price (1952)] считалось, что предельный профиль имеет заостренный гребень, и было найдено, что угол заострения $\varphi_{\max}=90^\circ$, а крутизна $\Gamma_{\max}=0.218$. В последующих теоретических исследованиях наличие заострения и оценка угла подвергались сомнению, а величина предельной крутизны Γ_m варьировалась от 0.196 в [Mercer, Roberts (1992)] до 0.285 в [Saffman, Yuen (1979)]. Экспериментальной проверке выводов [Penney, Price (1952)] было посвящено исследование [Taylor (1953)], в котором стоячие волны возбуждались двумя волнопродукторами на торцевых стенках прямоугольного сосуда. Была предложена оценка $\Gamma_{\max}=0.228$ и приведены соображения в пользу предсказанного значения $\varphi_{\max}$, хотя сам наблюдавшийся волновой профиль был без заострения – рис 1-6.

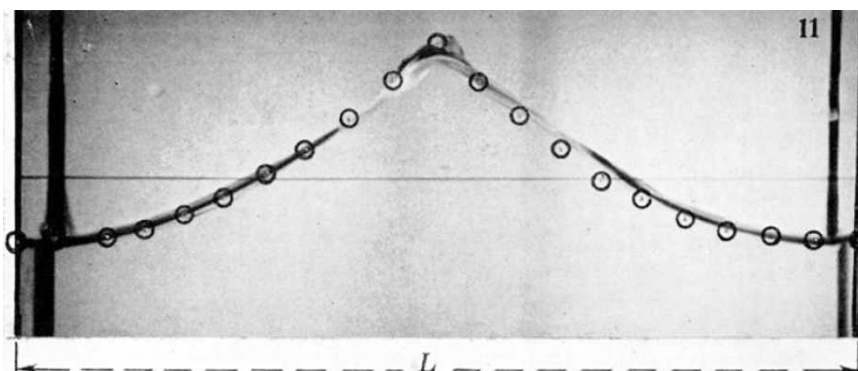


Рис. 1-6. Предельный профиль стоячей поверхностной волны, полученный в экспериментах [Taylor (1953)]: глубина жидкости $h=15.5$ см, длина сосуда $L=32.9$ см, высота волны $H=7.5$ см; кружки соответствуют предельному профилю, рассчитанному в рамках модели [Penney, Price (1952)]

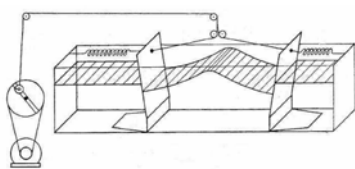
В экспериментах [Jiang et al. (1996); Schultz et al. (1998); Bredmose et al. (2003); Longuet-Higgins, Drazen (2002); Potts, Diver (2001)] предельная

крутизна стоячих волн оценивалась диапазоном $0.108 < \Gamma_{\max} < 0.266$. В Таблице 1-1 приведены сведения о постановке проведенных экспериментов, параметрах возбуждаемых стоячих волн и значениях предельной крутизны.

Разброс приведенных результатов объясняется различиями в способах и условиях возбуждения волн. Обсуждение формы предельного профиля стоячих волн осложняется отсутствием математически строгих результатов по стоячим нелинейным волнам в жидкости (в отличие от теории прогрессивных волн). С учетом этих обстоятельств представлялось целесообразным продолжить экспериментальные исследования стоячих волн большой высоты, выбрав какой-либо один, удобный, способ их возбуждения.

Таблица 1-1

Данные по предельной крутизне стоячей поверхностной волны

Автор	Размеры сосуда (см) и способ возбуждения	Глубина жидкости, h (см)	n	Предельная крутизна, $\Gamma_{\max}$
Taylor (1953)	32.9×14.8×23 	15.5 (вода)	2	0.228
Jiang <i>et al</i> (1996)	60×6×48.3 Волны Фарадея	30 (вода)	2	0.216
Schultz <i>et al</i> (1998)	10.5×1.7×30 Волны Фарадея	15 (вода)	2	0.147÷0.220
Bredmose <i>et al</i> (2003)	148×40×75 Стоячие волны при горизонтальных колебаниях сосуда	30.2 (вода)	3	0.266

В [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2007)] исследованы профили стоячих гравитационных двумерных волн Фарадея максимальной высоты.

При малой глубине модуляции параметра возбуждения выделены три категории волн: *регулярные* - периодические во времени симметричные относительно проходящей через их гребень вертикали волны; *нерегулярные*, но сохраняющие связность жидкого объема волны; и *разрушающиеся* волны с отрывом капель со свободной поверхности жидкости. Установлено, что профиль регулярных волн максимальной высоты гладкий, имеет крутизну 0.255, а угол при гребне менее 80° . У нерегулярных и разрушающихся волн выявлены отдельные реализации, для которых профили близки к профилям регулярных волн, но крутизны значительно выше: 0.288 и 0.429, соответственно.

1.2.2. Разрушение стоячих поверхностных волн

Ставшие к настоящему времени классическими работы [Penney, Price (1952); Taylor (1953)] ограничены двумерными стоячими гравитационными волнами предельной высоты. Являясь нелинейными, эти волны могут быть отнесены к волнам регулярным, поскольку их профиль обладает периодичностью во времени и симметрией относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны.

Разрушение поверхностных волн проявляется в образовании струй и брызг. В натурных наблюдениях и лабораторных экспериментах [Шулейкин (1953); Chan, Melville (1988)] обнаружено, что при взаимодействии волн с вертикальной стенкой образуются высокоскоростные струйные всплески, характеризующиеся большой высотой подъема (до 50 м) и высокой начальной скоростью выбрасываемых вверх частиц жидкости (до 50 м/с). Процесс образования струйного всплеска может быть отнесен к классу нестационарных задач о схлопывании каверны на свободной поверхности жидкости с образованием кумулятивной струи жидкости [Коробкин (1997); Cooker (2002)].

Интерес к нерегулярным и разрушающимся волнам Фарадея, возбуждаемым при вертикальных колебаниях сосуда с жидкостью, обусловлен тем, что в экспериментах эти волны могут быть получены без

использования волнопродукторов, их наблюдение и измерение оказываются более простыми и точными по сравнению с другими способами возбуждения стоячих волн. Так, в [Jiang et al. (1998)] описано утроение периода нерегулярных волн Фарадея, в [Hogrefe et al. (1998); Zeff et al. (2000)] - генерация струй на свободной поверхности жидкости в колеблющемся круговом цилиндрическом сосуде, в [Longuet-Higgins, Dommermuth (2001)] - образование струйного выброса из впадины стоячей волны. Процесс каплеобразования при генерации капиллярных волн Фарадея исследовался в [Сорокин (1957)]; позднее было показано, что выброс капель обусловлен наличием локализованной поверхностной сингулярности [Goodridge et al. (1997)].

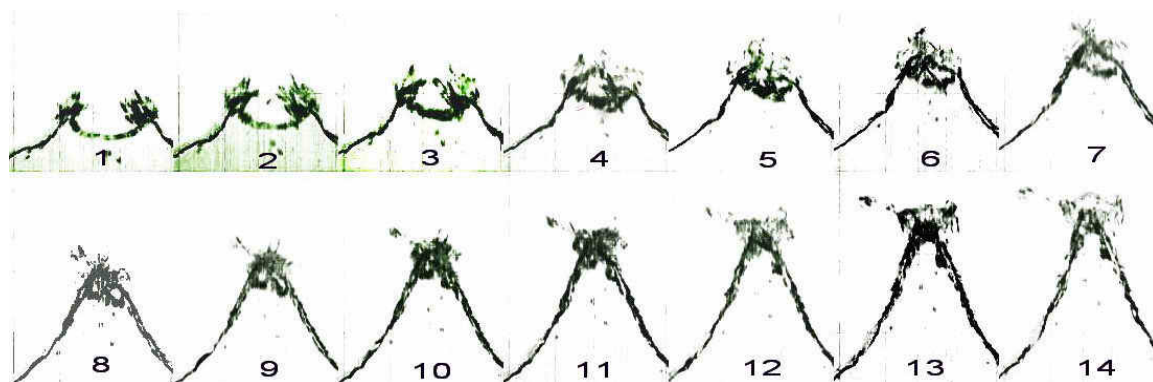


Рис. 1-7. Схлопывание каверны и образование струйного всплеска на формирующемся гребне стоячей волны [Калиниченко (2009)]

Результаты экспериментов по исследованию нерегулярных и разрушающихся волны Фарадея приведены в [Калиниченко (2009)]. Среди нерегулярных волн выделены волны с небольшим углублением в гребне волны, а также периодический триплет. В случае разрушающихся волн рассмотрен механизм образования струйного всплеска на волновом гребне. Представлено экспериментальное доказательство того, что разрушение стоячих волн в прямоугольном сосуде начинается со схлопывания каверны на формирующемся гребне волны – рис. 1-7. Показано, что струйному всплеску из гребня волны предшествуют зарождение, развитие и коллапс каверны.

1.2.3. Разрушение стоячих внутренних волн

Процесс разрушения внутренних волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости связан с наличием осциллирующего сдвигового слоя в приузловой области, т.к. векторы тангенциальной составляющей скорости частиц двухслойной жидкости имеют противоположное направление по разные стороны от границы. Если амплитуда стоячей волны достаточно велика, то возможно развитие неустойчивости сдвигового слоя, приводящее к образованию волн, пространственные масштабы которых существенно меньше длины основной волны.

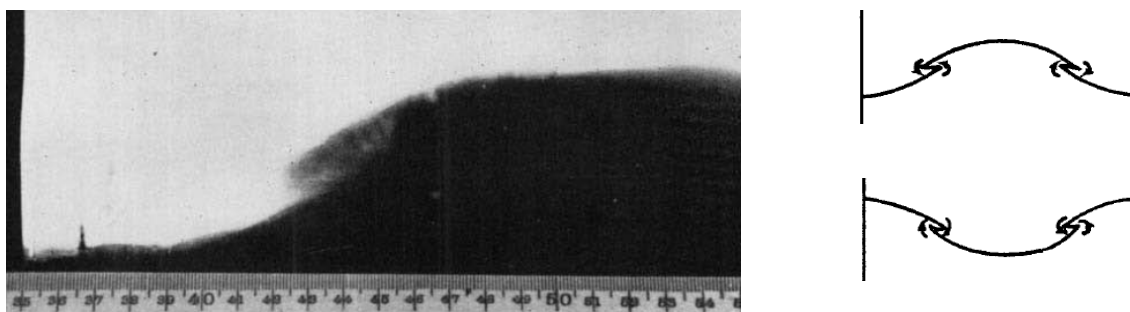


Рис. 1-8. Неустойчивость в приузловой зоне второй моды стоячей волны на границе раздела двух смешивающихся жидкостей [Thorpe (1968)]

Впервые о вторичных возмущениях в приузловой области стоячей волны на границе раздела двух смешивающихся жидкостей упоминается в [Thorpe (1968)]. В этих экспериментах для возбуждения стоячей внутренней волны использовался волнопродуктор плунжерного типа на боковых стенках прямоугольного сосуда. При крутизне волны $\Gamma = H/\lambda \sim 0.127$ (H - высота, λ - длина волны) в приузловой области наблюдалась пара вихрей с изменяющимся направлением вращения – рис. 1-8. Сделано предположение о том, что генерация вихрей связана с развитием сдвиговой неустойчивости, но каких-либо детальных исследований не проводилось. Кроме указанной работы [Thorpe (1968)], для стоячих внутренних волн не известны экспериментальные наблюдения начальной стадии потери устойчивости границы раздела двух осциллирующих жидкостей. Одна из причин отсутствия таких наблюдений - использование в экспериментах

волнопродукторов, вносящих существенные искажения в поле скоростей колеблющейся жидкости.

Интерес к проблеме устойчивости границы раздела двух жидкостей, совершающих относительное осциллирующее движение, обусловлен нестационарностью многих природных процессов [Овсянников, Макаренко, Налимов и др. (1985)]. Отметим обрушение внутренних волн в океане [Woods (1968)], образование донных форм при воздействии периодических потоков воды на песчаное дно в прибрежной зоне [Sleath (1984)], генерацию пятен турбулентности и изменение начальной стратификации океана и атмосферы [Thorpe (1987)]. При описании начальной стадии развития сдвиговой неустойчивости на границе раздела жидкостей обычно используется анализ устойчивости малых возмущений основного течения. Однако непосредственное использование методов теории устойчивости для случая вязких осциллирующих жидкостей невозможно, и в основном приходится опираться на экспериментальные результаты.

Экспериментально исследовалась потеря устойчивости осциллирующего потока однородной жидкости, создаваемого бегущими волнами в гидроканале [Collins (1963)], колебаниями сильфона в вертикальной трубке [Сергеев (1966)], колеблющимся поршнем в резонансной [Merkli, Thomann (1975)], круговой и прямоугольной трубах [Das, Arakeri (1998)], изменением скорости течения над плоским и профилированным дном [Koneko, Honji (1979)]. Во всех случаях профили скорости были нестационарными, а некоторые из них характеризовались обратными течениями. Потеря устойчивости колеблющегося пограничного слоя носит локальный характер [Сергеев (1966); Merkli, Thomann (1975); Das, Arakeri (1998); Koneko, Honji (1979)] и может быть определена критическим значением числа Рейнольдса $11 < R < 500$, где $R = U_0^2 / \omega \nu$, U_0 / ω - характерная амплитуда смещения частицы жидкости на границе пограничного слоя, ω - частота колебаний потока, ν - кинематическая

вязкость жидкости. Отличие критических значений R можно объяснить различиями в постановке эксперимента.

Сложностью постановки эксперимента объясняется и тот факт, что практически отсутствуют работы по изучению неустойчивости осциллирующих потоков двухслойной жидкости. Так, в [King et al (1999)] исследовалась устойчивость вертикальной границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в узком зазоре между коаксиальными неподвижным внутренним и колеблющимся внешним цилиндрами. Неустойчивость такого осциллирующего двухфазного течения Куэтта проявляется в генерации волновых возмущений первоначально гладкой границе раздела при $R \sim 50$. При исследовании процесса зарождения донных форм на границе вода-тонкий слой ожиженного песка использовалась колеблющаяся в горизонтальном направлении кольцевая кювета [Scherer et al (1999)]. Первые признаки появления песчаных волн при наименьшей частоте колебаний кюветы (1 Гц) отмечены при $R \sim 200$. В [Иванова, Козлов, Эвекс (2001)] образованию квазистационарного рельефа на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей при высокочастотных горизонтальных колебаниях прямоугольного сосуда соответствовало критическое значение $R \sim 50$, рассчитанное по менее вязкой жидкости. Регулярные стационарные волновые структуры наблюдались также в экспериментах [Thorpe (1969)] при исследовании неустойчивости сдвигового течения двухслойной жидкости в наклонной трубе прямоугольного сечения.

Для волн Фарадея характерны три стадии искажения волнового профиля, связанных с увеличением высоты волны [Калиниченко (1986); Калиниченко (2005)]: 1) образование в приузловых областях системы регулярных вторичных волн; 2) вторичные волны становятся неустойчивыми; и 3) переход от системы коротких вторичных волн к нерегулярному образованию, которое можно рассматривать как пару вихрей с периодически изменяющимся направлением вращения —

«грибообразная» форма волнового профиля – рис. 1-9. Использование параметрического резонанса как способа генерации стоячих внутренних волн на границе раздела двух жидкостей позволило провести экспериментальное исследование процесса разрушения волн, начиная с появления в приузловых областях регулярных групп волновых возмущений при крутизне волны $\Gamma \sim 0.08-0.13$. Для различных двухслойных жидкостей получено критическое значение числа Рейнольдса ламинарного пограничного слоя $R \sim 90-300$, при превышении которого в приузловых областях стоячей волны наблюдается развитие волнообразных возмущений.

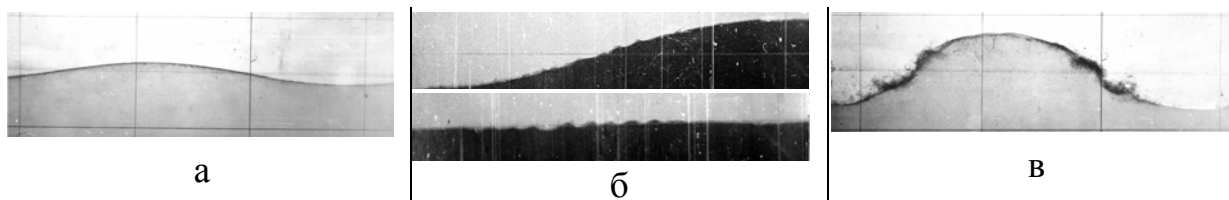


Рис. 1-9. Разрушение внутренних волн Фарадея: а – гладкий волновой профиль; б – возникновение вторичных волн; в – формирование пары вихрей [Калиниченко (1986), (2005)]

1.2.4. Массоперенос в стоячих волнах

Волновое движение жидкости часто рассматривается как чисто колебательное. Однако измерения поля скорости в реальных волнах показывают наличие ненулевых компонент усредненной по времени скорости практически во всех точках жидкости. Значения скорости этого стационарного течения существенно меньше максимальной скорости основного волнового движения; однако вследствие кумулятивного эффекта эти стационарные течения должны учитываться при изучении процессов переноса многокомпонентных примесей [Зацепин и др. (2005)], динамики загрязнения и перемещения донных осадков [Шуляк (1971)]. Для таких вторичных стационарных течений жидкости, совершающей волновые движения, в литературе используются тождественные по значению термины «волновой перенос», «массоперенос» или «волновой дрейф».

В 1847 г. Стокс показал, что в случае прогрессивных волн малой высоты H кроме движения частиц *идеальной* жидкости по замкнутым траекториям имеется медленный стационарный дрейф элементов жидкости в направлении распространения волн [*Stokes* (1847)]. Используемое в этой работе понятие массопереноса для нелинейных прогрессивных волн на свободной поверхности *идеальной* жидкости конечной глубины означает, что траектории частиц жидкости оказываются разомкнутыми. Кроме чисто периодической зависимости от времени, горизонтальная координата частицы жидкости содержит дополнительное слагаемое, линейно возрастающее со временем. Именно это слагаемое определяет поступательную составляющую движения частиц жидкости в направлении распространения волны. Впоследствии эксперименты [*Caligny* (1878), *Bagnold* (1947)] подтвердили наличие медленных придонных течений с ненулевой средней скоростью в жидкости конечной глубины.

Массоперенос в стоячих поверхностных волнах был предсказан в [*Rayleigh* (1884)] как следствие нелинейности и вязкости, а рассчитан в [*Longuet-Higgins* (1953); *Dore* (1976a)] для волн на свободной поверхности однородной жидкости и в [*Dore* (1973, 1976b)] для внутренних волн на границе раздела двухслойной жидкости. В [*Yarin* (2002); *Любимов, Любимова, Черепанов* (2003); *Ng* (2004); *Martin, Vega* (2006)] циркуляционные течения ячеистого типа в стоячих поверхностных и внутренних волнах исследовались теоретически. Необходимость учета в теоретических моделях трехмерной структуры периодических пограничных слоев, являющихся источником завихренности и определяющих вторичные течения жидкости, подчеркивается в [*Чашечкин, Кистович* (2004); *Чашечкин, Приходько* (2007)].

В пограничных слоях (формирующихся на дне сосуда, свободной поверхности жидкости или границе раздела жидкостей) завихренность диффундирует за счет вязкости и переносится потоком. Таким образом, имеет место медленный перенос завихренности, и, в конечном счете, во

всей жидкости появляется завихренность второго порядка малости по отношению к волновым движениям. Средняя скорость переноса завихренности (или установившихся вторичных движений) вне пограничных слоев зависит от введенного в [Stuart (1966)] эффективного числа Рейнольдса $R_S \sim (H/\delta)^{1/2}$, где H – высота волны, а $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ – толщина пограничного слоя Стокса. Для внутренней по отношению к пограничным слоям области жидкости в соответствии с моделями [Longuet-Higgins (1953); Dore (1976)] возможно существование двух классов установившихся вторичных течений в зависимости от величины R_S . При $R_S \gg 1$ в толще жидкости преобладает конвективный перенос завихренности (за исключением тонких слоев, один из которых расположен на твердой границе и имеет толщину, значительно превосходящую толщину пограничного слоя основного волнового течения). При $R_S \ll 1$ перенос завихренности происходит главным образом за счет вязкой диффузии. В обоих случаях указанные вторичные течения носят ярко выраженную структуру замкнутых ячеек, хотя в указанных выше теоретических моделях выражения для функций тока, описывающих стационарный массоперенос, получены в приближении вязкой диффузии завихренности $R_S \ll 1$, т.е. для случая, когда толщина пограничного слоя значительно превосходит высоту стоячей волны: $H \ll \delta$.

Следует отметить фактически полное отсутствие экспериментальных исследований массопереноса. Скорость массопереноса, но лишь в тонком придонном пограничном слое, измерялась в исследованиях [Noda (1968); Mei et al (1972)]. Было установлено только общее соответствие с выводами [Longuet-Higgins (1953)], отмечены значительные расхождения для волн очень малой и большой амплитуд, причем данные эксперимента находятся в «грубом» количественном соответствии с моделью Лонге-Хиггенса [Liu, Davis (1977)].

Основные положения моделей [Dore (1973, 1976b)] были подтверждены лабораторным экспериментом [Калиниченко, Секерж-Зенькович, Чайковский (1991)] для внутренних волн Фарадея, возбуждаемых на границе раздела двухслойной жидкости – рис. 1-10.

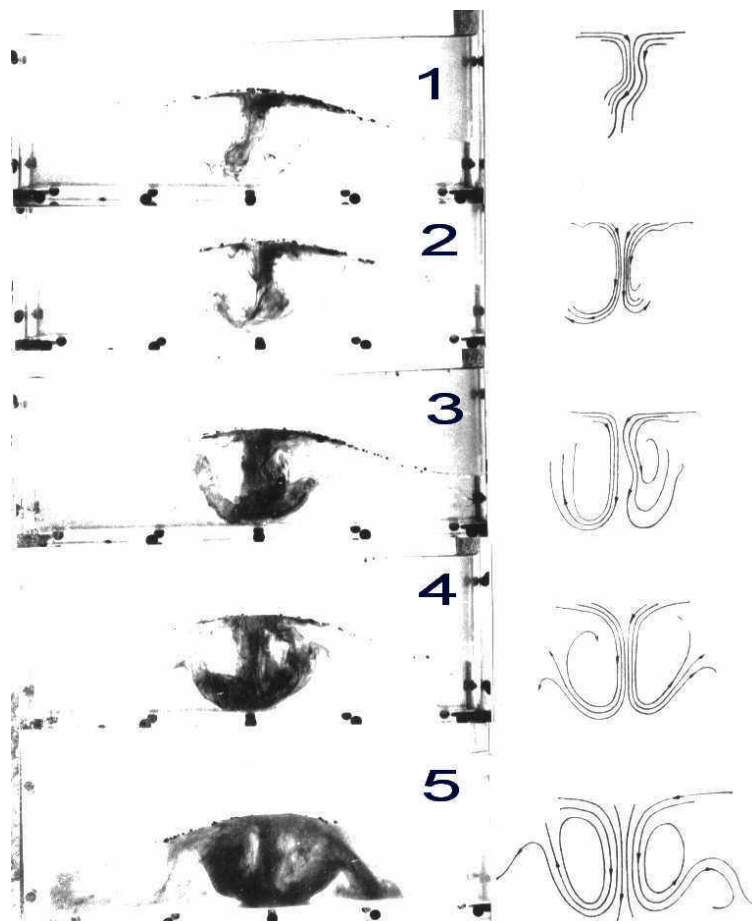


Рис. 1-10. Массоперенос в нижнем слое двухслойной жидкости при возбуждении внутренней волны Фарадея [Калиниченко, Секерж-Зенькович, Чайковский (1991)]

В [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2008)] показано, что в двумерных поверхностных волнах Фарадея имеется система вторичных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости между дном сосуда и свободной поверхностью. Наряду с колебаниями с частотой волны частицы жидкости медленно перемещаются в соответствии с этими циркуляционными течениями. Измерено поле скоростей вторичных течений и определены траектории отдельных жидких частиц в стоячей

волне. Проведено сопоставление данных опыта с моделью [Longuet-Higgins (1953)]. Экспериментально установлено, что периодический пограничный слой на дне сосуда является источником завихренности, приводящей к генерации направленных вертикально вверх струйных течений в окрестности узла. При наличии донных осадков такие струйные течения инициируют образование регулярных донных форм.

1.3. Лабораторное моделирование волн Фарадея - экспериментальная установка ПР-2М

Объектами лабораторных исследований в диссертации являются стоячие гравитационные волны, возбуждаемые в колеблющемся в вертикальном направлении сосуде с жидкостью; переменным параметром для исследуемой гидродинамической системы является переменное ускорение силы тяжести $g^*(t) = g(1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos \Omega t)$ в системе отсчета, связанной с колеблющимся сосудом. Поскольку характеристики возбуждаемых волн зависят от частоты и амплитуды колебаний сосуда, основными требованиями к лабораторной установке являются строго вертикальные колебания сосуда с жидкостью и возможность изменения частоты и амплитуды этих колебаний.

Эксперименты по параметрическому возбуждению поверхностных и внутренних волн проводились на разработанной и созданной в ИПМех РАН установке ПР-2М (Параметрический Резонанс – вариант 2 Модернизированный.) – рис. 1-11.

Для обеспечения вертикальных колебаний сосуда с жидкостью использовался кривошипно-шатунного механизм, посредством которого вращательное движение вала электромотора преобразовывалось в возвратно-поступательное движение грузовой площадки. В состав ПР-2М входят (см. блок-схему на рис. 1-12):

- электродвигатель постоянного тока П-11 (0,45 кВт; 2200 об/мин);
- редуктор;
- кривошипно-шатунный механизм;
- блок питания и управления;
- грузовая площадка с вертикальными направляющими

Электропривод обеспечивает возвратно-поступательное движение грузовой площадки с заданной частотой, которая регулируется изменением напряжения питания электродвигателя. В ходе эксперимента при фиксированной амплитуде колебаний сосуда имеется возможность изменения частоты колебаний в диапазоне $0.3 < \Omega / 2\pi < 5$ Гц.



Рис. 1-11. Общий вид экспериментальной установки ПР-2М

Устройство кривошипношатунного механизма позволяет изменять радиус кривошипа, а следовательно, и амплитуду колебаний сосуда в диапазоне $0.03 < s < 7.50$ см.

Грузовая площадка допускает установку сосудов различной формы общей массой до 40 кг.

При конструировании ПР-2М выдвигались следующие требования: движения сосуда с жидкостью должны быть максимально приближены к вертикальным и являться гармоническими.

Вследствие неизбежной малой асимметрии установки происходит нарушение характера движения, а именно, направление, вдоль которого происходит колебательное движение сосуда, составляет некоторый угол с вертикалью. По смещению лазерного луча, отраженного от вертикально установленного на грузовой площадке зеркала, было найдено, что этот угол составляет величину порядка $8'$.

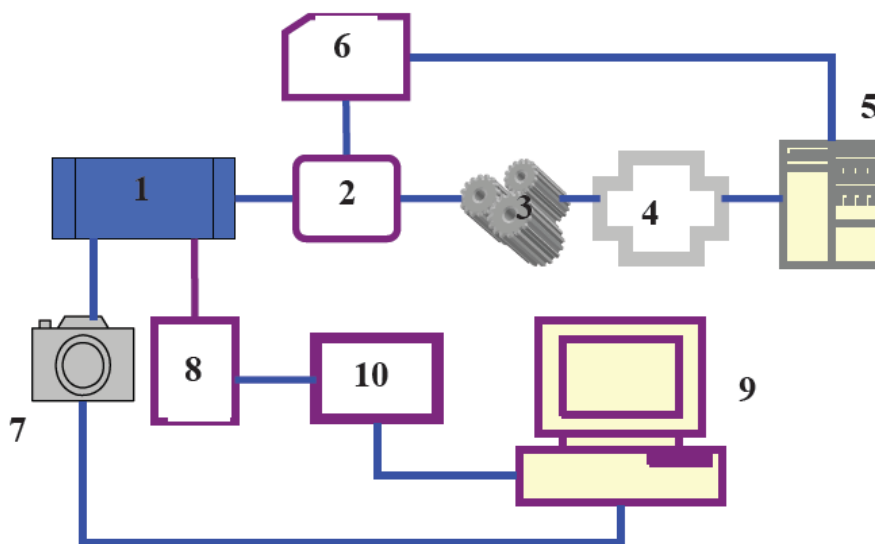


Рис. 1-12. Блок-схема и спецификация установки ПР-2М: 1 – сосуд с испытуемыми жидкостями; 2 – кривошипно-шатунный механизм; 3 – редуктор; 4 – Электродвигатель постоянного тока (П11); 5 – блок питания и управления; 6 – устройство регистрации периода колебаний сосуда; 7 – цифровая фотокамера (DimageZ); 8 – скоростная камера VS-FAST; 9 – ПК (персональный компьютер); 10 – контроллер ввода изображения VS2001

Нарушение гармоничности колебаний сосуда может происходить вследствие неустойчивости вращения привода и разбалансировки кривошипа. Неустойчивость вращения контролировалась по показаниям частотомера. Точность измерения периода вертикальных колебаний сосуда характеризуется отклонением от среднего значения 3×10^{-3} с. Эксперименты прекращались, если отклонения от среднего значения периода колебаний превышали 5×10^{-3} с. Разбалансировка устранялась уравниванием плеч кривошипа.

Для оценки гармоничности колебаний сосуда при сбалансированном кривошипе для различных значений частоты Ω и амплитуды s была проведена запись движения грузовой площадки ПР-2М – рис. 1-13. При совмещении отдельных записей процесса колебаний сосуда и графиков функций $y(t) = s \cos \Omega t$ оказалось, что их совпадение определяется толщиной линии на записях самописца и на графиках аналитических функций, т.е. величиной порядка 0,02 см.

Если представить реальное движение сосуда с жидкостью функцией $y^*(t) = s \cos \Omega t + \eta(t)$, то из вышесказанного следует, что

$$|\eta| \leq 0.02 \text{ см}, |\eta| \leq \gamma s.$$

При амплитуде $s=0.9$ см имеем $\gamma \cong 0.02$. Разложим функцию $\eta(t)$ в ряд Фурье $\eta(t) = \sum_{k=2}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t)$ и оценим значение коэффициента нелинейных искажений (клирфактор) j , который является количественной характеристикой искажений сигнала - в нашем случае функции $y(t) = s \cos \Omega t$. По определению

$$j = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}}{s}$$

Поскольку справедлива следующая оценка

$$\sum_{k=2}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \max \eta^2 \leq (\gamma s)^2,$$

то $j \leq 0.02$.

Таким образом, коэффициенты при высших гармониках не превышают величину 0.02, а относительная ошибка представления колебаний сосуда гармонической функцией не превышает 2%.

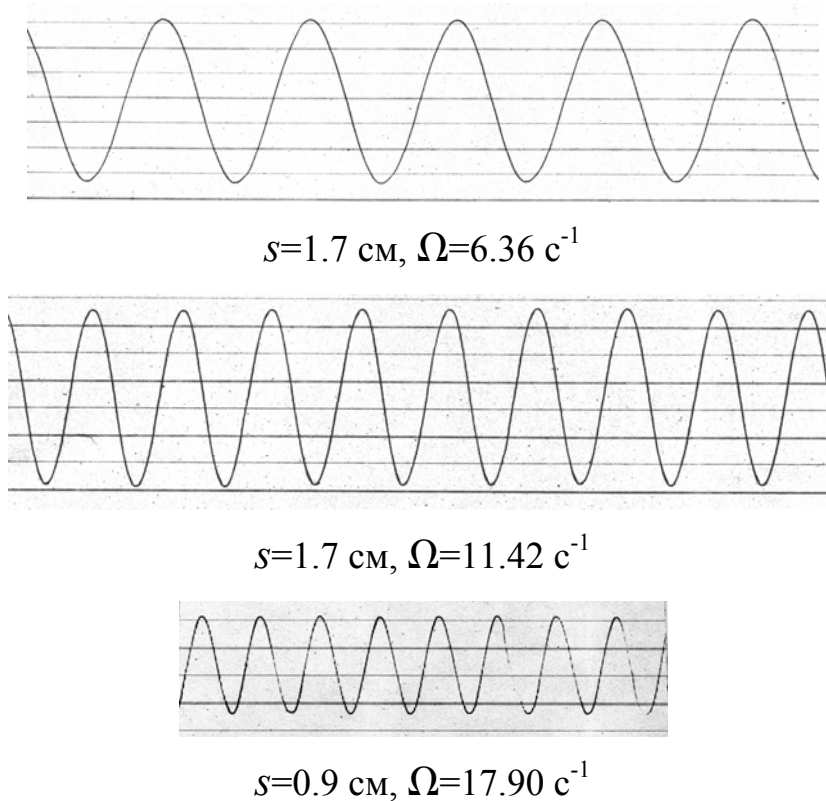


Рис. 1-13. Хронограммы смещения грузовой площадки установки ПР-2М при различных амплитуде и частоте колебаний сосуда

В ходе исследования процесса параметрического возбуждения поверхностных и внутренних волн использовался сосуд следующих размеров: длина $L=50$ см, ширина $W=4$ см, высота $H=40$ см. Сосуд изготовлен из листового оргстекла, толщина передней и задней стенок 5 мм, дна и боковых стенок 15 мм. Предусмотрено крепление сосуда к

грузовой площадке. Размеры сосуда выбраны, исходя из следующих соображений:

- обеспечение двумерности волновых движений жидкости, т.к. при большой ширине W наблюдаются поперечные колебания жидкости, наличие которых приводит к снижению точности определения ординат точек возмущенной поверхности жидкости при используемой для измерений параметров волн кино-, видео- и фотосъемке;
- длина сосуда выбрана таким образом, чтобы частоты собственных колебаний жидкости находились в диапазоне частот, обеспечиваемых возможностями установки.

Для выяснения влияния поперечных размеров сосуда на процесс возбуждения волн на свободной поверхности жидкости или границе раздела двухслойной жидкости в отдельных опытах применялся сосуд следующих размеров $60 \times 13.4 \times 28$ см. Сосуд изготовлен из листового оргстекла: толщина передней и задней стенок 8 мм, боковых стенок и дна - 20 мм.

Для регистрации волновых движений жидкости использовалась киноъемка (кинокамера 16-СП) или цифровая видеосъемка (DIMAGE Z2, 24-30 к/с и высокоскоростная VS FAST, 200-400 к/с) с последующей обработкой на дешифраторе ЭДИ-452 или персональном компьютере в среде GetData Graph Digitizer 2.22. Оценки показали, что измерение пространственных характеристик волн по материалам кино- и видеосъемки производилось с точностью 1 мм (среднеквадратическая ошибка).

С целью повышения надежности результатов измерения высоты волны проводились восемь раз и в качестве величины H бралось среднее значение. Оценка точности проводилась по формуле Бесселя

$$M_H = \left[\sum_{i=1}^8 (\bar{H} - H_i)^2 \frac{1}{n(n-1)} \right]^{1/2}, \quad n = 8.$$

В итоге среднеквадратическая ошибка результата измерений оказалась порядка 0.4 мм, что хорошо согласуется с априорной оценкой точности.

Аналогично период колебаний сосуда определялся как среднее восьми последовательных значений, отсчитываемых по частотомеру ЧЗ-33. Оценка точности производилась по формуле

$$M_T = \left[\sum_{i=1}^8 (\bar{T} - T_i)^2 \frac{1}{n(n-1)} \right]^{1/2}, \quad n = 8.$$

Оказалось, что $M_T \approx 10^{-3}$ с.

Основные технические характеристики установки ПР-2М приведены в табл. 1-2.

Технические характеристики установки ПР 2М		Таблица 1-2
Диапазон частот вертикальных колебаний сосуда		0.1-5 Гц
Диапазон амплитуд вертикальных колебаний сосуда		0.03-7.5 см
Угловые смещения по горизонтали		не более 8'
Коэффициент нелинейных искажений вертикальных колебаний сосуда		5%
Точность измерения периода колебаний		3×10^{-3} с
Допустимая масса сосуда с жидкостью		до 50 кг
Точность измерения пространственных характеристик волновых движений жидкости		1 мм

Глава 2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ

Настоящая глава посвящена исследованию стоячих поверхностных гравитационных волн, возбуждаемых при основном и гармоническом параметрическом резонансе. Задача о параметрическом возбуждении волн на свободной поверхности жидкости бесконечной глубины [Нестеров (1969)] обобщена на случай жидкости конечной глубины. Экспериментально исследованы основные закономерности параметрического возбуждения поверхностных волн в случае основного и гармонического резонанса и проведена верификация соответствующих теоретических моделей. Проанализированы нелинейные свойства поверхностных волн Фарадея.

По материалам главы опубликованы работы [Секерж-Зенькович, Калиниченко (1982); Калиниченко и др. (1985; 1995); Калиниченко (1986); Базилевский и др. (2001); Sekerj-Zenkovich et al (1998); Калиниченко и др. (2000); Калиниченко, Лизаррага-Селайа, Секерж-Зенькович (2000)].

2.1. Теоретическая модель

Приведем ряд формул, по которым рассчитывались величины, характеризующие параметрический резонанс и возбуждаемые волны.

Рассматривается задача о параметрическом возбуждении поверхностных волн в однородной жидкости конечной глубины. Воспользуемся методом, с помощью которого в [Нестеров (1969, 1972)] решена аналогичная задача для бесконечно глубокой жидкости, и его модификацией, предложенной в [Секерж-Зенькович (1983)].

Пусть прямоугольный сосуд с жидкостью глубины h совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой s и частотой Ω - рис. 2-1. Рассматривается двумерное движение жидкости.

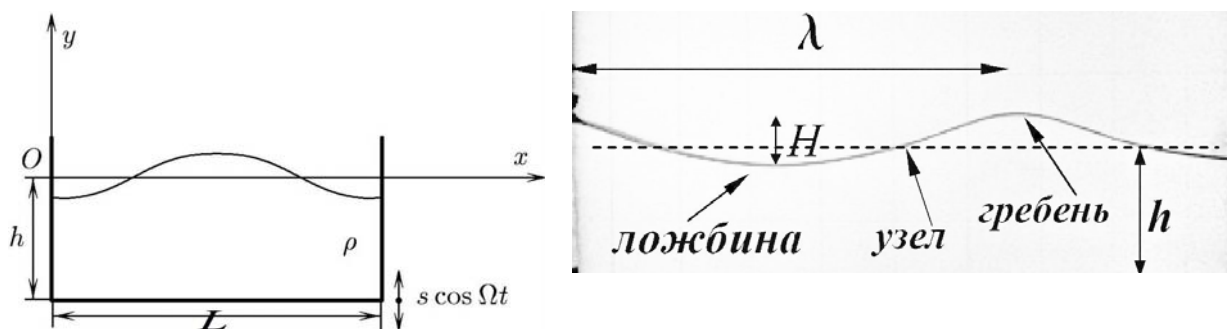


Рис. 2-1. Параметрическое возбуждение поверхностных волн и их основные характеристики: λ - длина волны; H - высота волны

Используется традиционная схема решение задач о потере гидродинамической устойчивости, т.е. движение жидкости разбивается на основное и возмущенное. За основное состояние принимается поступательное движение жидкости вместе с сосудом, при котором

$$x=a, y=b, p=-g\rho \left(1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos \Omega t\right)b,$$

a, b, t - переменные Лагранжа.

В момент $t=0$ в жидкости возникло возмущение в виде простой гармонической волны с волновым числом $k=\pi n/L$ ($n=1,2,3,\dots$ - номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны), произвольной высоты H и линейной собственной частоты $\omega = (kgthkh)^{1/2}$.

Рассматриваются волны конечной амплитуды, мало отличающиеся от линейных. Вводится малый параметр ϵ , характеризующий крутизну волны, и

считается, что перегрузка, определяемая как отношение наибольшего ускорения сосуда $s\Omega^2$ к ускорению силы тяжести g , есть малая величина порядка ε , т.е.

$$\frac{s\Omega^2}{g} = \gamma\varepsilon, \quad \gamma = O(1) \quad .$$

Таким образом, хотя в задаче имеется два малых параметра – параметр перегрузки и параметр крутизны волн – в конечном счете, используется лишь один из них при выборе соотношения между ними. При указанном соотношении сдвиг собственных частот, вызываемый нелинейностью волн, и сдвиг, определяемый параметрическим возбуждением, имеют одинаковые порядки.

Пусть $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ – декартовы координаты индивидуальной движущейся частицы жидкости. Тогда уравнения движения и непрерывности в системе координат, жестко связанной с сосудом, записываются в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g(1 + \gamma\varepsilon \cos \Omega t) \right] \frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g(1 + \gamma\varepsilon \cos \Omega t) \right] \frac{\partial y}{\partial b} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b}, \\ \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a} = 1. \end{cases}$$

Граничные условия задачи таковы:

$$x(0, b, t) = 0, x(L, b, t) = L, y(a, -h, t) = -h, p(a, 0, t) = 0.$$

Здесь полагается, что на свободной поверхности $b=0$.

Введем неизвестные функции ξ , η , B по формулам

$$\begin{aligned} x &= a + \sqrt{\varepsilon} \xi, y = a + \sqrt{\varepsilon} \eta, \\ p/\rho &= -g(1 + \gamma\varepsilon \cos \Omega t) y + \sqrt{\varepsilon} B \end{aligned}$$

Эти функции должны быть найдены из решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial B}{\partial a} - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial a} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial B}{\partial b} - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial b} \right),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} = \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} \frac{\partial \eta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial \eta}{\partial b} \right),$$

$$\xi(0, b, t) = \xi(L, b, t) = \eta(a, -h, t) = 0,$$

$$-\rho(g\eta - B) = \varepsilon \gamma g \rho \eta \cos \Omega t$$

Решение системы (2) строится в виде рядов по степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\xi = \xi_0 + \sqrt{\varepsilon} \xi_1(a, b, A, \psi) + \varepsilon \xi_2(a, b, A, \psi) + \dots,$$

$$\eta = \eta_0 + \sqrt{\varepsilon} \eta_1(a, b, A, \psi) + \varepsilon \eta_2(a, b, A, \psi) + \dots,$$

$$B = B_0 + \sqrt{\varepsilon} B_1(a, b, A, \psi) + \varepsilon B_2(a, b, A, \psi) + \dots,$$

где функции ξ_i , η_i , B_i периодические по $\psi = \Omega t/2 + \theta$. Рассматривается случай **основного резонанса**, т.е. частота Ω близка к одной из удвоенных собственных частот колебаний жидкости.

Используя процедуру [Нестеров (1969,1972); Секерж-Зенькович (1983)], во втором приближении получим следующие выражения для координат x и y частиц жидкости на свободной поверхности:

$$\begin{cases} x = a - H \frac{\text{ch} \kappa h}{2 \text{sh} \kappa h} \sin \kappa a \cos \psi + H^2 \kappa \frac{\sin 2 \kappa a}{32 \text{sh}^2 \kappa h} (1 + \cos 2 \psi) - \\ - \frac{3}{64} H^2 \kappa \frac{\text{ch} 2 \kappa h}{\text{sh}^4 \kappa h} \sin 2 \kappa a \cos 2 \psi + \frac{1}{16} H^2 \kappa \frac{\text{ch} 2 \kappa h}{\text{sh}^2 \kappa h} \sin 2 \kappa a, \\ y = H \frac{\cos \kappa a \cos \psi}{2 \text{sh}^4 \kappa h} + H^2 \kappa \frac{\sin 2 \kappa a}{32 \text{sh}^2 \kappa h} (1 + \cos 2 \psi) + \\ + \frac{3}{64} H^2 \kappa \frac{\text{sh} 2 \kappa h}{\text{sh}^2 \kappa h} \cos 2 \kappa a \cos 2 \psi - \frac{1}{16} H^2 \kappa \frac{\text{ch} 2 \kappa h}{\text{sh} 2 \kappa h} \cos 2 \kappa a, \end{cases} \quad \psi = \frac{\Omega t}{2} + \theta(t)$$

(2.1)

в которых $H(t)=2\sqrt{\varepsilon} A(t)$ и $\theta(t)$ - высота и медленная фаза волны, соответственно. Они с точностью до $O(\varepsilon)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \frac{1}{4} \beta H^2 \omega \kappa^2, \\ \beta = \frac{1}{64} \text{th}^{-4} \kappa h (2 \text{th}^6 \kappa h + 3 \text{th}^4 \kappa h + 12 \text{th}^2 \kappa h - 9) \end{cases} \quad (2.2)$$

Система (2.2) имеет типичный для задач о параметрическом возбуждении вид и может быть исследована традиционными методами [Боголюбов, Митропольский (1974)]. Так можно оценить диапазон изменения частоты Ω колебаний сосуда, в котором происходит усиление волнового возмущения. Ограничиваясь случаем основного параметрического резонанса, определяемого требованием, чтобы расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$ была порядка величины ε , находим, что усиление волн происходит в том случае, если

$$|\Delta| < \frac{s\Omega^3}{8g} \quad (2.3)$$

При выполнении условия (2.3) возможно существование устойчивых стационарных волн конечной высоты. Высота H и фаза ψ стационарных волн определяются формулами

$$\begin{cases} \kappa^2 \frac{H^2}{4} \omega \beta = \pm \Delta + \varepsilon \omega^2 \frac{1}{2\Omega}, \\ \psi = \frac{\Omega t}{2} + \frac{\pi \mp \pi}{2} \quad (\beta_{\lessgtr} 0) \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2. Диаграммы устойчивости.

Частотный диапазон параметрического возбуждения волн, согласно (2.3), определяется амплитудой s и частотой Ω колебаний сосуда. В экспериментах использовалась следующая методика оценки границ этого диапазона. Сначала рассчитывалась собственная частота ω для данной моды и устанавливалась частота колебаний сосуда $\Omega \sim 2\omega$ при выбранной амплитуде s . После выхода колебаний на стационарный режим частота Ω плавно изменялась так, чтобы высота волны уменьшалась. Это изменение продолжалось до значения Ω_A , при котором амплитуда волны практически равна нулю; $\Omega = \Omega_A$ принималось за граничное значение.

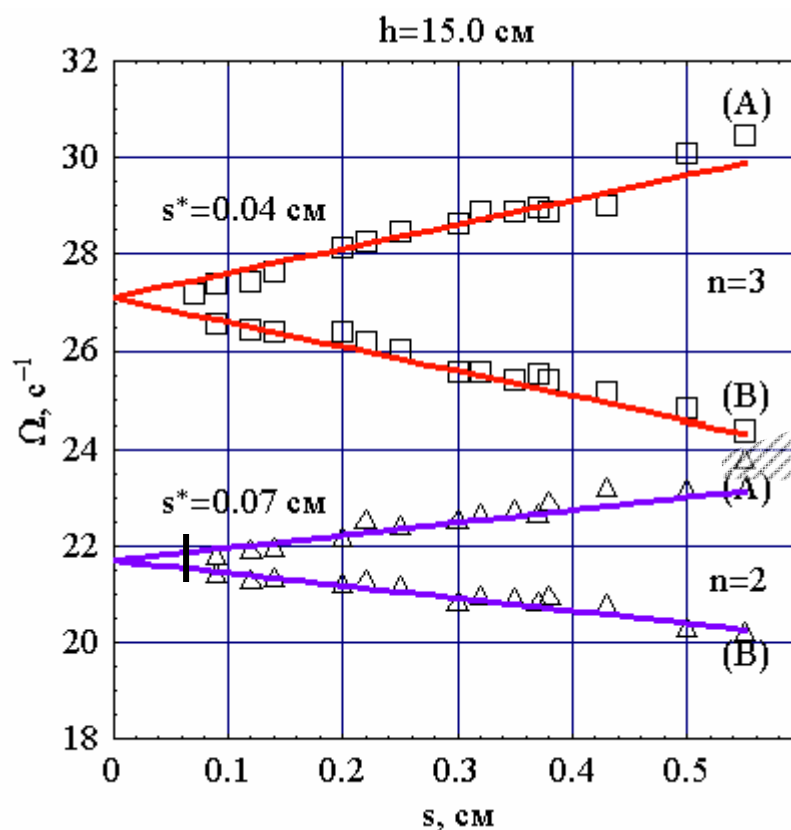


Рис. 2-2. Диаграммы устойчивости, определяющие возбуждение второй и третьей волновых мод: $h=15$ см

Другая граница Ω_B диапазона находилась путем дискретного изменения с малым шагом частоты колебаний сосуда в обратном направлении, т.е. при увеличении амплитуды волны.

При каждом новом значении Ω вибростенд выключался. Волновые движения жидкости затухали. После их полного прекращения сосуду опять сообщались колебания с частотой Ω , и фиксировалось наличие или отсутствие раскачки волны. Если в течение **20 мин** стационарный режим колебаний жидкости не достигался, то соответствующая частота Ω принималась за граничное значение Ω_B .

Для второй ($n=2$) и третьей ($n=3$) волновых мод при $h=15$ см проведены серии измерений значений Ω_A и Ω_B для различных значений амплитуды колебаний сосуда s . В результате для указанных мод построены диаграммы устойчивости, представленные на рис. 2-2. Сплошными линиями показаны границы диапазона параметрического возбуждения, рассчитанные по (2.3). Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение для $s < 0.4$ см.

При $s > 0.4$ см тот факт, что экспериментальная зона неустойчивости шире теоретической, можно объяснить на примере второй моды колебаний следующим образом. Верхняя граница смещена в область высоких частот за счет того, что при данных s происходит перекрытие второй и третьей мод (на рис. 2-5 эта область показана штриховкой) и возможны режимы, когда вторая мода, просуществовав некоторое время, переходит в третью, которая через некоторое время переходит во вторую, и затем весь процесс периодически повторяется.

Из рис. 2-2 видно наличие пороговых амплитуд колебаний сосуда s^* , ниже которых для любых Ω свободная поверхность жидкости остается невозмущенной. Для второй моды $s^*=0.07$ см, для третьей - $s^*=0.04$ см.

Существование для данной моды пороговой амплитуды s^* является опытным фактом, поскольку в соответствии с формулой (2.3) при $s=0$ мы имели бы свободные колебания жидкости с частотой ω .

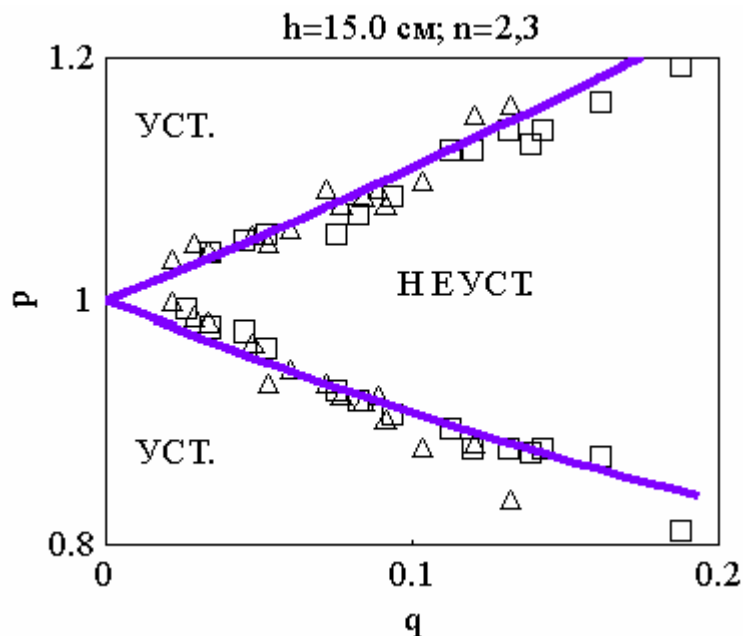


Рис. 2-3. Диаграмма устойчивости в безразмерном виде: $h=15$ см

Введем следующие переменные: $p = (2\omega_n / \Omega)^2$ - частотная расстройка, и $q = 2\kappa_n s \operatorname{th} \kappa_n h$ - параметр внешнего воздействия.

Тогда для исследуемых мод на (p, q) -плоскости можно построить область неустойчивости свободной поверхности жидкости (рассматривается только $1/2$ - субгармонику поверхностных волн)

Для второй и третьей мод области неустойчивости показаны на рис. 2-3. При таком представлении экспериментальных данных вместо разнесенных по частоте неустойчивых областей (.рис. 2-2), на (p, q) -плоскости получена общая для второй и третьей мод область неустойчивости в случае основного параметрического резонанса. Для того, чтобы определить устойчива или неустойчива свободная поверхность жидкости при заданных значениях амплитуды s и частоты Ω . колебаний сосуда, для каждой моды номера n необходимо вычислить величины (p, q) и нанести на (p, q) -диаграмму; если

одна из точек оказывается в неустойчивой области, то для соответствующей моды свободная поверхность неустойчива, т.е. амплитуда этой моды экспоненциально возрастает до установления стационарного режима колебаний.

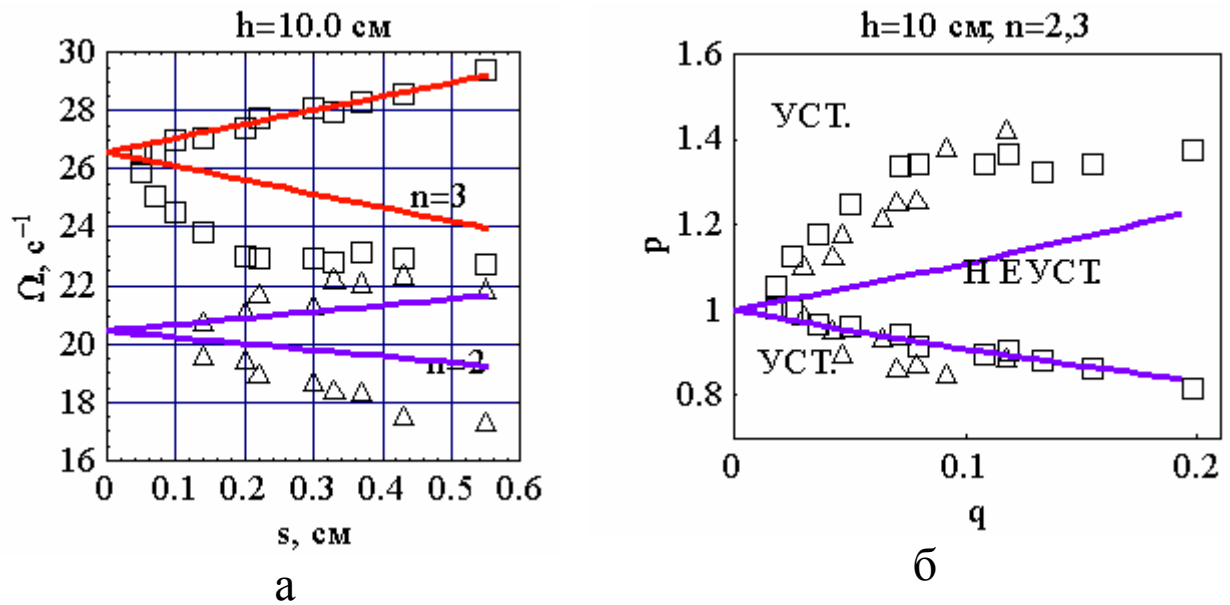


Рис. 2-4. Диаграмма устойчивости в размерном (а) и безразмерном (б) виде: $h=10$ см, ($n=2,3$)

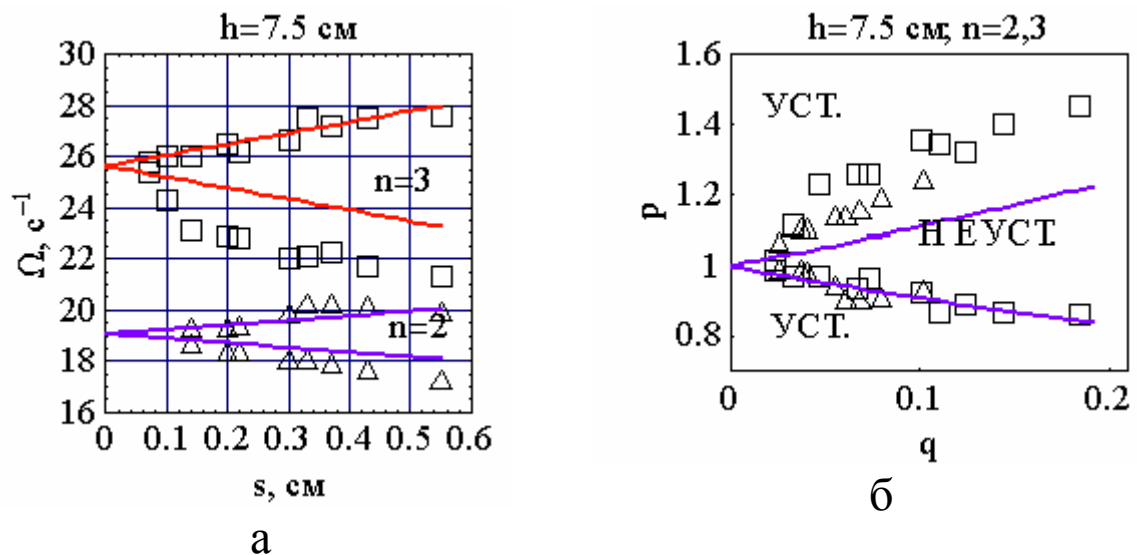


Рис. 2-5. Диаграмма устойчивости в размерном (а) и безразмерном (б) виде: $h=7.5$ см, ($n=2,3$)

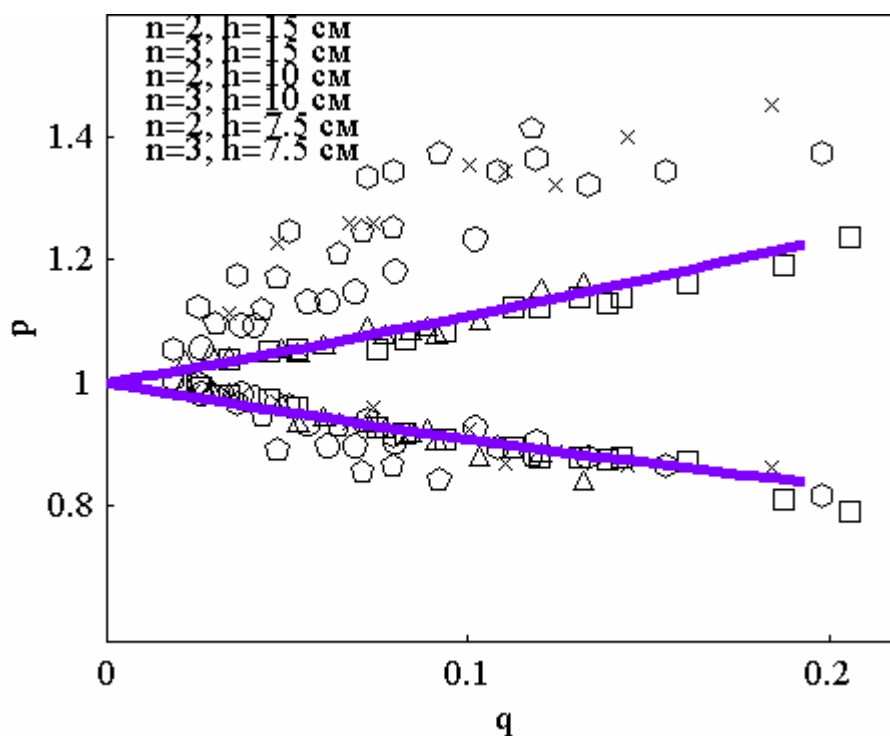


Рис. 2-6. Диаграмма устойчивости в безразмерном виде

Экспериментально были проведены оценки областей устойчивости свободной поверхности жидкости глубины $h=7.5$ и 10 см для второй и третьей ($n=2,3$) волновых мод – рисунки 2-4 и 2-5.

Безразмерная диаграмма устойчивости для второй и третьей волновых мод при $h=7.5$, 10 и 15 см приведена на рис. 2-6, из которого следует наличие порогового значения параметра $q^* \sim 0.013$.

2.3. Резонансные зависимости. Волновые профили.

Если амплитуда колебаний сосуда превосходит пороговое значение ($s > s^*$), а частота Ω принадлежит резонансной зоне, то на поверхности жидкости возбуждаются волны, основными характеристиками которых являются их высота H и частота $\Omega/2$ в случае основного параметрического резонанса. Высота волновой моды номера n зависит не только от частоты Ω и

амплитуды s колебаний сосуда, но и от глубины жидкости h (см. (2.4)). На рис.2-7 в качестве примера для второй моды представлены зависимости высоты H от частоты Ω колебаний сосуда при различных глубинах жидкости.

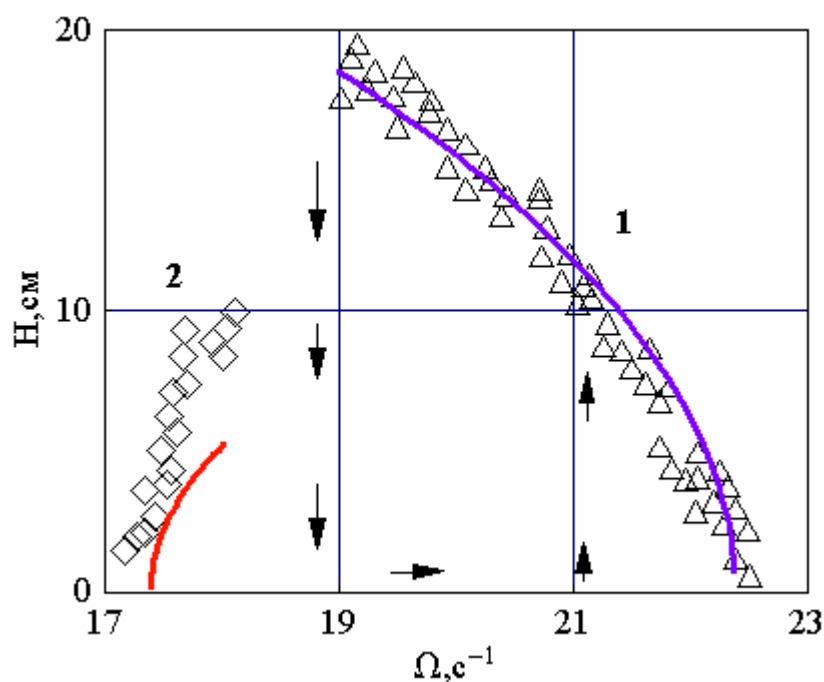


Рис. 2-7. Резонансные зависимости для второй волновой моды $n=2$: 1 - $h=15$ см, $s=0.25$ см, $\beta=0.11>0$; 2 - $h=6.0$ см, $s=0.34$ см, $\beta=-0.33<0$

Для второй моды $n=2$ при глубине $h=15$ см и $s=0.25$ см (кривая 1) при уменьшении частоты амплитуда возрастает (случай $\beta>0$). Это наблюдается до значения Ω , при котором происходит срыв колебаний (направленные вниз стрелки на рис. 2-7). При дальнейшем уменьшении Ω свободная поверхность остается невозмущенной при условии, что Ω не попадает в пределы резонансной зоны соседних мод. Если после срыва колебаний медленно увеличивать Ω , то при некоторой частоте Ω_B наблюдается скачкообразный рост амплитуды - жесткое возбуждение, на рис. 2-7 направленные вверх стрелки - и при дальнейшем увеличении Ω высота волны H уменьшается.

С уменьшением глубины наклон резонансных кривых изменяется. Для второй моды при $h=6.0$ см, $s=0.34$ см получена резонансная кривая 2 с явно выраженным наклоном вправо.

Для сравнения с данными эксперимента на рис. 2-7 приведены кривые, рассчитанные по формулам (2.4).

На рис. 2-8 приведены резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод при $h=15$ и 10 см.

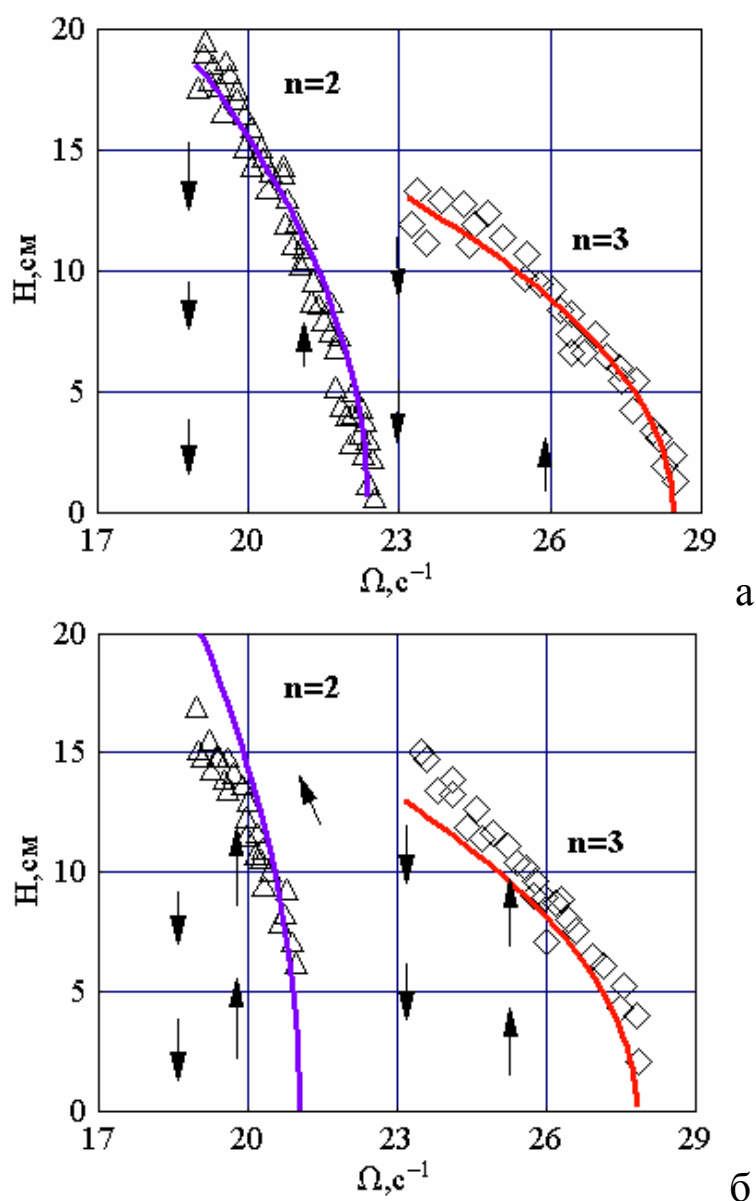


Рис. 2-8. Резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод $n=2, 3$: а - $h=15$ см, $s=0.25$ см; б - $h=10.0$ см, $s=0.25$ см

Если двигаться вдоль резонансной кривой 1 (рис.2-7), начиная с малых значений H , то сначала профиль волны будет близким к синусоидальному, а с увеличением H все сильнее будут сказываться нелинейные эффекты, приводящие к искажению волнового профиля. На рис.2-9 показаны экспериментальные волновые профили для второй моды (А соответствует $\Omega=22.306 \text{ с}^{-1}$, $H=2.5 \text{ см}$; Б - $\Omega=22.211 \text{ с}^{-1}$, $H=4.8 \text{ см}$; В - $\Omega=21.109 \text{ с}^{-1}$, $H=11.8 \text{ см}$; Г - $\Omega=20.112 \text{ с}^{-1}$, $H \sim 15.6 \text{ см}$), возбуждаемых на поверхности жидкости глубины $h=15 \text{ см}$ при амплитуде колебаний сосуда $s=0.25 \text{ см}$. Точки на рис.2-9 - волновые профили, рассчитанные по формулам (2.1). Видно, что формулы (2.1) неплохо описывают форму возбуждаемых волн в случае слабой нелинейности (случаи А, Б и В). При сильной нелинейности (кривая Г) на основании теоретических результатов можно судить лишь о максимальной y_1 и минимальной y_2 ординатах волновой поверхности.

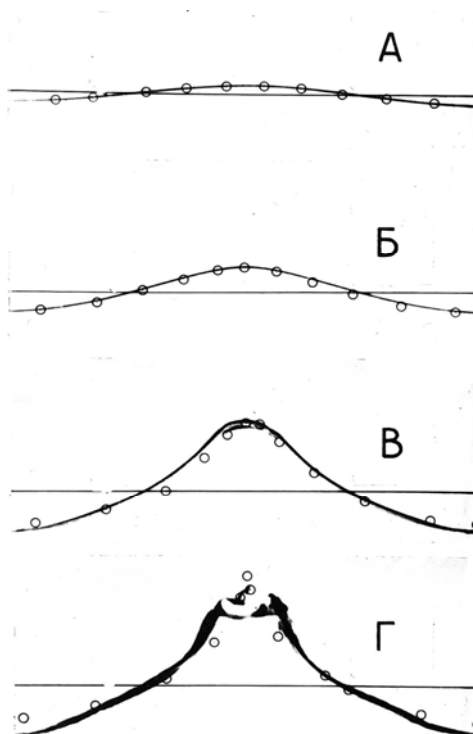


Рис. 2-9. Волновые профили для второй волновой моды ($n=2$, $h=15 \text{ см}$, $s=0.25 \text{ см}$, $\beta>0$): А - $\Omega=22.306 \text{ с}^{-1}$, $H=2.5 \text{ см}$; Б - $\Omega=22.211 \text{ с}^{-1}$, $H=4.8 \text{ см}$; В - $\Omega=21.109 \text{ с}^{-1}$, $H=11.8 \text{ см}$; Г - $\Omega=20.112 \text{ с}^{-1}$, $H \sim 15.6 \text{ см}$; точки - расчет по (2.1)

На рис. 2-10 в качестве иллюстрации нелинейности исследуемых волн Фарадея приведены профили максимального развития второй моды, взятые

через половину периода волны ($n=2$, $h=15$ см, $s=0.25$ см, $\Omega=21.15$ с⁻¹, $H=11.8$ см). Стрелками показана положения узлов стоячей волны.

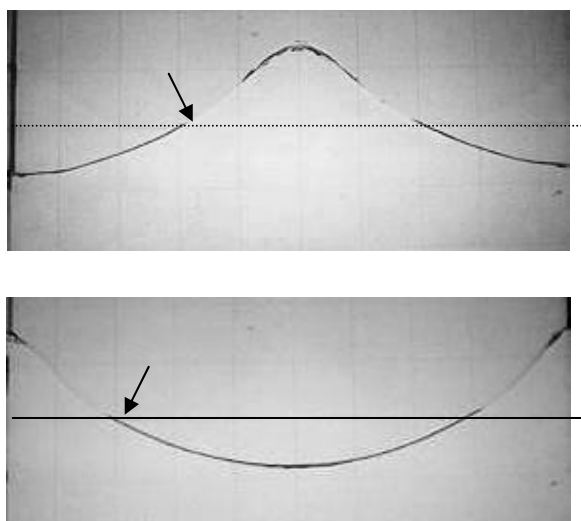


Рис. 2-10. Профили максимального развития второй волновой моды: $n=2$, $h=15$ см, $s=0.25$ см, $\Omega=21.15$ с⁻¹, $H=11.8$ см. Стрелками показаны узлы стоячей волны.

Асимметрия волнового профиля оценивалась как отношение минимальной ординаты y_2 (низшая точка долины волны) к максимальной ординате максимальной y_1 (гребень волны) в зависимости от крутизны волны H/λ (значения y_1 и y_2 берутся в моменты максимального развития волны). Отметим, что в случае чисто синусоидальных волн независимо от значения H отношение $y_2/y_1=1$.

Экспериментальные зависимости коэффициента асимметрии профиля от крутизны волны второй и третьей мод ($h=15$ см, $s=0.25$ см) приведены на рис. 2-11. Эксперименты показали, что даже при $H/\lambda=0.08$ коэффициент асимметрии $y_2/y_1=0.8$, а при увеличении высоты волны асимметрия возрастает: при $H/\lambda=0.24$ коэффициент асимметрии $y_2/y_1=0.4-0.5$.

Значения y_1 и y_2 можно вычислить по формулам (2.1), при этом значение фазы соответствует моментам наибольшего развития волны.

Для сравнения с данными опыта на рис. 2-11 представлены рассчитанная по (2.1) зависимость коэффициента асимметрии волны от ее крутизны.

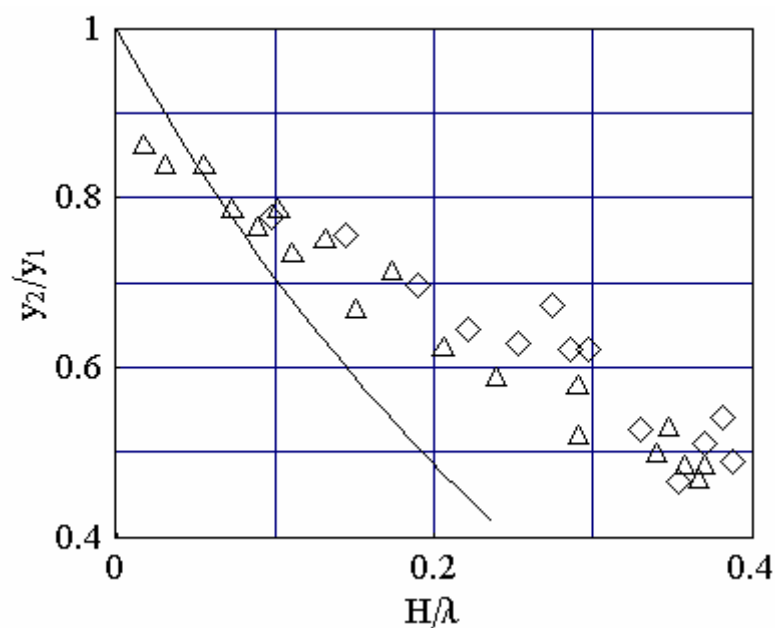


Рис. 2-11. Зависимость коэффициента асимметрии волны от ее крутизны для второй и третьей волновых мод ($h=15$ см, $s=0.25$ см)

Нелинейные эффекты проявляются и в колебаниях узлов стоячей волны. Узла как неподвижной точки волновой поверхности не существует. Узел в этом случае можно определить как точку свободной поверхности, имеющую нулевое смещение относительно невозмущенного начального уровня жидкости (рис.2-10).

Экспериментальная зависимость безразмерной амплитуды r колебаний узлов от крутизны H/λ для второй моды ($h=15$ см, $s=0.25$ см) показана на рис. 2-12. Видно, что амплитуда этих колебаний увеличивается

с ростом высоты волны. Величина r линейно растет с увеличением крутизны при $H/\lambda < 0.24$, а затем рост замедляется. При $H/\lambda > 0.24$ наблюдается процесс обрушения волн с отрывом жидкости с гребня волны. Линейная часть экспериментальной зависимости $r=r(H/\lambda)$ соответствует только асимметрии волны; второй участок – разрушению волн Фарадея, рассматриваемого в главе 5.

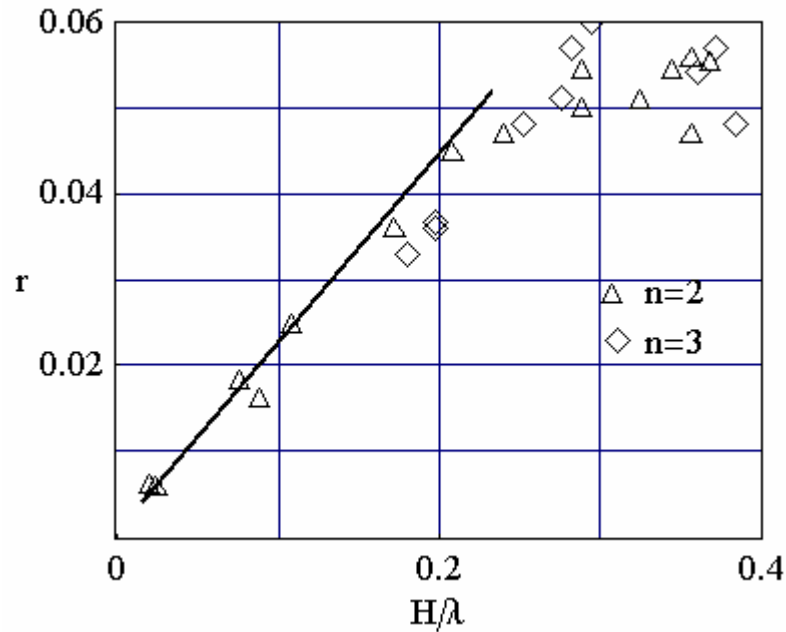


Рис. 2-12. Зависимость безразмерной амплитуды колебаний узлов волны Фарадея от крутизны для второй и третьей волновых мод ($h=15$ см, $s=0.25$ см)

Исключая a из (2.1), получим уравнение волнового профиля в переменных Эйлера $y = y(t, x, H)$. Положение узлов в момент времени t удовлетворяет уравнению $y(t, x, H) = 0$.

Отсюда следует, что обезразмеренная на H амплитуда колебаний узлов в первом приближении описывается формулой

$$r = \frac{1}{4} \left(\frac{\text{ch} \kappa h}{\text{sh} \kappa h} - \frac{\text{sh} 2 \kappa h}{4 \text{sh}^2 \kappa h} + \frac{3 \text{sh} \kappa h}{16 \text{sh}^4 \kappa h} - \frac{1}{4 \text{sh} 2 \kappa h} \right) \frac{H}{\lambda} \quad (2.6)$$

Рассчитанная по (2.6) зависимость $r = r(H/\lambda)$ приведена на рис. 2-12. Видно, что теория неплохо описывает данные эксперимента до $H/\lambda \sim 0.24-0.26$.

2.4. Эффекты вязкого затухания

При теоретическом рассмотрении явления параметрического возбуждения поверхностных волн жидкость предполагалась идеальной. Из теории колебаний [Болотин (1956); Боголюбов, Митропольский (1974)] следует, что диссипативные факторы должны проявляться в наличии пороговых амплитуд колебаний сосуда s^* , ниже которых параметрическое возбуждение невозможно.

Для второй моды пороговая величина колебаний сосуда $s^* = 0,07$ см показана на рис. 2-2 вертикальной линией. Пороговое значение имеет также параметр внешнего воздействия $q = 2\kappa_n s \text{th} \kappa_n h$ - рис. 2-6.

Воспользуемся результатами приближенной теории пограничного слоя и оценим влияние вязкости на процесс параметрического возбуждения волн.

В соответствии с основным положением приближенной теории пограничного слоя [Ламб (1947); Keulegan (1959)] - скорость рассеяния волновой энергии определяется диссипацией ΔE_1 во всем объеме жидкости, потерями ΔE_2 на вертикальных стенках и ΔE_3 на дне сосуда

$$\frac{dE}{dt} = -\Delta E_1 - \Delta E_2 - \Delta E_3,$$

где

$$E(t) = E(0)e^{-2bt} = \frac{\rho g H^2}{16} LW,$$

$$H(t) = H(0)e^{-bt}.$$

При затухании волновой моды номера n на поверхности жидкости глубины h в сосуде заданных размеров ($L \times W$) величины ΔE_1 и ΔE_2 сохраняются, а ΔE_3 определяется структурой дна.

Согласно [Ламб (1947); Keulegan (1959)] коэффициент затухания определяется как

$$b = b_1 + b_2 + b_{31} \quad (2.7)$$

где

$$b_1 = 2\nu k^2,$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{\omega \nu}{2}} \frac{L+W}{LW} + k \frac{L-2h}{L \operatorname{sh} 2kh},$$

$$b_{31} = \sqrt{\frac{\omega \nu}{2}} k \frac{1}{\operatorname{sh} 2kh}.$$

Здесь ν - кинематическая вязкость жидкости; коэффициенты b_1 , b_2 и b_{31} определяют диссипацию волновой энергии во всем объеме жидкости, на передней и задней стенках и дне сосуда, соответственно.

Предположим теперь, рассматривая плоское движение жидкости в вертикально колеблющемся сосуде, что смещение свободной поверхности жидкости задается в следующем виде

$$y(x,t) = 0.5 H(t) \cos kx$$

Тогда, как показано в [Секерж-Зенькович С.Я. (1990); Черноусько (1966)], получим уравнение, определяющее функцию $H(t)$

$$H''(t) + 2bH'(t) + (\omega^2 - \Omega^2 \kappa s \cos \Omega t)H(t) = 0 \quad (2.8)$$

В уравнении (2.8) влияние вязкости учитывается косвенным путем на физическом уровне строгости.

Если ввести безразмерную переменную $\tau = \frac{\Omega t}{2}$ и произвести преобразование

$$H(\tau) = e^{-\delta\tau} H_1(\tau)$$

то функция $H_1(\tau)$ будет удовлетворять уравнению Матье в канонической форме

$$H_1'' + [p - 2q \cos 2\tau] H_1 = 0 \quad (2.9)$$

где

$$\delta = 2b/\Omega, \quad q = 2s\kappa, \quad p = \left(\frac{2\omega}{\Omega}\right)^2 - \delta^2.$$

Предполагается, что в начальный момент времени амплитуда волнового возмущения мала, т.е. $H(\tau) \ll 1$. Тогда из анализа уравнения (2.9) следует, что если частота колебаний Ω сосуда принадлежит зоне неустойчивости, определяемой неравенством [Боголюбов, Митропольский (1974)]

$$1 - \sqrt{(2s\kappa)^2 - \frac{4b^2}{\omega^2}} < \frac{2\omega}{\Omega} < 1 + \sqrt{(2s\kappa)^2 - \frac{4b^2}{\omega^2}},$$

то тривиальное решение $H_1=0$ уравнения (2.9) теряет устойчивость и

$$H(t) \sim e^{(K-b)t} \cos \Omega t / 2$$

где

$$K = s\kappa\Omega/2 \quad (2.10)$$

при условии $(K, b) \ll \Omega/2$, т.е. колебания нарастают по экспоненциальному закону.

Из (2.9) следует, параметрическое возбуждение имеет место, если амплитуда колебаний сосуда превосходит пороговое значение

$$s^* = b g / (2\omega^3) \quad (2.11)$$

При отсутствии колебаний сосуда ($s=0$) любые начальные синусоидальные возмущения типа $y(x,0)$ будут затухать по закону e^{-bt} .

При $s < s^*$ коэффициент затухания возмущений $(b-K)$ уменьшается по мере увеличения s и равен нулю при $s=s^*$. При $s > s^*$ возмущения экспоненциально возрастают.

Ниже приведены рассчитанные по (2.11) и экспериментально полученные значения пороговой амплитуды s^* :

Номер моды, n	Глубина жидкости, $h(\text{см})$	s^* , см (эксперимент)	s^* , см (теория)
2	7,5	0,10	0,06
3	7,5	0,05	0,03
2	10,0	0,07	0,05
3	10,0	0,04	0,03
2	15,0	0,07	0,05
3	15,0	0,04	0,03

В опытах величина s^* определялась при построении диаграммы устойчивости.

Экспериментальное значение коэффициента затухания b оценивалось следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась волновая мода n . Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась кино-/видеосъемка процесса затухания волновых движений жидкости. Измерения смещения свободной поверхности жидкости от положения равновесия по материалам кино/видеосъемки производились с точностью 0.1 см. Величина b оценивалась как

$$b = \frac{1}{T} \ln \frac{H_m}{H_{m+1}},$$

где $T=2\pi/\omega$ - период волны, $\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$ - собственная частота волны, g - ускорение свободного падения, $k=n\pi/L$ - волновое число, n - номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны, H_m и H_{m+1} - значения высоты волны, взятые через период колебаний. Оценки коэффициента затухания b осуществлялись в диапазоне волновых высот 20-120 мм.

Коэффициент нарастания высоты волны K рассчитывался по формуле (2.10). В опыте по материалам видеосъемки процесса развития волны определялась величина

$$(K - b) = \frac{1}{T} \ln \frac{H_{m+1}}{H_m}.$$

Ниже представлены экспериментальные и теоретические величины коэффициентов затухания и нарастания высоты волны для $n=2,3$ и $h=7.5, 10.0$ и 15.0 см:

Номер моды, n	h (см)	Ω (с ⁻¹)	b (с ⁻¹) (эксп.)	b (с ⁻¹) (теор.)	$K-b$ (с ⁻¹) (эксп.)	$K-b$ (с ⁻¹) (теор.)	K (с ⁻¹) (эксп.)	K (с ⁻¹) (теор.)
2	7.5	18.730	0.145	0.055	0.145	0.162	0.290	0.217
2	7.5	19.220	0.086	0.055	0.202	0.177	0.288	0.223
2	7.5	20.219	0.125	0.057	0.183	0.177	0.308	0.234
3	7.5	24.843	0.183	0.063	0.333	0.455	0.516	0.518
2	10.0	20.577	0.073	0.057	0.242	0.218	0.315	0.275
2	15.0	21.639	0.061	0.057	0.252	0.281	0.313	0.340

Сравнение данных опыта и теории показывает, что по формулам (2.6) и (2.10) можно достаточно точно оценить коэффициенты затухания и

нарастания - это представляется важным при изучении неустановившихся волновых процессов.

Таким образом, использование приближенных результатов линейной теории пограничного слоя позволяет оценить пороговую амплитуду колебаний сосуда, а также коэффициенты нарастания и затухания поверхностных волн.

Исследуем процесс нарастания малых начальных волновых возмущений до значений, отвечающих стационарным режимам параметрических колебаний.

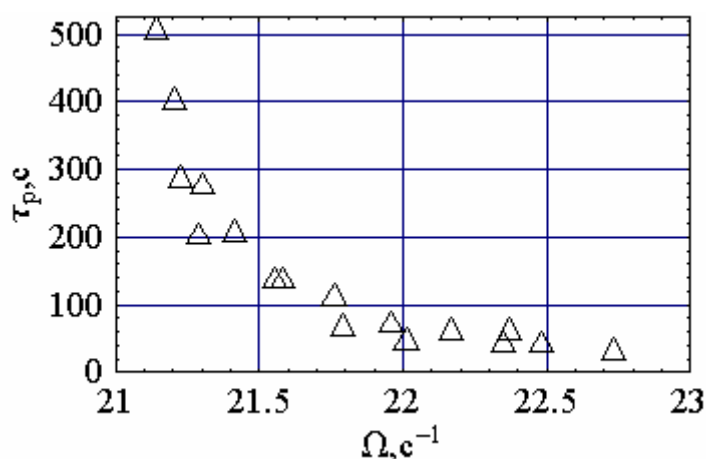


Рис. 2-13. Время установления стационарных колебаний: $n=2$, $h=15$ см, $s=0.25$ см

Для второй моды $n=2$ при глубине жидкости $h=15$ см и амплитуде колебаний сосуда $s=0.25$ мм были проведены экспериментальные оценки времени установления стационарного режима колебаний. Полученные результаты приведены на рис. 2-13. Видно, что с уменьшением частоты Ω (высота волны H растет) время τ_p возрастает и при приближении к левой границе резонансной зоны (жесткое возбуждение) асимптотически стремится к бесконечности. Таким образом, экспериментально подтверждается тот факт, что вне резонансной зоны, независимо от

времени раскочки, свободная поверхность жидкости остается невозмущенной.

Проведем анализ установления стационарного режима колебаний. Обратимся к системе (2.2), в которой в правой части первого уравнения добавлен член $(-b H)$, определяющий эффекты вязкого затухания

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -bH + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \beta \frac{H^2}{4} \omega \kappa^2, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\beta = \frac{1}{64} \text{th}^{-4} \kappa h (2 \text{th}^6 \kappa h + 3 \text{th}^4 \kappa h + 12 \text{th}^2 \kappa h - 9).$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$ имеем $H=H_0$ и $\theta=\theta_0$. Численно интегрируя систему (2.12), можно проследить эволюцию этого возмущения.

Для $\Omega=21.63 \text{ с}^{-1}$, $n=2$, $h=15 \text{ см}$, $s=0.25 \text{ мм}$ начальные условия выбирались следующим образом:

$$H_0: \quad 0.01 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 1.0 \text{ см}$$

$$\theta_0: \quad 0 \quad \pi/4 \quad \pi/2 \quad 3\pi/4 \quad \pi \text{ радиан}$$

Вычисления показали, что независимо от H_0 решение выходит на стационарное значение $H_{st}=8.8 \text{ см}$. Что касается функции $\theta(t)$, то при $\theta_0 < 5\pi/6$ она выходит на стационарное значение $\theta_1=0.098 \text{ рад}$, а при $\theta_0 \geq 5\pi/6$ на $\theta_2=\pi + 0.098 \text{ рад}$. Согласно [Нестеров (1969, 1972)]

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{bg}{2\Omega\omega^2 s}, \quad \theta_2 = \pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{bg}{2\Omega\omega^2 s}$$

$$\theta_1=0.123 \text{ рад и } \theta_2=\pi + 0.123 \text{ рад.}$$

На рис.2-14 приведены рассчитанный и экспериментальный графики установления стационарных колебаний. Отметим, что для процесса выхода волн на стационарный режим характерны затухающие колебания около значения, соответствующего стационарной амплитуде.

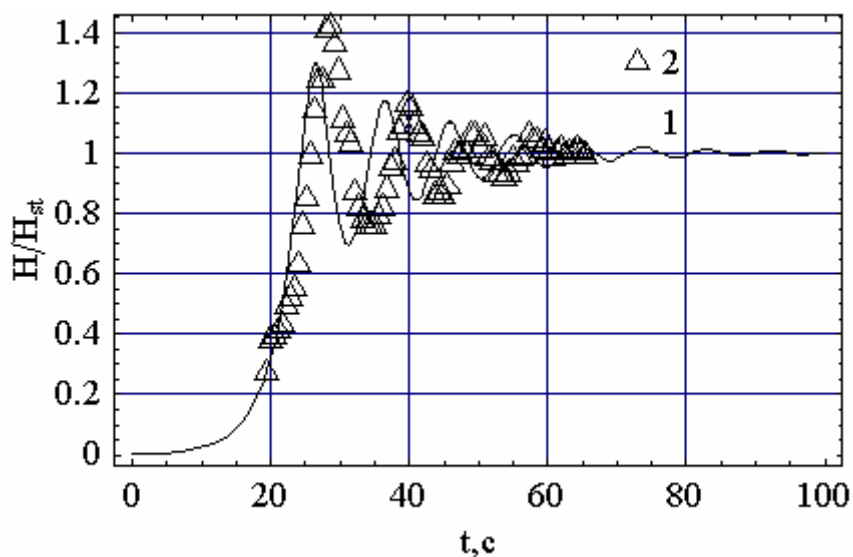


Рис. 2-14. Процесс выхода колебаний на стационарный режим - $n=2$, $h=15$ см, $s=0.25$ мм, $\Omega=21.630$ с⁻¹, $H_{st}=8.8$ см: 1 - расчет; 2 - эксперимент, $H_0=0.1$ см, $\theta_0=0$

2.5. Волны Фарадея при гармоническом резонансе

Согласно [Кравцов, Секерж-Зенькович (1993)] частотный диапазон вертикальных колебаний прямоугольного сосуда, в котором возможно нарастание амплитуды поверхностных волн в жидкости вблизи гармонического резонанса ($\omega \sim \Omega$) при данной амплитуде s колебаний сосуда оценивается как

$$R_- < \frac{\Omega}{\omega} < R_+, \quad (2.13)$$

где

$$R_{\pm} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{1}{12} \left(\frac{s\Omega^2}{g} \right)^2 \pm \left[\frac{1}{64} \left(\frac{s\Omega^2}{g} \right)^4 - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\Delta\omega = -2^{-3/2} \nu^{1/2} g^{-1} \omega^{5/2} I_s / I_{\Sigma},$$

$$I_s = \frac{LW}{2(2 - \delta_{0m}) \text{sh}^2(k_{nm}h)} \left\{ \frac{\pi^2 \text{sh}(2k_{nm}h)}{k_{nm}} \left[\frac{n^2}{L^2} \left(\frac{2 - \delta_{0m}}{W} + \frac{1}{L} \right) + \frac{m^2}{W^2} \left(\frac{2}{L} + \frac{1}{W} \right) \right] - \right. \\ \left. - 2h\pi^2 \left(\frac{n^2}{L^3} + \frac{m^2}{W^3} \right) + k_{nm}^2 \right\},$$

$$I_{\Sigma} = 2^{-2+\delta_{0m}} L W k_{nm}^2,$$

$$k_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{W^2} \right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots$$

δ_{nm} – символ Кронекера; L, W – длина и ширина сосуда, соответственно; n, m – номера продольной и поперечной волновых мод.

Отметим, что из-за наличия диссипативных эффектов амплитуда колебаний сосуда должна некоторое пороговое значение s_{cr} , определяемое как

$$s_{cr} = 2^{3/4} \nu^{1/4} g^{1/2} \omega^{-5/4} (I_s / I_{\Sigma})^{1/2} \quad (2.14)$$

Здесь ν – вязкость жидкости.

С целью проверки теоретических результатов [Кравцов, Секерж-Зенькович (1993)] проведена серия экспериментов по измерению ширины резонансных зон гармонического возбуждения второй волновой моды ($n=2$) в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуда ($L=50$ см, $W=4$ см), заполненном водой ($h=15$ см, $\nu=0.01$ см²/с). Для второй волновой моды диаграмма устойчивости приведена на рис.2-15. Сплошными линиями показаны границы диапазона параметрического возбуждения, рассчитанные по (2.18). Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение.

Из рис.2-15 следует наличие пороговой амплитуды колебаний сосуда, которая равна $s_{cr}=1.69$ см, ниже которой для любых Ω свободная поверхность жидкости остается невозмущенной. Согласно (2.14) соответствующее рассчитанное значение пороговой амплитуды равно $s_{cr}=1.79$ см. Отметим, что для тех же значений параметров L , W , h и n пороговая амплитуда в случае основного резонанса ($\omega \sim \Omega/2$) равна $s_{cr}=0.04$ см (см. рис. 2-2), т.е. в 40 раз меньше, чем при гармоническом резонансе.

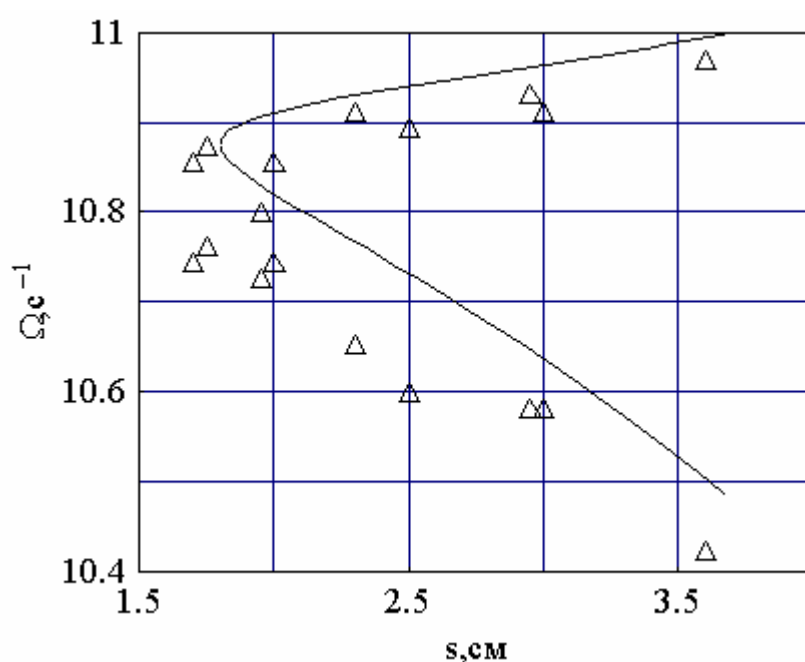


Рис. 2-15. Диаграммы устойчивости, определяющие возбуждение второй волновой моды при гармоническом резонансе: $n=2$, $h=25$ см

Высота H возбуждаемой волновой моды зависит от частоты Ω - см. рис. 2-16. Экспериментально резонансная зависимость снималась по следующей методике. Сначала устанавливалась частота колебаний сосуда $\Omega=11.10$ с⁻¹ ($\Omega \sim \omega$), и после достижения стационарного режима колебаний жидкости частота Ω плавно увеличивалась до величины $\Omega=11.20$ с⁻¹ ($\Omega > \omega$), при которой волновые движения практически затухали. Эта величина принималась за верхнюю границу резонансной зоны. Затем

производилось пошаговое уменьшение частоты Ω , и для каждого ее значения определялась высота H . При уменьшении частоты Ω высота волны возрастала. Это наблюдалось до значения $\Omega_{min}=9,94 \text{ с}^{-1}$, при котором происходил срыв колебаний (направленная вниз стрелка на рис. 2-16). При дальнейшем уменьшении Ω волны на свободной поверхности отсутствовали. Если после срыва колебаний медленно увеличивать частоту сосуда, то волны возбуждаются лишь при $\Omega=10,80 \text{ с}^{-1}$. Наблюдался скачкообразный рост амплитуды (жесткое возбуждение, на рис. 2-16 направленная вверх стрелка). Указанное значение Ω было принято за нижнюю границу резонансной зоны.

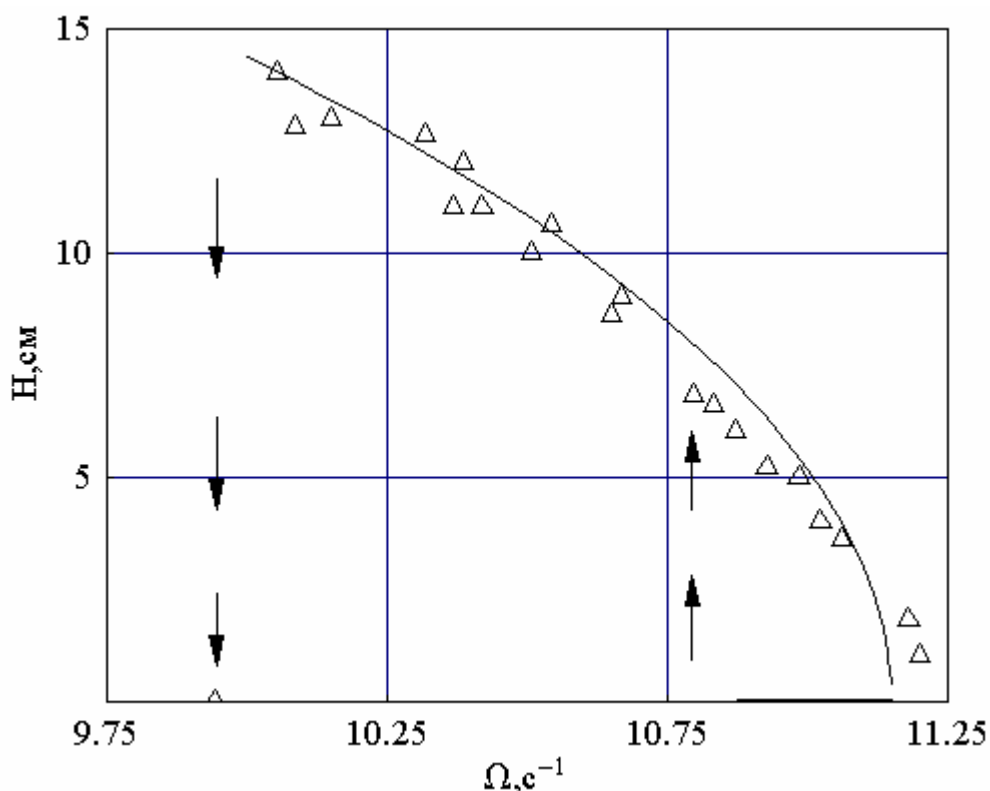


Рис. 2-16. Резонансная зависимость для $n=2$, $h=25 \text{ см}$, $s=2,5 \text{ см}$: 1- эксперимент, 2 - расчет по формулам (2.20)

Резонансная зона показана на рис. 2-16 отрезком на оси абсцисс Ω . Для сравнения с данными эксперимента на рис. 2-16 приведена резонансная кривая, рассчитанная по формуле [Кравцов, Секерж-Зенькович (1993)]:

$$\kappa^2 \frac{H^2}{32} = 1 - \frac{\Omega}{\omega} + \frac{s\Omega^2}{24g} \quad (2.15)$$

Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение.

Заключение

Сформулируем основные выводы проведенной работы.

1. Проведено многоплановое исследование поверхностных волн Фарадея, возбуждаемых при основном параметрическом резонансе в широком диапазоне экспериментальных параметров. Изучались волновые моды $n=1-3$ на свободной поверхности жидкости глубиной $h=6-25$ см в вертикально колеблющемся сосуде при перегрузке

$$\varepsilon = \frac{s\Omega^2}{g} = 0.068 - 0.262.$$

- Исследован частотный диапазон возбуждения волн Фарадея и построена универсальная диаграмма устойчивости волновых мод;
- Сняты резонансные зависимости, для которых характерны срыв колебаний и жесткое возбуждение волновых мод. Для исследуемой гидродинамической системы выявлены эффекты мягкой и жесткой восстанавливающей силы – в первом случае высота волны монотонно растет с уменьшением частоты колебаний сосуда, во втором величина H растет с увеличением Ω .
- Проведена верификация представленной в разд. 2.1 гидродинамической модели, которая находится в хорошем

количественном соответствии с данными эксперимента: различия в собственных частотах не превышают 1.5%, резонансных зависимостей и волновых профилей – 10% для крутизны волны, не превышающей значение 0.24.

- Проанализированы нелинейные свойства поверхностных волн Фарадея, проявляющиеся в асимметрии профиля и колебаниях узлов стоячей волны.
- Изучено влияние диссипативных факторов на процессы возбуждения и затухания поверхностных волн Фарадея. Расчетные значения коэффициента затухания как интегральной меры рассеяния энергии находятся в хорошем количественном соотношении с экспериментальными данными. Исследован процесс выхода колебаний жидкости на стационарный режим.

2. Экспериментально реализована возможность параметрического возбуждения стоячих волн на свободной поверхности жидкости при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда, генерируемых в условиях гармонического резонанса Фарадея. Для второй моды проведены оценки резонансной зоны, снята амплитудно-частотная зависимость. Теоретическая модель находится в хорошем количественном соотношении с данными эксперимента.
3. Проведенные исследования поверхностных волн Фарадея позволили выработать общую методику исследования параметрического резонанса в жидкости и рассматривать последний как способ возбуждения стоячих волн при решении различных задач экспериментальной гидродинамики.

Глава 3. ЭФФЕКТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В настоящей главе представлены результаты экспериментов по параметрическому возбуждению внутренних волн на границе раздела двухслойной жидкости при вертикальных колебаниях сосуда, содержащего двухслойную жидкость. Возможность возбуждения внутренних гравитационных волн Фарадея в двухслойной жидкости была установлена в [Секерж-Зенькович, Калиниченко (1979)]. Аналогично поверхностным волнам возбуждение внутренних волн Фарадея зависит от частоты и амплитуды колебаний сосуда, а также от вязкости жидкостей. Поскольку параметрический резонанс в двухслойной жидкости относится к классу малоизученных и весьма сложных явлений, то представляются целесообразными эксперименты по возбуждению волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости и сравнение данных опыта с результатами гидродинамической модели явления [Нестерова (1972), Секерж-Зенькович С.Я. (1983)].

Цель настоящего исследования – обсуждение лабораторных экспериментов по параметрическому возбуждению внутренних волн на границе раздела двухслойной жидкости при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда. Экспериментальное исследование построено таким образом, чтобы по результатам можно было сделать вывод о закономерностях и особенностях параметрического возбуждения волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости.

По материалам главы опубликованы работы [Секерж-Зенькович, Калиниченко (1979), Калиниченко и др. (1981, 1985, 1987, 1991), Калиниченко (1986), Калиниченко, Тимофеев (1988), Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. (1988)].

3.1. Постановка эксперимента.

Параметрическое возбуждение стоячих волн осуществлялось при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда ($L=50$ см, $W=4$ см, $H=40$ см) с двухслойной жидкостью с амплитудой s и частотой Ω . Исследовался основной параметрический резонанс, при котором частота волн на границе раздела равна $\Omega/2$. В качестве рабочих жидкостей использовались керосин-вода (плотности $\rho_1=0,79$ г/см³, $\rho_2=1,00$ г/см³, соответственно), вода-фреон ($\rho_2=1,57$ г/см³), керосин-водный раствор глицерина ($\rho_2=1,09$ г/см³).

Для локальных измерений применялся лазерный доплеровский анемометр со специально разработанной приставкой [Калиниченко и др. (1987); Калиниченко, Тимофеев (1988)]. Оптическая система, жестко связанная с колеблющимся сосудом, представляла собой двухканальную дифференциальную схему анемометра с частотным разделением каналов. Измерительный объем, образованный пересечением двух сфокусированных лазерных пучков, имел величину $50 \times 50 \times 800$ мкм³, которая и определяла локальность измерений скорости. Электронный сигнал с выхода ФЭУ поступал на анализатор спектра со следящей приставкой. В режиме автосопровождения частоты доплеровского сигнала аналоговый выход системы позволял осуществлять регистрацию динамических изменений скорости жидкости. Измерения вертикальной и горизонтальной компонент скорости осуществлялись поочередно включением соответствующего канала модулятора. Вертикальные профили скорости получены при перемещении сосуда с помощью координатного устройства.

Погрешность измерений скорости оценивалась как погрешность результата косвенного измерения частоты доплеровского сигнала, линейно связанного со скоростью через постоянную оптической системы.

С учетом погрешности калибровки совокупная ошибка измерений скорости не превышала 3%.

3.2. Теоретическая модель.

Приведем основные формулы из [Нестеров (1972), Секерж-Зенькович С.Я. (1983)], в которых рассмотрено параметрическое возбуждение внутренних волн на границе раздела двухслойной жидкости.

В указанных работах рассматривались волны конечной амплитуды, возбуждаемые на границе раздела двух слоев тяжелых жидкостей бесконечной глубины. Верхняя жидкость имеет плотность ρ_1 , нижняя - ρ_2 . Прямоугольный сосуд с жидкостями совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y = -s \cos \Omega t$.

При наличии начального возмущения в виде простой гармонической волны координаты x и y частиц жидкости на границе раздела во втором приближении описываются следующими выражениями:

$$\begin{cases} x = a - \frac{H}{2} \sin ka \cos \psi + \frac{H^2}{4} \kappa \frac{\rho_1}{2(\rho_1 + \rho_2)} (1 + \cos 2\psi) \sin 2ka, \\ y = \frac{H}{2} \cos ka \cos \psi + \frac{H^2}{16} \kappa \left(1 - \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \cos 2ka \right) (1 + \cos 2\psi), \\ \psi = \frac{\Omega t}{2} + \theta(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

в которых $H(t)$ и $\theta(t)$ с точностью до $O(\varepsilon)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \frac{\omega}{32} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} H^2 \kappa^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

где собственная частота определяется как

$$\omega^2 = g\kappa \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (3.3)$$

Устанавливается, что если расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$

$$|\Delta| < \frac{s\Omega^3}{8g}, \quad (3.4)$$

то высота H волнового возмущения нарастает до значения

$$H^2 = \frac{4}{P} \left[\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{s\Omega^2}{g} - 1 \right) \Omega \right], \quad (3.5)$$

$$P = \frac{\kappa^2 \omega}{8} \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}.$$

3.3. Диаграммы устойчивости

Диаграммы устойчивости, характеризующие резонансные зоны в зависимости от амплитуды колебаний сосуда s , для внутренних волн номера $n=2-5$ и $8-12$ на границе раздела керосин-вода приведены на рисунках 3.1 и 3.2. Видно, что с ростом амплитуды колебаний сосуда ширина резонансной зоны увеличивается, причем при фиксированном значении s зона шире для высоких волновых мод. Оказывается, что если резонансные зоны второй и третьей мод разнесены по частоте, то для высоких мод ($n=4,5,8-12$) и значительных s возможно взаимное наложение частотных диапазонов параметрического возбуждения. Из рисунков также следует наличие пороговых значений амплитуды колебаний сосуда s^* , ниже которых для любых Ω граница раздела керосин-вода остается невозмущенной, причем с увеличением номера n значение s^* уменьшается.

Вследствие перекрытия резонансных зон возможно взаимная перестройка соседних мод колебаний. Так при исследовании области неустойчивости 12-й моды ($n=12$) при амплитуде $s=0.48$ см и частоте

$\Omega=18.315 \text{ c}^{-1}$ был зафиксирован следующий режим колебаний границы раздела. После установления стационарных колебаний в течение 1.5 мин наблюдалась 12 мода, которая затем перешла в 11-ю моду ($n=11$). Время перехода - 1 мин. Через 1.5 мин происходил обратный переход, ($n=11$) $\rightarrow$ ($n=12$), и далее весь процесс периодически повторяется.

Отметим, что для внутренних волн резонансные зоны значительно уже, а пороговая амплитуда колебаний сосуда больше, чем для поверхностных волн того же номера моды (см. рисунки 2-2 – 2-5).

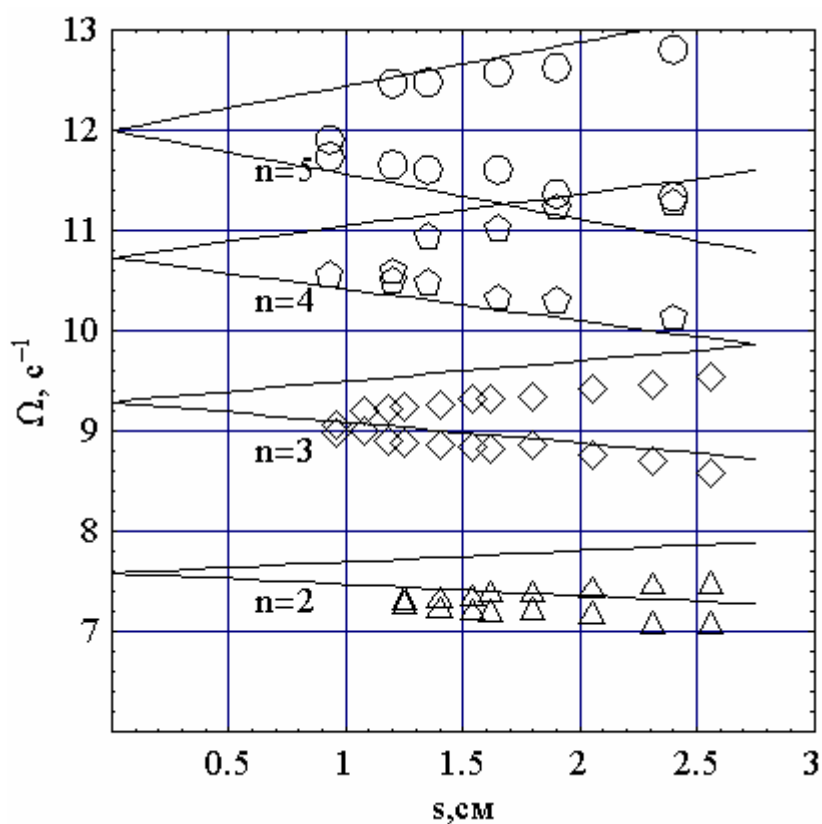


Рис. 3.1. Диаграмма устойчивости: керосин-вода, $h_{1,2}=15 \text{ см}$, $\rho_1=0.792 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.000 \text{ г/см}^3$, $n=2-5$

Сплошные линии на рис. 3.1 соответствуют результатам расчета резонансных зон по формуле (3.4):

$$2\left(\omega - \frac{s\omega^3}{2g}\right) < \Omega < 2\left(\omega + \frac{s\omega^3}{2g}\right),$$

где $\kappa = \pi n/L$, g – ускорение силы тяжести, L – длина сосуда.

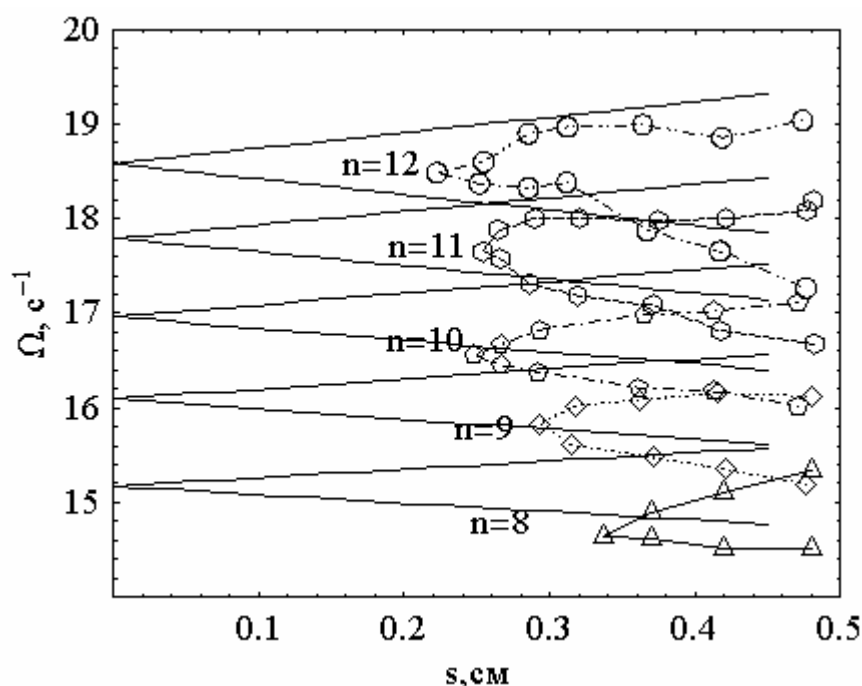


Рис. 3.2. Диаграмма устойчивости: керосин-вода, $h_{1,2}=15$ см, $\rho_1=0.792$ г/см³, $\rho_l=1.000$ г/см³, $n=8-12$

Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов следует, что рассчитанные границы резонансных зон смещены в область высоких частот. При $s=0$ частота колебаний сосуда равна удвоенной собственной частоте n -й моды внутренних волн. Таким образом, собственную частоту ω можно определить по данным эксперимента. Для сравнения в таблице 3-1 приведены экспериментальные и рассчитанные значения ω .

Из табл. 3-1 следует, что с увеличением номера волновой моды отличие между значениями собственных частот, определяемых из эксперимента и рассчитываемых на основании теоретической модели уменьшается. Максимальное относительное отклонение δ^* не превышает 3.5%, что на 1-2% превышает ошибку измерения частоты колебаний сосуда Ω .

В работе [Thorpe (1968)] отмечено, что наблюдаемое в опытах по возбуждению внутренних волн уменьшение собственной частоты вызвано влиянием диссипативных факторов. С целью проверки данного положения были проведены эксперименты, в которых использовался сосуд других размеров и двухслойная жидкость, для которой вязкость верхней жидкости ν_1 существенно отличалась от вязкости нижней жидкости ν_2 . Отметим, что для системы керосин-вода предполагалось $\nu_1 \approx \nu_2$.

Таблица 3-1

Сравнение экспериментальных и рассчитанных значений собственной частоты колебаний границы раздела керосин-вода; $n=2$ 5: $h_{1,2}=15$ см; $n=8$ 12: $h_{1,2}=10$ см; $L=50$ см, $W=4$ см

Номер моды n	ω_{exp} , 1/с (эксперимент)	ω_{th} , 1/с (теория)	$\Delta\omega = \omega_{th} - \omega_{exp}$, 1/с	$\delta^* = \Delta\omega / \omega_{th}$ (%)
2	3.653	3.786	0.133	3.5
3	4.508	4.634	0.126	2.7
4	5.294	5.350	0.056	1.1
5	5.922	5.985	0.063	1.3
8	7.461	7.568	0.107	1.4
9	7.917	8.027	0.110	1.4
10	8.347	8.461	0.114	1.4
11	8.834	8.874	0.040	0.4
12	9.221	9.268	0.047	0.5

Диаграмма устойчивости четвертой моды для сосуда размерами $L=60$ см, $W=13.4$ см при глубине слоев $h_{1,2}=10$ см (керосин-вода) показала (рис. 3.3), что

$$\omega_{exp} = 4.797 \text{ 1/с}, \quad \omega_{th} = 4.879 \text{ 1/с}, \quad \Delta\omega = 0.082 \text{ 1/с}, \quad \delta = 2\%.$$

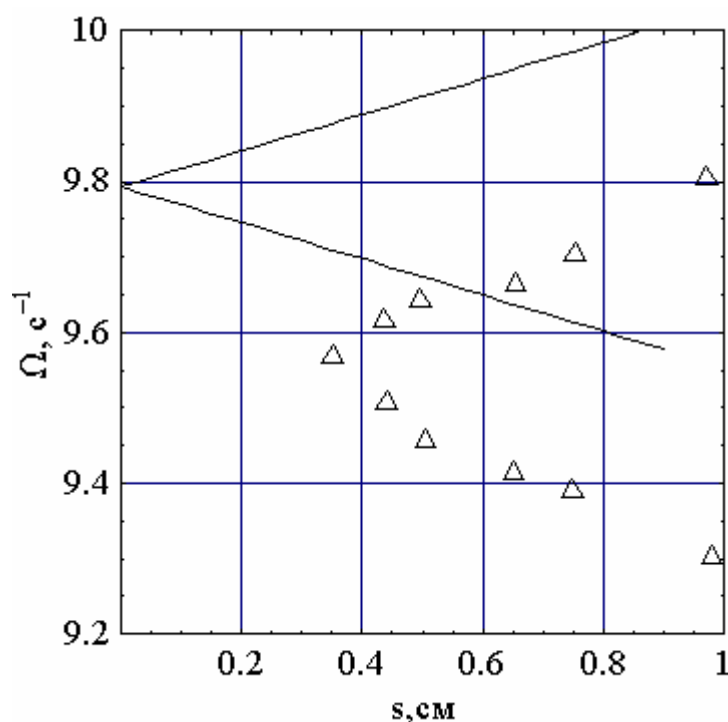


Рис. 3.3. Диаграмма устойчивости: керосин-вода, $h_{1,2}=10$ см, $\rho_1=0.792$ г/см³, $\rho_2=1.000$ г/см³, $n=4$; сосуд 60×13.4 см

Таким образом, при значениях коэффициента формы (параметра, характеризующего геометрию сосуда) $W/L=0.08$ и 0.20 найденная для различных мод из эксперимента собственная частота меньше соответствующей теоретической величины.

Исследование параметрического возбуждения второй моды внутренних волн на границе раздела керосина и водного раствора сахара ($\rho_2=1.235$ г/см³, $\nu_2=0.134$ см²/с) показало, что

$$\omega_{exp}=4.869 \text{ 1/c}, \quad \omega_{th}=5.192 \text{ 1/c}, \quad \Delta\omega=0.223 \text{ 1/c}, \quad \delta^*=4.5\%.$$

Соотношение (3.3), используемое для расчета собственной частоты внутренних волн, верно для бесконечно глубоких идеальных жидкостей. С учетом конечности глубины [Thorpe (1968); Нестеров (1972)] величина ω уменьшается и становится ближе к экспериментальному значению. Можно ввести соответствующую поправку, которая по оценкам оказывается порядка $0.25\Delta\omega$.

В заключение отметим, что в работах [*Weddenburn, Williams* (1911); *Thorpe* (1968)], посвященных исследованию стоячих волн на границе раздела двухслойной жидкости, зафиксировано отличие экспериментального значения собственной частоты ω_{exp} от теоретической ω_{th} на 6%, при этом $\omega_{th} > \omega_{exp}$.

Параметрическое возбуждение внутренних волн, как и поверхностных, при предположении, что на границе раздела образуется стоячая синусоидальная волна с неизвестной зависимостью амплитуды колебаний $H(t)$, описывается уравнением Матье

$$\frac{d^2 H}{d\tau^2} + [p - 2q \cos 2\tau] H = 0,$$

$$\text{где } \tau = \Omega t / 2, \quad p = (2\omega / \Omega)^2, \quad q = 2sk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

В [*Мак-Лахлан* (1953)], посвященной анализу функций Матье, показано, что на плоскости (p, q) существует ряд областей, в которых решение приведенного выше уравнения неограниченно возрастает со временем. Для устойчивых решений характерна периодичность по τ и экспоненциальное возрастание амплитуды. Каждая неустойчивая область определяет колебания с частотой

$$\omega = \Omega m / 2, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Для исследованных мод ($n=4, 5, 8-12$) область неустойчивости $1/2$ -субгармоники внутренних волн на (p, q) -плоскости показана на рис. 3.4. В качестве ω использовалось экспериментально найденное значение. Полученная диаграмма устойчивости обладает следующим универсальным свойством: для того, чтобы определить устойчива или неустойчива граница раздела жидкости при заданных значениях амплитуды s и частоты Ω

колебаний сосуда, для каждой моды номера n необходимо вычислить величины (p, q) и нанести на (p, q) -плоскость; если одна из точек попадает в область неустойчивости, то для соответствующей моды граница раздела неустойчива, т.е. амплитуда данной моды увеличивается до установления стационарного режима колебаний.

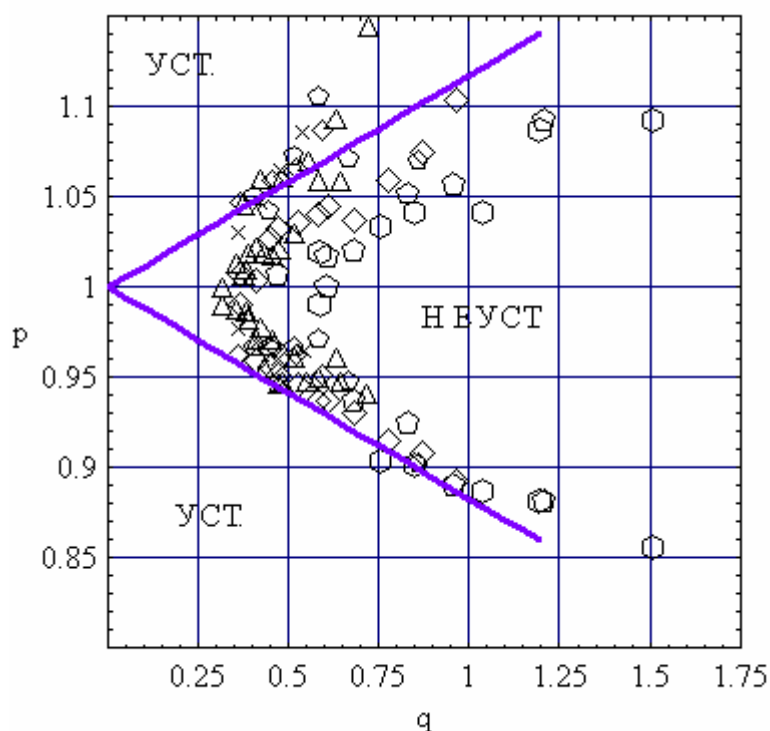


Рис. 3.4. Область неустойчивости границы раздела керосин-вода: $n=2-5$ ($h_{1,2}=15\text{см}$) и $n=8-12$ ($h_{1,2}=10\text{ см}$)

Следует отметить наличие порогового значения параметра q , равного

$$q^* \sim 0.35.$$

3.4. Резонансные зависимости

Зависимости высоты H волны Фарадея на границы раздела двухслойной жидкости ($n=2, 3$; $s=1.9\text{ см}$; $h_{1,2}=15\text{см}$; керосин-вода) представлены на рис. 3.5. Резонансные зависимости получены при измерении по материалам кино- и видеосъемки высоты волны, соответствующей данному значению частоты колебаний сосуда Ω .

Из рис. 3.5 видно, что если на границе раздела возбуждаются волны (Ω принадлежит резонансной зоне n -ой моды), то высота волны растет с уменьшением частоты колебаний сосуда до тех пор, пока не произойдет срыв колебаний (направленные вниз стрелки). Если теперь увеличивать Ω , то колебания в некоторой точке возбуждятся скачком (направлены вверх стрелки) – жесткое возбуждение. При дальнейшем увеличении Ω высота волны уменьшается. Отметим, что вследствие наложения четвертой и пятой волновых мод трудно определить точку срыва пятой моды.

Сравним вторые и третьи моды поверхностных (глубина жидкости $h=15$ см, амплитуда колебаний сосуда $s=0.25$ см; рисунки 2-10 и 2-11) и внутренних волн (рис. 3-5). Кроме отличия частотных диапазонов, в которых происходит возбуждение волн (для поверхностных волн $21.99 < \Omega < 28.27$ с⁻¹) следует отметить тот факт, что если высота поверхностных волн имеет максимальное значение $H_{max} \sim 15$ см, то при $s = 1.8$ см для внутренних волн $H_{max} \sim 8$ см.

Сплошные линии на рис. 3-5 соответствуют резонансным зависимостям, описываемых полученной формулой (3.5), причем значение собственной частоты ω находится по соотношению (3.3). Видно, что рассчитанные зависимости смещены в область высоких частот, причем смещение по частоте определяется величиной $\Delta\omega = \omega_{th} - \omega_{exp}$. Относительная ошибка $\delta = \Delta\omega / \omega_{th}$ не превышает 4.5%.

Используя результаты разд. 3.3, можно в качестве величины собственной частоты ω подставить в (3.5) значение ω_{exp} , найденное из эксперимента. На рис. 3.5 также представлены резонансные зависимости, построенные таким образом – пунктирные кривые.

Зависимости высоты третьей и четвертой волновых мод ($n=3,4$) от частоты колебаний сосуда Ω для несмешивающихся жидкостей - керосин-раствор тиосульфата, $\rho_2=1.239 \text{ г/см}^3$, $h_{1,2}=15\text{см}$ – представлены на рис. 3-6, причем сплошные кривые соответствуют рассчитанным по (3.3) и (3.5) теоретическим зависимостям.

В случае смешивающихся жидкостей (вода-водный раствор поваренной соли, $\rho_1=1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.195 \text{ г/см}^3$, $\Delta\rho_2=0.195 \text{ г/см}^3$) были сняты резонансные зависимости для третьей моды $n=3$ (рис. 3-7). Отметим, что при $H>3 \text{ см}$ вследствие интенсивных волновых движений жидкости происходило размытие первоначально резкой границы раздела (рис. 5-31). На рис. 3-7 приведена также рассчитанная резонансная зависимость.

Анализ данных рисунков 3-5 - 3-7 позволяет сделать вывод о том, что для для используемых в экспериментах сосудов $W/L=0.08$ и 0.20 относительный сдвиг по частоте не зависит от типа двухслойной жидкости.

Из рис. 3-5 следует также, что кроме сдвига по частоте существует качественное отличие теоретических и экспериментальных резонансных зависимостей, а именно, в крутизне резонансных кривых, особенно существенное в зоне жесткого возбуждения. Для этих участков рассчитанные высоты волн в 1.6 раз больше измеренных. Отметим также, что это отличие наклона экспериментальных и теоретических зависимостей сохраняется и при замене в соотношении (3.5) ω_{th} на ω_{exp} .

Точке расхождения экспериментальных и теоретических резонансных зависимостей соответствует частота Ω^* , при которой начинается процесс искажения профиля волны в приузловых областях вторичными короткими волнами и вихревыми образованиями. Поскольку вторичная неустойчивости границы раздела в теоретической модели [Нестеров (1972), Секерж-Зенькович (1983)] не учитывалась, то выполненные по формуле

(3.5) расчеты могут давать завышенное значение высоты волны H при $\Omega < \Omega^*$.

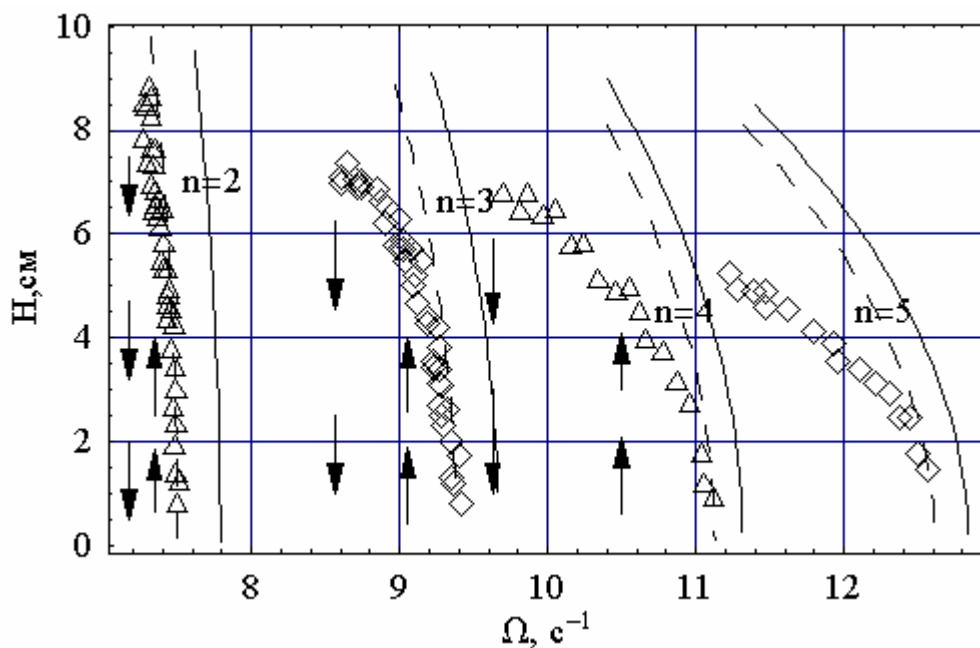


Рис. 3.5. Резонансные зависимости: керосин-вода, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см, $h_{1,2}=15$ см, сплошные и пунктирные кривые – теория

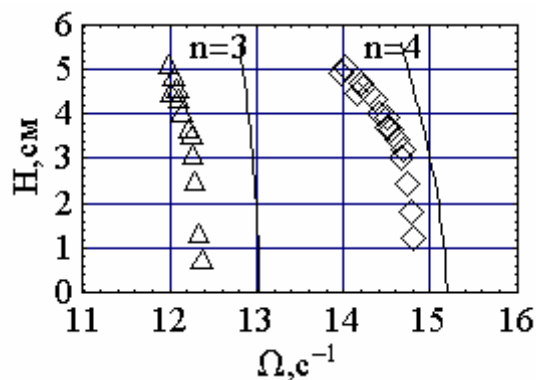


Рис. 3-6. Резонансные зависимости: керосин-раствор тиосульфата $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$, $\rho_1=0.792$ г/см³, $\rho_2=1.239$ г/см³, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=0.5$ см, $h_{1,2}=15$ см

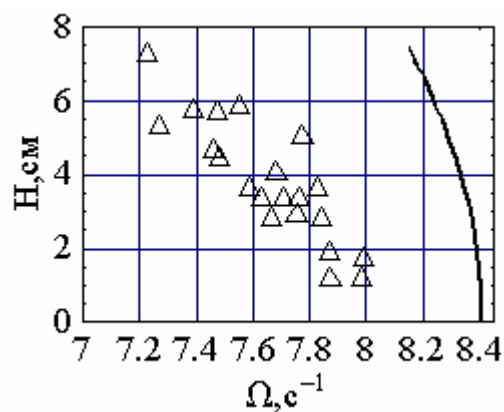


Рис. 3-7. Резонансные зависимости: вода-раствор поваренной соли ($n=3$, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=1.195$ г/см³), $L=50$ см, $W=4$ см, $s=2$ см, $h_{1,2}=15$ см

Используя переменные H/λ_n и $\Omega/2\omega_n$ (n – номер моды) можно построить обобщенную резонансную зависимость для волновых мод $n=2-5$ (керосин-воды, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см, $h_{1,2}=15$ см), представленную на рис. 3-8.

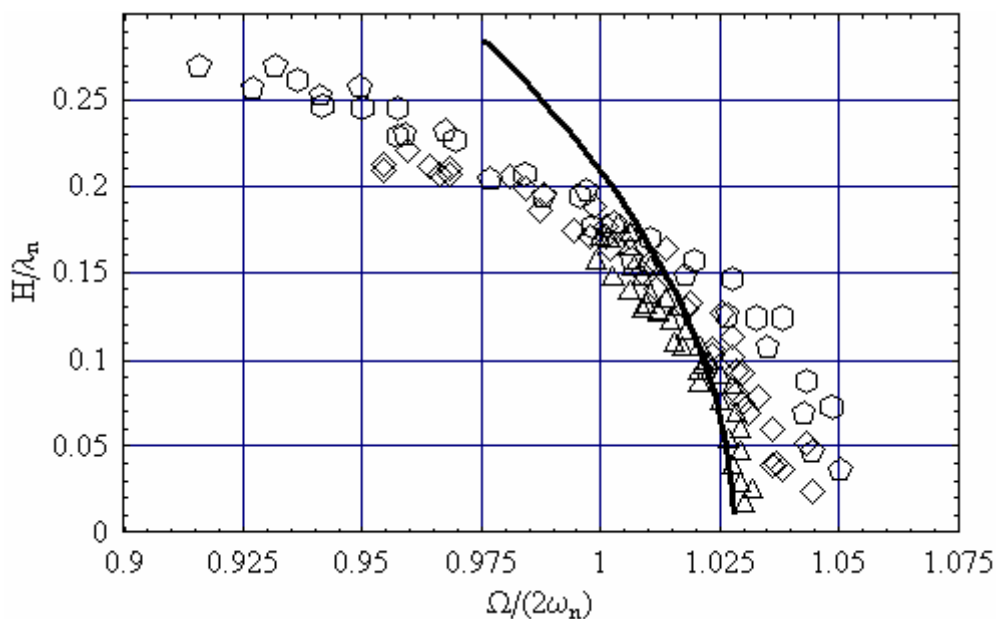


Рис. 3-8. Безразмерная резонансная зависимость для волновых мод $n=2-5$: керосин-вода, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см, $h_{1,2}=15$ см, сплошная кривая – рассчитанная зависимость для четвертой моды

3.5. Эффекты вязкого затухания

В разд. 3.3 (Диаграммы устойчивости) показано, что для исследованных мод колебаний внутренних волн ($n=2-5, 8-12$) существуют пороговые амплитуды колебаний s^* , ниже которых для всего диапазона частот Ω граница раздела жидкостей остается невозмущенной.

По аналогии с поверхностными волнами воспользуемся результатами приближенной теории пограничного слоя и оценим влияние вязкости на процесс параметрического возбуждения внутренних волн. Определим пороговую амплитуду следующим образом

$$s^* = \frac{bg}{2\omega^3} \quad (3.6)$$

где b - коэффициент затухания волн.

Используя результаты [Ламб (1947)], можно оценить потери энергии стоячей внутренней волны на боковых стенках сосуда. Считаем, что каждый из слоев жидкости имеет бесконечную глубину. Тогда суммарные потери энергии в пограничных слоях вблизи стенок $x=0, L$ и $z=0, W$ равны

$$\Delta E = \frac{H^2 g}{8} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \left[\rho_1 \left(\frac{\omega \nu_1}{2} \right)^{1/2} + \rho_2 \left(\frac{\omega \nu_2}{2} \right)^{1/2} \right] (L + W),$$

где ρ_i и ν_i - плотность и кинематическая вязкость верхней и нижней жидкости ($i=1,2$), соответственно.

Таким образом, пренебрегая влиянием вязкости на границе раздела, получим выражение для полной энергии стоячих внутренних волн

$$E(t) = E_0 \exp \left[-\frac{L+W}{LW} \left(\rho_1 \sqrt{2\omega \nu_1} + \rho_2 \sqrt{2\omega \nu_2} \right) \right],$$

где

$$E_0 = E(0) = \frac{1}{16} H^2 g (\rho_2 - \rho_1) LW$$

Отсюда коэффициент затухания внутренних волн с учетом диссипации **только** на боковых стенках равен

$$b^* = \left[\frac{L+W}{LW} \frac{1}{\rho_2 + \rho_1} \left(\rho_1 \left(\frac{\omega \nu_1}{2} \right)^{1/2} + \rho_2 \left(\frac{\omega \nu_2}{2} \right)^{1/2} \right) \right].$$

Если вязкости верхней и нижней жидкостей равны, $\nu_1 \sim \nu_2$, то приведенное соотношение совпадает с результатом [Thorpe (1968)].

Окончательно с учетом влияния вязкости на границе раздела получим

$$b = \left[\frac{L+W}{LW} + \frac{\kappa}{2} \right] \left(\frac{\omega v}{2} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

при условии, что $(\rho_2 - \rho_1) \ll \rho_1$, $v_1 \approx v_2$.

Из эксперимента по материалам кино- и видеосъемки процесса затухания внутренних волн на границе раздела керосин-вода ($h_{1,2}=15$ см, $s=1.9$ см, $v_{1,2} \sim 1$ сСт) были оценены значения коэффициента затухания b . Результаты этих оценок, а также рассчитанные по (3.7) значения b приведены в табл. 3-2. В расчетах не учитывалась диссипация на дне сосуда, т.к. соответствующая величина на два порядка меньше диссипации на стенках сосуда и границе раздела жидкостей. Близость теоретических и экспериментальных значений b позволяет для определения s^* воспользоваться формулой (3.6). Имеем

$n=2$	$s^*_{\text{экс}}=1.2$ см	$s^*_{\text{теор}}=1.1$ см
$n=3$	$s^*_{\text{экс}}=0.9$ см	$s^*_{\text{теор}}=0.7$ см

Воспользовавшись тем, что приближенные формулы для коэффициента затухания и пороговой амплитуды дают величины, близкие к экспериментальным данным, можно оценить соответствующие значения для широкого сосуда ($L=60$ см, $W=13.4$ см, $h_{1,2}=10$ см, керосин-вода). Для четвертой моды по формуле (3.7) имеем

$$b = (1.4 \cdot 10^{-2} + 1.6 \cdot 10^{-2}) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

Видно, что в этом случае диссипация на боковых стенках сосуда (первое слагаемое) одного порядка с диссипацией на границе раздела (второе слагаемое). Используя формулу (3.6), получим величину пороговой амплитуды

$$s^*_{теор} = 0.25 \text{ см},$$

Соответствующая экспериментальная величина (см. рис. 3-4) равна

$$s^*_{эксп} = 0.35 \text{ см}$$

Таблица 3-2

Коэффициенты затухания внутренних волн ($h_{1,2}=15$ см, $s=1.9$ см, $v_{1,2}\sim 1$ сСт)

№, п/п	n	$\Omega, \text{с}^{-1}$	$b^{\text{эксп}} 10^{-2}, \text{с}^{-1}$	$b^{\text{теор}} 10^{-2}, \text{с}^{-1}$
1	2	7,056	7.1	5,3
2	2	7.062	7,0	5,3
3	2	7,131	6,7	5,3
4	2	7,182	5,8	5,3
5	2	7,213	6,9	5,3
6	2	7,276	5,1	5,3
7	2	7,295	6,4	5,3
8	2	7,301	5,9	5,5
9	3	8,507	11,8	6,7
10	3	8,583	10,9	6,7
11	3	8,690	11,4	6,8
12	3	8,866	6,6	6,8
13	3	8,960	8,0	6,9
14	3	9,111	9,5	6,9
15	3	9,261	7,6	7,0

Для исследования влияния вязкости на значение коэффициента затухания b и пороговой амплитуды s^* была проведена серия экспериментов по параметрическому возбуждению внутренних волн на границе раздела керосин - водный раствор сахара: $h_{1,2}=15$ см, $\rho_2=1.235$ г/см³, $\nu_2=13.4$ сСт. Вязкость измерялась на вискозиметре ВПЖ-2, диаметр капилляра 1.77 мм. Из эксперимента следует, что пороговая амплитуда для второй моды

$$s^*=1.56 \text{ см},$$

а коэффициент затухания

$$b=0.184 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку значения кинематической вязкости верхней и нижней жидкостей отличалась, то пороговая амплитуда и коэффициент затухания рассчитывались по (3.6) и (3.7):

$$s^*=1.29 \text{ см}.$$

$$b^*=0.116 \text{ с}^{-1}.$$

Использование результатов теории пограничного слоя позволяет определить пороговую амплитуду и коэффициент затухания, т.е. те параметры, которые являются критическими для процесса параметрического возбуждения внутренних волн в двухслойной жидкости. Сравнение основных выводов теории с данными эксперимента дает хорошее совпадение.

С учетом диссипативных факторов система уравнений (3.2), описывающая вызванное колебаниями сосуда изменение во времени начального возмущения границы раздела, принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -bH + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \frac{\omega}{32} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} H^2 \kappa^2, \\ H_{t=0} = H_0, \theta_{t=0} = \theta_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

где θ_0 и H_0 - “медленная” фаза и высота исходного волнового возмущения.

Для третьей моды (керосин-вода, $h_{1,2}=15$ см, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см) система (3.8) интегрировалась численно, при этом $\omega^{\text{эксн}}=4.508$ с⁻¹, а в качестве коэффициента затухания взято экспериментальное значение $b=0.095$ с⁻¹ на частоте $\Omega=9.111$ с⁻¹. Начальное возмущение задавалось следующим образом $H_0=0,2$ см, $\theta_0=0$. Вычисления показали, что функция $H(t)$ выходит на стационарное значение сплошная кривая 1 на рис. 3-9. Стационарное значение $\theta=0.271$ рад. Для указанных выше экспериментальных параметров на рис. 3-9 приведены данные эксперимента 2.

Для поверхностных и внутренних волн система, описывающая изменение со временем начального возмущения имеет один и тот же вид. Отличаются только коэффициенты в правой части уравнений. Качественный анализ такой системы дифференциальных уравнений показывает [Андронов, Витт, Хайкин (1981); Нестеров (1969)], что стационарному режиму на фазовой плоскости соответствует устойчивый фокус. Оказывается, что соотношение между коэффициентами уравнений определяет характер установления стационарного режима. Так для поверхностных волн фазовая траектория представляет собой спираль из близко расположенных витков. Для внутренних волн расстояние между витками увеличивается. Справедливость вышесказанного подтверждается данными эксперимента и расчета. Из рис. 2-17 следует, что для процесса

выхода поверхностных волн на стационарный режим характерны периодические затухающие колебания около значения, соответствующего стационарной амплитуде. Установление стационарных колебаний границы раздела двухслойной жидкости происходит монотонно, как показано на рис. 3-9.

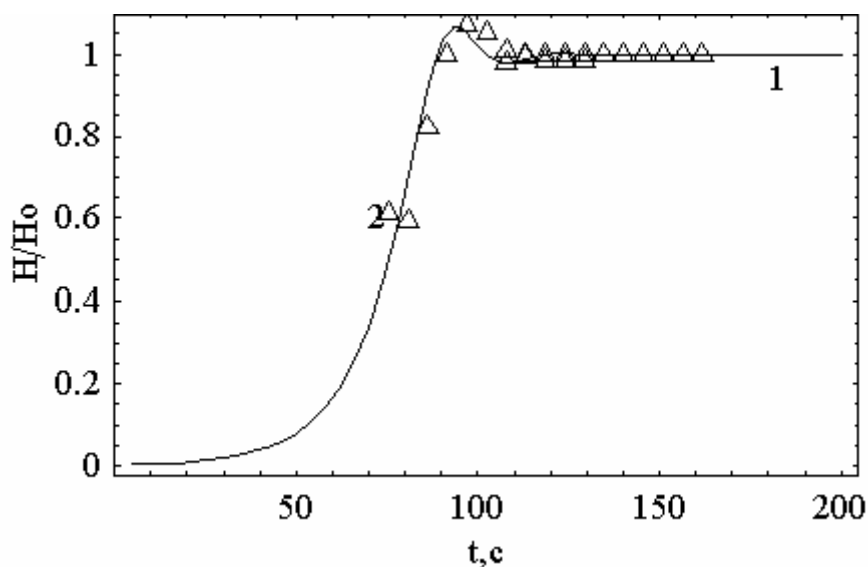


Рис. 3-9. Процесс выхода колебаний на стационарный режим - внутренние волны Фарадея (вода - керосин, $n=2$, $h_{1,2}=15$ см, $s=1,9$ см, $\Omega=9.299$ с⁻¹): 1 – расчет, 2 – эксперимент; $H_0=0.2$ см, $\theta_0=0$

3.6. Поле скоростей внутренних волн Фарадея

Исследовались волновые движения двухслойной жидкости со свободной поверхностью. Как следует из линейной теории [Сретенский (1977)], возможна генерация волн двух различных видов.

В случае волн первого вида (поверхностных) жидкость может колебаться с частотой $\omega=(gk)^{1/2}$, где $k=\pi n/L$, n - натуральное число, определяющее номер моды.

При возбуждении волн второго вида (внутренних) смещение свободной поверхности и границы раздела описываются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \eta_1 = -H \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_1} e^{-\kappa h_1} \cos \kappa x \sin \omega t, \\ \eta_2 = \frac{H}{2} \cos \kappa x \sin \omega t, \\ \omega^2 = g\kappa \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \tanh \kappa h_1 + \rho_2}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Здесь H - высота внутренней волны, g - ускорение силы тяжести, h_1 - толщина верхнего слоя жидкости. Начало системы координат xu помещено на левой стенке сосуда, ось x направлена вдоль невозмущенной границы раздела, ось u - вертикально вверх. Из (3.9) следует, что колебания границы раздела и свободной поверхности происходят в противофазе. Кроме того, отношение амплитуды колебаний свободной поверхности к амплитуде внутренней волны равно $(\rho_2 + \rho_1)e^{-\kappa h_1} / \rho_1$, т.е. высота поверхностной волны возрастает с увеличением разности плотностей.

В эксперименте изучались вторые моды указанных двух видов волн в двухслойной жидкости вода-фреон, причем $h_1=7.0$ см, $h_2=15.0$ см, $s=1.9$ см, $h_1/\lambda=0.14$. На частоте $\Omega=11.22$ с⁻¹ наблюдалась генерация поверхностных волн с частотой Ω . На частоте $\Omega=9.24$ с⁻¹ возбуждались внутренние волны. Максимальное смещение границы раздела $H=5$ см, свободной поверхности - 1 см. Измеренный с помощью лазерного анемометра вертикальный профиль максимального мгновенного значения V^* приведен на рис. 3-10. Профиль снят для значений $0 < y < 7$ см при фиксированной горизонтальной координате $x=25$ см, соответствующей пучности волны.

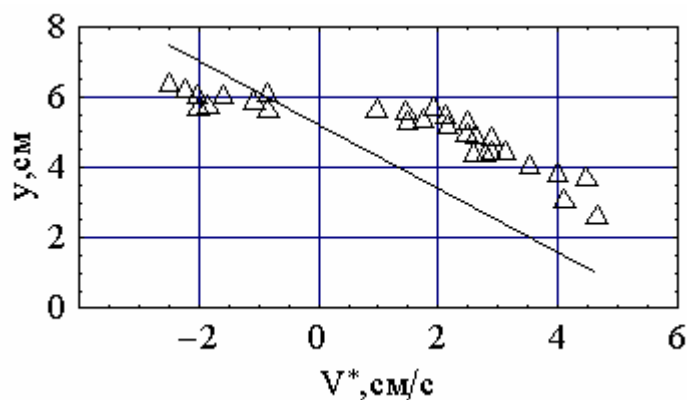


Рис. 3-10. Вертикальный профиль вертикальной составляющей скорости: вода-фреон ($\rho_2 = 1.57 \text{ г/см}^3$), $h_1 = 7.0 \text{ см}$, $h_2 = 15.0 \text{ см}$, $s = 1.9 \text{ см}$, $\Omega = 9.24 \text{ с}^{-1}$

При приближении к свободной поверхности максимальное мгновенное значение вертикальной составляющей скорости уменьшается, и при $y \approx 5.8 \text{ см}$ имеем $V^* = 0$, затем происходит изменение знака мгновенной скорости. Таким образом, при $h_1/\lambda = 0.14$ на горизонте $y \approx 5.8 \text{ см}$ вертикальная компонента скорости частиц верхней жидкости равна нулю. Наличие такого горизонта подтверждается анализом треков частиц нейтральной плавучести (рис. 3-11), при этом $y \approx 5.5 \text{ см}$.

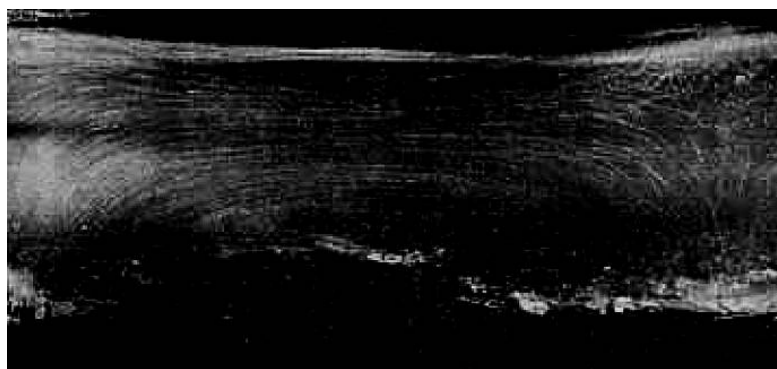


Рис. 3-11. Треки частиц нейтральной плавучести в верхней слое двухслойной жидкости

В соответствии с теоретической моделью [Сретенский (1977)] максимальное мгновенное значение V^* вертикальной составляющей скорости частиц верхней жидкости равно

$$V^* = H \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_1 \omega} e^{-\kappa h_1} [(\omega^2 + g\kappa)e^{\kappa(y-h_1)} + (\omega^2 - g\kappa)e^{-\kappa(y-h_1)}] \quad (3.10)$$

Рассчитанная по (3.10) зависимость $V^*(y)$ изображена сплошной кривой на рис. 3-10, точками представлены данные эксперимента. Сопоставление свидетельствует о близости эмпирических и теоретических зависимостей. Отметим, что расчет дает $V^*=0$ при $y=5.7$ см. Некоторое расхождение, скорее всего, обусловлено нелинейными эффектами, которые не учитываются в [Сретенский (1977)].

Нелинейность проявляется в следующем. При высоте внутренней волны $H=4.2$ см асимметрия ее профиля составляет 10-15% - из-за малой толщины верхнего слоя гребни заостренные, а впадины более пологие. Хронограмма вертикальной составляющей скорости дает асимметрию около 50%, причем она характерна для всего вертикального профиля -рис. 3-12. Такие асимметричные зависимости вертикальной составляющей скорости описываются формулами [Секерж-Зенькович (1983)] с учетом квадратичных по H членов:

$$v(t) = \omega \left(-\frac{H}{2} e^{-\kappa y} \cos \kappa x \sin \omega t + \left(\frac{H}{2} \right)^2 \kappa \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_{21}} e^{-2\kappa y} \cos 2\kappa x \sin 2\omega t \right) \quad (3.11)$$

Результаты расчета по (3.11) при значениях $H=4.2$ см, $x=25$ см, $y=4,5$ см показаны на рис. 3-12 пунктирной линией.

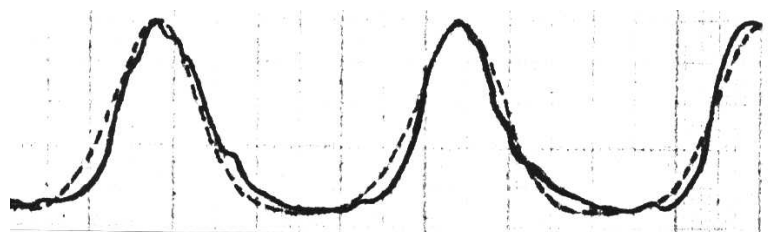


Рис. 3-12. Хронограмма вертикальной составляющей скорости: сплошная линия – эксперимент; пунктирная – расчет по (3.11)

Отметим, что временная зависимость горизонтальной компоненты скорости является симметричной.

Исследовалась третья мода внутренних волн ($n=3$) в жидкости керосин-вода ($h_{1,2}=18$ см, $s=1.4$ см). Полученные зависимости амплитуды горизонтальной составляющей скорости U^* частиц жидкости от частоты колебаний Ω сосуда приведены на рис. 3-13. Измерения проводились в точках с координатами $x=25$ см, $y=-0.4, -0.8, -3.5$ и -4.5 см, т.е. сняты зависимости $U^*(\Omega)$ в различных точках вертикальной прямой, проходящей через узел стоячей волны. С уменьшением Ω скорость U^* увеличивается, затем при $\Omega=8.577$ с⁻¹ наблюдался срыв колебаний. Пунктирные линии на рис. 3-13 соответствуют расчетам по формулам [Секерж-Зенькович (1983)]

$$U^* = \frac{1}{\kappa \sqrt{\omega}} \frac{\rho_2 + \rho_1}{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2}} \left(2\omega - \Omega + \frac{\varepsilon \omega}{\Omega}\right)^{1/2} \Omega e^{-\kappa y}, \quad (3.12)$$

Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов следует, что при $y=-0.4, -0.8$ см (точки 1) расчетная кривая 1 практически совпадает с данными измерений. При $y=-2.5, -3.5$ см теоретические кривые 2 и 3 идут значительно выше экспериментальных точек 2 и 3.

Начиная с частоты $\Omega = 9.199$ с⁻¹, в приузловых областях стоячей внутренней волны наблюдается вторичное волнообразование вследствие развития сдвиговой неустойчивости. С увеличением амплитуды основной волны вторичные волны становятся неустойчивыми и преобразуются в вихревые образования ($\Omega < 8.639$ с⁻¹). Энергия, диссипируемая вторичными волнами и вихреобразованиями, поступают от основной внутренней волны. Расхождение теоретических и экспериментальных зависимостей при $y=-2.5, -3.5$ см скорее всего обусловлено затратами энергии на

указанный механизм **разрушения** стоячей внутренней волны, не учитываемыми в теоретической модели.

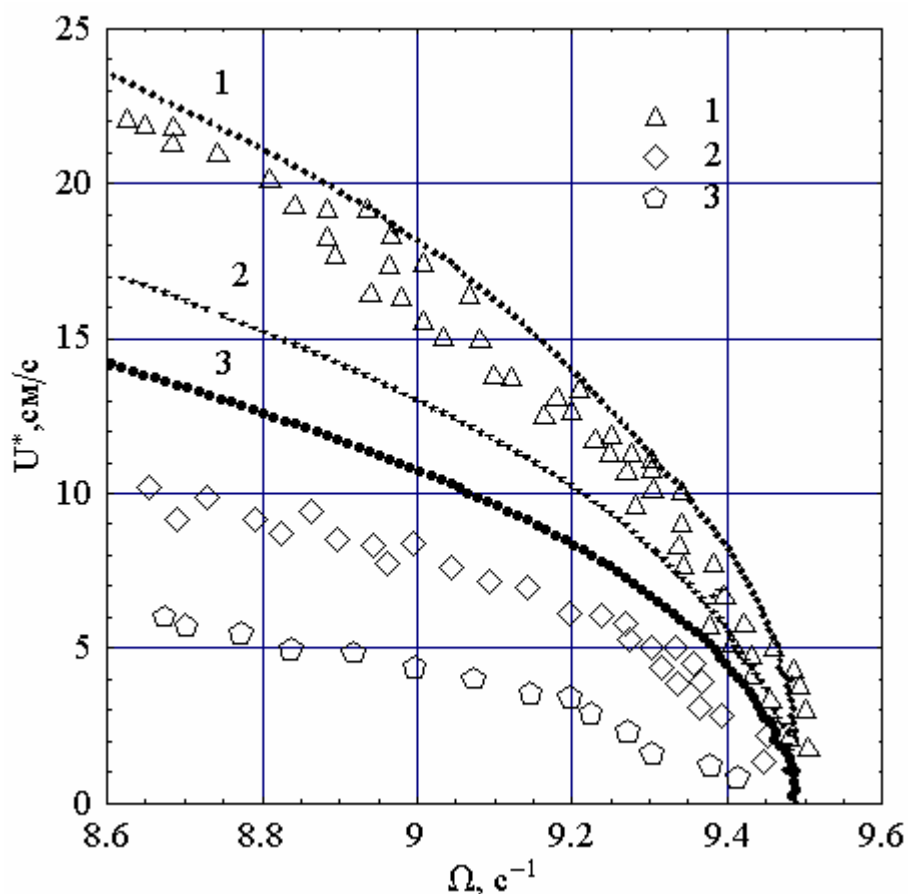


Рис. 3-13. Зависимости амплитуды горизонтальной составляющей скорости U^* частиц жидкости от частоты Ω колебаний сосуда: керосин-вода, $n=3$) $h_{1,2}=18$ см, $s=1.4$ см; $x=25$ см, $y=-0.4, -0.8$ (1), -3.5 (2) и -4.5 (3) см

Уменьшение расхождения измеренных и рассчитанных зависимостей $U^*(\Omega)$ для $y=-0.4, -0.8$ см можно объяснить тем, что при $\Omega < 9.199$ с⁻¹ направления горизонтальных компонент скоростей вторичной и основной волн совпадают. Данное предположение подтверждается анализом фотографий треков частиц, из которого следует наличие в окрестности узла области локальных горизонтальных движений жидкости с вертикальным масштабом порядка 1 см, связанных с вторичными волнами. Кроме того, анализ зависимостей амплитуды вертикальной

составляющей скорости от частоты Ω свидетельствует о различии на 30-40% рассчитанных и измеренных значений V^* при $\Omega < 9.199 \text{ с}^{-1}$ на горизонтах $y = -0.7 \div -3.0$ см под пучностью волны, что также говорит в пользу высказанного предположения.

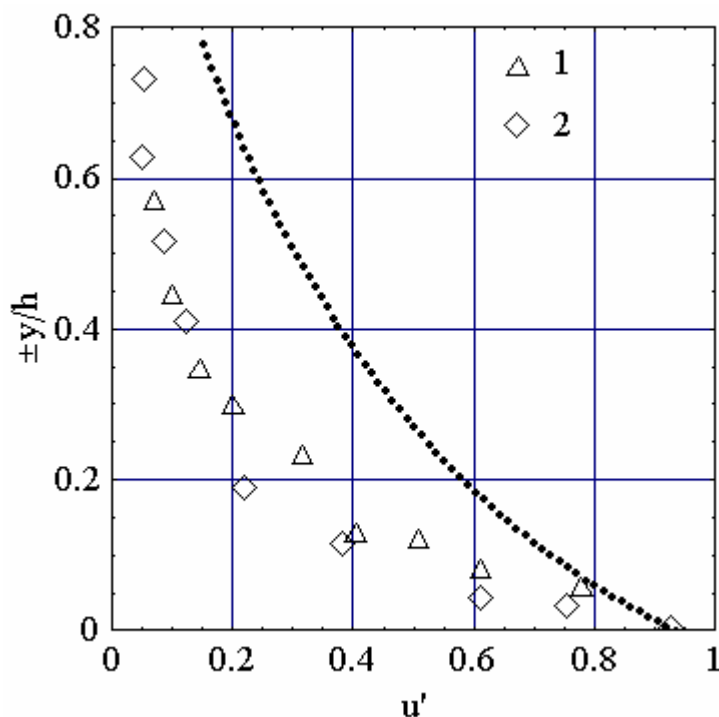


Рис. 3-14. Вертикальный профиль безразмерной амплитуды горизонтальной скорости; $\Omega = 9.199 \text{ с}^{-1}$, $h_{1,2} = 18$ см, $U^*_{y=0} = 13.5$ см/с: 1 - $y > 0$, 2 - $y < 0$

На рис. 3-14 представлен вертикальный профиль безразмерной амплитуды $u' = U^*/U^*_{y=0}$ горизонтальной скорости; $\Omega = 9.199 \text{ с}^{-1}$, $h_{1,2} = 18$ см, $U^*_{y=0} = 13.5$ см/с - рассчитанное значение); точки 1 отвечают случаю $y > 0$, точки 2 - $y < 0$. Кривая на рис. 3-14 отвечает расчетному профилю. Видно неплохое соответствие результатов теории и эксперимента, несмотря на приближение бесконечно глубокой жидкости, использованное в [Секерж-Зенькович (1983)]. Следует отметить, что для рассмотренных режимов установка жесткой крышки на свободной поверхности двухслойной жидкости не влияет на профиль скорости.

Заключение.

Впервые представлены результаты многопланового экспериментального исследования параметрического возбуждения стоячих гравитационных внутренних волн на границе раздела двух жидкостей.

1. Изучен механизм генерации внутренних волн Фарадея в широком диапазоне экспериментальных параметров – возбуждение различных волновых мод ($n=2-5, 8-12$) на границе раздела двух смешивающихся или несмешивающихся жидкостей при амплитуде колебаний сосуда $s=0.5-3.0$ см в прямоугольных сосудах, имеющих коэффициент формы 0.08 и 0.20, соответственно.
2. Проведен анализ диаграмм устойчивости, определяющих зоны возбуждения внутренних волн Фарадея. Сопоставление данных эксперимента и теоретической модели свидетельствует о наличии сдвига собственной частоты в область низких частот.
3. Сняты резонансные зависимости высоты волн Фарадея от частоты колебаний сосуда. Их особенностью является наличие срыва колебаний и скачкообразного нарастания высоты волн на границе зоны мягкого возбуждения. Сравнительный анализ экспериментальных и теоретических резонансных зависимостей показал, что помимо сдвига по частоте имеется существенное отличие в крутизне резонансных кривых (особенно значительное в зоне жесткого возбуждения). Причиной такого отличия является вторичное волнообразование и формирование вихревых структур в узловых областях стоячей волны; именно эти процессы могут рассматриваться как разрушение стоячих гравитационных волн на границе раздела двух жидкостей.

4. Учет диссипативных эффектов позволил оценить пороговую амплитуду и коэффициент затухания, являющимися критическими параметрами для возбуждения внутренних волн Фарадея.
5. Проведена верификация представленной в разд. 3.2 гидродинамической модели [*Нестеров (1972), Секерж-Зенькович (1983)*] - помимо сдвига по частоте (не более 5%) имеются отличия в крутизне резонансных кривых, связанные с процессом разрушения внутренней волны.
6. Представлены результаты измерений скоростей частиц двухслойной жидкости во внутренних волнах Фарадея. Проведена верификация гидродинамической модели [*Сретенский (1977)*], описывающей возбуждение волн двух типов в двухслойной жидкости. Определен горизонт, на котором вертикальные составляющие скорости равны нулю.

Глава 4. ЭФФЕКТЫ ВЫРОЖДЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНОСТИ В ВОЛНАХ ФАРАДЕЯ

В настоящей главе представлены результаты исследований малоизученных в теоретической и экспериментальной гидродинамике эффектов вырождения и нелинейности в волнах Фарадея.

Цель настоящего исследования – обсуждение лабораторных экспериментов по исследованию:

- Эффекта критической глубины, т.е. той глубины жидкости, при которой происходит изменение наклона резонансной зависимости для поверхностных волн Фарадея.
- Эффекта вырождения волн Фарадея, при котором на одной частоте колебаний сосуда происходит одновременное параметрическое возбуждение двух волновых мод. Для внутренних волн Фарадея это возбуждение составных внутренних волн. Для поверхностных волн Фарадея эффект вырождения проявляется во взаимодействии двух волновых мод.
- Механизма срыва параметрических колебаний свободной поверхности однородной и границы раздела двухслойной жидкостей в прямоугольном сосуде.

По материалам главы опубликованы работы [*Калиниченко* и др. (1985); *Калиниченко, Секерж-Зенькович, Чайковский* (1988); *Sekerj-Zenkovitch et al* (1998); *Kalinichenko, Sekerj-Zenkovitch* (2009); *Калиниченко, Секерж-Зенькович* (2010)].

4.1. Постановка эксперимента

Для генерации волн Фарадея на свободной поверхности жидкости использовалась описанная выше установка ПР-2М. Исследовались волновые моды номеров $n=2,3$ в прямоугольном сосуде ($50 \times 4 \times 40$ см) на свободной поверхности воды в условиях основного резонанса Фарадея. Глубина h жидкости варьировалась от 6 до 15 см.

В случае внутренних волн на границе раздела керосин-вода ($\rho_1=0.79$ г/см³, $\rho_2=1.00$ г/см³, $h_{1,2}=10$ см) использовался прямоугольный сосуд $50 \times 10 \times 40$ см.

Для регистрации волновых профилей применялась цифровая видеосъемка (24-30 к/с). Точность измерения высоты волновых профилей составляла величину порядка 0.1 см.

В экспериментах по исследованию параметрических колебаний маятника использовался физический маятник - однородный стальной цилиндр диаметра 1.5 см, длины 50.2 см и массы 668 г. Маятник жестко крепился к горизонтальной оси обесточенного электродвигателя АВ50/2ТП, подшипники которого обеспечивали колебания маятника в вертикальной плоскости, причем добротность системы составляла величину около 250. На верхнем конце маятника имела стрелка - указатель, перемещающаяся при колебаниях маятника по шкале с ценой деления 1° . Конструкция маятника допускала его свободное вращение вокруг горизонтальной оси. Весь блок маятника помещался на грузовую площадку ПР-2М, что обеспечивало его колебания в вертикальном направлении. Амплитуда s колебаний точки подвеса маятника могла быть установлена любой из интервала 0.03-7.00 см, а частота Ω при фиксированной амплитуде могла плавно изменяться в диапазоне 6-40 с⁻¹. Для регистрации углового смещения маятника использовалась цифровая видеосъемка (скорость

съемки 30 к/с). Точность измерения угла отклонения по материалам съемки составляла 0.5° , причем его среднее стационарное значение φ в каждом режиме рассчитывалось по восьми измеренным полуколебаниям маятника. Исследовались $1/2$ -субгармоника параметрических колебаний маятника, когда частота возбуждаемых колебаний в 2 раза меньше частоты колебаний точки подвеса: $\omega \sim \Omega/2$. Коэффициент затухания колебаний маятника изменялся путем крепления к его нижней части небольших пластин, увеличивающих сопротивление воздуха. Ниже приведены основные параметры маятника:



Приведенная длина l , см	Собственная частота ω , с^{-1}		Коэффициент затухания b (с^{-1})		
	расчет	эксп.	Модель 1	Модель 2	Модель 3
35.1	5.28	5.58 ± 0.12	0.019	0.032	0.096

Коэффициент затухания b для волн Фарадея определялся следующим образом. В колеблющемся на одной из резонансных частот Ω сосуде возбуждалась соответствующая волновая мода. Затем сосуд останавливался, и проводилась видеосъемка затухания волн. Величина b оценивалась как

$$b = \frac{1}{T} \ln \frac{H_m}{H_{m+1}},$$

где $T=2\pi/\omega$ - период волны, ω - собственная частота волны, H_m и H_{m+1} - значения в высоты волны, взятые через период колебаний.

Аналогично оценивался коэффициент затухания b колебаний маятника в диапазоне начальных угловых смещений $\varphi_0 \sim 15-60^\circ$.

4.2. Эффект критической глубины

Одной из особенностей параметрического возбуждения поверхностных волн является изменение знака наклона резонансной кривой на противоположенный при изменении глубины жидкости.

В работе [Калиниченко и др. (1985)], посвященной теоретическому и экспериментальному исследованию параметрическому возбуждению стоячих поверхностных волн в жидкости, было отмечено изменение знака наклона резонансной кривой на противоположный при уменьшении глубины сосуда – наблюдался переход от мягкой характеристики к характеристике жесткой.

Напомним, что при выполнении резонансных условий (2.3) возможно существование устойчивых стационарных волн Фарадея конечной высоты H и фазы ψ , определяемых как

$$\begin{aligned} \kappa^2 \frac{H^2}{4} \omega \beta &= \pm \Delta + \varepsilon \omega^2 \frac{1}{2\Omega} \\ \psi &= \frac{\Omega t}{2} + \frac{\pi \mp \pi}{2} \quad (\beta \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{где } \beta = \frac{1}{64} \text{th}^{-4} \kappa h (2 \text{th}^6 \kappa h + 3 \text{th}^4 \kappa h + 12 \text{th}^2 \kappa h - 9).$$

Анализ наклона резонансных кривых показывает, что определяющим является соотношение между глубиной жидкости и длиной волны $\lambda = 2L/n$, параметр h/λ определяет знак β . Решение уравнения $\beta = 0$ дает критическое значение $h/\lambda = 0.168$. Отметим, что теория [Tadjakhsh, Keller (1960)] стоячих гравитационных волн и эксперимент [Fultz (1962)] по исследованию вынужденных стоячих волн дают величину значение $h/\lambda = 0.17$ и 0.14 , соответственно.

На рис. 4-1 для второй и третьей волновых мод приведены резонансные зависимости, снятые при глубине жидкости $h = 10$ и 15 см (а) и $h = 6$ и 7 см

(б). В первом случае резонансные зависимости соответствуют случаю мягкой восстанавливающей силы, когда высота волны монотонно растет с уменьшением частоты колебаний сосуда, $\beta > 0$. Во втором случае, $\beta < 0$, величина H растет с увеличением Ω - эффект жесткой восстанавливающей силы. Рассчитанные по (4.1) резонансные зависимости вполне удовлетворительно описывают данные эксперимента для указанных значений h .

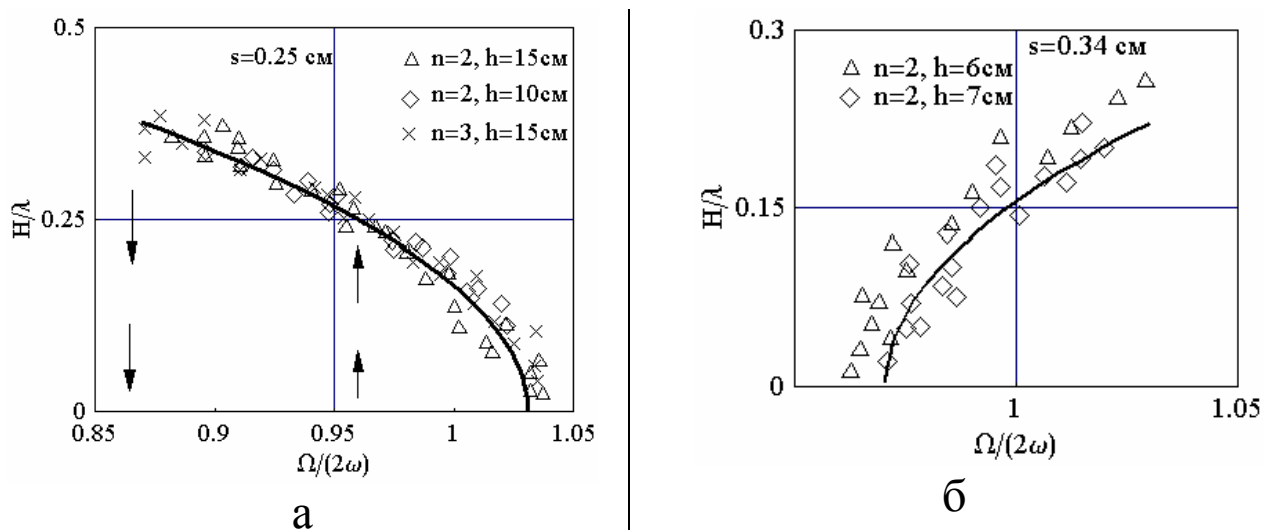


Рис. 4-1. Резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод $n=2, 3$ при глубине жидкости (а) $h=10$ и 15 см, и (б) $h=6$ и 7 см; сплошные кривые - рассчитанные по (4.1) резонансные зависимости для $n=2$ при $h=15$ и 7 см, соответственно

Естественно встает вопрос о характере зависимости $H(\Omega)$ при глубинах жидкости, равных или близкой к критической.

Зависимость высоты волн Фарадея при глубине жидкости, равной или близкой к критической, была получена в работах [Бордаков и др. (1994); Sekerj-Zenkovich et al. (1998)]. Решение задачи о параметрическом возбуждении волн Фарадея в пятом приближении строилось в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/4}$, коэффициенты которых определялись по методу [Нестеров (1969,1972); Секерж-Зенькович (1983); Бордаков и др. (1994)].

Резонансные кривые при глубине жидкости, близкой к критической h_{cr} , распадаются на две непересекающиеся ветви $H_-^+ = \varepsilon^{1/4} \kappa C_-^+$ и $H_+^- = \varepsilon^{1/4} \kappa C_+^-$, имеющие разные знаки наклона и разные фазы:

$$\begin{cases} C_-^+ = \sqrt{\frac{\frac{\beta_1}{\varepsilon^{1/2}} - \sqrt{\beta_1^2 \varepsilon - 4\beta_2 \left(\frac{\Delta}{\varepsilon \omega} + \frac{1}{4}\right)}}{2\beta_2}}, & \Theta = 0, \pi \\ C_+^- = \sqrt{\frac{\frac{\beta}{\varepsilon^{1/2}} + \sqrt{\beta_1^2 \varepsilon - 4\beta_2 \left(\frac{\Delta}{\varepsilon \omega} - \frac{1}{4}\right)}}{2\beta_2}}, & \Theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{64} \text{th}^{-4} \kappa h (2 \text{th}^6 \kappa h + 3 \text{th}^4 \kappa h + 12 \text{th}^2 \kappa h - 9), \\ \beta_2 &= -\frac{\text{cth}^{10} \kappa h}{16384} \left(\frac{36 \text{th}^{16} \kappa h - 64 \text{th}^{14} \kappa h - 883 \text{th}^{12} \kappa h + 691 \text{th}^{10} \kappa h -}{1611 \text{th}^8 \kappa h + 6138 \text{th}^6 \kappa h - 4077 \text{th}^4 \kappa h + 1323 \text{th}^2 \kappa h - 81} \right). \end{aligned}$$

Резонансная ветвь H_-^+ имеет отрицательный наклон, а H_+^- - положительный наклон. Характерной особенностью резонансных кривых при глубине жидкости, близкой к критической, является то, что они распадаются на две непересекающиеся ветви, имеющие разные знаки наклона.

Полученный в [Бордаков и др. (1994); *Sekerj-Zenkovich et al. (1998)*] инициировал серию экспериментов, в которых для второй волновой моды $n=2$ сняты резонансные зависимости параметрически возбуждаемых волн на поверхности жидкости, глубина которой изменялась от 8.8 до 6.0 см. Для второй моды решение уравнения $\beta=0$ значение критической глубины $h_{cr}=8.42$ см, т.е. в эксперименте изменение безразмерной глубины оценивалось диапазоном $0.71 < h/h_{cr} < 1.05$.

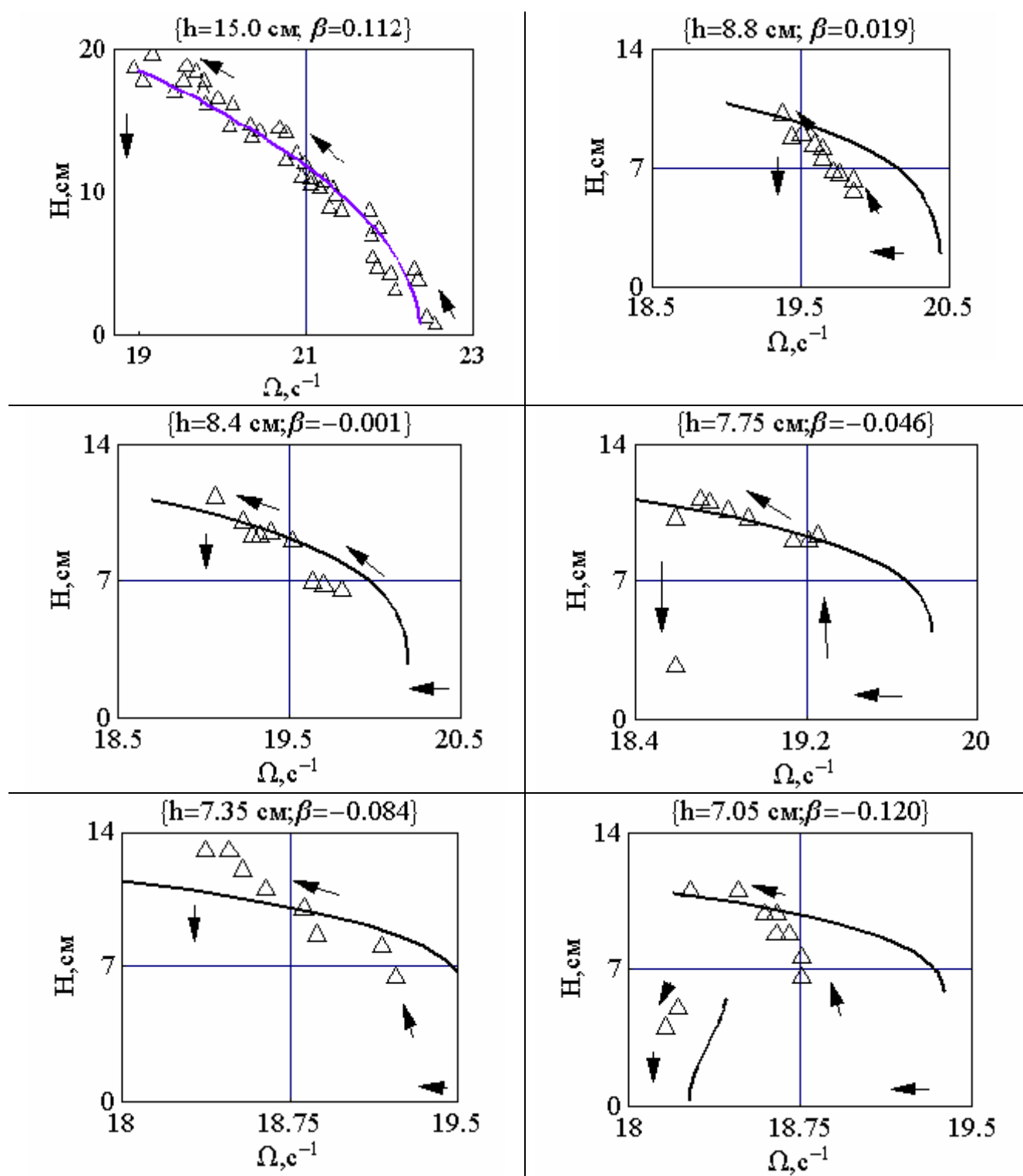


Рис. 4-2. Резонансные зависимости для второй волновой моды $n=2$: $h=15.0-7.05$ см, $s=0.24$ см; $\beta=0.112, 0.19, -0.001, -0.046, -0.084, -0.120$; (Δ) - экспериментальные данные; сплошные кривые – расчет по (4.2)

Экспериментальные зависимости $H(\Omega)$ приведены на рисунках 4-2 и 4-3, на которых стрелками показано направление изменения частоты Ω . Видно, как с уменьшением h меняются форма и наклон резонансной зависимости.

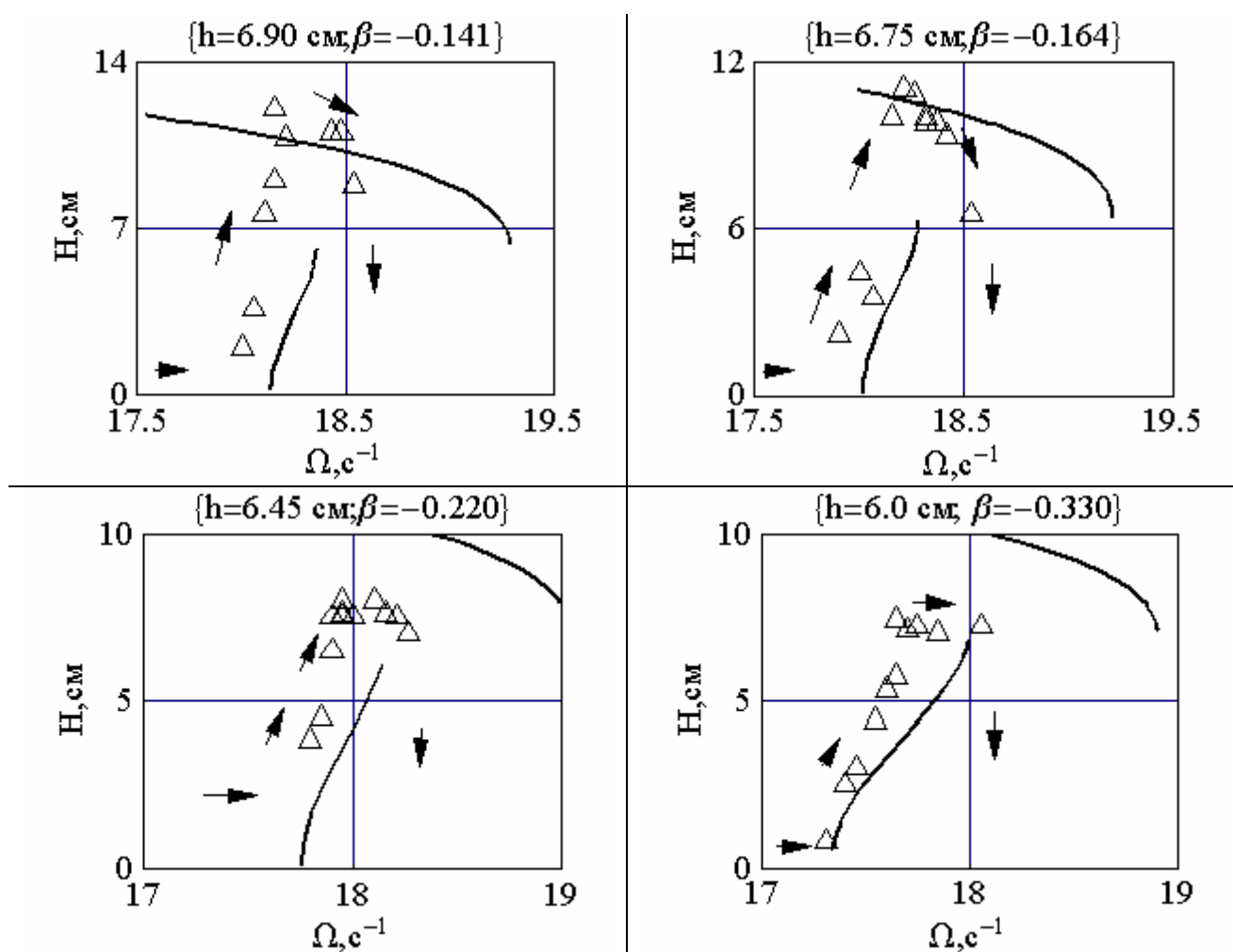


Рис. 4-3. Резонансные зависимости для второй волновой моды $n=2$: $h=6.9-6.0$ см, $s=0.24$ см; $\beta=-0.141, -0.164, -0.220, -0.330$; (Δ) - экспериментальные данные; сплошные кривые – расчет по (4.2)

При $h=15$ см (рис. 4-2) в эксперименте удастся зафиксировать минимальное значение высоты волны $H=0.7$ см при $\Omega=22.5$ с⁻¹, и при уменьшении частоты высота растет до 19.5 см, после чего на частоте $\Omega=18.8$ с⁻¹ происходит срыв колебаний. Наклон резонансных зависимостей, определяемый эффектом мягкой восстанавливающей силы, сохраняется до глубины жидкости $h=7.35$ см (рис.4-2). С уменьшением глубины для $H(\Omega)$ характерно не только сужение резонансного диапазона и его смещение в низкочастотную область, но значительное увеличение минимального значения высоты волны, регистрируемой в эксперименте – резонансная зависимость становится круче с одновременным подъемом ее правой части. Отметим, что для $h=15-7.35$ см срыв колебаний происходит после прохождения частоты,

отвечающей максимальной высоте волны. Форма резонансной зависимости принципиально меняется при глубине $h=7.05$ см, для которой четко прослеживаются две ветви резонансной зависимости – сначала восходящая ветвь (мягкая восстанавливающая сила), затем ветвь нисходящая (жесткая восстанавливающая сила). Обе ветви резонансной зависимости были сняты при уменьшении частоты от 18.75 до 18.2 с⁻¹.

При дальнейшем уменьшении глубины жидкости h от 6.9 до 6.0 см (рис. 4-3) для резонансных зависимостей характерно изменение направления их прохождения по частоте – для того, чтобы измерить $H(\Omega)$, необходимо было увеличивать Ω . При всех глубинах, кроме $h=6$ см, резонансные зависимости имеют две ветви - сначала восходящая ветвь (жесткая восстанавливающая сила), затем ветвь нисходящая (мягкая восстанавливающая сила). Картина меняется при $h=6$ см; здесь прослеживается случай «чистой» жесткой восстанавливающей силы. Мы имеем одну ветвь резонансной зависимости, при которой высота волны растет при увеличении частоты колебаний сосуда.

Проведенный анализ экспериментальных данных рисунков 4-2 и 4-3 позволяет сделать заключение, что переход от «мягкой» резонансной зависимости к «жесткой» резонансной зависимости не является резким или скачкообразным. Для этого перехода характерно целое семейство резонансных зависимостей, имеющих две ветви – восходящую и нисходящую. Единственным признаком, по которому можно оценить значение критической глубины, является изменение направления прохождения этих резонансных зависимостей. Смена направления происходит при глубине $6.90 < h_{cr} < 7.05$ см. Таким образом, в качестве критической глубины принимаем $h_{cr} \cong 7$ см, что соответствует безразмерной глубине $h/\lambda = 0.14$.

Рассчитанные по (4.2) резонансные зависимости для $h=6-15$ см приведены на рисунках 4-2 и 4-3 (сплошные кривые). Следует отметить регулярный сдвиг теоретических резонансных кривых в область высоких частот. Этот сдвиг, скорее всего, обусловлен диссипативными потерями на дне сосуда. В целом модель, если не на количественном, то на качественном уровне, объясняет и описывает распад резонансных зависимостей на две устойчивые ветви

Таким образом, исследован эффект критической глубины, состоящий в немонотонной резонансной зависимости волн Фарадея вблизи критического значения глубины жидкости. Наблюдаемая в экспериментах сложная картина бифуркаций амплитудно-частотных характеристик волновых движений жидкости при параметрическом возбуждении представляет значительный теоретический и прикладной интерес. Резонансные зависимости вблизи критической глубины жидкости не являются однозначными функциями частоты колебаний сосуда, а имеют две устойчивые ветви. Одна ветвь отображает эффект мягкой восстанавливающей силы (увеличение высоты волны с уменьшением частоты колебаний сосуда); а вторая ветвь – эффект жесткой восстанавливающей силы (увеличение высоты волны с ростом частоты).

В результате этого могут происходить резкие изменения амплитуды волн при плавном изменении частоты, а также явления гистерезиса. Для глубин жидкости, далеких от критической, наблюдается исчезновение одной из ветвей резонансных кривых. Так, для глубокой жидкости исчезает ветвь H_+^+ , а ветвь H_+^- имеет отрицательный наклон. Для жидкости, глубина которой значительно меньше критической, исчезает ветвь H_+^- , а ветвь H_-^+ имеет положительный наклон.

4.3. Составные волны Фарадея

Понятие составных нелинейных волн введено в гидродинамике в 1951 г. Я.И. Секерж-Зеньковичем, заложившим основы теории, как свободных, так и возбуждаемых внешним воздействием составных волн [Секерж-Зенькович Я.И. (1951); (1969); (1975)].

По определению составная волна в линейном приближении есть суперпозиция линейных волн, в случае стоячих волн - линейных мод. В линейной волновой моде движение жидких частиц описывается одной из собственных функций соответствующей математической задачи.

Выполнено очень мало исследований гравитационных волн более сложной структуры, чем одномодовая, причем в них рассматривались только поверхностные волны. Многомодовая пространственная картина наблюдалась в экспериментах [Сорокин (1957)], но волны были ближе к капиллярным, чем к гравитационным. Периодическая перекачка энергии из одной двумерной волновой моды в другую наблюдалась в экспериментах [Калиниченко и др. (1985)].

Описываемое ниже возбуждение волн осуществлялось за счет главного параметрического резонанса. Прямоугольному сосуду с двухслойной жидкостью сообщались гармонические колебания в вертикальном направлении с заданными амплитудой и частотой. Установив амплитуду колебаний сосуда больше некоторой пороговой, круговую частоту Ω близкой к удвоенной собственной частоте 2ω какой-либо волновой моды, можно добиться возбуждения на границе раздела жидкостей этой моды.

Прямоугольный сосуд ($L=50$ см, $W=10$ см, $H=40$ см) заполнялся двухслойной жидкостью: керосин - вода, $\rho_1=0.79$ г/см³, $\rho_2=1.00$ г/см³, $h_{1,2}=10$ см.

Собственные частоты различных мод вычислялись по формуле

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{g\pi}{l} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \sqrt{n^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2 m^2} \quad (4.3)$$

где n и m - число узловых линий на передней и боковой стенках сосуда, g - ускорение силы тяжести.

В экспериментах амплитуда колебаний сосуда $s=0.9$ см, а частота Ω варьировалась. При этом на границе раздела устанавливались следующие волны.

При $\Omega=13.12$ с⁻¹ возбуждалась плоская шестая волновая мода. Удвоенная ее собственная частота $2\omega_{6,0}=13.11$ с⁻¹. Профиль волны близок к профилю соответствующей линейной волны в неподвижном сосуде.

При $\Omega=12.47$ с⁻¹ возбуждалась трехмерная мода, отвечающая $n=3$, $m=1$. Для этой моды $2\omega_{3,1}=12.92$ с⁻¹.

При $\Omega=12,75$ с⁻¹ возбуждалась волна более сложной структуры. Фотографии поверхности раздела, взятые через $\frac{1}{2}$ периода волны, приведены на рис. 4-4 а,б. На фотографиях видна масштабная сетка; на передней стенке сосуда сторона квадрата равна 10 см, на боковой стенке расстояние между горизонтальными прямыми 5 см.

Проанализируем смещение границы раздела вдоль левой боковой стенки сосуда. Видно, что у заднего левого ребра сосуда частицы жидкости колеблются с амплитудой 3 см, а у переднего неподвижны. Следовательно, движение трехмерное и неодномодовое, поскольку ни у какой моды узел не может находиться на ребре сосуда.

Если сосуд остановить, то волна постепенно затухает подобно обычной свободной волне: ее высота уменьшается, а форма в целом сохраняется, по крайней мере, в течение восьми периодов.

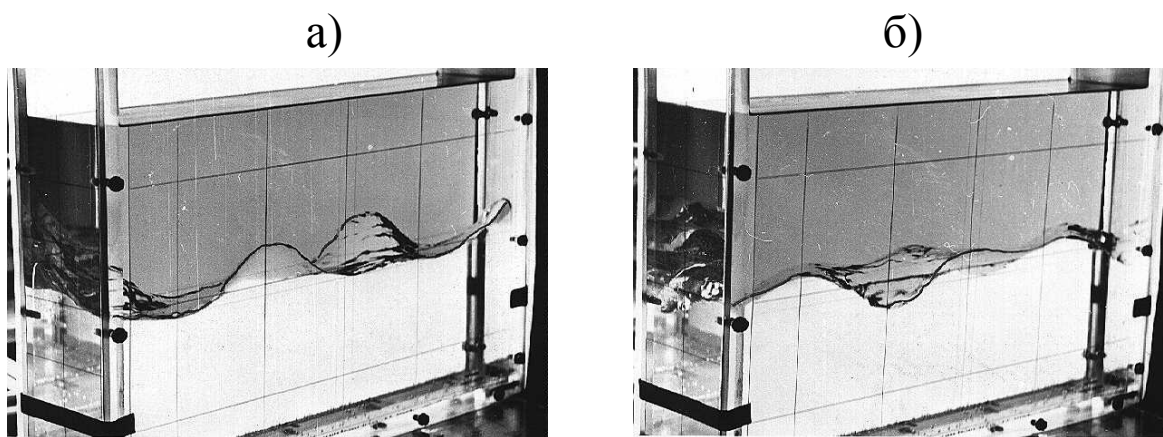


Рис. 4-4. Составные волны Фарадея (эксперимент): керосин - вода, $\rho_1=0.79$ г/см³, $\rho_2=1.00$ г/см³, $h_{1,2}=10$ см; суперпозиция волновых мод (6,0) и (3,1) на частоте $\Omega=12.75$ с⁻¹

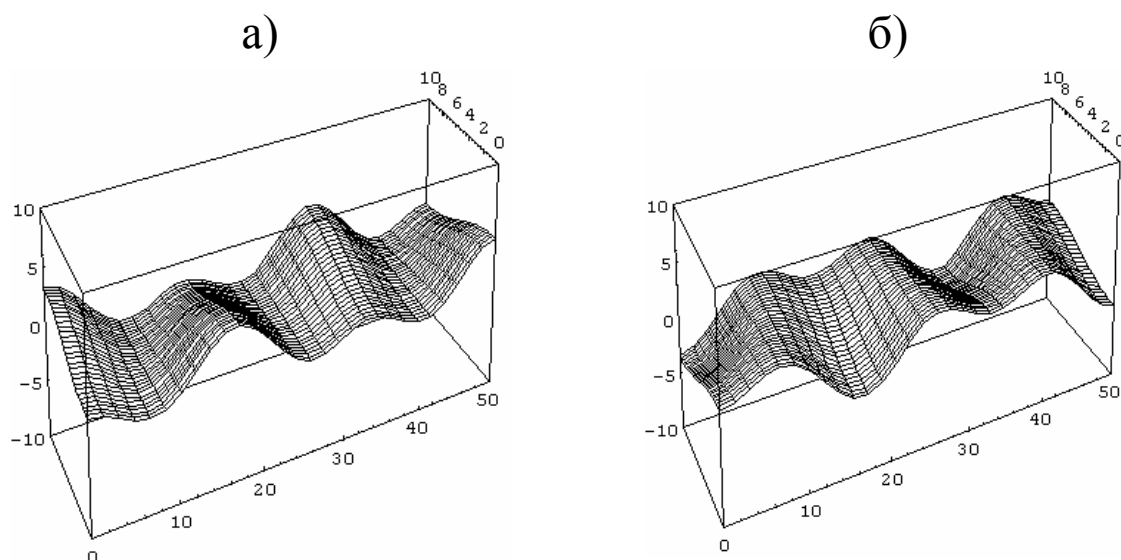


Рис. 4-5. Составные волны Фарадея (модель)

В предположении, что жидкость идеальная, глубины ее слоев бесконечные, а сосуд неподвижен, возвышение границы раздела в линейном приближении для каждой моды представляется формулой

$$\eta_{n,m}(x, y, t) = \frac{H_{n,m}}{2} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{W} \cos(\omega_{n,m}t + \theta_{n,m}).$$

Здесь ось Ox декартовой прямоугольной системы координат проведена вдоль передней стенки сосуда на уровне невозмущенной

границы раздела, ось Oy - вдоль левой боковой стенки, $\omega_{n,m}$ определена из (4.3), а $H_{n,m}$ и $\theta_{n,m}$ - высота и фаза волны, вообще говоря, произвольные.

Рассмотрим суперпозицию линейных мод с номерами $n=6$, $m=0$ и $n=3$, $m=1$. Положим

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_{6,0} + \eta_{3,1}, \\ H_{6,0} &= -H_{3,1} = H, \\ \omega_{6,0} &\approx \omega_{3,1} = \omega, \\ \theta_{6,0} &= \theta_{3,1} = 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\eta(x, y, t) = \frac{H}{2} \left(\cos \frac{6\pi x}{L} - \cos \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{W} \right) \cos \omega t \quad (4.4)$$

Поверхности, рассчитанные по формуле (4-4), изображены на рисунках 4-5,а и 4-5,б в виде системы ортогональных сечений в изометрической проекции для моментов времени $t=0$ и $T/2$. Их форма очень похожа на форму границы раздела жидкостей, представленной на рис. 4-4.

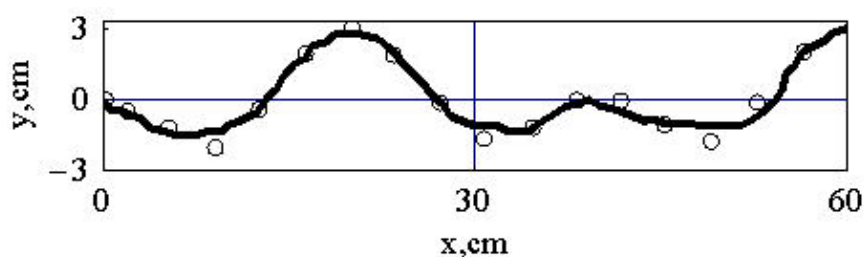


Рис. 4-6. Профиль составной стоячей волны на передней стенке сосуда: $\Omega = 12.75 \text{ с}^{-1}$; кружки соответствуют расчету по (4.4)

На рис. 4-6 приведен профиль волн на передней стенке сосуда: сплошная линия - полученный экспериментально, и (о) - рассчитанный по формуле (4.4). Они почти совпадают.

Таким образом, описанная волна является стоячей трехмерной составной волной.

Устойчивое возбуждение такой волны в условиях эксперимента объясняется двумя обстоятельствами: вырождением - близостью собственных частот взаимодействующих мод ($\omega_{6,0}$ и $\omega_{3,1}$) и нелинейностью. В линейной системе наличие даже небольшое отличие в собственных частотах привело бы к сложной интерференционной волновой картине, характеризующейся, в частности, явлением биений.

Если частоту колебаний сосуда изменять, оставляя ее в пределах $12.57 < \Omega < 13.09 \text{ с}^{-1}$, то форма составной волны меняется, приближаясь к форме одной из составляющих ее мод. Это объясняется нарушением равенства $H_{6,0} = H_{3,1}$ в формуле для $\eta(x, y, t)$.

В заключение отметим, что можно возбудить составные волны, являющиеся суперпозицией и других пар волновых мод. Для номеров n и m в каждой такой паре для сосуда данных размеров должны быть близкими выражения $(n^2 + 25m^2)$ - см. (4.3). Например, при $12.13 < \Omega < 12.17 \text{ с}^{-1}$ возбуждалась составная волна, для которой номера взаимодействующих мод были $(n=5, m=0)$ и $(n=2, m=1)$; аналогично, $(n=1, m=1)$ и $(n=2, m=1)$ при $\Omega = 12.11 \text{ с}^{-1}$.

4.4. Взаимодействие волновых мод

При исследовании параметрического возбуждения стоячих поверхностных волн была проведена серия опытов, в которых в довольно широких пределах изменялась глубина жидкости h и амплитуда колебаний сосуда S .

Первая мода ($n=1$, $\lambda=100$ см) колебаний свободной поверхности жидкости глубиной $h=7\text{--}8$ см возбуждается при амплитуде колебаний сосуда $s>0.5$ см. На рис. 4-7 приведена резонансная зависимость для случая $2s=1.3$ см, $h=7.5$ см. Характерно, что в этом случае амплитуда волны растет с увеличением частоты, что соответствует $h/\lambda = 0.075$.

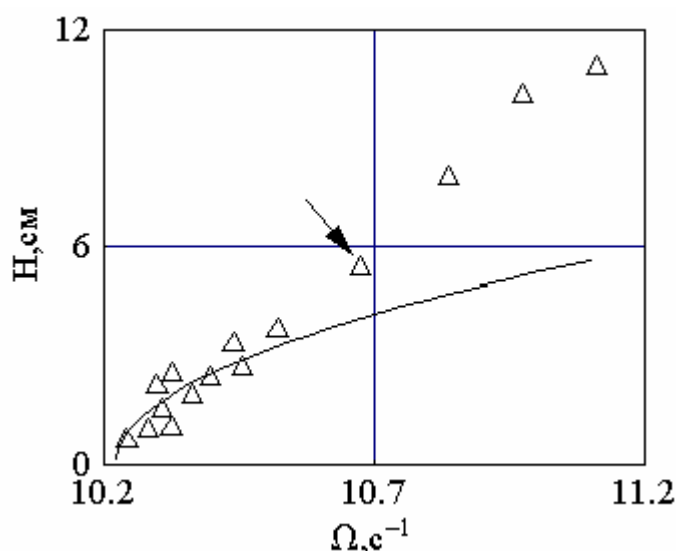


Рис. 4-7. Резонансная зависимость для первой моды: $n=1$, $h=7.5$ см, $s=0.65$ см, $\beta=-2.7544$.

Для сравнения с экспериментом на рис. 4-7 показана резонансная зависимость, рассчитанная по соотношению (2.4). Видно, что с некоторого значения Ω^* ход резонансной кривой отличается от эксперимента (эта экспериментальная точка отмечена стрелкой). Начиная с этой частоты $\Omega^*=10.67$ с⁻¹, на фоне первой моды появляется «бегущее» возмущение, искажающее волновой профиль.

Это искажение проявляется в следующем: в тот момент, когда свободная поверхность жидкости должна быть близка к горизонтальной, в центральной части сосуда образуется вспученность с горизонтальными размерами порядка 26 см и максимальным отклонением от равновесного положения около 0.5 – 0.8 см. Затем эта вспученность бежит к боковой стенке, где и сливается с гребнем первой моды. Движения возмущений

носят периодический характер, причем период процесса в точности равен периоду колебаний первой моды. Такое искажение регулярной волновой картины наблюдается при $H > 5$ см. Отметим, что аналогичная картина наблюдается и для второй моды.

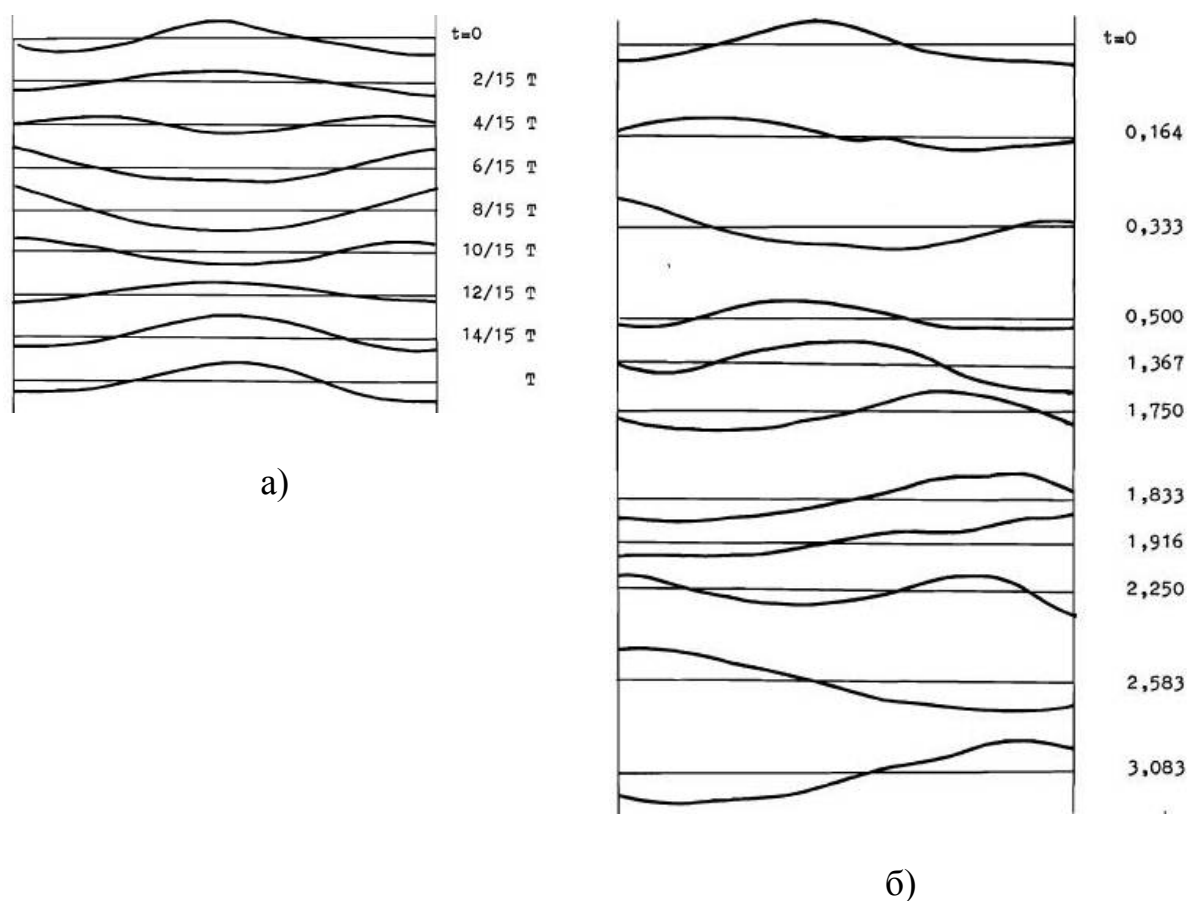


Рис. 4-8. Кинограмма волновых движений жидкости: а) «чистая» вторая мода ($h=7$ см, $s=0.7$ см, $\Omega=17.44$ с $^{-1}$, $H=4.4$ см, $T=0.721$ с); б) переход второй моды ($\omega_{n=2} \sim \Omega/2$) в первую моду ($\omega_{n=1} \sim \Omega/4$) ($h=7$ см, $s=0.7$ см, $\Omega=18.66$ с $^{-1}$, $H=4.4$ см, $T=0.673$ с)

При $h=7$ см и $2s=1.4$ см в частотном диапазоне частот $\Omega \sim 16.964 - 22.62$ с $^{-1}$ экспериментально был обнаружен следующий режим колебаний. На частоте $\Omega=17.279$ с $^{-1}$ для второй моды наблюдался основной параметрический резонанс $\omega_{n=2} \sim \Omega/2$. При увеличении частоты высота волны росла и при $\Omega=17.593$ с $^{-1}$ достигала максимального значения $H \sim 14$ см. При дальнейшем увеличении Ω было зафиксировано незначительное

уменьшение высоты, и при $\Omega=18.41 \text{ с}^{-1}$ наблюдался срыв колебаний. На рис.4-8,а представлена кинограмма волновых движений жидкости при параметрическом возбуждении второй моды на частоте $\Omega=17.44 \text{ с}^{-1}$.

Из рис. 4-8,а следует, что имеется чистая вторая мода. После срыва колебаний при дальнейшем увеличении частоты происходит возбуждение первой моды ($\Omega=20.42 \text{ с}^{-1}$), причем между частотой колебаний жидкости $\omega_{n=1}$ и частотой колебаний сосуда справедливо соотношение $\omega_{n=1} \sim \Omega/4$, т.е. имеем $1/4$ -субгармонику. С увеличением Ω высота волны H растет, и на частоте $\Omega=22.31 \text{ с}^{-1}$ происходит срыв колебаний. Отметим, что наблюдаемая первая мода искажена – ясно видно «бегущее» возмущение. Ниже для первой и второй волновых мод приведены экспериментальные частотные диапазоны и рассчитанные значения собственных частот $\omega_{n=1}$ и $\omega_{n=2}$:

Номер моды, n	Первая мода, $n=1 (\omega_{n=1} \sim \Omega/4)$	Вторая мода, $n=2 (\omega_{n=2} \sim \Omega/2)$
Частотный диапазон, $\Omega, \text{ с}^{-1}$	20.42 – 21.68	17.28 – 18.41
Собственная частота, $\omega, \text{ с}^{-1}$	5.05	9.36

Установлено, что на частотах $\Omega \sim 18.60\text{--}19.16 \text{ с}^{-1}$ происходит сложное взаимодействие первой и второй мод колебаний. Так на частоте $\Omega \sim 18.79 \text{ с}^{-1}$ в течение 12 с наблюдалась вторая мода ($\omega_{n=2} \sim \Omega/2$), затем волна разрушалась, и раскачивалась первая мода ($\omega_{n=1} \sim \Omega/4$), существовавшая 4 с. Далее процесс периодически повторялся.

При переходе на другую частоту $\Omega \sim 19.06 \text{ с}^{-1}$ общая картина не менялась, но вторая мода существовала 5с, а первая – 10с.

На рис. 4-8,б представлена кинограмма перехода второй моды в первую при частоте колебаний сосуда $\Omega=18.66 \text{ с}^{-1}$.

Описанное выше сложное взаимодействие двух мод колебаний вероятнее всего объясняется комбинационным параметрическим резонансом. При описании данного явления следует также учитывать малость параметра $h/\lambda=0.07$.

4.5. Срыв параметрических колебаний жидкости

В работе [Нестеров (1969)] асимптотическое решение нелинейной задачи о поверхностных волнах Фарадея строилось методом Крылова-Боголюбова в переменных Лагранжа. Предполагалось, что сила трения, действующая между частицами жидкости, пропорциональна их скорости с коэффициентом b . Из этого решения следует, что резонансные зависимости высоты волны от частоты параметрического воздействия определяются соотношением

$$\kappa^2 \omega \beta H_{\pm}^2 = 4 \left(\omega - \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s\omega^2 \Omega}{2g} \right)^2 - b^2} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{64} \operatorname{th}^{-4} \kappa h (2 \operatorname{th}^6 \kappa h + 3 \operatorname{th}^4 \kappa h + 12 \operatorname{th}^2 \kappa h - 9),$$

$$\omega^2 = g \kappa \operatorname{th} \kappa h, \kappa = \pi n / L$$
(4.5)

Здесь L – длина сосуда; g – ускорение силы тяжести; H_+ отвечает реализуемой в эксперименте устойчивой, а H_- – неустойчивой ветвям резонансной зависимости.

В безразмерном виде резонансные зависимости схематично изображены на рис. 4-9. При медленном уменьшении частоты до значения Ω_A стационарная высота волны равна нулю. При дальнейшем уменьшении Ω от Ω_A до Ω_B высота определяется сплошной кривой H_+ . В точке B происходит срыв колебаний, и при дальнейшем уменьшении частоты высота волны равна нулю.

При увеличении частоты от нуля до Ω_B высота волны равна нулю, и при $\Omega > \Omega_B$ она определяется участком EA резонансной кривой H_+ . Таким образом, реализуемой в эксперименте зависимости $H(\Omega)$ присущ гистерезис - участок $AEBCDEA$ рис. 4-9, а частота срыва колебаний

$$\Omega_B = \frac{2gb}{s\omega^2} \quad (4.6)$$

определяется пересечением устойчивой $H=H_+(\Omega)$ и неустойчивой $H=H_-(\Omega)$ ветвей резонансной зависимости. При отсутствии затухания ($b=0$) устойчивая и неустойчивая ветви резонансной зависимости становятся эквидистантными, и точка их пересечения отсутствует.

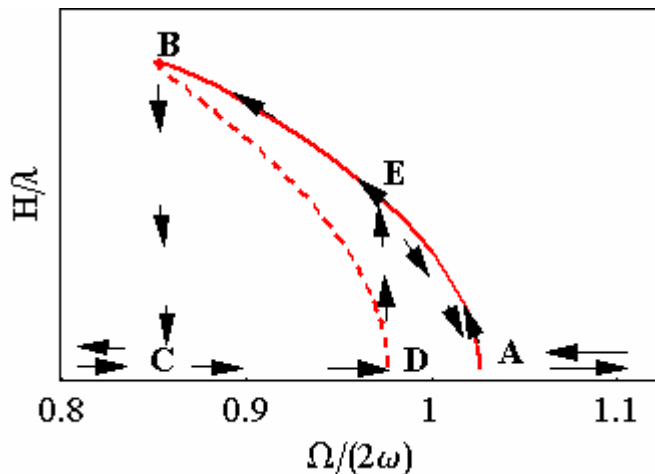


Рис.4-9. Схематичное изображение двух ветвей резонансной зависимости:
1 - устойчивая $H(\Omega)=H_+$ и
2 - неустойчивая $H(\Omega)=H_-$ ветви

Экспериментальные резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод приведены на рис. 4-10. Направленные вертикально вниз стрелки определяют соответствующие экспериментальные значения частоты срыва колебаний $\Omega_B=18.8$ и 23.2 с^{-1} , соответственно.

Исследование процесса затухания регулярных поверхностных волн Фарадея высотой 5-12 см позволило оценить соответствующие коэффициенты затухания для второй и третьей волновых мод

$$b = \begin{cases} 0.066 c^{-1}, & n = 2 \\ 0.071 c^{-1}, & n = 3 \end{cases},$$

которые использовались для построения резонансных зависимостей и оценки частоты срыва Ω_B .

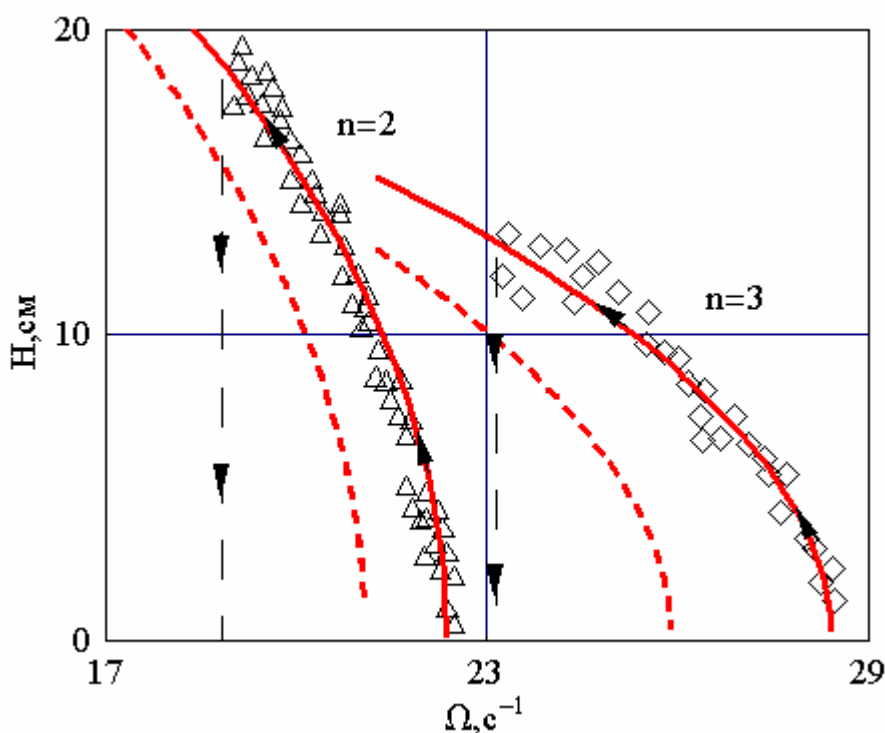


Рис.4-10. Зависимости $H(\Omega)$ для двух мод поверхностных волн Фарадея при $h=15$ см, $s=0.25$ см. Направленные вниз стрелки соответствуют частоте срыва колебаний 18.8 и 23.2 с^{-1} . Сплошные и пунктирные кривые – устойчивая и неустойчивая ветви (4.5).

Устойчивая и неустойчивая ветви резонансной зависимости, рассчитанной по (4.5), показаны на рис. рис. 4-10 сплошной и штриховой линиями, соответственно. Соотношение (4.6) для второй и третьей волновых мод дает $\Omega_B=4.4$ и 3.1 с^{-1} соответственно. Получены явно заниженные по сравнению с экспериментом значения. Отметим, что анализ резонансных зависимостей указанных волновых мод на поверхности жидкости глубиной 10 и 7.5 см приводит к аналогичным результатам. С

другой стороны, модель достаточно точно описывает зависимость $H(\Omega)$ (рис. 4-10).

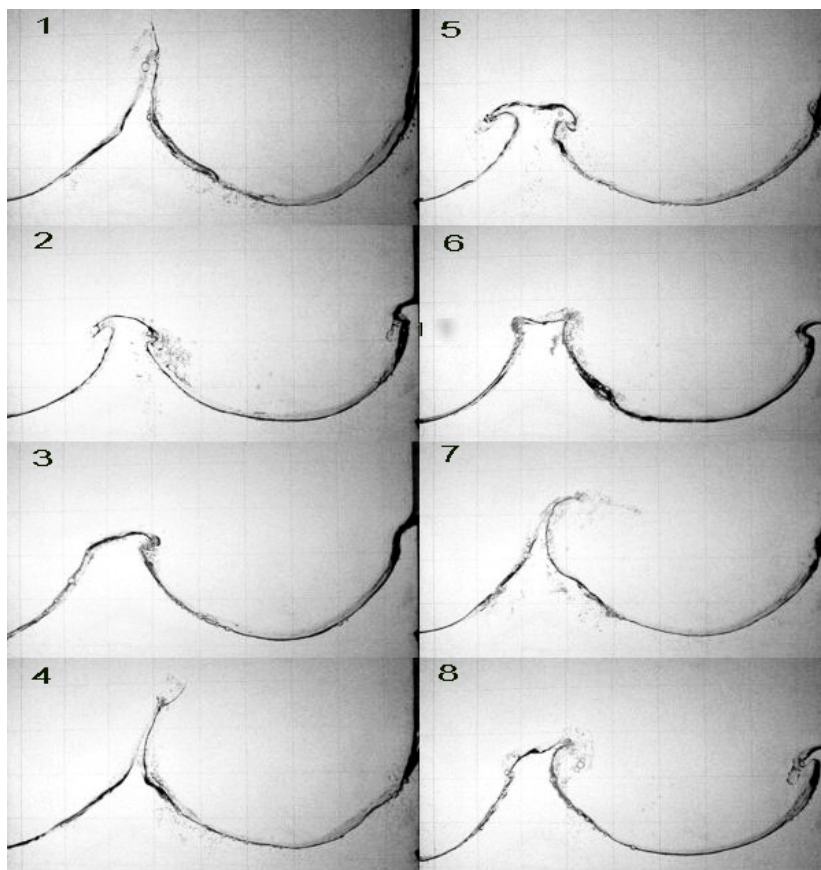


Рис.4-11. Разрушающиеся волны Фарадея; последовательность восьми волновых профилей максимального развития; $h=15$ см, $s=0.25$ см, $n=3$, $\Omega=23.6$ с⁻¹.

В окрестности частот срыва наблюдаемые волны Фарадея можно классифицировать как разрушающиеся волны, для которых характерны струйные выбросы и каплеобразование [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2007); Калиниченко (2009)]. На рис.4-11 представлена последовательность восьми волновых профилей максимального развития для третьей моды, зарегистрированных на частоте $\Omega=23.6$ с⁻¹.

С физической точки зрения процесс разрушения волн в виде струйных выбросов можно рассматривать как дополнительный механизм диссипации волновой энергии и к потерям энергии на вязкую диссипацию необходимо добавлять потери на разрушение. По результатам [Jiang, Ting.,

Schultz (1996)] мощность, рассеиваемая при разрушении волн, вдвое превосходит вязкую диссипацию. Согласно [*Goodridge, Shi Lathrop* (1997)] для жидкости с кинематической вязкостью в 300 раз больше вязкости воды преобладает вязкая диссипация. Увеличение диссипации вследствие каплеобразования при параметрическом возбуждении капиллярных волн на поверхности слоя воды отмечено также в [*Сорокин* (1957)].

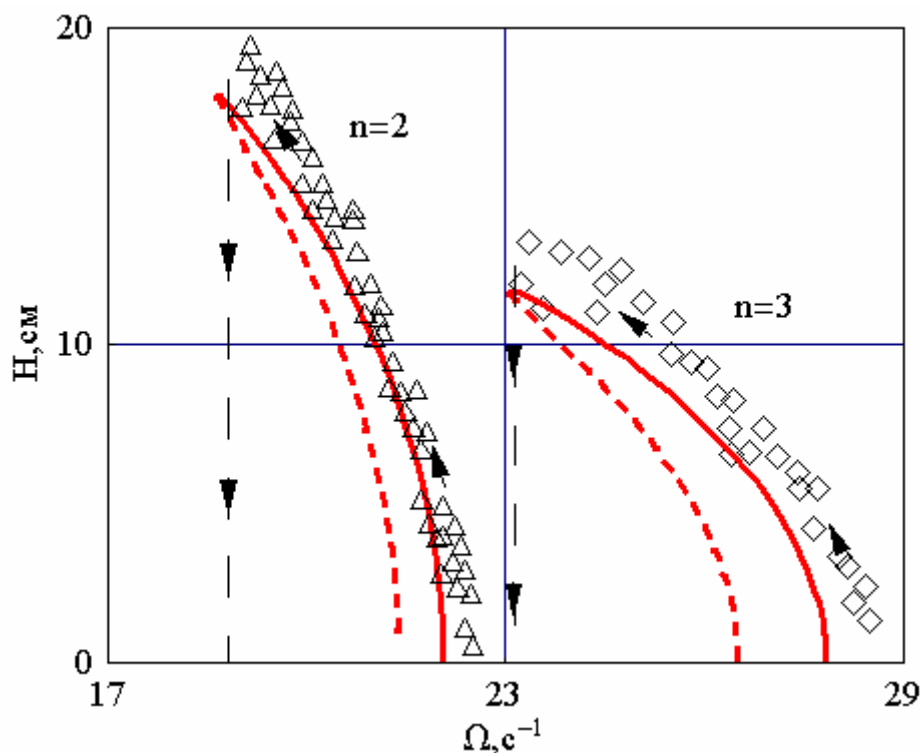


Рис.4-12. Зависимости $H(\Omega)$ для двух мод поверхностных волн Фарадея при $h=15$ см, $s=0.25$ см, В (4.5) использовались значения эквивалентного коэффициента затухания 0.283 и 0.54 с⁻¹.

Учитывая вышесказанное, можно предположить, что разрушение волн Фарадея приводит к резкому увеличению диссипации волновой энергии. По аналогии с тем, как это делается при описании сложных диссипативных систем с конечным числом степеней свободы, напр., [*Тимошенко, Янг, Уивер* (1985)], вместо измеренного b вводится эквивалентный коэффициент затухания. Для каждой волновой моды этот коэффициент выбирался таким образом, чтобы рассчитанная частота срыва колебаний совпадала с измеренной.

Соответствующий эквивалентный коэффициент затухания b^* , рассчитанный по формуле (4,6), для данных рис.4-10 принимает значения

$$b^* = \begin{cases} 0.283 \text{ c}^{-1}, & n = 2 \\ 0.540 \text{ c}^{-1}, & n = 3 \end{cases}.$$

Построенные с использованием b^* резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод приведены на рис.4-12. Введенный эквивалентный коэффициент затухания в 4 и 7 раз превышает определенные по обычной методике коэффициенты. На рис.4-13 представлены резонансные зависимости для $h=10$ и 7.5 см с соответствующими значениями эквивалентного коэффициента затухания.

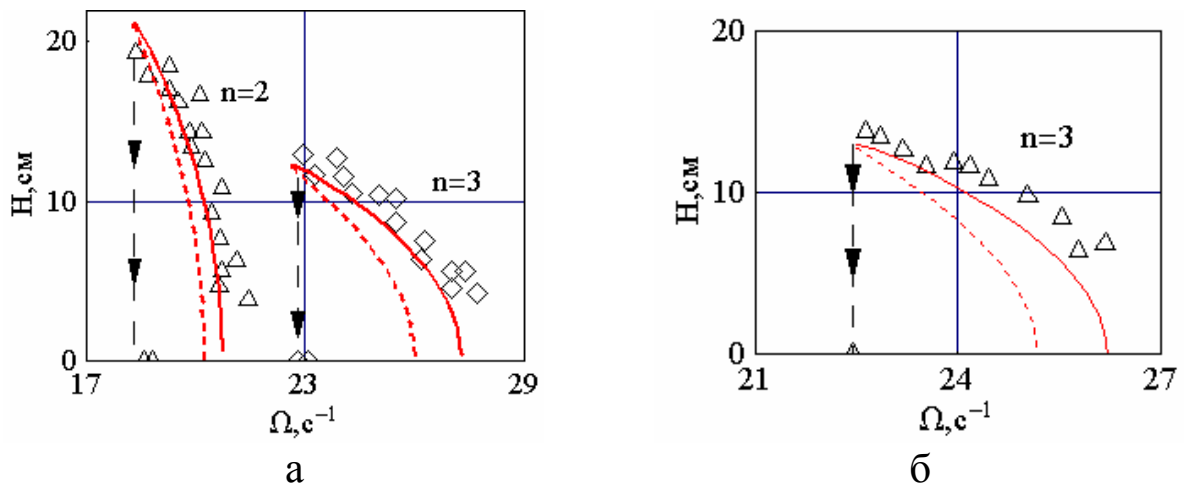


Рис.4-13. Экспериментальные и рассчитанные по (4.7) резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод: а - $h=10$ см, $b^*=0.245, 0.51 \text{ c}^{-1}$; б - $h=7.5$ см, $b^*=0.47 \text{ c}^{-1}$ ($s=0.25$ см)

В случае внутренних волн Фарадея на границе раздела двух жидкостей резонансные зависимости [Секерж-Зенькович (1983)] с учетом диссипативных эффектов имеют вид

$$H_{\pm}^2 P = 4 \left(\omega - \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s\omega^2\Omega}{2g} \right)^2 - b^2} \right), \quad (4.7)$$

где
$$P = \frac{\kappa^2 \omega}{8} \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}, \quad \omega^2 = g\kappa \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

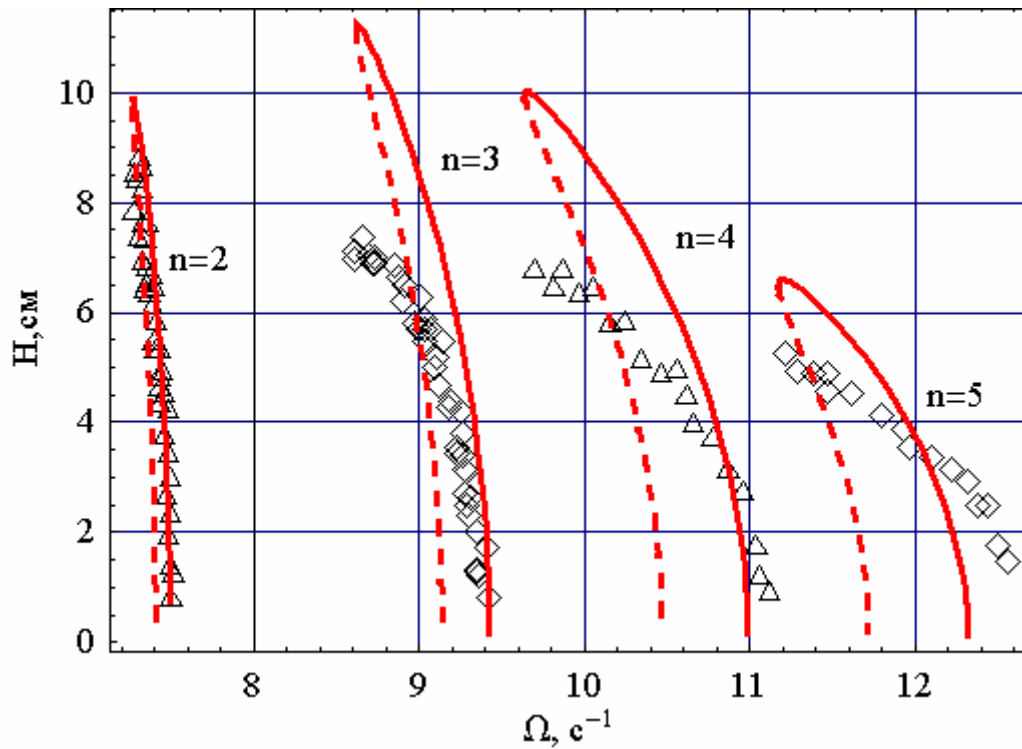


Рис.4-14. Экспериментальные и рассчитанные резонансные зависимости для внутренних волн Фарадея ($n=2-5$)

Экспериментальные резонансные зависимости для волновых мод $n=2-5$ приведены на рис.4-14. Как и в случае поверхностных волн, по частоте срыва выполнены оценки эквивалентного коэффициента затухания b^* . Ниже приведены значения b и b^* :

n	2	3	4	5
b, c^{-1}	0.045	0.055	0.065	0.073
b^*, c^{-1}	0.097	0.179	0.268	0.388

Эквивалентный коэффициент затухания b^* превышает измеренный коэффициент затухания b в 2-5 раз. Отметим, что разрушение внутренних

волн в окрестности точки срыва колебаний в отличие от поверхностных волн обуславливается развитием сдвиговой неустойчивости в их узловых областях [Калиниченко (2005)].

Поскольку в эксперименте с резонансом Фарадея не удастся непосредственно оценить потери на разрушение волн, то для тестирования использованного подхода была исследована более простая механическая система, допускающая экспериментальную оценку диссипативных факторов как при малых амплитудах колебаний, так и вблизи их срыва.

В качестве такой системы рассматривался физический маятник с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса, движение которого описывается уравнением

$$\varphi'' + 2b\varphi' + (\omega^2 + \frac{s}{l}\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi = 0,$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, s и Ω – амплитуда и частота колебаний точки подвеса маятника, b – коэффициент демпфирования, $\omega = \sqrt{g/l}$ – собственная частота малых колебаний маятника.

Параметрическое возбуждение колебаний маятника происходит, если расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$ удовлетворяет условию

$$|\Delta| < \frac{s\Omega^3}{8g}.$$

Амплитуда φ_m стационарных колебаний согласно [Боголюбов, Митропольский (1974); Xu, Wiercigroch (2007)] определяется как

$$\varphi_{m\pm}^2 = -16\left(\frac{\Omega}{2\omega} - 1\right) \pm 4\sqrt{\left(\frac{s\Omega^2}{g}\right)^2 - 4\left(\frac{2b}{\omega}\right)^2}, \quad (4.8)$$

где φ_{m+} отвечает устойчивой, а φ_{m-} – неустойчивой ветви резонансной зависимости.

В ходе экспериментов при $s=0.4$, 0.6 и 0.95 см сняты резонансные зависимости маятника с коэффициентами затухания $b=0.019$, 0.032 и 0.096 с^{-1}

На рис.4-15 приведена резонансная зависимость маятника с коэффициентом затухания $b=0.019$ с^{-1} при $s=0.6$ см. После возбуждения колебаний на частоте $\Omega=11.4$ с^{-1} их амплитуда равна $\varphi_m=0.34$ рад. При плавном уменьшении Ω амплитуда монотонно возрастала до максимальной величины $\varphi_m=2.8$ рад при $\Omega=5.54$ с^{-1} . Дальнейшее уменьшение Ω привело к срыву колебаний при $\Omega_B=5.39$ с^{-1} .

Рассчитанные по (4.8) ветви резонансной зависимости пересеклись при частоте срыва $\Omega_B=4.72$ с^{-1} .

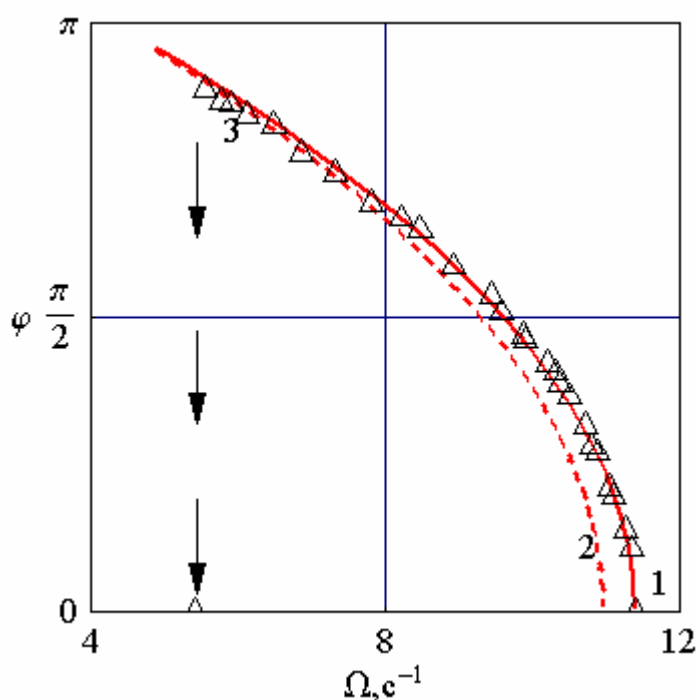


Рис.4-15. Резонансные зависимости для физического маятника при $s=0.6$ см, $b=0.019$ с^{-1} : 1 - устойчивая $\varphi = \varphi_+$ и 2 - неустойчивая $\varphi = \varphi_-$ ветви, рассчитанные по (4.8); 3 – экспериментальные точки

Аналогичные результаты были получены при изменении экспериментальных условий: на рис. 4-16,а и б приведены резонансные зависимости при увеличении коэффициента затухания в 2 и 5 раз. В обоих случаях можно говорить о неплохом соответствии между моделью и экспериментом.

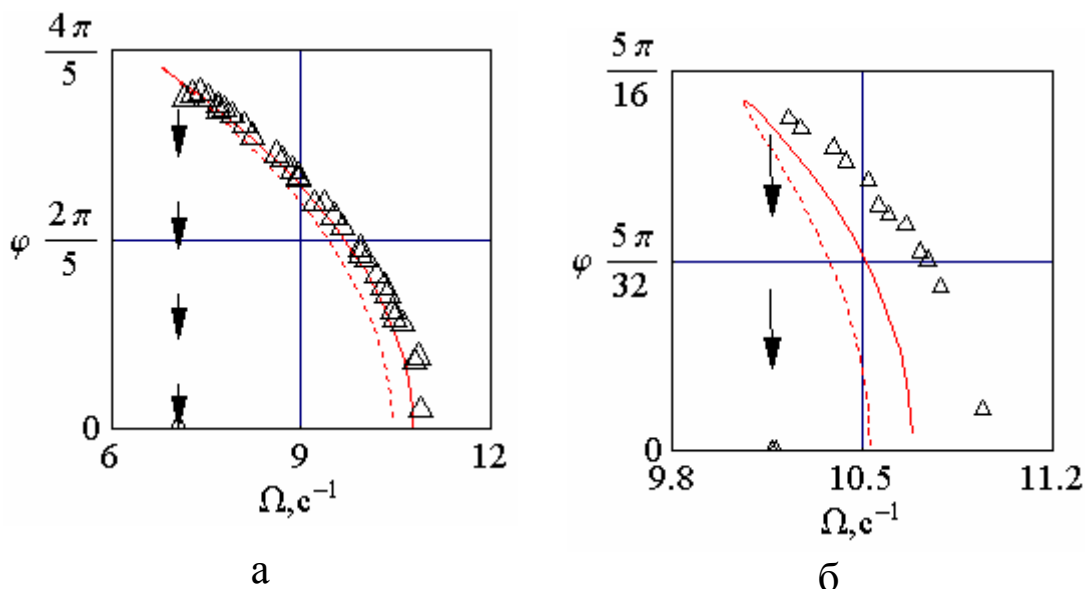


Рис.4-16. Резонансные зависимости для физического маятника ($s=0.6$ см): а, б - $b=0.032$ и 0.096 с $^{-1}$; 1 - устойчивая $\varphi = \varphi_+$ и 2 - неустойчивая $\varphi = \varphi_-$ ветви, рассчитанные по (4.8); 3 – экспериментальные точки

Полученные результаты по срыву параметрических колебаний физического маятника могут быть аргументом в правомерности использования эквивалентного коэффициента затухания при срыве волн Фарадея.

Заключение.

1. Экспериментально исследован эффект критической глубины, т.е. той глубины жидкости, при которой происходит изменение наклона резонансной зависимости для поверхностных волн Фарадея. Для второй волновой моды проведена серия экспериментов, в которых сняты

резонансные зависимости параметрически возбуждаемых волн на поверхности жидкости, безразмерная глубина которой изменялась в диапазоне $0.71 < h/h_{cr} < 1.05$ при $h_{cr} = 8.42$ см. Показано, что резонансная зависимость имеет две ветви, одна из которых определяется мягкой восстанавливающей силой, другая - жесткой восстанавливающей силой. Проводится сравнение данных эксперимента с гидродинамической моделью [Бордаков и др. (1994); Sekerj-Zenkovich et al. (1998)].

2. Исследован эффект вырождения волн Фарадея, при котором на одной частоте колебаний сосуда происходит одновременное параметрическое возбуждение двух волновых мод. Для внутренних волн Фарадея - это возбуждение составных внутренних волн. Для поверхностных волн Фарадея эффект вырождения проявляется во взаимодействии двух волновых мод – первой волновой моды $n=1$ ($\omega_{n=1} \sim \Omega/4$) и второй моды $n=2$ ($\omega_{n=2} \sim \Omega/2$).
3. В условиях резонанса Фарадея исследован срыв колебаний свободной поверхности однородной и границы раздела двухслойной жидкостей. В эксперименте для нескольких мод поверхностных и внутренних волн измерены частоты срыва; отмечено, что при подходе к ним наблюдается интенсивное разрушение волн. Теоретическое моделирование основано, как и в теории параметрических колебаний механических систем с одной степенью свободы, на предположении о главенствующей роли диссипативных факторов. При этом был введен и оценен по экспериментальным резонансным кривым эквивалентный коэффициент затухания разрушающихся волн Фарадея. Справедливость принятого подхода продемонстрирована на механической системе с одной степенью свободы – физическом маятнике с вертикально колеблющейся точкой подвеса.

Глава 5. ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА И РАЗРУШЕНИЕ ВОЛН ФАРАДЕЯ

Настоящая глава посвящена исследованию предельной формы и механизмов разрушения поверхностных и внутренних волн Фарадея.

Целью работы является:

- Выявление формы предельного профиля поверхностной волны Фарадея
- Исследование процесса разрушения гравитационных двумерных волн Фарадея на свободной поверхности глубокой жидкости в прямоугольном сосуде. Обсуждается переход от регулярных волн к волнам нерегулярным и разрушающимся. Основное внимание уделяется формированию струйного выброса при схлопывании каверны на стадии формирования гребня волны.
- Исследование процесса разрушения гравитационных двумерных волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде. Основное внимание уделено развитию неустойчивости сдвигового слоя и формированию вторичных волн, пространственные масштабы которых существенно меньше длины основной волны.

По материалам главы опубликованы работы [*Калиниченко* (1986); *Калиниченко* (2005); *Калиниченко, Секерж-Зенькович* (2007); *Калиниченко* (2009); *Kalinichenko* (2007); *Калиниченко* (2008)].

5.1. Постановка эксперимента.

Для генерации волн Фарадея на свободной поверхности жидкости использовалась установка ПР-2М. Исследовались вторая и третья волновые моды в прямоугольном сосуде в условиях основного резонанса. Сосуд имел размеры $50 \times 4 \times 40$ см, что обеспечило двухмерность указанных волновых мод и приблизило волны к чисто гравитационным; глубина h жидкости была 15 см, что обеспечило независимость волновых движений от h . В большинстве опытов в качестве рабочих жидкостей использовались вода и водный раствор сахара (плотность: 1.24 г/см^3 ; кинематическая вязкость: 13.43 сСт). Лишь в некоторых экспериментах варьировалась глубина воды, исследовалась первая волновая мода и использовался керосин (эти изменения отражены в тексте).

Для регистрации волновых профилей применялась цифровая видеосъемка (DIMAGE Z2, 24-30 к/с и высокоскоростная VS FAST, 200-400 к/с) с последующей компьютерной обработкой в среде GetData Graph Digitizer 2.22.

Заполненный двухслойной жидкостью прямоугольный сосуд ($50 \times 4 \times 40$ см) совершал колебания в вертикальном направлении с частотой Ω и амплитудой s . При s выше некоторого критического значения и Ω порядка удвоенной собственной частоты ω заданной волновой моды, на границе раздела наблюдались стоячие волны частоты $\Omega/2$. Отметим, что используемый для генерации внутренних волн резонанс Фарадея обеспечивает меньшую чувствительность к внешним возмущениям по сравнению с возбуждением волн плунжерами [Thorpe (1968)]. В качестве рабочих жидкостей использовались керосин-вода, керосин - водный раствор сахара, керосин - водный раствор глицерина, вода – водный раствор NaCl. Плотность жидкостей измерялась пикнометром, кинематическая вязкость - капиллярным вискозиметром ВКЖ-2,

откалиброванным на дистиллированной воде, а поверхностное натяжение оценивалось с помощью метода капиллярных волн. Характеристики жидкостей приведены ниже:

Жидкость	Плотность ρ_1 (г/см ³)	Вязкость ν_1 (сСт)	Плотность ρ_2 (г/см ³)	Вязкость ν_2 (сСт)	Поверхн. натяжение σ (дин/см)
Керосин- вода	0.79	1.6	1.00	1.00	24
Керосин - раствор сахара	0.79	1.6	1.24	13.43	28
Керосин - раствор глицерина	0.79	1.6	1.09	2.76	21
Керосин - раствор тиосульфата	0.79	1.6	1.24	1.3	26
Керосин - водный раствор NaCl	0.79	1.6	1.195	1.2	27
Вода – водный раствор NaCl	1.00	1.00	1.19	1.2	---

В экспериментах с помощью лазерного доплеровского анемометра [Калиниченко, Секерж-Зенькович, Тимофеев (1991)] измерялась индуцированная волновым движением скорость основного течения жидкостей над и под узлами стоячей волны. Волновые профили анализировались на основании материалов кино- и видеосъемки. Исследовались вторая, третья и четвертая волновые моды ($n=2,3,4$) на границе раздела двух жидкостей глубиной $h_{1,2}=15$ и 18 см при амплитуде $s=1.8$ см. При фиксированном значении s вариация частоты Ω обеспечивала изменение высоты H возбуждаемых волн и, в конечном счете, локальной скорости частиц жидкостей.

5.2. Волны Фарадея максимальной высоты

Проведено разделение наблюдаемых поверхностных волн Фарадея на три категории. Поскольку в условиях эксперимента профили волн Фарадея мало отличаются от профилей свободных волн, то были учтены основные свойства последних, известные из теории стоячих нелинейных волн

[Секерж-Зенькович Я.И. (1947)]. По определению, в свободной стоячей волне поверхность жидкости совершает периодические во времени колебания с характерным пространственным распределением ее узлов и пучностей. Пучности стоячей волны неподвижны, а узлы совершают горизонтальные колебания. В рассматриваемых здесь двумерных волнах расстояние между пучностями равно $\lambda_n/2$, а траектории жидких частиц вертикальны вдоль вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны. Профиль волны симметричен относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности.

Волны, профили которых являются наиболее близкими к теоретически предсказываемым профилям свободных стоячих волн, были названы регулярными. Точнее, к **регулярным** волнам Фарадея, были отнесены те волны, профиль которых обладает двумя свойствами: 1) он периодичен во времени; 2) он симметричен относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны.

Волны, у которых нарушено хоть одно из двух перечисленных свойств, но объем колеблющейся жидкости сохраняет связность, были отнесены к **нерегулярным** волнам Фарадея.

Наконец, волны, в которых со свободной поверхности срывались либо отдельные капли жидкости, либо струи, были отнесены к **разрушающимся** волнам Фарадея.

На рис.5-1 для второй и третьей волновых мод представлены зависимости высоты H возбуждаемой волны от частоты Ω колебаний сосуда - резонансные зависимости. При уменьшении частоты Ω высота волн монотонно возрастает, и это происходит до тех пор, пока при некоторой частоте колебаний сосуда волны внезапно не пропадут (направленные вниз стрелки на рис.5-1). Символами RW на оси Ω отмечены частотные диапазоны $20.58 < \Omega_{n=2} < 22.52 \text{ с}^{-1}$ и $26.46 < \Omega_{n=3} < 28.58$

с^{-1} , в которых были зафиксированы регулярные волны второй и третьей волновых мод, соответственно.

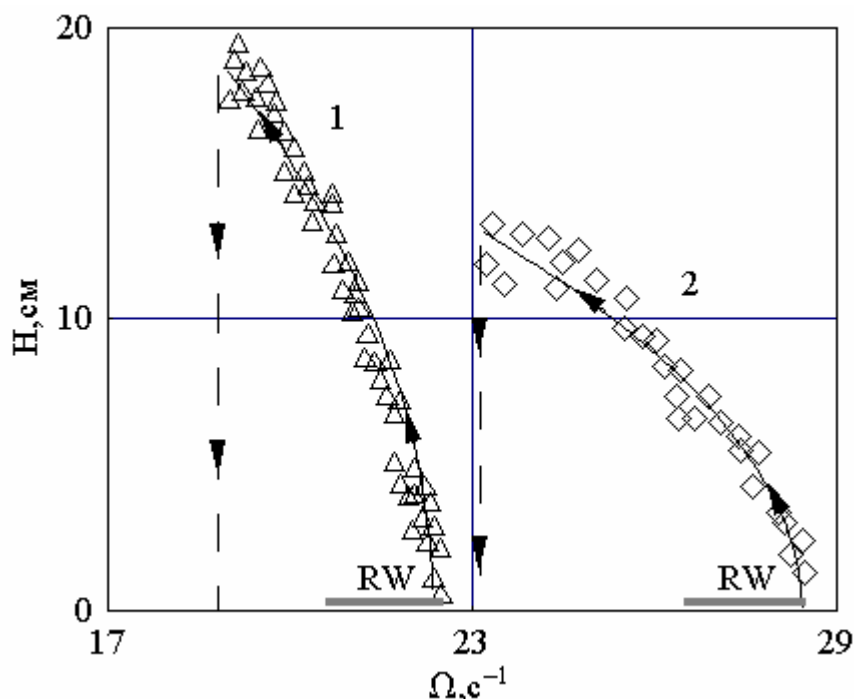


Рис.5-1. Зависимость высоты H волн Фарадея от частоты Ω колебаний сосуда $50 \times 4 \times 40$ см, $h=15$ см, $s=0.25$ см: 1 – вторая мода, $n=2$, $\omega_2=10.85 \text{ с}^{-1}$; 2 – третья мода, $n=3$, $\omega_3=13.55 \text{ с}^{-1}$, RW – частотный диапазон возбуждения регулярных волн

На рис.5-2 в двух столбцах приведены фотографии второй (слева) и третьей (справа) волновых мод в моменты их наибольшего развития для соответствующих значений Ω . Из фотографий видно, что при $\Omega=21.74$ и 27.44 с^{-1} форма волновых профилей (a , $г$) близка к синусоидальной. При меньших значениях Ω гребни волновых профилей сужаются, а подошвы уплощаются ($б$, $д$), причем высота волн увеличивается. Эти изменения профилей предсказываются нелинейной теорией. При еще меньших частотах, $\Omega=20.27$ и 24.17 с^{-1} , высота волн становится еще больше и наблюдается отрыв капель с гребня ($в$, $е$), т.е. наблюдается разрушение волн.

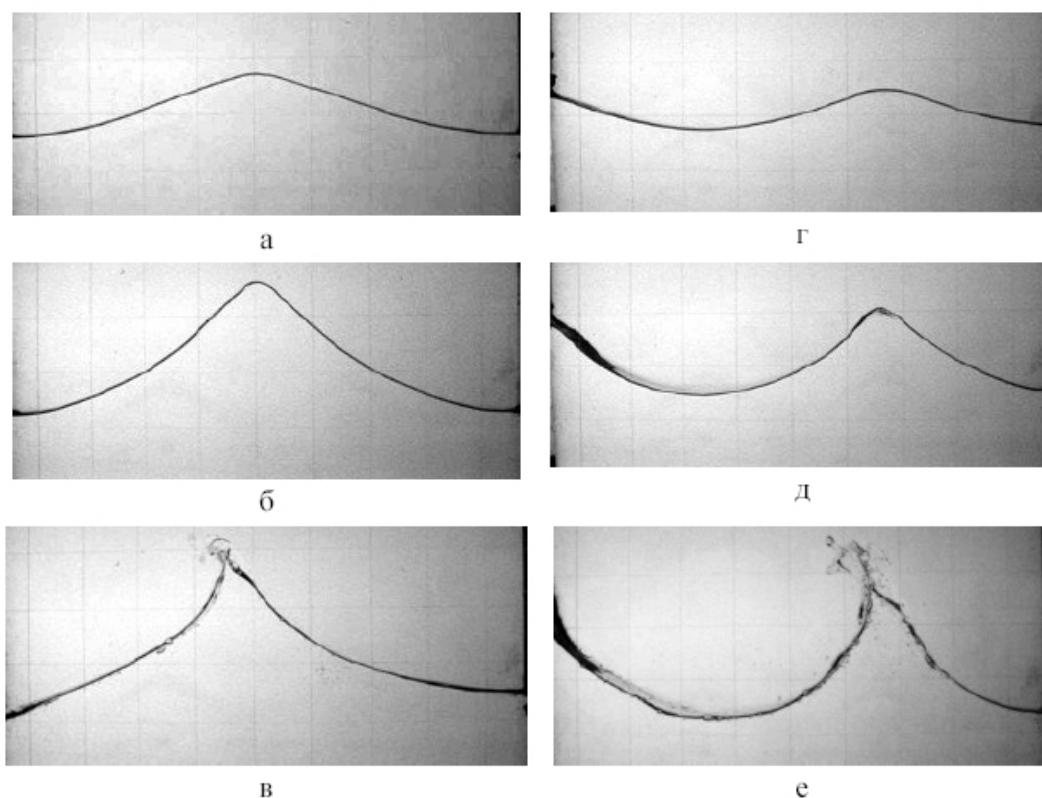


Рис.5-2. Форма профилей второй (а-в) и третьей (г-е) волновых мод в зависимости от частоты: а-е - $\Omega=21.74; 20.74; 20.27; 27.44; 27.18; 24.17 \text{ с}^{-1}$

Различие между профилями регулярных и нерегулярных волн в моменты их наибольшего развития, т.е. в те моменты, когда в процессе колебаний волны достигают наибольшей высоты, иллюстрируется рис.5-3, а и б. На каждой из них для второй волновой моды представлен результат наложения десяти последовательных изображений профилей в указанные моменты через период волны. Изображения профилей на рис.5-3, а и б были получены при безразмерных частотах $p=0.949$ и 0.946 колебаний сосуда, соответственно, где $p=\Omega/(2\omega_2)$. Для этих частот глубина модуляции параметра возбуждения, перегрузка, $\epsilon = (s\Omega^2)/g$ равна 0.108 и 0.107 , соответственно. Полученная на рис.5-3, а тонкая кривая свидетельствует о точной повторяемости формы профиля через период волны. Поскольку профиль симметричен относительно вертикали, проходящей через гребень волны, то данную волну, наблюдаемую при $p=0.949$, следует отнести к категории регулярных волн. «Размытая кривая» на рис.5-3, б

свидетельствует об отсутствии повторяемости формы профиля через период волны. Поэтому волну, наблюдаемую при $p=0.946$, нельзя отнести к категории регулярных волн. Поскольку размытость кривой на рис.5-3,б – небольшая, то можно сделать вывод о сохранении связности жидкого объема и поэтому отнести данную волну к категории нерегулярных (но не разрушающихся) волн.

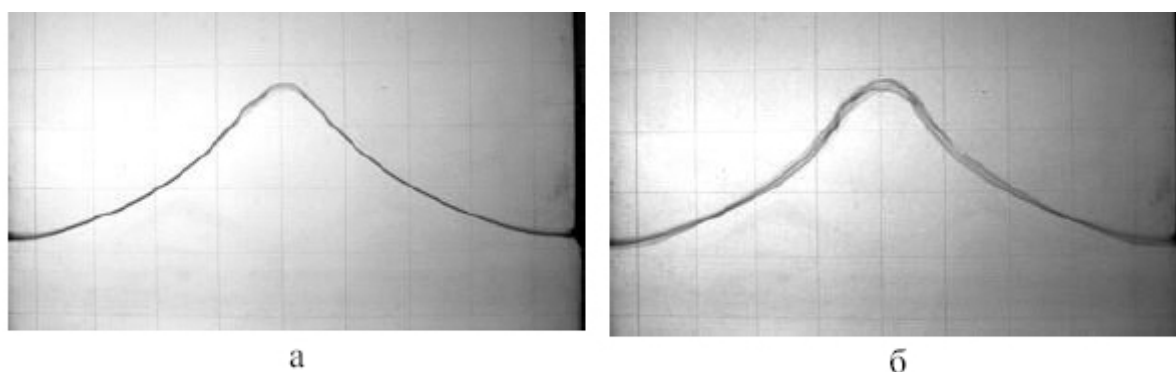


Рис.5-3. Результат наложения десяти последовательных профилей максимального развития второй моды для $h=15$ см, $s=0.25$ см, $\omega_2=10.85$ с⁻¹: а - $p=0.949$, $\Gamma=0.255$; б – 0.946 , 0.259

Для третьей моды крутизна профиля регулярной волны Фарадея максимальной высоты была определена как $\Gamma_m=0.236$ при $p=0.954$ и $\epsilon=0.167$.

Полученное значение максимальной крутизны для второй моды $\Gamma_m=0.255$ оказалось больше полученных в [Jiang et al.(1996)] и в [Schultz et al. (1998)] величин $\Gamma_m=0.216$ ($\epsilon=0.163$), $0.154-0.224$ ($\epsilon=0.054-0.079$), соответственно.

На рис.5-4а и б показано изменение волновых профилей в течение интервала $T/4$, где $T=4\pi/\Omega$ - период волны. Каждая фигура получена при наложении последовательных изображений профилей через интервалы времени $\Delta t=T/18$ и $T/19$, соответственно. Моменту $t=0$ соответствует волна

с почти свободной горизонтальной поверхностью, а $t=T/4$ - волна наибольшего развития, т.е. ее гребень имеет наибольшую высоту.

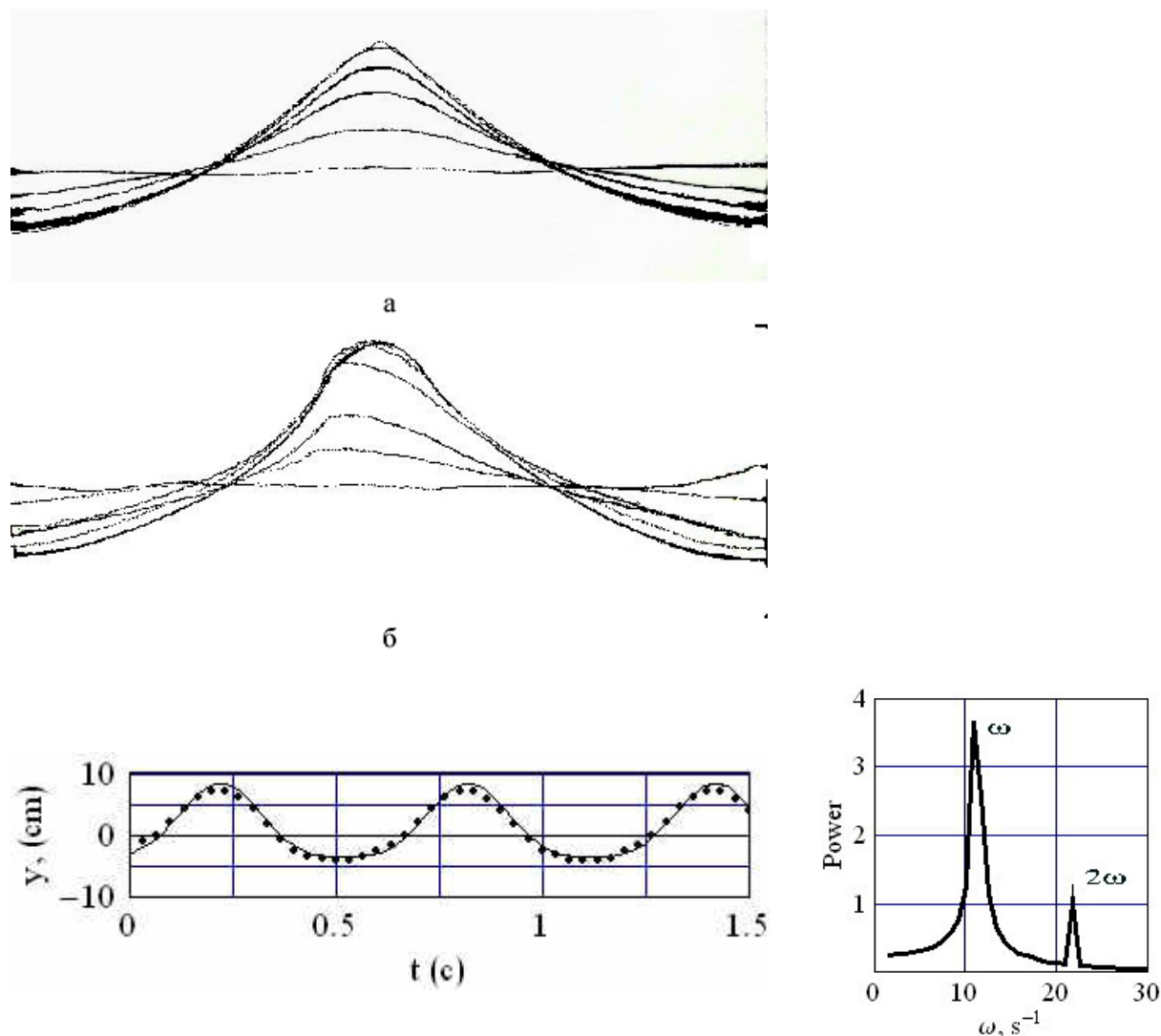


Рис.5-4. Изменение волнового профиля в течение интервала $T/4$: а – регулярная волна, шаг по времени $\Delta t=T/18$, $T=0.600$ с, $p=0.965$; б – нерегулярная волна, $\Delta t=T/19$, $T=0.612$ с, $p=0.946$. Хронограмма (в) и частотный спектр (г) смещения свободной поверхности жидкости в центре сосуда, $T=0.600$ с, $\omega=2\pi/T$

Для регулярных волн (рис.5-4,а) характерна симметрия профиля в пространстве относительно вертикали, проходящей через пучность волны. Кроме того, анализ данных эксперимента показал, что периодическое изменение формы профиля этих волн во времени характеризуется

симметрией в пределах каждого периода относительно момента $t=T/2$. Для нерегулярных волн (рис.5-4,б) присуще нарушение как пространственной симметрии, так и периодичности волн.

На рис.5-4в представлена хронограмма смещения точки свободной поверхности жидкости (центр сосуда) в случае предельной регулярной волны. Соответствующий частотный спектр (Γ) этой волны имеет два пика на частотах 10.87 и 21.74 с^{-1} , соответствующих основной и второй гармоникам. Кривая на рис. 5-4в соответствует расчету по формулам (2.1).

На рис. 5-5 проводится сравнение волновых профилей регулярной волны, полученных в эксперименте и рассчитанных в рамках теоретической модели параметрического резонанса в однородной жидкости [Нестеров (1969); Калиниченко и др. (1995)] – соотношение (2.1).

На рис.5-6 приведены резонансные зависимости для регулярных волн в безразмерных переменных (p, Γ). Из них видно, что для воды и керосина регулярные волны второй волновых моды наблюдаются в диапазоне безразмерных частот колебаний сосуда $0.944 \leq p \leq 1.037$, и максимальная крутизна волн $\Gamma_m = 0.255$ соответствует $p_m = 0.944$. Несмотря на отличие в поверхностном натяжении для воды и керосина, имеем практически одно значение предельной крутизны.

На основании приведенных данных можно сделать вывод, что в случае основного резонанса в сосуде с размерами $50 \times 4 \times 40$ см при $h/\lambda = 0.3$ максимальная крутизна Γ_m второй и третьей волновых мод Фарадея оценивается величинами 0.255 и 0.236, соответственно.

Остановимся на вопросе о предельном угле φ_m , который был предсказан в [Penney, Price (1952); Taylor (1953)] как $\varphi_m = 90^\circ$. Поскольку все наблюдавшиеся в эксперименте профили были гладкими, то по аналогии с [Penney, Price (1952); Taylor (1953)] был выполнен следующий предельный переход.

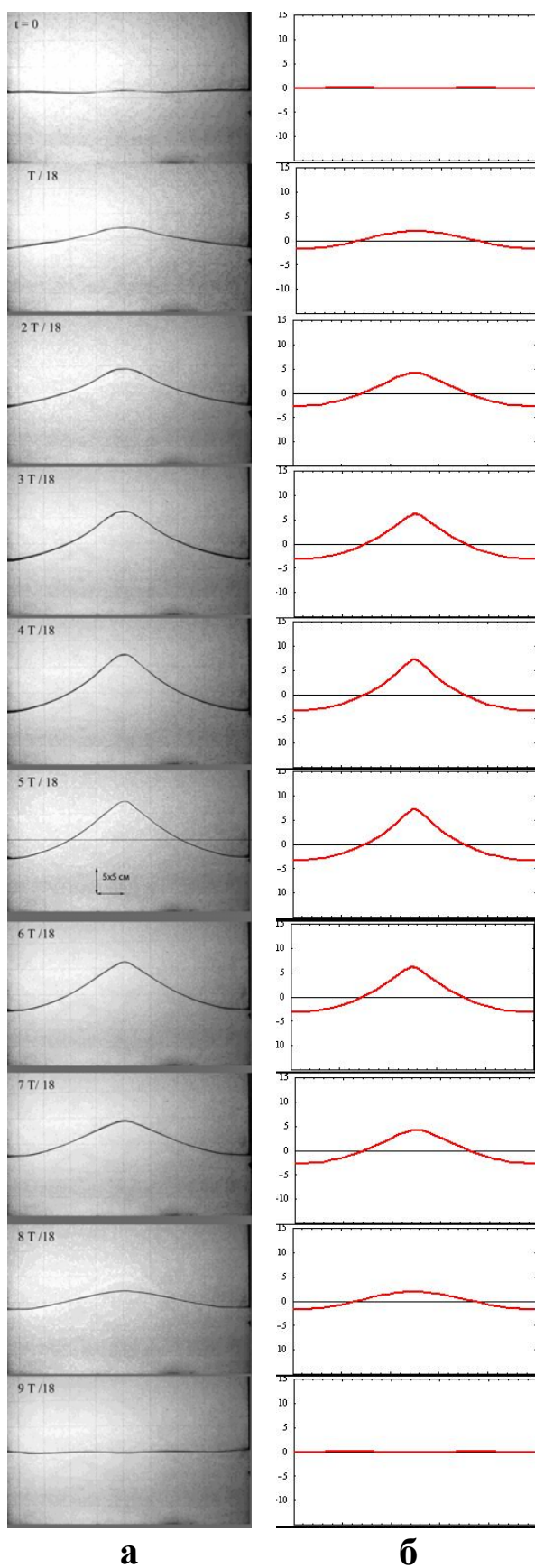


Рис.5-5. Покадровое представление профиля регулярной волны в течение интервала $T/2$; шаг по времени $\Delta t = T/18$, $T=0.600$ с, $p=0.965$, $H=10.7$ см: а – эксперимент; б – расчет по (2.1)

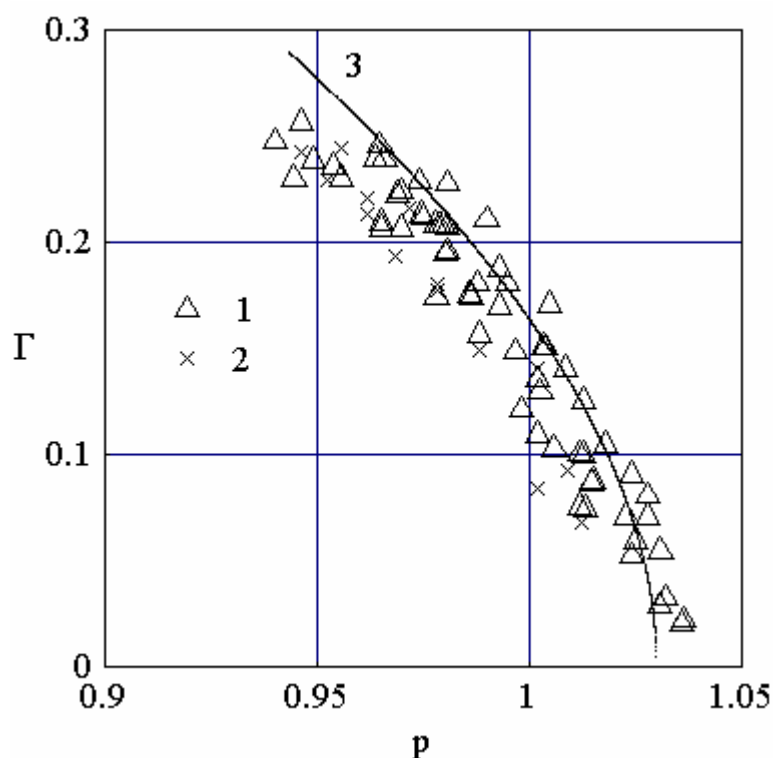


Рис. 5-6. Зависимость крутизны Γ регулярных волн Фарадея от безразмерной частоты p колебаний сосуда $50 \times 4 \times 40$ см, $h=15$ см, $n=2$, $s=0.25$ см: 1, 2 – вода, керосин; 3 – расчет

Рассматривалась последовательность профилей максимального развития волн, крутизна Γ которых увеличивалась с уменьшением p до значения $\Gamma_m=0.255$, отвечающего максимальной крутизне регулярных волн. Для каждого значения Γ определялся угол $\varphi(\Gamma)$ между касательными, проведенными в точках перегиба гребня, расположенными симметрично относительно вертикали, проходящей через пучность волны. На рис.5-7 приведена зависимость $\varphi=\varphi(\Gamma)$, из которой видно, что предельной крутизне $\Gamma_m=0.255$ соответствует угол $\varphi_m \approx 80^\circ$, причем при дальнейшем увеличении Γ этот угол будет уменьшаться. Таким образом, измеренное значение $\varphi_m \approx 80^\circ$ оказалось значительно меньше величины, приведенной в [Penney, Price (1952); Taylor (1953)].

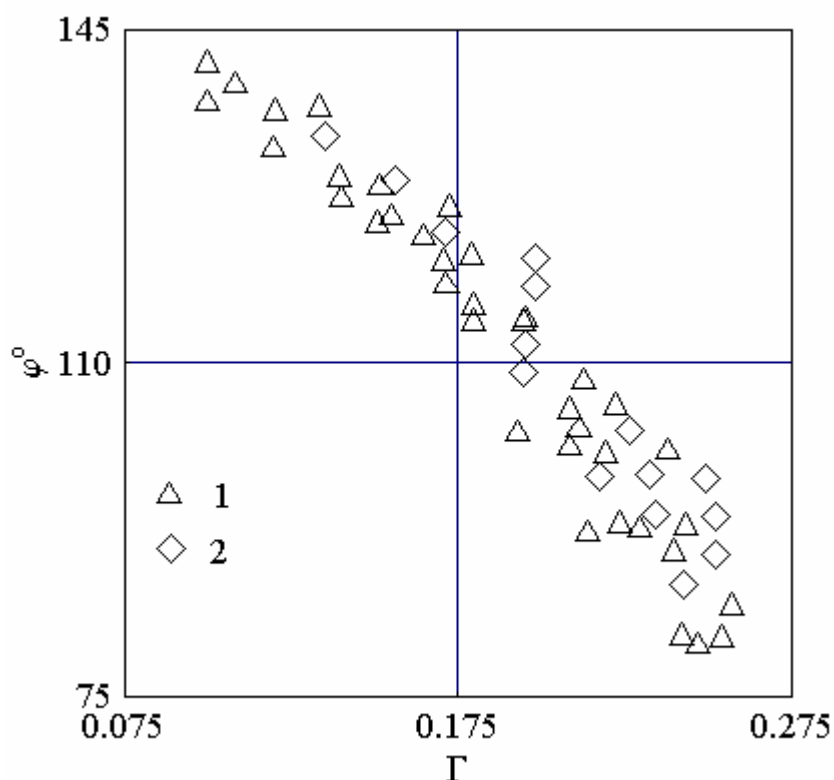


Рис.5-7. Угол между касательными, проведенными в точках перегиба гребня волны, для сосуда $50 \times 4 \times 40$ см, $s=0.25$ см: 1, 2 – $n=2,3$ (вода)

У нерегулярных и разрушающихся волн форма профиля, вообще говоря, стохастическая. Однако анализ большого числа фотографий различных профилей максимальной высоты таких волн в частотном диапазоне $p < 0.944$ показал, что среди них можно выделить отдельные реализации, в которых волновые профили похожи на профили волн регулярных: они пространственно симметричные и нет срыва жидкости с гребня волны. На рис. 5-8 (а,б) приведены указанные профили максимальной высоты, выбранные из серий наблюдаемых профилей нерегулярных и разрушающихся волн, соответственно. Их крутизны $\Gamma_m = 0.288$ для волн нерегулярных и 0.429 для волн разрушающихся.

Все представленные выше результаты были получены для волн Фарадея на свободной поверхности воды при глубине $h=15$ см. Так как при этом $h/\lambda=0.3$, то данный случай близок к случаю жидкости бесконечной глубины. Уменьшение глубины в значительной мере влияет на

максимальную крутизну регулярных волн Γ_m . Это видно из рис.5-9, на котором представлены зависимости Γ_m от h/λ для второй и третьей волновых мод.

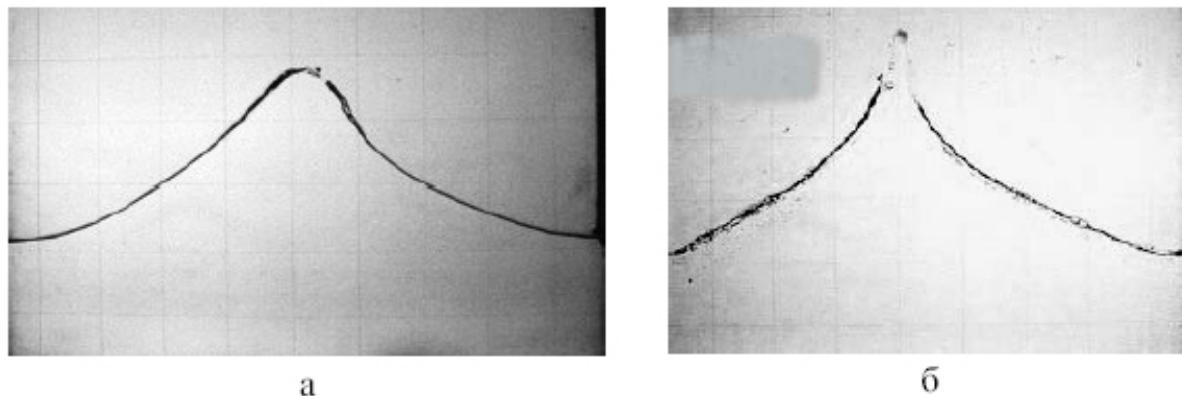


Рис.5-8. Самые высокие профили, близкие по форме к профилям регулярных волн: (а) нерегулярная волна $p=0.946$, $\Gamma=0.288$; (б) разрушающаяся волна $p=0.877$, $\Gamma=0.429$

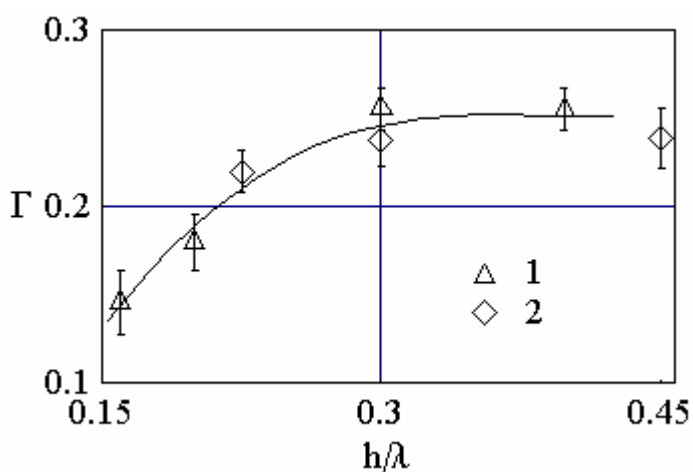


Рис.5-9 Зависимость предельной крутизны Γ регулярных волн Фарадея от безразмерной глубины h/λ жидкости для сосуда $50 \times 4 \times 40$ см, $s=0.25$ см: 1, 2 – $n=2,3$ (вода)

Для оценки возможного влияния поверхностного натяжения жидкости на максимальную крутизну исследуемых волн Фарадея была выполнена серия экспериментов, в которых вместо воды использовался керосин (поверхностное натяжение 30 дин/см). Для второй моды ($n=2$, $\lambda=50$ см) при $h=15$ см, $s=0.25$ см предельная крутизна оказалась $\Gamma_m=0.242$

при $p_m = 0.946$. Это значение с точностью до 4% совпадает с величиной, полученной для воды (71 дин/см). Таким образом, у достаточно длинных, как в данном эксперименте, волн максимальная крутизна мало чувствительна к изменению поверхностного натяжения.

5.3. Разрушение волн Фарадея и формирование струйного всплеска

Наблюдаемые волны Фарадея могут быть разделены на три категории [Калиниченко, Секерж-Зенькович (2007)] – регулярные, нерегулярные и разрушающие волны. В соответствии с линейной теорией устойчивости волн Фарадея [Benjamin, Ursell (1954); Болотин (1956)] область неустойчивости свободной поверхности жидкости определяется следующими безразмерными параметрами - расстройкой частоты $p = (2\omega_n / \Omega)^2$ и параметром внешнего воздействия $q = 2\kappa_n s \operatorname{th} \kappa_n h$. Эти же параметры, являясь мерой внешнего воздействия, могут использоваться для описания регулярных, нерегулярных и разрушающихся волн Фарадея. Расположение трех наблюдаемых в эксперименте категорий волн на плоскости (p, q) показано на рис.5-10.

Детальное описание регулярных волн приведено в разд. 4.2, поэтому ниже рассматриваются волны нерегулярные и разрушающиеся.

Среди **нерегулярных волн** (рис.5-10, область 2), занимающих достаточно узкую область между регулярными и разрушающимися волнами, могут быть выделены волны с небольшой лункой или углублением в гребне волны, а также периодический триплет. При крутизне $\Gamma \sim 0.260$ в экспериментах наблюдались стоячие волны с плоским гребнем или гребни с небольшим углублением (лункой), как показано на рис.5-11. Такая форма гребня, а также нарушение временной симметрии, скорее всего, являются результатом взаимодействия основной и второй гармоник [Jiang, Perlin, Schultz (1998)].

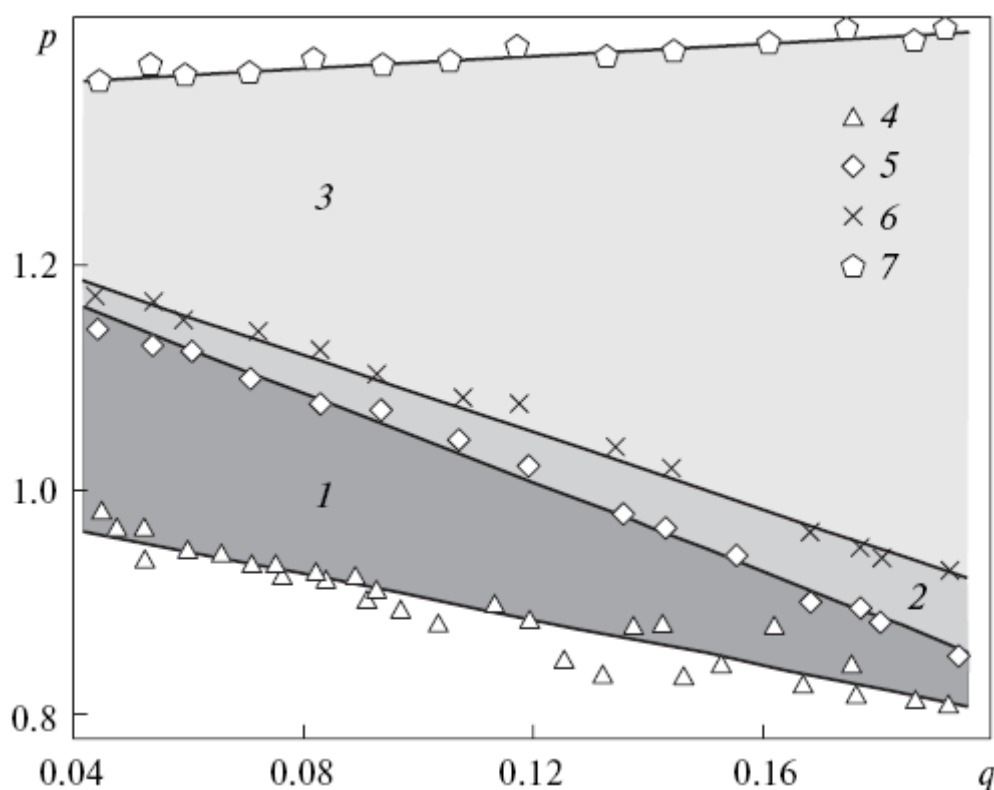


Рис.5-10. Расположение трех категорий волн на (p, q) -плоскости: 1-регулярные; 2 – нерегулярные; 3 – разрушающиеся волны; 4-7 – экспериментальные точки, определяющие границы трех категорий волн ($n=2,3$), $h=15$ см (вода)

Режим периодического триплета можно также отнести к категории нерегулярных волн. Данный режим характеризуется тремя периодически повторяющимися волновыми профилями A , B и C - периодический триплет, как показано на рис.5-12,а. Для профиля A характерна наибольшая крутизна и острый угол при гребне. В случае профиля B на гребне имеется лунка, или гребень является плоским. Профиль C имеет скругленный гребень. Волновой профиль A с заостренным гребнем вновь появляется после профиля C – тем самым формируется повторяющийся цикл, период которого равен трем волновым периодам $3T$. Это видно из рис.5-12,б, на котором представлена хронограмма смещения точки свободной поверхности жидкости (центр сосуда). В режиме периодического триплета амплитудный спектр нерегулярной волны имеет три сильно выраженных

пики на частотах 11.68, 23.11 и 4.12 с^{-1} , соответствующих основной гармонике, второй гармонике, а также $1/3$ – субгармонике - рис.5-12,в. Хотя режим периодического триплета наблюдался другими авторами и подробно описан в [Jiang, Perlin, Schultz (1998); Longuet-Higgins, Drazen (2002)], отсутствует какая-либо физическая модель данного явления.

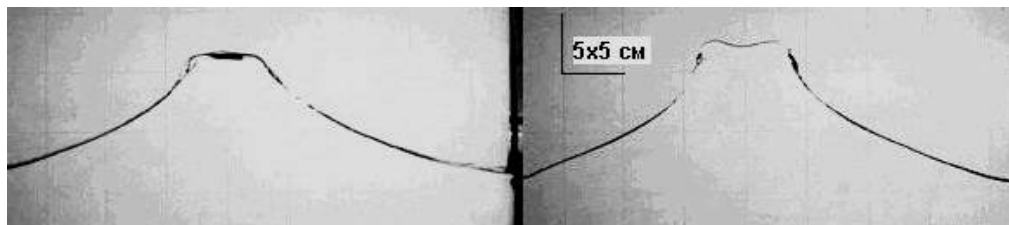


Рис.5-11. Нерегулярные волны с «плоским» гребнем и углублением (лункой) на гребне; $p=1.042$, $q=0.110$ ($s=0.45$ см, $T=0.590$ с, $\Gamma \sim 0.260$)

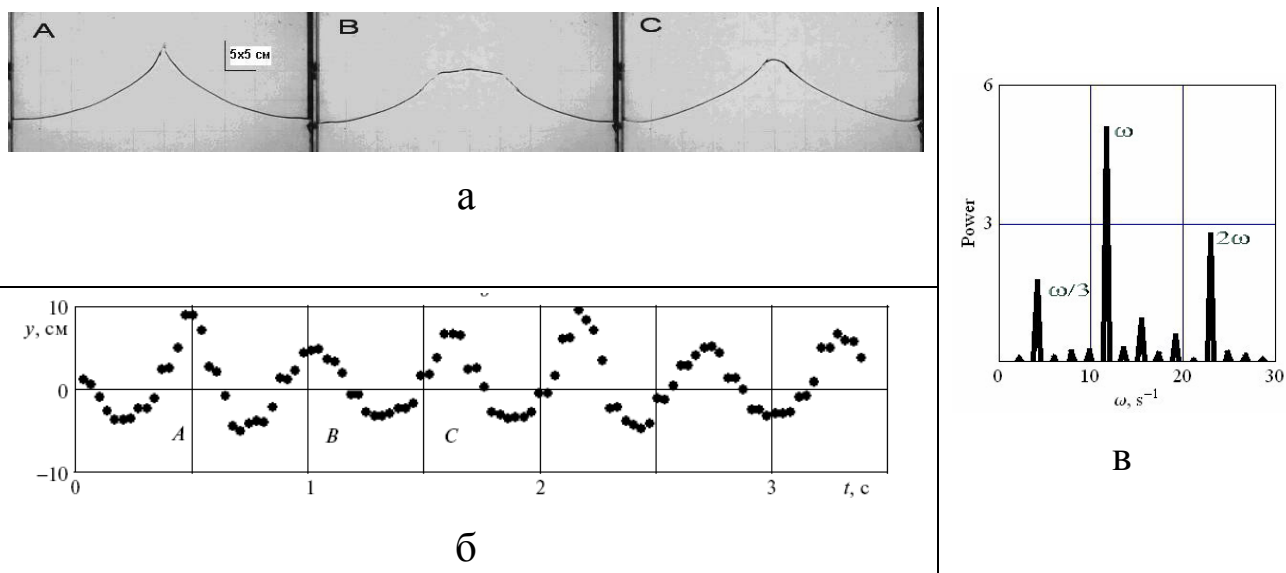


Рис.5-12. Режим периодического триплета в случае нерегулярных волн Фарадея для $p=0.902$, $q=0.180$ ($s=0.75$ см): а – волновые профили A , B и C с временным промежутком между кадрами, равным периоду волны $T=0.550$ с; б - хронограмма смещения свободной поверхности жидкости в центре сосуда; в – частотный спектр смещения жидкости в центре сосуда, $\omega=2\pi/T$

Разрушающиеся волны Фарадея (область 3 на рис.5-10) занимают большую часть (p,q) -плоскости и характеризуются переходом от односвязной к многосвязной свободной поверхности. Этим волнам также свойственен периодический триплет, описываемый тремя периодически повторяющимися волновыми профилями A , B и C , как

показано на рис.5-13. Волновой профиль A характеризуется наибольшей высотой, крутизной и выбросом струи. Профиль B имеет сглаженный гребень, по краям которого также наблюдаются два выброса. Увеличение параметров возбуждения (p, q) приводит к интенсификации боковых выбросов для составляющей B триплета, причем в составляющей C отсутствуют какие-либо признаки разрушения. Из визуальных наблюдений следует, что именно составляющая A триплета определяет такие внешние проявления разрушения волн как струйный выброс с последующим отрывом фрагментов жидкости из волнового гребня.

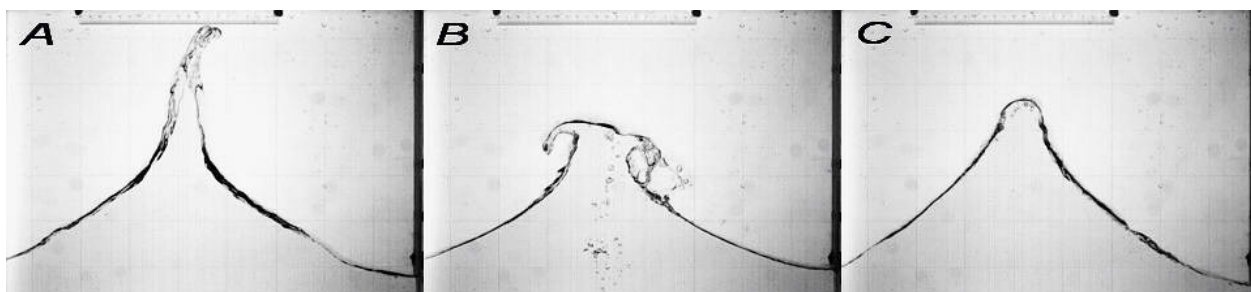


Рис.5-13. Режим периодического триплета в случае разрушающихся волн Фарадея: $p=1.146$, $q=0.180$

Детальный анализ процесса разрушения составляющей A показывает, что имеются два принципиально различных механизма образования струйных выбросов. Прежде всего, отметим схлопывание каверны на стадии формирования гребня, когда в случае второй моды центральная часть жидкости перемещается вверх, рис.5-14,а. Схлопывание каверны на растущем гребне волны приводит к формированию высокоскоростной струи; этот процесс обладает определенной периодичностью $3T$ и достаточно четко локализован (центральная часть волнового гребня). Вторым источником формирования струйных выбросов - коллапсирующая каверна во впадине волны. Эта каверна образуется в результате падения столбика жидкости или крупных капель на свободную поверхность - рис.5-14,б. Отметим, что соударяющиеся со свободной поверхностью фрагменты жидкости формируются на предыдущей стадии растущего гребня (рис.5-14,а).

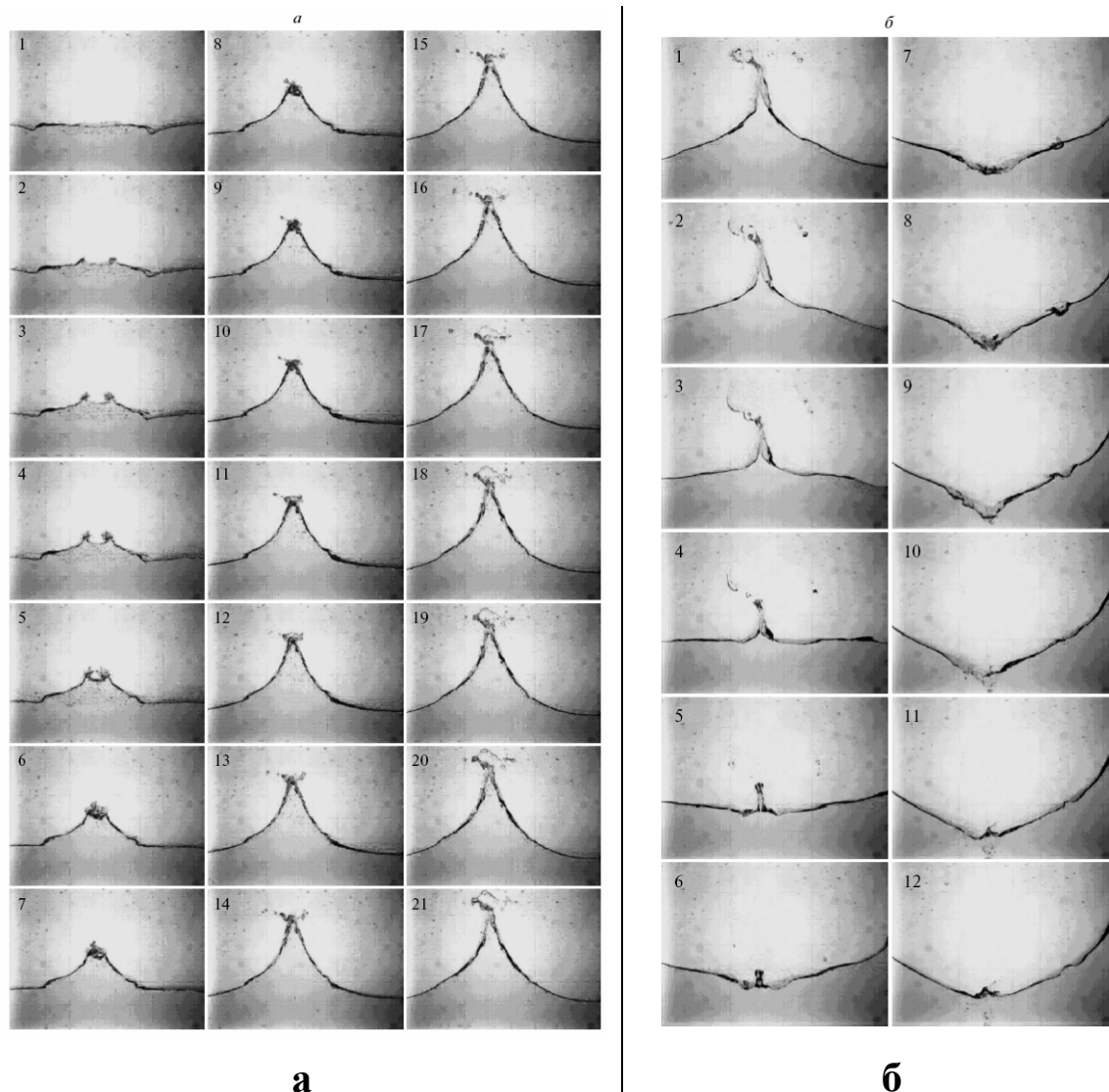


Рис.5-14. Последовательность кадров, отображающих детали разрушения волн Фарадея: а - зарождение, развитие и схлопывание каверны на стадии формирования гребня; б - переход от гребня к впадине с образованием небольшой струи при схлопывании каверны, для $p=1.109$, $q=0.180$, временной интервал между кадрами 0.01с (а), 0.03с (б)

Как следует из рис.5-14,а, при формировании гребня из начального горизонтального положения свободной поверхности жидкости, динамика каверны четко прослеживается, начиная с кадра 2. Для количественного описания процесса схлопывания использовались длина l и глубина d каверны. В качестве начальной длины l_0 принят горизонтальный размер той каверны, которая идентифицировалась по материалам скоростной видеосъемки. Измерения l и d проводились относительно подвижной

свободной поверхности жидкости, что позволило исключить влияние волнового движения жидкости на оценки горизонтальной и вертикальной составляющих скорости схлопывания. Длина каверны монотонно уменьшается (кадры 2-6). Однако глубина каверны сначала достигает максимального значения d_o (4), уменьшаясь затем до нуля в момент t_0 схлопывания каверны (10, время $t_0=0.1$ с). Наличие максимальной глубины d_o свидетельствует о прекращении углубления каверны и начале ее коллапса. Это, в свою очередь, означает, что вертикальная составляющая скорости основания впадины изменяет знак. Принимая во внимание монотонное уменьшение l , можно говорить о весьма сложной картине течения жидкости вблизи границы каверны. Отметим, что в момент достижения максимальной глубины впадина приобретает полуцилиндрическую форму. Схлопывание каверны сопровождается формированием струйного выброса из гребня волны (11-14). В дальнейшем происходит распад этого струйного выброса на капли и достаточно крупные фрагменты жидкости (15-21). Следовательно, весь процесс схлопывания (продолжительность 70-100 мс) можно разделить на две стадии: 1) зарождение и развитие каверны на формирующемся гребне волны над невозмущенным уровнем жидкости (40-60 мс), и 2) схлопывание или коллапс каверны (40-50 мс).

Процесс формирования впадины волны показан на рис.5-14,б. Здесь, при движении вниз центральной части жидкости (кадры 1-4) формируется столбик жидкости (5-6), соударяющийся со свободной поверхностью, в результате чего формируется каверна (7-9). Каверна начинает схлопываться, при этом ее глубина быстро уменьшается (10). Коллапс этой каверны приводит к формированию небольшой струи из основания впадины волны (11-12). В этом случае струйный выброс полностью зависит от предыдущей стадии движения жидкости (рис.5-14,а) и менее выражен. Ниже рассматривается только коллапсирующая каверна на стадии

формирования гребня, а также анализ данных ограничивается стадией, предшествующей струеобразованию.

Детальный анализ процесса схлопывания каверны (рис.5-15) показал, что через 0.01 секунды после момента, соответствующего максимальной глубине $d_o=1.3$ см (кадр 1), каверна принимает диэдрическую форму (3) с линейным углом порядка 112° . Затем дно диэдрической поверхности округляется (4), и до закрытия каверны (5 и 6) каких-либо признаков струеобразования не наблюдается. Первые признаки струйного выброса прослеживаются на кадрах 7 и 8.

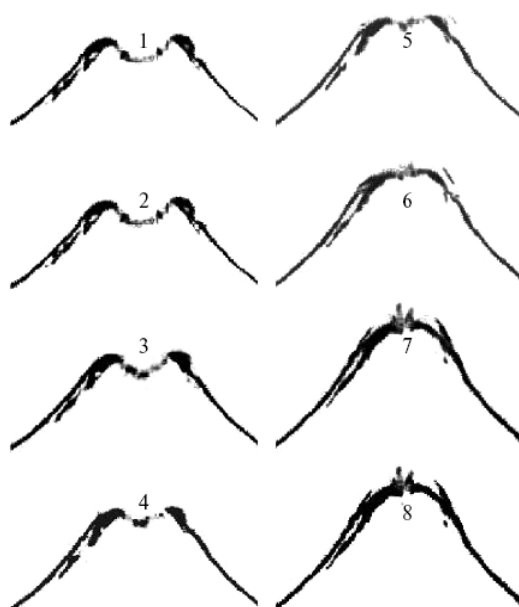


Рис.5-15. Схлопывание каверны на формирующемся гребне для $p=0.941$, $q=0.180$, максимальная глубина каверны $d_o=1.3$ см, поле зрения 5×5 см; временной интервал между кадрами 0.005с

Описанная выше последовательность событий общая для разрушающихся волн Фарадея (составляющая A периодического триплета) на свободной поверхности воды и водного раствора сахара в прямоугольном сосуде. Зарождение, развитие и схлопывание каверны происходит на формирующемся (растущем) гребне волны после того, как свободная поверхность жидкости пересекает начальный горизонтальный уровень.

На рис. 5-16 представлены данные об изменении глубина $d(t)$ и длины $l(t)$ каверны. Видно, что глубина растет, достигает максимума $d_o=1.11$ см, а затем уменьшается до нуля в момент схлопывания, тогда как длина монотонно уменьшается, начиная с $l_o=7.7$ см. Весь процесс коллапсирования каверны длится 80-90 мс. Сплошные кривые на рисунке – результат аппроксимации данных эксперимента полиномом третьей степени (а) и показательной функцией (б).

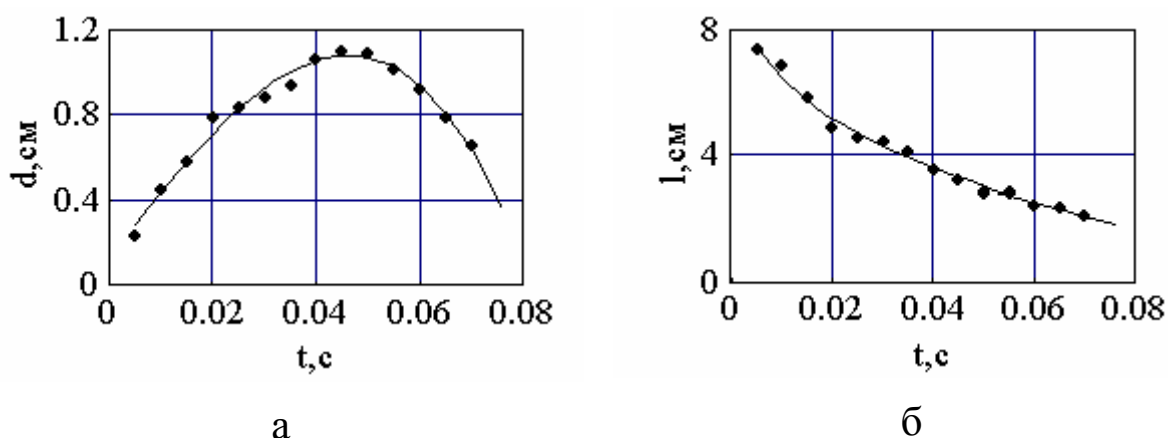


Рис.5-16. Временные зависимости глубины (а) и длины каверны; $p=0.942$, $q=0.180$ (период волны $T=0.562$ с)

Изменение расстройки частоты p (периода волновых движений жидкости) в пределах от 0.942 до 1.110 приводит к определенным вариациям в значениях максимальной глубины каверны $d_o \sim 1-2.5$ см и ее начальной длины $l_o \sim 4-8$ см, как следует из рис. 5-17. Несмотря на значительный разброс данных для различных режимов параметрического возбуждения, прослеживается общая закономерность в изменении размеров каверны – заглубление до максимального значения d_o с последующим уменьшением на стадии коллапсирования при монотонном уменьшении горизонтального размера, начиная с l_o . Время существования каверны, начиная с ее появления до закрытия, для приведенных на рисунке данных оценивается как $t_o \sim 80-100$ мс.

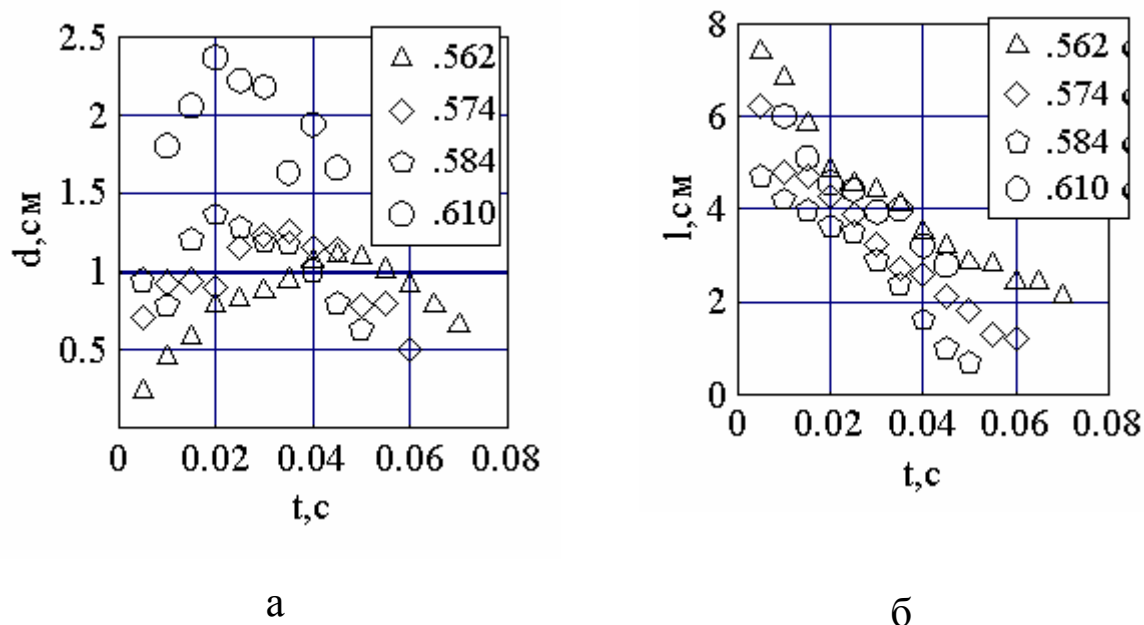


Рис.5-17. Размерные временные зависимости глубины (а) и длины (б) каверны от времени от момента появления каверны до ее схлопывания для различных режимов параметрического возбуждения; вода, $q=0.18$, $p=0.942$, 0.983, 1.017 и 1.110 (соответствующий период волны $T=0.562$, 0.574, 0.584 и 0.610 с)

Представление данных становится более регулярным в безразмерных координатах, если рассматривать зависимости безразмерных глубины d/d_0 и длины l/l_0 каверны от безразмерного времени $t_1 = (t_0 - t)/t_0$ - рис. 5-18. Видно, что все экспериментальные данные для воды и водного раствора сахара на стадии схлопывания могут быть аппроксимированы функциями

$$\begin{pmatrix} l/l_0 \\ d/d_0 \end{pmatrix} \sim t_1^{2/3}. \quad (5.1)$$

Показатель степени $2/3$ отражает общие закономерности, присущие задачам с коническим углублением на свободной поверхности жидкости [Cooke (2002); Zeff et al. (2000); Duchemin et al. (2002); Eggers et al. (2007)], в которых анализировалась автомодельность коллапса каверны. Автомодельность задач подобного рода отмечена в [Борисова, Коряков, Мусеев (1959)] и соответствует балансу между поверхностными силами и

силами инерции. В случае коллапсирующей каверны на формирующемся гребне волны эффектами вязкости можно пренебречь - см. данные для воды и раствора сахара на рис.5-16. Отметим, что показатель $2/3$ можно получить из простых соображений размерности, если предположить зависимость пространственного масштаба l^* каверны – глубины или длины – от плотности жидкости ρ , поверхностного натяжения σ и времени t . Используя соотношение $l^* \sim \rho^\alpha \sigma^\beta t^\gamma$, и приравнивая размерности в правой и левой частях, получим $\alpha=1/3$, $\beta=-1/3$ и $\gamma=2/3$.

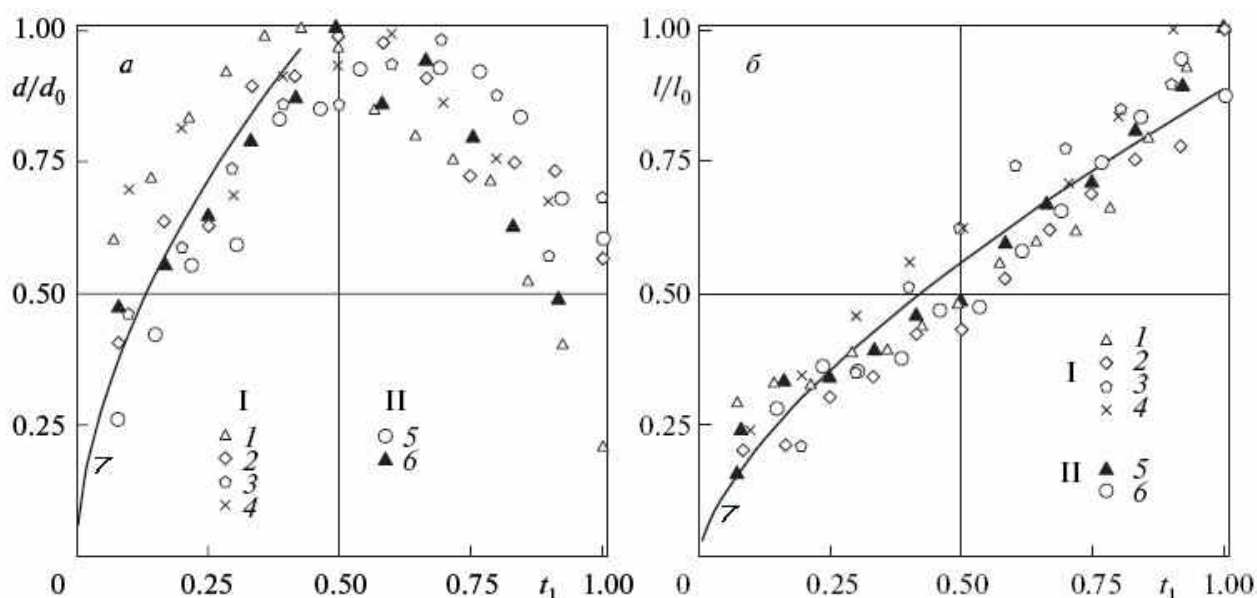


Рис.5-18. Зависимость глубины (а) и длины (б) каверны от времени на интервале от появления каверны $t_1=1$ до ее схлопывания $t_1=0$; $q=0.18$, 1-6 - $p=0.942, 0.983, 1.017, 1.110$ и $1.010, 1.080$; I и II – вода и водный раствор сахара; 7 - функциональная зависимость $t_1^{2/3}$

Используя данные о динамике каверны, можно оценить скорости частиц жидкости в чисто волновом движении и в коллапсирующей каверне. Максимальная волновая скорость (горизонтальная или вертикальная компоненты) частиц свободной поверхности жидкости составляет величину порядка $H\omega/2 \sim 90$ см/с. Средняя величина горизонтальной или вертикальной составляющей скорости схлопывания каверны по данным рис. 5-17 имеет тот же порядок величины (50-150 см/с). Однако в момент

схлопывания каверны имеется скачок скорости (около 400 см/с), и соответствующая оценка для вертикального ускорения дает величину порядка 30-40g.

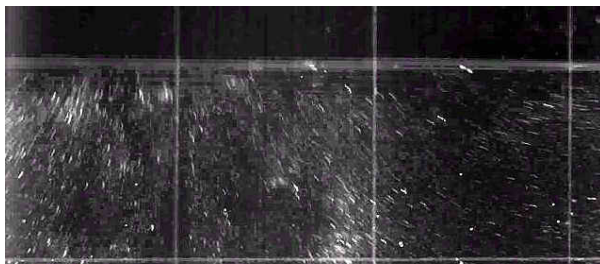
Исследовалось поле скоростей частиц жидкости в случае разрушающихся волн Фарадея. Для этого использовались возможности высокоскоростной камеры VS FAST (100-500 к/с) - изменение и контроль времени экспозиции видеокadra τ при заданной скорости съемки. Это позволило количественно оценить скорости частиц-трассеров (частицы алюминиевой пудры среднего линейного размера 20-30 мкм) по длине трека отдельной частицы за время экспозиции с последующей компьютерной обработкой в среде GetData Graph Digitizer 2.22. Разрешение при компьютерной обработке видеоизображения составляло 0.15 мм/пиксель.

Тестирование метода проведено на регулярной волне крутизны $\Gamma_m = 0.052$ при частотной расстройке $p = 0.851$ и параметре внешнего воздействия $q = 0.18$. Скорость видеосъемки была выбрана равной 50 к/с при экспозиции отдельного кадра 19.99 мс. На рис. 5-19,а представлен видеокادر, соответствующий прохождению свободной поверхности жидкости невозмущенного горизонтального уровня. По результатам обработки треков частиц-трассеров построено поле скоростей – рис. 5-19,б; максимальная вертикальная составляющая скорости равна 14 см/с ($x = 24.1$ см, $y = -2.8$ см).

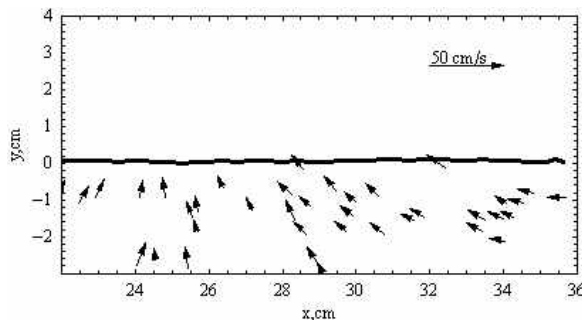
В рамках теоретической модели волн Фарадея (см. 2.2) скорости частиц жидкости определяются как

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, y, t) &= H \frac{\Omega}{2} \frac{\text{ch} \kappa(y+h)}{2 \text{sh} \kappa h} \sin \kappa x \cos \psi - H^2 \kappa \frac{\Omega}{2} \frac{\sin 2 \kappa x}{16 \text{sh}^2 \kappa h} \sin 2 \psi + \\ &- \frac{3}{32} H^2 \kappa \frac{\Omega}{2} \frac{\text{ch} 2 \kappa(y+h)}{\text{sh}^4 \kappa h} \sin 2 \kappa x \sin 2 \psi, \\ v(x, y, t) &= -H \frac{\Omega}{2} \frac{\text{ch} \kappa(y+h)}{2 \text{sh} \kappa h} \cos \kappa x \sin \psi - H^2 \kappa \frac{\Omega}{2} \frac{\text{sh} 2 \kappa(y+h)}{16 \text{sh}^2 \kappa h} \sin 2 \kappa x \sin 2 \psi - \\ &- \frac{3}{32} H^2 \kappa \frac{\Omega}{2} \frac{\text{sh} 2 \kappa(y+h)}{\text{sh}^4 \kappa h} \cos 2 \kappa x \sin 2 \psi. \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

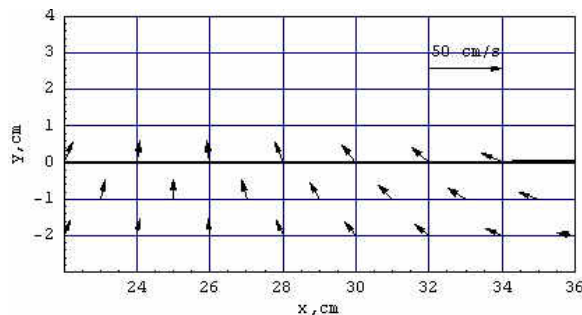
Рассчитанное по (5.2) поле скоростей частиц жидкости представлено на рис. 5-19, в. В точке ($x=24.9$ см, $y=-2.0$ см) вертикальная составляющая скорости имеет значение 15.2 см/с.



а



б



в

Рис.5-19. Поле скоростей частиц жидкости в случае второй моды регулярной волны $H=2.6$ см; $T=0.534$ с; $h=15$ см; $s=0.75$ см; $p=0.85$, $q=0.18$: а – видеокадр, соответствующий моменту прохождения свободной поверхности горизонтального уровня, экспозиция 19.99 мс (640×480); б – поле скоростей, полученное при обработке треков частиц трассеров; в – рассчитанное поле скоростей

Неплохое соответствие результатов измерений и расчета поля скоростей на рис.5-19 позволило использовать метод частиц-трассеров для качественного и количественного описания разрушающихся волн Фарадея.

На рис. 5-20 представлено поле скоростей частиц жидкости в случае составляющей A триплета второй моды разрушающейся волны при $p=0.976$, $q=0.18$, причем в столбцах a и b приведены видеокадры по динамике каверны и измеренное по трекам поле скоростей, а в столбце $в$ рассчитанные волновые профили и поле скоростей при $H=16$ см. Эксперимент и теоретическая модель дают приблизительно одинаковые максимальные значения модуля скорости частиц жидкости на свободной поверхности жидкости 100-120 см/с. Однако, анализ данных рис. 5-20,б показывает, что в пределах точности эксперимента векторы скорости частиц жидкости на поверхности каверны направлены по нормали к этой поверхности. Именно это обстоятельство свидетельствует о кумулятивном характере процесса схлопывания каверны. Следует отметить, что кумулятивный эффект присущ только составляющей A периодического триплета - рисунки 5-20 и 5-21. Для составляющих B и C условия генерации кумулятивной струи отсутствуют – рисунки 5-22 и 5-23. Для составляющей B на рис. 5-22 характерно формирование вихреподобной структуры на боковой поверхности растущего гребня. Наиболее «спокойной» является составляющая C , для которой поле скоростей напоминает соответствующую картину течения в регулярной волне – ср. рисунки 5-20 и 5-23.

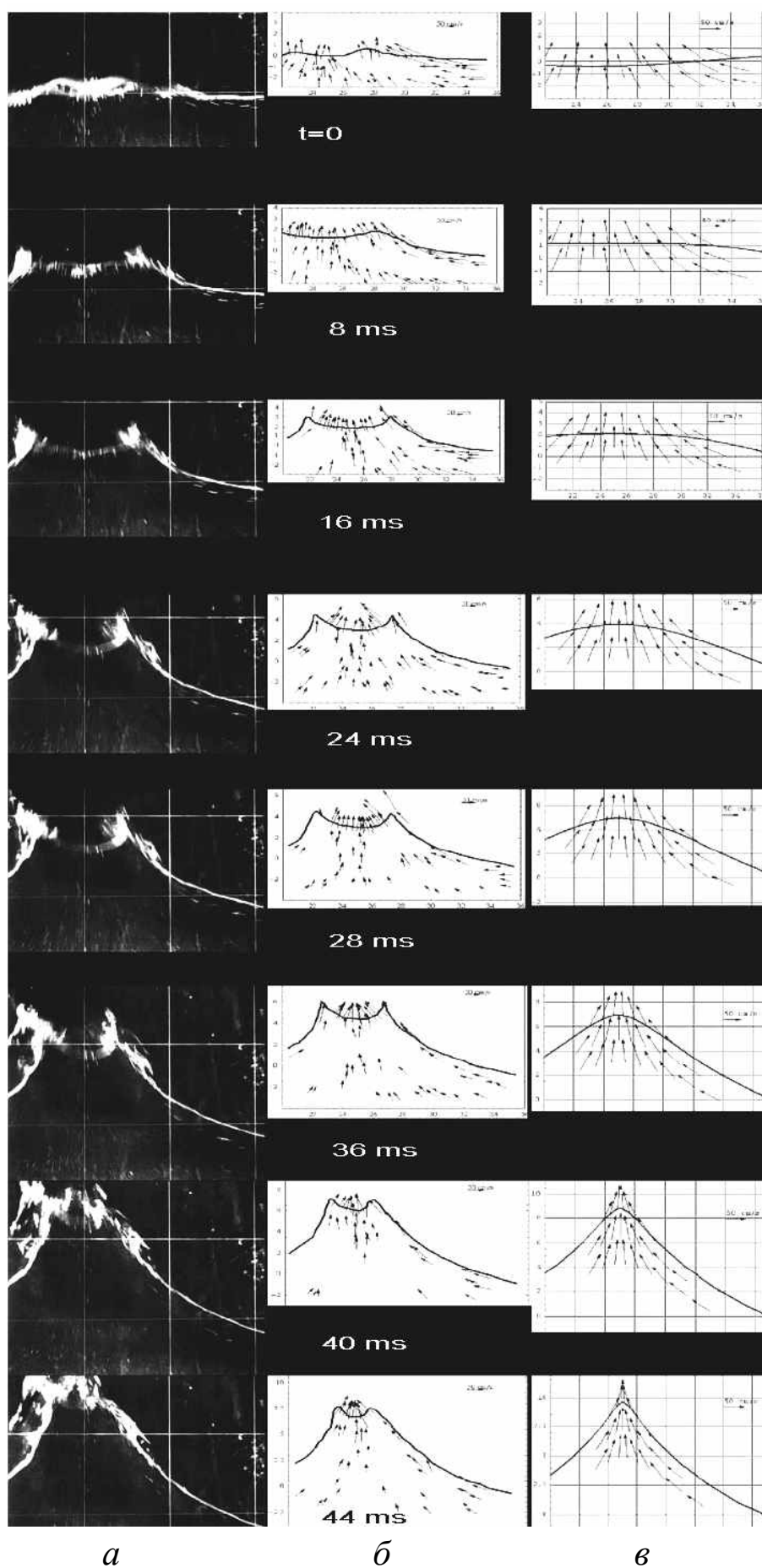


Рис.5-20. Поле скоростей частиц жидкости в случае составляющей А триплета второй моды разрушающейся волны $T=0.572$ с; $h=15$ см; $s=0.75$ см; $p=0.976$, $q=0.18$: а —

последовательность видеок кадров с момента появления каверны, экспозиция 3.99 мс (640×480); б — поле скоростей, полученное при обработке треков частиц трассеров; в — рассчитанное поле скоростей, $H=16$ см

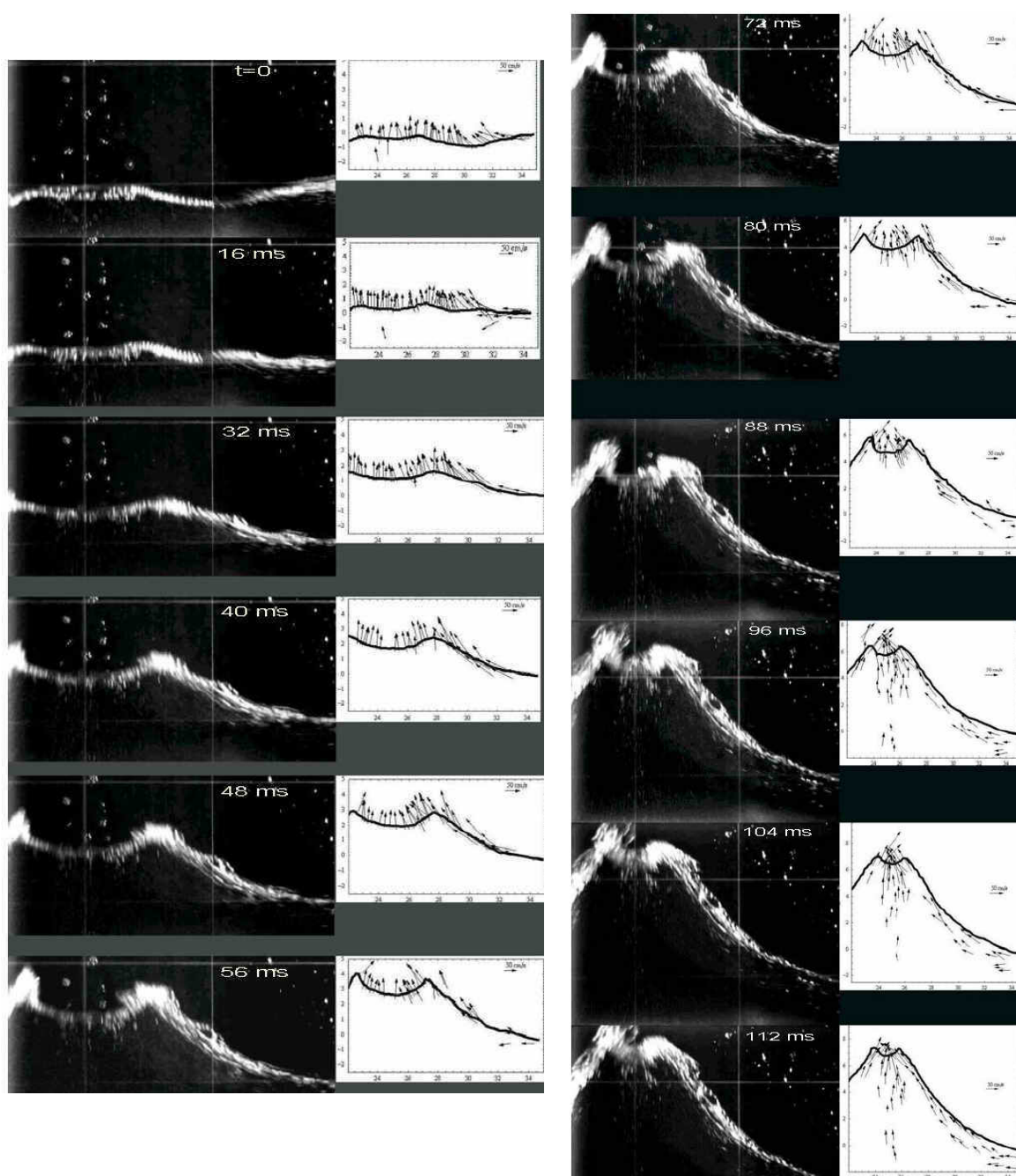


Рис.5-21. Поле скоростей частиц жидкости в случае составляющей A триплета второй моды разрушающейся волны $T=0.596$ с; $h=15$ см; $s=0.75$ см; $p=1.059$, $q=0.18$

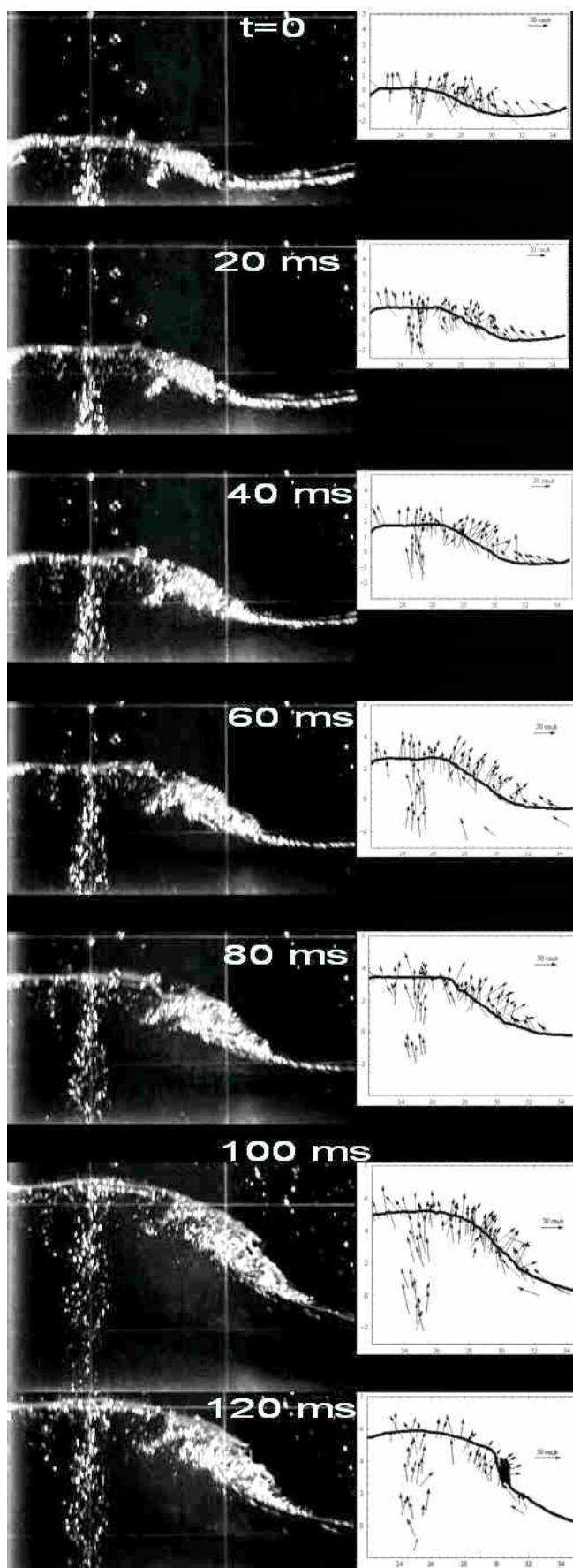


Рис.5-22. Поле скоростей частиц жидкости в случае составляющей B триплета второй моды разрушающейся волны $T=0.596$ с; $h=15$ см; $s=0.75$ см; $p=1.059$, $q=0.18$

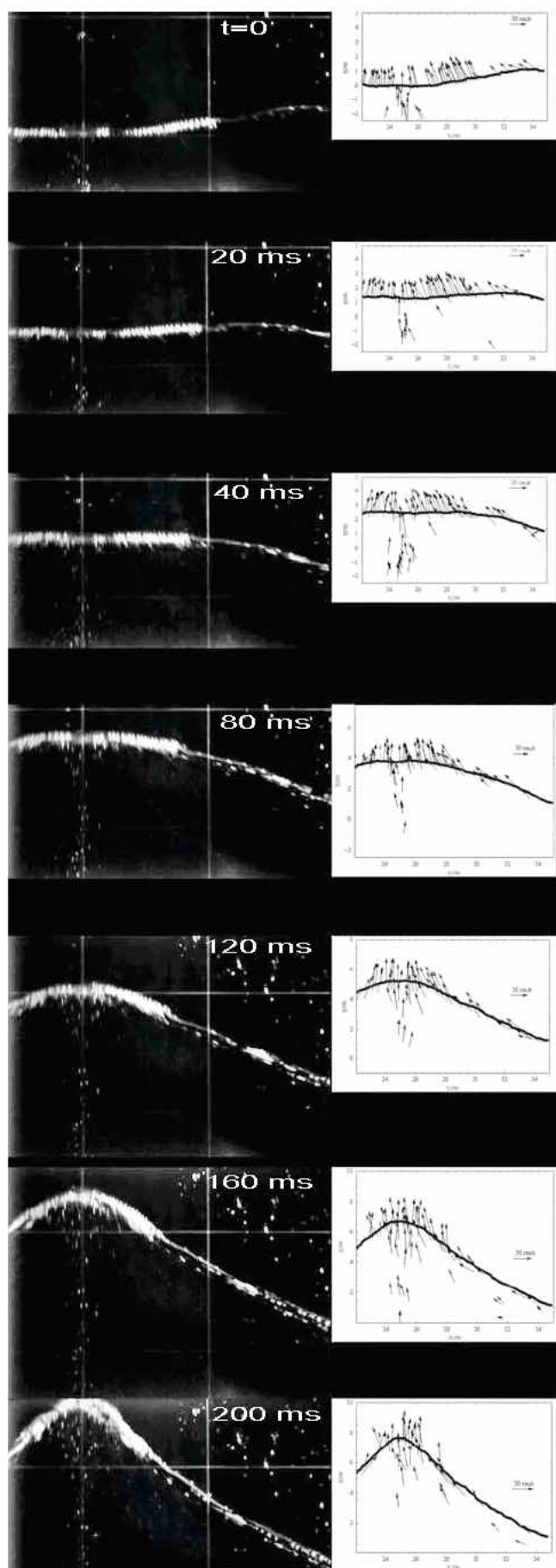
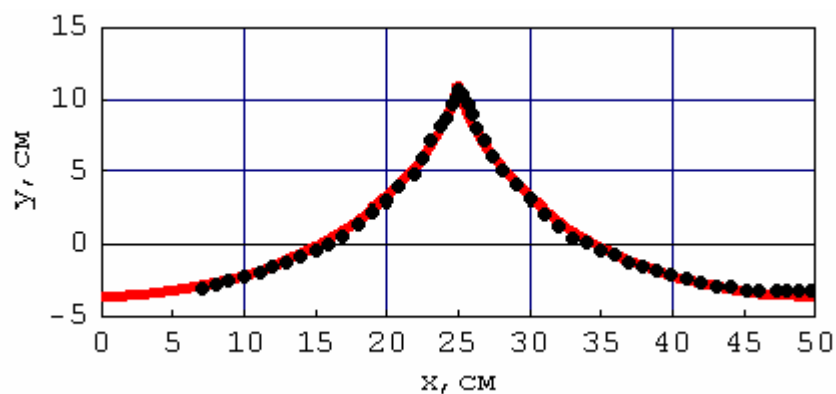
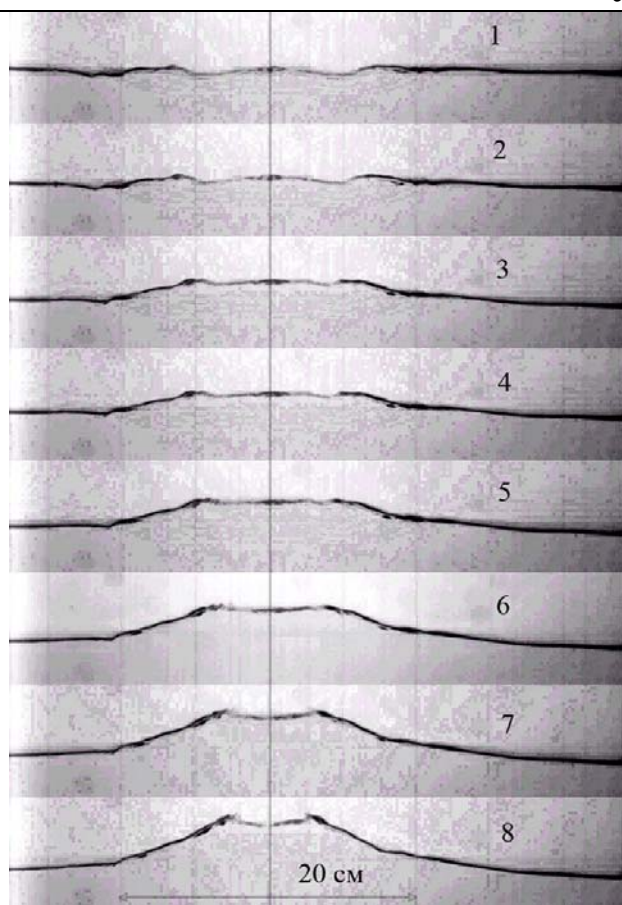


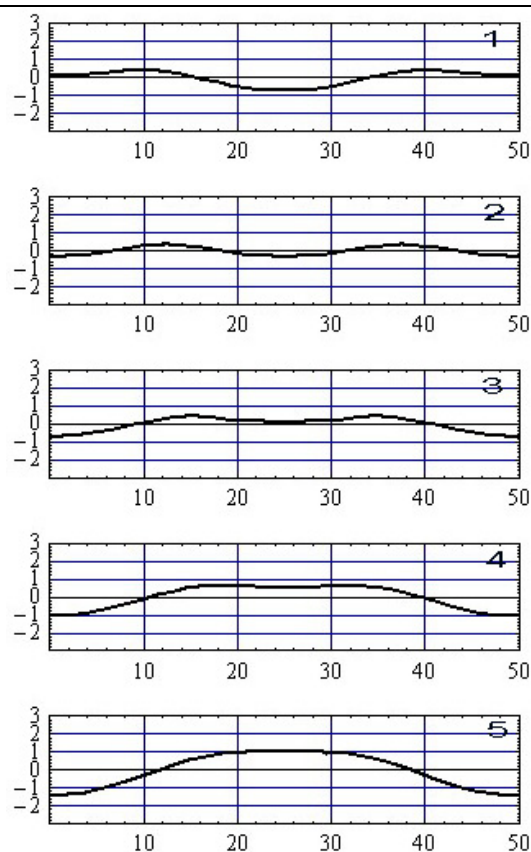
Рис.5-23. Поле скоростей частиц жидкости в случае составляющей C триплета второй моды разрушающейся волны $T=0.596$ с; $h=15$ см; $s=0.75$ см; $p=1.059$, $q=0.18$



а



б



в

Рис.5-24, а - Профиль волны максимального развития, точки отвечают результатам расчета по (2.1) при $\Gamma=0.29$ для составляющей A триплета. б-в. Процесс зарождения каверны: а - эксперимент $p=0.942$, $q=0.180$ для 1-8 - $t=0,5,10,15,20,25,30$ и 35 мс. б - последовательность волновых профилей 1-5 - $t=0,5,10,15$ и 20 мс, рассчитанных в рамках модели [Нестеров (1969); Калиниченко и др. (1995)].

Для выяснения происхождения каверны рассмотрим последовательность кадров, описывающих формирование гребня волны, начиная с момента прохождения свободной поверхностью горизонтального уровня. На рис.5-24,б показана начальная стадия формирования каверны. Отметим наличие двух небольших возмущений, бегущих навстречу друг другу и образующих каверну. Соответствующие экспериментальным условиям волновые профили составляющей A периодического триплета (рис.5-24,в) были рассчитаны на основе нелинейной модели волн Фарадея [Нестеров (1969); Калиниченко и др. (1995)]. Существенное проявление высших гармоник в составляющей A триплета связано с формированием пары волновых возмущений при прохождении свободной поверхности жидкости невозмущенного горизонтального уровня. Последующее их взаимодействие или «конструктивная интерференция» указанных возмущений, перемещающихся навстречу друг другу от торцевых стенок сосуда к центру сосуда, обуславливает образование каверны на формирующемся гребне волны. На рис.5-24,а приведен профиль максимального развития составляющей A .

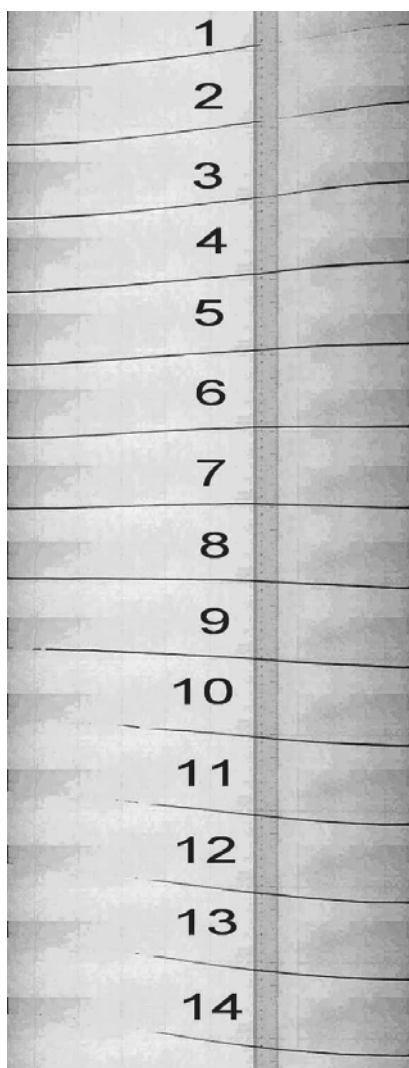
Более явно описанное выше бегущее возмущение проявляется в случае первой волновой моды $n=1$ и $\lambda=100$ см. На рисунках 5-25,а и 5-26,а приведены последовательности видеок кадров, описывающих изменение волновых профилей в течение интервала $T/2$ где T период волны $T=0.457$ и 0.462 с, соответственно. В первом случае крутизна волны равна $\Gamma=0.058$, во втором - $\Gamma=0.191$, причем каких-либо признаков разрушения не наблюдается. Однако на рис. 5-26,а четко прослеживается возмущение, бегущее от правой торцевой стенки сосуда к левой стенке. На рисунках 5-25,б и 5-26,б приведены результаты расчетов волновых профилей по формулам (2.1). Хотя рассматривается случай мелкой воды, модель [Нестеров (1969); Калиниченко и др. (1995)], в которой для описания волн

Фарадея использовались переменные Лагранжа, прекрасно фиксирует проявление нелинейности в виде бегущего возмущения.

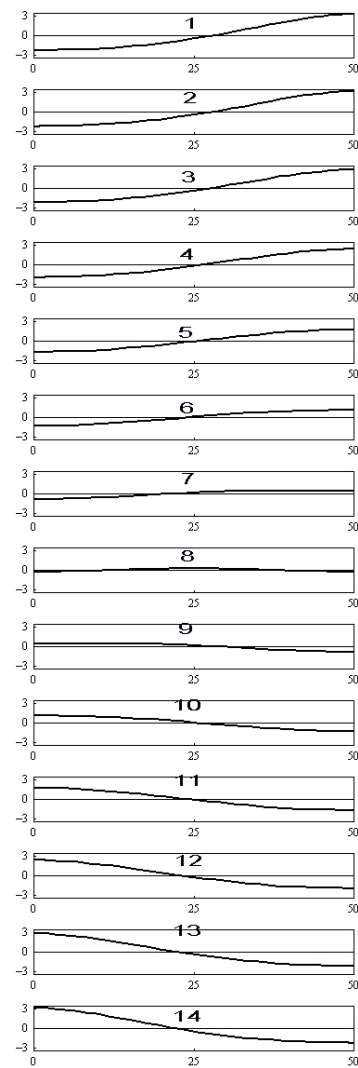
Таким образом, зарождение, развитие и схлопывание каверны происходит на формирующемся (растущем) гребне волны после того, как свободная поверхность жидкости пересекает начальный горизонтальный уровень. Можно утверждать, что появление каверны связано с сильной нелинейностью волн Фарадея, проявляющейся в наличии бегущих навстречу друг другу возмущений.

Отметим, что в экспериментах [Hogrefe et al. (1998); Zeff et al. (2000); Longuet-Higgins (1983)] исследовался процесс струеобразования в осесимметричных стоячих волнах на свободной поверхности различных жидкостей в круговых цилиндрических сосудах, причем наблюдался переход поднимающейся ложбины волны в узкую струю. Скорее всего, это связано с параметрами возбуждаемых волн. Так, в [Zeff et al. (2000)] использовался цилиндрический сосуд радиуса $r=12.7$ см с водным раствором глицерина глубины 6.5 см и вязкостью 1.94 сСт, и образование струи наблюдалось из впадины длиной $l_o \sim 4.5-5$ см и глубиной $d_o \sim 2.5$ см. В [Hogrefe et al. (1998)] струеобразование исследовалось при параметрическом возбуждении стоячей трехмерной волновой моды (2,2) на свободной поверхности водного раствора глицерина (глубина 7 см; вязкость 300 сСт) в прямоугольном сосуде 12×12 см. Коллапсирующая каверна представляла собой впадину волны длины 6 см и глубины $\sim 3-4$ см. В эксперименте [Longuet-Higgins (1983)] двухметровая струя наблюдалась при параметрическом возбуждении осесимметричной моды на свободной поверхности вода глубины 18.5 см в цилиндрическом сосуде радиуса 8.2 см. Хотя автор приводит фотографии сформировавшейся струи и отмечает возможность формирования струи в результате схлопывания впадины волны, детальных исследований этого механизма не проводилось. Указанные эксперименты [Hogrefe et al. (1998); Zeff et al. (2000)] ни в коей

мере не противоречат настоящему выводу о развитии и схлопывании каверны на формирующемся (растущем) гребне волны, поскольку приведенные в этих работах параметры впадины волны соответствуют приведенным на рис.5-17 диапазонам значений l_o и d_o .



а



б

Рис.5-25. Покадровое представление профиля первой волновой моды в течение интервала $T/2$; шаг по времени $\Delta t = T/28$, $n=1$, $h=15$ см, $s=0.7$ см, $H=5.8$ см, $T=0.457$ с, $p=0.241$, $q=0.069$: а – эксперимент; б – расчет по (2.1)

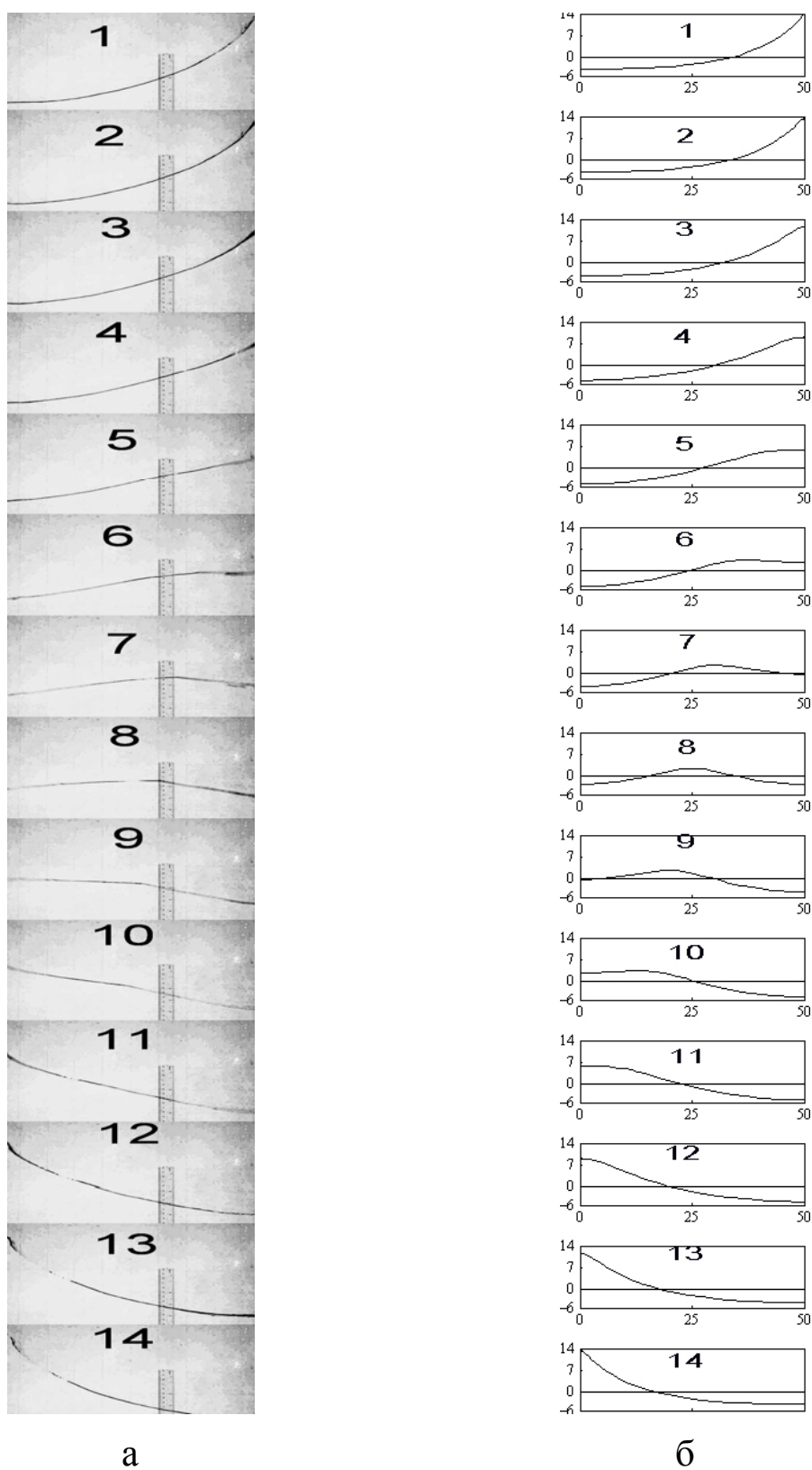


Рис.5-26. Покадровое представление профиля первой волновой моды в течение интервала $T/2$; шаг по времени $\Delta t = T/28$, $n=1$, $h=15$ см, $s=0.7$ см, $H=19.1$ см, $T=0.462$ с, $p=0.245$, $q=0.069$: а – эксперимент; б – расчет по (2.1)

5.4. Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловых областях внутренней волны Фарадея

Рассмотрим изменение профиля внутренних волн Фарадея при увеличении их крутизны.

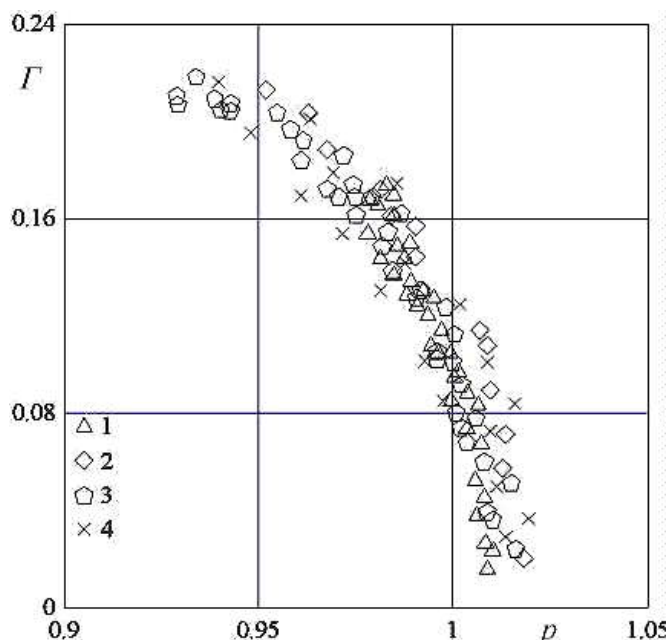


Рис.5-27. Зависимость крутизны Γ от частоты p для двухслойных жидкостей и волновых мод n : 1 – керосин – вода, $n=2$; 2 – керосин – водный раствор сахара, $n=2$; 3 – керосин – вода, $n=3$; 4 – керосин – водный раствор NaCl, $n=3$

Зависимость крутизны $\Gamma=H/\lambda$ возбуждаемых волн от безразмерной частоты $p=\Omega/(2\omega)$ колебаний сосуда приведена на рис.5-27. Два положения границы раздела керосин – раствор сахара в моменты ее максимального отклонения и прохождения через положение равновесия представлены на рис.5-28. При крутизне $\Gamma=0.072$ и частоте $p=1.015$ профиль волны практически синусоидальный (рис.5-28,а). При $\Gamma=0.116$ и $p=1.009$ в приузловых областях наблюдается образование довольно регулярных групп коротких волн, рис.5-28,б. Симметричный относительно узловой точки участок вторичного волнообразования имеет протяженность порядка четверти длины основной волны $\lambda/4 \sim 12$ см, причем на нем

укладывается $N=8$ волновых возмущений. Их длина порядка $\Lambda \sim 1.3-1.5$ см, а амплитуда $0.2-0.6$ см.

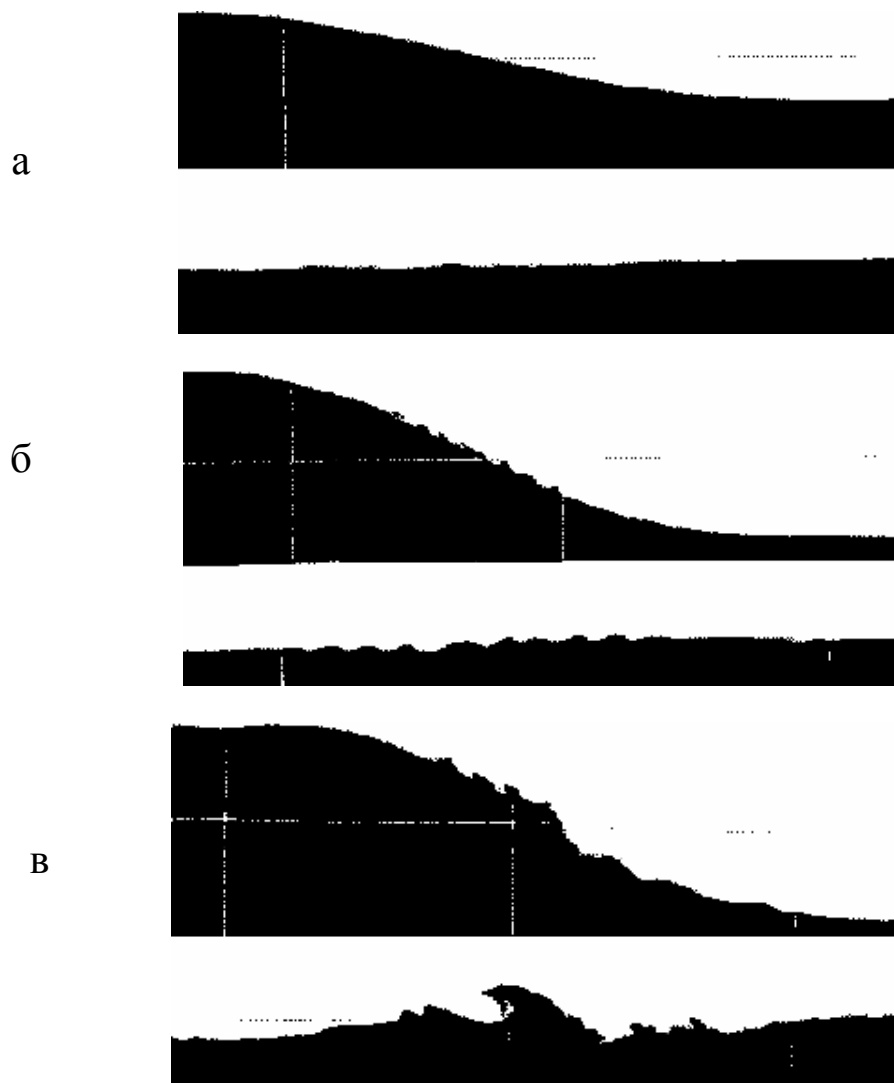


Рис.5-28. Профили второй волновой моды в моменты максимального отклонения границы раздела керосин – водный раствор сахара и прохождения положения равновесия (показана половина длины волны $\lambda/2=25$ см): а-в - $\Gamma=0.072$; 0.116 ; 0.147

Для системы коротких волн характерно, что они не меняют своего относительного положения при волновых движениях границы раздела, см. рис.5-29. При $\Gamma=0.147$ и $p=0.992$ вторичные волны в приузловых областях становятся неустойчивыми, как видно из рис.5-28,в. Наблюдаемая картина похожа на обрушение поверхностных волн. Отметим, что с ростом

крутизны основной волны наблюдается увеличение длины вторичных волн Λ .

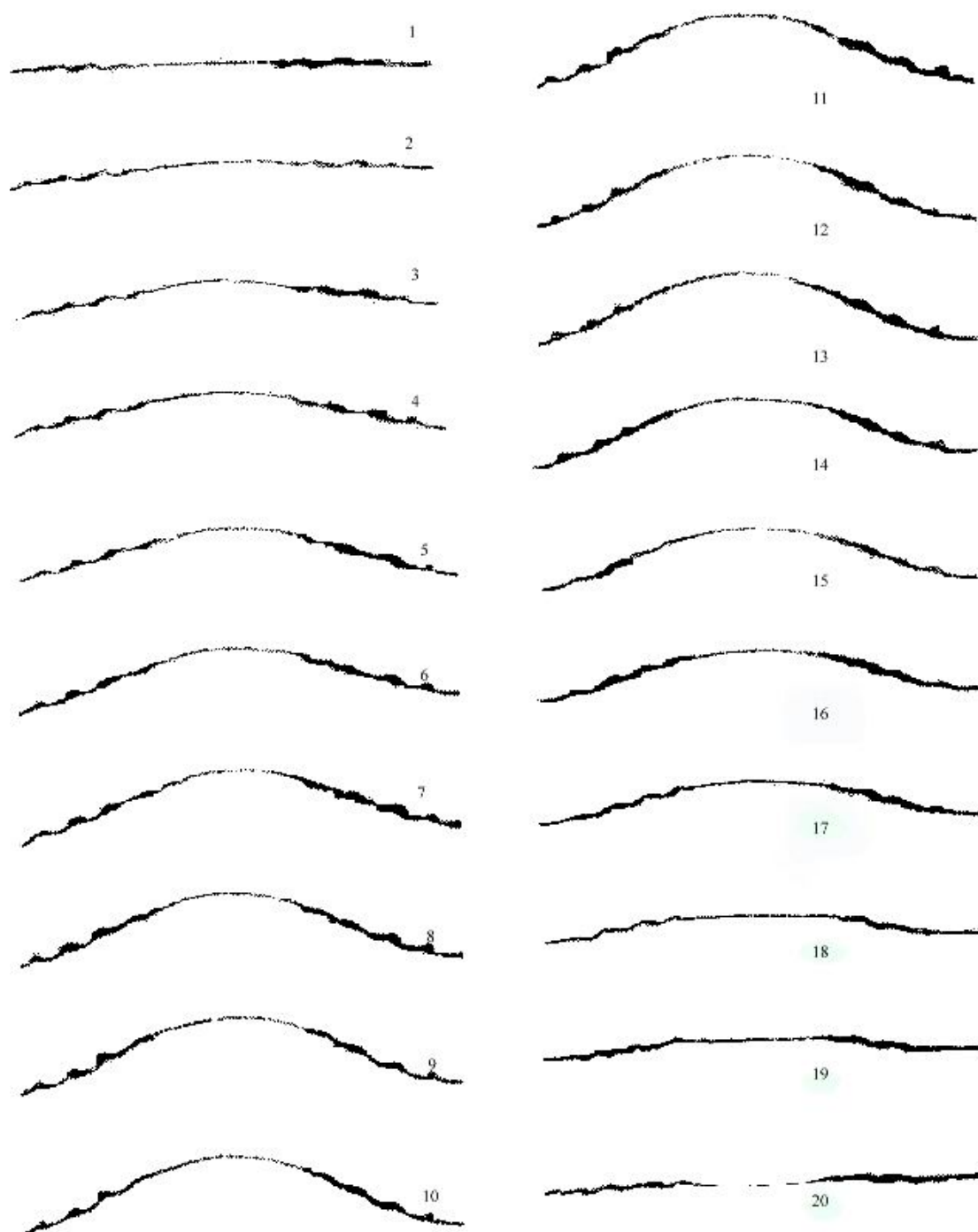


Рис.5-29. Кинограмма второй моды стоячей волны на границе раздела керосин – вода; $\Gamma=0.134$, $p=0.990$, $\Lambda=3.5$ см; шаг по времени $\Delta t=0.04$ с

При дальнейшем увеличении Γ происходит переход от системы коротких неустойчивых волн к паре вихрей с периодически изменяющимся направлением вращения, рис.5-30.

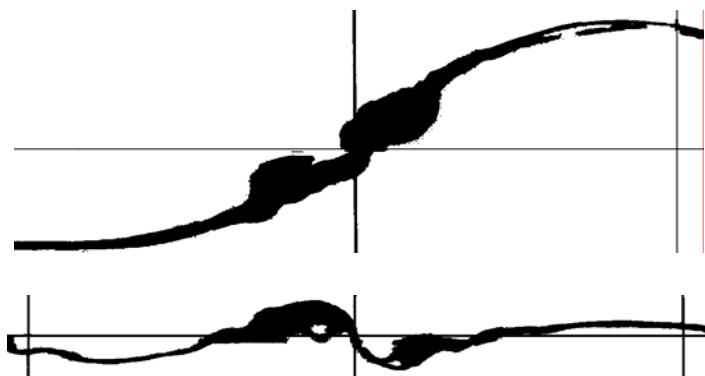


Рис.5-30. Профили третьей волновой моды в моменты максимального отклонения границы раздела керосин – вода и прохождения положения равновесия (показана половина длины волны), $\Gamma=0.222$

Описанное выше изменение волнового профиля справедливо для всех несмешивающихся жидкостей, используемых в экспериментах. Для жидкостей с близкими кинематическими вязкостями (например, керосин-вода) не всегда удавалось четко выделить режим неустойчивых вторичных волнообразований; в этом случае наблюдался переход от гладкого волнового профиля к профилю с парой вихрей в приузловой зоне. Использование двухслойной жидкости, для которой вязкости существенно отличались (керосин - водный раствор сахара), позволило проследить начальную стадию вторичного волнообразования, хотя при этом и не наблюдалось интенсивного вихреобразования в приузловых областях.

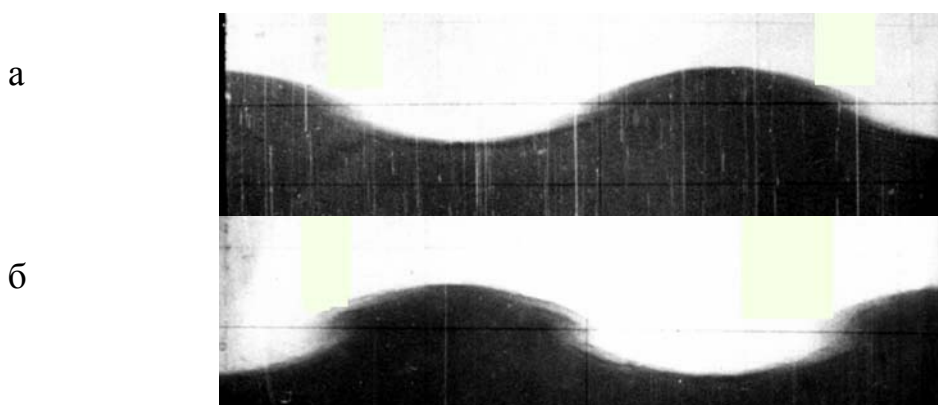
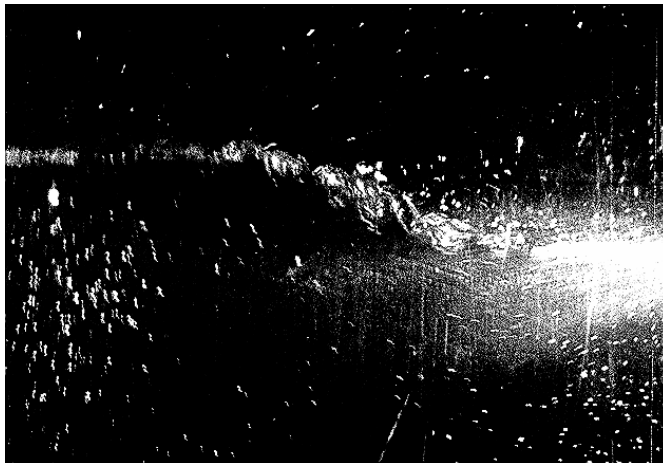


Рис.5-31. Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловой зоне третьей волновой моды на границе раздела вода – водный раствор NaCl, $h_{1,2}=15$ см, $s=2.0$ см: а - $\Gamma=0.150$, $p=0.981$; б - $\Gamma=0.172$, $p=0.961$

В случае смешивающихся жидкостей (пресная вода - водный раствор NaCl или тиосульфата) вместо образования вторичных волн наблюдалось размытие границы раздела с последующим переходом к “грибообразной” форме профиля, рис.5-31.

а



б

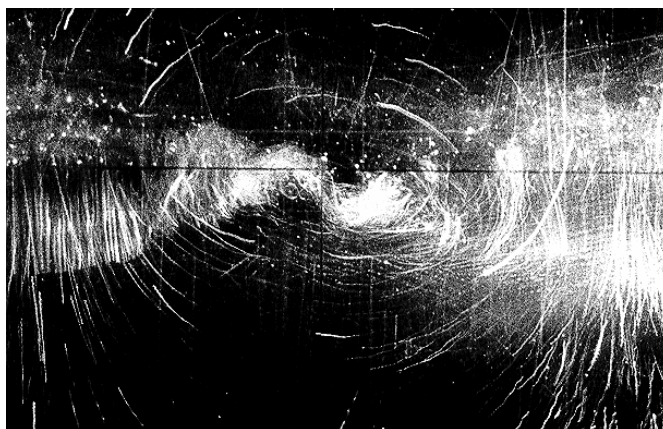


Рис.5-32. Визуализация вихревых структур в приузловой зоне с помощью частиц янтаря; керосин – вода, $n=2$: а-б - $\Gamma=0.124, 0.165$

Из рисунков 5-28 и 5-30 следует, что образование системы коротких волн и их переход к паре вихрей с изменяющимся направлением вращения происходит в приузловых областях, для которых характерен максимальный относительный сдвиг локальных скоростей верхней и нижней жидкостей.

Анализ экспериментальных данных показал, что для использованных в опытах двухслойных жидкостей переход от гладкого профиля к профилю с возмущениями (вторичные волнообразования или пара вихрей) в приузловой зоне стоячих волн Фарадея происходит при крутизне $\Gamma \sim 0.08 - 0.13$.

Для выявления структуры вторичных волнообразований использовалось фотографирование треков частиц нейтральной плавучести (янтарь, максимальный размер частиц порядка 0,3 мм). На рис. 5-32 для второй волновой моды на границе керосин-вода приведены фотографии приузловой области при $\Gamma \sim 0.124$ и 0.165, причем время экспозиции в первом случае составляло четверть периода, а во втором период волны. Анализ фотографий показывает, что вторичные возмущения в приузловой области носят скорее вихревой, чем волновой характер.

Для измерений локального сдвига в узловых точках для второй и третьей волновых мод использовался лазерный доплеровский анемометр. Соответствующие вертикальные профили амплитуды горизонтальной составляющей скорости двухслойной жидкости приведены на рис.5-33.

В приближении стоячих волн Фарадея бесконечно малой амплитуды поле горизонтальной скорости вязкой двухслойной жидкости описывается следующими соотношениями [Кравцов, Секерж-Зенькович (1993)]:

$$\begin{cases} u_1(x, y, t) = \zeta \omega [-e^{-ky} \cos \omega t + \\ \quad 2\rho_2 \sqrt{v_2} r^{-1} e^{-y\delta_1^{-1}} \cos(\omega t - y\delta_1^{-1})] \sin kx, \quad (y \geq 0) \\ u_2(x, y, t) = \zeta \omega [e^{ky} \cos \omega t - \\ \quad 2\rho_1 \sqrt{v_1} r^{-1} e^{y\delta_2^{-1}} \cos(\omega t + y\delta_2^{-1})] \sin kx, \quad (y \leq 0) \end{cases}$$

$$r = \rho_1 \sqrt{v_1} + \rho_2 \sqrt{v_2}, \quad \delta_i = \left(\frac{2\nu_i}{\omega} \right)^{1/2} \quad (5.3)$$

где величины δ_i определяют толщину ламинарного пограничного слоя на границе раздела верхней и нижней жидкостей. Кривые на рис.5-33 отвечают профилям, рассчитанным по (5.3). Видно неплохое соответствие теории и эксперимента.

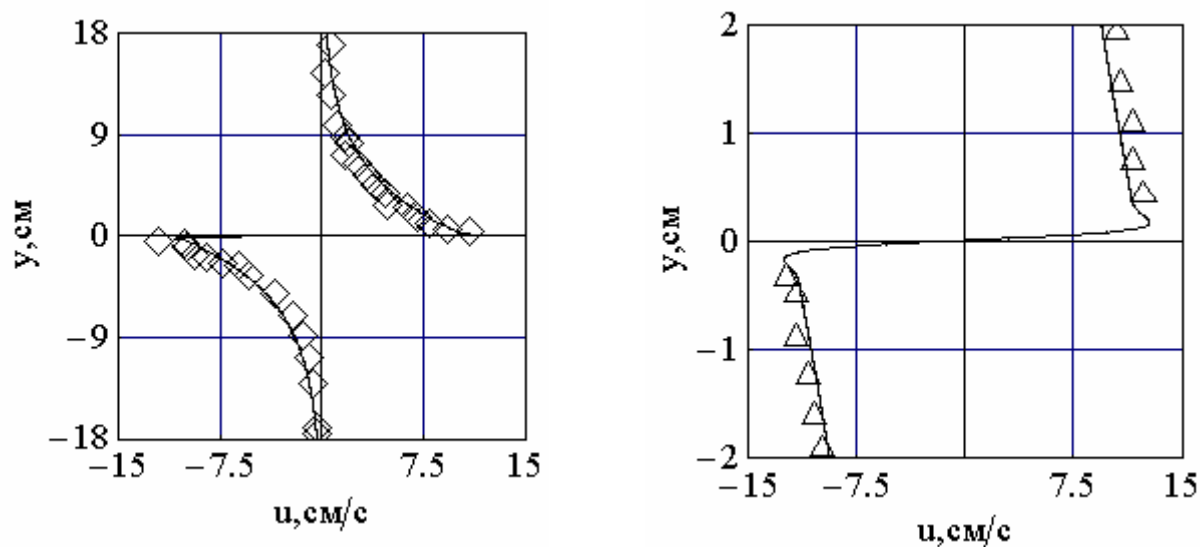


Рис.5-33. Вертикальные профили горизонтальной составляющей скорости жидкости; керосин – вода, $n=3$, $\Gamma=0.115$

Поскольку отсутствуют какие-либо аналитические работы по анализу устойчивости границы раздела двух вязких осциллирующих жидкостей, то для интерпретации результатов эксперимента используем квазистационарное приближение. Осциллирующее течение в каждый момент времени рассматривается как стационарный поток, определяемый соответствующим данному моменту времени профилем скорости. Анализ рассчитанных по (5.3) вертикальных профилей горизонтальной составляющей скорости для различных фаз волнового цикла показал, что для временного интервала, равного одной восьмой периода волны для второй моды и одной шестой для третьей моды, граница раздела близка к горизонтальной, и относительный сдвиг максимален. В этом случае следует рассматривать задачу устойчивости двух разнонаправленных горизонтальных потоков жидкости. Отметим, что для указанных интервалов различие профилей скорости не превышает 10-15%, а описываемые ими потоки наблюдаются дважды за цикл волны при смене направления течения.

Согласно классической теории [Ламб (1947)] волновые возмущения вида $A \exp[i\kappa(x - ct)]$ на границе раздела двух разнонаправленных стационарных потоков идеальной жидкости являются нейтрально устойчивыми, если

$$c_i = \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2 - \frac{\Delta \rho g + \sigma \kappa^2}{(\rho_1 + \rho_2) \kappa} \right]^{1/2} = 0 \quad (5.4)$$

где $\kappa = 2\pi/\Lambda$ - волновое число, $c = c_r + ic_i$, c_r - фазовая скорость, κc_i - коэффициент, определяющий временной рост возмущений.

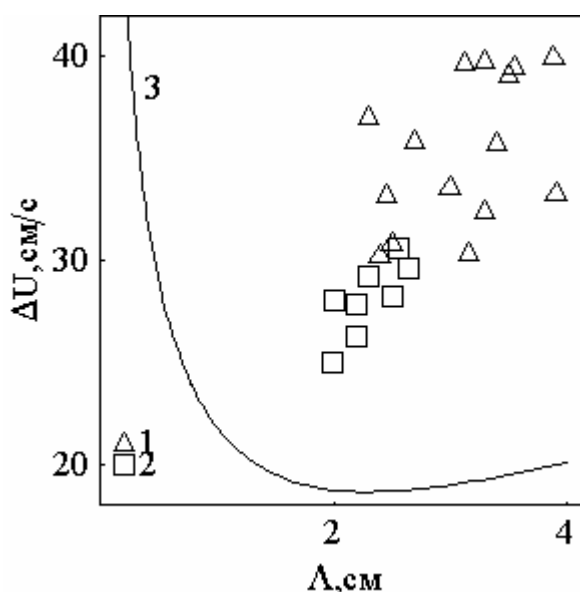


Рис.5-34. Зависимость длины Λ волновых возмущений на границе керосин – вода от максимальной относительной скорости ΔU : 1–2 - $n=2$; 3; 3 – расчет по (5.4)

На рис. 5-34 представлены зависимости между максимальным значением относительной скорости ΔU течения двух жидкостей типа керосин-вода и длиной Λ волновых возмущений, измеренных в экспериментах и рассчитанных по соотношению (4.2) для второй и третьей волновых мод. Модель Кельвина-Гельмгольца дает критические значения $\Lambda=2.2$ см и $\Delta U=18.6$ см/с. В эксперименте для второй моды внутренних волн $\Lambda=2.4$ см и $\Delta U=30.2$ см/с, а для третьей моды - $\Lambda=2.0$ см и $\Delta U=24.95$

см/с, т.е. имеются существенные различия в величинах рассчитанного и измеренного относительного сдвига.

Модель Кельвина – Гельмгольца предполагает наличие плоского разрыва скорости на границе раздела двух жидкостей. Из рис.5-33,б следует, что в качестве переходного слоя между двумя потоками могут рассматриваться пограничные слои толщиной δ_i . Тогда для оценки влияния вязкости на развитие возмущений в приузловой зоне данные эксперимента могут быть представлены в безразмерном виде на (αR) – плоскости, как это принято в теории неустойчивости стационарных течений вязкой жидкости [Drazin (1962)]. Здесь $\alpha = 2\pi\delta / \Lambda$, $R = H\Omega\delta / 2\nu$. На рис.5-35 приведены значения α и R , определяющие возникновение и развитие регулярных волновых возмущений в приузловых областях в условиях эксперимента.

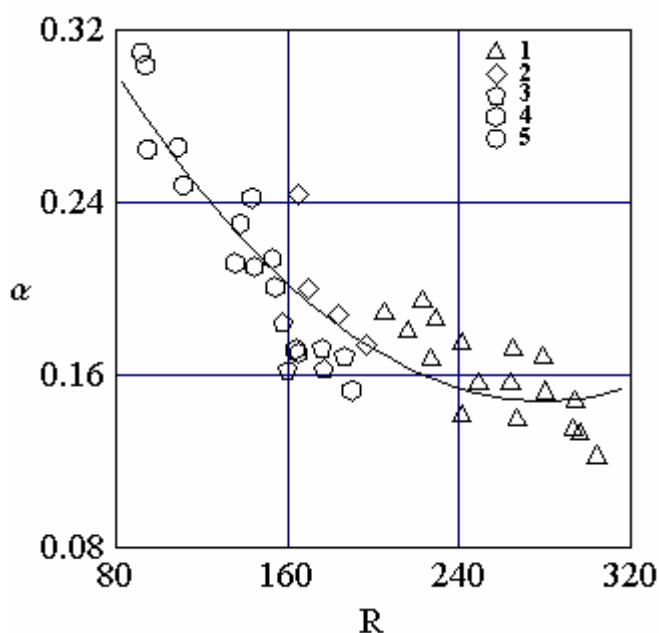


Рис.5-35. Экспериментальная зависимость безразмерной длины волны α от числа Рейнольдса R для осциллирующего потока, создаваемого волной Фарадея на границе раздела: 1 – керосин – вода, $n=2$; 2 – керосин – вода, $n=3$; 3 – керосин – раствор тиосульфата, $n=3$; 4 – керосин – раствор тиосульфата, $n=4$; 5 – керосин – раствор сахара, $n=2$

В [Keulegan (1949)] экспериментально изучалось сдвиговое течение пресной воды над раствором сахара. Показано, что вязкое затухание значительно снижают скорость роста возмущений на границе раздела двух жидкостей. Используя соображения размерности, вводился безразмерный параметр K :

$$K = U^3 / \nu g',$$

где U – средняя скорость верхнего слоя; $g' = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_1$; ν – кинематическая вязкость нижней жидкости. Эксперименты показали, что появление волновых возмущений границы раздела зависят от величины K и определяются критическим значением $K \sim 500$.

В случае стоячих внутренних волн горизонтальная составляющая скорости верхней жидкости в первом приближении равна $H\omega/2$. Параметр K можно переопределить следующим образом:

$$K^* = \frac{(H\omega/2)^2}{\bar{\nu}g'},$$

$$g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \omega \sim \Omega^*, \bar{\nu} = \left[\frac{4\rho_2\rho_1\sqrt{\nu_1\nu_2}}{(\rho_1\sqrt{\nu_1} + \rho_2\sqrt{\nu_2})(\rho_2 + \rho_1)} \right]$$

Значения K^* приведены в таблице 5-1. Видно, что для указанных волновых мод параметр K^* имеет близкие значения, и его средняя величина $\overline{K^*} = 520$ при максимальной относительной ошибке 20%.

Если ввести вязкий масштаб длины, равный толщине периодического пограничного слоя на границе раздела $\beta = (2\bar{\nu}/\omega)^{1/2}$, то выражение для K^* примет вид

$$K^* = \frac{U^{*2}}{\beta g'} \left(\frac{U^* H}{\bar{\nu}} \right)^{1/2}, Ri = \frac{\beta g'}{U^{*2}}.$$

По аналогии с [Тернер (1977)] этот критерий возникновения неустойчивости можно рассматривать как соотношение между числом Ричардсона, в которое входит толщина сдвига скорости, и числом Рейнольдса. Значения Ri приведены в табл. 5-1, из которой следует, что его среднее значение равно 0.18.

Таблица 5-1.						
n	Тип жидкости	H^* , см	$\Omega/2\pi$, Гц	$\Gamma \times 10^{-2}$	K^*	Ri
2	1	4.4	1.170	4.4	490	0.18
3	1	3.4	1.480	5.2	447	0.19
3	2	3.6	1.95	5.4	629	0.18
4	2	3	2.325	6.0	597	0.18
2	3	4.6	1.595	4.6	411	0.17
1- керосин-вода; $\rho_1=0.792 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1 \text{ г/см}^3$ 2- керосин-раствор тиосульфата; $\rho_1=0.792 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.239 \text{ г/см}^3$ 3- керосин-раствор сахара; $\rho_1=0.792 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.235 \text{ г/см}^3$ $\nu_1=1 \text{ сСт}$, $\nu_2=13 \text{ сСт}$						

Заключение

1. Наблюдаемые в эксперименте поверхностные волны Фарадея разделены на три категории: регулярные, нерегулярные и разрушающиеся волны.
 - На поверхности глубокой жидкости максимальная крутизна регулярных волн равна 0.255, что превышает величину, полученную в других исследованиях. Оценка предельного угла при гребне таких волн составила величину 80° . Показано, что при относительно малых глубинах жидкости $h/\lambda < 0.3$ предельная крутизна регулярных волн Фарадея существенно зависит от h .
 - Среди нерегулярных волн, занимающих достаточно узкую область на (p, q) -плоскости между регулярными и разрушающимися волнами,

экспериментально выявлены и исследованы волны с небольшой лункой или углублением в гребне волны, а также периодический триплет.

- В случае разрушающихся волн исследован механизм образования струйного всплеска – коллапс каверны на стадиях формирования гребня и пучности волны Фарадея. Посредством скоростной видеосъемки показано, что струйному всплеску из гребня волны предшествуют зарождение, развитие и схлопывание каверны. Коллапс каверны описывается универсальной временной зависимостью $\sim t^{2/3}$. Показатель степени $2/3$ отражает общие закономерности, присущие задачам с углублением на свободной поверхности жидкости, и соответствует балансу между поверхностными силами и силами инерции. В результате сопоставления данных эксперимента и теоретической модели волн Фарадея сделан вывод о том, что появление каверны на стадии формирования гребня обусловлено нелинейностью волн - наличием двух малых возмущений свободной поверхности, бегущих навстречу друг другу и образующих каверну.
2. Исследован процесс разрушения волн Фарадея на границе раздела двух жидкостей, начиная с появления в приузловых областях регулярных групп волновых возмущений. Показано, что при крутизне стоячей волны $\Gamma \sim 0.08-0.13$ и числе Рейнольдса ламинарного пограничного слоя $R \sim 90-300$ происходит развитие квазистационарных волновых возмущений.

Глава 6. ВТОРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ВОЛНАХ ФАРАДЕЯ

В настоящей главе показано, что в двумерных волнах Фарадея, возбуждаемых при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда с однородной или двухслойной жидкостью, имеется система вторичных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости. Наряду с колебаниями с частотой волны частицы жидкости медленно перемещаются в соответствии с этими циркуляционными течениями. Измерено поле скоростей вторичных течений и определены траектории отдельных жидких частиц в стоячей поверхностной и внутренней волнах. Проведено сопоставление данных эксперимента с соответствующей теоретической моделью [*Longuet-Higgins* (1953); *Dore* (1976)]. Показано, что начальная стадия образования регулярных форм на поверхности слоя осадков на дне сосуда может быть связана с наличием вторичных циркуляционных течений.

Основная цель работы состоит в экспериментальном подтверждении факта существования медленных циркуляционных течений в стоячих поверхностных и внутренних волнах, а также верификация основных выводов существующих гидродинамических моделей.

По материалам главы опубликованы работы [*Калиниченко, Секерж-Зенькович, Чайковский* (1991); *Kalinitchenko et al* (1999); *Калиниченко* (2001); *Kalinichenko, Sekerj-Zenkovitch* (2005); *Калиниченко, Секерж-Зенькович* (2008)]

6.1. Постановка эксперимента

Изучение процесса массопереноса в стоячих волнах на свободной поверхности слоя воды (плотность $\rho=1.00$ г/см³; кинематическая вязкость $\nu=1.00$ сСт; глубина $h=10-15$ см) осуществлялось для волн Фарадея по методике [Калиниченко и др. (1991)]. Сосуду сообщались колебания в вертикальном направлении, причем для генерации волн использовался не только субгармонический, но и гармонический резонанс [Калиниченко и др. (1995, 2000)], что позволило минимизировать колебания узлов в волне.

Для визуализации вторичных течений в воду вводился краситель нейтральной плавучести. Для измерения скоростей течений использовались трассеры - частицы янтаря плотностью 1.1 г/см³ и размером не более 1 мм. С учетом общей картины течения область измерений ограничивалась длиной $\lambda/2$ по горизонтали и глубиной жидкости по вертикали. Эта область разбивалась на зоны размерами 1×1 см, чтобы вторичное течение в пределах одной зоны можно было считать близким к однородному. Модуль вектора скорости вторичного течения оценивался как отношение перемещения трассера в пределах зоны к соответствующему временному промежутку, кратному периоду волны. Для нахождения одного значения скорости выполнялись четыре серии из десяти измерений в каждой серии. Проведенные оценки показали, что предельная ошибка определения средней скорости не превышала 10%.

Основные экспериментальные параметры приведены в таблице ниже, в которой для сравнения также указаны характеристики экспериментов [Noda (1968) и Mei et al (1972)]. Отметим, что в таблице приведены наиболее показательные для исследуемого явления значения ω и H , которым соответствуют обсуждаемые экспериментальные результаты:

Авторы	Поперечное сечение сосуда (см)	Глубина жидкости h (см)	Волновое число, $k=2\pi/\lambda$ (см ⁻¹)	Частота волны, ω (с ⁻¹)	Высота волны, H (см)	Эффективное число Рейнольдса $R_s \sim (H/\delta)^2$
Настоящее исследование - поверхностные волны	50×4	10	0.188	13.0	5	4062
Настоящее исследование - внутренние волны на границе двухслойной жидкости	50×4	8 (каждый слой)	0.125	3.74	4.4	3620
<i>Noda</i> (1968) поверхностные волны	250×100	40	0.025	4.3	12-24	7740-30960
<i>Mei et al</i> (1972) поверхностные волны	1200×76	13	0.149	7.3	3.6	583

6.2. Эффект массопереноса в стоячих поверхностных волнах

Из теории нелинейных стоячих волн в идеальной жидкости следует, что частицы жидкости совершают колебания около своего положения равновесия. Однако в [*Longuet-Higgins* (1953); *Dore* (1976)] показано, что учет кроме нелинейных еще и вязких эффектов, приводит к выводу о возможном существовании в стоячих волнах наряду с колебательным движением системы стационарных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости.

Это утверждение было проверено экспериментально на третьей моде поверхностных волн Фарадея, возбуждаемых при вертикальных колебаниях сосуда с амплитудой $s=1.8$ см. Глубина воды была $h=10$ см, а высота и период волны были $H=5$ см и $T=0.482$ с, соответственно. Приведенные на

рис.6-1 фотографии отражают начальную стадию формирования вторичного течения в одной из двух циркуляционных ячеек между пучностью и расположенными слева и справа от нее узлами волны. В начальный момент времени краситель нейтральной плавучести помещался на свободную поверхность воды и дно сосуда вдоль правой торцевой стенки. За счет колебаний воды с периодом волны краситель распространился в течение нескольких секунд по свободной поверхности и по дну. Это видно на фотографии, сделанной в один из этих моментов времени, для которого принято $t=0$.

Если бы жидкость совершала только колебания около положения равновесия, то краситель мог бы отдалиться от свободной поверхности и дна лишь за счет молекулярной диффузии. Вследствие этого он оставался бы вблизи свободной поверхности и дна достаточно долго, по крайней мере, в течение нескольких сотен секунд.

Из фотографий для моментов $t=38-44$ с видно, как два «языка» красителя поднимаются вверх слева и справа от центральной части фотографий со дна почти до свободной поверхности. Эти две ветви течения располагаются вблизи вертикалей, проходящих через два узла волны Фарадея, отстоящих друг от друга примерно на половину длины волны. При анализе фотографий следует учитывать то обстоятельство, что узлы нелинейной стоячей волны в жидкости не являются неподвижными в пространстве, а подвержены малым колебаниям. Заметим также, что, начиная с момента $t=41$ с, две ветви вторичного течения имеют и горизонтальные компоненты скоростей – прослеживаются встречные течения к центральной части сосуда (к пучности волны).

Начиная с момента $t=44$ с и до $t=50$ с видно, как правая ветвь поднявшегося почти до свободной поверхности течения опускается вниз примерно по вертикали, проходящей через пучность волны. Визуально в

эксперименте прослеживалось движение вниз и левой ветви течения, но оно не зафиксировано на фотографиях.

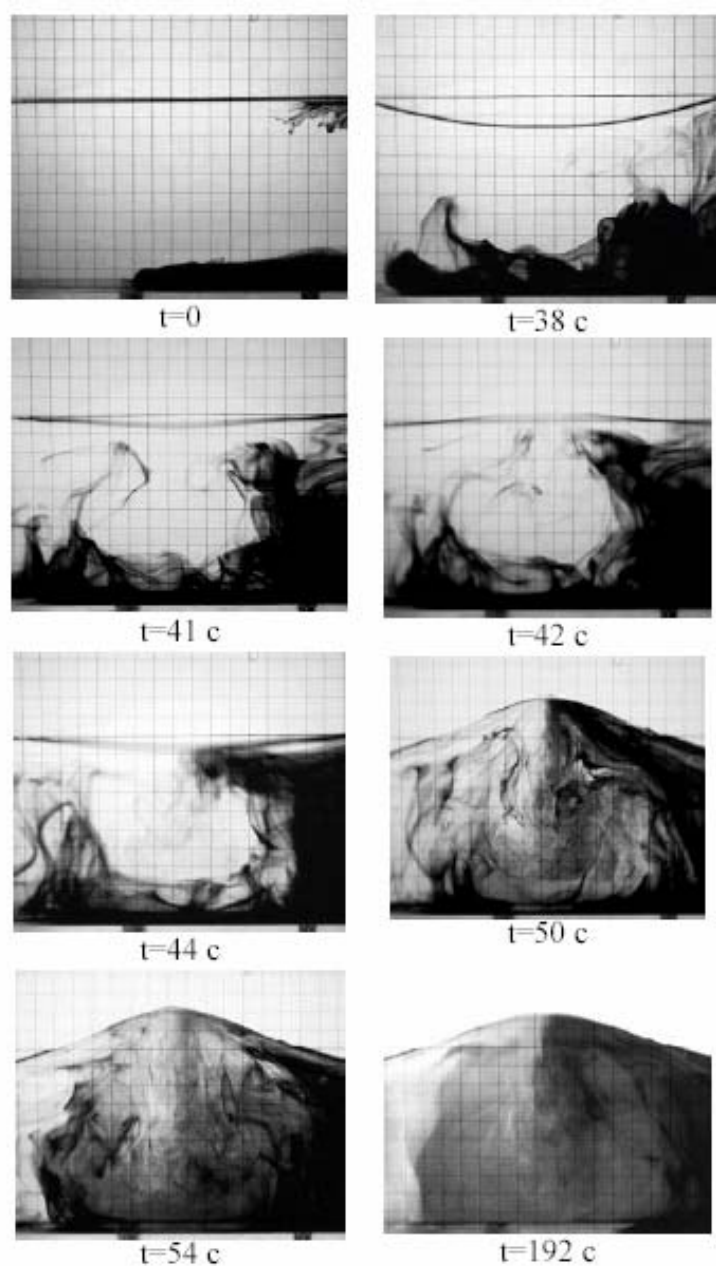


Рис. 6-1. Процесс установления стационарных циркуляционных течений в третьей моде волны Фарадея: $s=1.8$ см, $h=10$ см, $n=3$, $T=0.482$ с, $H=5$ см; сетка 1×1 см.

Таким образом, подтверждается вывод [*Longuet-Higgins* (1953); *Dore* (1976)] о наличии вторичных течений в толще жидкости. На рис 6-1 четко прослеживается формирование пары циркуляционных ячеек вторичного

течения – справа и слева от пучности волны. В окрестности узлов происходит подъем двух медленных циркуляционных потоков. Несколько ниже свободной поверхности жидкости потоки поворачивают навстречу друг другу, и под пучностью волны потоки направлены вниз. В эксперименте прослеживается разделение вблизи дна направленного вниз потока под пучностью на два горизонтальных, направленных к ближайшим узлам волны течения. Характерное время циркуляции вторичного течения составляет около $50T$. Горизонтальный размер циркуляционной ячейки равен четверти длины волны, а по вертикали течение охватывает весь слой жидкости, который, что видно из фотографий в моменты $t=54$ и 192 с, весь окрашен красителем.

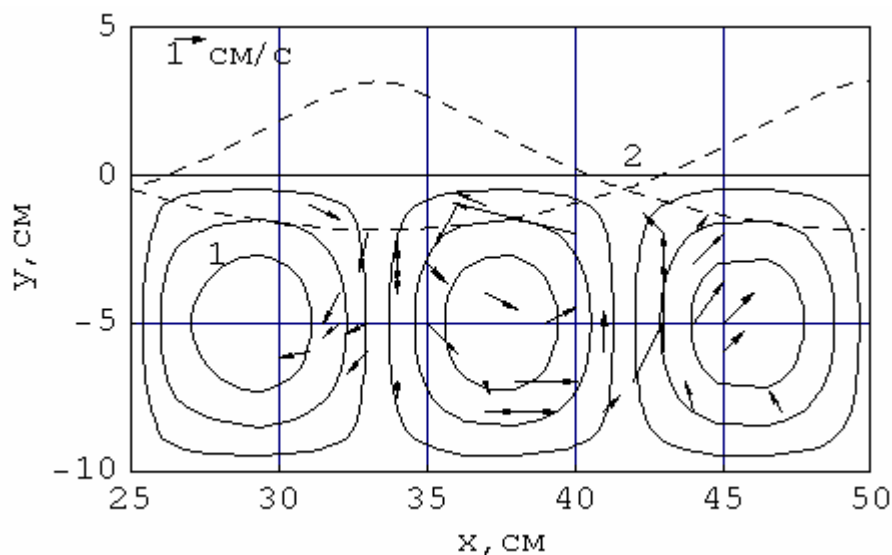


Рис. 6-2. Поле скоростей установившихся вторичных течений в третьей моде поверхностной волны Фарадея: $s=1.8$ см, $h=10$ см, $n=3$, $T=0.482$ с, $H=5$ см: 1 - линии тока, рассчитанные по (1); 2 – свободная поверхность. Слева вверху указан масштабный вектор скорости 1 см/с

Результаты измерений поля скоростей циркуляционных течений в поверхностных волнах Фарадея приведены на рис.6-2. Измерения проводились в волне, изображенной на рис.6-1. Оценки показывают, что модули максимальных вертикальных скоростей (направленное вниз течение, $x \sim 33-34$ см) и под узлом $x \sim 41-43$ см (направленное вверх течение,

$x \sim 41 - 43$ см) характеризуются величинами одного порядка – от 1.5 до 3 см/с. Близкие к горизонтальным течения от узла к подошве вблизи свободной поверхности ($-2.5 \text{ см} < y$, $37 < x < 40$ см) и от подошвы к узлу ($9 < y < 7$ см, $37 < x < 40$ см) характеризуются модулем скорости 3–4 см/с. Если в качестве характерной скорости колебательного движения частиц жидкости принять величину $H\omega/2 \approx 30$ см/с, то скорость вторичного циркуляционного течения оказывается на порядок меньше.

На рис.6-2 нанесены также линии тока вторичных течений, рассчитанные через приведенную в [Longuet-Higgins (1953)] функцию тока:

$$\Psi_2 = \frac{3\kappa H^2 \omega \sin 2\kappa x}{4\text{sh}^2 \kappa h (\text{sh} 4\kappa h - 4\kappa h)} (\kappa h \text{ch} 2\kappa h \text{sh} 2\kappa y - \kappa y \text{ch} 2\kappa y \text{sh} 2\kappa h) \quad (6.1)$$

где κ и ω – волновое число и частота стоячей поверхностной волны, соответственно, а координаты x и y – те же, что и на рис.6-2.

Правда, необходимо сделать два замечания. Во-первых, выражение (6.1) для функции тока было получено в [Longuet-Higgins (1953)] при условии, что отношение высоты H стоячей волны к толщине $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ пограничного слоя Стокса есть малая величина, тогда как в условиях данного эксперимента оно имеет порядок 10^2 . Во-вторых, в формуле (6.1) опущен знак минус, который был у выведенной в [Longuet-Higgins (1953)] функции тока. Если бы этого не было сделано, то направление течения вдоль рассчитанных линий тока в узловых областях и под пучностью волны оказалось противоположным определенному экспериментально направлению.

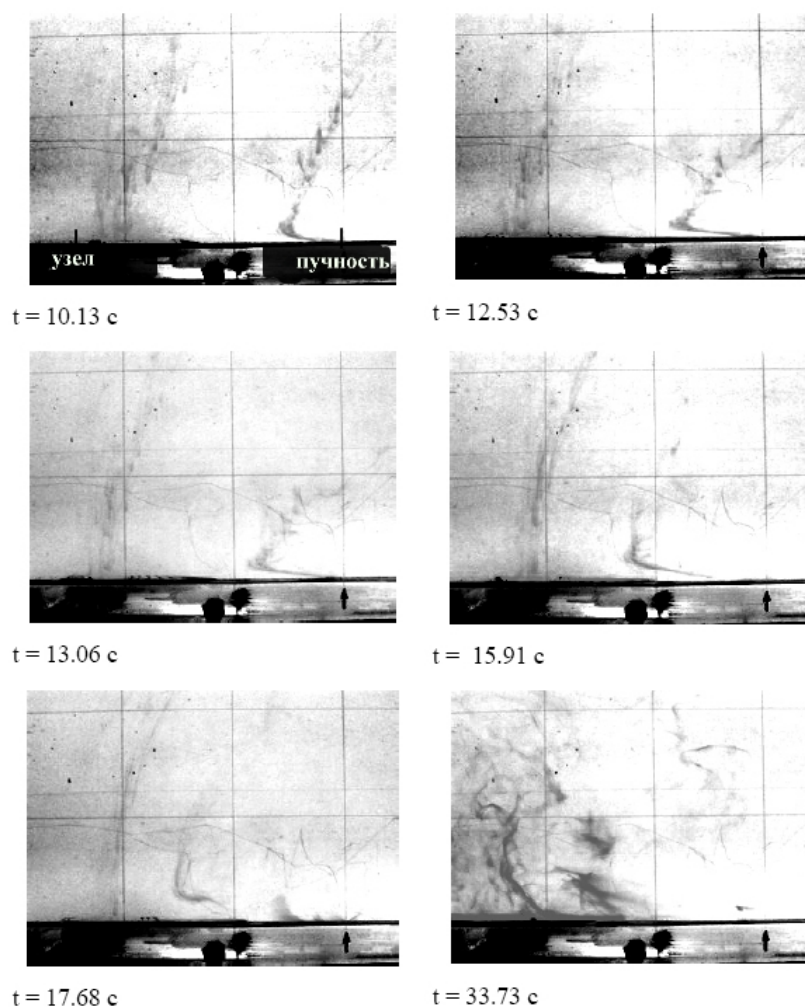


Рис. 6-3. Процесс распространения красителя (перманганата калия) в придонной области под пучностью и узлом второй моды волны Фарадея: $s=1.8$ см, $h=15$ см, $n=2$, $T=0.584$ с, $H=8.9$ см; сетка 5×5 см.

Отметим, что близкие по структуре описанным течения были зафиксированы в [Shavit et al (2003)], где исследовался процесс вовлечения твердых частиц из слоя донных осадков под действием осциллирующего течения, создаваемого при суперпозиции падающей и отраженной поверхностных волн (коэффициент отражения ~ 0.9 , $H=2.5$ см, $\lambda=22.5$ см, $T=0.4$ с, $h=5$ см). Результаты измерения скорости по изображениям частиц (метод PIV) показали наличие медленных стационарных течений, причем их направление совпадало с данными настоящего эксперимента – течение в

циркуляционной ячейке слева от пучности волны происходит по ходу часовой стрелки [Shavit *et al* (2003)].

Для подтверждения вывода о направлении течений в циркуляционных ячейках несколько кристаллов перманганата калия помещались на дно сосуда под пучностью и узлом второй моды стоячей волны. После установления стационарных колебаний жидкости производилась видеосъемка со скоростью 30 кадр/с. Последовательность кадров, характеризующая процесс распространения красителя, представлена на рис.6-3. На кадре $t=0$ указаны положения пучности и узла волны. В течение почти 16 секунд (или 28 периодов волны) на расстоянии 1-2 см от дна наблюдается устойчивое течение от пучности к узлу, тогда как под узлом имеется достаточно развитое струйное течение от дна к свободной поверхности. Только к моменту $t=33.73$ с (около 60 периодов волны) нарушается регулярность этих течений, причем именно эта величина по данным эксперимента отвечает полному времени прохождения частицы – трассера по замкнутой траектории в циркуляционной ячейке.

Для определения траектории индивидуальной жидкой частицы в сложном движении – колебательном и медленном стационарном переносе – была использована цифровая видеосъемка со скоростью 30 кадр/с. Съемка проводилась для второй волновой моды, имеющей $H=8.9$ см и $T=0.583$ с, при глубине воды $h=15$ см. В воду были введены около 10 частиц янтаря (диаметр около 0.3–0.5 мм) и регистрировалось движение трассеров в области между пучностью и узлом волны. На полученной последовательности кадров была выбрана частица с начальными координатами $x_0=25.7$, $y_0=-6.5$ см. С шагом по времени $\Delta t=T/2=0.29$ с измерялись координаты этой частицы. Траектория частицы приведена на рис. 6-4,а, где точками отмечены координаты, измеренные через Δt . Кривые 3 на рис. 6-4,а соответствуют двум крайним положениям свободной поверхности. Частица, которая в начальный момент времени находилась

под пучностью волны, через время, соответствующее 21 периоду волны, переместилась в область узла, причем движение происходило по ходу часовой стрелки - $x=18.0$, $y=0.4$ см при $t=21T=12.24$ с. Для наглядности на рисунке также приведена линия тока, определяющая данную циркуляционную ячейку.

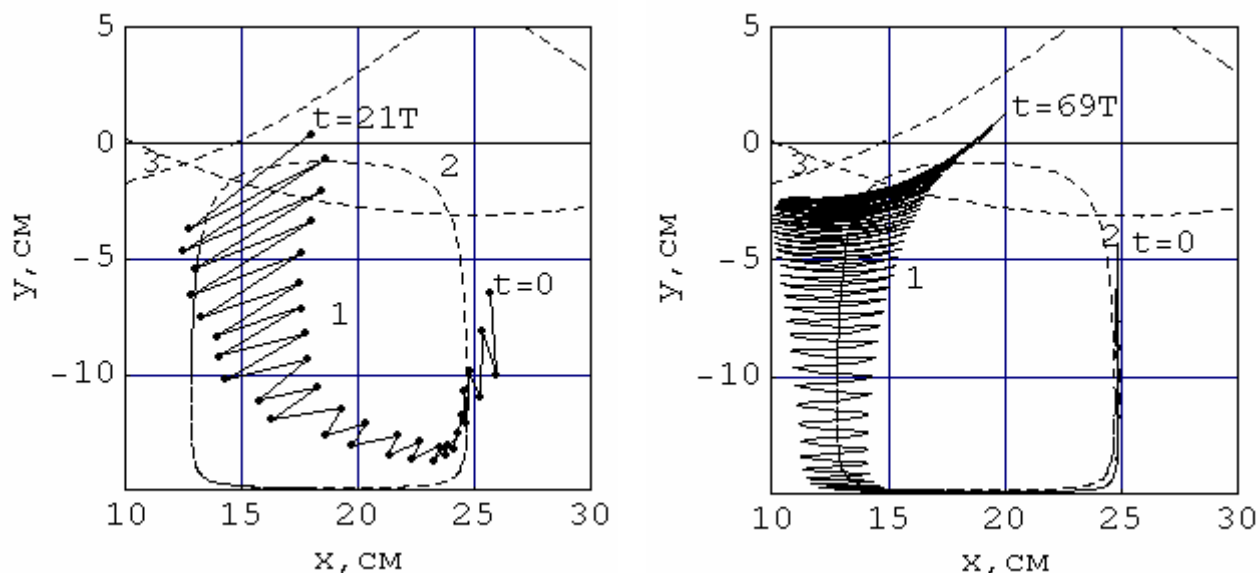


Рис. 6-4. Траектория индивидуальной частицы во второй моде волны Фарадея: $H=8.9$ см, $T=0.583$ с, $h=15$ см: а – эксперимент, б – результаты расчета, 1 – траектория частицы - трассера, 2 – линия тока, 3 – свободная поверхность

Рассматривая движение индивидуальной частицы жидкости как сумму колебаний около ее начального положения, определяемых потенциалом скорости Φ , и медленного дрейфа, определяемого функцией тока Ψ_2 , можно рассчитать траекторию частицы жидкости в поле стоячей волны. В первом приближении Φ определяется как

$$\Phi(x, y, t) = -H \frac{\omega \cosh k(y+h)}{2k \sinh kh} \cos kx \sin \omega t \quad (2.2)$$

где H , ω , k – высота волны, частота волны и волновое число, соответственно.

Для построения траектории какой-либо частицы жидкости была проинтегрирована система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \end{cases} \quad (6.3)$$

с начальными условиями $x(0)=x_o$, $y(0)=y_o$, где x_o и y_o - координаты частицы жидкости в некоторый начальный момент времени.

Решение $x=x(t)$, $y=y(t)$ системы (6.3) описывает движение частицы в переменных Лагранжа.

Результаты численного решения системы (6.3) представлены на рис. 6-4,б. В качестве H , ω , k использованы данные эксперимента (см. рис. 6-4,а), а начальное положение частицы было задано координатами $x_o=24.7$, $y_o=-7.8$ см. Время счета составляло 40 с (или $69T$). Видно, что рассчитанная траектория напоминает полученную в эксперименте. Отметим, однако, что расчетное время ($69T$) существенно превосходит время перемещения реальной частицы ($21T$), причем данное расхождение нельзя списать на гидродинамические характеристики частицы – трассера (форма, плавучесть).

Исследовалась начальная стадия образования донных форм на поверхности слоя осадков на дне сосуда под воздействием волн Фарадея. В экспериментах использовался полидисперсный песок с максимальным размером частиц $d=0.12-0.18$ мм. Начальная толщина горизонтального слоя составляла величину 7 мм. Оказалось, что во взвешенное состояние сначала переходят мелкие частицы под узлом волны, и через достаточно продолжительное время на первоначально горизонтальной границе вода – песок появляются три возмущения в виде бугорков, выступающих приблизительно на 1 мм и расположенных друг от друга на расстоянии 17

мм. Можно предположить, что именно описанные выше стационарные вторичные течения инициируют образование возмущений на поверхности слоя осадков. При увеличении амплитуды стоячей волны на основе этих малых возмущений образуются регулярные донные формы – рисунки 6-5 и 6-6.

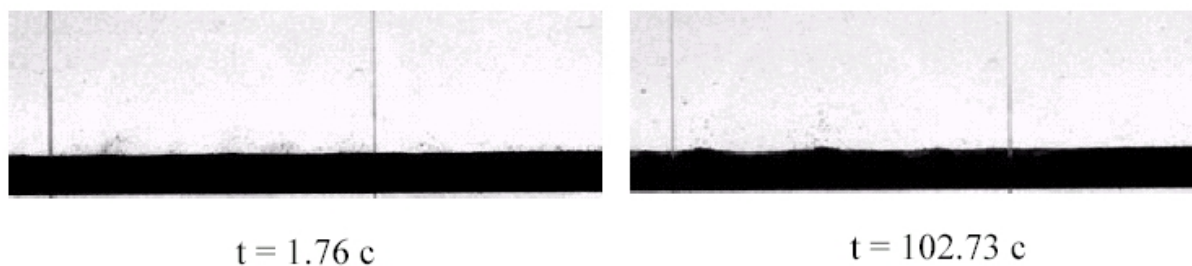


Рис. 6-5. Возмущение первоначально горизонтальной поверхности слоя осадков в области под узлом волны Фарадея: $s=0.25$ см, $h=15$ см, $n=2$, $T=0.584$ с, $H=8.9$ см. На фотографиях видна сетка со стороной квадрата 5 см, середина между вертикальными линиями соответствует узлу волны

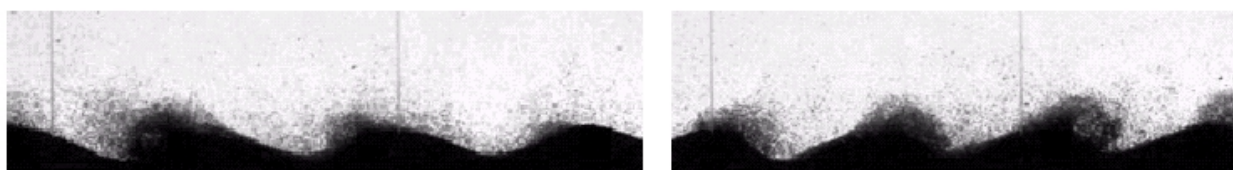


Рис. 6-6. Регулярные донные формы в области под узлом волны Фарадея: $s=0.25$ см, $h=15$ см, $n=2$, $T=0.612$ с, $H=12.5$ см. Высота донных форм ~ 8 мм, длина ~ 20 мм

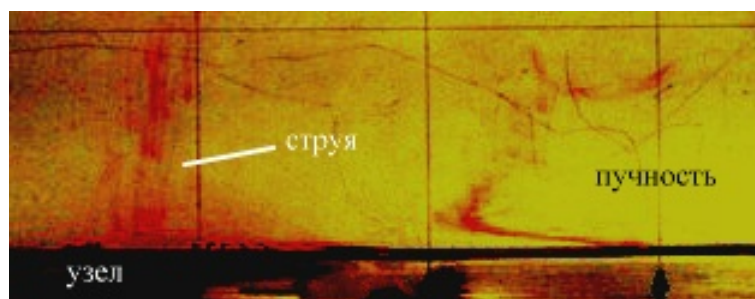


Рис. 6-7. Визуализация течений в придонной области: под пучностью волны течение направлено справа налево, а под узлом стоячей волны – вертикально вверх: $s=0.25$ см, $h=15$ см, $n=2$, $T=0.590$ с, $H=8$ см

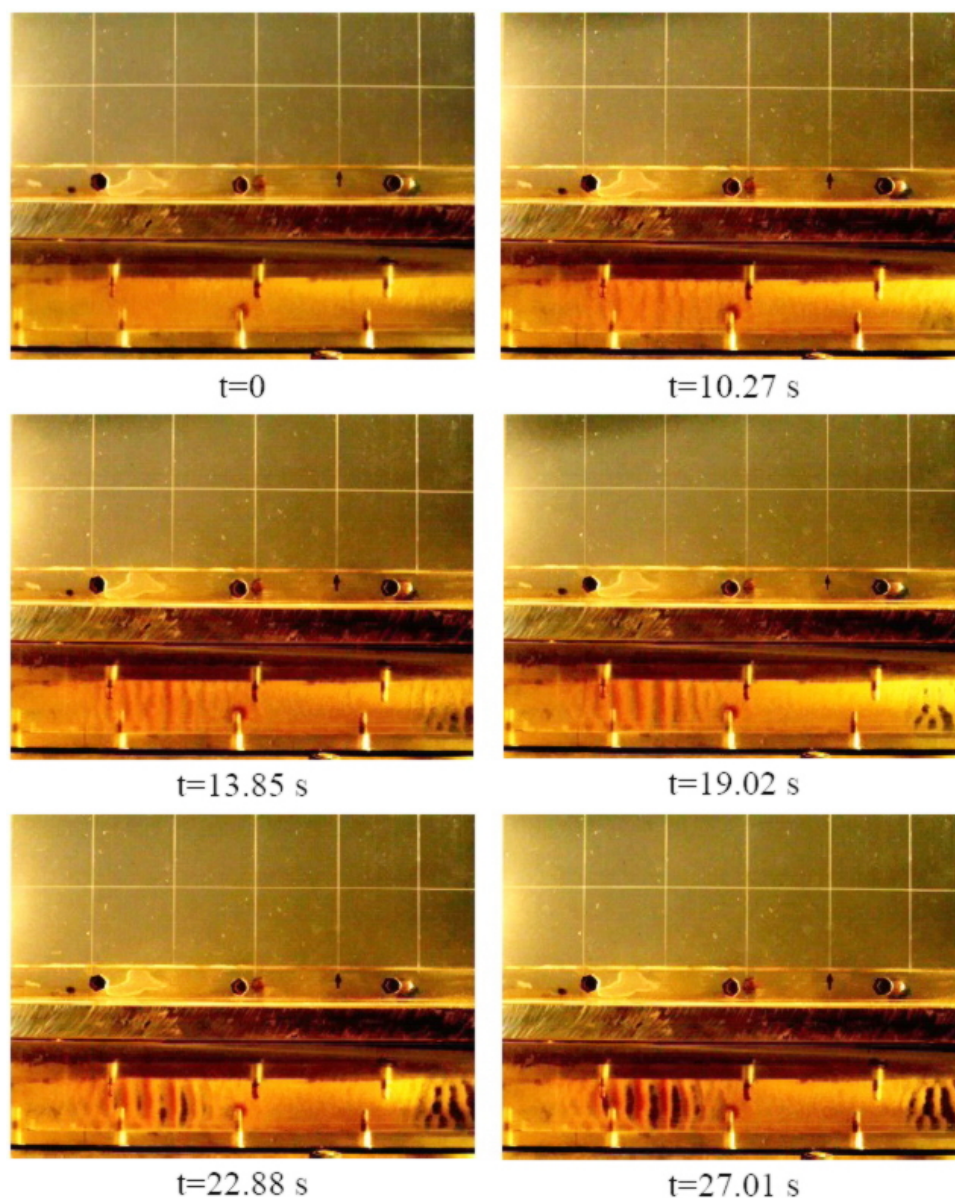


Рис. 6-8. Образование донных форм в областях под узлами стоячей волны: $s=0.25$ см, $h=15$ см, $n=2$, $T=0.590$ с, $H=8$ см, максимальный размер частиц песка $d=0.12 - 0.18$ мм, толщина слоя песка $h_s=0.15$ см

Была проведена серия экспериментов по исследованию течений в области вблизи дна. Посредством кристаллов перманганата калия выявлены стационарные струйные течения в области под узлом стоячей волны - рис. 6-7). Именно течения такого типа, по мнению авторов, инициализируют образование донных форм при наличии слоя осадков на дне сосуда. Так, на рис. 6-8 приведена последовательность снимков, описывающих процесс развития регулярных донных форм. В экспериментах использовался песок

максимального размера $d=0.12-0.18$ мм. Начальная толщина горизонтального слоя составляла величину $h_s=0.15$ мм (см. рис. 6-8, $t=0$). Под дном сосуда под углом 45° устанавливалось зеркало, что позволяло производить съемку донных осадков спереди и снизу.

6.3. Эффект массопереноса в стоячих внутренних волнах

Изучались стоячие внутренние волны на границе раздела двух слоев несмешивающихся жидкостей (керосин-водный раствор глицерина, плотности $\rho_1=0.79$ г/см³, $\rho_2=1.09$ г/см³; кинематические вязкости $\nu_1=1.71$ сСт, $\nu_2=2.76$ сСт; глубины слоев $h_{1,2}=8$ см) в прямоугольном сосуде ($L=50$ см, $W=4$ см, $H=40$ см). Сосуду сообщались гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой s и частотой Ω . При $s=2.4$ см и $\Omega=7.48$ с⁻¹ возбуждалась вторая мода внутренних волн, имеющая два узла, частоту $\Omega/2$ и высоту $H=4.4$ см. Исследовалось поле средних скоростей в нижней жидкости - водном растворе глицерина.

Для индикации течений в нижнюю жидкость вводился краситель нейтральной плавучести. Если бы частицы жидкости совершали только гармонические колебания около своих положений равновесия, то распространение красителя определялось лишь амплитудой этих колебаний (≤ 4.4 см) и молекулярной диффузией, вследствие чего он оставался бы вблизи границы раздела, по крайней мере, в течение нескольких десятков периодов волны. В эксперименте же он опускался вниз и через 5-6 периодов достигал дна. Это доказывает существование в стоячих волнах дополнительных течений.

На рис. 6-9 представлена серия кадров, определяющих процесс распространения красителя для моментов времени $t_n = T n$, где T - период волны. Четко прослеживается динамика формирования пары

циркуляционных ячеек течения - справа и слева от пучности волны. Под пучностями течение направлено вниз. У дна происходит его разделение на два горизонтальных потока. Затем - поворот каждого потока вдоль вертикальной линии, проходящей через ближайший узел волны. Наконец, потоки замыкаются вдоль линии вблизи границы раздела - рис. 6-9. Характерное время полной циркуляции равно 10-15 периодам волны.

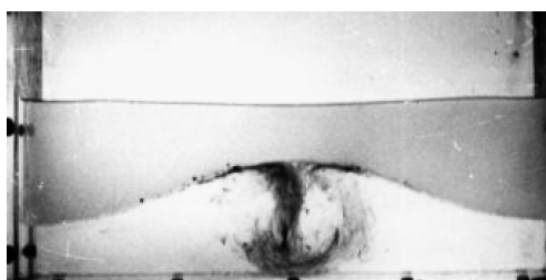
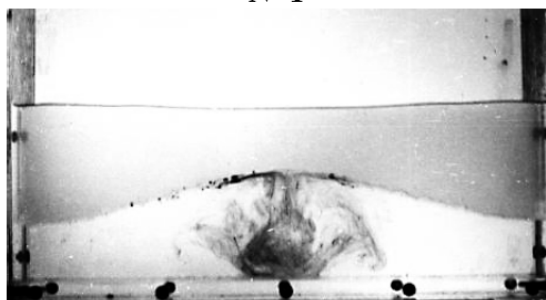
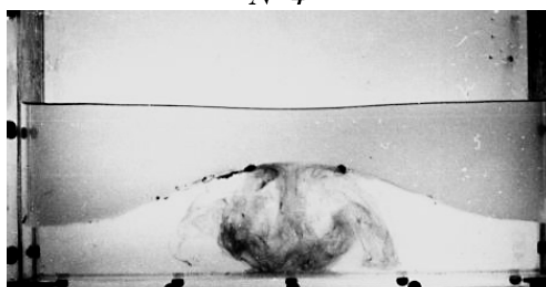
 $N=1$  $N=4$  $N=6$  $N=8$

Рис. 6-9. Процесс установления стационарных циркуляционных течений в нижнем слое при возбуждении второй моды волны Фарадея на границе раздела керосин - водный раствор глицерина; $t_n = T N$, $T=0.840$ с

Горизонтальный размер ячейки равен четверти длины волны ($\lambda/4$), а вертикальный зависит от амплитуды волны и может приближаться к глубине слоя.

Скорости течения относительно сосуда измерялись следующим образом. В нижний слой жидкости вводились трассеры - частицы янтаря, плотность которых $1,1 \text{ г/см}^3$, а размер каждой не превышал 1 мм. С учетом общей картины течения измерительная область, граничащая с левой торцевой стенкой сосуда, разбивалась на 17 зон размерами $1 \times 2 \text{ см}$ так, чтобы течение в пределах одной зоны можно было считать однородным. Медленное циркуляционное течение представляется на рис. 6-10 векторами средней скорости с началом в центре каждой зоны. Векторы скорости определялись как отношение вектора перемещения частиц в пределах зоны к соответствующему временному промежутку, кратному периоду волны. Для нахождения одного вектора скорости выполнялись четыре серии из десяти измерений в каждой. Проведенные оценки показали, предельная ошибка определения средней скорости не превышает 10%.

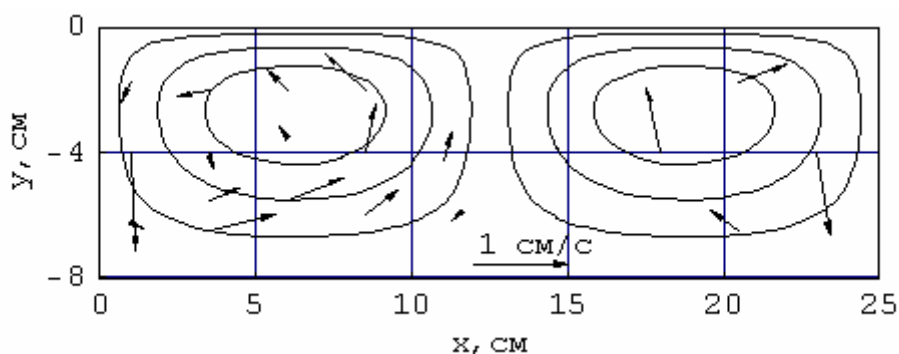


Рис. 6-10. Поле скоростей установившихся вторичных течений во второй моде внутренней волны Фарадея: керосин-водный раствор глицерина, плотности $\rho_1=0.79 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.09 \text{ г/см}^3$; кинематические вязкости $\nu_1=1.71 \text{ сСт}$, $\nu_2=2.76 \text{ сСт}$; $s=2.4 \text{ см}$, $h_{1,2}=8 \text{ см}$, $n=2$, $\Omega=7.48 \text{ с}^{-1}$, $H=4.4 \text{ см}$. Внизу в центре рисунка указан масштаб вектора скорости 1 см/с

Приведенное на рис. 6-10 поле скоростей полностью подтверждает циркуляционный характер осредненных течений нижней жидкости. Оценка максимальных средних значений горизонтальной $u^{\partial p}_{max}$ и вертикальной $v^{\partial p}_{max}$ компонент дрейфовой скорости дают

$$u_{max}^{\partial p}=0.9 \text{ см/с}, \quad v_{max}^{\partial p}=1.1 \text{ см/с},$$

тогда как по результатам измерений с помощью лазерного доплеровского анемометра максимальная скорость колебательного движения составляет величину порядка 10-20 см/с, т.е. скорость дрейфа частиц жидкости на порядок меньше скорости колебательной.

В качестве нижней жидкости также использовался водный раствор NaCl ($\rho_2=1.08 \text{ г/см}^3$), глубина слоев оставались прежними $h_{1,2}=8 \text{ см}$. Оказалось, что для второй моды при $H=4$ и 6 см циркуляционные ячейки существуют, однако их вертикальный масштаб оценивается величиной $h_2/2$, т.е. циркуляционные течения не достигают придонной области. Скорость дрейфа в 3-4 раза меньше соответствующей величины для случая волны на границе керосин - водный раствор глицерина. Единственное отличие данного эксперимента от прежнего заключается в значениях вязкости нижней жидкости - вязкость раствора поваренной соли почти в три раза меньше вязкости раствора глицерина.

Отметим, что результаты гидродинамической модели [Dore(1973, 1976)] находятся в полном качественном соответствии с данными настоящего эксперимента. В [Dore(1973, 1976)] функция тока, описывающая движение жидкости при наличии стоячих волн на границе раздела двух вязких жидкостей, представлялась в виде асимптотического ряда, причем в качестве малого параметра разложения использовалась величина α порядка крутизны волны. Усредненный по времени квадратичный по α член разложения описывает стационарную диффузию завихренности (массоперенос) и для более тяжелой жидкости с точностью до константы определяется выражением:

$$\Psi_2 \sim \frac{\rho_1 \sqrt{v_1}}{\rho_1 \sqrt{v_1} + \rho_2 \sqrt{v_2}} \frac{H^2}{4} \omega S_2(y) (\text{cth} \kappa h_1 + \text{cth} \kappa h_2)^2 \sin 2\kappa x, \quad (6.4)$$

где

$$S_2(y) = M_2[(1 + y/h_2) \operatorname{sh} \kappa y - \frac{y}{\kappa h_2^2} \operatorname{sh} \kappa h_2 \operatorname{sh} \kappa(y + h_2)],$$

$$M_2 = -\frac{\rho_2 v_2}{2G_2(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)}, \quad G_2 = \frac{\operatorname{sh} \kappa h_2 \operatorname{ch} \kappa h_2 - \kappa h_2}{h_2^2} L^{*2}$$

Здесь $L^* = \lambda$ - характерный масштаб длины, в качестве которого выбрана длина стоячей волны.

На рис. 6-10 приведена система линий тока, определяемых соотношением (6.4). Отметим, что для верхней жидкости соответствующая картина может быть получена зеркальным отображением относительно оси x .

Заключение

1. Использование волн Фарадея в экспериментах по исследованию стоячих гравитационных волн на свободной поверхности жидкости и на границе раздела двух жидкостей впервые позволило продемонстрировать наличие медленных вторичных стационарных циркуляционных течений в толще жидкости и измерить поле скоростей этих течений.
2. Определена траектория индивидуальной жидкой частицы в ее сложном движении – колебательном и медленном стационарном переносе.
3. Для поля скоростей вторичных течений и траектории индивидуальной жидкой частицы проведено сравнение данных измерений с результатами расчетов по аналитическим моделям.
4. Зарегистрировано развитие донных форм на поверхности слоя осадков, помещенного на дно сосуда.

Основные выводы и результаты работы

1. Разработан метод генерации и визуализации волн Фарадея; создана экспериментальная установка, обеспечившая прецизионные измерения и анализ условий возбуждения и характеристик волн Фарадея.
2. По результатам изучения поверхностных волн Фарадея выработана общая методика исследования параметрического резонанса в жидкости.
3. Экспериментально реализована возможность возбуждения волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости и исследованы свойства этих волн.
4. Экспериментально установлен эффект критической глубины в случае поверхностных волн Фарадея. Подтвержден вывод теории о том, что при критической глубине резонансная зависимость имеет две ветви, одна из которых определяется мягкой восстанавливающей силой, другая – жесткой восстанавливающей силой.
5. Исследован срыв параметрических колебаний однородной и двухслойной жидкостей, обусловленный разрушением волн Фарадея. В предложенной модели вводится эквивалентный коэффициент затухания разрушающихся волн. Справедливость принятого подхода продемонстрирована в экспериментах с механической системой с одной степенью свободы – физическом маятнике с вертикально колеблющейся точкой подвеса.
6. Исследован механизм разрушения поверхностных волн Фарадея, состоящий в образовании струйного всплеска вследствие коллапса каверны на формирующемся гребне волны. Зарождение каверны

обусловлено нелинейностью самих волн Фарадея – наличием двух малых возмущений свободной поверхности, бегущих навстречу друг другу и образующих каверну.

7. Исследован механизм разрушения внутренних волн Фарадея, состоящий в развитии сдвиговой неустойчивости границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в области узлов стоячей волны. Выявлены три стадии искажения синусоидального волнового профиля: образование коротких вторичных волн, их обрушение и переход к крупномасштабным вихреобразованиям.
8. Экспериментально установлено наличие в поверхностных и внутренних волнах Фарадея системы вторичных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости. Наряду с колебаниями с частотой волны частицы жидкости медленно перемещаются в соответствии с этими циркуляционными течениями.

Литература

- Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* (1998) Одночастотные колебания нелинейных систем с распределенными параметрами // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 743-755.
- Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* (1981) Теория колебаний. М.: Наука, 1981, 568 с.
- Базилевский А.В., Вонгвизес С., Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* (2001) Экспериментальное исследование влияния структуры дна на затухание стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 143-148.
- Богачева Н.Я., Моисеев Н.Н.* (1964) Три задачи о колебаниях вязкой жидкости // ЖВММФ. 1964. Т.4. №2. С.317-326.
- Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* (1974) Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. испр. доп. М.: Наука, 1974. 504 с.
- Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.И.* (1977) Введение в динамику сосудов с жидкостью. Томск: Изд-во Том. Ун-та. 1977. 144 с.
- Болотин В.В.* (1956) О движении жидкости в колеблющемся сосуде // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 293-294.
- Бордаков Г.А., Карпов И.И., Секерж-Зенькович С.Я., Шингарева И.К.* (1994) Параметрическое возбуждение поверхностных волн при глубине жидкости, близкой к критической // ДАН.. Т. 334. № 6. С.710-711.
- Брискман В.А.* (1976) Параметрическая стабилизация границы раздела жидкостей // ДАН СССР. 1976. Т.226. №5. С.1041-1044.
- Брискман В.А., Иванова А.А., Шайдулов Г.Ф.* (1976) Параметрические колебания жидкости в сообщающихся сосудах // Изв.АН СССР. МЖГ. 1976. №2. С. 36-43.

- Владимиров В.А.* (1981) Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости // ЖПМТФ. 1981. №6. С. 168-174.
- Ганиев Р.Ф.* (2008) *Волновые машины и технологии (введение в волновую технологию)*. М.: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 192 с.
- Ганиев Р.Ф., Лакиза В.Д., Цапенко А.С.* (1976) Об относительных движениях и механическом равновесии среды при вибрационных воздействиях в условиях невесомости // ДАН УССР. 1976. №10. С. 903-908.
- Григорян С.С., Жигачев Л.И., Когарко Б.С., Якимов Ю.Л.* (1969) Параметрический резонанс в сообщающихся сосудах при вертикальных переменных нагрузках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. №2. С.148-150.
- Зацепин А.Г., Гриценко В.А., Кременецкий В.В., Поярков С.Г., Строганов О.Ю.* (2005) Лабораторное и численное исследование процесса распространения плотностного течения по склону дна // Океанология. 2005. Т. 45. № 1. С. 5–15.
- Зеньковская С.М., Новосядлый В.А.* (2008) Влияние вертикальных колебаний на двухслойную систему с деформируемой поверхностью раздела // ЖВММФ. 2008. Т. 48. №9. С.1710-1720
- Иванова А.А., Козлов В.Г., Эвеск П.* (2001) Динамика границы раздела несмешивающихся жидкостей при горизонтальных вибрациях // Изв. АН СССР. МЖГ. 2001. № 3. С. 28-35.
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* (1981) Параметрическое возбуждение внутренних волн // Волны и дифракция. 8 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. М.: Т.1. С. 185-188.
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Никитин Н.Л., Секерж-Зенькович С.Я.* (1982) Об одном способе моделирования процесса возбуждения волн в жидкости областями пониженного давления // Изв. АН СССР. ФАО. 1982. № 4. С. 432-434.

- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* (1985а) Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поверхностных волн. Препринт № 243. М.: ИПМ АН СССР. 56 с.
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* (1985б) Теоретическое и экспериментальное исследование параметрического возбуждения волн конечной амплитуды в двухслойной жидкости. // Волны и дифракция. 9 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Тбилиси: 1985, т. 2. С. 53-56.
- Калиниченко В.А.* (1986) Лабораторное исследование параметрической неустойчивости в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. № 2. С. 206-210.
- Калиниченко В.А.* (1986) Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поверхностных и внутренних волн в жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 1986. 134 с.
- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Суторшин В.Н., Тимофеев А.С.* (1987) Лазерный доплеровский измеритель гидродинамических характеристик внутренних волн // 3 Всесоюзная конф. Применение лазеров в технологии и системах передачи информации. Таллин, 11-13 ноября 1987. 2 с.
- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* (1988) О возбуждении составных стоячих трехмерных волн на границе раздела двухслойной жидкости // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 810-813.
- Калиниченко В.А., Тимофеев А.С.* (1988) Применение лазерного доплеровского анемометра для исследования поля скоростей в стоячей внутренней волне // Сб. науч. тр. МЭИ. 1988. Вып. 164. С. 55-65.
- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* (1991) Экспериментальное исследование массопереноса в стоячих внутренних волнах в двухслойной жидкости // Докл. АН СССР. Т. 318. № 3. С. 553-555.

- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Тимофеев А.С.* (1991) Экспериментальное исследование поля скоростей параметрически возбуждаемых волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 161-166.
- Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* (1995) Экспериментальной исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 122-129.
- Калиниченко В.А., Кравцов А.В., Родригес-Мижангес Р., Секерж-Зенькович С.Я., Флорес-Эстиноза Р.* (2000) Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 285 - 292.
- Калиниченко В.А., Лизаррага-Селайа К., Секерж-Зенькович С.Я.* (2000) О наблюдении стоячих волн большой амплитуды в условиях гармонического резонанса Фарадея // Изв. АН СССР. МЖГ. 2000. № 1. С. 185-188.
- Калиниченко В.А.* (2001) Кинематические характеристики потока жидкости в канале с профилированным дном // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 6. С. 139-145.
- Калиниченко В.А.* (2004) Кинематические характеристики двухфазного потока в прямоугольном канале // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 112-118.
- Калиниченко В.А.* (2005) Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловых областях стоячей внутренней волны // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 6. С. 140-149.
- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* (2007) Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 120-126.
- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* (2008) Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. № 1. С. 141-148.

- Калиниченко В.А.* (2008) Предельная форма и разрушение поверхностных волн Фарадея // Тр. VIII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 22-26 сентября 2008 г.). В 2-х томах. Нижний Новгород: Изд. дом «Диалог Культур», 2008. Т.2. С.356-360.
- Калиниченко В.А.* (2009) О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 4. С. 112-122.
- Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* (2010) О срыве параметрических колебаний жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 128-136.
- Каудерер Г.* (1961) Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
- Колесников К.С.* (2003) Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
- Коробкин А.А.* (1997) Соударение жидких и твердых масс. Новосибирск: Издательство СО РАН. 1997. 200 с.
- Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* (1963) Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч.1,2.
- Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я.* (1993) Параметрическое возбуждение колебаний вязкой жидкости в замкнутом сосуде // ЖВММФ. 1993. Т. 33. № 4. С. 611 – 619.
- Крушинская С.И.* (1965) Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде //ЖВММФ. 1965. Т.5. №3. С. 519-536.
- Ламб Г.* (1947) Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- Левин Б.В., Трубников Б.А.* (1986) «Фазовые переходы» в решетке параметрических волн на поверхности колеблющейся жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. Вып. 7. С. 311-315.
- Левин Б.В., Носов М.А.* (2005) Физика цунами и родственных явлений в океане. М.: «Янус-К», 2005. 360 с
- Луковской И.А.* (1990) Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990. 2986 с.

- Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* (2003) Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 216 с.
- Мак-Лахлан Н.В.* (1953) Теория и приложения функций Матъе. М.: ИЛ, 1953. 476 с.
- Мандельштам Л.И.* (1972) Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972, 470 с.
- Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д., Андронов А.А., Витт А.А., Горелик Г.С., Хайкин С.Э.* (1936) Новые исследования нелинейных колебаний. М.: Радио, 1936, 96 с.
- Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* (1968) Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
- Моисеев Н.Н.* (1953) Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы // Матем. Сб. 1953. Т. 32(74). №1. С. 61-96.
- Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* (1965) Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
- Неволин В. Г.* (1984) Параметрическое возбуждение поверхностных волн // Инж.-Физ. Журнал. 1984. Т. XLVII. № 6. С. 1028-1038.
- Нестеров А.В.* (1982) О параметрическом возбуждении внутренних волн в непрерывно-стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. №2. С. 167-169.
- Нестеров С.В.* (1969) Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3(45). С. 87-97.
- Нестеров С.В.* (1972) Исследование по нелинейной теории гравитационных волн: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 1972. 220 с.
- Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* (1985) Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 319 с.

- Секерж-Зенькович С.Я.* (1983а) Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости при вертикальных колебаниях сосуда // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 1089-1091.
- Секерж-Зенькович С.Я.* (1983б) Параметрическое возбуждение волн конечной амплитуды на границе раздела двух жидкостей разных плотностей. // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1083-1086.
- Секерж-Зенькович С.Я.* (1990) Собственные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде // ПММ. 1990. Т.54. Вып.1. С.51-58
- Секерж-Зенькович С.Я., Калиниченко В.А.* (1979) О возбуждении внутренних волн в двухслойной жидкости вертикальными колебаниями // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 4. С. 797-799.
- Секерж-Зенькович С.Я., Калиниченко В.А.* (1982) Лабораторное моделирование параметрического возбуждения волн в жидкостях и возможные океанические приложения. - В сб. II Всесоюзного съезда океанологов, Севастополь, 1982, вып.2, с.39-40.
- Секерж-Зенькович Я.И.* (1947) К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. Т. 8. № 4. С. 551-553.
- Секерж-Зенькович Я.И.* (1951) Составные стоячие волны конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной глубины // Изв.АН СССР. Сер. Геофиз. 1951. № 5. С. 68-78.
- Секерж-Зенькович Я.И.* (1969) О составных установившихся гравитационных волнах конечной амплитуды // ПММ. 1969.Т. 33. №.4. С. 648-658.
- Сергеев С.И.* (1966) О колебаниях жидкости в трубах при умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 1. С. 168-170.
- Сорокин В.И.* (1957) Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости // Акустический журнал.. Т. 3. Вып. 3. С. 262 - 273.

- Сретенский Л.Н.* (1951) Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР, ОТН. 1951. № 10. С. 1483-1494.
- Сретенский Л.Н.* (1977) Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 815 с.
- Стретт Дж. (Рэлей)* (1955) Теория звука. М.: ГИТТЛ, Т.1, 2.
- Тернер Дж.* (1977) Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977. 432с.
- Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле: - М.: Машиностроение, Пер. с англ. 1985. 472 с
- Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В.* (2004) Классификация трехмерных периодических течений в жидкости // Доклады АН. 2004. Т. 395. № 1. С. 55-58.
- Чашечкин Ю.Д., Приходько Ю.В.* (2007) Регулярные и сингулярные компоненты течений при вынужденных и свободных колебаниях сферы в непрерывно стратифицированной жидкости // Доклады АН. 2007. Т. 414. № 1. С. 44-48.
- Черноустько Ф.Л.* (1966) О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде // ПММ. 1966. Т.30. Вып.6. С.836-847.
- Черноустько Ф.Л.* (1969) Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1969. 230 с.
- Шлихтинг Г.* (1956) Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 528 с.
- Шмидт Г.* (1978) Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
- Шулейкин В.В.* (1953) Физика моря. М.: АН СССР. 1953. 990с.
- Шуляк Б.А.* Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М.: Наука, 1971. 400 с.
- Abramson H.N.* (1966) The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers // NASA SP-106. 1966.

- Aoki H.* (1980) Higher order calculation of finite periodic standing gravity waves by means of the computer // *J. Phys. Soc. Japan*. 1980. V. 49. No. 4. P. 1598 – 1606.
- Bagnold R.A.* (1947) Sand movement by waves: some small-scale experiments with sand of very low density // *J. Inst. Civ. Engrs.*. V. 27. P. 447-469.
- Benielli D., Sommeria J.* (1998) Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 374. P. 117-144.
- Benjamin T.B., Ursell F.* (1954) The stability of the plane free surface of a liquid in vertical motion // *Proc. Roy. Soc.* 1954. V. A225. No. 1165. P. 505-515.
- Brand R.P., Nyborg W.L.* (1965) Parametrically excited surface waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 1965. V. 37. No. 3. P. 509 - 515.
- Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D. H., Thais L.* (2003) Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 490. P. 217–249.
- Caligny A.F.H.* (1878) Expériences sur les mouvements des molécules liquides des ondes courantes, considérées dans leur mode d'action sur la marche des navires // *Compt. Rendu Acad. Sci. Paris*. V. 87. P. 1019-1023.
- Chan E. S., Melville W. K.* (1988) Deep water plunging wave pressures on a vertical plane wall // *Proc. R. Soc. London. Ser. A*. 1988. V. 417. No. 1852. P. 95–131.
- Chester W., Bones J.A.* (1968) Resonant Oscillations of Water Waves. II. Experiment. // *Proc. R. Soc. Lond. A* 1968. V.306. P. 23-39.
- Collins J.A.* (1963) Inception of turbulence at the bed under periodic gravity waves // *J. Geophys. Res.* 1963. V. 68. No. 21. P. 6007-6013.
- Cooker M. J.* (2002) Unsteady pressure fields which precede the launch of free-surface liquid jets // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 2002. V.458. No. 2018. P. 473-488.
- Craik, A. D. D.* *Wave Interactions and Fluid Flows*. Cambridge etc., Cambridge University Press 1986. XII. 322 P

- Das S.P., Hopfinger E.I.* (2008) Parametrically forced gravity waves in a circular cylinder and finite-time singularity // *J. Fluid Mech.* 2008. Vol. 599. P. 205-228.
- Dean R.G., Dalrymple R.A.* (1991) *Water waves mechanics for engineers and scientists.* World Scientific, Singapore. 1991. 353 p.
- Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N.* (1965) Liquid surface oscillation in longitudinally excited rigid cylindrical containers // *AIAA J.* 1965. V. 3. No. 4. P. 685-695.
- Dore B.D.* (1973) On mass transport induced by interfacial oscillations at a single frequency // *Proc. Camb. Phil. Soc.* V. 74. No. 2. P. 333-347.
- Dore B.D.* (1976a) Double boundary layers in standing surface waves // *Pure Appl. Geophys.* // 1976. V. 114. P. 629-637.
- Dore B.D.* (1976b) Double boundary layers in standing interfacial waves // *J. Fluid Mech.* Vol 76. No. 4. P. 818-828.
- Drazin P.G.* (1962) On stability of parallel flow of incompressible fluid of variable density and viscosity // *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1962. Vol. 58. P. 646-661.
- Faltinsen O.M., Timokha A.N.* (2009) *Sloshing.* Cambridge Univ. Press, 2009. 608 p.
- Faraday M.* (1831) On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* 1831. V. 121. P. 299-340.
- Fultz D.* (1962) An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1962. V.13. No.3. P.193-212.
- Goodridge C.L., Shi W.T., Lathrop D.P.* (1997) Breaking waves: bifurcations leading to a singular wave state // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V.56. No.4. P.4157-4161.
- Harrison W. J.* (1908) The influence of viscosity and capillarity on waves of finite amplitude. // *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 7, pp. 107-21.

- Hashimoto H., Sudo S.* (1984) Dynamic behavior of liquid free surface in a cylindrical container subject to vertical vibration // *Bull. JSME*. 1984. V. 27. No. 227. P. 923-930.
- Hill D.F.* (2002) The Faraday resonance of interfacial waves in weakly viscous fluids // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. No. 1. P. 158-169.
- Hogrefe J. E., Peffley N.L., Goodridge C.L., Shi W.T., Hentschel H.G.E., Lathrop D.P.* (1998) Power-law singularities in gravity-capillary waves // *Physica D*. 1998. V.123. No. 1. P.183-205.
- Ibrahim R. A.* (2005) *Liquid Sloshing dynamics: theory and applications*. Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
- Jiang L., Perlin M., Schultz W.W.* (1998) Period tripling and energy dissipation of breaking standing waves // *J. Fluid Mech.* V.369. P.273–299.
- Jiang L., Ting C.L., Schultz W.W.* (1996) Moderate and steep Faraday waves: instabilities, modulation, and temporal asymmetries // *J. Fluid Mech.* 1996. V.329. P.275-307.
- Kajiura K.* (1968) A model of the bottom boundary layer in water waves // *Bull. Earthquake Res. Inst. Univ. of Tokyo*. 1968. V. 46. No. 1. P. 75 — 123.
- Kalinitchenko V.A., S.Ya. Sekerj-Zenkovich, S. Wongwises, R.R. Mijangos* (1999) The generation of sand waves by oscillating flows// *Proc. Int. Conf. Modern Approaches to Flows in Porous Media*, 6-8 Sept., 1999, Moscow, Russia, 101-103.
- Kalinichenko V.A.* (2002) Velocity field features in a horizontal air-water flows // *Selected Papers of Int. Conf. Fluxes and Structures in Fluids*. Moscow, Russia, June 20-22, 2001. Moscow: Institute for Problems in Mechanics RAS, 2002. P. 87-92.
- Kalinichenko V.A., Sekerj-Zenkovich S.Ya.* (2006) An experimental study of mass transport in standing surface and internal waves // *Selected Papers of Int. Conf. Fluxes and Structures in Fluids – 2005*. Moscow, Russia, June 20-23, 2005. Moscow: Institute for Problems in Mechanics RAS, 2006. P.166-170.

- Kalinichenko V.A.* (2008) On breaking Faraday waves and jet eruption // Selected Papers of Int. Conf. Fluxes and Structures in Fluids – 2007. Saint Petersburg, Russia, July 02-05, 2007. Moscow: Institute for Problems in Mechanics RAS, 2008. P. 98-104.
- Kalinichenko V.A., Sekerj-Zenkovich S.Ya.* (2009) On quenching of Faraday waves and parametric pendulum // Abstracts of Int. Conf. Fluxes and Structures in Fluids: Physics of Geospheres. Moscow, June 24-27 2009. Moscow: A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 2009. V. 1. P.112-113.
- Kamphuis J.W.* (1975) Frictions factors under oscillatory waves // J. Waterways, Harbors and Coastal Eng. Div. Proc. ASCE. 1975. V. 101. No. 2. P. 135 — 144.
- Keulegan G.H.* (1959) Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt. 1. P. 33 - 50.
- Keulegan G.H.* (1949) Interfacial instability and mixing in stratified flows // J. Res. Nat. Bur. Stand. 1949. V.43. P.487-500.
- King M.R., Leighton D.T., McCready M.J.* (1999) Stability of oscillatory two-phase Couette flow: theory and experiment // Phys. Fluids. 1999. V.11. No.4. P. 833-844.
- Kobine J.J.* (2008) Nonlinear resonant characteristics of shallow fluid layers // Phil. Trans. R. Soc. A. 2008. V. 336. P. 1331-1346.
- Kiyashko S.V., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.S.* (1996) Rotating spirals in a Faraday experiment // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. No. 5. P. 5037-5040.
- Koneko A., Honji H.* (1979) Double structures of steady streaming in the oscillatory viscous flow over a wavy wall // J. Fluid Mech. 1979. V. 93. No.4. P. 727-736.
- Kumar K.* (1996) Linear theory of Faraday instability in viscous liquids. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. No. 1948. P. 1113 –1126.

- La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M.A.* (2002) Interfacial gravity waves in a two-fluid system // *Fluid Dyn. Res.* 2002. V. 30. P.31–66.
- Liu A.-K., Davis S.H.* (1977) Viscous attenuation of mean drift in water waves // *J. Fluid Mech.* V. 81. No. 1. P. 63-84.
- Liu P.L.-F.* (1973) Damping water waves over porous bed // *J. Hydraul. Div. ASCE.* 1973. V. 99. No. 12. P.2263 — 2271.
- Longuet-Higgins M.S.* (1953) Mass transport in water waves // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* V. 245. P. 535-585.
- Longuet-Higgins M.S.* (1981) On overturning of gravity waves // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1981. V. 376, No. 1766. P. 377-400.
- Longuet-Higgins M.S., Dommermuth D.G.* (2001) Vertical jets from standing waves. II // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 2001. V.457. No. 2013. P.2137-2149
- Longuet-Higgins M.S., Drazen D.A.* (2002) On steep gravity waves meeting a vertical wall: a triple instability // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 466. P. 305–318.
- Martin E., Vega J.M.* (2006) The effect of surface contamination on the drift instability of standing Faraday waves // *J. Fluid Mech.* V.546. P.203-225.
- McEwan A.D., Robinson R.M.* (1975) Parametric instability of internal gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 67. No. 4. P. 667-688.
- Mei C.C., Liu P.L.-F., Carter T.G.* (1972) Mass transport in water waves. – MIT. Dept. Civil Eng. Ralph M. Parsons Lab. Rep. No.146. 287 p.
- Mercer G.N., Roberts A.J.* (1992) Standing waves in deep water: Their stability and extreme form // *Phys. Fluids. A.* 1992. V. 4. No. 2. P. 259- 269.
- Merkli P., Thomann H.* (1975) Transition to turbulence in oscillating pipe flow // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. No. 3. P. 567-575.
- Miles J.W.* (1984) Nonlinear Faraday resonance // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. P. 285-302.
- Miles J.W., Henderson D.* (1990) Parametrically forced surface wave // *Ann. Rev. Fluid Dyn. Palo Alto, Ca.: Annu. Revs Inc.,* 1990. V. 22. P. 143 – 165.

- Muller H. W., Wittmer H., Wagne C., Albers J., Knorr K.* (1997) Analytic stability theory for Faraday waves and the observation of the harmonic surface response // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. No.12. P. 2357-2360.
- Ng C.-O.* (2004) Mass transport and set-ups due to partial standing surface waves in a two-layer viscous system // *J. Fluid Mech.* 2004. V.520. P.297-325.
- Nielsen P.* (1992) Coastal bottom boundary layers and sediment transport. Singapore: World Scientific, 1992. 250 p.
- Noda H.* (1968) A study on mass transport in boundary layers in standing waves // 1968. Proc.11th Int. Conf. Coastal Eng. London. ASCE, Washington, DC, P. 227–247.
- Ockendon I.R., Ockendon H.* (1973) Resonant surface waves // *J.Fluid Mech.* 1973. V.59. No.2. P. 367-413.
- Penney W.G., Price A.T.* (1952) Finite periodic stationary gravity waves in a perfect fluid // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1952. V. 224. No. 882. P. 254-284.
- Perlin M., Schultz W.W.* (2000) Capillary effects on surface waves // *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 2000. V. 32. P. 241-274.
- Potts H.E., Diver D.A.* (2001) Large-amplitude ferrofluid surface waves and jets // *New J. Phys.* 2001. V. 3. P. 7.1-7.14.
- Putnam J.A., Johnson J.W.* (1949) The dissipation of wave energy by bottom friction // *Trans. Amer. Geophys. Union.* 1949. V. 30. No. 1. P. 67 - 74.
- Rayleigh, Lord (Strutt J.W.)* (1915) Deep water waves, progressive or stationary, to the third order of approximation // *Proc. R. Soc. London.* 1915. Ser. A91. P. 345 – 353.
- Rayleigh, Lord. (Strutt J.W.)* (1884) On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A.* V. 175. P. 1-21.
- Saffman P.G., Yuen H.C.* (1979) A note on numerical computations of large amplitude standing waves // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 95. Pt. 4. P. 707-715

- Scherer M.A., Melo F., Marder M.* (1999) Sand ripples in a oscillating annular sand-water cell // *Phys. Fluids*. 1999. Vol.11. No.1. P. 58-67.
- Schultz W.W., Vanden-Broeck J.M., Jiang L., Perlin M.* Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 369. P. 253-272.
- Sekerj-Zenkovich S.Ya., Bordakov G.A., Kalinitchenko V.A., Shingareva I.K.* (1998) Faraday Resonance in water waves at nearly critical depths // *Exp. Therm. Fluid Scie.* 1998. V.18. No. 2. P. 123-133.
- Sekerj-Zenkovich S.Ya., Bordakov G.A., Kalinitchenko V.A., Shingareva I.K.* (1998) Faraday Resonance in water waves at nearly critical depths // *Exp. Therm. Fluid Scie.* 1998. Vol.18. No. 2. P. 123-133.
- Shavit U., Moltchanov S., Agnon Y.* (2003) Particles resuspension in waves using visualization and PIV measurements — coherence and intermittency // *Int. J. Multiphase Flow*. V. 29. P. 1183–1192.
- Simonelli F., Gollub J.P.* (1989) Surface wave mode interactions: effect of symmetry and degeneracy // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 199. P. 471-494.
- Skalak R., Yarymovich M.I.* (1960) Subharmonic oscillations of a pendulum // *J. Appl. Mech.* 1960. V.27. P.159-164.
- Skalak R., Yarymovych M.I.* (1962) Forced large amplitude surface waves. *Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.* 1962. V.2, P.1411-1418.
- Sleath J.F.A.* *Sea Bed Mechanics*. N.Y.: Wiley, 1984. 335 p.
- Stokes G.G.* (1847) On the theory of oscillatory waves // *Trans. Camb. Phil. Soc.* V. 8. P. 441-455; см. также *Math. Phys. Papers*. 1880. V. 1. P. 314-325. Cambridge Univ.Press.
- Stuart J.* (1966) Double boundary layers in oscillatory viscous flow // *J. Fluid Mech.* **24**, 673–687.
- Tadjakhish I., Keller J.B.* (1960) Standing surface waves of finite amplitude // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 8. No. 4. P. 442-451.
- Taylor G.I.* (1953) An experimental study of standing waves // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1953. V. 218. No. 1132. P. 44-59.

- Thorpe S.A.* (1968) On standing internal gravity waves of finite amplitude // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. No. 3. P. 489 - 528.
- Thorpe S.A.* (1969) Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 39. No. 1. P. 25-48.
- Thorpe S.A.* (1987) Transitional phenomena and the development of turbulence in stratified fluids: a review // *J. Geophys.* 1987. V. 92. No. C5. P. 5231-5248.
- Tipton C.R., Mullin T.* (2004) An experimental study of Faraday waves formed on the interface between two immiscible liquids // *Phys. Fluids.* 2004. V. 16. No. 7. P.2336-2341.
- Virnig J.C., Berman A.S., Sethna P.R.* (1988) On three-dimensional nonlinear subharmonic resonant surface waves in a fluid: Part 2 – Experiment // *ASME Trans. J. Applied Mech.* 1988. V. 55. P. 220-224.
- Weddenburn E.M., Williams A.M.* (1911) The temperature seiche // *Trans. Roy. Soc. Edin.* 1911. V. 47. No. 22 (4). P. 619-642.
- Wolf G.W.* (1969) The dynamic stabilization of Rayleigh-Taylor instability and corresponding dynamic equilibrium // *Zeitschrift für Physik.* 1969. V. 227. No. 3. P. 291-300.
- Woods J.D.* (1968) Wave induced shear instability in the summer thermocline // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. No. 4. P. 791 -800.
- Wright J., Yon S., Pozdrikidis C.* (2000) Numerical studies of two-dimensional Faraday oscillations of inviscid fluids // *J. Fluid Mech.* 2000. V.402. P.1-32.
- Xu X., Wiercigroch M.* (2007) Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum // *Nonlinear Dyn.* 2007. V. 47. P. 311–320.
- Yarin A.L.* (2002) Steady streaming and mass transfer due to capillary waves in a two-layer system // *Fluid Dynamics Research.* V.31. No.2. P.79-102.
- Zeff B.W., Kleber B., Fineberg J., Lathrop D.P.* (2000) Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface // *Nature.* 2000. V.403. No. 6768. P.401-404.